

ПРАВИТЕЛЬСТВО РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
ФГАОУ ВО НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ  
«ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ»

Факультет компьютерных наук  
Образовательная программа «Прикладная математика и информатика»

УДК 519.173.5

Отчет об исследовательском проекте на тему:  
Анализ случайных блужданий на метрических графах

**Выполнил студент:**

группы #БПМИ224, 2 курса

Карпеев Фёдор Алексеевич

**Принял руководитель проекта:**

Кантонистова Елена Олеговна

Доцент, кандидат физико-математических наук

Факультет компьютерных наук НИУ ВШЭ

Москва 2024

# Содержание

Аннотация	3
Ключевые слова	3
1 Введение	4
2 Обзор литературы	5
3 Используемые методы	5
4 Полученные результаты для ранга 1	5
5 Полученные результаты для ранга 2	8
6 Заключение	11
Список литературы	12

## **Аннотация**

Анализ случайных блужданий на метрических графах, быстро развивающаяся область науки, имеющая некоторое количество полезных прикладных использований в современной науке и индустрии. В последнее время было получено несколько результатов по вычислению старших коэффициента числа конечных положений случайного блуждания на метрических графах на некоторых конкретных классах графов. В этой работе предлагается рассмотреть неориентированные метрические графы в случае промежуточного ранга, исследовать число конечных положений и попробовать вычислить старший коэффициент.

## **Ключевые слова**

Теория графов, неориентированные графы, метрические графы, аппроксимация

# 1 Введение

Возьмем конечный метрический неориентированный граф, это граф ребра являются отрезками (см. [1]). Также мы выбираем в этом графе одну из вершин и назначаем ее корнем. После этого мы запускаем из нее процесс хождения по графу, который называется случайным блужданием [4]. Этот процесс состоит из того, что в начальный момент времени мы выбираем одно из ребер и идем по нему до конца в вершину. После этого в каждой вершине мы с ненулевой вероятностью можем выбрать каждое из ребер и продолжить блуждание по нему. В какой-то момент времени мы хотим остановиться. И соответственно наша задача состоит в том, чтобы посчитать количество возможных конечных положений такого процесса.

Сразу переформулируем задачу, скажем что для того, чтобы посчитать количество возможных конечных положений такого блуждания к какому-то моменту времени, можно считать, что мы выходим не по одному ребру с какой-то вероятностью, а во все стороны одновременно. Тогда изначально точки отправляются из корня во всех направлениях. Когда точка достигает вершины, она удаляется и вместо нее по всем соседним с этой вершиной ребрам выходят точки в сторону другого конца ребра. Мы считаем, что все точки всегда двигаются с одинаковой скоростью. После такой переформулировки задачи, посчитать количество конечных положений случайного блуждания к какому-то времени, равносильно тому, чтобы посчитать количество двигающихся по графу точек в этот момент времени. Обозначим искомое число как функцию от времени  $N(T)$ .

В данной работе исследуется конкретная группа графов с промежуточным рангом. То есть графов у которых набор длин ребер не является линейно независимым над полем рациональных чисел. Основной задачей работы является исследования функции  $N(T)$  для неориентированных графов в случае неполного ранга, ее оценка многочленом, изучение ее скорости роста, попытка получения старшего коэффициента этой функции при приближении ее многочленом.

В данной развивающейся области в последнее время были получены аналогичные результаты для других типов графов, исследование неориентированных графов в случае промежуточного ранга и вычисление старшего коэффициента числа конечных положений расширит область исследованных графов и упростит попытки обобщения полученных результатов.

## 2 Обзор литературы

Существует ряд работ исследующих сходную предметную область. Для начала стоит указать, что большинство из них исследуют графы полного ранга, так как линейная независимость дает ряд преимуществ при рассмотрении графа. Но мы будем опираться на полученные результаты, так как некоторые из них работают и на графах неполного ранга или перекладываются на них без особых проблем. Прежде всего мы используем то, что исследуемая функция приближается многочленом, получено в работе [3]. Если смотреть на схожие, то есть работы которые изучают данную проблему но на других классах графов, это исследование старшего коэффициента в случае дерева [2], а также в случае ориентированного графа, в котором есть Гамильтонов цикл [5]. Обе эти работы по понятным причинам не решают задачу в нашем случае, но мы можем заимствовать инструменты и методы для решения нашей задачи.

## 3 Использованные методы

Прежде всего рассмотрим использованные для получения результатов методы. Мной было написано несколько программ для выполнения различных задач.

Всего мой подход к подсчету состоит из трех программных компонент. Прежде всего программа для генерации случайных графов, используется чтобы получать графы и исследовать на них функцию. Вторая программа для того чтобы генерировать из одного графа множество его подобий с нужными параметрами, допустим умножение нужного набора ребер на коэффициент. Ну и последняя компонента это непосредственно сама программа которая запускает поиск и считает исследуемую функцию на конкретном списке графов.

Далее уже используется библиотеки для построения графиков и графов и их компьютерного анализа.

## 4 Полученные результаты для ранга 1

Прежде всего мы сосредоточимся на малоранговых графах, так как решение задачи для графа ранга близкого к  $|E| - 1$  практически аналогично решению задачи для полного ранга.

Начнем со случая когда ранг (здесь и далее  $rank$ )  $rank = 1$ . Мы будем использовать целые  $t$  и ребра вида  $a\sqrt{2}$ . В этом случае в соответствии с работой [3], должно получаться,

что  $N(t)$  ограничена сверху константой. Рассмотрим граф  $K_3$ .

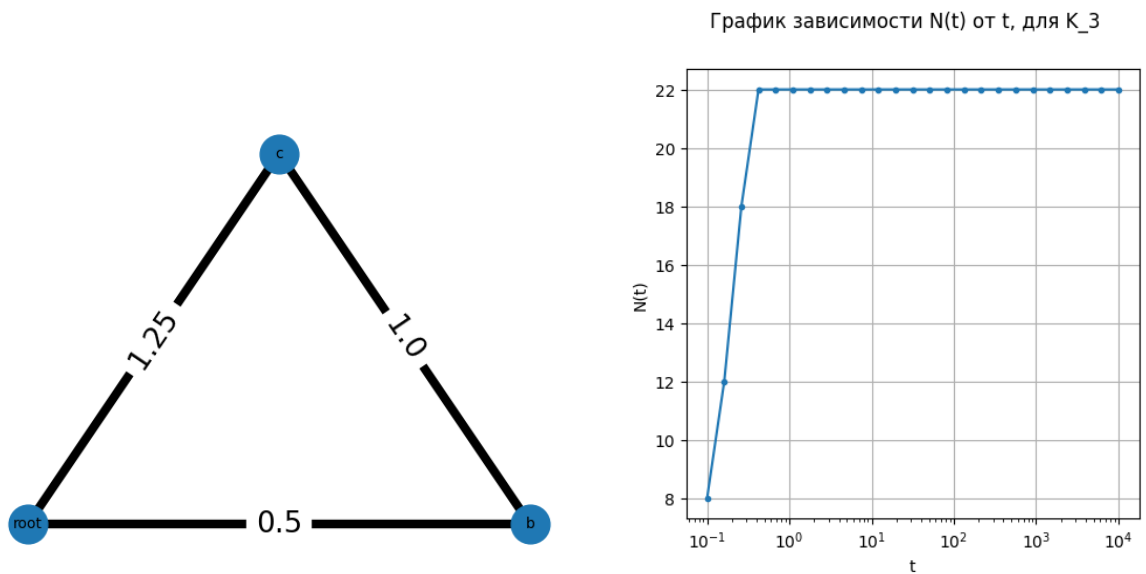


Рис. 4.1: Слева сам граф, на ребрах разложение по базису. Справа график  $N(t)$ . Ось  $x$  логарифмическая.

На графике 4.1 видно, что в этом случае  $N(t)$  с какого-то момента перестает расти и останавливается на числе 22.

Давайте рассмотрим более сложный граф.

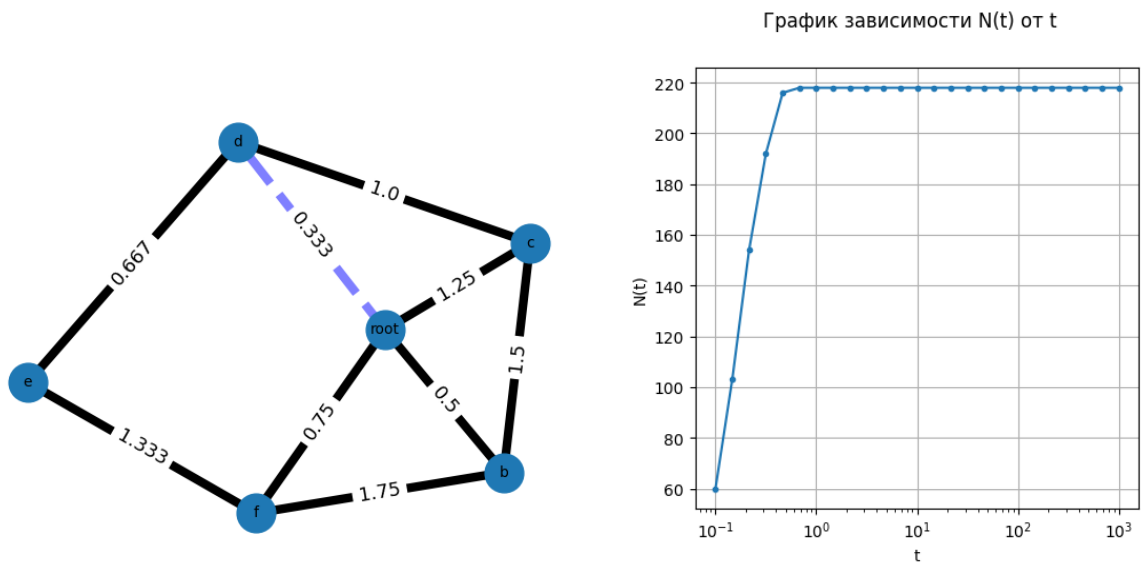


Рис. 4.2: Слева сам граф  $n = 6$ , на ребрах разложение по базису. Справа график  $N(t)$ . Ось  $x$  логарифмическая.

Видим здесь полностью аналогичную ситуацию, максимальное значение  $N(t) = 216$  быстро достигается и более не меняется.

Давайте сгенерируем случайный побольше и проверим на нем.

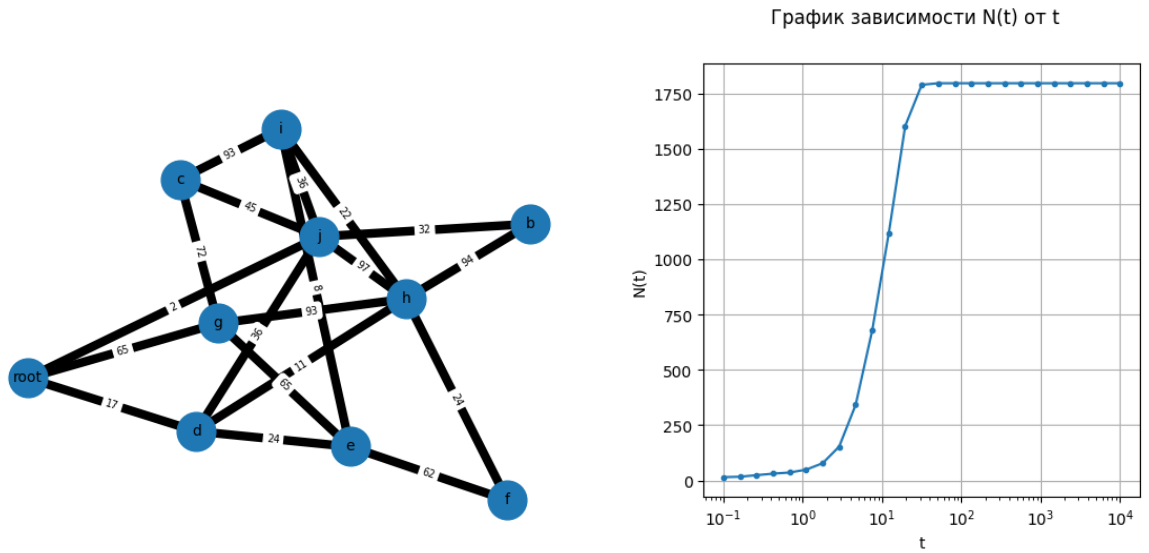


Рис. 4.3: Слева сам граф  $n = 10$ , на ребрах разложение по базису. Справа график  $N(t)$ . Ось  $x$  логарифмическая.

Наблюдаем аналогичную картину. Давайте за  $N$  обозначим максимум  $N(t)$ , который достигается для достаточно большого  $t$ . Найдем зависимость полного значения  $N$  от графа. Я утверждаю что она выражается по формуле:

$$N = 2 \sum_1^{|E|} e_i / \gcd(E) \quad (1)$$

Где  $e_i$  – длина  $i$ -ого ребра, а  $\gcd(E)$  – наименьший общий делитель всех ребер, его можно вычислить так как все линейно зависимо.

Давайте докажем почему это так. Для достаточно большого  $t$  мы двигаясь по графу мы сможем с помощью нужных ребер сделать некое подобие алгоритма Евклида. Тогда так как у нас в графе есть несколько циклов для достаточно большого  $t$  мы умеем добираться до любой вершины отнимая нужное количество раз  $\gcd(E)$ . После этого остается заметить, что тогда на любом ребре можно получить расстояния от начала вида:

$$r = t \bmod \gcd(E) \quad (2)$$

И тогда уже соответственно и:

$$r, r + \gcd(e), r + 2\gcd(e), \dots \quad (3)$$

Тогда на каждом ребре мы от начала можем получить ровно  $e_i / \gcd(E)$  точек, но столько же можно получить и с другой стороны так как  $e_i \neq 2r + k\gcd(E)$ , так как мы

считаем что  $t$  линейно независимо с ребрами. Теперь просуммировав  $2e_i/gcd(E)$  по всем ребрам, получаем ровно то, что и хотели (1).

## 5 Полученные результаты для ранга 2

Для  $rank = 2$ , мы будем использовать ребра вида  $a\sqrt{2} + b\sqrt{b}$  и целые  $t$ . В соответствии с работой [3],  $N(t)$  будет приблизительно многочленом первой степени от  $t$ . Так как нам интересен старший коэффициент этого многочлена, мы будем рассматривать величину  $N(t)/t$  для достаточно больших  $t$ .

Сначала рассмотрим граф  $K_4$ .

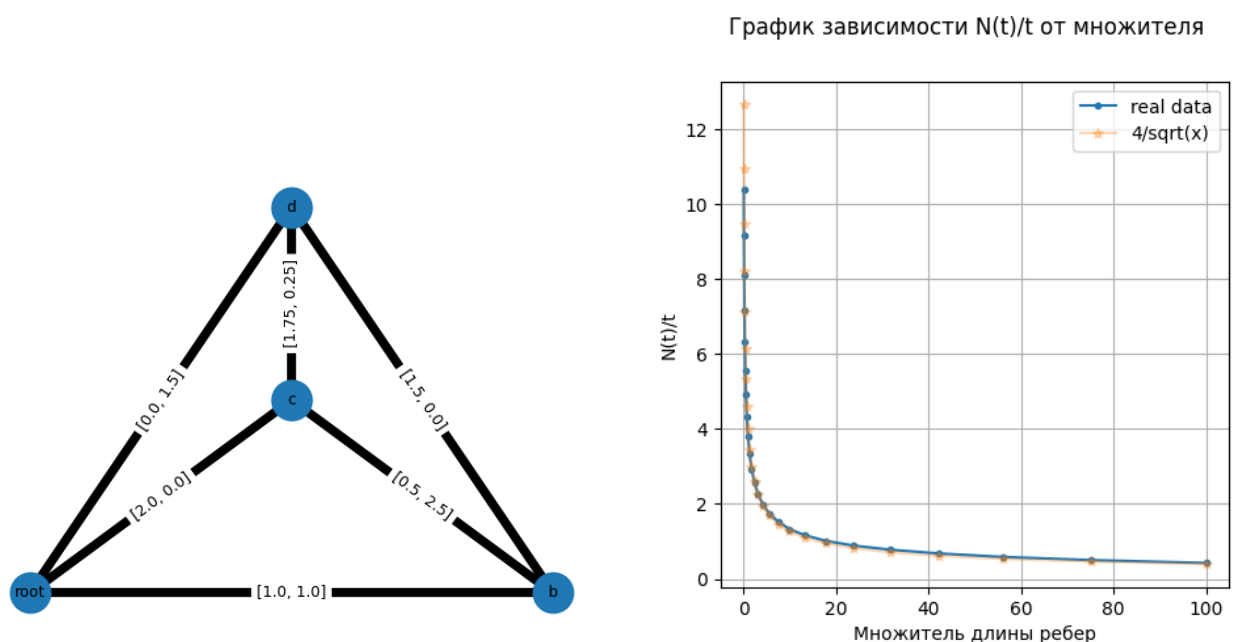


Рис. 5.1: Слева сам граф  $K_4$ , на ребрах разложение по базисам. Справа график  $N(t)/t$ .

На этом графике также нарисована функция  $\frac{4}{\sqrt{x}}$ , которая хорошо приближает старший коэффициент. Из этого можно сделать вывод о зависимости между ними.

Попробуем проверить эту зависимость на другом графе.



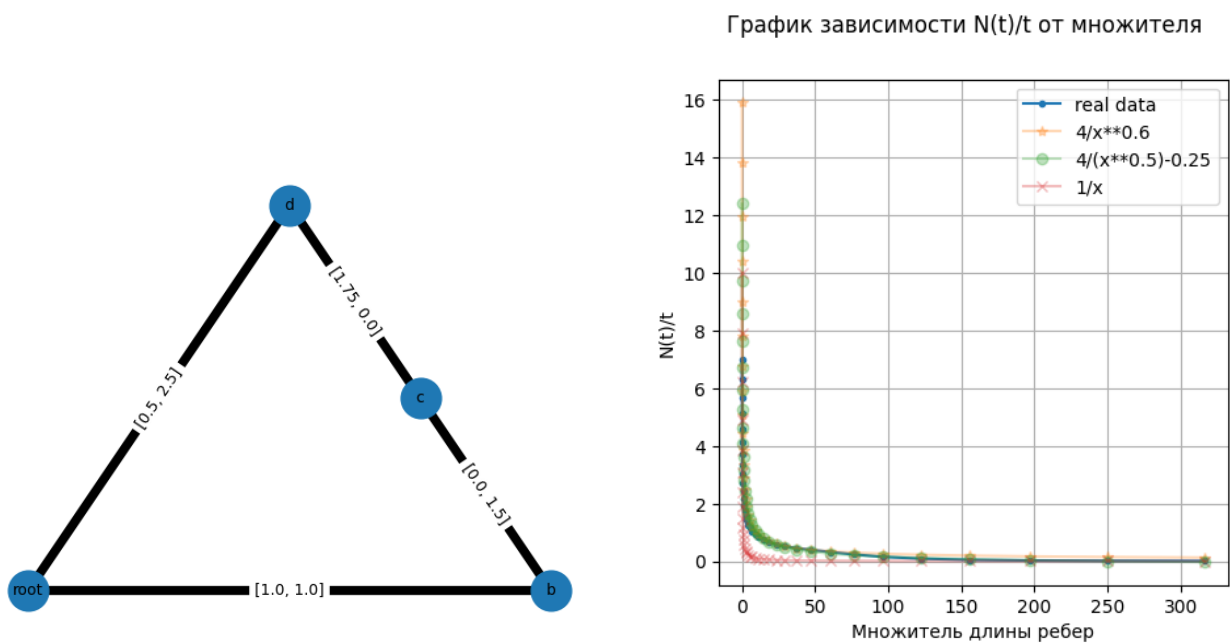


Рис. 5.2: Слева сам граф  $C_4$ , на ребрах разложение по базисам. Справа график  $N(t)/t$ .

Аналогично видим хорошее приближение, несколько других функций нарисовано для сравнения. Давайте посмотрим на это график поближе, разобьем его на две части. Также посмотрим на обратное выражение,  $t/N(t)$ .

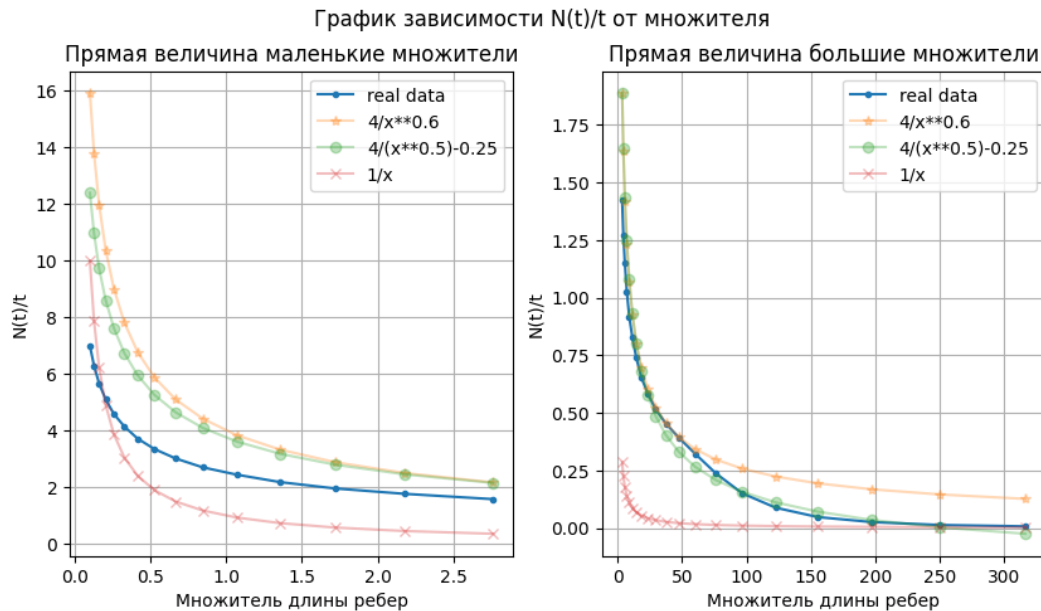


Рис. 5.3: Разделенный предыдущий график

Даже после разделения выглядит все еще достаточно точно. Давайте теперь нарисуем обратную величину  $t/N(t)$ . И посмотрим насколько обратное от приближения соотносится с ней.

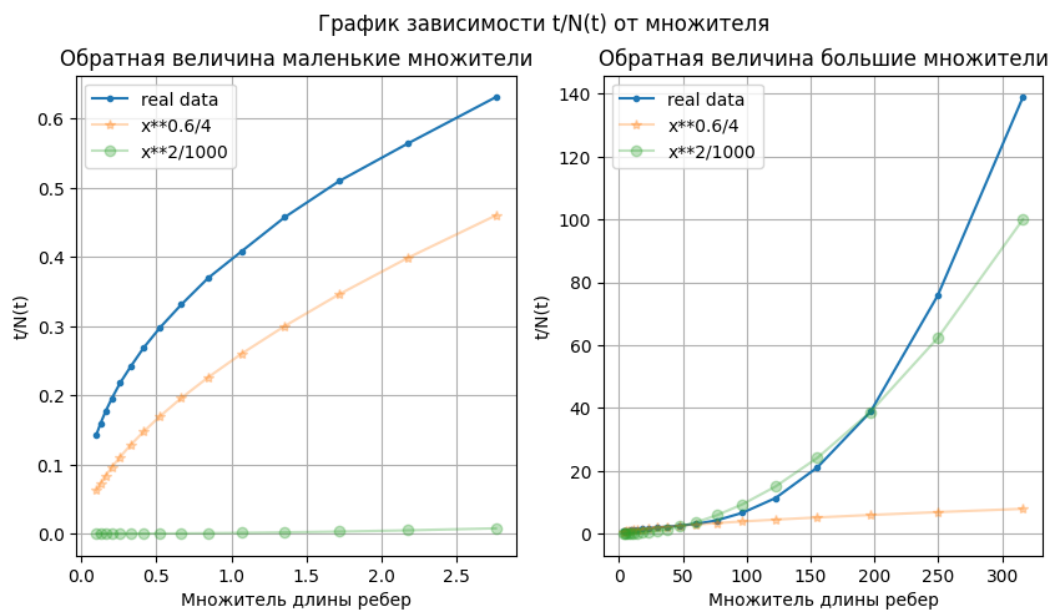


Рис. 5.4: График  $t/N(t)$  от  $t$  разделенный на два.

Тут уже становится лучше видно, что обратная величина скорее растет как квадрат, а не как корень.

Еще давайте попробуем сравнить наше значение старшего коэффициента и значение, которое получается если считать что ранг полный.

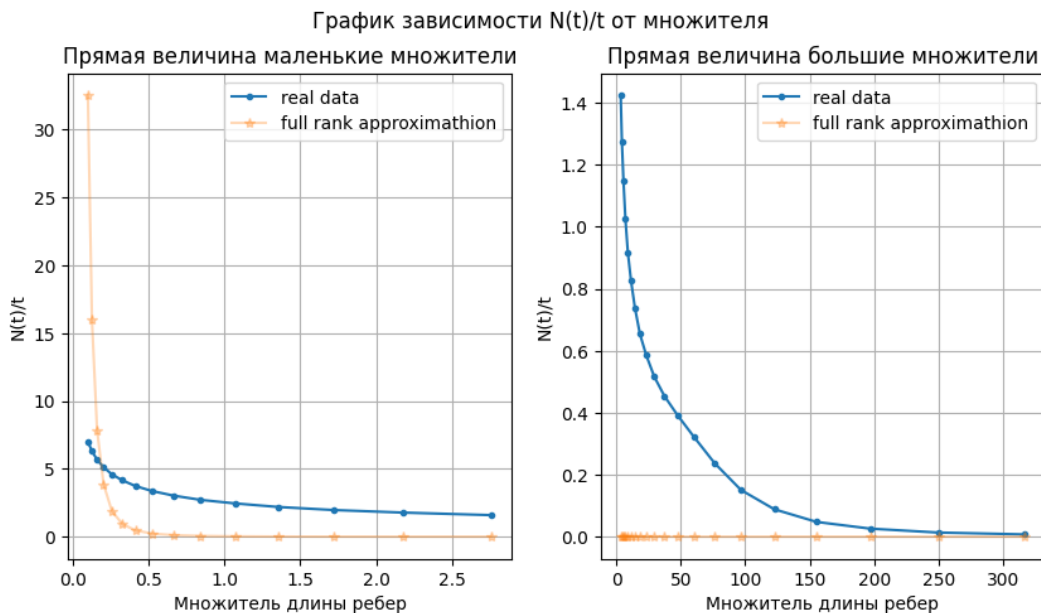


Рис. 5.5: Сравнение реального старшего коэффициента с результатом в случае полного ранга.

Давайте теперь посмотрим как меняются графики в зависимости от того, сколько ребер мы умножаем на коэффициент. Для этого возьмем три разных  $K_4$ . В первом варианте будет одно ребро состоящее только из первой компоненты и пять других, во втором два ребра из первой и четыре из второй, в третьем варианте 3 из первой и 3 из второй. Нарисуем

графики зависимости  $N(t)/t$  от множителя первой компоненты.

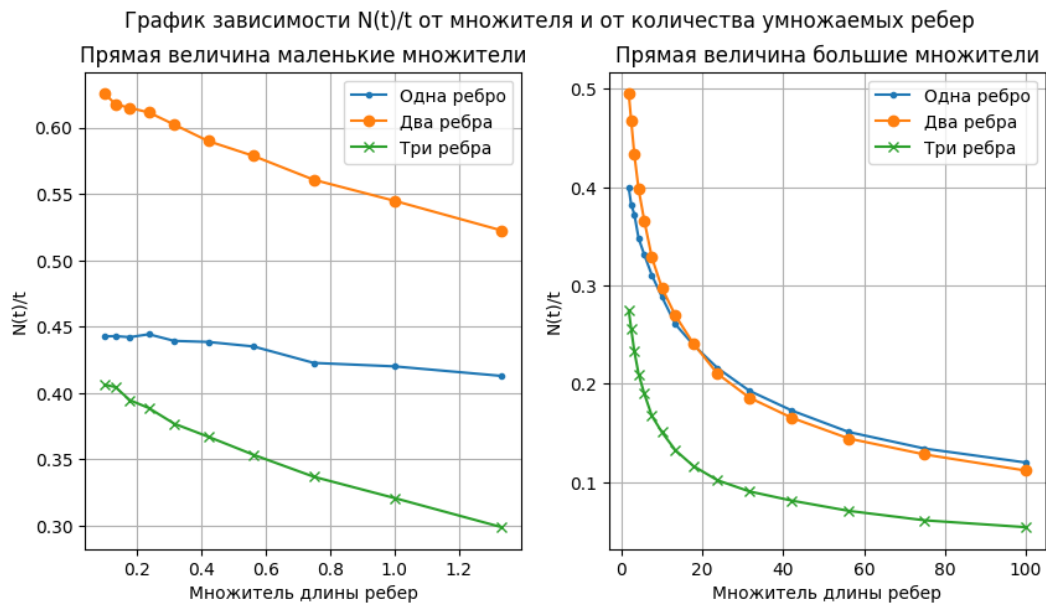


Рис. 5.6: Сравнение старших коэффициентов от количества умножаемых ребер.

## 6 Заключение

Были написаны некоторые полезные программные компоненты, с их помощью были проведены исследования и получены результаты. В ситуации ранга 1 было найдено максимальное значение, которое принимает  $N(t)$ . Для ранга 2 были получены некоторые наблюдения и результаты. К сожалению точной формулы для старшего коэффициента для ранга 2 найдено не было.

В будущем можно улучшить сделанные программы, оптимизировать скорость работы, добавить больше автоматизации. В продолжении деятельности в этом направлении, можно далее исследования ранга 2 или начать исследование следующих малых рангов: 3,4,5.

## Список литературы

- [1] Gregory Berkolaiko. “An elementary introduction to quantum graphs”. В: янв. 2017, с. 41—72. ISBN: 9781470426651. DOI: [10.1090/conm/700/14182](https://doi.org/10.1090/conm/700/14182).
- [2] V. L. Chernyshev и A. A. Tolchennikov. “Correction to the leading term of asymptotics in the problem of counting the number of points moving on a metric tree”. В: *Russian Journal of Mathematical Physics* 24.3 (июль 2017), с. 290—298. DOI: [10.1134/s1061920817030025](https://doi.org/10.1134/s1061920817030025).
- [3] Vsevolod Chernyshev и Anton Tolchennikov. “Polynomial approximation for the number of all possible endpoints of a random walk on a metric graph”. В: *Electronic Notes in Discrete Mathematics* 70 (2018). TCDM 2018 – 2nd IMA Conference on Theoretical and Computational Discrete Mathematics, University of Derby, с. 31—35. ISSN: 1571-0653. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.endm.2018.11.005>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1571065318302002>.
- [4] Lovász László. “Random Walks on Graphs: A Survey, Combinatorics, Paul Erdos is Eighty”. В: *Bolyai Soc. Math. Stud.* 2 (янв. 1993).
- [5] D. V. Pyat’ko и V. L. Chernyshev. “Asymptotics of the number of end positions of a random walk on a directed hamiltonian metric graph”. В: *Mathematical Notes* 113.3–4 (апр. 2023), с. 538—551. DOI: [10.1134/s0001434623030252](https://doi.org/10.1134/s0001434623030252).