笔记前言：

本笔记的内容是去掉步骤的概述后，视频的所有内容。

本猴觉得，自己的步骤概述写的太啰嗦，大家自己做笔记时，

应该每个人都有自己的最舒服最简练的写法，所以没给大家写。

再是本猴觉得，不给大家写这个概述的话，大家会记忆的更深，

掌握的更好！

所以老铁！一定要过呀！不要辜负本猴的心意！~~~

【祝逢考必过，心想事成~~~~】

【一定能过！！！！！】

统计量相关小题

例1. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是取自总体 X 的样本，总体 X 的分布函数为 $F(x)$，则：

$X_{(1)}$ 的分布函数 $F_{(1)}(x) = \underline{1-[1-F(x)]^n}$，

$X_{(n)}$ 的分布函数 $F_{(n)}(x) = \underline{F^n(x)\qquad\qquad}$。

$\overline{X} = \frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}$

$S^2 = \frac{(X_1-\overline{X})^2+(X_2-\overline{X})^2+\cdots+(X_n-\overline{X})^2}{n-1}$

$S = \sqrt{S^2}$

$E\overline{X} = EX$

$E(S^2) = DX$

$D\overline{X} = \frac{1}{n}DX$

最小观测量 $X_{(1)} = \min\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$，

其分布函数 $F_{(1)}(x) = 1-[1-F(x)]^n$

最大观测量 $X_{(n)} = \max\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$，

其分布函数 $F_{(n)}(x) = F^n(x)$

例2. 设总体 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，其中 μ 已知，σ^2 未知，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是取自总体 X 的简单随机样本，则下列样本函数中不是统计量的是 _____。

(A) $\overline{X}$　　(B) S　　(C) $\overline{X}-\mu$　　(D) $\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2$

∵ 题干中说了 σ^2 未知

∴ (D)选项中的 σ 未知

∴ (D) 选项的式子不是统计量，选 (D)

例3. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ $(n>2)$ 为来自总体 $N(0,1)$ 的简单随机样本，$\overline{X}$ 为样本均值。记 $Y_k = X_k - \overline{X}$，$k=1, 2, \cdots, n$，求 Y_k 的方差 DY_k，$k=1, 2, \cdots, n$

$DY_k = D(X_k - \overline{X})$

$= D\left(X_k - \frac{X_1+X_2+\cdots+X_{k-1}+X_k+X_{k+1}+\cdots+X_n}{n}\right)$

$= D\left(X_k - \frac{X_k}{n} - \frac{X_1+X_2+\cdots+X_{k-1}+X_{k+1}+\cdots+X_n}{n}\right)$

$= D\left(\frac{n-1}{n}X_k - \frac{X_1+X_2+\cdots+X_{k-1}+X_{k+1}+\cdots+X_n}{n}\right)$

∵ $X_1, X_2, \cdots, X_n$ $(n>2)$ 为来自总体 $N(0,1)$ 的简单随机样本
∴ $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立
A 和 B 相互独立 $\Rightarrow D(A+B) = DA + DB$

$= D\left(\frac{n-1}{n}X_k\right) + D\left(-\frac{X_1+X_2+\cdots+X_{k-1}+X_{k+1}+\cdots+X_n}{n}\right)$

$\boxed{D(aX) = a^2DX}$

$= \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 DX_k + \left(-\frac{1}{n}\right)^2 D(X_1+X_2+\cdots+X_{k-1}+X_{k+1}+\cdots+X_n)$

∵ $X_1, X_2, \cdots, X_n$ $(n>2)$ 为来自总体 $N(0,1)$ 的简单随机样本
∴ $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立
A、B、⋯ 相互独立 $\Rightarrow D(A+B+\cdots) = DA + DB + \cdots$

$= \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 DX_k + \left(-\frac{1}{n}\right)^2 (DX_1+DX_2+\cdots+DX_{k-1}+DX_{k+1}+\cdots+DX_n)$

∵ $X_1, X_2, \cdots, X_n$ $(n>2)$ 为来自总体 $N(0,1)$ 的简单随机样本
∴ $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 均服从 $N(0,1)$
∴ $DX_1 = DX_2 = \cdots = DX_n = 1$

$= \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 \cdot 1 + \left(-\frac{1}{n}\right)^2 \cdot (1+1+\cdots+1+1+\cdots+1)$

$= \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 \cdot 1 + \left(-\frac{1}{n}\right)^2 \cdot \underline{(n-1)} \cdot 1$

DX_1 到 DX_n 是 n 项
DX_1 到 DX_n 中再去掉 DX_k 是 $\underline{n-1}$ 项

$= \frac{n-1}{n}$

已知服从三大分布，求某东西

例1. 已知随机变量 S^2 满足 $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$，

n、σ 为常数，求 $D(S^2)$

$$D\left[\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\right] = 2(n-1)$$

$\boxed{D(aX) = a^2DX}$

$$\Rightarrow \left(\frac{n-1}{\sigma^2}\right)^2 D(S^2) = 2(n-1)$$

$$\Rightarrow \quad D(S^2) = \frac{2(n-1)}{\left(\frac{n-1}{\sigma^2}\right)^2}$$

$$\Rightarrow \quad D(S^2) = \frac{2(n-1)}{\frac{(n-1)^2}{\sigma^4}}$$

$$\Rightarrow \quad D(S^2) = \frac{2\sigma^4}{n-1}$$

若服从 χ^2 分布，则：

① 由 $X \sim \chi^2(n)$ 可知：

$X = \underbrace{A_1{}^2 + A_2{}^2 + \cdots + A_n{}^2}_{n\text{ 项}}$ 【 相互独立，$\sim N(0,1)$ 】

$EX=n$、$DX=2n$

② 由 $X \sim \chi^2(n_1)$、$Y \sim \chi^2(n_2)$ 且 X 与 Y 相互独立 可知：

$X+Y \sim \chi^2(n_1+n_2)$

$n_1>n_2$ 时，$X-Y \sim \chi^2(n_1-n_2)$

若 $X \sim t(n)$，则：

$X = \frac{B}{\sqrt{(\underbrace{A_1{}^2+A_2{}^2+\cdots+A_n{}^2}_{n\text{ 项}})\cdot\frac{1}{n}}}$ 【 相互独立，$\sim N(0,1)$ 】

$EX=0$

对任意常数 c，有 $P\{X>c\}=P\{X<-c\}$

$Y \sim F(1,n)$ 时，$Y=X^2$

若 $X \sim F(n,m)$，则：

$X = \frac{(\overbrace{A_1{}^2+A_2{}^2+\cdots+A_n{}^2}^{n\text{ 项}})\cdot\frac{1}{n}}{(\underbrace{B_1{}^2+B_2{}^2+\cdots+B_m{}^2}_{m\text{ 项}})\cdot\frac{1}{m}}$ 【 相互独立，$\sim N(0,1)$ 】

$\frac{1}{X} \sim F(m,n)$

例2. 设随机变量 $X \sim t(n)$，且 $P\{X>c\}=\alpha(0<\alpha<0.5, c$为正数$)$，

则 $P\{X^2>c^2\} =$ ____。

$P\{X^2>c^2\} = P\{X>c \text{ 或 } X<-c\}$

$= P\{X>c\} + P\{X<-c\}$

$= \quad \alpha \quad + \quad \alpha$

$= 2\alpha$

考试的时候题干很可能会这么描述

例2. 设随机变量 $X \sim t(n)$，$Y \sim F(1,n)$ 且 $P\{X>c\}=\alpha$

$(0<\alpha<0.5, c$为正数$)$，则 $P\{Y>c^2\} =$ ____。

$\because Y \sim F(1,n)$ 时，$Y=X^2$

$\therefore P\{Y>c^2\} = P\{X^2>c^2\}$

$= P\{X>c \text{ 或 } X<-c\}$

$= P\{X>c\} + P\{X<-c\}$

$= \quad \alpha \quad + \quad \alpha$

$= 2\alpha$

已知服从三大分布，求某东西

例3. 设 X_1, X_2, X_3, X_4 是来自正态总体 $N(0,4)$ 的简单随机样本，已知 $\chi^2 = \frac{(X_1-2X_2)^2}{a} + \frac{(3X_3-4X_4)^2}{b}$ 服从 $\chi^2(n)$，其中 a、b 为常数，则 $a = \underline{20}$，$b = \underline{100}$，$n = \underline{2}$。

（此题视频中没给出具体解题过程）

$$\underbrace{\left(\frac{X_1-2X_2}{\sqrt{a}}\right)^2+\left(\frac{3X_3-4X_4}{\sqrt{b}}\right)^2}_{2\text{项}}=\underbrace{A_1{}^2+A_2{}^2+\cdots+A_n{}^2}_{n\text{项}}$$

【相互独立，$\sim N(0,1)$】

$\therefore n = 2$

$\frac{X_1-2X_2}{\sqrt{a}}$ 与 $\frac{3X_3-4X_4}{\sqrt{b}}$ 应相互独立，均 $\sim N(0,1)$

$\because X_1, X_2, X_3, X_4$ 是来自正态总体 $N(0,4)$ 的简单随机样本

$\therefore X_1, X_2, X_3, X_4$ 相互独立，均 $\sim N(0,4)$

$\because X_1 \sim N(0,4)$、$X_2 \sim N(0,4)$，且 X_1 与 X_2 相互独立，

$\therefore \frac{X_1-2X_2}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}}X_1 - \frac{2}{\sqrt{a}}X_2 \sim N\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\times 0+\left(-\frac{2}{\sqrt{a}}\right)\times 0, \left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2\times 4+\left(-\frac{2}{\sqrt{a}}\right)^2\times 4\right) = N\left(0, \frac{20}{a}\right)$

$\because X_3 \sim N(0,4)$、$X_4 \sim N(0,4)$，且 X_3 与 X_4 相互独立，

$\therefore \frac{3X_3-4X_4}{\sqrt{b}} = \frac{3}{\sqrt{b}}X_3 - \frac{4}{\sqrt{b}}X_4 \sim N\left(\frac{3}{\sqrt{b}}\times 0+\left(-\frac{4}{\sqrt{b}}\right)\times 0, \left(\frac{3}{\sqrt{b}}\right)^2\times 4+\left(-\frac{4}{\sqrt{b}}\right)^2\times 4\right) = N\left(0, \frac{100}{b}\right)$

$\therefore \frac{X_1-2X_2}{\sqrt{a}} \sim N\left(0, \frac{20}{a}\right)$，$\frac{3X_3-4X_4}{\sqrt{b}} \sim N\left(0, \frac{100}{b}\right)$

$\because \frac{X_1-2X_2}{\sqrt{a}}$、$\frac{3X_3-4X_4}{\sqrt{b}}$ 均 $\sim N(0,1)$

$\therefore \frac{20}{a} = 1$，$\frac{100}{b} = 1$

解得：a=20，b=100

判断服从啥分布

例1. 设总体 $X \sim N(0,4)$，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为简单随机样本，

试判断 $\dfrac{\sqrt{n-1}\,X_1}{\sqrt{X_2^2+X_3^2+\cdots+X_n^2}}$ 服从什么分布

$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 均 $\sim N(0,4)$

设 $M_i = \frac{X_i}{2} \Longrightarrow X_i = 2M_i$

$$\begin{aligned}
\therefore \frac{\sqrt{n-1}\,X_1}{\sqrt{X_2^2+X_3^2+\cdots+X_n^2}} &= \frac{\sqrt{n-1}\cdot 2M_1}{\sqrt{(2M_2)^2+(2M_3)^2+\cdots+(2M_n)^2}} \\
&= \frac{\sqrt{n-1}\cdot 2M_1}{\sqrt{2^2\cdot M_2^2+2^2\cdot M_3^2+\cdots+2^2\cdot M_n^2}} \\
&= \frac{\sqrt{n-1}\cdot 2M_1}{\sqrt{2^2}\sqrt{M_2^2+M_3^2+\cdots+M_n^2}} \\
&= \frac{\sqrt{n-1}\cdot 2M_1\cdot\frac{1}{\sqrt{n-1}}}{2\sqrt{\underbrace{M_2^2+M_3^2+\cdots+M_n^2}_{n-1\text{项}}}\cdot\frac{1}{\sqrt{n-1}}} \\
&= \frac{M_1}{\sqrt{\underbrace{M_2^2+M_3^2+\cdots+M_n^2}_{n-1\text{项}}\cdot\frac{1}{\sqrt{n-1}}}}
\end{aligned}$$

$\therefore$ 原式 $\sim t(n-1)$

例2. 设总体 $X \sim N(0,1)$，$X_1, X_2, \cdots, X_{2n}$ 是来自总体 X 的容量为2n的简单随机样本，求 $\frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{2n} X_i^2 + \sum\limits_{i=1}^{n} X_{2i-1}X_{2i}$ 的分布

（此题视频中没给出具体解题过程）

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2n} X_i^2 + \sum_{i=1}^{n} X_{2i-1}X_{2i} \\
&= \frac{1}{2}(X_1^2+X_2^2+X_3^2+X_4^2+\cdots+X_{2n-1}^2+X_{2n}^2) \\
&\quad + X_1X_2 + X_3X_4 + \cdots + X_{2n-1}X_{2n} \\
&= \frac{1}{2}(X_1^2+X_2^2+X_3^2+X_4^2+\cdots+X_{2n-1}^2+X_{2n}^2 \\
&\quad + 2X_1X_2 + 2X_3X_4 + \cdots + 2X_{2n-1}X_{2n}) \\
&= \frac{1}{2}[(X_1+X_2)^2+(X_3+X_4)^2+\cdots+(X_{2n-1}+X_{2n})^2] \\
&= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2(X_1+X_2)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2(X_3+X_4)^2+\cdots+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2(X_{2n-1}+X_{2n})^2 \\
&= \underbrace{\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(X_1+X_2)\right]^2+\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(X_3+X_4)\right]^2+\cdots+\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(X_{2n-1}+X_{2n})\right]^2}_{n\text{ 项}} \sim \chi^2(n)
\end{aligned}$$

判断服从啥分布

例3. 设总体 $X\sim N(0,1)$，$X_1, X_2, \cdots, X_8$ 是来自总体 X 的简单随机样本，试判断 $\frac{3[(X_1+X_2)^2+(X_1-X_2)^2]}{2[(X_3+X_4)^2+(X_5+X_6)^2+(X_7+X_8)^2]}$ 服从什么分布

（此题视频中没给出具体解题过程）

$\because$ 总体 $X\sim N(0,1)$，$X_1, X_2, \cdots, X_8$ 是来自总体 X 的简单随机样本

$\therefore X_1, X_2, \cdots, X_8$ 均 $\sim N(0,1)$，且 $X_1, X_2, \cdots, X_8$ 相互独立

$\because X_3\sim N(0,1)$、$X_4\sim N(0,1)$，且 X_3 与 X_4 相互独立，

$\therefore (X_3+X_4) = 1X_3 + 1X_4 \sim N(1\times0+1\times0, 1^2\times1+1^2\times1) = N(0,2)$

$\because X_5\sim N(0,1)$、$X_6\sim N(0,1)$， 且 X_5 与 X_6 相互独立，

$\therefore (X_5+X_6) = 1X_5 + 1X_6 \sim N(1\times0+1\times0, 1^2\times1+1^2\times1) = N(0,2)$

$\because X_7\sim N(0,1)$、$X_8\sim N(0,1)$， 且 X_7 与 X_8 相互独立，

$\therefore (X_7+X_8) = 1X_7 + 1X_8 \sim N(1\times0+1\times0, 1^2\times1+1^2\times1) = N(0,2)$

设 $Z_1 = \frac{X_1}{\sqrt{1}} \Longrightarrow X_1 = Z_1$

设 $Z_2 = \frac{X_2}{\sqrt{1}} \Longrightarrow X_2 = Z_2$

设 $M_1 = \frac{(X_3+X_4)}{\sqrt{2}} \Longrightarrow (X_3+X_4) = \sqrt{2}\,M_1$

设 $M_2 = \frac{(X_5+X_6)}{\sqrt{2}} \Longrightarrow (X_5+X_6) = \sqrt{2}\,M_2$

设 $M_3 = \frac{(X_7+X_8)}{\sqrt{2}} \Longrightarrow (X_7+X_8) = \sqrt{2}\,M_3$

$$\text{原式} = \frac{6({X_1}^2+{X_2}^2)}{2[(X_3+X_4)^2+(X_5+X_6)^2+(X_7+X_8)^2]}$$

$$= \frac{6({Z_1}^2+{Z_2}^2)}{2\left[\left(\sqrt{2}M_1\right)^2+\left(\sqrt{2}M_2\right)^2+\left(\sqrt{2}M_3\right)^2\right]}$$

$$= \frac{3({Z_1}^2+{Z_2}^2)}{2({M_1}^2+{M_2}^2+{M_3}^2)}$$

$$= \frac{3\overbrace{({Z_1}^2+{Z_2}^2)}^{2\text{项}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}{\underbrace{2({M_1}^2+{M_2}^2+{M_3}^2)}_{3\text{项}}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{\overbrace{({Z_1}^2+{Z_2}^2)}^{2\text{项}}\cdot\frac{1}{2}}{\underbrace{({M_1}^2+{M_2}^2+{M_3}^2)}_{3\text{项}}\cdot\frac{1}{3}} \sim F(2,3)$$

总体服从正态分布的小题

例1. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n (n\geq 2)$ 为来自总体 $N(\mu,\sigma^2)$ $(\sigma>0)$ 的简单随机样本，令 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，$S=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}$，$S^*=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}$，则 _____。

(A) $\frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)}{S}\sim t(n)$　　(B) $\frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)}{S}\sim t(n-1)$

(C) $\frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)}{S^*}\sim t(n)$　　(D) $\frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)}{S^*}\sim t(n-1)$

根据右边公式，(B) 选项正确

$$X\sim N(\mu,\sigma^2)\Rightarrow\begin{cases}\overline{X}\sim N\left(\mu,\frac{\sigma^2}{n}\right)\Rightarrow\frac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\sim N(0,1)\\ \frac{n(\overline{X}-\mu)^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(1)\Rightarrow\begin{cases}E[(\overline{X}-\mu)^2]=\frac{\sigma^2}{n}\\ D[(\overline{X}-\mu)^2]=\frac{2\sigma^4}{n^2}\end{cases}\\ \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)\Rightarrow\begin{cases}E(S^2)=\sigma^2\\ D(S^2)=\frac{2\sigma^4}{n-1}\end{cases}\\ \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\sim\chi^2(n-1)\\ \Rightarrow\begin{cases}E\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\right]=\sigma^2(n-1)\\ D\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\right]=2\sigma^4(n-1)\end{cases}\\ \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\sim\chi^2(n)\\ \Rightarrow\begin{cases}E\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\right]=\sigma^2 n\\ D\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\right]=2\sigma^4 n\end{cases}\\ \frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)}{S}\sim t(n-1)\\ \overline{X}\text{ 与 }S\text{ 相互独立}\end{cases}$$

例2. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ $(n\geq 2)$ 是总体 $N(0,1)$ 的简单随机样本。$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$，$T=\overline{X}^2-\frac{1}{n}S^2$，求 DT

$\because \overline{X}$ 与 S 相互独立
$\therefore \overline{X}^2$ 与 $-\frac{1}{n}S^2$ 相互独立
A与B相互独立时，$D(A+B)=DA+DB$

$$DT=D\left(\overline{X}^2-\frac{1}{n}S^2\right)$$
$$=D(\overline{X}^2)+D\left(-\frac{1}{n}S^2\right)$$

$D(aX)=a^2DX$

$$=\frac{2}{n^2}+\left(-\frac{1}{n}\right)^2 D(S^2)$$
$$=\frac{2}{n^2}+\left(-\frac{1}{n}\right)^2\frac{2}{n-1}$$
$$=\frac{2}{n(n-1)}$$

$$X\sim N(0,1)\Rightarrow\begin{cases}\overline{X}\sim N\left(0,\frac{1}{n}\right)\Rightarrow\sqrt{n}\,\overline{X}\sim N(0,1)\\ n\overline{X}^2\sim\chi^2(1)\Rightarrow\begin{cases}E(\overline{X}^2)=\frac{1}{n}\\ D(\overline{X}^2)=\frac{2}{n^2}\end{cases}\\ (n-1)S^2\sim\chi^2(n-1)\Rightarrow\begin{cases}E(S^2)=1\\ D(S^2)=\frac{2}{n-1}\end{cases}\\ \sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\sim\chi^2(n-1)\\ \Rightarrow\begin{cases}E\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\right]=n-1\\ D\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\right]=2(n-1)\end{cases}\\ \sum_{i=1}^{n}{X_i}^2\sim\chi^2(n)\\ \Rightarrow\begin{cases}E\left[\sum_{i=1}^{n}{X_i}^2\right]=n\\ D\left[\sum_{i=1}^{n}{X_i}^2\right]=2n\end{cases}\\ \frac{\sqrt{n}\,\overline{X}}{S}\sim t(n-1)\\ \overline{X}\text{ 与 }S\text{ 相互独立}\end{cases}$$

总体服从正态分布的小题

（此题视频中没给出具体解题过程）

例3. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ $(n\geq 2)$ 为来自总体 $N(\mu,1)$ 的简单随机样本，记 $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$，则不正确的结论是 ______。

(A) $n(\overline{X}-\mu)^2$ 服从 χ^2 分布

(B) $\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ 服从 χ^2 分布

(C) $\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$ 服从 χ^2 分布

(D) $2(X_n-X_1)^2$ 服从 χ^2 分布

(A)、(B)、(C) 都能在右侧公式中找到，所以不正确的是 (D)

$$
X \sim N(\mu,1) \Rightarrow
\begin{cases}
\overline{X} \sim N\left(\mu, \frac{1}{n}\right) \Rightarrow \sqrt{n}(\overline{X}-\mu) \sim N(0,1) \\
n(\overline{X}-\mu)^2 \sim \chi^2(1) \Rightarrow \begin{cases} E[(\overline{X}-\mu)^2] = \frac{1}{n} \\ D[(\overline{X}-\mu)^2] = \frac{2}{n^2} \end{cases} \\
(n-1)S^2 \sim \chi^2(n-1) \Rightarrow \begin{cases} E(S^2) = 1 \\ D(S^2) = \frac{2}{n-1} \end{cases} \\
\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2 \sim \chi^2(n-1) \\
\Rightarrow \begin{cases} E\left[\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\right] = n-1 \\ D\left[\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\right] = 2(n-1) \end{cases} \\
\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 \sim \chi^2(n) \\
\Rightarrow \begin{cases} E\left[\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\right] = n \\ D\left[\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\right] = 2n \end{cases} \\
\frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)}{S} \sim t(n-1) \\
\overline{X} \text{ 与 } S \text{ 相互独立}
\end{cases}
$$

矩估计法

例1. 设总体 X 的概率分布为

X	0	1	2	3
P	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	θ^2	$1-2\theta$

其中 $\theta\left(0<\theta<\frac{1}{2}\right)$ 是未知参数，利用总体 X 的以下样本值：3, 1, 3, 0, 3, 1, 2, 3，求 θ 的矩估计值

样本值共 8 个

令 $EX=\dfrac{\text{样本}_1+\text{样本}_2+\cdots+\text{样本}_{\text{最后}}}{\text{样本数目}} \Longrightarrow$ 待求估计量的字母 = ?

① $EX = 0\times\theta^2 + 1\times 2\theta(1-\theta) + 2\times\theta^2 + 3\times(1-2\theta)$
$= 3-4\theta$

② 令 $3-4\theta = \frac{3+1+3+0+3+1+2+3}{8}$

$\Longrightarrow 3-4\theta = 2$

$\Longrightarrow -4\theta = -1$

$\Longrightarrow \theta = \frac{1}{4}$

③ $\hat{\theta} = \frac{1}{4}$

例2. 设总体 X 的概率密度 $f(x;\theta)=\begin{cases}(\theta+1)x^{\theta}, & 0<x<1 \\ 0, & \text{其 他}\end{cases}$，

令 $EX=\overline{X} \Longrightarrow$ 待求估计量的字母 = ?

其中 $\theta>-1$ 是未知参数，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 X 的一个容量为 n 的简单随机样本，$\overline{X}$ 是样本均值。用矩估计法求 θ 的估计量

① $EX = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x;\theta)\,dx$

$= \int_{-\infty}^{0} x\cdot 0\,dx + \int_0^1 x\cdot(\theta+1)x^{\theta}\,dx + \int_1^{+\infty} x\cdot 0\,dx$

$= \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \underline{\int_0^1(\theta+1)x^{\theta+1}\,dx} + \int_1^{+\infty} 0\,dx$

$= 0 + \int_0^1\left(\frac{\theta+1}{\theta+2}x^{\theta+2}\right)'dx + 0$

求∫某式子dx时，只需要将x当未知数，其他字母当常数，所以这里的θ + 1当常数处理

$= \left(\frac{\theta+1}{\theta+2}x^{\theta+2}\right)\Big|_{x=0}^{x=1}$

$= \frac{\theta+1}{\theta+2}\times 1^{\theta+2} - \frac{\theta+1}{\theta+2}\times 0^{\theta+2}$

$= \frac{\theta+1}{\theta+2} - 0$

$= \frac{\theta+1}{\theta+2}$

② 令 $\frac{\theta+1}{\theta+2} = \overline{X}$

$\Longrightarrow \theta+1 = \overline{X}(\theta+2)$

$\Longrightarrow \theta+1 = \overline{X}\theta+2\overline{X}$

$\Longrightarrow \theta-\overline{X}\theta = 2\overline{X}-1$

$\Longrightarrow (1-\overline{X})\theta = 2\overline{X}-1$

$\Longrightarrow \theta = \frac{2\overline{X}-1}{1-\overline{X}}$

③ $\hat{\theta} = \frac{2\overline{X}-1}{1-\overline{X}}$

矩估计法

(此题视频中没给具体解题过程)

例3. 设总体 X 在 [a,b] 上服从均匀分布，a、b 为未知参数，利用总体 X 的以下样本值：3, 1, 3, 0, 3, 1, 2, 3，求 a、b 的矩估计量

样本值共 8 个

① ∵ X 在 [a,b] 上服从均匀分布

$\therefore EX=\frac{a+b}{2}$、$DX=\frac{(b-a)^2}{12}$

$E(X^2)=(EX)^2+DX=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+\frac{(b-a)^2}{12}$

② 令 $\begin{cases}\frac{a+b}{2}=\frac{3+1+3+0+3+1+2+3}{8}\\ \left(\frac{a+b}{2}\right)^2+\frac{(b-a)^2}{12}=\frac{3^2+1^2+3^2+0^2+3^2+1^2+2^2+3^2}{8}\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}a+b=4\\ \left(\frac{a+b}{2}\right)^2+\frac{(b-a)^2}{12}=\frac{21}{4}\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}a+b=4\\ \left(\frac{4}{2}\right)^2+\frac{(b-a)^2}{12}=\frac{21}{4}\end{cases}$

$\because (b-a)^2=15$
$\therefore\ b-a=\pm\sqrt{15}$
∵ 均匀分布区间为[a,b]
$\therefore b>a\Rightarrow b-a>0$
$\therefore b-a=\sqrt{15}$

$\Rightarrow\begin{cases}a+b=4\\ (b-a)^2=15\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b+a=4\\ b-a=\sqrt{15}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\frac{4-\sqrt{15}}{2}\\ b=\frac{4+\sqrt{15}}{2}\end{cases}$

③ $\hat{a}=\frac{4-\sqrt{15}}{2}$　$\hat{b}=\frac{4+\sqrt{15}}{2}$

令 $\begin{cases}EX=\frac{样本_1+样本_2+\cdots+样本_{最后}}{样本数目}\\ E(X^2)=\frac{(样本_1)^2+(样本_2)^2+\cdots+(样本_{最后})^2}{样本数目}\end{cases}$

⇒ 待求估计量的字母 = ?

最大似然估计法

例1. 设总体 X 的概率分布为

X	0	1	2	3
P	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	θ^2	$1-2\theta$

其中 $\theta\left(0<\theta<\frac{1}{2}\right)$ 是未知参数，利用总体 X 的以下样本值 : 3, 1, 3, 0, 3, 1, 2, 3，求 θ 的最大似然估计值

$L(\theta)>0$ 时，

$$L(\theta)=P\{X=3\}\cdot P\{X=1\}\cdot P\{X=3\}\cdot P\{X=0\}\cdot P\{X=3\}\cdot P\{X=1\}\cdot P\{X=2\}\cdot P\{X=3\}$$
$$=(1-2\theta)\cdot 2\theta(1-\theta)\cdot(1-2\theta)\cdot\theta^2\cdot(1-2\theta)\cdot 2\theta(1-\theta)\cdot\theta^2\cdot(1-2\theta)$$
$$=4\theta^6(1-\theta)^2(1-2\theta)^4$$

$$\frac{d[\ln(4\theta^6(1-\theta)^2(1-2\theta)^4)]}{d\theta}$$

$\ln(ab)=\ln a+\ln b$

$$=\frac{d\left[\ln 4+\ln(\theta^6)+\ln\left[(1-\theta)^2\right]+\ln\left[(1-2\theta)^4\right]\right]}{d\theta}$$

$\ln(a^b)=b\ln a$

$$=\frac{d[\ln 4+6\ln\theta+2\ln(1-\theta)+4\ln(1-2\theta)]}{d\theta}$$
$$=[\ln 4+6\ln\theta+2\ln(1-\theta)+4\ln(1-2\theta)]'$$
$$=(\ln 4)'+(6\ln\theta)'+[2\ln(1-\theta)]'+[4\ln(1-2\theta)]'$$
$$=0+6\times\frac{1}{\theta}+2\times\frac{(1-\theta)'}{1-\theta}+4\times\frac{(1-2\theta)'}{1-2\theta}$$
$$=\frac{6}{\theta}+2\times\frac{-1}{1-\theta}+4\times\frac{-2}{1-2\theta}$$
$$=\frac{24\theta^2-28\theta+6}{\theta(1-\theta)(1-2\theta)}$$

令 $\frac{24\theta^2-28\theta+6}{\theta(1-\theta)(1-2\theta)}=0$

$\Longrightarrow\ 24\theta^2-28\theta+6=0$

$\Longrightarrow\ 12\theta^2-14\theta+3=0$

$ax^2+bx+c=0 \Longrightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ 【求根公式】

$12\theta^2-14\theta+3=0 \Longrightarrow \theta=\frac{-(-14)\pm\sqrt{(-14)^2-4\times12\times3}}{2\times12}=\frac{14\pm2\sqrt{13}}{24}=\frac{7\pm\sqrt{13}}{12}$

$\Longrightarrow\quad \theta=\frac{7\pm\sqrt{13}}{12}$

$\because 0<\theta<\frac{1}{2}$

$\therefore \theta=\frac{7-\sqrt{13}}{12}$

$\therefore \hat{\theta}=\frac{7-\sqrt{13}}{12}$

$L(\text{待求})>0$时， $L(\text{待求})=P\{X=3\}\cdot P\{X=1\}\cdot P\{X=3\}\cdot P\{X=0\}\cdot P\{X=3\}\cdot P\{X=1\}\cdot P\{X=2\}\cdot P\{X=3\}$

最大似然估计法

例2. 设某种元件的使用寿命 X 的概率密度

$f(x;\theta)=\begin{cases}2e^{-2(x-\theta)}, & x\geq\theta\\ 0, & x<\theta\end{cases}$，其中 $\theta>0$ 为未知参数。又设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是 X 的一组样本观测值，求参数 θ 的最大似然估计值

L(待求)＞0时， L(待求) =f(x_1)·f(x_2)· ⋯ ·f(x_n) 【 f(x_i)≠0 】

$L(\theta)>0$ 时，

$L(\theta)=f(x_1)\cdot f(x_2)\cdot\cdots\cdot f(x_n)$ 【 $f(x_i)\neq0$ 】

$=2e^{-2(x_1-\theta)}\cdot2e^{-2(x_2-\theta)}\cdot\ldots\cdot2e^{-2(x_n-\theta)}$

$a^b\cdot a^c\cdot a^d\cdot\cdots=a^{b+c+d+\cdots}$

$=2^ne^{[-2(x_1-\theta)]+[-2(x_2-\theta)]+\cdots+[-2(x_n-\theta)]}$

$=2^ne^{-2[(x_1-\theta)+(x_2-\theta)+\cdots+(x_n-\theta)]}$

$=2^ne^{-2(x_1+x_2+\cdots+x_n-n\theta)}$

$=2^ne^{-2(x_1+x_2+\cdots+x_n)+2n\theta}$

$\frac{d[\ln(2^ne^{-2(x_1+x_2+\cdots+x_n)+2n\theta})]}{d\theta}$

$=\frac{d[\ln(2^n)+\ln(e^{-2(x_1+x_2+\cdots+x_n)+2n\theta})]}{d\theta}$

$=\frac{d[n\ln2+[-2(x_1+x_2+\cdots+x_n)+2n\theta]\ln e]}{d\theta}$

$=\frac{d[n\ln2-2(x_1+x_2+\cdots+x_n)+2n\theta]}{d\theta}$

$=[n\ln2-2(x_1+x_2+\cdots+x_n)+2n\theta]'$

$=[n\ln2-2(x_1+x_2+\cdots+x_n)]'+(2n\theta)'$

$=0+2n$

$=2n$ (正)

令 $2n=0$ 推不出 $\theta=?$

$L(\theta)$单增，$\hat{\theta}=\theta$ 能取到的最大值

$\because x\geq\theta$

$\therefore x_1,x_2,\ldots,x_n\geq\theta$

$\therefore \theta\leq\min\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$

$\therefore \hat{\theta}=\min\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$

最大似然估计法

(此题视频中没给具体解题过程)

例3. 设总体 X 的概率密度 $f(x;\theta)=\begin{cases}\theta & ,0<x<1\\ 1-\theta & ,1\le x<2\\ 0 & ,其他\end{cases}$, L(待求)＞0时， L(待求) $=f(x_1)\cdot f(x_2)\cdot\cdots\cdot f(x_n)$ 【 $f(x_i)\neq 0$ 】

其中 $\theta(0<\theta<1)$ 是未知参数，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本，记 N 为样本值 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 中小于 1 的个数。求 θ 的最大似然估计量

$L(\theta)>0$ 时，

$$L(\theta)=f(x_1)\cdot f(x_2)\cdot\cdots\cdot f(x_n)\ 【f(x_i)\neq 0】$$

$$=\underbrace{\theta\cdot\theta\cdot\cdots\cdot\theta}_{共N个}\cdot\underbrace{(1-\theta)\cdot(1-\theta)\cdot\cdots\cdot(1-\theta)}_{共n-N个}$$

$$=\theta^N\cdot(1-\theta)^{n-N}$$

$$\frac{d\left[\ln\left(\theta^N\cdot(1-\theta)^{n-N}\right)\right]}{d\theta}$$

$$=\frac{d\left[\ln\left(\theta^N\right)+\ln\left[(1-\theta)^{n-N}\right]\right]}{d\theta}$$

$$=\frac{d[N\ln\theta+(n-N)\ln(1-\theta)]}{d\theta}$$

$$=[N\ln\theta+(n-N)\ln(1-\theta)]'$$

$$=(N\ln\theta)'+[(n-N)\ln(1-\theta)]'$$

$$=\frac{N}{\theta}+\frac{(n-N)\cdot(1-\theta)'}{1-\theta}$$

$$=\frac{N}{\theta}+\frac{(n-N)\cdot(-1)}{1-\theta}$$

$$=\frac{N-n\theta}{\theta(1-\theta)}$$

令 $\frac{N-n\theta}{\theta(1-\theta)}=0$

$$\Longrightarrow N-n\theta=0$$

$$\Longrightarrow n\theta=N$$

$$\Longrightarrow \theta=\frac{N}{n}$$

$$\therefore\hat{\theta}=\frac{N}{n}$$

估计量的评选标准

考点①：A 为 B 的无偏估计量 $\Leftrightarrow$ EA=B

考点②：讨论 A、B 作为 C 的估计量的有效性：
若 EA = EB = C 且 D某个<或≤D另一个，
则称D更小的更有效

考点③：ξ 是 θ 的一致估计量/相合估计量 $\Leftrightarrow$ $\xi \xrightarrow{P} \theta$

例1. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_m$ 是来自 $N(0,\sigma^2)$ 的简单随机样本，$\overline{X}$ 和 S^2 分别为样本均值和样本方差。若 $\overline{X}+kS^2$ 为 σ^2 的无偏估计量，则 k = ____。

$$E(\overline{X}+kS^2) = \sigma^2$$

$\boxed{E(aX+bY) = aEX+bEY}$

$$\Rightarrow E\overline{X} + kE(S^2) = \sigma^2$$

$\boxed{E\overline{X} = EX、E(S^2) = DX}$

$$\Rightarrow EX + kDX = \sigma^2$$

$\boxed{\begin{array}{l}\because X \text{ 服从} N(0,\sigma^2) \\ \therefore EX = 0，DX = \sigma^2\end{array}}$

$$\Rightarrow 0 + k\sigma^2 = \sigma^2$$

$$\Rightarrow k = 1$$

例2. 设总体 X 服从参数为 λ 的泊松分布，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本，$\overline{X}$ 是样本均值，S^2 是样本方差，证明：对于任意实数 α，$\alpha\overline{X}+(1-\alpha)S^2$ 是 λ 的无偏估计量

（此题视频中没给具体解题过程）

即 证明：对于任意实数 α，$E[\alpha\overline{X}+(1-\alpha)S^2] = \lambda$

$$E[\alpha\overline{X}+(1-\alpha)S^2] = \alpha E\overline{X} + (1-\alpha)E(S^2)$$

$\boxed{E(aX+bY) = aEX+bEY}$

$$= \alpha EX + (1-\alpha)DX$$

$\boxed{E\overline{X} = EX、E(S^2) = DX}$

$$= \alpha\lambda + (1-\alpha)\lambda$$

$\boxed{\begin{array}{l}\because X \text{ 服从参数为 } \lambda \text{ 的泊松分布} \\ \therefore EX = \lambda，DX = \lambda\end{array}}$

$$= \alpha\lambda + \lambda - \alpha\lambda$$

$$= \lambda$$

例3. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的简单随机样本，均值为 $\overline{X}$，试讨论：$\overline{X}$、X_1 作为 μ 的估计量的有效性

（此题视频中没给具体解题过程）

$\because E\overline{X} = EX = EX_1 = \mu$ 且 $D\overline{X} = \frac{1}{n}DX \le DX_1$

$\therefore$ 称 $\overline{X}$ 更有效

例4. 设总体 X 的概率密度 $f(x;\theta)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2+2\theta x-\theta^2}$，$-\infty<x<+\infty$，其中 θ 为未知参数，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自该总体 X 的简单随机样本，证明：$\overline{X}$ 是 θ 的一致估计量

（此题视频中没给具体解题过程）

即 证明：$\overline{X} \xrightarrow{P} \theta$

$\boxed{式子 \xrightarrow{P} \lim_{n\to\infty}[E(式子)]}$

$$\overline{X} \xrightarrow{P} \lim_{n\to\infty} E\overline{X} = \lim_{n\to\infty} EX = \lim_{n\to\infty} \theta = \theta$$

$\boxed{\text{精通版概率论第4章第6课例10求过}}$

$\therefore$ 可证得：$\overline{X} \xrightarrow{P} \theta$

即 可证得：$\overline{X}$ 是 θ 的一致估计量

区间估计

例1. 已知一批零件的长度 X (单位:cm) 服从正态分布 $N(\mu,\overset{\sigma^2}{1})$，从中随机地抽取 16 个零件，得到长度的平均值为 40cm，则 μ 的置信度为 0.95 的置信区间是 ___，单侧置信区间是 (___ ,+∞)。

(注 : $\Phi(1.96)=0.975$，$\Phi(1.645)=0.95$)

① 令 $\alpha=1-0.95=0.05$

② μ 的置信区间为 :

$$\left(40-\frac{1}{\sqrt{16}}z_{\frac{0.05}{2}},40+\frac{1}{\sqrt{16}}z_{\frac{0.05}{2}}\right)$$

$$=\left(40-\frac{1}{4}z_{0.025},40+\frac{1}{4}z_{0.025}\right)$$

$$=\left(40-\frac{1}{4}\times 1.96,40+\frac{1}{4}\times 1.96\right)$$

$$=(39.51, 40.49)$$

$1-0.025=0.975=\Phi(1.96)\Rightarrow z_{0.025}=1.96$

μ 的单侧置信区间为 :

$$\left(40-\frac{1}{\sqrt{16}}z_{0.05},+\infty\right)$$

$1-0.05=0.95=\Phi(1.645)\Rightarrow z_{0.05}=1.645$

$$=\left(40-\frac{1}{\sqrt{16}}\times 1.645,+\infty\right)$$

$$=(33.42,+\infty)$$

μ 的置信区间为 : σ^2 已知 : $\left(\bar{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}},\bar{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}}\right)$

σ^2 未知 : $\left(\bar{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1),\bar{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right)$

σ^2 的置信区间为 : $\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)},\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right)$

$\mu_X-\mu_Y$ 的置信区间为 :

${\sigma_X}^2$、${\sigma_Y}^2$ 已知 : $\left(\bar{X}-\bar{Y}-z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{{\sigma_X}^2}{n_X}+\frac{{\sigma_Y}^2}{n_Y}},\bar{X}-\bar{Y}+z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{{\sigma_X}^2}{n_X}+\frac{{\sigma_Y}^2}{n_Y}}\right)$

只知 ${\sigma_X}^2={\sigma_Y}^2$: $\left(\bar{X}-\bar{Y}-t_{\frac{\alpha}{2}}(n_X+n_Y-2)\sqrt{\left(\frac{1}{n_X}+\frac{1}{n_Y}\right)\frac{(n_X-1){S_X}^2+(n_Y-1){S_Y}^2}{n_X+n_Y-2}},\right.$
$\left.\bar{X}-\bar{Y}+t_{\frac{\alpha}{2}}(n_X+n_Y-2)\sqrt{\left(\frac{1}{n_X}+\frac{1}{n_Y}\right)\frac{(n_X-1){S_X}^2+(n_Y-1){S_Y}^2}{n_X+n_Y-2}}\right)$

$\frac{{\sigma_X}^2}{{\sigma_Y}^2}$ 的置信区间为 : $\left(\frac{{S_X}^2}{{S_Y}^2}\frac{1}{F_{\frac{\alpha}{2}}(n_X-1,n_Y-1)},\frac{{S_X}^2}{{S_Y}^2}\frac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_X-1,n_Y-1)}\right)$

注意

a、已知多个 Φ值 求 $z_{下标}$: $1-下标=\Phi(\gamma)\Longrightarrow z_{下标}=\gamma$

b、A 的置信度为 B 的置信区间是 (左 , 右) ⟺ P{左<A<右} = B

c、单侧置信区间 : (−∞,置信区间右【ztχ²F下标×2】)、(置信区间左【ztχ²F下标×2】,+∞)

d、$u_{下标}$: 和 $z_{下标}$ 一个意思，有的课本用 z，有的用 u，都对

例2. 设总体 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，其中 μ 未知。从总体中抽取容量为 36 的一个样本，样本均值 $\bar{x}=3.5$，样本方差 $s^2=4$。求 σ 的置信度为 0.95 的置信区间。

$\left(注 : \chi^2_{0.025}(35)=53.203,\ \chi^2_{0.975}(35)=20.569\right)$

① 令 $\alpha=1-0.95=0.05$

② σ^2 的置信区间为 :

$$\left(\frac{(36-1)\times 4}{\chi^2_{\frac{0.05}{2}}(36-1)},\frac{(36-1)\times 4}{\chi^2_{1-\frac{0.05}{2}}(36-1)}\right)$$

$$=\left(\frac{140}{\chi^2_{0.025}(35)},\frac{140}{\chi^2_{0.975}(35)}\right)$$

$$=\left(\frac{140}{53.203},\frac{140}{20.569}\right)$$

$$=(2.631,6.806)$$

③ σ^2 的置信区间 $(2.631,6.806)\Rightarrow$
$2.631<\sigma^2<6.806\Rightarrow\sqrt{2.631}<\sigma<\sqrt{6.806}$
$\Rightarrow\sigma$ 的置信区间为 $(1.622,2.609)$

假设检验

	H_0	拒绝域	检验统计量
已知总体的方差σ_0^2	$\mu=\mu_0$	$\lvert Z_0\rvert \ge z_{\frac{\alpha}{2}}$	$Z=\frac{\bar{X}-\mu_0}{\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}}$
	$\mu\le\mu_0$	$Z_0 \ge z_\alpha$	
	$\mu\ge\mu_0$	$Z_0 \le -z_\alpha$	
只知样本数据不知总体方差	$\mu=\mu_0$	$\lvert t_0\rvert \ge t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$	$t=\frac{\bar{X}-\mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$
	$\mu\le\mu_0$	$t_0 \ge t_\alpha(n-1)$	
	$\mu\ge\mu_0$	$t_0 \le -t_\alpha(n-1)$	
	$\sigma^2={\sigma_0}^2$	${\chi^2}_0 \le {\chi^2}_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ 或 ${\chi^2}_0 \ge {\chi^2}_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$	$\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{{\sigma_0}^2}$
	$\sigma^2\le{\sigma_0}^2$	${\chi^2}_0 \ge {\chi^2}_\alpha(n-1)$	
	$\sigma^2\ge{\sigma_0}^2$	${\chi^2}_0 \le {\chi^2}_{1-\alpha}(n-1)$	
已知X、Y总体的方差${\sigma_{X0}}^2$与${\sigma_{Y0}}^2$	$\mu_X-\mu_Y=\delta$	$\lvert Z_0\rvert \ge z_{\frac{\alpha}{2}}$	$Z=\frac{\bar{X}-\bar{Y}-\delta}{\sqrt{\frac{{\sigma_{X0}}^2}{n_X}+\frac{{\sigma_{Y0}}^2}{n_Y}}}$
	$\mu_X-\mu_Y\le\delta$	$Z_0 \ge z_\alpha$	
	$\mu_X-\mu_Y\ge\delta$	$Z_0 \le -z_\alpha$	
只知X、Y总体的方差相等	$\mu_X-\mu_Y=\delta$	$\lvert t_0\rvert \ge t_{\frac{\alpha}{2}}(n_X+n_Y-1)$	$t=\frac{\bar{X}-\bar{Y}-\delta}{\sqrt{\left(\frac{1}{n_X}+\frac{1}{n_Y}\right)\frac{(n_X-1){S_X}^2+(n_Y-1){S_Y}^2}{n_X+n_Y-2}}}$
	$\mu_X-\mu_Y\le\delta$	$t_0 \ge t_\alpha(n_X+n_Y-1)$	
	$\mu_X-\mu_Y\ge\delta$	$t_0 \le -t_\alpha(n_X+n_Y-1)$	
只知道俩样本容量相同，即$n_X=n_Y$	$\mu_X-\mu_Y=0$	$\lvert t_0\rvert \ge t_{\frac{\alpha}{2}}(n_X-1)$	【设D=X−Y，均值$\bar{D}$，标准差S_D】 $t=\frac{\bar{D}}{\frac{S_D}{\sqrt{n_X}}}$
	$\mu_X-\mu_Y\le0$	$t_0 \ge t_\alpha(n_X-1)$	
	$\mu_X-\mu_Y\ge0$	$t_0 \le -t_\alpha(n_X-1)$	
	${\sigma_X}^2={\sigma_Y}^2$	$F_0 \le F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_X-1,n_Y-1)$ 或 $F_0 \ge F_{\frac{\alpha}{2}}(n_X-1,n_Y-1)$	$F=\frac{{S_X}^2}{{S_Y}^2}$
	${\sigma_X}^2\le{\sigma_Y}^2$	$F_0 \ge F_\alpha(n_X-1,n_Y-1)$	
	${\sigma_X}^2\ge{\sigma_Y}^2$	$F_0 \le F_{1-\alpha}(n_X-1,n_Y-1)$	

例1. 设某包装机包装葡萄糖。袋装糖的净重是一个正态随机变量，其标准差为 0.015kg，且长期实践表明标准差稳定不变，机器正常时均值为 0.5kg。某日开工后随机地抽取该机器所包装的糖 9 袋，称得净重平均值为 0.511kg，请问机器是否正常?
(α=0.05，$z_{0.025}$=1.96)

① 设袋装糖的净重为 X，$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，从 X 抽 n 个样本，样本均值为 $\bar{X}$，标准差为 S

② 在显著性水平 α=0.05 下，

③
机器正常 均值为 0.5 $H_0:\mu=0.5$
机器不正常 均值不为 0.5 $H_1:\mu\neq0.5$

∵ 题干说净重平均值为 0.511kg
∴ $\mu\neq0.5$ 可能更对
∴ $H_1:\mu\neq0.5$

④ 假设 $H_0:\mu=0.5$；$H_1:\mu\neq0.5$

⑤ 检验统计量 $Z=\frac{\bar{X}-\mu_0}{\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}}$，拒绝域为 $\lvert Z_0\rvert \ge z_{\frac{\alpha}{2}}$

⑥ $Z_0=\frac{0.511-0.5}{\frac{0.015}{\sqrt{9}}}=2.2$

∵ 净重平均值为 0.511kg
∴ $\bar{X}=0.511$
∵ $H_0:\mu=0.5$，而最上方的表格中 $\mu=\mu_0$
∴ $\mu_0=0.5$
∵ 标准差为 0.015kg
∴ $\sigma_0=0.015$
∵ 随机地抽取该机器所包装的糖 9 袋
∴ n = 9

⑦ 将 $Z_0=2.2$ 代入 $\lvert Z_0\rvert \ge z_{\frac{\alpha}{2}}$ 中，得：

$\lvert 2.2\rvert \ge z_{\frac{\alpha}{2}}$ α 的值题干已给出

$\Rightarrow 2.2 \ge z_{\frac{0.05}{2}}$

$\Rightarrow 2.2 \ge z_{0.025}$ $z_{0.025}$ 的值题干已给出

$\Rightarrow 2.2 \ge 1.96$ ✓

∴ Z_0 在拒绝域中，H_1 成立

⑧ H_1 成立 $\Rightarrow$ 均值不为 0.5 $\Rightarrow$ 机器不正常

假设检验

例2. (两个总体的方差)用两种方法(X 和 Y)测定冰自 -0.72℃ 转变为 0℃ 的水的融化热(以 cal/g 计)。测得以下数据：

X：79.98 80.04 80.02 80.04 80.03 80.03 80.04
79.97 80.05 80.03 80.02 80.00 80.02

Y：80.02 79.94 79.98 79.97 79.97 80.03 79.95 79.97

如上两个样本分别来自总体 $N(\mu_X,\sigma_X{}^2)$，$N(\mu_Y,\sigma_Y{}^2)$，且两样本独立。请判断假设 $\sigma_X{}^2=\sigma_Y{}^2$ 是合理的。

(α=0.01，$F_{0.995}(12,7)=0.18$，$F_{0.005}(12,7)=8.18$)

$\because \bar{X}=\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}$

$S^2=\frac{(X_1-\bar{X})^2+(X_2-\bar{X})^2+\cdots+(X_n-\bar{X})^2}{n-1}$

$\therefore \bar{X}=\frac{79.98+80.04+\cdots+80.02}{13}=\frac{104027}{1300}$

$S_X{}^2=\frac{\left(79.98-\frac{104027}{1300}\right)^2+\left(80.04-\frac{104027}{1300}\right)^2+\cdots+\left(80.02-\frac{104027}{1300}\right)^2}{13-1}$

$=0.0006$

样本 X 共 13 个数据

$\bar{Y}=\frac{80.02+79.94+\cdots+79.97}{8}=\frac{63983}{800}$

$S_Y{}^2=\frac{\left(80.02-\frac{63983}{800}\right)^2+\left(79.94-\frac{63983}{800}\right)^2+\cdots+\left(79.97-\frac{63983}{800}\right)^2}{8-1}$

$=0.001$

样本 Y 共 8 个数据

① 设从 X 抽 n_X 个样本，样本均值为 $\bar{X}$，标准差为 S_X
设从 Y 抽 n_Y 个样本，样本均值为 $\bar{Y}$，标准差为 S_Y

② 在显著性水平 α=0.01 下，

③ 假设 $\sigma_X{}^2=\sigma_Y{}^2$ 是合理的　假设 $\sigma_X{}^2=\sigma_Y{}^2$ 是不合理的
$H_0:\sigma_X{}^2=\sigma_Y{}^2$　　$H_1:\sigma_X{}^2\neq\sigma_Y{}^2$

$\because S_X{}^2\neq S_Y{}^2$
$\therefore \sigma_X{}^2\neq\sigma_Y{}^2$ 可能更对
$\therefore H_1:\sigma_X{}^2\neq\sigma_Y{}^2$

④ 假设 $H_0:\sigma_X{}^2=\sigma_Y{}^2$；$H_1:\sigma_X{}^2\neq\sigma_Y{}^2$

⑤ 检验统计量 $F=\frac{S_X{}^2}{S_Y{}^2}$，拒绝域为 $F_0\le F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_X-1,n_Y-1)$ 或 $F_0\ge F_{\frac{\alpha}{2}}(n_X-1,n_Y-1)$

⑥ $F_0=\frac{0.0006}{0.001}=0.6$

⑦ 将 $F_0=0.6$ 代入 $F_0\le F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_X-1,n_Y-1)$ 或 $F_0\ge F_{\frac{\alpha}{2}}(n_X-1,n_Y-1)$ 中，得：

$0.6\le F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_X-1,n_Y-1)$ 或 $0.6\ge F_{\frac{\alpha}{2}}(n_X-1,n_Y-1)$

α 的值题干已给出，
∵ 样本 X 共 13 个数据，样本 Y 共 8 个数据
∴ $n_X=13$，$n_Y=8$

$\Longrightarrow 0.6\le F_{1-\frac{0.01}{2}}(13-1,8-1)$ 或 $0.6\ge F_{\frac{0.01}{2}}(13-1,8-1)$

$\Longrightarrow 0.6\le F_{0.995}(12,7)$ 或 $0.6\ge F_{0.005}(12,7)$

$F_{0.995}(12,7)$、$F_{0.005}(12,7)$ 的值题干已给出

$\Longrightarrow 0.6\le 0.18$ 或 $0.6\ge 8.18$ ✗

$\therefore F_0$ 不在拒绝域中，H_0 成立

⑧ H_0 成立 $\Longrightarrow$ 假设 $\sigma_X{}^2=\sigma_Y{}^2$ 是合理的

假设检验的小题

例1.设总体 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本，据此样本检验假设：$H_0:\mu=\mu_0$，$H_1:\mu\neq\mu_0$，则（　　）

(A) 如果在检验水平 $\alpha=0.05$ 下拒绝 H_0，那么在检验水平 $\alpha=0.01$ 下必拒绝 H_0

(B) 如果在检验水平 $\alpha=0.05$ 下拒绝 H_0，那么在检验水平 $\alpha=0.01$ 下必接受 H_0

(C) 如果在检验水平 $\alpha=0.05$ 下接受 H_0，那么在检验水平 $\alpha=0.01$ 下必拒绝 H_0

(D) 如果在检验水平 $\alpha=0.05$ 下接受 H_0，那么在检验水平 $\alpha=0.01$ 下必接受 H_0

$\because$ α 大时 接受 $H_0 \Longrightarrow \alpha$ 小时 接受 H_0

$\therefore$ $\alpha=0.05$ 下接受 $H_0 \Longrightarrow \alpha=0.01$ 下必接受 H_0

选 (D)

例2.在假设检验时，对于 $H_0:\mu=\mu_0$；$H_1:\mu\neq\mu_0$，称 ____ 为犯第一类错误。

(A) H_1 真，接受 H_1　　(B) H_1 不真，接受 H_1

(C) H_1 真，拒绝 H_1　　(D) H_1 不真，拒绝 H_1

$\because$ 第一类错误：$\begin{cases} H_0\text{真}/H_1\text{不真} \\ \text{拒绝了}H_0/\text{接受了}H_1 \end{cases}$

$\therefore$ (B) 正确

例3.在假设检验中，显著性水平 α 的意义是 ____。

(A) 原假设 H_0 成立，经检验被拒绝的概率

(B) 原假设 H_0 成立，经检验被接受的概率

(C) 原假设 H_0 不成立，经检验被接受的概率

(D) 原假设 H_0 不成立，经检验被拒绝的概率

$\because P\{\text{拒绝了}H_0|H_0\text{真}\}=\alpha$

$\therefore$ 在H_0真的前提下，拒绝了H_0的概率 $=\alpha$

$\therefore$ (A) 正确

例4.在假设检验中，α、β 分别代表第一类和第二类错误的概率，则当样本容量 n 一定时，下列说法正确的是 ___ 。

(A) α 减小，β 也减小

(B) α 增大，β 也增大

(C) A 和 B 同时成立

(D) α 和 β 一个减小，另一个往往增大

$\because$ 在 n 固定的条件下，α 小 β 就大，
β 小 α 就大

$\therefore$ α 和 β 一个减小，另一个往往增大，(D) 正确

【 α 越大越容易 拒绝 H_0/接受 H_1 】

α 小时 拒绝 H_0/接受 $H_1 \Longrightarrow \alpha$ 大时 拒绝 H_0/接受 H_1

α 大时 接受 H_0/拒绝 $H_1 \Longrightarrow \alpha$ 小时 接受 H_0/拒绝 H_1

第一类错误：$\begin{cases} H_0\text{真}/H_1\text{不真} \\ \text{拒绝了}H_0/\text{接受了}H_1 \end{cases}$

$P\{\text{拒绝了}H_0/\text{接受了}H_1|H_0\text{真}/H_1\text{不真}\}=\alpha$

第二类错误：$\begin{cases} H_0\text{不真}/H_1\text{真} \\ \text{接受了}H_0/\text{拒绝了}H_1 \end{cases}$

$P\{\text{接受了}H_0/\text{拒绝了}H_1|H_0\text{不真}/H_1\text{真}\}=\beta$

α、β 的性质：① $\alpha+\beta$ 不一定等于 1

② 在 n 固定的条件下，α 小 β 就大，
β 小 α 就大

线性回归

例1. 为研究某一化学反应过程中温度 x (℃) 对产品得率 y (%) 的影响，测得数据如下表。求 y 关于 x 的线性回归方程，并求 σ^2 的无偏估计

温度x (℃)	100	110	120	130	140	150	160	170	180	190
得率y (%)	45	51	54	61	66	70	74	78	85	89

① $\bar{x}=\frac{100+110+\cdots+190}{10}=145$　　　$n=10$

$\bar{y}=\frac{45+51+\cdots+89}{10}=67.3$

$l_{xx}=100^2+110^2+\cdots+190^2-10\times145^2=8250$

$l_{yy}=45^2+51^2+\cdots+89^2-10\times67.3^2=1932.1$

$l_{xy}=100\times45+110\times51+\cdots+190\times89-10\times145\times67.3=3985$

② $\hat{b}=\frac{3985}{8250}=0.48303$

$\hat{a}=67.3-145\times0.48303=-2.73935$

$\widehat{\sigma^2}=\frac{1932.1-\frac{3985^2}{8250}}{10-2}=0.9$

③ 回归方程 : $\hat{y}=-2.73935+0.48303x$

σ^2 的无偏估计 : $\widehat{\sigma^2}=0.9$

$\bar{x}=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$

$\bar{y}=\frac{y_1+y_2+\cdots+y_n}{n}$

$l_{xx}={x_1}^2+{x_2}^2+\cdots+{x_n}^2-n\bar{x}^2$

$l_{yy}={y_1}^2+{y_2}^2+\cdots+{y_n}^2-n\bar{y}^2$

$l_{xy}=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n-n\bar{x}\bar{y}$

$\hat{b}=\frac{l_{xy}}{l_{xx}}$，$\hat{a}=\bar{y}-\bar{x}\hat{b}$，$\widehat{\sigma^2}=\frac{l_{yy}-\frac{{l_{xy}}^2}{l_{xx}}}{n-2}$

回归方程 : $\hat{y}=\hat{a}+\hat{b}x$

σ^2的无偏估计 : $\widehat{\sigma^2}$

例2. 为研究某一化学反应过程中温度 x (℃) 对产品得率 y (%) 的影响，测得数据如下表。试检验回归效果是否显著 ($\alpha=0.05$，$t_{0.025}(8)=2.3060$)

温度x (℃)	100	110	120	130	140	150	160	170	180	190
得率y (%)	45	51	54	61	66	70	74	78	85	89

① $\bar{x}=\frac{100+110+\cdots+190}{10}=145$　　　$n=10$

$\bar{y}=\frac{45+51+\cdots+89}{10}=67.3$

$l_{xx}=100^2+110^2+\cdots+190^2-10\times145^2=8250$

$l_{yy}=45^2+51^2+\cdots+89^2-10\times67.3^2=1932.1$

$l_{xy}=100\times45+110\times51+\cdots+190\times89-10\times145\times67.3=3985$

$\hat{b}=\frac{3985}{8250}=0.48303$

$\hat{a}=67.3-145\times0.48303=-2.73935$

$\widehat{\sigma^2}=\frac{1932.1-\frac{3985^2}{8250}}{10-2}=0.9 \Longrightarrow \hat{\sigma}=\sqrt{0.9}=0.95$

回归方程 : $\hat{y}=-2.73935+0.48303x$

σ^2 的无偏估计 : $\widehat{\sigma^2}=0.9$

② 在显著性水平 α=0.05 下，

假设 $H_0:b=0$；$H_1:b\neq0$，

检验统计量 $t=\frac{\hat{b}}{\hat{\sigma}}\sqrt{l_{xx}}$，拒绝域为 $|t_0|\geq t_{\frac{\alpha}{2}}(n-2)$

③ $t_0=\frac{0.48303}{0.95}\times\sqrt{8250}=46.2$

④ 将 $t_0=46.2$ 代入 $|t_0|\geq t_{\frac{\alpha}{2}}(n-2)$ 中，得 :

$|46.2|\geq t_{\frac{\alpha}{2}}(n-2)$

$\Longrightarrow$ $46.2\geq t_{\frac{0.05}{2}}(10-2)$

$\Longrightarrow$ $46.2\geq t_{0.025}(8)$

$\Longrightarrow$ $46.2\geq2.3060$ ✓

$\therefore t_0$ 在拒绝域中，回归效果显著

检验统计量 $t=\frac{\hat{b}}{\hat{\sigma}}\sqrt{l_{xx}}$，拒绝域为$|t_0|\geq t_{\frac{\alpha}{2}}(n-2)$”

查表 —— $\Phi(?)$、 $z_?$

例1. 查 $\Phi(1.86)$　　$1.86 = 1.8 + 0.06$

$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$

x	⋯	0.05	0.06	0.07	⋯
⋯	⋯	⋯	⋯	⋯	⋯
1.7	⋯	0.9599	0.9608	0.9616	⋯
1.8	⋯	0.9678	0.9686	0.9693	⋯
1.9	⋯	0.9744	0.9750	0.9756	⋯
⋯	⋯	⋯	⋯	⋯	⋯

$\Phi(1.86) = 0.9686$

例2. 查 $\Phi(-1.86)$

$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$

x	⋯	0.05	0.06	0.07	⋯
⋯	⋯	⋯	⋯	⋯	⋯
1.7	⋯	0.9599	0.9608	0.9616	⋯
1.8	⋯	0.9678	0.9686	0.9693	⋯
1.9	⋯	0.9744	0.9750	0.9756	⋯
⋯	⋯	⋯	⋯	⋯	⋯

先查 $\Phi(1.86)$

$\Phi(1.86) = 0.9686$ 本课例1求过

$$\begin{aligned}\Phi(-1.86) &= 1 - \Phi(1.86) \\ &= 1 - 0.9686 \\ &= 0.0314\end{aligned}$$

猴博士爱讲课

例3. 查 $z_{0.025}$

$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$

x	⋯	0.05	0.06	0.07	⋯
⋯	⋯	⋯	⋯	⋯	⋯
1.7	⋯	0.9599	0.9608	0.9616	⋯
1.8	⋯	0.9678	0.9686	0.9693	⋯
1.9	⋯	0.9744	0.9750	0.9756	⋯
⋯	⋯	⋯	⋯	⋯	⋯

$1 - 0.025 = 0.975$

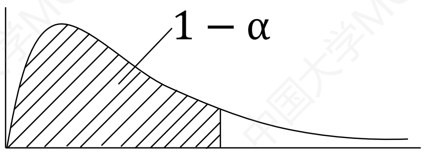
$1.9 + 0.06 = z_{0.025} \implies z_{0.025} = 1.96$

查表 —— χ^2、t、F

【查不到 $t_A(n)$，可查 $t_{1-A}(n)$，$t_A(n)=-t_{1-A}(n)$】

【查不到 $F_\alpha(n_1,n_2)$，可查 $F_{1-\alpha}(n_2,n_1)$，$F_\alpha(n_1,n_2)=\frac{1}{F_{1-\alpha}(n_2,n_1)}$】

例1. 查 $\chi^2{}_{0.05}(24)$



$\chi^2{}_\alpha(n)$

n \ α	⋯	0.1	0.05	0.025	⋯
⋯	⋯	⋯	⋯	⋯	⋯
23	⋯	32.007	35.172	38.075	⋯
24	⋯	33.196	$\boxed{36.415}$	39.364	⋯
25	⋯	34.381	37.652	40.646	⋯
⋯	⋯	⋯	⋯	⋯	⋯

$P\{\chi^2(n)\le\chi^2{}_\alpha(n)\}=1-\alpha$

∵ 下标 α 和 等号右边的 1−α 不相同

∴ 式子变为 $P\{\chi^2(n)>\chi^2{}_\alpha(n)\}$

∵ P 里符号是 “>”，不是“< 或 ≤”且下标 α 跟表头对应项一致

∴ 直接查表就行

$\chi^2{}_{0.05}(24)=36.415$

例2. 查 $t_{0.025}(35)$

$P\{t(n)>t_p(n)\}=1-p$

$t_p(n)$ \ p / n	0.05	0.025
35	−1.6896	−2.0301
36	−1.6883	−2.0281

题干给出了：$P\{t(n)>t_p(n)\}=1-p$

∵ 下标 p 和 等号右边的 1−p 不相同

∴ 式子变为 $P\{t(n)<t_p(n)\}$

∵ P 里符号是“<”且下标 p 跟表头对应项一致

∴ 将表里关于 p 的所有取值都变成 1−原取值

$t_p(n)$ \ p / n	1−0.05	1−0.025
35	−1.6896	−2.0301
36	−1.6883	−2.0281

⇒

$t_p(n)$ \ p / n	0.95	0.975
35	−1.6896	$\boxed{-2.0301}$
36	−1.6883	−2.0281

然后查表，查不到，可查 $t_{1-0.025}(35)$

$t_{1-0.025}(35)=t_{0.975}(35)=-2.0301$

$$\begin{aligned}t_{0.025}(35)&=-\,t_{1-0.025}(35)\\&=-(-2.0301)\\&=2.0301\end{aligned}$$

查表 ——χ^2、t、F

例3. 查 $F_{0.05}(12,15)$

$P\{F(n_1,n_2) > F_\alpha(n_1,n_2)\} = \alpha$

【 查不到 $t_A(n)$，可查 $t_{1-A}(n)$，$t_A(n) = -t_{1-A}(n)$ 】

【 查不到 $F_\alpha(n_1,n_2)$，可查 $F_{1-\alpha}(n_2,n_1)$，$F_\alpha(n_1,n_2) = \frac{1}{F_{1-\alpha}(n_2,n_1)}$ 】

α=0.05					
n_2 \ n_1	⋯	10	12	15	⋯
⋯	⋯	⋯	⋯	⋯	⋯
14	⋯	2.60	2.53	2.46	⋯
15	⋯	2.54	2.48	2.40	⋯
⋯	⋯	⋯	⋯	⋯	⋯

α=0.1					
n_2 \ n_1	⋯	10	12	15	⋯
⋯	⋯	⋯	⋯	⋯	⋯
14	⋯	2.10	2.05	2.01	⋯
15	⋯	2.06	2.02	1.97	⋯
⋯	⋯	⋯	⋯	⋯	⋯

题干给出了：$P\{F(n_1,n_2) > F_\alpha(n_1,n_2)\} = \alpha$

∵ 下标 α 和 等号右边的 α 相同，

且 P 里符号是 “>”，不是“< 或 ≤”，下标 α 跟表头对应项一致

∴ 直接查表就行

$F_{0.05}(12,15) = 2.48$