Отчёт по лабораторной работе 2

дисциплина: Математическое моделирование

Фогилева Ксения Михайловна, НПИбд-02-18

Содержание

List of Tables

List of Figures

1 Цель работы

Решить задачу о погоне, построить графики с помощью Python.

2 Задание

Вариант 43 На море в тумане катер береговой охраны преследует лодку браконьеров. Через определенный промежуток времени туман рассеивается, и лодка обнаруживается на расстоянии 16.2 км от катера. Затем лодка снова скрывается в тумане и уходит прямолинейно в неизвестном направлении. Известно, что скорость катера в 4 раза больше скорости браконьерской лодки.

1. Вывести дифференциальное уравнение, описывающее движение катера, с начальными условиями.
2. Построить траектории движения катера и лодки для двух случаев.
3. Определить точку пересечения катера и лодки.

3 Выполнение лабораторной работы

1. Вывод дифференциального уравнения

1.1. Принимаем за $t_0 = 0, x_0 = 0$ – место нахождения лодки браконьеров в момент обнаружения, $x_0 = 16.2$ км – место нахождения катера береговой охраны относительно лодки браконьеров в момент обнаружения лодки.

1.2. Вводим полярные координаты. Полюс – это точка обнаружения лодки браконьеров $x_0(\theta = x_0 = 0)$, а полярная ось r проходит через точку нахождения катера береговой охраны. (см. рис. 3.1)

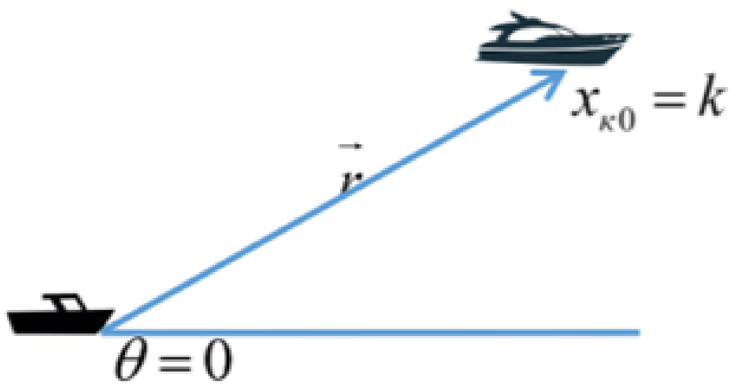

Figure 3.1: Положение катера и лодки в начальный момент времени

1.3. Траектория катера такая, что и катер, и лодка все время на одном расстоянии от полюса θ, только в этом случае траектория катера пересечется с траекторией лодки. Поэтому в начале катер береговой охраны должен двигаться некоторое время прямолинейно, пока не окажется на том же расстоянии от полюса, что и лодка браконьеров. После этого катер береговой охраны должен двигаться вокруг полюса удаляясь от него с той же скоростью, что и лодка браконьеров.

1.4. Для того, чтобы найти расстояние x (расстояние, после которого катер начнет двигаться вокруг полюса), нужно составить простое уравнение. Через время t катер и лодка окажутся на одном расстоянии x от полюса. За это время лодка пройдет x, а катер $16,2 - x$ (или $16,2 + x$, в зависимости от начального положения катера относительно полюса). Время, за которое они пройдут это расстояние, можно вычислить как $\frac{x}{v}$ или $\frac{16.2-x}{4v}$ (во втором случае $\frac{16,2+x}{4v}$). Так как время одинаковое, то эти величины одинаковы. Значит неизвестное расстояние x находится из следующего уравнения:

$$\frac{x}{v} = \frac{16,2 - x}{4v} \quad \frac{x}{v} = \frac{16,2 + x}{4v}$$

Тогда $x_1 = \frac{1}{5}k = 3,24$ (км), а $x_2 = \frac{1}{3}k = 3,2$ (км), задачу решаем для двух случаев.

1.5. Когда катер береговой охраны окажется на одном расстоянии от полюса, что и лодка, он должен сменить прямолинейную траекторию и начать двигаться вокруг полюса удаляясь от него со скоростью лодки v. Для этого скорость катера раскладывается на две составляющие: v_r – радиальная скорость и v_τ – тангенциальная скорость. (см. рис. 3.2)

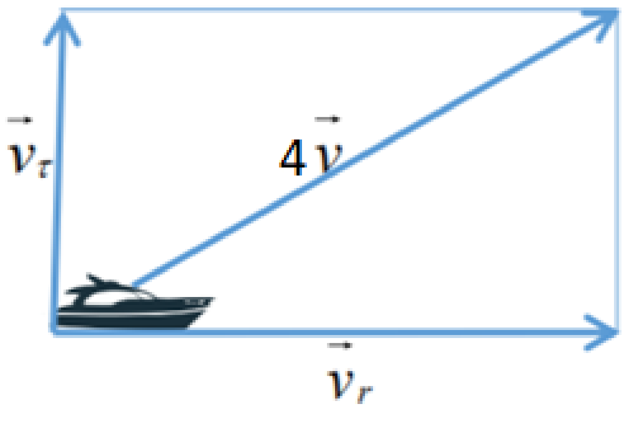

Figure 3.2: Разложение скорости катера на тангенциальную и радиальную составляющие

Радиальная скорость – скорость, с которой катер удаляется от полюса, $v_r = \frac{\partial r}{\partial t}$. Требуется, чтобы эта скорость была равна скорости лодки, поэтому $v_r = \frac{\partial r}{\partial t} = v$.

Тангенциальная скорость – линейная скорость вращения катера относительно полюса. Она равна произведению угловой скорости на радиус, $v_\tau = r\frac{\partial \theta}{\partial t}$.

Из рис. 3.2 по теореме Пифагора: $v_\tau = \sqrt{16v^2 - v^2} = \sqrt{15}v = \frac{\sqrt{15}}{v}$, тогда $r\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\sqrt{15}}{v}$. 1.6. Решение исходной задачи сводится к решению системы из двух дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial r}{\partial t} = v \\ r\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\sqrt{5}}{v} \end{cases}$$

Если исключить из полученной системы производную по t, можно перейти к уравнению ниже:

$$\frac{\partial r}{\partial \theta} = \frac{r}{\sqrt{15}}$$

Решив это уравнение, получим траекторию движения катера в полярных координатах. Начальные условия:

$$\begin{cases} \theta_0 = 0 \\ r_0 = x_1 = \frac{1}{5}k \end{cases}$$

$$\begin{cases} \theta_0 = 0 \\ r_0 = x_2 = \frac{1}{3}k \end{cases}$$

2. Построение траекторий движения катера и лодки

2.1. Была написана программа на Python:

```
import math
import numpy as np
from scipy.integrate import odeint
import matplotlib.pyplot as plt
```

```
k = 16.2
fi = 3*math.pi/4

#функция, которая описывает движение катера береговой охраны
def dr(r, tetha):
    dr = r/math.sqrt(15)
    return dr

r01 = 1/5*k #1 случай
r02 = 1/3*k #2 случай

te = np.arange(0, 2*math.pi, 0.01)

r1 = odeint(dr, r01, te)
r2 = odeint(dr, r02, te)

#функция, которая описывает движение лодки браконьеров
def xt(t):
    xt = math.tan(fi)*t
    return xt

t = np.arange(0, 20, 1)

#Перевод в полярные координаты
tete = (np.tan(xt(t)/t))**-1
rr = np.sqrt(t*t + xt(t)*xt(t))

#построение траектории движения катера в полярных координатах. Случай 1
```

```
plt.polar(te, r1, 'g')
#построение траектории движения лодки в полярных координатах
plt.polar(tete, rr, 'b')

#построение траектории движения катера в полярных координатах. Случай 2
plt.polar(te, r2, 'g')
#построение траектории движения лодки в полярных координатах
plt.polar(tete, rr, 'b')
```

2.2. Получились следующие графики:(см. рис. 3.3 и 3.4)

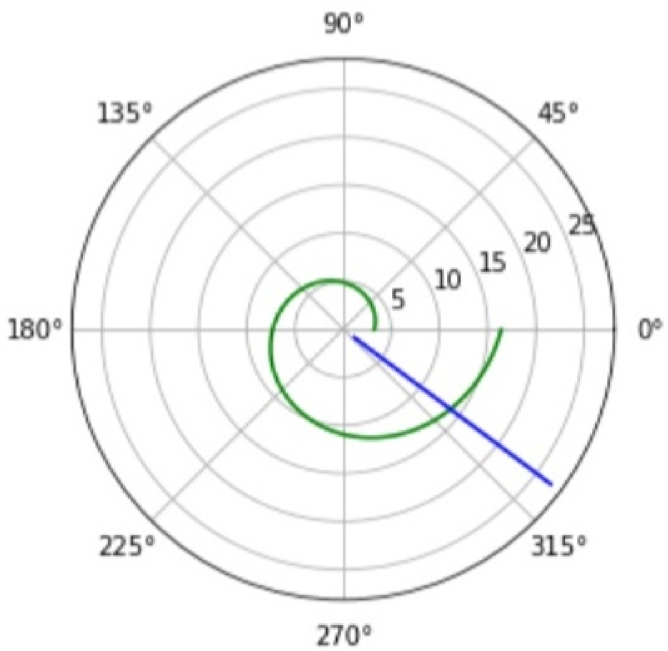

Figure 3.3: Траектории движения катера и лодки. 1 случай

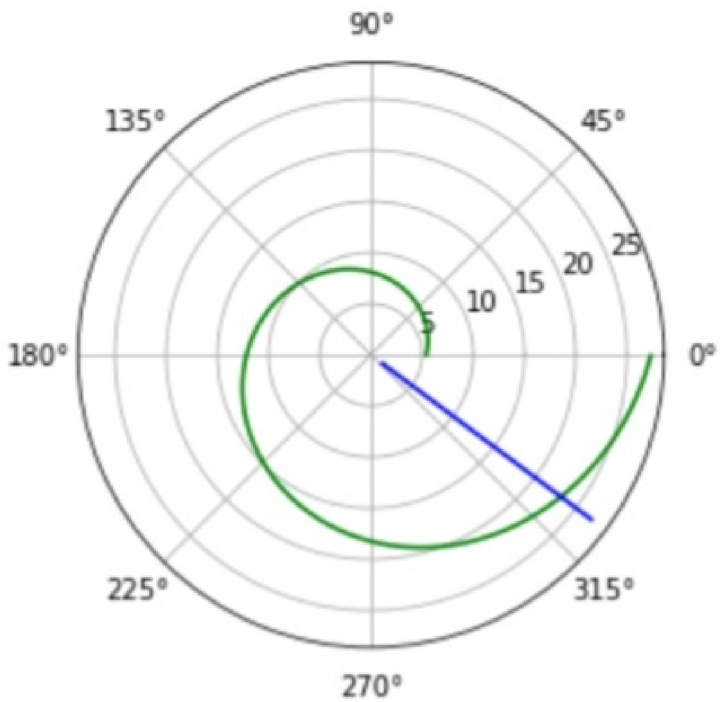

Figure 3.4: Траектории движения катера и лодки. 2 случай

3. Точка пересечения

3.1. Для определения точки пересечения добавим следующие строки:

```
#Случай 1
idx = np.argwhere(np.diff(np.sign(rr - r1))).flatten()
print (tete[-1])
print (rr[idx[-1]])


#Случай 2
idd = np.argwhere(np.diff(np.sign(rr - r2))).flatten()
print (tete[-1])
print (rr[idd[-1]])
```

3.2. В итоге получили, что в случае 1 точка пересечения: $\theta = -0.6420926159343304, r = 15.556349186104047$, а в случае 2: $\theta = -0.6420926159343304, r = 25.455844122715714$.

4 Выводы

Решила задачу о погоне, построила графики с помощью Python.