LinAlys, eksamen 27. januar 2022.

Opgavesættet stilles til løsning over 3 timer. Der gives ekstra 15 minutter til at håndtere evt. indskanning og elektronisk aflevering af opgaverne.

Lad meget gerne besvarelsen følge opgavesættets rækkefølge, og markér ellers tydeligt hvilken opgave den enkelt side vedrører. Kun PDF-filer kan afleveres. Håndskrevne skannede besvarelser modtages på lige fod med besvarelser indskrevet i et tekstbehandlingsprogram, indskrevet i LaTeX / Python eller lignende, så længe kvaliteten er god nok til at besvarelsen er tydeligt læselig. Ved aflevering af håndskrevne skannede besvarelser bedes den originale håndskrevne gemmes indtil endelig karakter er modtaget.

Bøger, noter, tidligere opgaver, og CAS-værktøjer (inkl. Python på computer) må anvendes, men det er ikke tilladt at lave søgninger eller at kommunikere med andre (analogt eller digitalt) på nogen som helst måde under eksamen.

Alle besvarelser skal være detaljerede og indeholde de argumenter, mellemregninger, og gerne henvisninger til undervisningsmaterialet (TL, TK og Messer) der er nødvendige for at tankegangen bag løsningen klart fremgår. Der gives få eller ingen point for ubegrundede besvarelser eller for en henvisning til en udregning udført ved hjælp at CAS-værktøjer.

Hvert af de 10 delspørgsmål tæller 10%.

1.

(a) Bestem en funktion $y\colon \mathbb{R} \to (0,\infty)$ som opfylder

$$\begin{aligned} y'(x) &= \sqrt{y(x)} \cdot x \sin(x^2) \\ y(0) &= 1. \end{aligned}$$

(b) Bestem for ethvert $s \in \mathbb{R}$ den funktion $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ som opfylder

$$\begin{aligned} 6y''(x) - y'(x) - y(x) &= 0 \\ y(0) &= s \\ y'(0) &= 0. \end{aligned}$$

2. Lad $T\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ være den lineære funktion givet ved

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ x_2 - x_3 + x_4 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \end{bmatrix}.$$

(a) Bestem matricen A for T relativ til standardbaserne for $\mathbb{R}^4$ og $\mathbb{R}^3$.

(b) Vis at T er surjektiv, og bestem dimensionen af $\ker(T)$.

3. Lad

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Bestem det karakteristiske polynomium for B. Find dernæst en basis for $\mathbb{R}^3$ bestående af egenvektorer for B.

4. Betragt for alle reelle tal s og t det lineære ligningssystem

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & s \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ t \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Find samtlige løsninger til ligningssystemet, hvis $s = 1$ og $t = -2$.

(b) Bestem de værdier af s og t, hvor ligningssystemet har uendelig mange løsninger. Bestem dernæst de værdier af s og t for hvilke ligningssystemet ingen løsninger har.

5. Undersøg om følgende grænseværdi eksisterer og bestem den i så fald med en passende metode

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos(\sin(x))}{\ln(\cos(x))}.$$

6. Betragt funktionen $f(x, y) = x^2 + (y + 1)^2$ defineret på mængden

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq 0,\ x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

(a) Argumentér for at f har et maksimum på mængden A.

(b) Bestem maksimumsværdien for f på mængden A og angiv alle punkter i A hvor denne værdi antages.