Vejledende besvarelse til skriftlig eksamen i LinAlys, 28. januar 2023

1. (a) Bestem en funktion $y\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ som opfylder

$$y'(x) - \sqrt{x}y(x) = \sqrt{x}$$
$$y(1) = 0.$$

FØRST EN OMSKRIVNING: $y'(x) = \sqrt{x} + \sqrt{x}\,y(x) = \sqrt{x}\,(1+y(x))$

FOR $y(x) \neq -1$ KAN VI SEPARERE DE VARIABLE:

$$\int \frac{1}{1+y}\,dy = \int \sqrt{x}\,dx$$

DA VI HAR GIVET AT LØSNINGEN SKAL OPFYLDE $y(1)=0$ VÆLGER VI AT BEGRÆNSE OS TIL $y>-1$ OG FÅR DA

$$\ln(1+y) = \frac{2}{3}x^{3/2} + C$$

VED INDSÆTTELSE AF $y(1)=0$ FÅS $\ln(1+0) = \frac{2}{3}\cdot 1^{3/2} + C$

DVS $C = -2/3$, SÅ LØSNINGEN BLIVER

$$y(x) = \exp\left(\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{2}{3}\right) - 1 \quad , x \in \mathbb{R}$$

MAN KAN OGSÅ LØSE OPGAVEN VED HJÆLP AF TL 10.3.1

$$y' + f(x)y = g(x)$$

MED $f(x) = -\sqrt{x}$ OG $g(x) = \sqrt{x}$

VI HAR DA A $F(x) = \frac{-2}{3}x^{3/2}$ OG FÅR

$$y(x) = e^{-F(x)}\left(\int g(x)e^{F(x)}\,dx + D\right) = e^{\frac{2}{3}x^{3/2}}\left(\int x^{1/2}e^{-\frac{2}{3}x^{3/2}}\,dx + D\right)$$

INTEGRALET BEREGNES MED SUBSTITUTIONEN $u = \frac{-2}{3}x^{3/2}$

$$y(x) = e^{2/3\,x^{3/2}}\left(D - e^{-2/3\,x^{3/2}}\right)$$

. INDSÆTTELSE AF $y(1)=0$ GIVER DA $D = e^{-2/3}$ OG DERMED SAMME LØSNING SOM OVENFOR.

1. (b) Bestem for ethvert $s \in \mathbb{R}$ den funktion $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ som opfylder

$$\begin{aligned} 8y''(x) - 6y'(x) + y(x) &= 0 \\ y(0) &= 0 \\ y'(0) &= s. \end{aligned}$$

VI OMSKRIVER FØRST TIL BOGENS FORM VED AT DELE MED 8:

$$y''(x) - \frac{3}{4}y'(x) + \frac{1}{8}y(x) = 0$$

DEN KARAKTERISTISKE LIGNINGS KOEFFICIENTER ER DA

$$p = \frac{-3}{4} \quad \text{OG} \quad q = \frac{1}{8}$$

VI BESTEMMER RØDDERNE r:

$$r = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2} = \frac{\frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{16} - \frac{8}{16}}}{2} = \frac{\frac{3}{4} \pm \frac{1}{4}}{2} = \begin{cases} 1/2 \\ 1/4 \end{cases}$$

MED TO REELLE RØDDER BRUGER VI T.L. 10.5.3 OG OPSKRIVER LØSNINGEN SOM $y(x) = Ce^{x/2} + De^{x/4}$

(OG DERMED $y'(x) = \frac{C}{2}e^{x/2} + \frac{D}{4}e^{x/4}$)

VI BRUGER RANDBETINGELSERNE:

$y(0) = 0$: $0 = C + D$ DVS. $D = -C$

$y'(0) = s$: $s = \frac{C}{2} + \frac{D}{4}$ DVS. $s = \frac{C}{2} - \frac{C}{4} = \frac{C}{4}$

SÅ $C = 4s$ OG $D = -4s$

LØSNINGEN ER DA

$$\underline{\underline{y(x) = 4s\left(e^{x/2} - e^{x/4}\right)}} \quad , x \in \mathbb{R}$$

2. Lad $T\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ være den lineære funktion givet ved

$$T(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 + 2x_4 \\ x_2 - x_3 + x_4 \\ x_1 + x_3 + x_4 \end{bmatrix}.$$

(a) Bestem matricen for T relativ til standardbaserne for $\mathbb{R}^4$ og $\mathbb{R}^3$.

FRA MESSER 6.11 / 6.12 HAR VI AT MATRICEN A HØRENDE TIL T ER

$$A = \begin{bmatrix} T(e_1) & T(e_2) & T(e_3) & T(e_4) \end{bmatrix}$$

HVOR $\{e_i\}$ ER STANDARDBASEN FOR $\mathbb{R}^4$

VI FÅR DA

$$\underline{\underline{A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}}}$$

(b) Vis at rangen af T er 2, og bestem en basis for $\mathrm{im}(T)$.

RANGEN AF T ER rank(A)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ OMBYTTER } R_1 \text{ OG } R_3 \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} -R_1-R_2$$

$$\rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ DVS. 2 LEDENDE INDGANGE}$$

<u>RANGEN AF T ER DERFOR 2</u>

DA A PÅ REDUCERET RÆKKE-ECHELONFORM HAR LEDENDE INDGANGE I 1. OG 2. SØJLE, KAN VI BRUGE A'S FØRSTE OG ANDEN SØJLE SOM BASIS FOR im(T), ALTSÅ:

$$\underline{u}_1' = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \underline{u}_2' = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ER EN BASIS FOR im(T).

DENNE BASIS ER IKKE ENTYDIG, OG MAN KUNNE OGSÅ VÆLGE TO PASSENDE VEKTORER $\underline{v}_1$ OG $\underline{v}_2$ I $\mathbb{R}^4$ SOM OPFYLDER AT $T(\underline{v}_1)$ OG $T(\underline{v}_2)$ ER LINEÆRT UAFHÆNGIGE.
DE VIL OPLAGT TILHØRE im(T) OG DA RANGEN AF T ER 2 PASSER ANTALLET OGSÅ: $T(\underline{v}_1)$ OG $T(\underline{v}_2)$ VIL DA VÆRE BASIS TO im(T).

3. Lad $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$ være den lineære operator givet ved

$$(Tp)(x) = xp'(x) - p'(x),$$

hvor $\mathbb{P}_2$ som sædvanlig betegner vektorrummet at polynomier af grad højst 2.

Bevis at polynomierne $p_1(x) = 1$, $p_2(x) = x - 1$ og $p_3(x) = x^2 - 2x + 1$ er egenvektorer for T, og bestem de tilhørende egenværdier.

Bestem dernæst det karakteristiske polynomium for T.

AT p_i ER EGENVEKTOR FOR T BETYDER AT $Tp_i = \lambda_i p_i$ FOR EN EGENVÆRDI λ_i.

VI BESTEMMER $p_1'(x) = 0$, $p_2'(x) = 1$ OG $p_3'(x) = 2x - 2$ OG INDSÆTTER:

$Tp_1 = x \cdot 0 - 0 = 0$ DVS. p_1 ER EGENVEKTOR MED $\lambda_1 = 0$.

$Tp_2 = x \cdot 1 - 1 = x - 1 = p_2$ SÅ p_2 ER EGENVEKTOR M. $\lambda_2 = 1$.

$Tp_3 = x(2x-2) - (2x-2) = 2x^2 - 4x + 2 = 2(x^2 - 2x + 1) = 2p_3$

DVS. p_3 ER EGENVEKTOR MED $\lambda_3 = 2$

VI HAR FUNDET TRE EGENVÆRDIER (OG -VEKTORER), OG DA $\dim(\mathbb{P}_2) = 3$ ER DER IKKE FLERE.

DET KARAKTERISTISKE POLYNOMIUM DANNES FRA EGENVÆRDIERNE:

$$(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3)$$

DVS $\underline{\underline{\lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2)}}$

ALTERNATIV (MEN IKKE SÅ ELEGANT) LØSNING:

VED HJÆLP AF STANDARDBASEN FOR $\mathbb{P}_2$, $B = \{1, x, x^2\}$ $\underline{u}_1\ \underline{u}_2\ \underline{u}_3$

OPSKRIVES MATRICEN A FOR T:

$T(\underline{u}_1) = 0$

$T(\underline{u}_2) = x - 1$

$T(\underline{u}_3) = 2x^2 - 2x$

DVS

$$A = \begin{bmatrix} | & | & | \\ T(\underline{u}_1) & T(\underline{u}_2) & T(\underline{u}_3) \\ | & | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$ (MESSER 6.12)

VED AT SKRIVE KOORDINATERNE OP FOR P_1, P_2 OG P_3:

$$[P_1]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad [P_2]_B = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad [P_3]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

KAN DET MED MATRIXMULTIPLIKATION VISES AT

$$A[P_1]_B = \lambda_1 \cdot [P_1]_B \;,\; A[P_2]_B = \lambda_2 \cdot [P_2]_B \;,\; A[P_3]_B = \lambda_3 \cdot [P_3]_B$$

HVOR $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ OG $\lambda_3 = 2$.

DA $\dim(\mathbb{P}_2) = 3$ ER DER IKKE YDERLIGERE EGENVÆRDIER ELLER MULTIPLICITET.

HEREFTER OPSKRIVES DET KARAK. POLYNOMIUM

SOM $\underline{\underline{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)}}$

(DENNE METODE VILLE VÆRE MERE OPLAGT HVIS EGEN-VEKTORERNE IKKE ALLEREDE VAR GIVET I OPGAVEN)

4. Betragt for alle $s \in \mathbb{R}$ det lineære ligningssystem

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ s & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ s \end{bmatrix}.$$

(a) Bestem for $s = 1$ samtlige løsninger til ligningssystemet.

FOR $S=1$ ER LIGNINGSSYSTEMET REPRÆSENTERET VED

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ -R_1 \\ -2R_1 \\ -R_1 \end{array} \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \cdot(-1) \\ \cdot(-1) \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ -3R_4 \\ \\ \end{array} \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} -R_3-2R_4 \\ +R_3+R_4 \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \quad \text{SÅ} \quad \underline{\underline{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}}$$

(HVILKET IKKE ER DYBT OVERRASKENDE NÅR VI KAN SE AT SUMMEN AF 2. OG 3. SØJLE I DEN OPRINDELIGE KOEFFICIENTMATRIX ER LIG VÆRDIERNE I VEKTOREN PÅ HØJRE SIDE.

4. (b) Bestem for hvert $s \in \mathbb{R}$, hvor mange løsninger ligningssystemet har.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ s & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & s & s \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ -R_1 \cdot s \\ -2R_1 \\ -R_1 \end{array} \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -s & 1-2s & 1-s \\ 0 & 0 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & s-2 & s-1 \end{array}\right]$$

FOR S=2 BLIVER NEDERSTE RÆKKE $[0\ 0\ 0\ 0 \mid 1]$ SVARENDE TIL $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 1$ HVILKET IKKE KAN OPFYLDES, SÅ I DETTE TILFÆLDE ER DER INGEN LØSNINGER TIL LIGNINGSSYSTEMET.

FOR $S \neq -2$ KAN VI DIVIDERE RÆKKE 4 MED $S-2$:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -s & 1-2s & 1-s \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{s-1}{s-2} \end{array}\right]$$

HVORAF MAN KAN SE AT DER ER EN ENTYDIG LØSNING (SOM NATURLIGVIS VIL AFHÆNGE AF S) FOR $S \neq 2$

5. Undersøg om følgende grænseværdi eksisterer og bestem den i så fald

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin x - x} - 1}{\ln(x+1) - x}.$$

VI DEFINERER $T(x) = e^{\sin x - x} - 1$ (T FOR "TÆLLER")

$N(x) = \ln(x+1) - x$ (N FOR "NÆVNER")

FOR $x \to 0$ SER VI AT $T(x) \to 0$ OG $N(x) \to 0$ SÅ VI FORSØGER AT BRUGE L'HÔPITALS REGEL FOR ET "0/0-UDTRYK"

$T'(x) = e^{\sin x - x} \cdot (\cos x - 1)$, $T'(x) \to 0$ FOR $x \to 0$

$N'(x) = \dfrac{1}{x+1} - 1$, $N'(x) \to 0$ FOR $x \to 0$

$T''(x) = e^{\sin x - x} \cdot (\cos x - 1)^2 - e^{\sin x - x} \cdot \sin(x)$

$T''(x) \to 0$ FOR $x \to 0$

$N''(x) = \dfrac{-1}{(x+1)^2}$ $N''(x) \to -1$ FOR $x \to 0$

VI SER AT

$$\lim_{x\to 0} \frac{T''(x)}{N''(x)} = 0$$

OG BRUGER L'HÔPITALS REGEL, DER SIGER AT HVIS $\lim_{x\to 0} \frac{T''(x)}{N''(x)}$ EKSISTERER, SÅ ER

$$\underline{\underline{\lim_{x\to 0} \frac{T(x)}{N(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{T''(x)}{N''(x)} = 0}}$$

(TK 6.3.2 ANVENDT TO GANGE)

6. Betragt funktionen

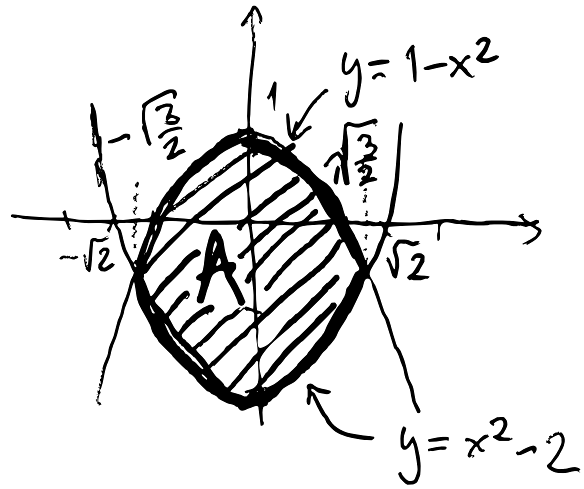
$$f(x,y) = e^{x^2+y}$$

defineret på mængden

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 2 \leq y \leq 1 - x^2\}.$$

(a) Argumenter for, at f antager både maksimum og minimum på mængden A.

FØRST SKITSERES A:



DE TO DELE AF RANDEN SKÆRER HVOR

$x^2 - 2 = 1 - x^2$

$2x^2 = 3$

$x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$

VI ANVENDER EKSTREMALVÆRDISÆTNINGEN (T.K 2.42)

- $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ER LUKKET IDET DER I DEFINITIONEN KUN BRUGES "$\leq$", HVORVED A INDEHOLDER SINE RANDPKT.
- A ER BEGRÆNSET. A ER INDEHOLDT I ENHVER CIRKEL OMKRING (0,0) MED RADIUS STØRRE END 2.
- $f: A \to \mathbb{R}$ ER KONTINUERT DA DEN ER OPBYGGET AF SIMPLE FUNKTIONER DER I SIG SELV ER KONTINUERTE OVERALT.

EKSTREMALSÆTNINGEN GARANTERER DERMED AT f ANTAGER SÅVEL MINIMUM SOM MAKSIMUM PÅ A.

(b) Bestem maksimumsværdi og minimumsværdi for f på mængden A og angiv alle punkter i A hvor disse antages.

VI BRUGER T.K 3.2 (I OMVENDT RÆKKEFØLGE)

(iii) STATIONÆRE PUNKTER:

$\nabla f = \left(2xe^{x^2+y}, e^{x^2+y}\right)$. $\nabla f = 0$ HAR INGEN LØSNINGER DA $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \neq 0$ OVERALT. SÅ DER ER INGEN STATIONÆRE PKT.

(ii) SINGULÆRE PUNKTER ER DER HELLER INGEN AF DA ∇f EKSISTERER OVERALT.

(iii) RANDEN: ØVRE RAND: $y = 1-x^2$. HER ER

$f(x,y) = e^{x^2+y} = e^{x^2+1-x^2} = e^1$

DVS AT f ER KONSTANT $f=e$ HER

NEDRE RAND: $y = x^2-2$

$f(x,y) = e^{x^2+y} = e^{x^2+x^2-2} = e^{2x^2-2}$

DA EKSPONETIALFUNKTIONEN ER MONOTONT VOKSENDE, ER f STØRST (HHV. MINDST) NÅR ARGUMENTET $2x^2-2$ ER STØRST (HHV. MINDST)

STØRST: $x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$ GIVER $f = e$ SOM VI ALLEREDE HAR SET FOR ØVRE RAND

MINDST: $x = 0$ (HVOR $y=-2$) GIVER $(0,-2) = e^{-2}$

(MAN KAN OGSÅ FINDE HVOR $f'(x)=0$)

KONKLUSION:
- f ANTAGER SIN MINIMUMSVÆRDI PÅ A I PUNKTET $(x,y)=(0,-2)$ MED $f(0,-2)=e^{-2}$ OG
- f ANTAGER MAKSIMUMSVÆRDI PÅ A LANGS HELE DEN ØVRE DEL AF RANDEN, $y = 1-x^2$, $-\sqrt{3/2} \leq x \leq \sqrt{3/2}$ MED MAX-VÆRDI e.

ALTERNATIV LØSNING TIL 6b) VHA LAGRANGEMULTIPLIKATORMETODEN. $\underline{\nabla}f = (2xe^{x^2+y}, e^{x^2+y})$

NEDRE RAND: BIBETINGELSE $g(x,y) = x^2 - y = 2$

$\underline{\nabla}g = (2x, -1)$

V.H.A T.K. S. 138

I ET EKSTREMUMSPUNKT $\underline{a}$ ER $\underline{\nabla}f = \lambda\underline{\nabla}g$ ELLER $\underline{\nabla}g(\underline{a}) = 0$

- $\underline{\nabla}g(\underline{a}) = 0$ OPFYLDES IKKE NOGET STED
- $\underline{\nabla}f(\underline{a}) = \lambda \cdot \underline{\nabla}g(\underline{a})$ (HVOR $\lambda \neq 0$) GIVER

$$2xe^{x^2+y} = \lambda \cdot 2x \Rightarrow e^{x^2+y} = \lambda \text{ ELLER } x=0$$

OG

$$e^{x^2+y} = \lambda(-1) \quad = \quad e^{x^2+y} = -\lambda$$

DA $e^{x^2+y} = \lambda$ OG $e^{x^2+y} = -\lambda$ IKKE KAN OPFYLDES SAMTIDIGT, ER DET KUN MULIGHEDEN $x=0$ DER KAN GIVE EN LØSNING. HER ER $y=-2$, OG λ KAN DA VÆLGES TIL $-e^{x^2+y} = -e^{0^2-2} = -e^{-2}$ SÅ

$$\underline{\nabla}f = \lambda\underline{\nabla}g.$$

VI FINDER SÅLEDES DET MULIGE EKSTREMUMSPUNKT $(x,y) = (0,-2)$ LIGESOM PÅ FORRIGE SIDE.

ØVRE RAND: BIBETINGELSE $g(x,y) = y + x^2 = 1$

$\underline{\nabla}g = (2x, 1)$.

SAMME TRIN SOM OVENFOR, MEN $\underline{\nabla}f(\underline{a}) = \lambda\underline{\nabla}g(\underline{a})$ GIVER $2xe^{x^2+y} = 2\lambda x$ OG $e^{x^2+y} = \lambda$ OG DA $x^2+y=1$ ER DETTE OPFYLDT MED $\lambda = e$ OVERALT PÅ ØVRE RAND. SOM VIST PÅ FORRIGE SIDE ER VÆRDIEN AF f HER e.