Université Gaston Berger
de Saint-Louis
U.F.R S.A.T

Année académique 2024-2025

L2 MA- L2 Mass
Analyse 3 [1]
Fiche 1

===

NORMES-DISTANCES

===

Exercice 1 Dans $\mathbb{R}^n$, on définit N_1, N_2, N_3 par : $\forall x = (x_1, \cdots, x_n)$
,

$$N_1(x) = \sup\{|x_i|, \, i = 1, \cdots, n\} \;\; ; \; N_2(x) = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \;\; ; \; N_3(x) = [\sum_{i=1}^{n} x_i^2]^{\frac{1}{2}}$$

1. Montrer que N_1, N_2, N_3 sont trois normes sur $\mathbb{R}^n$.
2. Montrez que ces trois normes sont équivalentes sur $\mathbb{R}^n$.
3. Dans $\mathbb{R}^2$ représenté par le plan, dessiner la boule de centre O et de rayon 1 pour chacune de ces normes.

Exercice 2 Soit$E$ un espace vectoriel reel.

a) Si N est une norme sur E, montrer que l'application d : $\begin{array}{ccc} E \times E & \to & \mathbb{R}^+ \\ (x, y) & \mapsto & N(x - y) \end{array}$ est une distance (distance associée à la norme N).

Montrer que d vérifie :

(1) $\forall x, y, z \in E$, $d(x + z, y + z) = d(x, y)$
(2) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall x, y \in E$, $d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x, y)$.

b) Inversement, soit d une distance sur E vérifiant (1) et (2).

Montrer que l'application : N : $\begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & d(x, 0) \end{array}$ est une norme sur E.

Exercice 3 Les applications suivantes, de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^+$, sont-elles des distances sur $\mathbb{R}$?

$d_1(x, y) = (x - y)^2$
$d_2(x, y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|}$
$d_3(x, y) = \sqrt{|x - y|}$
$d_4(x, y) = |x^3 - y^3|$
$d_5(x, y) = |x - 2y|$

===

1. Cours : M.N. DIAKHABY

OUVERST-FERMES-INTERIEUR-ADHERENCE

===

Exercice 4 Dans $\mathbb{R}$, on pose : $d(x,y) = 0$ si $x = y$, $d(x,y) = |x| + |y|$ si $x \neq y$.

1. Montrer que d est une distance.
2. Déterminer
   a) la boule ouverte de centre 1 et de rayon 1 : $B(1,1)$,
   b) l'adhérence de cette boule,
   c) la boule fermée $B_f(1,1)$,
   d) la boule fermée $B_f(1,3)$

Exercice 5 *Rappeler la définition de l'adhérence $\overline{A}$ d'une partie A de $\mathbb{R}^p$.*
1) Démontrer que si A et B sont deux parties de $\mathbb{R}^p$, alors $\overline{A \cap B}$ est contenu dans $\bar{A} \cap \bar{B}$. A-t-on l'égalité ?
2) Si $p = 1$ et $d(x,y) = |x-y|$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $y \in \mathbb{R}$, déterminer l'adhérence de la partie :

$$A = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots\} \quad de \quad \mathbb{R}.$$

Exercice 6 *A et B sont deux parties non vides de $\mathbb{R}$. Est-il vrai que*
1) A ouvert $\Rightarrow A + B$ ouvert ?
2) A fermé $\Rightarrow A + B$ fermé ? (métrique usuelle de $\mathbb{R}$)

Exercice 7 1) Montrer que pour toute partie A d'un espace métrique (E,d), on a :
$\overline{A}^c = \overset{\circ}{A^c}$ et $(\overset{\circ}{A})^c = \overline{A^c}$
2) Dans $\mathbb{R}$ muni de sa métrique naturelle, déterminer :

$$\overline{\mathbb{Q}} \, ; \, \overset{\circ}{\mathbb{Q}}$$

3) A et B étant deux parties de l'espace métrique (E,d), montrer que :
a) $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$
b) $\overset{\circ}{\widehat{(A \cap B)}} = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$
c) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
d) $\overset{\circ}{\widehat{(A \cup B)}} \supset \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}$
Les inclusions a) et d) peuvent-elles être strictes ?

Exercice 8 *1) A étant une partie fermée d'un espace métrique, montrer que : $\overset{\circ}{\overline{(\overset{\circ}{A})}} = \overset{\circ}{A}$.*
2)A étant une partie ouverte d'un espace métrique, montrer que : $\overline{\overset{\circ}{\overline{A}}} = \overline{A}$.
3) démontrer que pour toute partie X de E, la frontière de X est donnée par :

$$Fr(X) = \overline{X} - X^\circ.$$

Exercice 9 Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé de dimension finie. Soit A une partie non vide E et $x \in\in E$. On appelle distance de x à A, le nombre réel positif noté $\delta(x,A)$ et défini comme suit :

$$\delta(x,A) = \inf_{y \in A} \|x - y)\|.$$

Montrer que :

1. Si $x \in A$, alors $\delta(x, A) = 0$.
2. $\delta(x, A) = 0$ si et seulement si $x \in \bar{A}$.

Définition On appelle diamétre de A, le nombre réel positif noté par $\phi(A)$ et défini par :

$$\phi(A) = \sup_{(x,y)\in A\times A} \|x - y\|.$$

3. Montrer que si $A \subset B$, alors $\phi(A) \leq \phi(B)$.
4. Montrer que A est borné si et seulement si $\phi(A) < +\infty$ 5. Montrer que $\phi(A) = \phi(\bar{A})$.

Exercice 10 Soit (X, d) un espace métrique.

1. Donner la définition d'une partie ouverte de X.
2. Montrer que pour tout $x \in X$ et $r > 0$, $B(x, r)$ est un ouvert de X.
3. Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on pose $||(x, y)|| = \max(|x + y|, |x - 2y|)$. Montrer qu'il s'agit d'une norme sur $\mathbb{R}^2$.
4. Soient $||.||_1$ et $||.||_2$ deux normes sur $\mathbb{R}^n$ et notons respectivement par B_1 et B_2 les boules unités associées.

Montrer que $B_1 \subseteq B_2 \iff \forall x \in \mathbb{R}^n, ||x||_2 \leq ||x||_1$.