LINALYS SKRIFTLIG EKSAMEN JANUAR 2022

1. (a) Bestem en funktion $y\colon \mathbb{R} \to (0,\infty)$ som opfylder

$$y'(x) = \sqrt{y(x)} \cdot x\sin(x^2) \quad \star$$
$$y(0) = 1.$$

VI SER FRA $\star$ AT $y \neq 0$, SÅ VI KAN UDEN VIDERE DIVIDERE MED $y(x)$ OG DERMED SEPARERE DE VARIABLE:

$$y'(x)\frac{1}{\sqrt{y(x)}} = x\sin(x^2)$$

DA $\frac{1}{\sqrt{y}} = y^{-1/2}$ HAR VI AT

$$\int y^{-1/2}\,dy = \int x\sin(x^2)\,dx$$

PÅ HØJRESIDEN BRUGER VI SUBSTITUTIONEN $u = x^2$ SÅ $du = 2x\,dx$, OG VI FÅR DA

$$2y^{1/2} = \frac{-1}{2}\cos(x^2) + C$$

VI INDSÆTTER BETINGELSEN $y(0)=1$:

$$2 = \frac{-1}{2} + C \quad \text{DVS.} \quad C = \frac{5}{2}$$

OG ISOLERER y:

$$2y^{1/2} = \frac{-1}{2}\cos(x^2) + \frac{5}{2}$$

$$\underline{\underline{y(x) = \left(\frac{-1}{4}\cos(x^2) + \frac{5}{4}\right)^2}}, \quad x \in \mathbb{R}$$

HVIS MAN FØRST INDSÆTTER $y(0)=1$ EFTER AT HAVE ISOLERET $y(x)$ FÅR MAN $C = 1/4 \pm 1$. EFTERSOM $\sqrt{(-1/4\cos(x^2) - 3/4)^2} = |-1/4\cos(x^2) - 3/4| = 1/4\cos(x^2) + 3/4$ ER $y = (-1/4\cos(x^2) - 3/4)^2$ IKKE EN LØSNING TIL DIFF. LIGN. IDET HØJRE- OG VENSTRESIDERNE VIL HAVE FORSKELLIGE FORTEGN.

1. (b) Bestem for ethvert $s \in \mathbb{R}$ den funktion $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ som opfylder

$$\begin{aligned} 6y''(x) - y'(x) - y(x) &= 0 \\ y(0) &= s \\ y'(0) &= 0. \end{aligned}$$

FOR AT OMSKRIVE TIL BOGENS FORMAT DIVIDERER VI MED 6: $y''(x) - \frac{1}{6}y'(x) - \frac{1}{6}y(x) = 0$

OG FÅR AT KOEFFICIENTERNE I DEN KARAKTERISTISKE LIGNING TIL $p = q = \frac{-1}{6}$. RØDDERNE FINDES:

$$r = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2} = \frac{1/6 \pm \sqrt{\frac{1}{36} - 4\cdot\left(\frac{-1}{6}\right)}}{2} = \frac{1/6 \pm \sqrt{\frac{25}{36}}}{2} = \frac{\frac{1}{6} \pm \frac{5}{6}}{2} = \begin{cases} 1/2 \\ -1/3 \end{cases}$$

VI ER ALTSÅ I SITUATIONEN T.L. 10.5.3 MED TO REELLE RØDDER, OG LØSNINGEN HAR DERFOR FORMEN

$$y(x) = Ce^{x/2} + De^{-x/3} \quad \left(y'(x) = \frac{C}{2}e^{x/2} - \frac{D}{3}e^{-x/3}\right)$$

RANDBETINGELSERNE INDSÆTTES:

$y(0) = s: \quad s = C + D$

$y'(0) = 0: \quad 0 = \frac{C}{2} - \frac{D}{3}$ DVS. $D = \frac{3}{2}C$

$s = C + D = C + \frac{3}{2}C = \frac{5}{2}C \Rightarrow \boxed{C = \frac{2}{5}s}$

OG DERMED $D = \frac{3}{2}C = \frac{3}{\cancel{2}}\frac{\cancel{2}}{5}s$, DVS $\boxed{D = \frac{3}{5}s}$

LØSNINGEN ER ALTSÅ

$$\underline{y(x) = \frac{2s}{5}e^{x/2} + \frac{3s}{5}e^{-x/3}, \quad x \in \mathbb{R}}$$

2. Lad $T\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ være den lineære funktion givet ved

$$T(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ x_2 - x_3 + x_4 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \end{bmatrix}.$$

(a) Bestem matricen A for T relativ til standardbaserne for $\mathbb{R}^4$ og $\mathbb{R}^3$.

(b) Vis at T er surjektiv, og bestem dimensionen af $\ker(T)$.

MESSER 6.11 ELLER 6.12 GIVER AT

$$A = \begin{bmatrix} | & | & | & | \\ T(\underline{e}_1) & T(\underline{e}_2) & T(\underline{e}_3) & T(\underline{e}_4) \\ | & | & | & | \end{bmatrix}$$

HVOR $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3, \underline{e}_4\}$ ER STANDARDBASEN FOR $\mathbb{R}^4$.

$$T(\underline{e}_1) = T\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},\ T(\underline{e}_2) = T\left(\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix},\ T(\underline{e}_3) = T\left(\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}$$

$$T(\underline{e}_4) = T\left(\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} \quad \text{SÅ} \quad \underline{\underline{A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}}}$$

b) RÆKKEOPERATIONER:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}_{-R_1 - R_2} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

HVORAF VI SER AT RANGEN AF A (OG DERMED T) ER 3
(SE F.EKS. MESSER 5.10 ELLER BRUG 6.26)
VI BRUGER NU MESSER 6.29 (S.276) SOM SIGER AT
T ER SURJEKTIV ("ONTO") HVIS RANGEN AF T ER
LIG MED DIMENSIONEN AF CODOMÆNET (HER $\mathbb{R}^3$).
<u>SÅ T ER SURJEKTIV</u>.

MESSER 6.28 (S. 275) SIGER AT FOR $T: V \to W$ (HVOR
V OG W HAR ENDELIG DIMENSION), ER $\text{rank}(T) + \text{nullity}(T) = \dim(V)$
SÅ $\dim(\ker(T)) = \text{nullity}(T) = \dim(V) - \text{rank}(T) = 4 - 3 = \underline{\underline{1}}$

3. Lad

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Bestem det karakteristiske polynomium for B. Find dernæst en basis for $\mathbb{R}^3$ bestående af egenvektorer for B.

$$\det(\lambda I - A) = \det\left(\begin{bmatrix} \lambda-2 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda-3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda+2 \end{bmatrix}\right)$$

UDVIKLES OMKRING 3. SØJLE:

$$\det(\lambda I - A) = (\lambda+2)\cdot\det\left(\begin{bmatrix} \lambda-2 & 0 \\ -1 & \lambda-3 \end{bmatrix}\right) = (\lambda+2)\left((\lambda-2)(\lambda-3)-0\right)$$

HVORAF RØDDERNE AFLÆSES TIL $\underline{\underline{\lambda_1=-2,\ \lambda_2=2,\ \lambda_3=3}}$

BASISVEKTORERNE BESTEMMES SOM I EKSEMPLET PÅ SIDE 336 I MESSER:

$\underline{\lambda_1=-2}$: $\begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ -1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ -\frac{1}{4}R_1 \\ \\ \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \cdot -\frac{1}{4} \\ \cdot -\frac{1}{5} \\ \\ \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ SÅ $\underset{\sim}{b}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\underline{\lambda_2=2}$: $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot(-1) \\ \cdot \frac{1}{4} \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ SÅ $\underset{\sim}{b}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\underline{\lambda_3=3}$: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ +R_2 \\ \cdot \frac{1}{5} \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ SÅ $\underset{\sim}{b}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\{\underset{\sim}{b}_1, \underset{\sim}{b}_3, \underset{\sim}{b}_3\} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ ER EGENVEKTORER FOR B. DA DE TILHØRENDE EGENVÆRDIER ER FORSKELLIGE, ER EGENVEKTORERNE LIN. UAFH. (MESSER 8.14). DA DER OGSÅ ER DET RETTE ANTAL ER DE EN BASIS.

4. Betragt for alle reelle tal s og t det lineære ligningssystem

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & s \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ t \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Find samtlige løsninger til ligningssystemet, hvis $s = 1$ og $t = -2$.

a)
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ +R_1 \\ -R_1 \end{array} \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & -1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ -2R_2 \end{array} \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -6 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \cdot -1/6 \end{array} \rightsquigarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1/6 \end{array}\right] \begin{array}{l} -R_3 \\ -2R_3 \\ \\ \end{array} \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 7/6 \\ 0 & 1 & 0 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1 & -1/6 \end{array}\right]$$

LØSNINGEN ER DA $\underline{\underline{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7/6 \\ -2/3 \\ -1/6 \end{bmatrix}}}$

b) VI SKAL NU BESTEMME DE VÆRDIER AF s OG t, HVOR LIGNINGSSYSTEMET HAR UENDELIG MANGE LØSNINGER OG s OG t SÅ DER INGEN LØSNINGER ER:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & s & 1 \\ -1 & 1 & 1 & t \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ +R_1 \\ -R_1 \end{array} \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & s & 1 \\ 0 & 1 & s+1 & t+1 \\ 0 & 2 & -1-s & -1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ -2R_2 \end{array} \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & s & 1 \\ 0 & 1 & s+1 & t+1 \\ 0 & 0 & -3s-3 & -2t-3 \end{array}\right]$$

AF 3. RÆKKE SES AT LIGNINGSSYSTEMET HAR NETOP ÉN LØSNING HVIS $-3s-3 \neq 0$, DVS $s \neq -1$, IDET MAN SÅ KAN REGNE VIDERE SOM I (a).

FOR $s=-1$ ER DET TO MULIGHEDER AFHÆNGIG AF VÆRDIEN AF t:

- HVIS $-2t-3=0$, DVS $t = \frac{-3}{2}$, ER 3. RÆKKE EN NULRÆKKE OG LIGNINGSSYSTEMET VIL HAVE UENDELIGT MANGE LØSNINGER.
- HVIS $-2t-3 \neq 0$ GIVER 3. RÆKKE EN MODSTRID, IDET HØJRESIDEN ER NUL OG VENSTRESIDEN ER FORSK. FRA NUL.

KONKLUSION: – UENDELIGT MANGE LØSNINGER FOR $s=-1$, $t=-3/2$
– INGEN LØSNINGER FOR $s=-1$, $t \neq -3/2$

5. Undersøg om følgende grænseværdi eksisterer og bestem den i så fald med en passende metode

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(\sin(x))}{\ln(\cos(x))}.$$

VI OBSERVERER AT BÅDE TÆLLER OG NÆVNER ER NUL FOR X=0 OG UNDERSØGER OM L'HÔPITALS REGEL KAN BRUGES:

$f(x) = 1-\cos(\sin(x))$ $\qquad f(0) = 1-\cos(0) = 0$

$g(x) = \ln(\cos(x))$ $\qquad g(x) = \ln(1) = 0$

$f'(x) = \sin(\sin(x))\cdot\cos(x)$ $\qquad f'(0) = \sin(0)\cdot\cos(0) = 0$

$g'(x) = \frac{1}{\cos(x)}\cdot(-\sin(x)) = -\tan(x)$ $\qquad g'(0) = -\tan(0) = 0$

VI SER AT DER STADIG ER TALE OM ET "0/0-UDTRYK" OG FORSØGER DERFOR MED L'HÔPITAL IGEN:

$f''(x) = \cos(\sin(x))\cdot\cos^2(x) + \sin(\sin(x))\cdot(-\sin(x))$

$f''(0) = \cos(0)\cdot\cos^2(0) - \sin(0)\cdot\sin(0) = 1$

$g''(x) = \frac{-1}{\cos^2(x)}(-\sin(x))^2 + \frac{1}{\cos(x)}(-\cos(x)) = \frac{-\sin^2(x)}{\cos^2(x)} - 1$

(DET ER OGSÅ OK AT BRUGE AT $\tan'(x) = 1+\tan^2 x$ UANSET OM KAN HUSKE DET ELLER SLÅR DET OP)

$g''(0) = -\tan^2(0) - 1 = -1$

VI SER AT $\lim_{x\to 0}\frac{f''(x)}{g''(x)}$ EKSISTERER OG AT $g(x) \neq 0$ FOR $x \neq 0$.

L'HÔPITALS REGEL (T.L. 6.3.2) GIVER NU AT

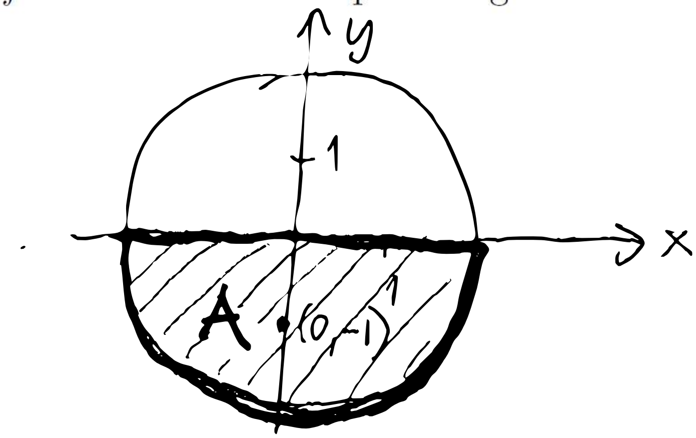
$$\underline{\underline{\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{f''(x)}{g''(x)} = \frac{1}{-1} = -1}}$$

6. Betragt funktionen $f(x, y) = x^2 + (y+1)^2$ defineret på mængden

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq 0,\ x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

(a) Argumentér for at f har et maksimum på mængden A.

SKITSE AF A:



EKSTEMALVÆRDISÆTNINGEN T.R. 2.42 ANVENDES:

- $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ER LUKKET IDET DER I DEFINITIONEN ANVENDES "$\leq$", SÅ A INDEHOLDER SINE RANDPUNKTER
- A ER BEGRÆNSET IDET A F.EKS. KAN INDEHOLDES I EN CIRKEL MED RADIUS 3 (ETHVER TAL STØRRE END 2 KAN BRUGES)
- $f: A \to \mathbb{R}$ ER KONTINUERT FORDI DEN ER SUMMEN AF SIMPLE FUNKTIONER DER SELV ER KONTINUERTE

DERMED GIVER EKSTREMALVÆRDISÆTNINGEN AT f HAR BÅDE MINIMUM OG MAKSIMUM PÅ A.

(b) SMUTVEJ: $f(x,y)$ ER KVADRATET PÅ DEN ALM. (EUKLIDISKE) AFSTAND MELLEM PUNKTET $(0,-1)$ OG (x,y).
DENNE AFSTAND ER OPLAGT MINIMAL I $(0,-1)$, NEMLIG NUL, OG ANTAGER MAKSIMALVÆRDIEN $\sqrt{5}$ I TO PUNKTER, NEMLIG $(-2,0)$ OG $(2,0)$.
$f(x,y)$ HAR DERFOR MAKSIMUM 5 I $(x,y) = (\pm 2, 0)$. FÆRDIG!

6. (b) Bestem maksimumsværdien for f på mængden A og angiv alle punkter i A hvor denne værdi antages.

HER LØSES OPGAVEN PÅ DEN ORDINÆRE MÅDE:

VI BRUGER T.K. 3.2 S. 111:

(i) RANDPUNKTER

VANDRET DEL AF RAND: $y=0$ SÅ $f(x,0)=x^2+1$, $-2 \leq x \leq 2$

VI KUNNE BESTEMME f' MED f OPFATTET SOM EN FUNKTION AF EEN VARIABEL, SÆTTE LIG NUL OSV., MEN DET ER OGSÅ OK AT BLOT KONSTATERE AT $f(2,0)=f(-2,0)=5$ ER MAKSIMUM FOR DEN VANDRETTE DEL AF RANDEN.

($f(0,0)=1$ ER MINIMUM, MEN DET SPØRGES DER IKKE TIL)

BUET RAND: PÅ DEN BUEDE DEL AF RANDEN ER $x^2+y^2=4$ SÅ $x^2=4-y^2$ SÅ VI KAN OPFATTE f SOM EN FUNKTION AF y: $f(y)=4-y^2+(y+1)^2=4-y^2+y^2+2y+1=2y+5$ HVOR $-2 \leq y \leq 0$. DENNE HAR OPLAGT MINIMUM 1 FOR $y=-2$ OG MAKSIMUM 5 FOR $y=0$. PUNKTERNE MED $y=0$ ER $(-2,0)$ OG $(2,0)$ OG VI FANDT DEM OGSÅ OVENFOR.

MAN KAN OGSÅ BRUGE LAGRANGEMULTIPLIKATOR-METODEN (SE NÆSTE SIDE).

(ii) SINGULÆRE PUNKTER

$\underline{\nabla} f=(2x, 2(y+1))$ EKSISTERER OVERALT, SÅ VI FÅR INGEN KANDIDATER TIL MIN/MAX-PUNKTER HERFRA.

(iii) STATIONÆRE PUNKTER

$$\underline{\nabla} f=\underline{0} \quad \left.\begin{aligned} 2x=0 &\Rightarrow x=0 \\ 2(y+1)=0 &\Rightarrow y=-1 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &(x,y)=(0,-1) \text{ ER KANDIDAT} \\ &\text{TIL MIN/MAX-PKT: } f(0,-1)=0 \end{aligned}$$

KONKLUSION: f HAR MAKSIMUM I $(\pm 2,0)$ MED VÆRDI 5.

ALTERNATIV FREMGANGSMÅDE I 6b:

LAD OS BESTEMME MIN/MAX-PUNKTER PÅ DEN BUEDE DEL AF RANDEN VED HJÆLP AF LAGRANGEMULTIPLIKATORMETODEN:

$\underline{\nabla} f = (2x, 2(y+1))$

BIBETINGELSEN ER $g(x,y) = x^2 + y^2 = 4$

$\underline{\nabla} g = (2x, 2y)$

VI BRUGER TK 4.2 s. 138:

I ET EKSTREMUMSPUNKT a ER $\underline{\nabla} g(a) = 0$ ELLER $\underline{\nabla} f(a) = \lambda \underline{\nabla} g(a)$

- $\underline{\nabla} g = 0$ OPFYLDES KUN FOR $(x,y) = (0,0)$. HER ER $f(0,0) = 1$
- $\underline{\nabla} f(x,y) = \lambda \underline{\nabla} g(x,y)$: $2x = \lambda 2x$ SOM GIVER $x=0 \vee \lambda = 1$
  - FOR $x=0$ GIVER $x^2+y^2=4$ AT $y = \pm 2$, HVOR KUN $(0,-2)$ TILHØRER A. HER ER $f(0,-2) = 1$
  - FOR $\lambda = 1$ REGNES VIDERE:

    $2y = \lambda 2(y+1) \Rightarrow y = y+1$

    SOM IKKE HAR NOGEN LØSNINGER

DE ENESTE KANDIDATER TIL EKSTREMUMSPUNKTER PÅ DEN BUEDE DEL AF RANDEN ER DERFOR $(0,0)$ MED VÆRDIEN 1 OG $(0,-2)$ LIGELEDES MED VÆRDI 1 SAMT ENDEPUNKTERNE $(\pm 2, 0)$ SOM VI ALLEREDE HAR UNDERSØGT.