Étude de Fonction et Dérivées - Leçon Complète

Assane Fall, UGB, UFR SAT

Contents

1 Introduction à l'étude des fonctions

L'étude de fonction est une partie essentielle des mathématiques. Une fonction $f(x)$ décrit la relation entre une variable x et une autre variable $y = f(x)$. Cette étude inclut l'analyse des limites, des dérivées, des extrema, des points d'inflexion et des variations de la fonction.

2 Définition de la dérivée

La dérivée d'une fonction mesure le taux de variation de la fonction à un instant donné. Pour une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, la dérivée de f en un point x_0 est définie par la limite suivante, si elle existe :

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

2.1 Exemple de dérivée : $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$

Soit $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$. Calculons sa dérivée :

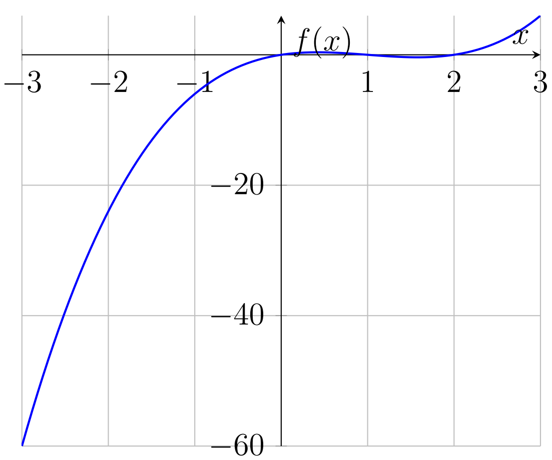
$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$$

Nous avons trouvé la dérivée de la fonction, ce qui nous permet maintenant de déterminer les points où la fonction est croissante ou décroissante, ainsi que les points d'extrema.

3 Courbes et graphiques des fonctions et de leurs dérivées

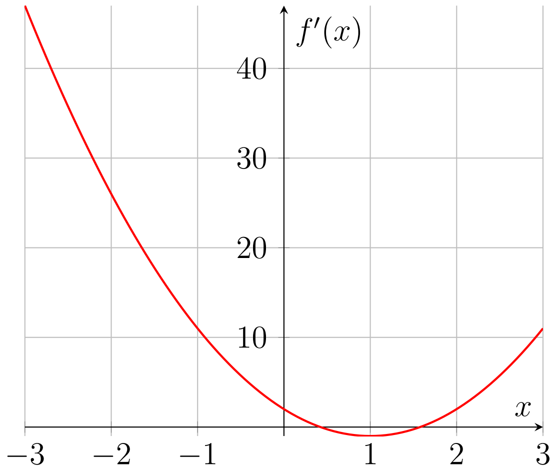
3.1 Graphique de la fonction

Le graphique de la fonction $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$ montre l'évolution de la fonction par rapport à x.



3.2 Graphique de la dérivée $f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$

Le graphique ci-dessous montre la dérivée de la fonction $f(x)$, ce qui nous permet de déterminer les intervalles de croissance et de décroissance de la fonction $f(x)$.



4 Les extrema et les variations de la fonction

Les extrema sont des points où la fonction atteint un maximum ou un minimum local. Ces points se trouvent là où la dérivée s'annule (c'est-à-dire où $f'(x) = 0$).

4.1 Calcul des extrema

Pour déterminer les extrema de $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$, nous résolvons l'équation $f'(x) = 0$, c'est-à-dire :

$$3x^2 - 6x + 2 = 0$$

La solution de cette équation quadratique donne les points où la fonction atteint un extremum. En résolvant cette équation, on trouve :

$$x_1 = \frac{6 + \sqrt{36 - 24}}{6} = 1, \quad x_2 = \frac{6 - \sqrt{36 - 24}}{6} = \frac{2}{3}$$

4.2 Signes de la dérivée et variations de la fonction

En analysant le signe de $f'(x)$, nous pouvons déterminer les intervalles où la fonction est croissante ou décroissante. Voici les résultats :

- La fonction est croissante sur l'intervalle $(-\infty, \frac{2}{3})$. - La fonction est décroissante sur l'intervalle $(\frac{2}{3}, +\infty)$.

Cela peut être illustré graphiquement par la courbe des dérivées.

5 Les points d'inflexion

Un point d'inflexion est un point où la concavité de la fonction change. Pour déterminer les points d'inflexion, nous devons examiner la dérivée seconde de la fonction $f(x)$.

5.1 Dérivée seconde de $f(x)$

Calculons la dérivée seconde de $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$:

$$f''(x) = 6x - 6$$

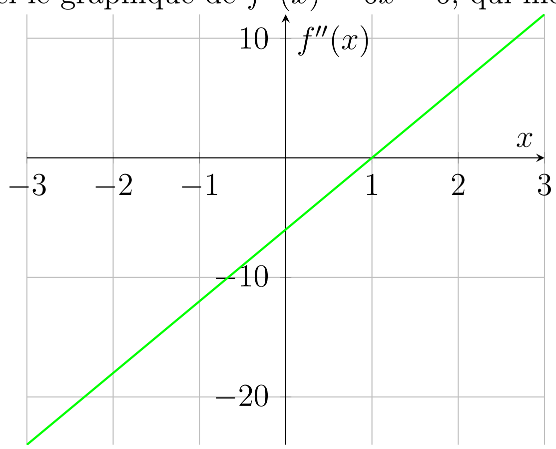
En résolvant $f''(x) = 0$, nous trouvons :

$$x = 1$$

C'est donc un point d'inflexion. Le signe de $f''(x)$ nous permet de déterminer si la concavité change à ce point.

5.2 Graphique de la dérivée seconde

Voici le graphique de $f''(x) = 6x - 6$, qui montre l'évolution de la concavité de la fonction.



6 Conclusion

L'étude des fonctions et de leurs dérivées est un outil essentiel pour comprendre le comportement des fonctions en mathématiques. Les dérivées nous permettent d'analyser les variations d'une fonction, ses extrema et ses points d'inflexion, ce qui est crucial pour résoudre de nombreux problèmes.