Задача 1

Прямоугольник задан вершинами с координатам и $A(0;0)$, $B(u;0)$, $C(u;v)$, $D(0;v)$, где точка $(u;v)$ лежит в первой четверти на графике функции $y = -x^3 + 8$. Найти наибольшую возможную площадь прямоугольника.

Решение

Площадь прямоугольника $\Rightarrow S = u * v$
Точка лежит на графике функции $\Rightarrow v = -u^3 + 8$
$S(u) = u * (-u^3 + 8) = -u^4 + 8u \to max$
$S'(u) = -4u^3 + 8 = -4(u^3 - 2) = 0, u^3 = 2, u = 2^{1/3}, v = 6$
$S_{max} = 6\sqrt[3]{2}$

Задача 2

В эллипс, заданный уравнением $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ вписать прямоугольник максимальной площади так, чтобы стороны прямоугольника были параллельны осям эллипса.

Решение

Площадь прямоугольника $\Rightarrow S = 2u * 2v = 4uv$
$\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1 \Rightarrow v = \sqrt{b^2 * (1 - \frac{u^2}{a^2})}$
$S(u) = 4u * b\sqrt{1 - \frac{u^2}{a^2}} = \frac{4bu}{a}\sqrt{a^2 - u^2}$
$S'(u) = \frac{4b(a^2-2u^2)}{a\sqrt{a^2-u^2}} = 0, a^2 - 2u^2 = 0, u = \frac{a}{\sqrt{2}}, v = \frac{b}{\sqrt{2}}$
$S_{max} = 4 * \frac{a}{\sqrt{2}} * \frac{b}{\sqrt{2}} = 2ab$