笔记前言：

本笔记的内容是去掉步骤的概述后，视频的所有内容。

本猴觉得，自己的步骤概述写的太啰嗦，大家自己做笔记时，

应该每个人都有自己的最舒服最简练的写法，所以没给大家写。

再是本猴觉得，不给大家写这个概述的话，大家会记忆的更深，

掌握的更好！

所以老铁！一定要过呀！不要辜负本猴的心意！~~~

【祝逢考必过，心想事成~~~~】

【一定能过！！！！！】

1/7 古典概型

例1. 同事傻狍子和我打赌输了，按照约定，我可以从他钱包里随机摸3张钱给自己，已知他钱包里有5张100元的，3张10元的，2张5元的，那么我摸到3张100的概率是多少？

100	100	100	100	100	10	10	10	5	5

$$P\{摸出3张100元\}=\frac{C_5^3}{C_{10}^3}=\frac{10}{120}=\frac{1}{12}$$

$$C_5^3=\frac{5!}{3!\cdot(5-3)!}=\frac{5!}{3!\cdot 2!}=\frac{5\times4\times3\times2\times1}{3\times2\times1\times2\times1}=10$$

$$C_{10}^3=\frac{10!}{3!\cdot(10-3)!}=\frac{10!}{3!\cdot 7!}=\frac{10\times9\times8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}{3\times2\times1\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}=120$$

无放回类题目：

$$P\{摸出a个A，b个B，c个C\cdots\}=\frac{C^a_{A题总数}\cdot C^b_{B题总数}\cdot C^c_{C题总数}\cdots}{C^{要摸的总数}_{题总数}}$$

$$C_n^m=\frac{n!}{m!\cdot(n-m)!}$$ 【注：0!=1】

例2. 傻狍子觉得一赌定输赢很不公平，于是我换了个方法让他回血，每天，傻狍子可以从以下卡片中抽一张，得到对应额度奖金，抽完后，要将卡片放回，第二天接着抽。那么，七天后，傻狍子能抽到四次50，一次30，两次10，达成250成就的概率是多少？

10	10	10	30	50

$$P\{摸1次出50\}=\frac{1}{5}$$
$$P\{摸1次出30\}=\frac{1}{5}$$
$$P\{摸1次出10\}=\frac{3}{5}$$

$$P\{摸出四次50，一次30，两次10\}$$
$$=C_7^4\cdot C_3^1\cdot C_2^2\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^4\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^1\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^2$$
$$=35\times3\times1\times\frac{1}{625}\times\frac{1}{5}\times\frac{9}{25}$$
$$=0.012096$$

$$C_7^4=\frac{7!}{4!\cdot(7-4)!}=\frac{7!}{4!\cdot 3!}=\frac{7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}{4\times3\times2\times1\times3\times2\times1}=35$$

$$C_3^1=\frac{3!}{1!\cdot(3-1)!}=\frac{3!}{1!\cdot 2!}=\frac{3\times2\times1}{1\times2\times1}=3$$

$$C_2^2=\frac{2!}{2!\cdot(2-2)!}=\frac{2!}{2!\cdot 0!}=\frac{1}{0!}=\frac{1}{1}=1$$

有放回类题目：

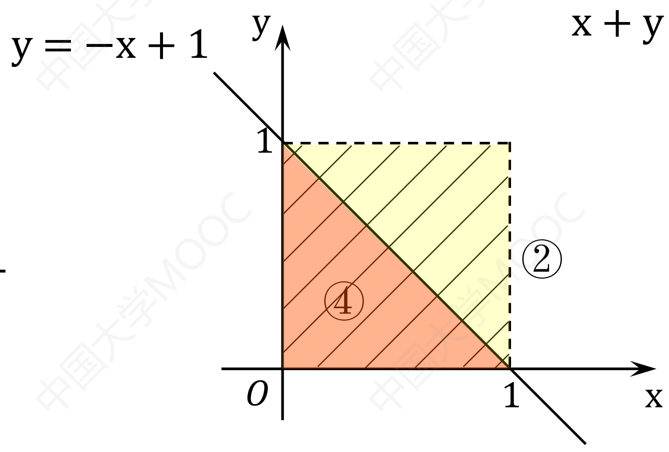
$$P\{摸出a个A，b个B，c个C\cdots\}$$
$$=C^a_{括总数}\cdot C^b_{前下-上}\cdot C^c_{前下-上}\cdots$$
$$\cdot P_A^{括总数}(摸1次出A)$$
$$\cdot P_B^{括总数}(摸1次出B)$$
$$\cdot P_C^{括总数}(摸1次出C)\cdots$$

2/7 几何概型

例1. 在区间(0,1)中随机地取两个数 x、y，则事件“两数之和小于1”

的概率为____。

$x + y < 1 \Rightarrow y < -x + 1$



$x \in (0,1)$，$y \in (0,1)$

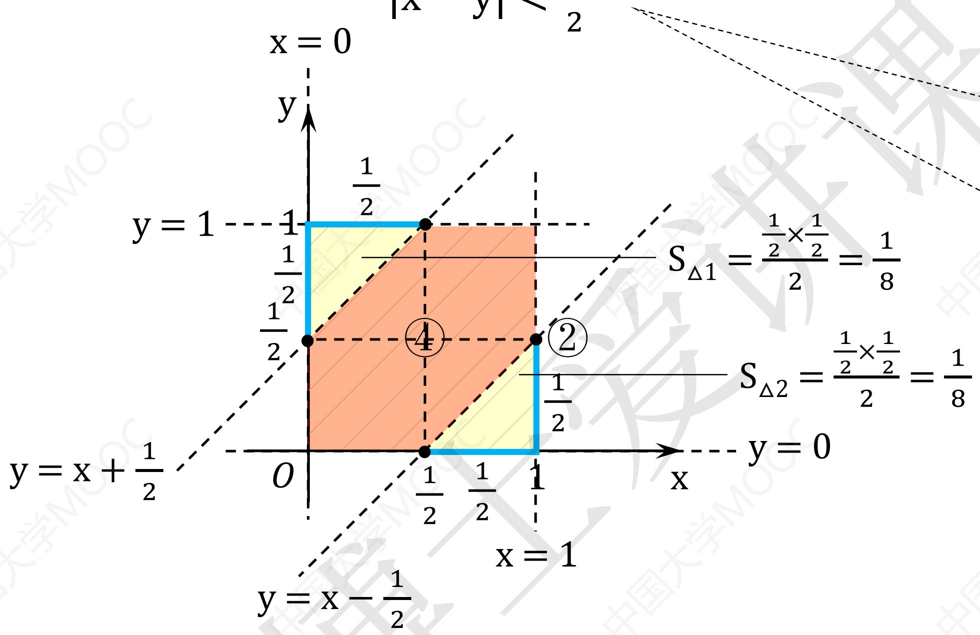
⑤ $P = \dfrac{④区域的面积}{②区域的面积}$

$= \frac{1}{2}$

例2. 在区间(0,1)中随机地取两个数，则这两数之差的绝对值小于$\frac{1}{2}$ （注：此题视频中没给具体解题过程）

的概率为____。

$|x - y| < \frac{1}{2}$



$x - y \geq 0$ 时，$x - y < \frac{1}{2}$

$\Rightarrow x - \frac{1}{2} < y \leq x$

$x - y < 0$ 时，$y - x < \frac{1}{2}$

$\Rightarrow x < y < x + \frac{1}{2}$

$\therefore\ x - \frac{1}{2} < y < x + \frac{1}{2}$

设 取的两个数 为 x，y

$x \in (0,1)$，$y \in (0,1)$

⑤ $P = \dfrac{④区域的面积}{②区域的面积}$

$= \dfrac{1 - \frac{1}{8} - \frac{1}{8}}{1}$

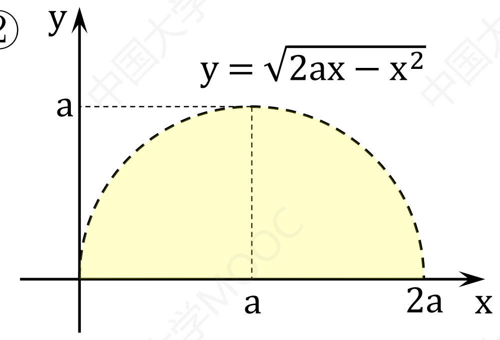
$= \frac{3}{4}$

2/7 几何概型

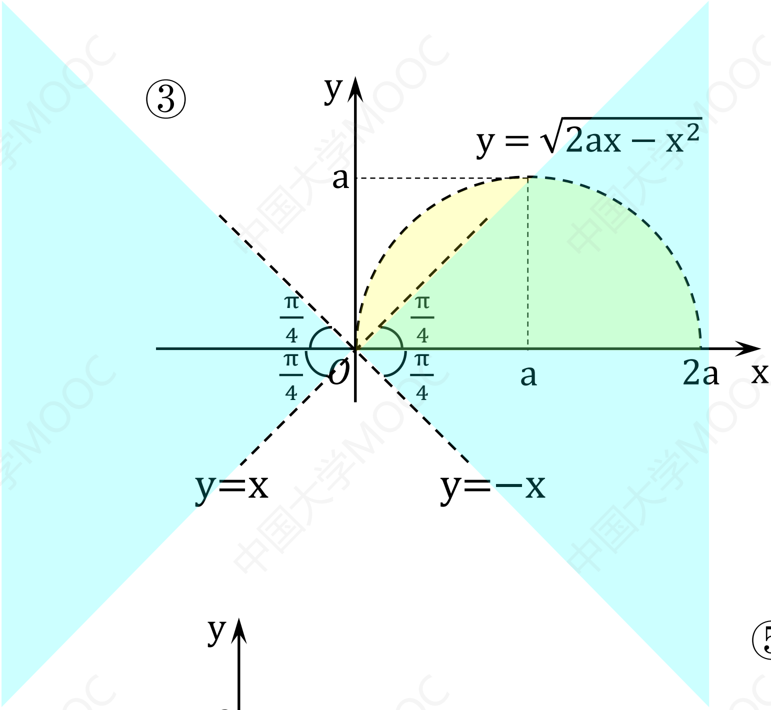
例3. 随机地向半圆$0<y<\sqrt{2ax-x^2}$ (a为正常数) 内掷一点，点落在半圆内任何区域的概率与该区域的面积成正比，则原点与该点的连线与x轴的夹角小于$\frac{\pi}{4}$的概率为____。　(注 : 此题视频中没给具体解题过程)

① 设 所掷的点 坐标为 (x,y)

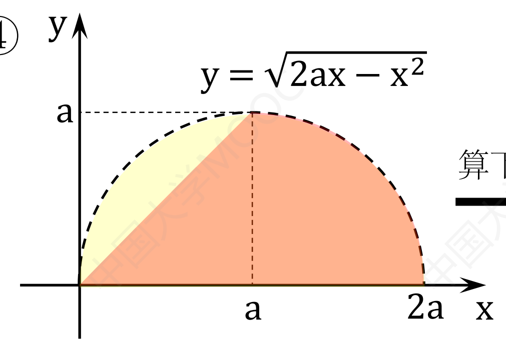
②

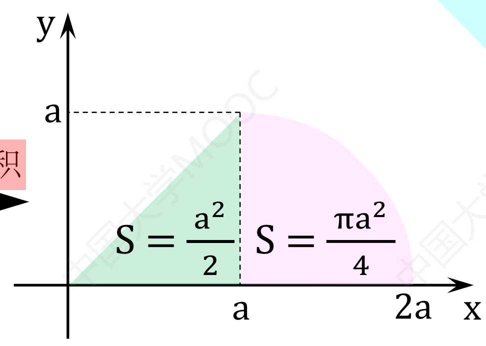


③



④





⑤ $P=\frac{④区域的面积}{②区域的面积}$

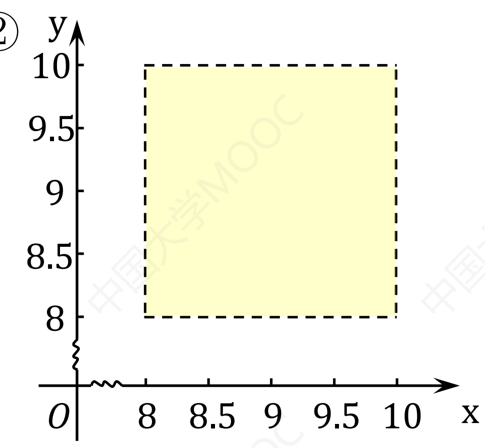
$$=\frac{\frac{a^2}{2}+\frac{\pi a^2}{4}}{\frac{\pi a^2}{2}}$$

$$=\frac{1}{\pi}+\frac{1}{2}$$

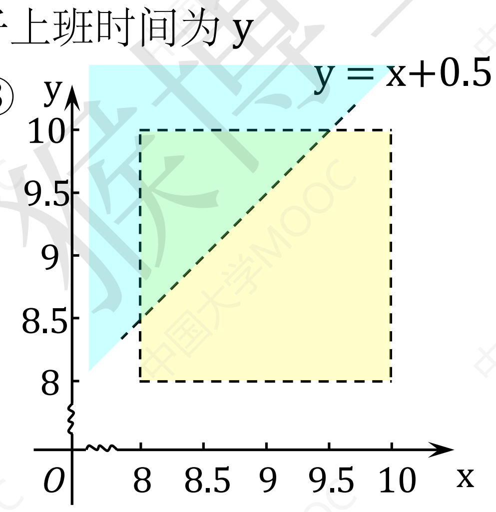
例4. 猴博士和傻狍子可能在 8:00——10:00 任意时间到岗上班，则猴博士比傻狍子至少早到半小时的概率为____。　$y-x\geq 0.5 \Rightarrow y\geq x+0.5$　(注 : 此题视频中没给具体解题过程)

① 设 猴博士上班时间为 x，傻狍子上班时间为 y

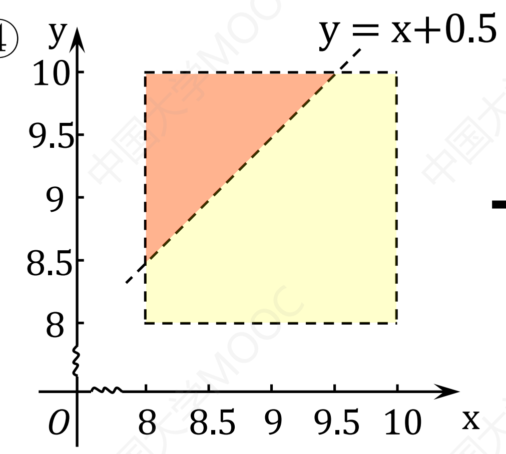
②

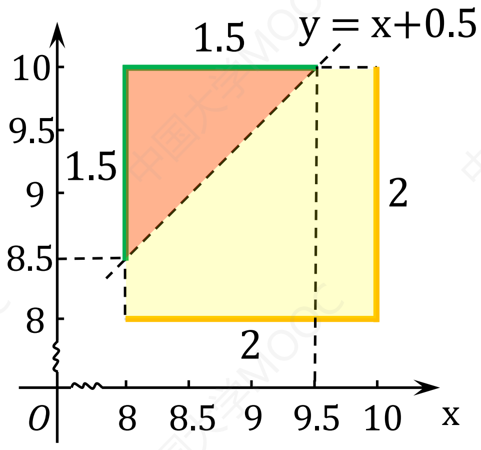


③



④





⑤ $P=\frac{④区域的面积}{②区域的面积}$

$$=\frac{\frac{1.5\times1.5}{2}}{2\times2}$$

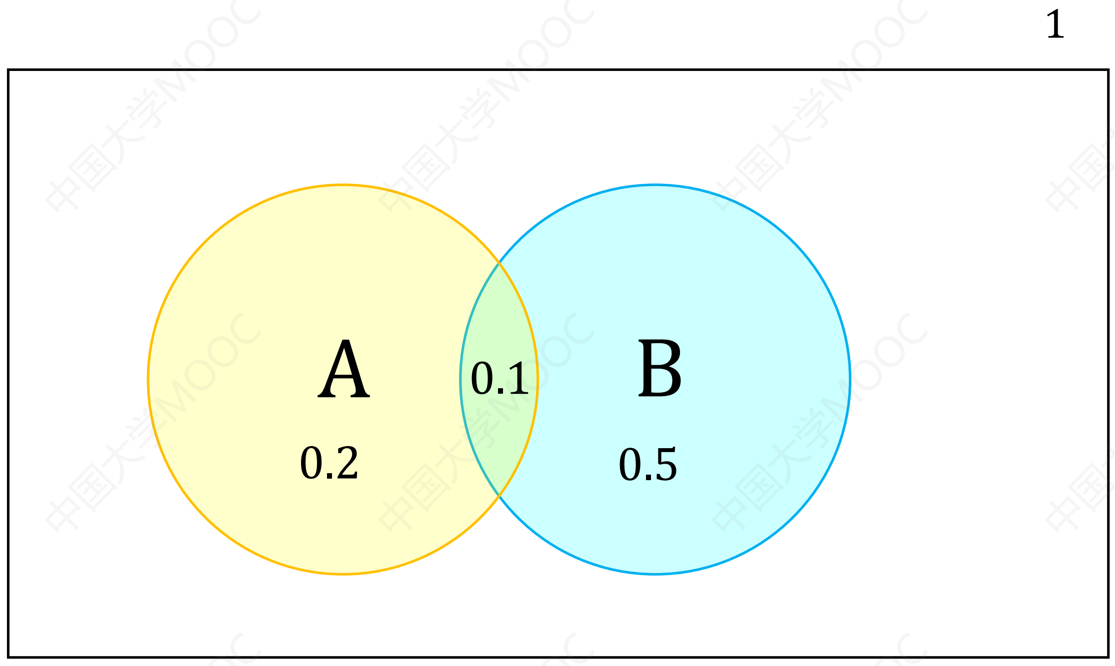
$$=\frac{9}{32}$$

3/7 事件的概率

P(A)=A面积

P(B)=B面积

P(某式)=某式面积



例. 已知P(A)=0.2，P(B)=0.5，P(AB同时发生)=0.1　，试求:

P(AB)、P(A∩B)

P(A发生B不发生)=0.2−0.1=0.1

P(A−B)

P(A与B至少发生一个)=0.2+0.5−0.1=0.6

P(A+B)、P(A∪B)

P(A不发生)=1−0.2=0.8

$P(\bar{A})$

例1. 设随机事件A、B，P(A)=0.2、P(B)=0.5、P(AB)=0.1，
那么事件A ∪ B的概率 P(A + B)=____。

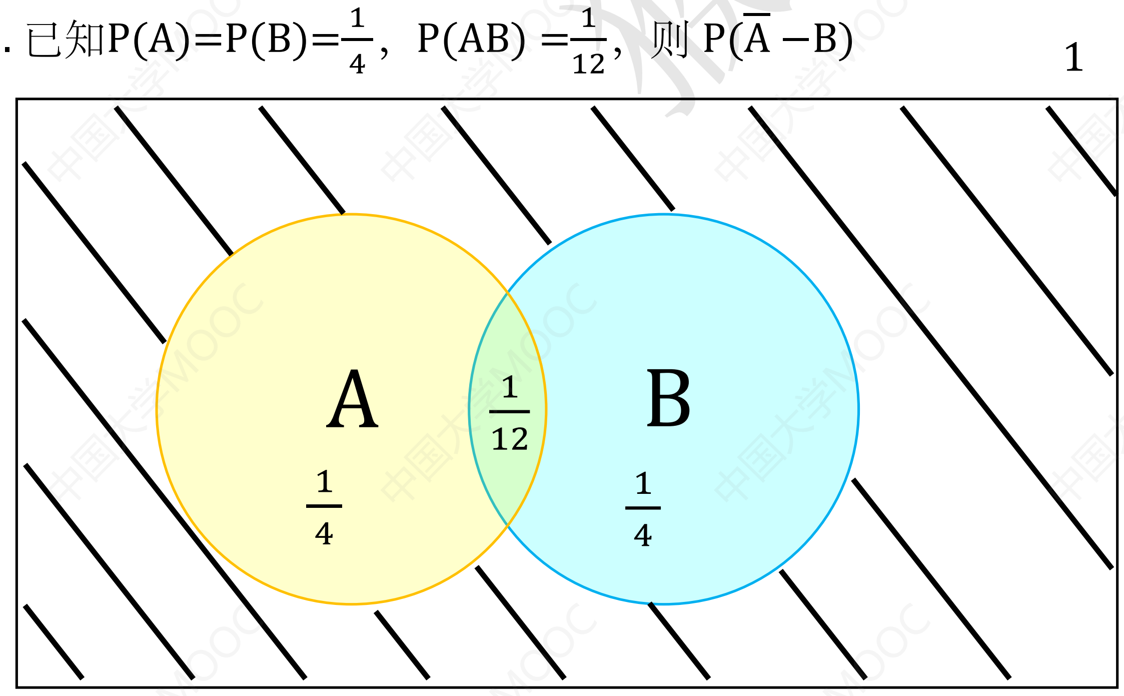
（注：此题视频中没给具体解题过程）

上边这个例题求过了：P(A与B至少发生一个) = 0.6

即 P(A+B) = 0.6

例2. 已知P(A)=P(B)=$\frac{1}{4}$，P(AB) =$\frac{1}{12}$，则 $P(\bar{A}-B)$

（注：此题视频中没给具体解题过程）



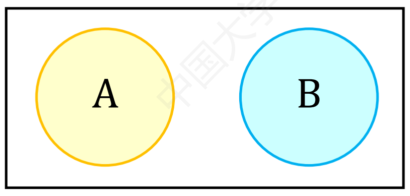
$$P(\bar{A}-B) = 1-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{12}\right) = \frac{7}{12}$$

3/7 事件的概率

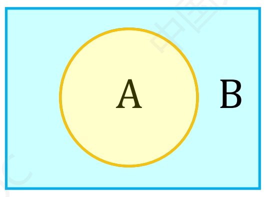
例3. 设“傻狍子打赌赢我”的概率是0.2，“它对打赌结果满意”的概率是0.5，“傻狍子打赌赢我，并对结果满意”的概率是0.1，那么，“傻狍子打赌赢我”、“它对打赌结果满意”俩事儿至少发生一件的概率是多少?

【设“傻狍子打赌赢我”为A，“它对打赌结果满意”为B后，本题就成了当前类型的例1】

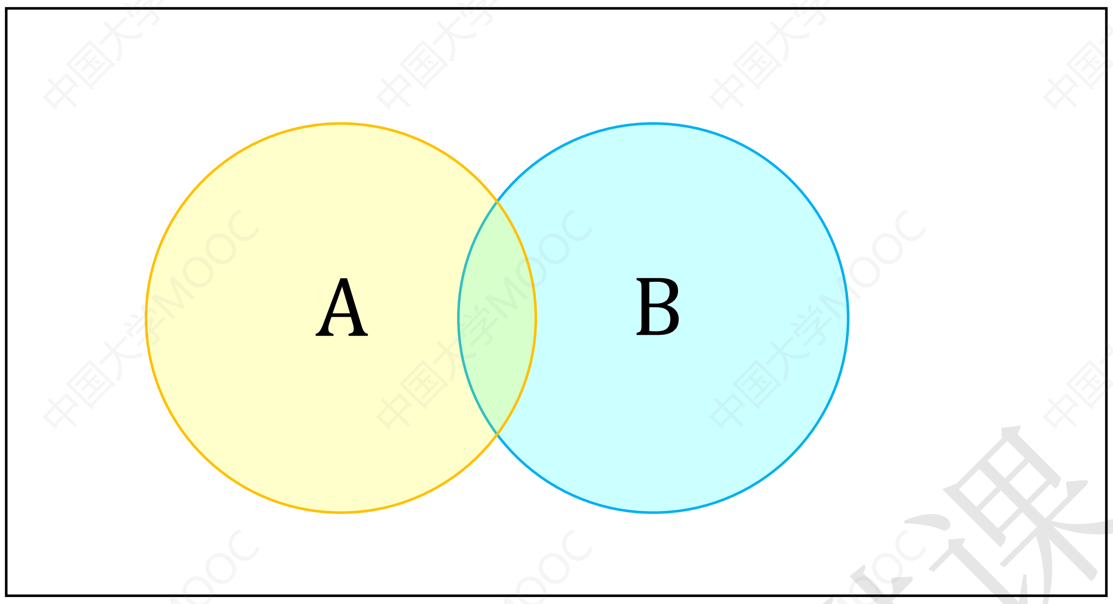
一般情况下AB之间的关系



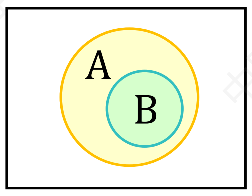
不会同时发生
互斥/互不相容

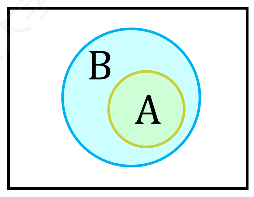


不发生这个，就发生那个
互逆/对立



有时同时发生，有时只发生一个，有时都不发生





一个发生，另一个必然发生
包含 ，包含于

大的 包含 小的

小的 包含于 大的

4/7 事件的独立性

$$A\text{ 与 }B\text{ 相互独立} \iff \begin{cases} P(AB) = P(A)\cdot P(B) \\ P(A\bar{B}) = P(A)\cdot P(\bar{B}) \\ P(\bar{A}B) = P(\bar{A})\cdot P(B) \\ P(\bar{A}\bar{B}) = P(\bar{A})\cdot P(\bar{B}) \end{cases}$$

例1. 设A、B相互独立， $P(A)=0.2$、 $P(B)=0.5$，（注：此题视频中没给具体解题过程）

那么事件$A\cup B$的概率$P(A+B)=$____。

A、B相互独立 $\Rightarrow P(AB) = P(A)\cdot P(B) = 0.2\times 0.5 = 0.1$

已知 $P(A)=0.2$、 $P(B)=0.5$，$P(AB)=0.1$，求 $P(A+B)$

就是本课类型3的例1，已经求过了

例2. 设“勇士达拉崩吧班德贝迪卜多比鲁翁战胜巨龙昆图库塔卡提考特苏瓦西拉松” 与“你高效学习，遇见无聊题干，直接跳过”两事相互独立，已知“达拉崩吧战胜巨龙”的概率是0.2，“你跳过无聊题干”的概率是0.5，那么，“达拉崩吧战胜巨龙 ”和 “你跳过这无聊题干，压根没看到这儿”俩事儿至少发生一个的概率是多少?

【设“达拉崩吧战胜巨龙”为A，“你跳过无聊题干”为B后，本题就成了当前类型的例1】

5/7 条件概率

例1. 设随机事件A、B，P(A)=0.2、 P(B)=0.5、 P(AB)=0.1，
那么P(A|B)=____。

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{0.1}{0.5}=\frac{1}{5}$$

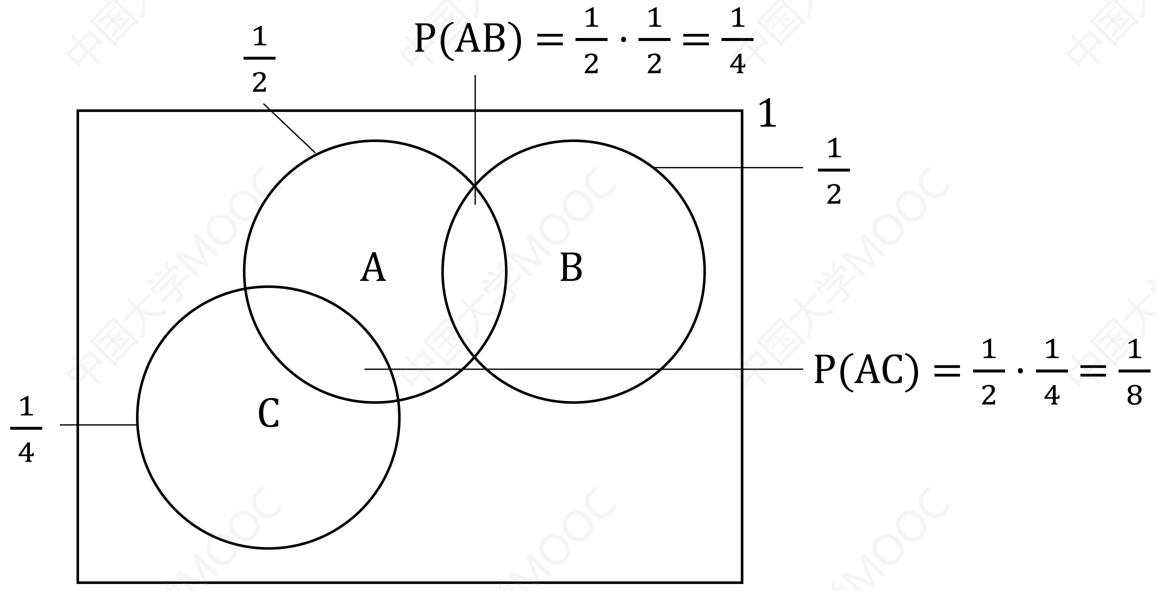
在已知N发生的情况下，M发生的概率：

$$P(M|N)=\frac{P(MN)}{P(N)}$$

例2. 设随机事件A与B相互独立，A与C相互独立，BC=∅。
若$P(A)=P(B)=\frac{1}{2}$，$P(C)=\frac{1}{4}$，则P(AC|AB∪C)=____。

（注：此题视频中没给具体解题过程）

$$P(AC|AB\cup C)=\frac{P(AC(AB\cup C))}{P(AB\cup C)}=\frac{P(AC(AB\cup C))}{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}=\frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}=\frac{1}{4}$$



例3. 设“傻狍子打赌赢我”的概率是0.2，“它对打赌结果满意”
的概率是0.5，那么，在已知 “傻狍子对结果满意”的情况
下，“它打赌赢我”的概率是多少?

【设“傻狍子打赌赢我”为A，“它对打赌结果满意”为B后，本题就成了当前类型的例1 】

6/7 全概率公式

全概率公式：

P{总体里某事发生}

= P{A出现}·P{A发生该事} +

P{B出现}·P{B发生该事} +

P{C出现}·P{C发生该事} +…

例1. 一个月黑风高的深夜，舍长一脸神秘的提回3个黑色塑料袋，已知1号塑料袋里有4瓶可乐、1瓶老醋，2号塑料袋里有 3瓶可乐、3瓶老醋，3号塑料袋里有3瓶可乐、5瓶老醋。假设各袋里可乐和醋外观都一样，现让你隔着袋随便摸一瓶出来，立马喝掉，问随便摸出的一瓶是老醋的概率为____。

P{总体里摸一瓶是老醋}

= P{1号塑料袋东西出现}·P{1号塑料袋东西里摸一瓶是老醋} +

P{2号塑料袋东西出现}·P{2号塑料袋东西里摸一瓶是老醋} +

P{3号塑料袋东西出现}·P{3号塑料袋东西里摸一瓶是老醋}

$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{8}$

$= \frac{53}{120}$

例2. 设有一堆问题，猴博士解了80%，傻狍子解了20%，已知，猴博士解题正确率100%，傻狍子解题正确率1%，现在，老板随便抽一题检查对错，问该题正确的概率是多少?

（注：此题视频中没给具体解题过程）

P{总体里抽一题，题正确}

= P{猴博士解的题出现}·P{猴博士解的题里抽一题，正确} +

P{傻狍子解的题出现}·P{傻狍子解的题里抽一题，正确}

$= 80\% \times 100\% + 20\% \times 1\%$

$= 0.802$

7/7 贝叶斯公式

例1. 一个月黑风高的深夜，舍长一脸神秘的提回3个黑色塑料袋，已知1号塑料袋里有4瓶可乐、1瓶老醋，2号塑料袋里有 3瓶可乐、3瓶老醋，3号塑料袋里有3瓶可乐、5瓶老醋。假设各袋里可乐和醋外观都一样，现已知让你隔着袋随便摸一瓶出来，摸出的是老醋了，求摸出的老醋源自于1号塑料袋的概率为____。

P{已知隔着袋随便摸一瓶是老醋了，抽的东西源自1号袋}

$$=\frac{P\{1\text{号袋出现}\}\cdot P\{1\text{号袋里隔着袋随便摸一瓶是老醋}\}}{P\{\text{总体里隔着袋随便摸一瓶是老醋了}\}}$$

本课类型6例1求过

$$=\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}}{\frac{53}{120}}$$

$$=\frac{8}{53}$$

贝叶斯公式：

P{已知在总体里某事发生时，抽的东西源自A}

$$=\frac{P\{A\text{出现}\}\cdot P\{A\text{里该事发生}\}}{P\{\text{总体里该事发生}\}}$$

1/4 一维离散型求分布律

例1. 设 X 为掷一次骰子得到的点数，求 X 的分布律

① X 所有可能的情况：X=1 、X=2 、X=3 、X=4 、X=5 、X=6

②

X	1	2	3	4	5	6
P	P{X=1}	P{X=2}	P{X=3}	P{X=4}	P{X=5}	P{X=6}

$\Rightarrow$

X	1	2	3	4	5	6
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

例2. 已知 X 的分布律为

X	-2	0	2
P	0.4	0.3	0.3

求 $Y = X^2 + 1$ 的分布律

①

X:
- -2　$Y = (-2)^2+1 = 5$
- 0　$Y = 0^2+1 = 1$
- 2　$Y = 2^2+1 = 5$

Y 所有可能的情况： Y=1、Y=5

②

Y	1	5
P	P{Y=1}	P{Y=5}

$\Rightarrow$

Y	1	5
P	P{X=0}	P{X=−2}+P{X=2}

$\Rightarrow$

Y	1	5
P	0.3	0.7

1/4 一维离散型求分布律

例3. 设A，B为随机事件，且 $P(A)=\frac{1}{4}$，$P(\bar{A})=\frac{3}{4}$，$P(B)=\frac{1}{6}$，

（注：此题视频中没给具体解题过程）

$P(\bar{B})=\frac{5}{6}$，$P(AB)=\frac{1}{12}$，$P(A\bar{B})=\frac{1}{6}$，$P(\bar{A}B)=\frac{1}{12}$，$P(\bar{A}\,\bar{B})=\frac{2}{3}$，

令 $X=\begin{cases}1，A发生\\0，A不发生\end{cases}$，$Y=\begin{cases}1，B发生\\0，B不发生\end{cases}$，求：

(1) X 的分布律；(2) Y 的分布律

(1) ① X 所有可能的情况：X=0、X=1

②

X	0	1
P	P{X=0}	P{X=1}

⇒

X	0	1
P	$P(\bar{A})$	$P(A)$

⇒

X	0	1
P	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$

(2) ① Y 所有可能的情况：Y=0、Y=1

②

Y	0	1
P	P{Y=0}	P{Y=1}

⇒

Y	0	1
P	$P(\bar{B})$	$P(B)$

⇒

Y	0	1
P	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$

大写	$小写_1$	$小写_2$	⋯	$小写_{n-1}$	$小写_n$
P	$p_{小写_1}$	$p_{小写_2}$	⋯	$p_{小写_{n-1}}$	$p_{小写_n}$

$$\Leftrightarrow 大写\sim\begin{pmatrix}小写_1 & 小写_2 & \cdots & 小写_{n-1} & 小写_n\\ p_{小写_1} & p_{小写_2} & \cdots & p_{小写_{n-1}} & p_{小写_n}\end{pmatrix}$$

$$p_{小写_1}+p_{小写_2}+\cdots+p_{小写_{n-1}}+p_{小写_n}=1$$

2/4 一维离散型求期望、方差

例1. 已知 X 的分布律为

X	−2	0	2
P	0.4	0.3	0.3

Y 的分布律为

Y	1	5
P	0.3	0.7

试求EX、EY、 $E(X^2)$、 $E(3X+5Y+7)$、DX、$D(5X+3)$

$EX=-2\times 0.4+0\times 0.3+2\times 0.3=-0.2$

$EY=1\times 0.3+5\times 0.7=3.8$

X^2	$(-2)^2$	0^2	2^2
P	0.4	0.3	0.3

$E(X^2)=(-2)^2\times 0.4+0^2\times 0.3+2^2\times 0.3=2.8$

$E(3X+5Y+7)=3EX+5EY+7=3\times(-0.2)+5\times 3.8+7=25.4$

$DX=E(X^2)-(EX)^2=2.8-(-0.2)^2=2.76$

$D(5X+3)=5^2DX=25\times 2.76=69$

一维离散型求期望：

若 X 的分布律 为：

X	x_1	x_2	⋯	x_n
P	p_{x_1}	p_{x_2}	⋯	p_{x_n}

则 $EX=x_1\cdot p_{x_1}+x_2\cdot p_{x_2}+\cdots+x_n\cdot p_{x_n}$

$E[g(X)]=g(x_1)\cdot p_{x_1}+g(x_2)\cdot p_{x_2}+\cdots+g(x_n)\cdot p_{x_n}$

$E(aX+bY+c)=aEX+bEY+c$

E(某常数) = 该常数

一维离散型求方差：

$DX=E(X^2)-(EX)^2$

$D(aX+c)=a^2DX$

D(常数) = 0

D(任意量) ≥ 0

3/4 二维离散型求分布律

例1. 已知X、Y可能的取值均为0,1,2，已知$P\{X=2,Y=0\}=P\{X=0,Y=2\}=\frac{1}{4}$，

$P\{X=1,Y=1\}=\frac{1}{2}$，其他情况概率为0，写出 (X,Y)的分布律

① X 所有可能的情况： X=0、X=1、X=2

② Y 所有可能的情况： Y=0、Y=1、Y=2

③

X \ Y	0	1	2
0	0	0	$\frac{1}{4}$
1	0	$\frac{1}{2}$	0
2	$\frac{1}{4}$	0	0

例2. 设ξ，η是相互独立且服从同一分布的两个随机变量，已知

ξ的分布律为$P\{\xi=i\}=\frac{1}{2}$，i=1,2。又设$X=\max\{\xi,\eta\}$，$Y=\min\{\xi,\eta\}$，（注：此题视频中没给具体解题过程）

写出二维随机变量(X,Y)的分布律

①
$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}P\{\xi=1\}=\frac{1}{2}\\ P\{\xi=2\}=\frac{1}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow \xi\begin{cases}1\\2\end{cases}\\ \left.\begin{array}{l}P\{\eta=1\}=\frac{1}{2}\\ P\{\eta=2\}=\frac{1}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow \eta\begin{cases}1\\2\end{cases}\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{cases}\xi=1,\eta=1 & X=1,Y=1\\ \xi=1,\eta=2 & X=2,Y=1\\ \xi=2,\eta=1 & X=2,Y=1\\ \xi=2,\eta=2 & X=2,Y=2\end{cases}$$

X 所有可能的情况： X=1、X=2

② Y 所有可能的情况： Y=1、Y=2

③

$$\begin{aligned}&P\{X=1,Y=1\}\\&=P\{\xi=1,\eta=1\}\\&=P\{\xi=1\}\cdot P\{\eta=1\}\\&=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\\&=\frac{1}{4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&P\{X=2,Y=1\}\\&=P\{\xi=1,\eta=2\}+P\{\xi=2,\eta=1\}\\&=P\{\xi=1\}\cdot P\{\eta=2\}+P\{\xi=2\}\cdot P\{\eta=1\}\\&=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\\&=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&P\{X=2,Y=2\}\\&=P\{\xi=2,\eta=2\}\\&=P\{\xi=2\}\cdot P\{\eta=2\}\\&=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\\&=\frac{1}{4}\end{aligned}$$

X \ Y	1	2
1	$\frac{1}{4}$	0
2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

X \ Y	y_1	y_2	⋯	y_n
x_1	p_{x_1,y_1}	p_{x_1,y_2}	⋯	p_{x_1,y_n}
x_2	p_{x_2,y_1}	p_{x_2,y_2}	⋯	p_{x_2,y_n}
⋯	⋯	⋯	⋯	⋯
x_n	p_{x_n,y_1}	p_{x_n,y_2}	⋯	p_{x_n,y_n}

$p_{x_1,y_1}+p_{x_1,y_2}+\cdots+p_{x_n,y_n}=1$

4/4 二维离散型求边缘分布律

例1. 设二维随机变量(X,Y)的联合分布律

X \ Y	0	1
0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{12}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$

求随机变量 X、Y 的边缘分布律

X	0	1
P	$\frac{2}{3}+\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}+\frac{1}{12}$

$\Rightarrow$

X	0	1
P	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$

Y	0	1
P	$\frac{2}{3}+\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}+\frac{1}{12}$

$\Rightarrow$

Y	0	1
P	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$

例2. 已知X、Y可能的取值均为0,1,2，已知$P\{X=2,Y=0\}=P\{X=0,Y=2\}=\frac{1}{4}$，

$P\{X=1,Y=1\}=\frac{1}{2}$，其他情况概率为0，写出 (X,Y)的分布律、边缘分布律

（注：此题视频中没给具体解题过程）

(X,Y)的分布律：

X \ Y	0	1	2
0	0	0	$\frac{1}{4}$
1	0	$\frac{1}{2}$	0
2	$\frac{1}{4}$	0	0

本课类型3例1求过

边缘分布律：

X	0	1	2
P	$0+0+\frac{1}{4}$	$0+\frac{1}{2}+0$	$\frac{1}{4}+0+0$

$\Rightarrow$

X	0	1	2
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Y	0	1	2
P	$0+0+\frac{1}{4}$	$0+\frac{1}{2}+0$	$\frac{1}{4}+0+0$

$\Rightarrow$

Y	0	1	2
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

1/5 一维连续型求概率

例1. 设 X 的概率密度 $f_X(x)=\begin{cases} 1, & 0\le x<1 \\ 0, & 其他 \end{cases}$，

$P\{M在ab之间\} = \int_a^b f_M(m)\,dm$

已知 Y=0.5X，求 P{0<Y<1}

$= P\{0<0.5X<1\}$

$= P\{0<X<2\}$

$P\{0<X<2\} = \int_0^2 f_X(x)\,dx$

$= \int_0^1 1\,dx + \int_1^2 0\,dx$

$= 1 + 0$

$= 1$

$\int_a^b [A(x)]'\,dx = A(x)|_a^b = A(b) - A(a)$

$\int_0^1 1\,dx = x|_{x=1} - x|_{x=0} = 1 - 0 = 1$

$\int_1^2 0\,dx = 0|_{x=2} - 0|_{x=1} = 0 - 0 = 0$

例2. 设 X 的概率密度 $f_X(x)=\begin{cases} 1, & 0\le x<1 \\ 0, & 其他 \end{cases}$，

已知 Y=0.5X，求 P{Y≤y}

$= P\{0.5X\le y\}$

$= P\{X\le 2y\}$

$= P\{-\infty<X\le 2y\}$

$P\{-\infty<X\le 2y\} = \int_{-\infty}^{2y} f_X(x)\,dx$

当2y＜0 (即y＜0) 时

积分$=\int_{-\infty}^{2y} 0\,dx$

$= 0$

当0≤2y＜1 (即0≤y＜0.5) 时

积分$=\int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_0^{2y} 1\,dx$

$= 0 + \int_0^{2y} x'\,dx$

$= x|_0^{2y}$

$= 2y-0$

$= 2y$

当2y≥1 (即y≥0.5) 时

积分$=\int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_0^{1} 1\,dx + \int_1^{2y} 0\,dx$

$= 0 + \int_0^{1} x'\,dx + 0$

$= x|_0^1$

$= 1-0$

$= 1$

综上：$P\{Y\le y\} = \begin{cases} 0, & y<0 \\ 2y, & 0\le y<0.5 \\ 1, & y\ge 0.5 \end{cases}$

例3. 设 X 的概率密度 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & 1\le x<e \\ 0, & 其他 \end{cases}$ （此题视频中没给具体解题过程）

求 P{0<X<2}

$P\{0<X<2\} = \int_0^2 f(x)\,dx$

$= \int_0^1 0\,dx + \int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$

$= 0 + (\ln x)|_1^2$

$= \ln 2 - \ln 1$

$= \ln 2 - 0$

$= \ln 2$

1/5 一维连续型求概率

例4. 设 Y 的概率密度 $f(y)=\begin{cases}\frac{1}{y}, & 1\le y<e \\ 0, & 其他\end{cases}$ （此题视频中没给具体解题过程）

求 $P\{Y<2\}$

$$
\begin{aligned}
P\{Y<2\} &= P\{-\infty<Y<2\} \\
&= \int_{-\infty}^{2} f(y)\,dy \\
&= \int_{-\infty}^{1} 0\,dy + \int_{1}^{2} \frac{1}{y}\,dy \\
&= \quad 0 \quad + (\ln y)\Big|_1^2 \\
&= \ln 2 - \ln 1 \\
&= \ln 2 - \ 0 \\
&= \ln 2
\end{aligned}
$$

例5. 设随机变量 X 的概率密度 $f_X(x)=\begin{cases}0, & x\le 0 \\ e^{-x}, & x>0\end{cases}$， （此题视频中没给具体解题过程）

已知 Y=2X，求 $P\{Y\le y\}$

$$
\begin{aligned}
P\{Y\le y\} &= P\{2X\le y\} \\
&= P\left\{X\le \frac{y}{2}\right\} \\
&= P\left\{-\infty<X\le \frac{y}{2}\right\} \\
&= \int_{-\infty}^{\frac{y}{2}} f_X(x)\,dx
\end{aligned}
$$

当 $\frac{y}{2}\le 0$，即 $y\le 0$ 时，

$$\int_{-\infty}^{\frac{y}{2}} f_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\frac{y}{2}} 0\,dx = 0$$

当 $\frac{y}{2}>0$，即 $y>0$ 时，

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\frac{y}{2}} f_X(x)\,dx &= \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{\frac{y}{2}} e^{-x}\,dx \\
&= \quad 0 \quad + (-e^{-x})\Big|_{x=0}^{x=\frac{y}{2}} \\
&= \left(-e^{-\frac{y}{2}}\right) - \left(-e^{-0}\right) \\
&= 1-e^{-\frac{y}{2}}
\end{aligned}
$$

综上:

$$P\{Y\le y\}=\begin{cases}0, & y\le 0 \\ 1-e^{-\frac{y}{2}}, & y>0\end{cases}$$

2/5 一维连续型求 F

例1. 设 X 的概率密度 $f_X(x)=\begin{cases} 1\ ,\ 0\le x<1 \\ 0\ ,\ 其他 \end{cases}$，

已知 Y=0.5X，求 $F_Y(y)$

求 $P\{Y\le y\}$ 本课类型1例2求过

$= P\{0.5X\le y\}$

$= P\{X\le 2y\}$

$= P\{-\infty<X\le 2y\}$

$P\{-\infty<X\le 2y\} = \int_{-\infty}^{2y} f_X(x)\,dx$

$F_A(b) = P\{A\le b\}$

$F(b) = P\{B\le b\}$

$F_A(+\infty) = P\{A\le +\infty\} = 1$

$F(+\infty) = P\{B\le +\infty\} = 1$

$F_A(-\infty) = P\{A\le -\infty\} = 0$

$F(-\infty) = P\{B\le -\infty\} = 0$

当2y＜0 (即y＜0) 时

积分$=\int_{-\infty}^{2y} 0\,dx$

$= 0$

当0≤2y＜1 (即0≤y＜0.5) 时

积分$=\int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{2y} 1\,dx$

$= \quad 0 \quad + \int_{0}^{2y} x'\,dx$

$= x\big|_{0}^{2y}$

$= 2y-0$

$= 2y$

当2y≥1 (即y≥0.5) 时

积分$=\int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{1} 1\,dx + \int_{1}^{2y} 0\,dx$

$= \quad 0 \quad + \int_{0}^{1} x'\,dx + \quad 0$

$= x\big|_{0}^{1}$

$= 1-0$

$= 1$

综上 : $F_Y(y) = P\{Y\le y\} = \begin{cases} 0\ ,\ y<0 \\ 2y,\ 0\le y<0.5 \\ 1\ ,\ y\ge 0.5 \end{cases}$

例2. 设 X 的概率密度 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}\ ,\ 1\le x<e \\ 0\ ,\ 其他 \end{cases}$ （此题视频中没给具体解题过程）

求 F(x)

求 $P\{X\le x\}$

$= P\{-\infty<X\le x\}$

$P\{-\infty<X\le x\} = \int_{-\infty}^{x} f_X(x)\,dx$

当 x<1 时，

积分 $= \int_{-\infty}^{x} 0\,dx$

$= 0$

当 1≤x<e 时，

积分 $= \int_{-\infty}^{1} 0\,dx + \int_{1}^{x} \frac{1}{x}\,dx$

$= 0 + \int_{1}^{x} (\ln x)'\,dx$

$= (\ln x)\big|_{1}^{x}$

$= \ln x - \ln 1$

$= \ln x$

当 x≥e 时，

积分 $= \int_{-\infty}^{1} 0\,dx + \int_{1}^{e} \frac{1}{x}\,dx + \int_{e}^{x} 0\,dx$

$= 0 + \int_{1}^{e} (\ln x)'\,dx + 0$

$= (\ln x)\big|_{1}^{e}$

$= \ln e - \ln 1$

$= 1$

综上 : $F(x) = P\{X\le x\} = \begin{cases} 0\ ,\ x<1 \\ \ln x,\ 1\le x<e \\ 1\ ,\ x\ge e \end{cases}$

3/5一维连续型已知F求f

$f_A(a) = F_A{}'(a)$

例1. 设 Y 的分布函数 $F_Y(y)=\begin{cases} 0\text{，} y<0 \\ 2y\text{，} 0 \le y < 0.5 \\ 1\text{，} y \ge 0.5 \end{cases}$，求 $f_Y(y)$

$$f_Y(y)=\begin{cases} 0'\text{，} y<0 \\ (2y)'\text{，} 0 \le y < 0.5 \\ 1'\text{，} y \ge 0.5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f_Y(y)=\begin{cases} 0\text{，} y<0 \\ 2\text{，} 0 \le y < 0.5 \\ 0\text{，} y \ge 0.5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f_Y(y)=\begin{cases} 2\text{，} 0 \le y < 0.5 \\ 0\text{，其他} \end{cases}$$

4/5一维连续型已知f 求f

例1. 设 X 的概率密度 $f_X(x)=\begin{cases} 1\ , & 0\le x<1 \\ 0\ , & 其他 \end{cases}$，

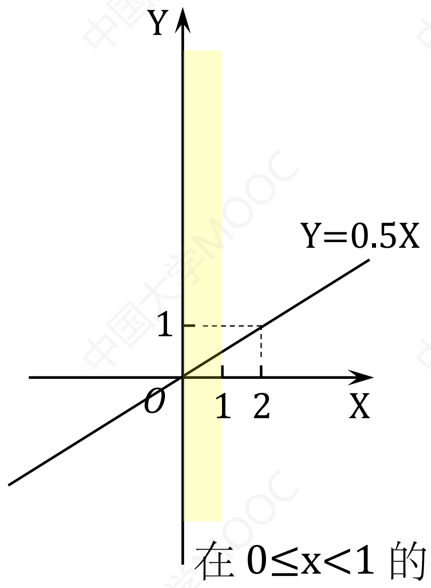
已知 Y=0.5X，求 $f_Y(y)$

普通法：（麻烦但啥题都能用）

$$F_Y(y)=\begin{cases} 0\ , & y<0 \\ 2y, & 0\le y<0.5 \\ 1\ , & y\ge 0.5 \end{cases}$$ 本课类型2例1求过

$$f_Y(y)=\begin{cases} 2, & 0\le y<0.5 \\ 0, & 其他 \end{cases}$$ 本课类型3例1求过

公式法：（简单，但仅满足要求的题可用）



在 0≤x<1 的区间内，Y=0.5X 是单调递增的

$$f_Y(y)=\begin{cases} 1\times|(2y)'|, & 0\le 2y<1 \\ 0\times|(2y)'|, & 其他 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f_Y(y)=\begin{cases} 2, & 0\le y<0.5 \\ 0, & 其他 \end{cases}$$

5/5一维连续型求期望、方差

例1. 设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1\\ 0, & 其他\end{cases}，求 EX、E(X^2)、DX$$

$$\begin{aligned}EX &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\,dx\\ &= \int_{-\infty}^{0} x\times 0\,dx+\int_{0}^{1} x\times 2x\,dx+\int_{1}^{+\infty} x\times 0\,dx\\ &= \int_{-\infty}^{0} 0\,dx+\int_{0}^{1} 2x^2 dx+\int_{1}^{+\infty} 0\,dx\\ &= 0+\int_{0}^{1}\left(\frac{2}{3}x^3\right)'dx+0\\ &= \left(\frac{2}{3}x^3\right)\Big|_0^1\\ &= \frac{2}{3}\times 1^3-\frac{2}{3}\times 0^3\\ &= \frac{2}{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}E(X^2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)\,dx\\ &= \int_{-\infty}^{0} x^2\times 0\,dx+\int_{0}^{1} x^2\times 2x\,dx+\int_{1}^{+\infty} x^2\times 0\,dx\\ &= \int_{-\infty}^{0} 0\,dx+\int_{0}^{1} 2x^3 dx+\int_{1}^{+\infty} 0\,dx\\ &= 0+\int_{0}^{1}\left(\frac{1}{2}x^4\right)'dx+0\\ &= \left(\frac{1}{2}x^4\right)\Big|_0^1\\ &= \frac{1}{2}\times 1^4-\frac{1}{2}\times 0^4\\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

$$DX = E(X^2)-(EX)^2=\frac{1}{2}-\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{1}{18}$$

一维连续型求期望：

$EX = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\,dx$

$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x)\,dx$

$E(aX+bY+c) = aEX+bEY+c$

E(某常数) = 该常数

一维连续型求方差：

$DX = E(X^2)-(EX)^2$

$D(aX+c) = a^2DX$

D(常数) = 0

D(任意量) ≥ 0

例2. 已知 $f_X(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x>0\\ 0, & 其他\end{cases}$，$f_Y(y)=\begin{cases}2e^{-2y}, & y>0\\ 0, & 其他\end{cases}$，（此题视频中没给具体解题过程）

且 Z=X+2Y，求：

EX、$E(X^2)$、EY、EZ、DX、D(5X+7)

$$\begin{aligned}EX &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\,dx\\ &= \int_{-\infty}^{0} x\cdot 0\,dx+\int_{0}^{+\infty} x\cdot e^{-x}\,dx\\ &= \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + [-(x+1)e^{-x}]\big|_0^{+\infty}\\ &= 0+[0-(-1)]\\ &= 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}E(X^2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)\,dx\\ &= \int_{-\infty}^{0} x^2\cdot 0\,dx+\int_{0}^{+\infty} x^2\cdot e^{-x}\,dx\\ &= \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + [-(x^2+2x+2)e^{-x}]\big|_0^{+\infty}\\ &= 0+[0-(-2)]\\ &= 2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}EY &= \int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y)\,dy\\ &= \int_{-\infty}^{0} y\cdot 0\,dy+\int_{0}^{+\infty} y\cdot 2e^{-2y}\,dy\\ &= \int_{-\infty}^{0} 0\,dy+\left[-\left(y+\frac{1}{2}\right)e^{-2y}\right]\Big|_0^{+\infty}\\ &= 0+\left[0-\left(-\frac{1}{2}\right)\right]\\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}EZ &= E(X+2Y)\\ &= E(1X+2Y+0)\\ &= 1EX+2EY+0\\ &= 1\cdot 1+2\cdot\frac{1}{2}+0\\ &= 2\end{aligned}$$

$$DX = E(X^2)-(EX)^2 = 2-1^2=1$$

$$D(5X+7)=5^2DX=25\,DX=25\times 1=25$$

1/8 已知 $f_X(x)$、$f_Y(y)$，求 $f(x,y)$

例1. 已知$f_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1\\ 0, & 其他\end{cases}$，$f_Y(y)=\begin{cases}1, & 0<y<1\\ 0, & 其他\end{cases}$，且

X、Y相互独立，试求f(x,y)

$$f(x,y)=\begin{cases}1\cdot 1\ , & 0<x<1,0<y<1\\ 0\ , & 其他\end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x,y)=\begin{cases}1\ , & 0<x<1,0<y<1\\ 0\ , & 其他\end{cases}$$

$f_X(x)=\begin{cases}A(x), & x\in范围1\\ 0\ , & 其他\end{cases}$，$f_Y(y)=\begin{cases}a(y), & y\in范围2\\ 0\ , & 其他\end{cases}$，

且 X、Y 相互独立，

$$\Rightarrow f(x,y)=\begin{cases}A(x)\cdot a(y), & x\in范围1, y\in范围2\\ 0\ , & 其他\end{cases}$$

例2. 已知$f_X(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x>0\\ 0\ , & 其他\end{cases}$，$f_Y(y)=\begin{cases}2e^{-2y}, & y>0\\ 0\ , & 其他\end{cases}$，且 （注：此题视频中没给具体解题过程）

X、Y相互独立，试求f(x,y)

$$f(x,y)=\begin{cases}e^{-x}\cdot 2e^{-2y}\ , & \begin{cases}x>0\\ y>0\end{cases}\\ 0\ , & 其他\end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x,y)=\begin{cases}2e^{-(x+2y)}\ , & x>0\ ,y>0\\ 0\ , & 其他\end{cases}$$

2/8 已知 f(x,y) 求概率

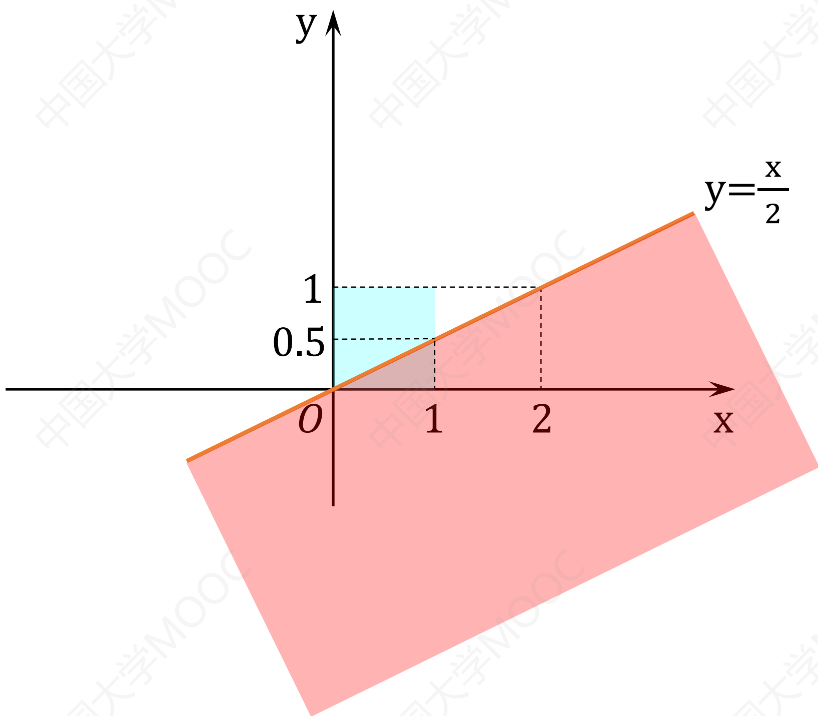
例1. 设二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}1\text{ , } & 0<x<1\text{ , }0<y<1\\ 0\text{ , } & \text{其他}\end{cases}\text{ , }$$

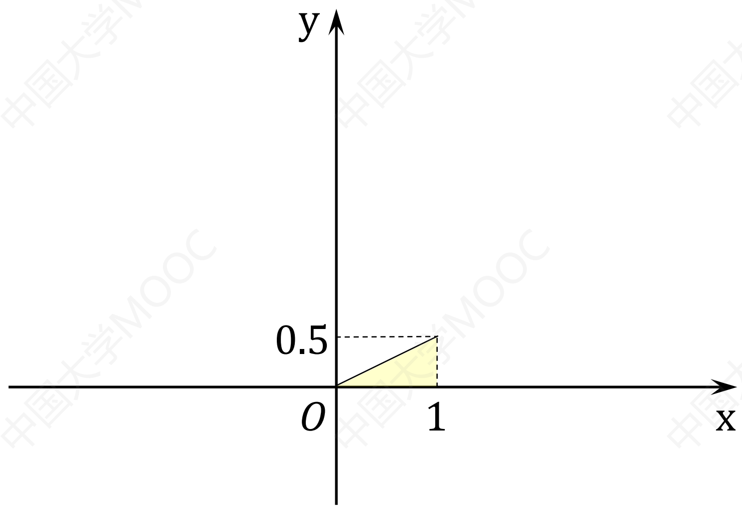
求 P{X>2Y}

$Y<\frac{x}{2}$

$$P\{\text{待求}\}=\iint\limits_{\text{待求概率的区域}} f(x,y)\,dxdy$$

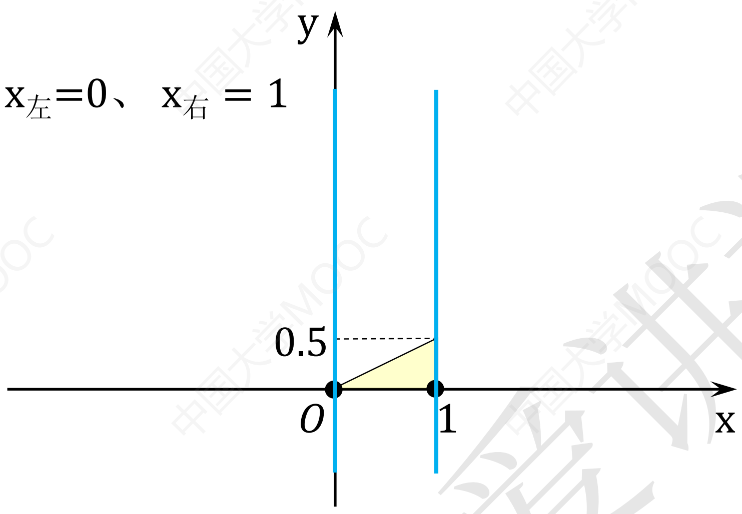


⇒



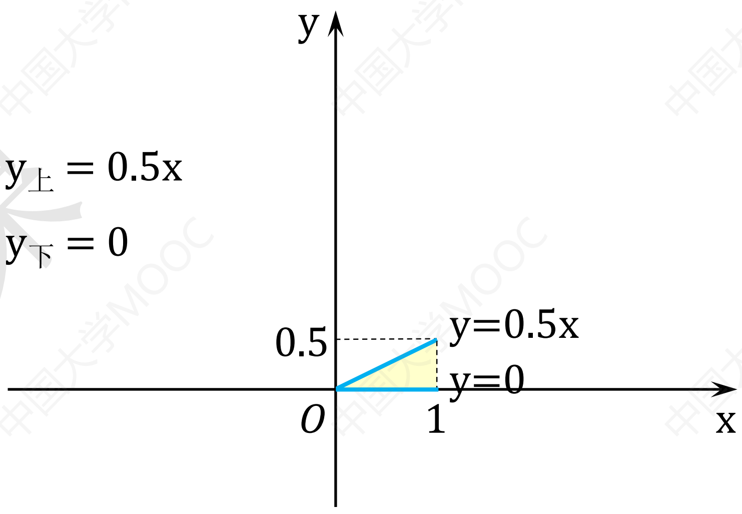
⇓

$x_{左}=0$、$x_{右}=1$



$y_{上}=0.5x$

$y_{下}=0$



$$P\{X>2Y\}=\int_0^1\left(\int_0^{0.5x}1\,dy\right)dx \qquad \boxed{\int_0^{0.5x}1\,dy=\int_0^{0.5x}(y)'\,dy=y\Big|_{y=0}^{y=0.5x}=0.5x-0=0.5x}$$

$$=\int_0^1 0.5x\,dx$$

$$=\int_0^1\left(\frac{1}{4}x^2\right)'dx$$

$$=\left(\frac{1}{4}x^2\right)\Big|_{x=0}^{x=1}$$

$$=\frac{1}{4}\cdot 1^2-\frac{1}{4}\cdot 0^2$$

$$=\frac{1}{4}$$

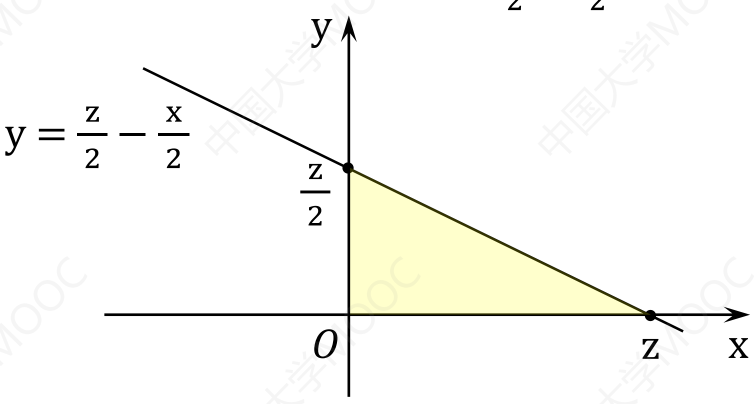
2/8 已知 f(x,y) 求概率

例2. 设二维随机变量(X,Y)的概率密度为

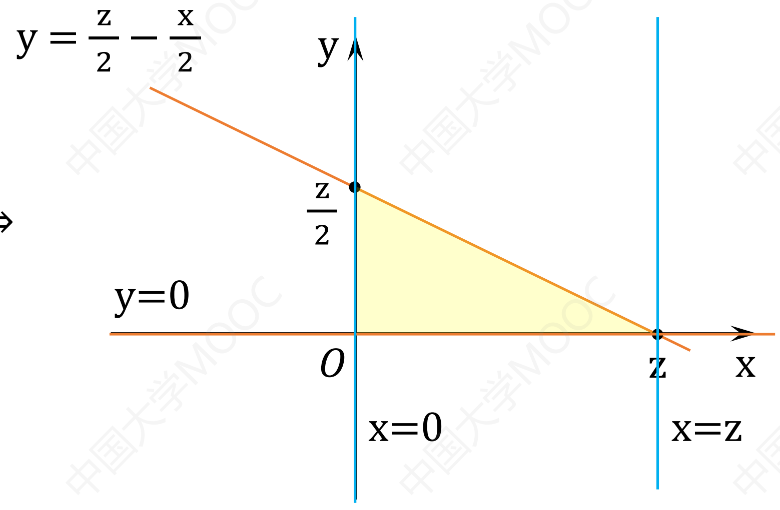
$$f(x,y)=\begin{cases}2e^{-(x+2y)}, & x>0\,,y>0\\ 0, & 其他\end{cases},$$

已知 Z=X+2Y，求 P{Z≤z}

$$X+2Y\le z \Rightarrow Y\le \frac{z}{2}-\frac{x}{2}$$



$\Rightarrow$



当 $\frac{z}{2}\le 0$，即 z≤0 时，
无重合区域
$P=0$

当 $\frac{z}{2}>0$，即 z>0 时，
重合区域如上图

$x_{左}=0$、 $x_{右}=z$

$y_{上}=\frac{z}{2}-\frac{x}{2}$、 $y_{下}=0$

$$\begin{aligned}P\{Z\le z\}&=\int_0^z\left[\int_0^{\frac{z}{2}-\frac{x}{2}}2e^{-(x+2y)}\,dy\right]dx\\
&=\int_0^z\left(\int_0^{\frac{z}{2}-\frac{x}{2}}2e^{-x}e^{-2y}\,dy\right)dx\\
&=\int_0^z 2e^{-x}\left(\int_0^{\frac{z}{2}-\frac{x}{2}}e^{-2y}\,dy\right)dx\\
&=\int_0^z 2e^{-x}\left[\int_0^{\frac{z}{2}-\frac{x}{2}}\left(-\frac{1}{2}e^{-2y}\right)'dy\right]dx\\
&=\int_0^z 2e^{-x}\left[\left(-\frac{1}{2}e^{-2y}\right)\Big|_{y=0}^{y=\frac{z}{2}-\frac{x}{2}}\right]dx\\
&=\int_0^z 2e^{-x}\left(-\frac{1}{2}e^{x-z}+\frac{1}{2}\right)dx\\
&=\int_0^z(-e^{-z}+e^{-x})dx\\
&=\int_0^z(-e^{-z}x-e^{-x})'dx\\
&=(-e^{-z}x-e^{-x})\Big|_{x=0}^{x=z}\\
&=1-e^{-z}-ze^{-z}\end{aligned}$$

求 $\int ?\,dx$ 时，仅需把式子中的x当未知数，其他字母当常数，所以此处 z当作常数，进而$-e^{-z}$也当作常数

综上:

$$P\{Z\le z\}=\begin{cases}0, & z\le 0\\ 1-e^{-z}-ze^{-z}, & z>0\end{cases}$$

$$\iint\limits_{\substack{-\infty<x<+\infty\\-\infty<y<+\infty}} f(x,y)\,dxdy=1$$

3/8 已知 f(x,y) 求 F

$F_A(a)=P\{A\le a\}$

例1. 设二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}2e^{-(x+2y)}, & x>0,y>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases},$$

已知 $Z=X+2Y$，求 $F_Z(z)$

$F_Z(z)=P\{Z\le z\}$

$$P\{Z\le z\}=\begin{cases}0, & z\le 0\\ 1-e^{-z}-ze^{-z}, & z>0\end{cases}$$

本课类型2例2求过

4/8 已知 f(x,y) 求 $f_Z(z)$

例1. 设二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} 2e^{-(x+2y)}, & x>0\,,y>0 \\ 0 & ,\text{其他} \end{cases},$$

已知 Z=X+2Y，求 $f_Z(z)$

普通求法：（麻烦，但是所有题都能用）

$$F_Z(z)=\begin{cases} 0 & ,\ z\le 0 \\ 1-e^{-z}-ze^{-z}, & z>0 \end{cases}$$

本课类型3例1求过

$$f_Z(z)=\begin{cases} 0\,' & ,\ z\le 0 \\ (1-e^{-z}-ze^{-z})\,', & z>0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f_Z(z)=\begin{cases} 0 & ,\ z\le 0 \\ 1\,'-(e^{-z})\,'-(ze^{-z})\,' & ,\ z>0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f_Z(z)=\begin{cases} 0 & ,\ z\le 0 \\ 0-(-e^{-z})-[z\,'\cdot e^{-z}+z\cdot(e^{-z})\,'], & z>0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f_Z(z)=\begin{cases} 0 & ,\ z\le 0 \\ e^{-z}-[1\cdot e^{-z}+z\cdot(-e^{-z})], & z>0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f_Z(z)=\begin{cases} 0 & ,\ z\le 0 \\ ze^{-z}, & z>0 \end{cases}$$

公式法(消y)：(在 Z＝几倍 X 和几倍 Y 加减乘除时，用此法简单）

① $Z=X+2Y \Rightarrow z=x+2y \Rightarrow y=\frac{z-x}{2}$

$$\frac{\partial y}{\partial z}=\frac{1}{2} \Rightarrow \left|\frac{\partial y}{\partial z}\right|=\left|\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{z-x}{2}\right)' &= \left(\frac{1}{2}z-\frac{x}{2}\right)' \\ &= \left(\frac{1}{2}z\right)'-\left(\frac{x}{2}\right)' \\ &= \frac{1}{2}-0 \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

② $f(x,y)=\begin{cases} 2e^{-\left(x+2\cdot\frac{z-x}{2}\right)}, & x>0\,,\frac{z-x}{2}>0 \\ 0 & ,\text{其他} \end{cases} \Rightarrow f(x,y)=\begin{cases} 2e^{-z}, & x>0\,,x<z \\ 0 & ,\text{其他} \end{cases}$

③ $f_Z(z)=\int_{\min[f(x,y)\text{非零区域}]}^{\max[f(x,y)\text{非零区域}]} 2e^{-z}\cdot\frac{1}{2}\,dx \Rightarrow f_Z(z)=\int_{\min[x>0,x<z]}^{\max[x>0,x<z]} e^{-z}\,dx$

当 z>0 时，

$x>0\,,x<z \Rightarrow 0<x<z$

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \int_0^z e^{-z}\,dx \\ &= \int_0^z (e^{-z}x)'\,dx \\ &= (e^{-z}x)\Big|_{x=0}^{x=z} \\ &= ze^{-z}\end{aligned}$$

求∫某式子dx时，只需把x当未知数，其他字母当常数，所以z为常数，进而e^{-z}也是常数

当 z≤0 时，

$x>0\,,x<z$ 不存在

$f_Z(z)=0$

综上：

$$f_Z(z)=\begin{cases} 0 & ,\ z\le 0 \\ ze^{-z}, & z>0 \end{cases}$$

4/8 已知 f(x,y) 求 $f_Z(z)$

公式法(消x)：(在 Z＝几倍 X 和几倍 Y 加减乘除时，用此法简单）（注 : 此方法视频中没给具体解题过程）

① $Z=X+2Y \Rightarrow z=x+2y \Rightarrow x=z-2y$

$\frac{\partial x}{\partial z}=1 \Rightarrow \left|\frac{\partial x}{\partial z}\right|=|1|=1$

$$\begin{aligned}(z-2y)'&=z'-(2y)'\\&=1-0\\&=1\end{aligned}$$

② $f(x,y)=\begin{cases}2e^{-(z-2y+2y)}, & z-2y>0\,,y>0\\ 0 & ,其他\end{cases} \Rightarrow f(x,y)=\begin{cases}2e^{-z}, & y<\frac{z}{2}\,,y>0\\ 0 & ,其他\end{cases}$

③ $f_Z(z)=\int_{\min[f(x,y)非零区域]}^{\max[f(x,y)非零区域]} 2e^{-z}\cdot 1\,dy \Rightarrow f_Z(z)=\int_{\min[y<\frac{z}{2},y>0]}^{\max[y<\frac{z}{2},y>0]} 2e^{-z}\,dy$

当 z>0 时，

$y<\frac{z}{2},y>0 \Rightarrow 0<y<\frac{z}{2}$

$$\begin{aligned}f_Z(z)&=\int_0^{\frac{z}{2}} 2e^{-z}\,dy\\&=\int_0^{\frac{z}{2}}(2ye^{-z})'\,dy\\&=(2ye^{-z})\Big|_{y=0}^{y=\frac{z}{2}}\\&=ze^{-z}\end{aligned}$$

求∫某式子dy时，只需把y当未知数，其他字母当常数，所以z为常数，进而$2e^{-z}$也是常数

当 z≤0 时，

$y<\frac{z}{2},y>0$ 不存在

$f_Z(z)=0$

综上:

$$f_Z(z)=\begin{cases}0, & z\le 0\\ ze^{-z}, & z>0\end{cases}$$

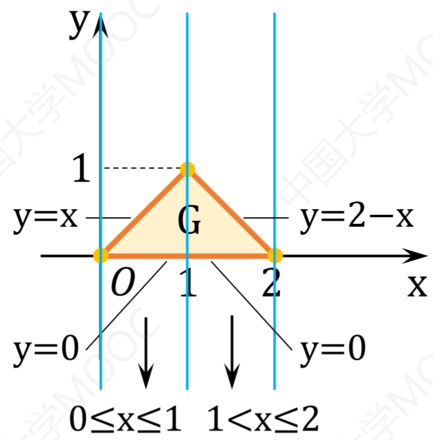
5/8 已知 f(x,y) 求 $f_X(x)$、$f_Y(y)$

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx$$

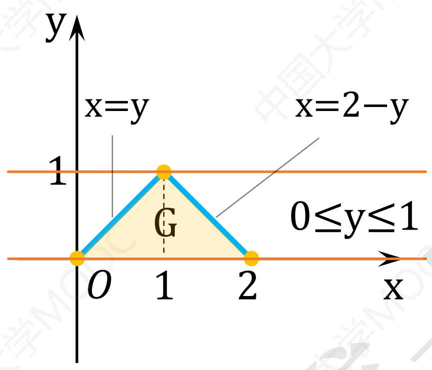
例1. 设区域 G 是由 x−y=0，x+y=2 与 y=0 所围成的三角形区域，二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$f(x,y)=\begin{cases}1, & (x,y)\in G\\ 0, & 其他\end{cases}$，求(X,Y) 的边缘概率密度 $f_X(x)$、$f_Y(y)$



$$f_X(x)=\begin{cases}\int_0^x 1\,dy & ,\ 0\le x\le 1\\ \int_0^{2-x} 1\,dy & ,\ 1<x\le 2\\ 0 & ,\ 其他\end{cases} \Rightarrow f_X(x)=\begin{cases}x & ,\ 0\le x\le 1\\ 2-x & ,\ 1<x\le 2\\ 0 & ,\ 其他\end{cases}$$

$$\boxed{\begin{aligned}&\int_0^x 1\,dy=\int_0^x y'\,dy=y|_{y=0}^{y=x}=x-0=x\\ &\int_0^{2-x} 1\,dy=\int_0^{2-x} y'\,dy=y|_{y=0}^{y=2-x}=2-x-0=2-x\end{aligned}}$$



$$f_Y(y)=\begin{cases}\int_y^{2-y} 1\,dx & ,\ 0\le y\le 1\\ 0 & ,\ 其他\end{cases} \Rightarrow f_Y(y)=\begin{cases}2-2y & ,\ 0\le y\le 1\\ 0 & ,\ 其他\end{cases}$$

$$\boxed{\int_y^{2-y} 1\,dx=\int_y^{2-y} x'\,dx=x|_{x=y}^{x=2-y}=2-y-y=2-2y}$$

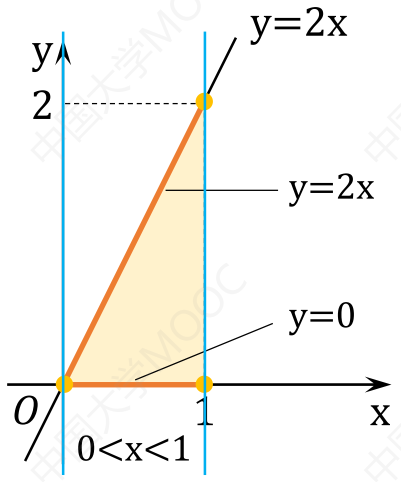
5/8 已知 f(x,y) 求 $f_X(x)$、$f_Y(y)$

例2. 设二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & 0<x<1,0<y<2x\\ 0, & 其他\end{cases},$$

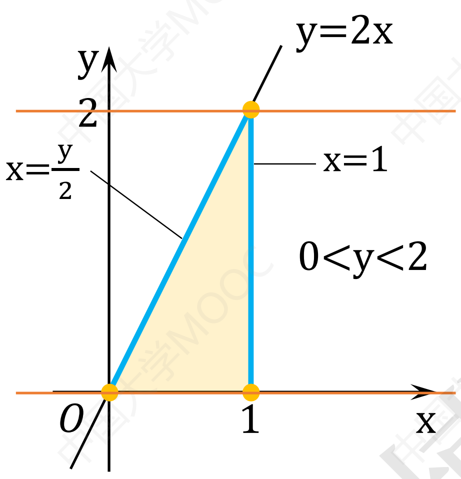
（注：此题视频中没给具体解题过程）

求 (X,Y) 的边缘概率密度 $f_X(x)$、$f_Y(y)$



$$f_X(x)=\begin{cases}\int_0^{2x}1\,dy, & 0<x<1\\ 0 & ，其他\end{cases} \Rightarrow f_X(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1\\ 0 & ，其他\end{cases}$$

$$\boxed{\int_0^{2x}1\,dy=y|_{y=0}^{y=2x}=2x-0=2x}$$



$$f_Y(y)=\begin{cases}\int_{\frac{y}{2}}^{1}1\,dx, & 0<y<2\\ 0 & ，其他\end{cases} \Rightarrow f_Y(y)=\begin{cases}1-\frac{y}{2}, & 0<y<2\\ 0 & ，其他\end{cases}$$

$$\boxed{\int_{\frac{y}{2}}^{1}1\,dx=x|_{x=\frac{y}{2}}^{x=1}=1-\frac{y}{2}}$$

6/8 已知 f(x,y) 求期望和方差

例1. 设区域 G 是由 x−y=0，x+y=2 与 y=0 所围成的三角形区域，二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & (x,y)\in G\\ 0, & 其他\end{cases}，求EX、E(X^2)、EY、DX$$

$$f_X(x)=\begin{cases}x, & 0\le x\le 1\\ 2-x, & 1<x\le 2\\ 0, & 其他\end{cases}$$

本课类型5例1求过

$$f_Y(y)=\begin{cases}2-2y, & 0\le y\le 1\\ 0, & 其他\end{cases}$$

$$\begin{aligned}EX&=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_X(x)\,dx\\&=\int_{-\infty}^{0}x\cdot 0\,dx+\int_0^1 x\cdot x\,dx+\int_1^2 x\cdot(2-x)\,dx+\int_2^{+\infty}x\cdot 0\,dx\\&=\int_{-\infty}^{0}0\,dx+\int_0^1 x^2\,dx+\int_1^2(2x-x^2)\,dx+\int_2^{+\infty}0\,dx\\&=0+\int_0^1\left(\tfrac{1}{3}x^3\right)'dx+\int_1^2\left(x^2-\tfrac{1}{3}x^3\right)'dx+0\\&=\left(\tfrac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^1+\left(x^2-\tfrac{1}{3}x^3\right)\Big|_1^2\\&=\left(\tfrac{1}{3}\times 1^3\right)-\left(\tfrac{1}{3}\times 0^3\right)+\left(2^2-\tfrac{1}{3}\times 2^3\right)-\left(1^2-\tfrac{1}{3}\times 1^3\right)\\&=1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}E(X^2)&=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f_X(x)\,dx\\&=\int_{-\infty}^{0}x^2\cdot 0\,dx+\int_0^1 x^2\cdot x\,dx+\int_1^2 x^2\cdot(2-x)\,dx+\int_2^{+\infty}x^2\cdot 0\,dx\\&=\int_{-\infty}^{0}0\,dx+\int_0^1 x^3\,dx+\int_1^2(2x^2-x^3)\,dx+\int_2^{+\infty}0\,dx\\&=0+\int_0^1\left(\tfrac{1}{4}x^4\right)'dx+\int_1^2\left(\tfrac{2}{3}x^3-\tfrac{1}{4}x^4\right)'dx+0\\&=\left(\tfrac{1}{4}x^4\right)\Big|_0^1+\left(\tfrac{2}{3}x^3-\tfrac{1}{4}x^4\right)\Big|_1^2\\&=\left(\tfrac{1}{4}\times 1^4\right)-\left(\tfrac{1}{4}\times 0^4\right)+\left(\tfrac{2}{3}\times 2^3-\tfrac{1}{4}\times 2^4\right)-\left(\tfrac{2}{3}\times 1^3-\tfrac{1}{4}\times 1^4\right)\\&=\tfrac{7}{6}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}EY&=\int_{-\infty}^{+\infty}yf_Y(y)\,dy\\&=\int_{-\infty}^{0}y\cdot 0\,dy+\int_0^1 y\cdot(2-2y)\,dy+\int_1^{+\infty}y\cdot 0\,dy\\&=\int_{-\infty}^{0}0\,dy+\int_0^1(2y-2y^2)\,dy+\int_1^{+\infty}0\,dy\\&=0+\int_0^1\left(y^2-\tfrac{2}{3}y^3\right)'dy+0\\&=\left(y^2-\tfrac{2}{3}y^3\right)\Big|_0^1\\&=\left(1^2-\tfrac{2}{3}\times 1^3\right)-\left(0^2-\tfrac{2}{3}\times 0^3\right)\\&=\tfrac{1}{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}DX&=E(X^2)-(EX)^2\\&=\tfrac{7}{6}-1^2\\&=\tfrac{1}{6}\end{aligned}$$

$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_X(x)\,dx$

$E[g(X)]=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)f_X(x)\,dx$

$E(aX+bY+c)=aEX+bEY+c$

E(某常数) = 该常数

$DX=E(X^2)-(EX)^2$

$D(aX+c)=a^2DX$

D(常数) = 0

D(任意量) ≥ 0

7/8 已知 F(x,y) 求 f(x,y)

$$f(x,y)=\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}$$

例1. $F(x,y)=\begin{cases} xy\text{，}0<x<1,0<y<1 \\ x\text{，}0<x<1,y\ge 1 \\ y\text{，}x\ge 1,0<y<1 \\ 1\text{，}x\ge 1,y\ge 1 \\ 0\text{，其他}\end{cases}$ ，求 f(x,y)

$$f(x,y)=\begin{cases} \frac{\partial^2(xy)}{\partial x\partial y}\text{，}0<x<1,0<y<1 \\ \frac{\partial^2(x)}{\partial x\partial y}\text{，}0<x<1,y\ge 1 \\ \frac{\partial^2(y)}{\partial x\partial y}\text{，}x\ge 1,0<y<1 \\ \frac{\partial^2(1)}{\partial x\partial y}\text{，}x\ge 1,y\ge 1 \\ \frac{\partial^2(0)}{\partial x\partial y}\text{，其他}\end{cases}$$

① $\because (x\cdot a)'=a$

$\therefore (x\cdot y)'=y$

② $y'=1$

$$\Rightarrow f(x,y)=\begin{cases} 1\text{，}0<x<1,0<y<1 \\ 0\text{，}0<x<1,y\ge 1 \\ 0\text{，}x\ge 1,0<y<1 \\ 0\text{，}x\ge 1,y\ge 1 \\ 0\text{，其他}\end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x,y)=\begin{cases} 1\text{，}0<x<1,0<y<1 \\ 0\text{，其他}\end{cases}$$

8/8 已知 $F(x,y)$ 求 $F_X(x)$ 、 $F_Y(y)$

$F_X(x)=F(x,+\infty)$

$F_Y(y)=F(+\infty,y)$

例1. 设随机变量(X,Y)的分布函数为：

$$F(x,y)=\frac{1}{\pi^2}\left(\frac{\pi}{2}+\arctan x\right)\left(\frac{\pi}{2}+\arctan 2y\right),\ -\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty$$

求边缘分布函数 $F_X(x)$、$F_Y(y)$

$$\begin{aligned}F_X(x)&=F(x,+\infty)\\&=\frac{1}{\pi^2}\left(\frac{\pi}{2}+\arctan x\right)\left[\frac{\pi}{2}+\arctan 2(+\infty)\right]\\&=\frac{1}{\pi^2}\left(\frac{\pi}{2}+\arctan x\right)\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)\\&=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arctan x,\ -\infty<x<+\infty\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F_Y(y)&=F(+\infty,y)\\&=\frac{1}{\pi^2}\left[\frac{\pi}{2}+\arctan(+\infty)\right]\left(\frac{\pi}{2}+\arctan 2y\right)\\&=\frac{1}{\pi^2}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)\left(\frac{\pi}{2}+\arctan 2y\right)\\&=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arctan 2y,\ -\infty<y<+\infty\end{aligned}$$

$F(x,y)=P\{X\le x,Y\le y\}$

$F(+\infty,+\infty)=1$

$F(?,-\infty)=0$

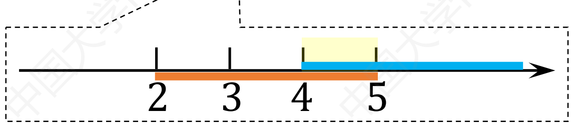
$F(-\infty,?)=0$

常见的分布 — 均匀分布

常见分布	常见描述	考点
均匀分布 (一维)	① X~U[a,b]或X~U(a,b) ② X在[a,b]或(a,b)上服从均匀分布	① $P\{\text{某事儿}\}=\dfrac{\text{均匀区间与该事儿重合段长度}}{b-a}$ ② $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & x\in\text{均匀区间}\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$ ③ $EX=\dfrac{a+b}{2}$、$DX=\dfrac{(b-a)^2}{12}$
均匀分布 (二维)	(X,Y)在区域G上服从均匀分布	① $P\{\text{待求式子}\}=\dfrac{\text{区域D的面积}}{\text{区域G的面积}}$，其中 $D:\begin{cases}\text{区域G}\\ \text{待求式子的区域}\end{cases}$ 的重合区域 ② $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\text{区域G的面积}}, & (x,y)\in\text{区域G}\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

例1 . 设随机变量 X~U[2,5]，求 P{X≥4}、EX、DX

$$P\{X\geq 4\}=\frac{[2,5]\text{与}X\geq 4\text{重合段长度}}{5-2}=\frac{1}{5-2}=\frac{1}{3}$$



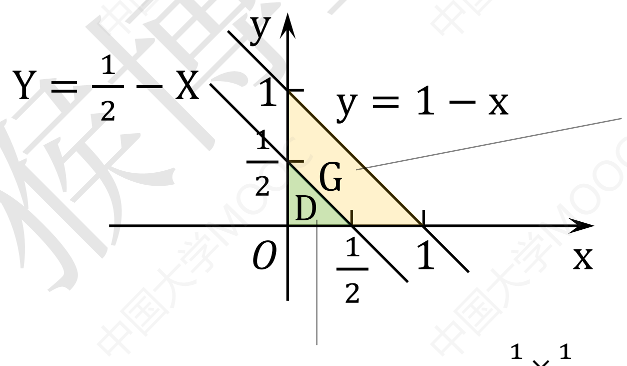
$$EX=\frac{2+5}{2}=\frac{7}{2}$$

$$DX=\frac{(5-2)^2}{12}=\frac{3}{4}$$

例3. 设二维随机变量(X,Y)在区域G={(x,y)|x ≥ 0, y ≥ 0, x + y ≤ 1} 上服从均匀分布，

求 $P\left\{X+Y\leq\frac{1}{2}\right\}$

$$P\left\{X+Y\leq\frac{1}{2}\right\}=\frac{\text{区域D的面积}}{\text{区域G的面积}}=\frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{4}$$



$$\text{区域G的面积}=\frac{1\times 1}{2}=\frac{1}{2}$$

$$\text{区域D的面积}=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}{2}=\frac{1}{8}$$

常见的分布 — 泊松分布

常见分布	常见描述	考点
泊松分布	① $X \sim P(\lambda)$ ② X服从参数为 λ 的泊松分布	① $P\{X=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$，k=0,1,2,⋯ (其中 λ>0) ② $EX=\lambda$ 、$DX=\lambda$

例1. 设随机变量 $X \sim P(5)$，求 $P\{X=2\}$、EX、DX

$$P\{X=2\}=\frac{5^2}{2!}e^{-5}$$

$$=\frac{25}{2\times1}e^{-5}$$

$$=\frac{25}{2}e^{-5}$$

$EX=5$

$DX=5$

常见的分布 — 指数分布

常见分布	常见描述	考点
指数分布	① $X \sim E(\lambda)$ ② X服从参数为 λ 的指数分布	① $P\{X在a到b之间\} = \int_a^b f(x)dx$， 其中 $f(x)=\begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \end{cases}$ （$\lambda>0$） ② P{X已怎样后,X还能再继续如何}=P{X能如何} ③ $EX = \frac{1}{\lambda}$、$DX = \frac{1}{\lambda^2}$

例1. 某种电子元件的使用寿命 X (单位:小时)

服从 $\lambda=\frac{1}{2000}$ 的指数分布。求 一个元件的

正常使用时间在1000小时以下的概率

$P\{-\infty<X<1000\}$

$$P\{-\infty<X<1000\} = \int_{-\infty}^{1000} f(x)dx，其中 f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \frac{1}{2000} e^{-\frac{1}{2000}x}, & x > 0 \end{cases}$$

$$= \int_{-\infty}^{0} 0\, dx + \int_{0}^{1000} \frac{1}{2000} e^{-\frac{1}{2000}x} dx$$

$$= 0 + \left(-e^{-\frac{1}{2000}x}\right)\Big|_0^{1000}$$

$$= \left(-e^{-\frac{1}{2000}\times 1000}\right) - \left(-e^{-\frac{1}{2000}\times 0}\right)$$

$$= \left(-e^{-\frac{1}{2}}\right) - (-1)$$

$$= 1-e^{-\frac{1}{2}}$$

常见的分布 — 正态分布

正态分布(一维)

<table>
<tr><td>常见描述</td><td>① $X \sim N(\mu,\sigma^2)$
② X服从 μ 为多少， σ 或 σ^2 为多少的正态分布
均值 标准差/均方差 方差 【注：$\sigma>0$】
③ $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$，$-\infty<x<+\infty$</td></tr>
<tr><td>考点</td><td>① $P\{X在a到b之间\}=\Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$ 【只需记住：$\Phi(+\infty)=1$、$\Phi(-\infty)=0$、$\Phi(0)=0.5$、$\Phi(a)=1-\Phi(-a)$】
② $\Phi(a)>\Phi(b) \Rightarrow a>b$
③ 标准正态分布 $\Rightarrow \mu=0$，$\sigma=1$
④ $\Phi'(x)$ 相当于 $\mu=0$，$\sigma=1$ 时的 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot 1}e^{-\frac{(x-0)^2}{2\cdot 1^2}}$，$-\infty<x<+\infty$ 即 $\Phi'(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$，$-\infty<x<+\infty$
⑤ 若 $X\sim N(\mu_1,\sigma_1{}^2)$、$Y\sim N(\mu_2,\sigma_2{}^2)$，且 X 与 Y 相互独立，则 $aX+bY+c\sim N(a\mu_1+b\mu_2+c,a^2\sigma_1{}^2+b^2\sigma_2{}^2)$
⑥ $aX+c\sim N(a\mu+c,a^2\sigma^2)$
⑦ $X\sim N(\alpha,\beta) \Rightarrow \frac{X-\alpha}{\sqrt{\beta}}\sim N(0,1)$
⑧ $EX=\mu$、$DX=\sigma^2$</td></tr>
</table>

例1. 设随机变量X服从μ为10，σ为0.02的正态分布，

$\Phi(2.5)=0.9938$，则 $P\{-\infty<X<9.95\}=$____，$P\{X>9.95\}=$____。

$$
\begin{aligned}
P\{-\infty<X<9.95\} &= \Phi\left(\frac{9.95-10}{0.02}\right)-\Phi\left(\frac{-\infty-10}{0.02}\right)\\
&= \Phi(-2.5) - \Phi(-\infty)\\
&= 0.0062 - 0\\
&= 0.0062
\end{aligned}
$$

$\Phi(-2.5)=1-\Phi(2.5)=1-0.9938=0.0062$

$$
\begin{aligned}
P\{9.95<X<+\infty\} &= \Phi\left(\frac{+\infty-10}{0.02}\right)-\Phi\left(\frac{9.95-10}{0.02}\right)\\
&= \Phi(+\infty) - \Phi(-2.5)\\
&= 1 - 0.0062\\
&= 0.9938
\end{aligned}
$$

$\Phi(-2.5)=1-\Phi(2.5)=1-0.9938=0.0062$

例2. 设随机变量Y服从μ为0，σ为1的正态分布，

则 $P\{Y<0\}=$____，$P\{Y>0\}=$____。

$$
\begin{aligned}
P\{-\infty<Y<0\} &= \Phi\left(\frac{0-0}{1}\right)-\Phi\left(\frac{-\infty-0}{1}\right)\\
&= \Phi(0) - \Phi(-\infty)\\
&= 0.5 - 0\\
&= 0.5
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P\{0<Y<+\infty\} &= \Phi\left(\frac{+\infty-0}{1}\right)-\Phi\left(\frac{0-0}{1}\right)\\
&= \Phi(+\infty) - \Phi(0)\\
&= 1 - 0.5\\
&= 0.5
\end{aligned}
$$

常见的分布 — 正态分布

例3. 设随机变量X服从μ为2的正态分布，

且P{X<4}=0.8，则 P{0<X<2} = ______。

$$P\{-\infty<X<4\}=\Phi\left(\frac{4-2}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{-\infty-2}{\sigma}\right)$$

$$=\Phi\left(\frac{2}{\sigma}\right)-\Phi(-\infty)$$

$$=\Phi\left(\frac{2}{\sigma}\right)-0$$

$$=\Phi\left(\frac{2}{\sigma}\right)$$

$\because P\{X<4\}=0.8$

$\therefore \Phi\left(\frac{2}{\sigma}\right)=0.8$

$$P\{0<X<2\}=\Phi\left(\frac{2-2}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{0-2}{\sigma}\right)$$

$$=\Phi(0)-\Phi\left(-\frac{2}{\sigma}\right)$$

$$=0.5-\Phi\left(-\frac{2}{\sigma}\right)$$

$$\boxed{\Phi\left(-\frac{2}{\sigma}\right)=1-\Phi\left(\frac{2}{\sigma}\right)=1-0.8=0.2}$$

$$=0.5-0.2$$

$$=0.3$$

例4. 设随机变量$X\sim N(0,\sigma_X^2)$，随机变量$Y\sim N(1,\sigma_Y^2)$，

若P{X<−1}>P{Y>2}，则$\Phi\left(-\frac{1}{\sigma_X}\right)$ ______ $\Phi\left(-\frac{1}{\sigma_Y}\right)$ (填>、< 或 =)

$$P\{-\infty<X<-1\}=\Phi\left(\frac{-1-0}{\sigma_X}\right)-\Phi\left(\frac{-\infty-0}{\sigma_X}\right)$$

σ 均>0

$$=\Phi\left(-\frac{1}{\sigma_X}\right)-\Phi(-\infty)$$

$$=\Phi\left(-\frac{1}{\sigma_X}\right)-0$$

$$=\Phi\left(-\frac{1}{\sigma_X}\right)$$

$$P\{2<Y<+\infty\}=\Phi\left(\frac{+\infty-1}{\sigma_Y}\right)-\Phi\left(\frac{2-1}{\sigma_Y}\right)$$

σ 均>0

$$=\Phi(+\infty)-\Phi\left(\frac{1}{\sigma_Y}\right)$$

$$=1-\Phi\left(\frac{1}{\sigma_Y}\right)$$

$$=\Phi\left(-\frac{1}{\sigma_Y}\right)$$

$\because P\{X<-1\}>P\{Y>2\}$

$\therefore \Phi\left(-\frac{1}{\sigma_X}\right)>\Phi\left(-\frac{1}{\sigma_Y}\right)$

考试会考 . 设随机变量$X\sim N(0,\sigma_X^2)$，随机变量$Y\sim N(1,\sigma_Y^2)$，

若P{X<−1}>P{Y>2}，则 σ_X ______ σ_Y(填>、< 或 =)

本课例4 已求得 : $\Phi\left(-\frac{1}{\sigma_X}\right)>\Phi\left(-\frac{1}{\sigma_Y}\right)$

$$\Rightarrow -\frac{1}{\sigma_X}>-\frac{1}{\sigma_Y}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{\sigma_X}\cdot\sigma_X\sigma_Y>-\frac{1}{\sigma_Y}\cdot\sigma_X\sigma_Y$$

$$\Rightarrow -\sigma_Y>-\sigma_X$$

$$\Rightarrow \sigma_Y<\sigma_X$$

$\therefore \sigma_X>\sigma_Y$

常见的分布 — 正态分布

例5. 设随机变量 X 服从标准正态分布，则 f(x) = ________________。

$\Longrightarrow \mu=0，\sigma=1$

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\times 1}e^{-\frac{(x-0)^2}{2\times 1^2}}，-\infty<x<+\infty$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}，-\infty<x<+\infty$$

例6. 设随机变量 X 与 Y 相互独立，且 $X\sim N\left(1,\left(\sqrt{2}\right)^2\right)$，$Y\sim N(0,1^2)$。

试求随机变量 $Z=2X-Y+3$ 的概率密度

$$2X-Y+3\sim N\left(2\times 1+(-1)\times 0+3\,,2^2\times\left(\sqrt{2}\right)^2+(-1)^2\times 1^2\right)$$

即 $2X-Y+3\sim N(5,3^2)$

即 $Z\sim N(5,3^2)$

$$\therefore f_Z(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\times 3}e^{-\frac{(z-5)^2}{2\times 3^2}}，-\infty<z<+\infty$$

$$=\frac{1}{3\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(z-5)^2}{18}}，-\infty<z<+\infty$$

例7. 设连续型随机变量 X 服从 μ 为 0，σ 为 1 的正态分布，则 3X+2~ ________。

$3X+2\sim N(3\times 0+2\,,3^2\times 1^2)$

即 $3X+2\sim N(2,9)$

例8. 设连续型随机变量 $X\sim N(2,9)$，已知 $A(X)\sim N(0,1)$，则 A(X) = ____。

$X\sim N(2,9)\Longrightarrow \frac{X-2}{\sqrt{9}}\sim N(0,1)$

即 $\frac{X-2}{3}\sim N(0,1)$

$\because A(X)\sim N(0,1)$

$\therefore A(X)=\frac{X-2}{3}$

例9. 设连续型随机变量 X 服从 μ 为 θ，σ 为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 的正态分布，则 EX = ____，DX = ____。

$EX=\theta$

$DX=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$

常见的分布 — 正态分布

正态分布(二维)

常见描述	① $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2\,;\sigma_1{}^2,\sigma_2{}^2\,;\rho)$ ② (X,Y)服从参数为 μ_1,μ_2， σ_1,σ_2， ρ 的二维正态分布 均值　标准差/均方差　相关系数 ③ $f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}\,\sigma_1\sigma_2}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1{}^2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2{}^2}-\frac{2\rho(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}\right]}$，$-\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty$ (其中，μ_1、μ_2 为常数，σ_1、σ_2 为正常数，$-1<\rho<1$)
考点	① 若 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2;\sigma_1{}^2,\sigma_2{}^2;\rho)$，则： (1) $X\sim N(\mu_1,\sigma_1{}^2)$ 且 $Y\sim N(\mu_2,\sigma_2{}^2)$； (2) a、b 不全为零时，$aX+bY+c\sim N(a\mu_1+b\mu_2+c,a^2\sigma_1{}^2+b^2\sigma_2{}^2+2\rho ab\sigma_1\sigma_2)$； (3) $\frac{a}{b}\neq\frac{c}{d}$ 时，$(aX+bY,cX+dY)$也服从二维正态分布； (4) X 与 Y 不相关 ($\rho=0$) 时，X 与 Y 相互独立，此时，$P\{X在ab之间,Y在cd之间\}=P\{X在ab之间\}\cdot P\{Y在cd之间\}$ ② $X\sim N(\mu_1,\sigma_1{}^2)$ 且 $Y\sim N(\mu_2,\sigma_2{}^2)$时，$(a_1X+c_1,a_2Y+c_2)$不一定服从二维正态分布【$a_1,a_2,c_1,c_2$ 可为任意常数】

例12. 随机变量X和Y均服从正态分布，则 ______。

(A) (X,Y)一定服从二维正态分布

(B) (X,−Y)不一定服从二维正态分布

(C) X+Y一定服从正态分布

(D) X和Y不相关与相互独立等价

$\because X\sim N(\mu_1,\sigma_1{}^2)$ 且 $Y\sim N(\mu_2,\sigma_2{}^2)$时，$(a_1X+c_1,a_2Y+c_2)$不一定服从二维正态分布【$a_1,a_2,c_1,c_2$ 可为任意常数】

$\therefore$ X和Y均服从正态分布时，$(1\cdot X+0\,,1\cdot Y+0)$ 不一定服从二维正态分布

即 X和Y均服从正态分布时，(X,Y) 不一定服从二维正态分布

$\therefore$ (A)选项错误

$\because X\sim N(\mu_1,\sigma_1{}^2)$ 且 $Y\sim N(\mu_2,\sigma_2{}^2)$时，$(a_1X+c_1,a_2Y+c_2)$不一定服从二维正态分布【$a_1,a_2,c_1,c_2$ 可为任意常数】

$\therefore$ X和Y均服从正态分布时，$(1\cdot X+0\,,-1\cdot Y+0)$不一定服从二维正态分布

即 X和Y均服从正态分布时，(X,−Y) 不一定服从二维正态分布

$\therefore$ (B)选项正确

根据"正态分布(一维)"表格的考点⑤：

若 $X\sim N(\mu_1,\sigma_1{}^2)$、$Y\sim N(\mu_2,\sigma_2{}^2)$，且 X 与 Y 相互独立，则 $aX+bY+c\sim N(a\mu_1+b\mu_2+c\,,a^2\sigma_1{}^2+b^2\sigma_2{}^2)$

而题干只说 X 和 Y 均服从正态分布，没说 X 和 Y 相互独立，所以 X+Y 不一定服从正态分布

$\therefore$ (C)选项错误

$\because$ 若 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2;\sigma_1{}^2,\sigma_2{}^2;\rho)$ 时，则：

X 与 Y 不相关 ($\rho=0$) 时，X 与 Y 相互独立

而题干只说 X 和 Y 均服从正态分布，通过这个条件推不出"(X,Y)一定服从二维正态分布"，

也就是 推不出"X 与 Y 不相关 ($\rho=0$) 时，X 与 Y 相互独立"

$\therefore$ (D)选项错误

例13. 设二维随机变量(X,Y)服从μ_1为10，μ_2为0，σ_1为0.02，σ_2为1，$\Rightarrow$ $X\sim N(10,0.02^2)$ 且 $Y\sim N(0,1^2)$

ρ为0的正态分布，求 $P\{XY-9.95Y<0\}$

$P\{XY-9.95Y<0\}=P\{(X-9.95)Y<0\}$

$=P\{X>9.95,Y<0\}+P\{X<9.95,Y>0\}$　　$\because\rho$为 0 $\therefore$ X 与 Y 相互独立

$=P\{X>9.95\}\cdot P\{Y<0\}+P\{X<9.95\}\cdot P\{Y>0\}$

$=0.9938\times0.5+0.0062\times0.5$　　$P\{X>9.95\}$、$P\{X<9.95\}$本课例1求过，$P\{Y<0\}$、$P\{Y>0\}$本课例2求过

$=0.5$

常见的分布 — 二项分布

常见分布	常见描述	考点
二项分布	① $X\sim B(n,p)$ ② 问某事出现的次数(个数)的期望/方差/某概率，每个结果相互独立且结果是该事儿发生的概率相同。设该事儿出现的次数(个数)为X，则 $X\sim B(n,p)$ 【$n=X_{max}$，p=单次该事儿发生的概率】	① $P\{X=k\}=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$，$k=0,1,2,\cdots,n$ ② $EX=np$ 、$DX=np(1-p)$ ③ 当计算量很大时， $X\sim N\big(np,np(1-p)\big)$ ④ 小题常考：$\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}}\le x\right\}=\Phi(x)$ X 近似地服从 $N\big(np,np(1-p)\big)$，n 越大越近似

例1. 设随机变量 $X\sim B\left(5,\frac{1}{2}\right)$，求 $P\{X=3\}$、EX、DX

$$P\{X=3\}=C_5^3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(1-\frac{1}{2}\right)^{5-3}$$

$$=10\times\frac{1}{8}\times\frac{1}{4}$$

$$=\frac{5}{16}$$

$$C_5^3=\frac{5!}{3!\times(5-3)!}=\frac{5\times4\times3\times2\times1}{3\times2\times1\times2\times1}=10$$

$$EX=5\times\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$$

$$DX=5\times\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{4}$$

例2. 某系统由 100 个部件组成，运行期间每个部件是否损坏是相互独立的，且损坏的概率均为 0.1。若运行期间，损坏部件不超过 10 个则机器运转正常，试求运转正常的概率

$P\{X\le10\}$

设损坏出现的个数为X，则 $X\sim B(100,0.1)$

$X\sim N\big(100\times0.1,100\times0.1\times(1-0.1)\big)$

即 $X\sim N(10,3^2)$

$$P\{X\le10\}=\Phi\left(\frac{10-10}{3}\right)-\Phi\left(\frac{-\infty-10}{3}\right)$$

$$=\Phi(0)-\Phi(-\infty)$$

$$=0.5-0$$

$$=0.5$$

例3. 设随机变量 $X\sim B(n,p)$，记 $\Phi(x)$ 为标准正态分布函数，则有 ____。

A、$\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\frac{X-np}{np\sqrt{(1-p)}}\le x\right\}=\Phi(x)$

B、$\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\frac{X-np}{\sqrt{np}}\le x\right\}=\Phi(x)$

C、$\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\frac{X-np}{np(1-p)}\le x\right\}=\Phi(x)$

D、$\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}}\le x\right\}=\Phi(x)$

根据二项分布表格中的考点④，可以得出此题答案是 D 选项

1/5 协方差、相关系数

例1. 已知 DX=1，DY=4，$\rho_{XY}=-0.5$，则 D(X+Y)= ______。

$D(X+Y)=DX+DY+2Cov(X,Y)$

$=1+4+2\rho_{XY}\sqrt{DX}\sqrt{DY}$

$=1+4+2(-0.5)\times\sqrt{1}\times\sqrt{4}$

$=3$

例2. 将一枚硬币重复掷 n 次，以 X 和 Y 分别表示正面向上和反面向上的次数，则 X 和 Y 的相关系数等于 ______。

(A) -1　　(B) 0　　(C) $\frac{1}{2}$　　(D) 1

$X+Y=n \Rightarrow \underset{a=-1}{Y=-X+n} \Rightarrow \rho_{XY}=-1$　选(A)

例3. 将长度为 1m 的木棒随机地截成两段，则两段的长度的相关系数为 ______。

(注 : 此题视频中没给具体解题过程)

(A) 1　　(B) $\frac{1}{2}$　　(C) $-\frac{1}{2}$　　(D) -1

设截的两段长度分别为 X、Y（单位 : m）

$X+Y=1 \Rightarrow \underset{a=-1}{Y=-X+1} \Rightarrow \rho_{XY}=-1$　选(D)

算协方差 Cov
$$\begin{cases} Cov(X,Y)=E(XY)-EX\cdot EY \\ Cov(X,Y)=Cov(Y,X) \\ Cov(A,A)=DA \\ Cov(aX,bY)=abCov(X,Y) \\ Cov(X_1\pm X_2,Y)=Cov(X_1,Y)\pm Cov(X_2,Y) \\ Cov(X,Y_1\pm Y_2)=Cov(X,Y_1)\pm Cov(X,Y_2) \\ Cov(X,Y)=\rho_{XY}\sqrt{DX}\sqrt{DY} \end{cases}$$

算相关系数 ρ
$$\begin{cases} \rho_{XY}=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}} \\ Y=aX+b\ (a>0) \Rightarrow \rho_{XY}=1 \\ Y=aX+b\ (a<0) \Rightarrow \rho_{XY}=-1 \end{cases}$$

$\rho_{XY}\in[-1,1]$

$$\rho_{XY}=1 \Rightarrow \begin{cases} P\{Y=aX+b\}=1\ (a>0) \\ EY=E(aX+b)=aEX+b \\ DY=D(aX+b)=a^2DX \end{cases}$$

$$\rho_{XY}=-1 \Rightarrow \begin{cases} P\{Y=aX+b\}=1\ (a<0) \\ EY=E(aX+b)=aEX+b \\ DY=D(aX+b)=a^2DX \end{cases}$$

$D(aX+bY+c)=a^2DX+b^2DY+2abCov(X,Y)$

2/5 不相关、相互独立时的期望、方差

例1. 设二维随机变量(X,Y)服从二维正态分布，则随机变量 $\xi=X+Y$ 与 $\eta=X-Y$ 不相关的充分必要条件为 ______。

(A) $EX=EY$　(B) $E(X^2)-(EX)^2=E(Y^2)-(EY)^2$

(C) $E(X^2)=E(Y^2)$　(D) $E(X^2)+(EX)^2=E(Y^2)+(EY)^2$

$$E(\xi\eta)=E\xi\cdot E\eta$$

$\Leftrightarrow$ $E[(X+Y)(X-Y)]=E(X+Y)\cdot E(X-Y)$

$\Leftrightarrow$ $E(X^2-Y^2)=E(X+Y)\cdot E(X-Y)$

$\Leftrightarrow$ $E(X^2)-E(Y^2)=(EX+EY)\cdot(EX-EY)$

$\Leftrightarrow$ $E(X^2)-E(Y^2)=(EX)^2-(EY)^2$

$\Leftrightarrow$ $E(X^2)-(EX)^2=E(Y^2)-(EY)^2$　选 (B)

ξ 与 η 相互独立

$\Downarrow$

ξ 与 η 不相关（即 $\rho_{\xi\eta}=0$）$\Leftrightarrow$ $Cov(\xi,\eta)=0$

$\Updownarrow$　　$\Updownarrow$

$E(\xi\eta)=E\xi\cdot E\eta$ $\Leftrightarrow$ $D(\xi\pm\eta)=D\xi+D\eta$

【其中，ξ 可换为任意未知数只含 ξ 的项，η 可换为任意未知数只含 η 的项。】

(注：此题视频中没给具体解题过程)

例2. 设随机变量 X 与 Y 相互独立，且 EX 与 EY 存在。记 $U=\max\{X,Y\}$，$V=\min\{X,Y\}$，则 $E(UV)=$ ______。

(A) $EU\cdot EV$　(B) $EX\cdot EY$　(C) $EU\cdot EY$　(D) $EX\cdot EV$

$UV=\max\{X,Y\}\cdot\min\{X,Y\}$

$=$ X和Y中较大那个数·X和Y中较小那个数

$=XY$

$E(UV)=E(XY)=EX\cdot EY$

X 与 Y 相互独立

$\Downarrow$

X 与 Y 不相关（即 $\rho_{XY}=0$）$\Leftrightarrow$ $Cov(X,Y)=0$

$\Updownarrow$　　$\Updownarrow$

$E(XY)=EX\cdot EY$ $\Leftrightarrow$ $D(X\pm Y)=DX+DY$

【其中，X 可换为任意未知数只含 X 的项，Y 可换为任意未知数只含 Y 的项】

(注：此题视频中没给具体解题过程)

例3. 设两个相互独立的随机变量 X 和 Y 的方差分别为 4 和 2，则随机变量 $X-Y$ 的方差是 ______。

$$D(X-Y)=DX+DY=4+2=6$$

X 与 Y 相互独立

$\Downarrow$

X 与 Y 不相关（即 $\rho_{XY}=0$）$\Leftrightarrow$ $Cov(X,Y)=0$

$\Updownarrow$　　$\Updownarrow$

$E(XY)=EX\cdot EY$ $\Leftrightarrow$ $D(X\pm Y)=DX+DY$

【其中，X 可换为任意未知数只含 X 的项，Y 可换为任意未知数只含 Y 的项】

3/5 切比雪夫不等式

$P\{|\text{含未知数部分} - E(\text{含未知数部分})| \geq a\} \leq \frac{D(\text{含未知数部分})}{a^2}$

例1. 设随机变量 X 的期望为 0，方差为 2，根据切比雪夫不等式估计 $P\{|X|\geq 2\} \leq$ ______。

$EX = 0$

$P\{|X - EX| \geq 2\} \leq \frac{DX}{2^2}$

$\Rightarrow P\{|X - 0| \geq 2\} \leq \frac{2}{2^2}$

$\Rightarrow P\{|X| \geq 2\} \leq \frac{1}{2}$

例2. 设随机变量 X 和 Y 的数学期望分别为 -2 和 2，方差分别为 1 和 4，相关系数为 -0.5，则 $P\{|X+Y|\geq 6\} \leq$ _____。

（注：此题视频中没给具体解题过程）

$E(X+Y) = EX+EY = -2+2 = 0$

$P\{|X+Y-E(X+Y)| \geq 6\} \leq \frac{D(X+Y)}{6^2}$ 本课类型1例1求过

$\Rightarrow P\{|X+Y-0| \geq 6\} \leq \frac{3}{6^2}$

$\Rightarrow P\{|X+Y| \geq 6\} \leq \frac{1}{12}$

例3. 设随机变量 X 满足 $EX = 2$，$DX=3$，根据切比雪夫不等式估计 $P\{|X-2|<4\} \geq$ _____。

（注：此题视频中没给具体解题过程）

$EX = 2$

$P\{|X-EX| \geq 4\} \leq \frac{DX}{4^2}$

$\Rightarrow P\{|X-2| \geq 4\} \leq \frac{3}{4^2}$

$\Rightarrow 1 - P\{|X-2|<4\} \leq \frac{3}{16}$

$\Rightarrow -P\{|X-2|<4\} \leq -\frac{13}{16}$

$\Rightarrow P\{|X-2|<4\} \geq \frac{13}{16}$

4/5 大数定律

式子 $\xrightarrow{P} \lim\limits_{n\to\infty}[E(\text{式子})]$

例1. 设随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立，且均服从期望为$\frac{7}{2}$的分布

则当 $n\to\infty$ 时，$\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i \xrightarrow{P}$ _____。

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i \xrightarrow{P} \lim_{n\to\infty}\left[E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}E\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}E(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)\right]$$

$E(X+Y) = EX + EY$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}(EX_1 + EX_2 + \cdots + EX_n)\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}\left(\frac{7}{2} + \frac{7}{2} + \cdots + \frac{7}{2}\right)\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}\left(\frac{7}{2}n\right)\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{7}{2}$$

$$= \frac{7}{2}$$

例2. 设随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立，且均服从参数为 2 的泊松分布，

(注：此题视频中没给具体解题过程)

则当 $n\to\infty$ 时，$\frac{1}{n+1}\sum\limits_{i=1}^{n}{X_i}^2 \xrightarrow{P}$ _____。

$$\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n}X_i \xrightarrow{P} \lim_{n\to\infty}\left[E\left(\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n+1}E\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n+1}E(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)\right]$$

$E(X+Y) = EX + EY$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n+1}(EX_1 + EX_2 + \cdots + EX_n)\right]$$

$\because X_1, X_2, \cdots, X_n$ 均服从参数为 2 的泊松分布
$\therefore EX_1 = EX_2 = \cdots = EX_n = 2$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n+1}(2 + 2 + \cdots + 2)\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n+1}(2n)\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n+1}$$

$\frac{\infty}{\infty}$ 型，只保留分子和分母上指数最大的无穷大项

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}2$$

$$= 2$$

5/5 中心极限定理

例1. 设 X_1、X_2、$\cdots$ X_n 为独立同分布的随机变量序列，

且均服从参数为 λ ($\lambda>1$) 的指数分布，记 $\Phi(x)$ 为标准

正态分布函数，则有 ______。

(A) $\lim\limits_{n\to\infty} P\left\{\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i - n\lambda}{\lambda\sqrt{n}} \le x\right\} = \Phi(x)$ (B) $\lim\limits_{n\to\infty} P\left\{\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i - n\lambda}{\sqrt{n\lambda}} \le x\right\} = \Phi(x)$

(C) $\lim\limits_{n\to\infty} P\left\{\dfrac{\lambda\sum\limits_{i=1}^{n} X_i - n}{\sqrt{n}} \le x\right\} = \Phi(x)$ (D) $\lim\limits_{n\to\infty} P\left\{\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i - \lambda}{\lambda\sqrt{n}} \le x\right\} = \Phi(x)$

已知 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 独立同分布，

期望为 μ、方差为 σ^2，

则 $\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} P\left\{\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \le x\right\} = \Phi(x) \\ \sum\limits_{i=1}^{n} X_i \text{ 近似地服从 } N(n\mu, n\sigma^2)\text{，n越大越近似} \end{cases}$

$\because X_1$、X_2、$\cdots$ X_n 均服从参数为 λ 的指数分布

$\therefore$ 期望为 $\frac{1}{\lambda}$、方差为 $\frac{1}{\lambda^2}$

已知 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 独立同分布，

期望为 $\frac{1}{\lambda}$、方差为 $\frac{1}{\lambda^2}$，

则 $\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} P\left\{\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i - n\frac{1}{\lambda}}{\sqrt{n}\frac{1}{\lambda}} \le x\right\} = \Phi(x) \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{n\to\infty} P\left\{\dfrac{\lambda\sum\limits_{i=1}^{n} X_i - n}{\sqrt{n}} \le x\right\} = \Phi(x) \text{ 选 (C)} \\ \sum\limits_{i=1}^{n} X_i \text{ 近似地服从 } N(n\frac{1}{\lambda}, n\frac{1}{\lambda^2})\text{，n越大越近似} \end{cases}$

例2. 一工厂每箱产品的重量是随机的。假设每箱平均重50kg，

标准差为5kg。若用最大载重量为5000kg的汽车承运，

问：每辆车最多可以装多少箱，才能保证不超载的概率

大于0.977？（$\Phi(2)=0.977$）

设 每辆车最多可以装n箱

第 1 箱重量为 X_1

第 2 箱重量为 X_2

……

第 n 箱重量为 X_n（单位：kg）

$X_1, X_2, \cdots, X_n$ ⋯ 独立同分布

$\because$ 每箱平均重 50 kg，标准差为 5 kg

$\therefore$ 期望为 50、方差为 5^2

已知 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 独立同分布，

期望为 50、方差为 5^2，

则 $\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} P\left\{\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i - n\cdot 50}{\sqrt{n}\cdot 5} \le x\right\} = \Phi(x) \\ \sum\limits_{i=1}^{n} X_i \text{ 近似地服从 } N(n\cdot 50, n\cdot 5^2)\text{，n越大越近似} \end{cases}$

5/5 中心极限定理

$$P\{不超载\} > 0.977$$

$$P\{载重量 \le 5000\} > 0.977$$

$$P\left\{\sum_{i=1}^{n} X_i \le 5000\right\} > 0.977$$

当 $\sum_{i=1}^{n} X_i$ 近似地服从 $N\left(n\cdot 50, \left(\sqrt{n\cdot 5^2}\right)^2\right)$时，

$$P\left\{\sum_{i=1}^{n} X_i \le 5000\right\} = P\left\{\sum_{i=1}^{n} X_i 在 -\infty 到 5000 之间\right\} = \Phi\left(\frac{5000-n\cdot 50}{\sqrt{n\cdot 5^2}}\right) - \Phi\left(\frac{-\infty-n\cdot 50}{\sqrt{n\cdot 5^2}}\right)$$

$$\Phi\left(\frac{5000-n\cdot 50}{\sqrt{n\cdot 5^2}}\right) - \Phi\left(\frac{-\infty-n\cdot 50}{\sqrt{n\cdot 5^2}}\right) > 0.977$$

$$\Phi\left(\frac{5000-50n}{5\sqrt{n}}\right) - \Phi(-\infty) > 0.977$$

$$\Phi\left(\frac{5000-50n}{5\sqrt{n}}\right) - 0 > 0.977$$

$$\Phi\left(\frac{5000-50n}{5\sqrt{n}}\right) > 0.977$$

$$\Phi\left(\frac{5000-50n}{5\sqrt{n}}\right) > \Phi(2)$$

$$\frac{5000-50n}{5\sqrt{n}} > 2$$

$$\Phi(a) > \Phi(b) \implies a > b$$

$$5000-50n > 10\sqrt{n}$$

$$5000 > 50n+10\sqrt{n}$$

$$n + \frac{\sqrt{n}}{5} < 100$$

$$(\sqrt{n})^2 + 2\sqrt{n}\cdot\frac{1}{10} + \left(\frac{1}{10}\right)^2 < 100 + \left(\frac{1}{10}\right)^2$$

$$\left(\sqrt{n} + \frac{1}{10}\right)^2 < 100.01$$

$$-\sqrt{100.01} < \sqrt{n} + \frac{1}{10} < \sqrt{100.01}$$

$$-\sqrt{100.01} - \frac{1}{10} < \sqrt{n} < \sqrt{100.01} - \frac{1}{10}$$

$$n < 98.0199$$

∴ 每辆车最多可以装 98 箱，可满足题干所求