

Les nombres décimaux

Cours complet pour la classe de 6e

EduPlus

1^{er} juin 2025

Table des matières

Introduction	3
1 Qu'est-ce qu'un nombre décimal ?	3
1.1 Définition approfondie	3
1.2 Origine historique	3
1.3 Structure détaillée	3
1.3.1 Exemple détaillé	3
1.4 Différence avec les nombres non décimaux	3
2 Passage de la fraction décimale à l'écriture décimale	4
2.1 Méthodes complètes	4
2.1.1 Méthode par décomposition	4
2.1.2 Méthode par division	4
2.2 Exercices guidés	4
3 Passage de l'écriture décimale à la fraction décimale	4
3.1 Processus détaillé	4
3.2 Tableau de conversion	4
4 Comparaison des nombres décimaux	5
4.1 Algorithme complet	5
4.2 Exemple approfondi	5
5 Encadrement des nombres décimaux	5
5.1 Types d'encadrement	5
5.2 Application pratique	5
6 Repérage sur une droite graduée	5
6.1 Construction détaillée	5
6.2 Exemple complet	6

7	Addition et soustraction des nombres décimaux	6
7.1	Méthodologie complète	6
7.1.1	Alignement des virgules	6
7.1.2	Complétion par des zéros	6
7.2	Erreurs fréquentes	6
8	Multiplication des nombres décimaux	6
8.1	Explication approfondie	6
8.2	Preuve mathématique	6
9	Division des nombres décimaux	6
9.1	Division d'un décimal par un entier	6
9.2	Division par 10, 100, 1000	7
10	Problèmes concrets	7
10.1	Problème 1 : Budget familial	7
10.2	Problème 2 : Recette de cuisine	7
11	Approfondissement scientifique	7
11.1	Notation scientifique	7
11.2	Précision des mesures	7
12	Histoire des mathématiques	8
12.1	Évolution des notations	8
12.2	Applications historiques	8
13	Exercices progressifs	8
13.1	Niveau 1 - Découverte	8
13.2	Niveau 2 - Maîtrise	8
13.3	Niveau 3 - Expert	8
	Conclusion	9
A	Annexe : Fiche mémo	9

Introduction

Les nombres décimaux représentent une avancée fondamentale dans l'apprentissage des mathématiques. Ils permettent de passer des quantités discrètes (nombres entiers) à des mesures précises du monde continu qui nous entoure. Ce chapitre, spécialement conçu pour les élèves de 6e, explore en profondeur ces nombres qui peuplent notre quotidien : prix, mesures, calculs, statistiques...

1 Qu'est-ce qu'un nombre décimal ?

1.1 Définition approfondie

Un nombre décimal est un nombre qui peut s'exprimer comme une fraction dont le dénominateur est une puissance de 10 (10, 100, 1000, etc.). Mathématiquement, cela s'écrit :

$$\text{Nombre décimal} = \frac{a}{10^n}$$

où a est un entier relatif et n un entier naturel.

1.2 Origine historique

Les nombres décimaux ont été développés au XVI^e siècle par le mathématicien Simon Stevin, qui a introduit le système décimal pour les fractions. Ce système a révolutionné les calculs en les rendant aussi simples qu'avec les entiers.

1.3 Structure détaillée

Un nombre décimal se compose de deux parties :

- **Partie entière** : À gauche de la virgule, elle représente les unités complètes
- **Partie décimale** : À droite de la virgule, elle représente les fractions d'unité

1.3.1 Exemple détaillé

Prenons le nombre 245,678 :

Rang	Centaines	Dizaines	Unités	Virgule	Dixièmes	Centièmes	Millièmes
Chiffre	2	4	5	,	6	7	8
Valeur	200	40	5	,	0,6	0,07	0,008

Ce qui donne : $200 + 40 + 5 + 0,6 + 0,07 + 0,008 = 245,678$

1.4 Différence avec les nombres non décimaux

Toutes les fractions ne donnent pas des nombres décimaux. Par exemple, $\frac{1}{3} = 0,333\dots$ n'est pas décimal car il nécessite une infinité de chiffres après la virgule.

2 Passage de la fraction décimale à l'écriture décimale

2.1 Méthodes complètes

2.1.1 Méthode par décomposition

$$\frac{357}{100} = \frac{300}{100} + \frac{50}{100} + \frac{7}{100} = 3 + 0,5 + 0,07 = 3,57$$

2.1.2 Méthode par division

$$\begin{array}{r|l} 357 & 100 \\ \hline 300 & 3,57 \\ 570 & \\ 500 & \\ 700 & \\ 700 & \\ 0 & \end{array}$$

2.2 Exercices guidés

Convertir en écriture décimale :

1. $\frac{9}{10} \rightarrow$
2. $\frac{123}{100} \rightarrow$
3. $\frac{7}{1000} \rightarrow$
4. $\frac{45}{2} \rightarrow$

3 Passage de l'écriture décimale à la fraction décimale

3.1 Processus détaillé

Pour 12,345 :

1. On écrit le nombre sans virgule : 12345
2. On détermine le nombre de décimales : 3
3. On écrit la fraction : $\frac{12345}{1000}$
4. On simplifie si possible : $\frac{2469}{200}$

3.2 Tableau de conversion

Nombre décimal	Fraction décimale	Fraction simplifiée
0,5	$\frac{5}{10}$	$\frac{1}{2}$
0,75	$\frac{75}{100}$	$\frac{3}{4}$
1,2	$\frac{12}{10}$	$\frac{6}{5}$
3,125	$\frac{3125}{1000}$	$\frac{25}{8}$

4 Comparaison des nombres décimaux

4.1 Algorithme complet

Pour comparer A et B :

1. Comparer les parties entières
2. Si égales, comparer les chiffres des dixièmes
3. Si égaux, comparer les centièmes
4. Continuer jusqu'à trouver une différence
5. Si tous les chiffres sont égaux, les nombres sont égaux

4.2 Exemple approfondi

Comparons 12,3456 et 12,3467 :

Rang	Unités	Dixièmes	Centièmes	Millièmes	Dix-millièmes
12,3456	2	3	4	5	6
12,3467	2	3	4	6	7

Différence au rang des millièmes : $5 < 6$ donc $12,3456 < 12,3467$

5 Encadrement des nombres décimaux

5.1 Types d'encadrement

- **Encadrement à l'unité** : $3 < 3,7 < 4$
- **Encadrement au dixième** : $3,7 < 3,75 < 3,8$
- **Encadrement au centième** : $3,75 < 3,756 < 3,76$

5.2 Application pratique

Encadrer $= 3,1415926535...$

- À l'unité : $3 < \quad < 4$
- Au dixième : $3,1 < \quad < 3,2$
- Au centième : $3,14 < \quad < 3,15$
- Au millième : $3,141 < \quad < 3,142$

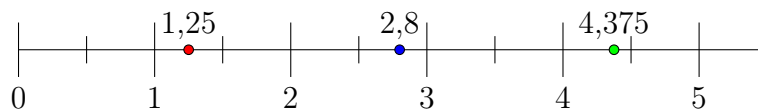
6 Repérage sur une droite graduée

6.1 Construction détaillée

Pour graduer une droite avec des décimaux :

1. Tracer une droite horizontale
2. Marquer les entiers à égale distance
3. Subdiviser chaque unité en 10 pour les dixièmes
4. Subdiviser chaque dixième en 10 pour les centièmes

6.2 Exemple complet



7 Addition et soustraction des nombres décimaux

7.1 Méthodologie complète

7.1.1 Alignement des virgules

$$\begin{array}{r} 12,34 \\ + 5,60 \\ \hline 17,94 \end{array}$$

7.1.2 Complétion par des zéros

$$\begin{array}{r} 8,50 \\ - 3,28 \\ \hline 5,22 \end{array}$$

7.2 Erreurs fréquentes

- Ne pas aligner les virgules
- Oublier de compléter avec des zéros
- Mal gérer les retenues avec les décimales

8 Multiplication des nombres décimaux

8.1 Explication approfondie

Prenons $1,2 \times 0,03$:

1. On multiplie sans virgule : $12 \times 3 = 36$
2. On compte les décimales : 1 (dans 1,2) + 2 (dans 0,03) = 3
3. On place la virgule : 0,036

8.2 Preuve mathématique

$$1,2 \times 0,03 = \frac{12}{10} \times \frac{3}{100} = \frac{36}{1000} = 0,036$$

9 Division des nombres décimaux

9.1 Division d'un décimal par un entier

Exemple : $15,75 \div 5$

15,75	5
-15	3,15
0,75	
-0,75	
0	

9.2 Division par 10, 100, 1000

Tableau récapitulatif :

Division par	Effet sur la virgule
10	Décalage d'1 rang vers la gauche
100	Décalage de 2 rangs vers la gauche
1000	Décalage de 3 rangs vers la gauche

10 Problèmes concrets

10.1 Problème 1 : Budget familial

La famille Dupont dépense :

- 125,50€ pour l'épicerie
- 87,25€ pour l'essence
- 63,80€ pour les loisirs

Quel est le total des dépenses ?

10.2 Problème 2 : Recette de cuisine

Pour faire 30 cookies, il faut :

- 0,375 kg de farine
- 0,250 kg de sucre
- 0,125 kg de beurre

Quelles quantités pour 12 cookies ?

11 Approfondissement scientifique

11.1 Notation scientifique

Les scientifiques utilisent les puissances de 10 :

- $0,002 = 2 \times 10^{-3}$
- $3400 = 3,4 \times 10^3$

11.2 Précision des mesures

En physique, le nombre de décimales indique la précision :

- 2,3 m (précision au dixième)
- 2,30 m (précision au centième)

12 Histoire des mathématiques

12.1 Évolution des notations

- XVIe siècle : Virgule ou point comme séparateur
- XVIIe siècle : Standardisation en Europe
- XIXe siècle : Adoption internationale

12.2 Applications historiques

- Navigation maritime
- Calculs astronomiques
- Commerce international

13 Exercices progressifs

13.1 Niveau 1 - Découverte

- Écrire en chiffres :
 - Trois unités et quatre dixièmes
 - Vingt-cinq centièmes
- Convertir :
 - $\frac{7}{10} =$
 - $0,45 =$

13.2 Niveau 2 - Maîtrise

- Calculer :
 - $12,5 + 3,75 =$
 - $8,4 \times 0,5 =$
- Ranger par ordre croissant : 0,5 ; 0,05 ; 0,505 ; 0,055

13.3 Niveau 3 - Expert

- Trouver le nombre dont :
 - La partie entière est 7
 - Le chiffre des centièmes est 4
 - La somme des chiffres est 15
- Problème complexe : Un terrain rectangulaire mesure 12,75 m par 8,5 m. Calculer son périmètre et son aire.

Conclusion

Les nombres décimaux constituent un outil mathématique fondamental qui trouve des applications dans tous les domaines de la vie quotidienne et professionnelle. Leur maîtrise ouvre la porte à des concepts plus avancés comme les pourcentages, les statistiques et l'algèbre.

Pour aller plus loin :

- Observer les nombres décimaux dans les recettes de cuisine
- Analyser les prix au supermarché
- Mesurer des objets avec une précision décimale
- Créer des problèmes mathématiques à partir de situations réelles

A Annexe : Fiche mémo

Concept	Méthode
Lecture	Repérer la position de chaque chiffre
Comparaison	Aligner les virgules, comparer chiffre par chiffre
Addition/Soustraction	Aligner les virgules, compléter avec des zéros
Multiplication	Multiplier sans virgule, puis compter les décimales
Division	Placer la virgule au quotient quand on l'abaisse au dividende