LinAlys, eksamen lørdag d. 28. januar 2023.

Opgavesættet stilles til løsning over 3 timer.

Bøger, noter, tidligere opgaver, og CAS-værktøjer (inkl. Python på computer) må anvendes, men det er ikke tilladt at lave søgninger eller at kommunikere med andre (analogt eller digitalt) på nogen som helst måde under eksamen.

Alle besvarelser skal være detaljerede og indeholde de argumenter, mellemregninger, og gerne henvisninger til undervisningsmaterialet (TL, TK og Messer) der er nødvendige for at tankegangen bag løsningen klart fremgår. Der gives få eller ingen point for ubegrundede besvarelser eller for en henvisning til en udregning udført ved hjælp at CAS-værktøjer.

Hvert af de 10 delspørgsmål tæller 10%.

1.

(a) Bestem en funktion $y\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ som opfylder

$$\begin{aligned} y'(x) - \sqrt{x}y(x) &= \sqrt{x} \\ y(1) &= 0. \end{aligned}$$

(b) Bestem for ethvert $s \in \mathbb{R}$ den funktion $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ som opfylder

$$\begin{aligned} 8y''(x) - 6y'(x) + y(x) &= 0 \\ y(0) &= 0 \\ y'(0) &= s. \end{aligned}$$

2.

Lad $T\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ være den lineære funktion givet ved

$$T(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 + 2x_4 \\ x_2 - x_3 + x_4 \\ x_1 + x_3 + x_4 \end{bmatrix}.$$

(a) Bestem matricen for T relativ til standardbaserne for $\mathbb{R}^4$ og $\mathbb{R}^3$.

(b) Vis at rangen af T er 2, og bestem en basis for $\mathrm{im}(T)$.

3.

Lad $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$ være den lineære operator givet ved

$$(Tp)(x) = xp'(x) - p'(x),$$

hvor $\mathbb{P}_2$ som sædvanlig betegner vektorrummet at polynomier af grad højst 2.

Bevis at polynomierne $p_1(x) = 1$, $p_2(x) = x - 1$ og $p_3(x) = x^2 - 2x + 1$ er egenvektorer for T, og bestem de tilhørende egenværdier.

Bestem dernæst det karakteristiske polynomium for T.

4.

Betragt for alle $s \in \mathbb{R}$ det lineære ligningssystem

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ s & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ s \end{bmatrix}.$$

(a) Bestem for $s = 1$ samtlige løsninger til ligningssystemet.

(b) Bestem for hvert $s \in \mathbb{R}$, hvor mange løsninger ligningssystemet har.

5.

Undersøg om følgende grænseværdi eksisterer og bestem den i så fald

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin x - x} - 1}{\ln(x+1) - x}.$$

6.

Betragt funktionen

$$f(x,y) = e^{x^2+y}$$

defineret på mængden

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 2 \leq y \leq 1 - x^2\}.$$

(a) Argumenter for, at f antager både maksimum og minimum på mængden A.

(b) Bestem maksimumsværdi og minimumsværdi for f på mængden A og angiv alle punkter i A hvor disse antages.