ЧАСТЬ 1. ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МЕХАНИКИ

Раздел физики, изучающий закономерности механического движения и взаимодействия тел, называется ***механикой***. ***Механическое движение*** – изменение положения тела с течением времени относительно других тел или частей одного и того же тела.

§3 Кинематика материальной точки и поступательного движения твёрдого тела

Кинематика математически описывает различные виды механического движения, не выясняя причин этого движения. Основная задача кинематики – определить положение тела в любой момент времени.

3.1 *Основные понятия кинематики*

Материальная точка – тело, размерами которого в условиях данной задачи можно пренебречь.

Абсолютно твёрдое тело – тело, деформацией которого в условиях данной задачи можно пренебречь. Абсолютно твёрдое тело можно рассматривать как систему материальных точек, жестко связанных между собой.

Абсолютно упругое тело – тело, которое после прекращения внешнего силового воздействия полностью восстанавливает свои первоначальные размеры и форму.

Абсолютно неупругое тело – тело, которое после прекращения внешнего силового воздействия полностью сохраняет деформированное состояние, вызванное этим воздействием.

3.2 *Система отсчёта. Траектория. Путь. Перемещение*

Тело, относительно которого рассматривается движение, называется ***телом отсчёта***. Чтобы определить положение исследуемого тела, с телом отсчёта жестко связывают систему координат, снабженную часами. Совокупность тела отсчёта, связанной с ним системы координат и часов, отсчитывающих время, называется ***системой отсчёта***.

Посмотрите лекционную демонстрацию.

Модель декартовой системы координат.

http://youtube.com/watch?v=gmfiKFgy5WM

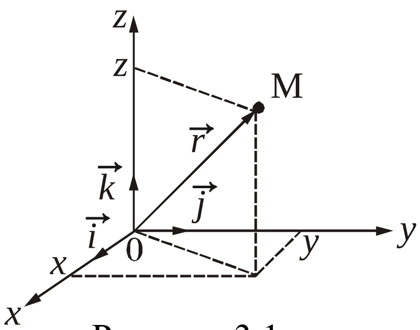


Рисунок 3.1

Положение точки в пространстве описывают с помощью радиус-вектора $\vec{r}$.

Радиус-вектор $\vec{r}$ – это вектор, проведённый из начала координат в точку, где находится тело (рис. 3.1). Радиус-вектор можно разложить на составляющие:

$$\vec{r} = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z ,$$

где $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ – единичные векторы (орты).

При перемещении в пространстве точка М занимает ряд последовательных положений. Линия, описываемая в пространстве движущейся точкой, называется ***траекторией***. В зависимости от вида траектории движение делят на прямолинейное и криволинейное. Частным видом криволинейного движения является движение по окружности.

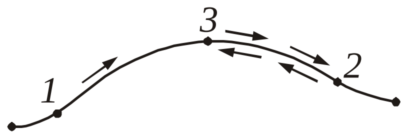


Рисунок 3.2

Пусть материальная точка, двигаясь по некоторой траектории (рис. 3.2), переместилась из точки 1 в точку 2. Расстояние S_{12} между точками 1 и 2, отсчитанное вдоль траектории, называется длиной пройденного пути или просто ***пройденным путём***.

Если материальная точка повернёт обратно и дойдёт до точки 3, то полный путь равен: $S=S_{12}+S_{23}$. Путь всегда выражается положительным числом.

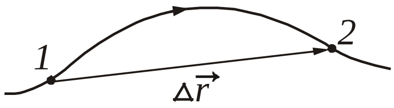


Рисунок 3.3

Вектор, соединяющий начальное и конечное положения точки, называется ***перемещением***. Обозначается $\Delta\vec{r}$. (См. рис. 3.3).

Обычно положение тела определяют с помощью координат. Движение точки считается полностью определенным, если заданы уравнения, описывающие изменение координат точки со временем:

$$x = x(t) \qquad y = y(t) \qquad z = z(t)$$

Эти уравнения называются кинематическими уравнениями движения точки.

Поступательное движение – это такое движение, при котором любая прямая, жёстко связанная с телом, перемещается, оставаясь параллельной самой себе. Поэтому кинематическое рассмотрение поступательного движения твёрдого тела сводится к изучению движения любой из его точек. В динамике обычно рассматривают движение центра инерции тела.

Посмотрите лекционную демонстрацию.

Виды движений: поступательное и вращательное движения.
http://youtube.com/watch?v=C1yGNCPw7BU

3.3 *Способы задания положения тела в пространстве*

Основная задача кинематики – определить положение тела в любой момент времени. Обычно положение тела определяют с помощью координат. Движение точки считается полностью определенным, если заданы уравнения, описывающие изменение координат точки со временем:

$$x = x(t) \qquad y = y(t) \qquad z = z(t)$$

Эти уравнения называются кинематическими уравнениями движения точки.

Координаты тела можно задавать несколькими способами.

1. ***Табличный способ***.

При этом способе для каждого момента времени указывают значение координаты тела и представляют эту зависимость в виде таблицы. Например:

t, с	0	2	4	6	8	10	12	14
x, м	2	6	18	38	66	102	146	198

2. ***Графический способ***.

Зависимость координат от времени дается в виде графика. Например, для равномерного прямолинейного движения эта зависимость имеет вид, представленный на рис. 3.4.

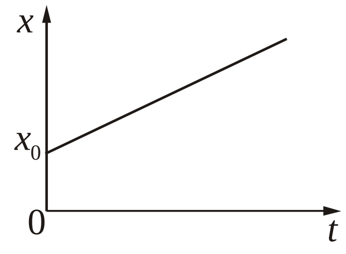


Рисунок 3.4

3. ***Аналитический способ***.

Зависимость координат от времени задается в виде формул.

Пример: для равномерного прямолинейного движения координата зависит от времени:

$$x = x_0 + vt\,.$$

Если тело движется по плоскости, то можно описывать зависимость координаты y от координаты x, т.е. $y = f(x)$. При этом координаты y и x зависят от времени, т.е. $y = f(t)$, $x = f(t)$. Зависимость $y = f(x)$ называется уравнением траектории.

3.4 *Скорость*

Пусть в момент времени t тело находилось в точке 1, положение которой задается радиус-вектором $\vec{r}$. За время Δt оно совершило перемещение $\Delta\vec{r}$ и оказалось в точке 2 (рис. 3.5).

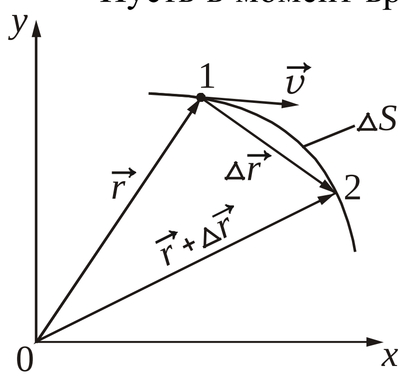


Рисунок 3.5

Скорость тела определяется как предел отношения перемещения $\Delta\vec{r}$ к промежутку времени Δt, за который оно произошло, при условии, что Δt стремится к нулю:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{r}\,'\,. \qquad (3.1)$$

$$[v] = \frac{\text{м}}{\text{с}}\,.$$

Скорость ($\vec{v}$) – векторная физическая величина, характеризующая быстроту изменения положения тела в пространстве и равная первой производной радиус-вектора по времени.

Вектор скорости всегда направлен по касательной к траектории в сторону движения. Модуль скорости v определяется как производная пути по времени:

$$v = \frac{dS}{dt}, \tag{3.2}$$

Посмотрите лекционную демонстрацию.

Вектор скорости: опыт с точилом.

http://youtube.com/watch?v=k3SlL19D2rE

Из (3.2) следует, что путь dS, пройденный за элементарно малое время dt будет определяться следующим образом:

$$dS = v(t)dt.$$

Путь, пройденный телом за конечный промежуток времени от t_1 до t_2, находится интегрированием:

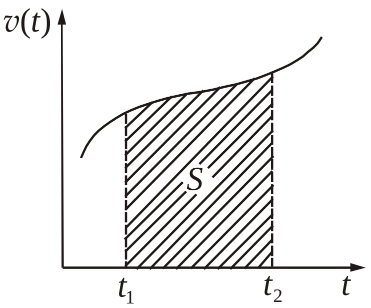


Рисунок 3.6

$$S = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt. \tag{3.3}$$

Пройденный путь численно равен площади заштрихованной криволинейной трапеции (рис. 3.6).

Если направление вектора скорости не изменяется, то движение называется прямолинейным.

Если модуль скорости не изменяется с течением времени, то движение называется равномерным.

При равномерном движении скорость тела постоянна:

$$v = \frac{S}{t} = \text{const}. \tag{3.4}$$

Путь, пройденный телом при равномерном движении, зависит от времени линейно:

$$S = vt. \tag{3.5}$$

Если тело движется неравномерно, то величина, равная отношению пройденного пути ΔS к промежутку времени Δt, в течение которого был пройден путь, называется ***средней скоростью*** за этот промежуток времени

$$< v >= \frac{\Delta S}{\Delta t}. \tag{3.6}$$

(Средние значения величин будем обозначать заключением этих величин в угловые скобки).

3.4 *Ускорение*

Пусть в момент времени t тело находилось в точке 1, имея скорость $\vec{v}_1$. Через время Δt оно переместилось в точку 2, при этом его скорость стала равной $\vec{v}_2$ (рис. 3.7 а).

Приращение вектора скорости равно $\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$ (рис. 3.7 б). Чтобы охарактеризовать быстроту изменения скорости, используется величина:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{v}'.$$

$$[a] = \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Принимая во внимание (3.1), можно записать:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}. \qquad (3.7)$$

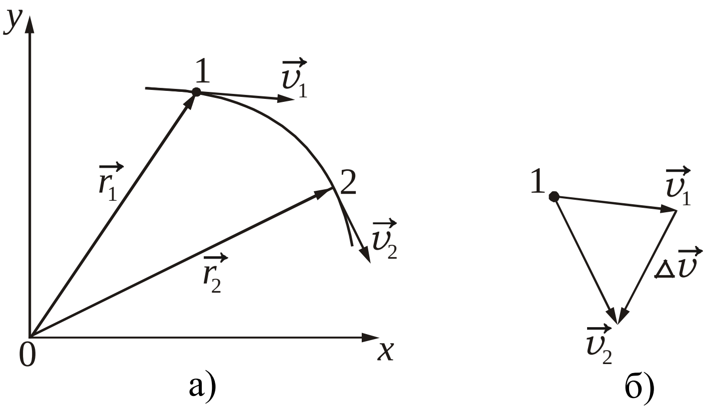


Рисунок 3.7

Ускорение ($\vec{a}$) – это векторная физическая величина, характеризующая быстроту изменения вектора скорости и равная производной вектора скорости по времени.

Ускорение направлено по вектору приращения скорости $\Delta\vec{v}$.

При прямолинейном движении направление скорости остается постоянным, поэтому вектор ускорения $\vec{a}$ или совпадает с направлением скорости, или противоположен ему. Если модуль ускорения при этом не изменяется с течением времени, то в первом случае движение будет равноускоренным, во втором – равнозамедленным. Скорость движения в любой момент времени будет определяться соотношением:

$$v = v_0 \pm at \qquad (3.8)$$

где v_0 – начальная скорость тела, т.е. скорость в момент времени t=0. Знак «плюс» относится к равноускоренному движению, «минус» – к равнозамедленному.

Интегрируя функцию (3.8) в пределах от 0 до произвольного момента времени t, найдем формулу для расчёта пройденного пути (см. формулу (3.3)):

$$S = \int_0^t (v_0 \pm at)dt = v_0 t \pm \frac{at^2}{2}. \qquad (3.9)$$

Формула (3.9) дает правильный результат для пройденного пути только в том случае, если за время t направление движения точки (знак скорости) не изменяется.

Если скорость изменяется с течением времени произвольным образом, то величина, равная отношению изменения скорости Δv к промежутку времени Δt, в течение которого изменялась скорость, называется ***средним ускорением*** за этот промежуток времени

$$\langle a \rangle = \frac{\Delta v}{\Delta t}. \qquad (3.10)$$

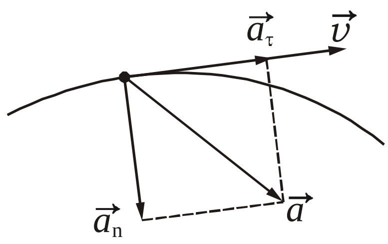


Рисунок 3.8

При криволинейном движении вектор скорости $\vec{v}$ изменяет свое направление. При этом может изменяться и его численное значение, т.е. модуль.

В этом случае вектор ускорения $\vec{a}$ удобно раскладывать на две составляющие. Одна из них $\vec{a}_\tau$ – касательная к траектории, вторая $\vec{a}_n$ – перпендикулярна этой касательной (рис. 3.8). Составляющая $\vec{a}_\tau$ называется ***тангенциальным*** (касательным) ускорением; составляющая $\vec{a}_n$ – ***нормальным*** (центростремительным) ускорением. Из рис. 3.8 следует, что

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n . \tag{3.11}$$

Модуль полного ускорения равен

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} . \tag{3.12}$$

Тангенциальное ускорение характеризует быстроту изменения скорости по величине и равно первой производной модуля скорости по времени:

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} . \tag{3.13}$$

Если скорость по величине не изменяется, то $a_\tau = 0$.

Если $dv > 0$, то тангенциальное ускорение $\vec{a}_\tau$ направлено по вектору скорости, если $dv < 0$, то $\vec{a}_\tau$ направлено в сторону, противоположную вектору скорости.

Нормальное (центростремительное) ***ускорение*** характеризует быстроту изменения скорости по направлению и направлено по радиусу к центру кривизны траектории. Численное значение нормального ускорения определяется формулой:

$$a_n = \frac{v^2}{R} . \tag{3.14}$$

Если направление скорости не изменяется, то $a_n = 0$.

§4 Кинематика вращательного движения

Вращательное движение – движение, при котором все точки абсолютно твёрдого тела движутся по окружностям, центры которых лежат на одной прямой. Эта прямая называется осью вращения. Окружности, по которым движутся точки тела, лежат в плоскостях, перпендикулярных этой оси.

4.1 *Характеристики вращательного движения*

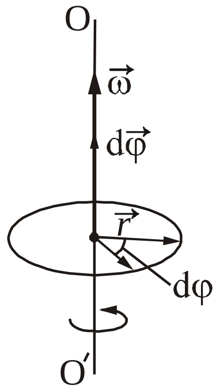


Рисунок 4.1

Угловое перемещение ($d\vec{\varphi}$) – вектор, модуль которого равен углу поворота, выраженному в радианах. Направлено угловое перемещение по оси вращения так, что если смотреть с конца вектора $d\vec{\varphi}$, то направление вращения радиус-вектора происходит против часовой стрелки (рис. 4.1).

Угловая скорость ($\vec{\omega}$) – векторная физическая величина, характеризующая быстроту вращения и равная первой производной углового перемещения по времени:

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}, \tag{4.1}$$

$$[\omega] = \frac{\text{рад}}{\text{с}}.$$

Направление вектора угловой скорости совпадает с направлением вектора углового перемещения.

Вращение с постоянной угловой скоростью называется равномерным, при этом

$$\omega = \frac{\varphi}{t}. \tag{4.2}$$

Равномерное вращение принято характеризовать периодом вращения и частотой вращения.

Период вращения (T) – время, в течение которого совершается один полный оборот. За время, равное периоду, тело поворачивается на угол 2π. Отсюда следует, что

$$\omega = \frac{2\pi}{T}. \tag{4.3}$$

Частота вращения (ν) – число оборотов за единицу времени.

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}, \qquad \omega = 2\pi\nu. \tag{4.4}$$

$$[\nu] = \frac{1}{\text{с}}.$$

Изменение вектора угловой скорости со временем характеризуют угловым ускорением.

Угловое ускорение ($\vec{\varepsilon}$) – векторная физическая величина, характеризующая быстроту изменения угловой скорости и равная первой производной угловой скорости по времени

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}. \tag{4.5}$$

$$[\varepsilon] = \frac{\text{рад}}{\text{с}^2}$$

Рассмотрим случай, когда ось вращения неподвижна.

1. Если $d\omega > 0$, то движение ускоренное. При этом вектор углового ускорения $\vec{\varepsilon}$ совпадает по направлению с вектором угловой скорости $\vec{\omega}$ (рис. 4.2.а).
2. Если $d\omega < 0$, то движение замедленное. При этом вектор углового ускорения $\vec{\varepsilon}$ направлен в сторону, противоположную вектору угловой скорости $\vec{\omega}$ (рис. 5.2.б).

Векторы, направление которых связывается с направлением вращения ($d\vec{\varphi}$, $\vec{\omega}$, $\vec{\varepsilon}$) называются ***аксиальными*** векторами или псевдовекторами.

Рисунок 4.2

При равнопеременном вращательном движении имеют место соотношения, аналогичные формулам, описывающим равнопеременное прямолинейное движение (см. (3.8) и (3.9)):

$$\omega = \omega_0 \pm \varepsilon t, \tag{4.6}$$

$$\varphi = \omega_0 t \pm \frac{\varepsilon t^2}{2}. \tag{4.7}$$

4.2 *Связь между линейными и угловыми характеристиками*

Точка, отстоящая от оси вращения на расстоянии R (рис. 4.3), при повороте тела на угол φ за время dt проходит путь

$$S = R\varphi. \tag{4.8}$$

Продифференцируем уравнение (4.8) по времени:

$$\frac{dS}{dt} = R\frac{d\varphi}{dt}. \tag{4.9}$$

Из него следует

$$v = R\omega. \tag{4.10}$$

Продифференцируем уравнение (4.10) по времени

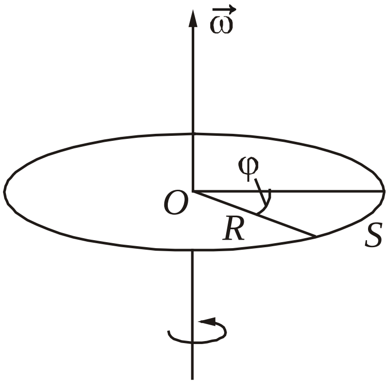


Рисунок 4.3

$$\frac{dv}{dt} = R\frac{d\omega}{dt}. \qquad (4.11)$$

Отсюда следует

$$a_\tau = R\varepsilon. \qquad (4.12)$$

Кинематические величины, характеризующие вращательное движение и формулы, описывающие это движение, аналогичны соответствующим величинам и формулам поступательного движения.

§5 Динамика материальной точки и поступательного движения твёрдого тела

Динамика – раздел механики, изучающий движение тел с учетом причин, вызывающих это движение.

5.1 *Основные понятия динамики*

1. ***Масса*** (m) – скалярная физическая величина, являющаяся мерой инертных и гравитационных свойств тела. Может служить мерой энергосодержания.

$[m]$ = кг.

Основные свойства массы:

– масса в классической механике не зависит от скорости движения;

– масса является величиной аддитивной, т.е. масса системы тел равняется сумме масс тел, входящих в систему;

– масса замкнутой системы остается величиной постоянной, т.е. выполняется закон сохранения массы.

Плотность (ρ) – скалярная физическая величина, характеристика материала, численно равная массе единицы объема.

$$\rho = \frac{m}{V}. \qquad (5.1)$$

$[\rho] = \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$.

2. ***Импульс тела*** ($\vec{p}$) – векторная физическая величина, равная произведению массы тела на его скорость.

$$\vec{p} = m\vec{v}. \qquad (5.2)$$

$[p] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}}$.

Направление импульса тела совпадает с направлением скорости.

3. ***Сила*** ($\vec{F}$) – векторная физическая величина, являющаяся мерой механического воздействия на тело других тел или полей. Сила характеризуется модулем

(численным значением), направлением действия, точкой приложения. Прямая, вдоль которой направлена сила, называется ***линией действия силы***.

$[F] = \text{Н}$ (ньютон)

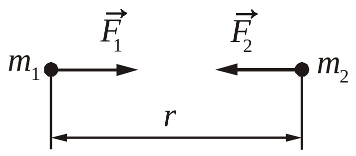
Вид формулы для расчёта силы зависит от природы взаимодействия.

5.2 *Виды взаимодействий*

1. ***Гравитационные взаимодействия. Закон всемирного тяготения***.

Две материальные точки массами m₁ и m₂ притягиваются друг к другу с силой прямо пропорциональной массам этих точек и обратно пропорциональной квадрату расстояния между ними (рис. 5.1).

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}, \tag{5.3}$$



$|\vec{F}_{1\text{-}2}| = |\vec{F}_{2\text{-}1}| = F$

Рисунок 5.1

где $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{кг}^2}$ – гравитационная постоянная.

Если одно из взаимодействующих тел – Земля, а тело массой m находится на высоте h от поверхности Земли, то закон всемирного тяготения записывается в виде

$$F = G\frac{Mm}{(R+h)^2},$$

где M – масса Земли;

R – средний радиус Земли.

На поверхности Земли (или вблизи поверхности) $h \approx 0$. В этом случае

$$F = G\frac{Mm}{R^2}.$$

Можно ввести обозначение $G\frac{M}{R^2} = g$,

где g – ускорение свободного падения.

Величину

$$F_{\text{тяж}} = mg \tag{5.4}$$

называют силой тяжести.

2. ***Электромагнитные взаимодействия***.

Частными случаями проявления электромагнитных взаимодействий являются силы упругости и силы трения. Для этих сил можно получить лишь приближенные, т.е. основанные на опыте формулы.

а) ***Закон Гука***.

Под действием внешних сил возникают деформации (т.е. изменение размеров и формы тел). Если после прекращения действия сил восстанавливаются прежняя форма и размеры тела, то деформация называется упругой.

Для упругих деформаций справедлив закон Гука:

Сила упругости пропорциональна абсолютному удлинению.

$$F_x = -kx, \tag{5.5}$$

где F_x – проекция силы упругости на ось x;

k – жесткость пружины;

x – абсолютное удлинение пружины.

Для однородных стержней также справедлив закон Гука, который принято формулировать следующим образом:

Механическое напряжение прямо пропорционально относительному удлинению

$$\sigma = E\varepsilon. \tag{5.6}$$

Механическое напряжение:

$$\sigma = \frac{F_\perp}{S}, \tag{5.7}$$

где $F_\perp$ – упругая сила, действующая перпендикулярно площади поперечного сечения стержня S.

Относительное удлинение:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}, \tag{5.8}$$

где Δl – приращение длины;

l_0 – первоначальная длина;

E – модуль Юнга, $[E] = \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} = \text{Па}$.

Модуль Юнга (модуль упругих деформаций) – это физическая величина, характеризующая упругие свойства материала. Зависит от природы материала.

Посмотрите лекционную демонстрацию.

Закон Гука и нелинейные деформации.

http://youtube.com/watch?v=sYjyAujrtmw

б) ***Закон сухого трения.***

Сила трения скольжения пропорциональна модулю силы нормальной реакции опоры и не зависит от площади соприкосновения тел (рис. 5.2)

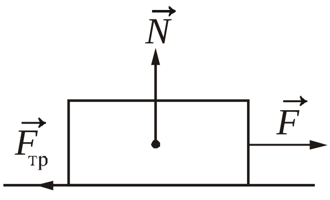


Рисунок 5.2

$$\left|\vec{F}_{\text{тр}}\right| = \mu\left|\vec{N}\right|, \tag{5.9}$$

где μ – коэффициент трения скольжения. Он зависит от природы материалов и качества обработки соприкасающихся поверхностей. Значения коэффициентов трения определяют экспериментальным путём.

Посмотрите лекционную демонстрацию.

Соскальзывание бруска с наклонной плоскости.

http://youtube.com/watch?v=04gAToQ4r0U

в) ***Закон вязкого трения***.

На тело, движущееся в вязкой (жидкой или газообразной) среде, действует сила, тормозящая его движение. Эта сила называется силой вязкого трения

$$F = -rv\,, \qquad (5.10)$$

где v – скорость движения тела;

r – коэффициент сопротивления.

Коэффициент r зависит от формы и размеров тела, характера его поверхности, а также от свойств среды. Знак «–» указывает на то, что сила трения направлена противоположно скорости.

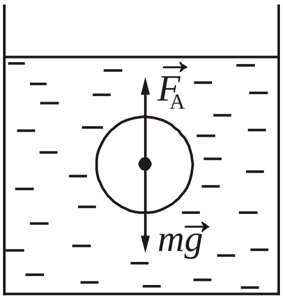


Рисунок 5.3

г). ***Закон Архимеда***.

На тело, погруженное в жидкость или газ, действует выталкивающая сила, равная весу вытесненной телом жидкости или газа (рис. 5.3)

$$F_A = \rho_ж gV\,, \qquad (5.11)$$

где $\rho_ж$ – плотность жидкости;

V – объем погруженной части тела.

5.3 *Основные законы динамики материальной точки (законы Ньютона)*

Динамика базируется на законах Ньютона, которые математически не выводятся, а являются обобщением опыта.

5.3.1 Первый закон Ньютона

Первый закон Ньютона устанавливает факт существования инерциальных систем отсчёта и описывает характер движения свободной материальной точки в инерциальной системе отсчёта.

Всякое тело сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения до тех пор, пока воздействия со стороны других тел не изменят этого состояния.

Свойство тел сохранять состояние покоя или равномерного прямолинейного движения называется ***инерцией***. Система отсчёта, в которой выполняется первый закон Ньютона, называется инерциальной. Поэтому, первый закон Ньютона можно сформулировать и таким образом.

Существуют такие системы отсчёта, относительно которых тело находится в состоянии покоя или движется прямолинейно и равномерно, если на это тело не действуют другие тела или действие этих тел скомпенсировано.

Любая другая система отсчёта, движущаяся относительно инерциальной с постоянной скоростью также является инерциальной.

5.3.2 Второй закон Ньютона

Скорость изменения импульса тела равна результирующей всех сил, действующих на тело:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}. \qquad (5.12)$$

Импульс тела равен $\vec{p} = m\vec{v}$. Формулу (6.13) можно преобразовать следующим образом:

$$\vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{dm}{dt}\vec{v} + m\frac{d\vec{v}}{dt}. \qquad (5.13)$$

1. Уравнение (5.13) можно применять как в тех случаях, когда масса меняется с течением времени (например, при полете ракеты), так и при изменении массы с изменением скорости.

2. Если масса тела остается постоянной $m = \text{const}$, т.е. $\frac{dm}{dt} = 0$, то уравнение (5.13) примет следующий вид:

$$\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a},$$

$$\vec{F} = m\vec{a}. \qquad (5.14)$$

Результирующая всех сил, действующих на тело, равна произведению массы тела на его ускорение.

3. Если $\vec{F} = \text{const}$, то, умножив обе части уравнения (5.12) на *dt*, получим:

$$\vec{F}dt = d\vec{p}.$$

Проинтегрировав полученное уравнение, получим:

$$\vec{F}\Delta t = \Delta\vec{p}. \qquad (5.15)$$

Величина, равная произведению силы на время действия этой силы $\vec{F}\Delta t$, называется ***импульсом силы***. Таким образом:

Импульс силы равен изменению импульса тела.

Из второго закона Ньютона следует, что изменения скоростей материальных точек или тел происходят не мгновенно, а в течение конечных промежутков времени.

Посмотрите лекционные демонстрации.

1. Опыт с инерцией гири.
http://youtube.com/watch?v=f7Aahv7_3Is
2. Выдергивание скатерти из-под сосуда с водой.
http://youtube.com/watch?v=xVSWuvZ8aQA

5.3.3 Третий закон Ньютона

Силы, с которыми взаимодействуют два тела, равны по величине и противоположны по направлению.

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}. \tag{5.16}$$

Таким образом, силы всегда возникают попарно. Силы, фигурирующие в третьем законе Ньютона, приложены к разным телам, поэтому они не уравновешивают друг друга.

Законы Ньютона выполняются только в инерциальных системах отсчёта.

Посмотрите лекционные демонстрации.

1. Взаимодействие тележек. Два мотора.
http://youtube.com/watch?v=bAp0pWg_iDI
2. Взаимодействие тележек. Один мотор.
http://youtube.com/watch?v=exPXEi1wAcM
3. Взаимодействие тележек. Разные массы.
http://youtube.com/watch?v=14LizsP4CGo

5.4 *Закон сохранения импульса*

Совокупность материальных точек (тел), выделенных для рассмотрения, называется ***механической системой***. Силы, которые действуют на тела системы, делят на внешние и внутренние. ***Внутренние силы*** обусловлены взаимодействием тел, входящих в систему. ***Внешние силы*** обусловлены взаимодействием с телами, не входящими в систему.

Система называется ***замкнутой***, если на неё не действуют внешние силы.

Второй закон Ньютона, записанный для одного тела, можно применить и к системе тел. Если система является замкнутой (внешних сил нет), то из второго закона Ньютона следует, что

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = 0. \tag{5.17}$$

Если производная некоторой величины равна нулю, то эта величина постоянна. Поэтому из последнего уравнения следует, что $\vec{p} = \text{const}$.

Импульс замкнутой системы материальных точек (тел) остается постоянным.

Закон сохранения импульса можно записать в развернутом виде:

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 + \cdots + \vec{p}_n = \text{const}, \tag{5.18}$$

или

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + m_3\vec{v}_3 + \cdots m_n\vec{v}_n = \text{const}. \qquad (5.19)$$

Закон сохранения импульса выполняется и для незамкнутых систем в следующих частных случаях.

1. На систему действуют внешние силы, но их векторная сумма равна нулю.

2. Векторная сумма внешних сил не равна нулю, но равна нулю сумма проекций этих сил на какое-либо направление, например, на направление оси x. Полный импульс системы при этом не сохраняется, но сохраняется проекция импульса на направление оси x.

2. Время действия сил очень мало. При этом изменение импульса $d\vec{p}$ будет стремиться к нулю: $d\vec{p} \to 0$. В этом случае $\vec{p} = \text{const}$ – импульс системы сохраняется. Примером является взаимодействие тел при ударе, взрыве.

Посмотрите лекционные демонстрации.

1. Выстрел назад с движущейся тележки.
   http://youtube.com/watch?v=HzHAj62yn5o
2. Выстрел вперёд с движущейся тележки.
   http://youtube.com/watch?v=-Hd8UEIFD0M

§6 Динамика вращательного движения

6.1 *Основные характеристики динамики вращательного движения*

6.1.1 Момент инерции

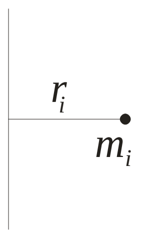


Рисунок 6.1

Рассмотрим материальную точку массой m_i, которая находится на расстоянии r_i от неподвижной оси (рис. 6.1). ***Моментом инерции*** (J) материальной точки относительно оси называется скалярная физическая величина, равная произведению массы m_i на квадрат расстояния r_i до этой оси:

$$J_i = m_i r_i^2. \qquad (6.1)$$

$[J] = \text{кг} \cdot \text{м}^2$.

Момент инерции системы материальных точек будет равен сумме моментов инерции отдельных точек

$$J = \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2. \qquad (6.2)$$

Момент инерции тела является мерой инертности тела во вращательном движении, подобно тому, как масса тела является мерой его инертности при поступательном движении. Таким образом:

Момент инерции – это мера инертных свойств твёрдого тела при вращательном движении, зависящая от распределения массы относительно оси вращения. Иными словами, момент инерции зависит от массы, формы, размеров тела и положения оси вращения.

Момент инерции некоторых однородных тел правильной геометрической формы относительно оси, проходящей через центр масс:

Диск – $$J = \frac{1}{2} mR^2. \tag{6.3}$$

Шар – $$J = \frac{2}{5} mR^2. \tag{6.4}$$

Стержень – $$J = \frac{1}{12} ml^2. \tag{6.5}$$

Обруч – $$J = mR^2. \tag{6.6}$$

Момент инерции тела относительно произвольной оси рассчитывается с помощью ***теоремы Штейнера.***

Момент инерции тела относительно произвольной оси равен сумме момента инерции относительно оси, проходящей через центр масс параллельно данной, и произведения массы тела на квадрат расстояния между осями.

$$J = J_c + md^2. \tag{6.7}$$

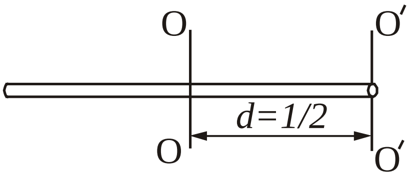


Рисунок 6.2

Пример: Расчёт момента инерции стержня относительно оси, проходящей через конец перпендикулярно ему (рис. 6.2).

$$J_{o'o'} = J_c + md^2, \qquad d = \frac{l}{2},$$

$$J_{o'o'} = \frac{1}{12} ml^2 + m\frac{l^2}{4} = \frac{ml^2}{3}. \tag{6.8}$$

Всякое тело, независимо от того, вращается оно или покоится, обладает моментом инерции относительно любой оси, подобно тому, как тело обладает массой независимо от того, движется оно или находиться в покое. Аналогично массе момент инерции является величиной аддитивной.

6.1.2 Момент импульса

а) Момент импульса материальной точки относительно точки О.

Моментом импульса ($\vec{L}$) материальной точки относительно точки О называется векторная физическая величина, равная векторному произведению радиус-вектора $\vec{r}$, проведённого из точки О в место нахождения материальной точки, на вектор ее импульса $\vec{p}$.

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}, \tag{6.9}$$

Модуль момента импульса материальной точки:

$$L = rp\sin\alpha. \tag{6.10}$$

$[L] = \dfrac{кг \cdot м^2}{с}$.

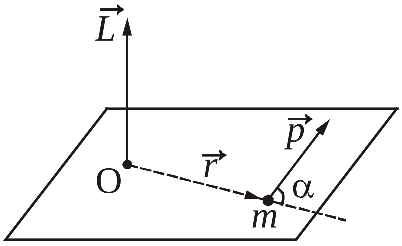


Рисунок 6.3

Направлен вектор $\vec{L}$ перпендикулярно плоскости, в которой лежат перемножаемые векторы. Если смотреть из конца вектора $\vec{L}$, то кратчайший поворот от $\vec{r}$ к $\vec{p}$ происходит против часовой стрелки (рис. 6.3).

Если материальная точка движется по окружности радиусом r, то модуль момента импульса относительно центра окружности равен

$$L = mvr, \tag{6.11}$$

так как угол между векторами $\vec{v}$ и $\vec{r}$ равен α=90°.

б) Момент импульса тела относительно неподвижной оси вращения z.

Момент импульса (L_z) тела относительно оси z будет равен сумме проекций моментов импульсов отдельных точек на эту ось:

$$L_z = \sum_{i=1}^{N} L_{i\,z}. \tag{6.12}$$

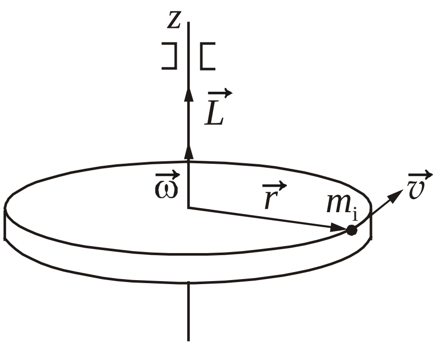


Рисунок 6.4

Любое твёрдое тело можно разбить на систему материальных точек. Просуммировав моменты инерции точек, можно получить выражение для расчёта момента инерции твёрдого тела относительно оси z:

$$L_z = J_z \omega. \tag{6.13}$$

Так как вектор $\vec{\omega}$ направлен по оси вращения (рис. 6.4), то вектор $\vec{L}$ также будет направлен по оси вращения. Тогда формулу (6.13) можно переписать в векторном виде

$$\vec{L} = J\vec{\omega}. \tag{6.14}$$

6.1.3 Момент силы

а) Момент силы относительно неподвижной точки.

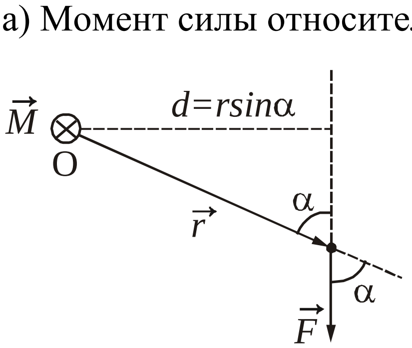


Рисунок 6.5

Моментом силы ($\vec{M}$) относительно точки O называется векторная физическая величина, равная векторному произведению радиус-вектора $\vec{r}$, проведённого из точки O в точку приложения силы, на силу $\vec{F}$ (рис. 6.5).

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}. \tag{6.15}$$

Модуль момента силы определяется соотношением:

$$M = rF\sin\alpha = Fd. \tag{6.16}$$

$[M] = \text{Н} \cdot \text{м}$.

Величина $d = r\sin\alpha$ называется плечом силы. ***Плечо силы*** – это длина перпендикуляра, опущенного из точки О на линию действия силы (рис. 6.5).

Направлен вектор $\vec{M}$ перпендикулярно к плоскости, в которой лежат перемноженные векторы, причем так, что направление вращения, обусловленного силой, и направление вектора $\vec{M}$ образуют правовинтовую систему.

б) Момент силы относительно неподвижной оси z.

Рассмотрим тело, вращающееся вокруг неподвижной оси z под действием силы $\vec{F}$. Сила $\vec{F}$ лежит в плоскости, перпендикулярной оси вращения (рис. 6.6).

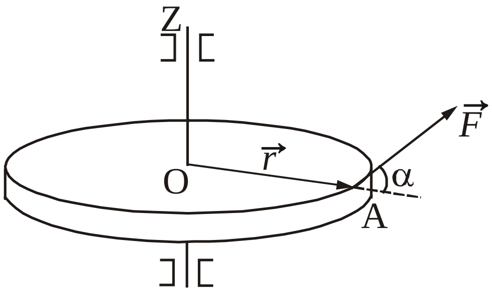


Рисунок 6.6

Моментом силы (M) относительно оси называется скалярная физическая величина, равная произведению модуля силы на плечо силы.

$$M_z = Fd, \tag{6.17}$$

где $d = r\sin\alpha$ – плечо силы.

в) момент пары сил

Две равные по модулю противоположно направленные силы, не действующие вдоль одной прямой, называются ***парой сил***. Расстояние d между прямыми, вдоль которых действуют силы, называется ***плечом пары*** (рис 6.7). Модуль момента пары сил равен произведению модуля силы на плечо пары

$$M = rF\sin\alpha = Fd. \tag{6.18}$$

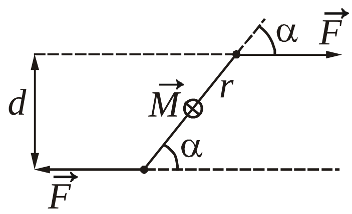


Рисунок 6.7

Вектор момента $\vec{M}$ пары сил перпендикулярен к плоскости, в которой лежат силы.

6.2 *Основное уравнение динамики вращательного движения*

Во вращательном движении момент силы аналогичен силе, момент импульса – импульсу, момент инерции – массе. Поэтому основное уравнение динамики вращательного движения по форме записи тождественно второму закону Ньютона:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}. \tag{6.19}$$

Скорость изменения момента импульса материальной точки равна суммарному моменту сил, действующих точку.

Твёрдое тело является системой материальных точек. Для твёрдого тела будет выполняться аналогичное соотношение:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \vec{M}_{\text{внешн}}\,. \tag{6.20}$$

Скорость изменения момента импульса тела равна суммарному моменту внешних сил, действующих на тело.

Полученное выражение называется основным уравнением динамики вращательного движения. Спроецируем уравнение (6.20) на ось z. Тогда

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z\,,$$

$$L_z = J_z\,\omega\,,$$

Если $J_z = \text{const}$, то можно записать

$$J_z \frac{d\,\omega}{dt} = M_z\,.$$

Учитывая, что производная угловой скорости по времени дает угловое ускорение ε, получим:

$$J_z \varepsilon = M_z\,. \tag{6.21}$$

Уравнение (6.21) называется основным законом динамики твёрдого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси.

Посмотрите лекционные демонстрации.

1. Зависимость углового ускорения от момента сил 1.
http://youtube.com/watch?v=P5BpHp-b6qg
2. Зависимость углового ускорения от момента сил 2.
http://youtube.com/watch?v=3toovcYtKCw
3. Зависимость углового ускорения от момента инерции.
http://youtube.com/watch?v=msfnzjkoVws

6.3 *Закон сохранения момента импульса*

Основное уравнение динамики вращательного движения, записанное в виде

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}\,,$$

может быть применено как к телу, момент инерции которого меняется в процессе движения, так и к системе тел, вращающихся вокруг данной неподвижной оси.

Если на твёрдое тело не действуют внешние силы или равнодействующая этих сил не создает вращающего момента относительно оси вращения, то M=0.

В этом случае изменение момента импульса $dL = d(J\omega)$ равно нулю. Отсюда вытекает закон сохранения момента импульса твёрдого тела.

Если на тело не действуют внешние силы или действуют так, что равнодействующая этих сил не создает вращающего момента относительно оси вращения, то момент импульса тела относительно этой оси сохраняется.

$$J\vec{\omega} = \mathrm{const} \tag{6.22}$$

Уравнению (6.22) можно придать следующую форму:

$$J_1\vec{\omega}_1 = J_2\vec{\omega}_2\,. \tag{6.23}$$

Из (6.23) следует, что угловая скорость тела в этом случае обратно пропорциональна его моменту инерции.

Закон сохранения момента импульса можно записать для системы тел. Если система тел, вращающихся относительно некоторой оси, замкнута, то внешние силы не действуют. В этом случае M=0. Изменение момента импульса системы тел тоже будет равно нулю. Это означает, что момент импульса системы тел остается постоянным. Мы получили закон сохранения момента импульса для системы тел.

Момент импульса замкнутой системы тел остается постоянным.

$$\vec{L} = \mathrm{const}\,. \tag{6.24}$$

Соотношение (6.24) означает, что в замкнутой системе сумма моментов импульсов всех тел системы в любые два момента времени одинакова:

$$J_1\vec{\omega}_1 + J_2\vec{\omega}_2 + \cdots + J_n\vec{\omega}_n = J_1'\vec{\omega}_1' + J_2'\vec{\omega}_2' + \cdots + J_n'\vec{\omega}_n', \tag{6.25}$$

где J и J' – моменты инерции тел в произвольные моменты времени t и t', ω и ω' – соответствующие им угловые скорости.

Закон сохранения момента импульса можно применять и для незамкнутых систем, если алгебраическая сумма моментов внешних сил относительно оси вращения равна нулю.

Посмотрите лекционные демонстрации.

1. Человек с гантелями на скамье Жуковского.
   http://youtube.com/watch?v=8BB5sWXBKos
2. Человек на скамье Жуковского с велосипедным колесом.
   http://youtube.com/watch?v=nR_E-Zmqq4M

§7 Механическая работа. Мощность

7.1 *Работа*

Пусть в некоторый момент времени на тело действует сила $\vec{F}$, под действием которой тело совершает перемещение $d\vec{r}$ (рис. 7.1).

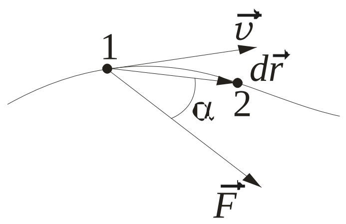


Рисунок 7.1

Элементарной работой (δA) называется скалярная физическая величина, равная скалярному произведению силы $\vec{F}$ на элементарное перемещение $d\vec{r}$ точки приложения силы

$$\delta A = \vec{F} d\vec{r} . \qquad (7.1)$$

В скалярном виде:

$$\delta A = F dr \cos\alpha , \qquad (7.2)$$

где α – угол между направлениями силы и перемещения.
$[A] = \text{Н} \cdot \text{м} = \text{Дж}$ (джоуль).

Работа на конечном перемещении равна

$$A = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F} d\vec{r} . \qquad (7.3)$$

Если движение прямолинейное, а сила не меняется ни по модулю, ни по направлению ($\vec{F} = \text{const}$), то работа рассчитывается по формуле:

$$A = FS\cos\alpha . \qquad (7.4)$$

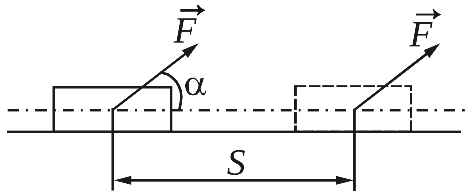


Рисунок 7.2

Проанализируем уравнение (7.2).
1. Работа может быть положительной и отрицательной. Если угол α между $\vec{F}$ и $d\vec{r}$ острый ($0 < \alpha < \pi/2$), то работа положительна, если угол α тупой ($\pi/2 < \alpha < \pi$), то работа отрицательна. Например, работа силы трения отрицательна, так как сила трения направлена против перемещения.
2. Сила не совершает работы: а) если тело покоится ($d\vec{r}$ =0); б) если направление силы $\vec{F}$ перпендикулярно направлению перемещения $d\vec{r}$ ($\alpha = \pi/2$). Например, центростремительные силы работы не совершают, так как $\vec{F} \perp d\vec{r}$.

7.2 *Графическое представление работы*

Работу можно вычислить графически.
1. Рассмотрим случай, когда $\vec{F} = \text{const}$. Проекция силы $\vec{F}$ на заданное направление $\vec{r}$ (рис. 7.3) равна:

$$F\cos\alpha = F_r$$

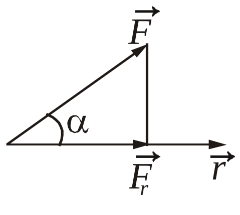


Рисунок 7.3

График зависимости проекции F_r от r представляет собой прямую линию (рис.7.4). Найдем работу

$$A = \int_{r_1}^{r_2} F_r \cdot dr = F_r \left(r_2 - r_1 \right) = F_r \cdot S .$$

Очевидно, что работа постоянной силы равна площади заштрихованного прямоугольника (рис. 7.4).

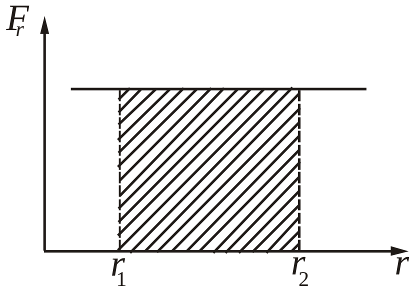


Рисунок 7.4

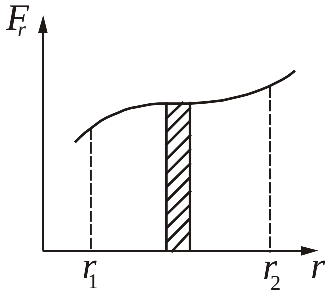


Рисунок 7.5

2. Если $\vec{F} \neq \text{const}$, то график зависимости проекции F_r от r представляет собой некоторую кривую (рис.7.5). Элементарная работа δA равна площади узкой заштрихованной полоски

$$\delta A = F_r dr.$$

Работа на конечном перемещении

$$A = \int_{r_1}^{r_2} F_r dr$$

будет изображаться площадью криволинейной трапеции (рис. 7.5).

7.3 *Мощность*

Мощность (N) – скалярная физическая величина, характеризующая быстроту совершения работы и численно равная работе, совершаемой за единицу времени.

$$N = \frac{dA}{dt}. \tag{7.5}$$

$$[N] = \frac{\text{Дж}}{\text{с}} = \text{Вт}.$$

Формула (7.5) дает значение мгновенной мощности. Подставив в (7.5) $\delta A = \vec{F} d\vec{r}$, получим

$$N = \frac{\vec{F} d\vec{r}}{dt} = \vec{F}\vec{v}. \tag{7.6}$$

Мгновенная мощность равна скалярному произведению силы на скорость тела.

Если работа совершается за время t, то средняя мощность

$$< N >= \frac{A}{t} \tag{7.7}$$

Эффективность работы принято характеризовать коэффициентом полезного действия (кпд).

$$\eta = \frac{A_\text{п}}{A_\text{затр}} \cdot 100\%, \tag{7.8}$$

где $A_п$ – полезная работа;
$A_{затр}$ – затраченная работа.

7.4 *Работа и мощность при вращательном движении*

Рассмотрим вращение твёрдого тела относительно неподвижной оси под действием силы, направленной по касательной к окружности (рис. 7.6). Элементарная работа, совершаемая при повороте на угол $d\varphi$

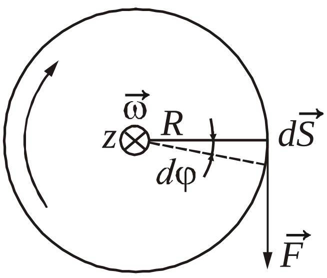


Рисунок 7.6

$$\delta A = Md\varphi, \tag{7.9}$$

Проинтегрировав формулу (8.9), можно найти работу, совершаемую при повороте вращающегося тела на угол $\varphi_2 - \varphi_1$

$$A_{12} = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} Md\varphi. \tag{7.10}$$

Если M = const, то

$$A = M\varphi. \tag{7.11}$$

Разделив работу на время dt, за которое тело повернулось на угол $d\varphi$, получим мощность, развиваемую силой F:

$$N = \frac{\delta A}{dt} = M\frac{d\varphi}{dt} = M\omega,$$

$$N = M\omega, \tag{7.12}$$

где ω – угловая скорость.

§8 Энергия. Закон сохранения энергии

Энергия – это единая мера всех форм движения материи и типов взаимодействия материальных объектов. Понятие энергии связывает воедино все явления природы. В соответствии с различными формами движения материи рассматривают различные виды энергии: механическую, внутреннюю, электромагнитную, ядерную.

Механическая энергия бывает двух видов: кинетическая и потенциальная.

8.1 *Кинетическая энергия*

Кинетическая энергия (или энергия движения) – часть механической энергии, которая определяется массой и скоростью материальной точки (тела). Обозначается кинетическая энергия через $W_к$ и численно равна половине произведения массы тела на квадрат скорости:

$$W_к = \frac{mv^2}{2} \tag{8.2}$$

Изменение кинетической энергии тела равно работе всех сил, действующих на тело.

$$A = \Delta W_{к} = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}. \qquad (8.3)$$

Выражение (8.3) называется теоремой об изменении кинетической энергии.

Свойства кинетической энергии:

1. Кинетическая энергия – величина скалярная.
2. Кинетическая энергия – величина положительная.
3. Кинетическая энергия – величина относительная, т.к. скорость зависит от выбора системы отсчёта.
4. Кинетическая энергия – величина аддитивная. Это означает, что кинетическая энергия системы равна сумме кинетических энергий частиц (тел), входящих в систему.

Энергия, которой обладает твёрдое тело, вращающееся вокруг неподвижной оси, проходящей через центр масс тела, называется ***кинетической энергией вращательного движения*** этого тела. Эта энергия складывается из кинетических энергий материальных точек, составляющих тело, и определяется соотношением:

$$W_{к}^{вр} = \frac{J\omega^2}{2} \qquad (8.4)$$

где J – момент инерции тела, ω– угловая скорость вращения.

Для вращательного движения также справедлива теорема об изменении кинетической энергии:

$$A = \frac{J\omega_2^2}{2} - \frac{J\omega_1^2}{2}. \qquad (8.5)$$

При плоском движении тело участвует в двух движениях: поступательном и вращательном. В этом случае полная кинетическая энергия равна сумме кинетических энергий поступательного и вращательного движений и рассчитывается по формуле:

$$W_{к} = W_{к}^{пост} + W_{к}^{вр} = \frac{mv^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2}, \qquad (8.6)$$

где v – скорость поступательного движения центра масс;

ω – угловая скорость относительно оси, проходящей через центр масс.

8.2 *Потенциальная энергия*

Потенциальная энергия – это та часть механической энергии, которая зависит от взаимного расположения тел или частей тела, а также от природы сил, действующих между телами.

8.2.1 Консервативные и неконсервативные силы

Силы, работа которых не зависит от формы траектории, а определяется лишь конечным и начальным положением тела, называют ***консервативными***, а их поля – ***потенциальными***.
Примеры консервативных сил: гравитационные, упругие, кулоновские.

Силы, работа которых зависит от формы траектории, называют ***неконсервативными*** или ***диссипативными***, а их поля – ***непотенциальными***.

Примеры неконсервативных сил: силы сухого и вязкого трения, силы сопротивления, силы давления газа, силы вихревого электрического поля; силы, развиваемые какими-либо «источниками» сил (машинами, двигателями и т.д.).

8.2.2 Работа и потенциальная энергия

Тела взаимодействуют между собой с различными силами. Понятие потенциальной энергии применимо только к консервативным силам. В курсе механики рассматривают следующие виды потенциальной энергии.

1. Потенциальная энергия упруго деформированной пружины (тела).

$$W_{\text{п}} = \frac{kx^2}{2}. \tag{8.7}$$

где k – жесткость пружины (коэффициент жесткости);
x – абсолютное удлинение пружины (величина деформации).

При упругой деформации совершается работа:

$$A = -\left(\frac{kx_2^2}{2} - \frac{kx_1^2}{2}\right). \tag{8.8}$$

2. Потенциальная энергия материальной точки поле силы тяжести Земли.

Материальная точка (тело) массой m, находящееся на высоте h над поверхностью Земли, обладает потенциальной энергией:

$$W_{\text{п}} = mgh. \tag{8.9}$$

При перемещении материальной точки по произвольной траектории из точки 1 в точку 2 (рис. 8.1) совершается работа

$$A = mg(h_1 - h_2) = -(mgh_2 - mgh_1) \tag{8.10}$$

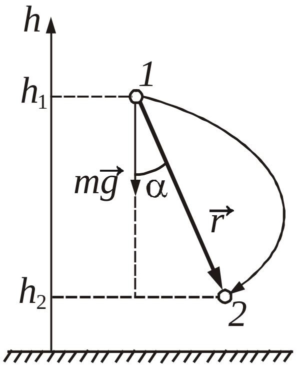


Рисунок 8.1

Свойства потенциальной энергии:

1. Потенциальная энергия может быть только взаимной: она в одинаковой степени характеризует оба взаимодействующих тела. Однако эту энергию часто приписывают одному из тел. Например, говорят о потенциальной энергии поднятого над Землей тела. Так поступают для удобства анализа.
2. Численное значение потенциальной энергии зависит от

выбора начала ее отсчёта
3. Потенциальная энергия может иметь как положительное, так и отрицательное значение. Это связано с произвольностью выбора начала отсчёта.
4. Состояние взаимодействующих тел можно описать потенциальной энергией только в том случае, если между телами действуют консервативные силы.

8.3 *Закон сохранения механической энергии*

Материальная точка может одновременно обладать и кинетической, и потенциальной энергией. Сумма кинетической и потенциальной энергий точки называется ее ***полной механической энергией*** *W*.

$$W = W_{\text{к}} + W_{\text{п}} \tag{8.11}$$

Согласно закону сохранения механической энергии

Полная механическая энергия замкнутой системы материальных точек (тел), между которыми действуют только консервативные силы, остается постоянной.

$$W_{\text{к}} + W_{\text{п}} = \text{const}\,. \tag{8.12}$$

Действие неконсервативных сил (например, сил трения) уменьшает механическую энергию системы. Такой процесс называется ***диссипацией*** энергии («диссипация» означает «рассеяние»). Силы, приводящие к диссипации энергии, называются диссипативными. При диссипации энергии механическая энергия системы преобразуется в другие виды энергии (например, во внутреннюю энергию). Преобразование идёт в соответствии со всеобщим законом природы – законом сохранения энергии.

Закон сохранения энергии применим ко всем без исключения процессам в природе. Его можно сформулировать следующим образом.

Полная энергия изолированной системы всегда остается постоянной, энергия лишь переходит из одной формы в другую.

Посмотрите лекционные демонстрации.

1. Маятник Максвелла.
http://youtube.com/watch?v=4ynUF1Jy2sE
2. Шарик в мертвой петле.
http://youtube.com/watch?v=roFrbTwvKxg

§9 Соударение тел

Предельными, идеализированными видами соударений являются абсолютно неупругий и абсолютно упругий удары.

Абсолютно неупругим называется удар, при котором потенциальная энергия упругой деформации не возникает; кинетическая энергия тел частично или полностью переходит во внутреннюю. После удара тела движутся с одинаковой скоростью (т.е. как одно тело) или покоятся. При таком ударе выполняется только закон сохранения импульса. Механическая энергия не сохраняется – она частично или полностью переходит во внутреннюю.

Абсолютно упругим называется удар, при котором полная механическая энергия тел сохраняется. Сначала кинетическая энергия частично или полностью переходит в потенциальную энергию упругой деформации. Затем тела возвращаются к первоначальной форме, отталкивая друг друга. В итоге потенциальная энергия снова переходит в кинетическую и тела разлетаются. При таком ударе выполняются закон сохранения механической энергии и закон сохранения импульса.

Рассмотрим ***центральный удар*** двух однородных шаров. Удар называется центральным, если шары до удара движутся вдоль прямой, проходящей через их центры (рис. 9.1).

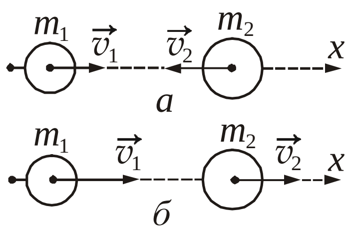


Рисунок 9.1

Предположим, что шары движутся поступательно (т.е. не вращаясь), и что они образуют замкнутую систему. Обозначим массы шаров через m_1 и m_2, скорости шаров до удара $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$, после удара $\vec{u}_1$ и $\vec{u}_2$.

1. Абсолютно неупругий удар.

По закону сохранения импульса

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\vec{u} \tag{9.1}$$

где $\vec{u}$ – общая скорость шаров после удара.
Отсюда

$$\vec{u} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2} \tag{9.2}$$

2. Абсолютно упругий удар.

Запишем закон сохранения импульса и закон сохранения механической энергии:

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2 \tag{9.3 а}$$

$$\frac{m_1v_1^2}{2} + \frac{m_2v_2^2}{2} = \frac{m_1u_1^2}{2} + \frac{m_2u_2^2}{2} \tag{9.3 б}$$

Решив полученную систему уравнений, найдем скорости шаров после удара.

$$\vec{u}_1 = \frac{2m_2\vec{v}_2 + (m_1 - m_2)\vec{v}_1}{m_1 + m_2}. \tag{9.4}$$

$$\vec{u}_2 = \frac{2m_1\vec{v}_1 + (m_2 - m_1)\vec{v}_2}{m_1 + m_2}. \tag{9.5}$$

Чтобы выполнить расчёты, необходимо спроецировать векторы скоростей на ось x (рис. 9.1). Если при расчёте какая-то проекция скорости окажется отрицательной, то это означает, что вектор этой скорости направлен в сторону, противоположную направлению оси x.

Посмотрите лекционные демонстрации.

1. Удар шаров (абсолютно упругий).
   http://youtube.com/watch?v=_0y_J5KqQA8
2. Удар шаров (абсолютно неупругий).
   http://youtube.com/watch?v=RWeF1r-Epbw

§10 Элементы специальной теории относительности

Теория относительности – это физическая теория, рассматривающая пространственно-временные закономерности, справедливые для любых физических процессов.

Специальная теория относительности изучает свойства пространства и времени в инерциальных системах отсчёта при отсутствии полей тяготения. Специальную теорию относительности также называют релятивистской теорией.

10.1 *Принцип относительности Галилея*

Сопоставим описания движения частицы в инерциальных системах отсчёта К и К′. Система К′ движется относительно К с постоянной скоростью v в направлении оси x (рис. 10.1). Координаты точки M в системе К и К′ будут связаны соотношениями (10.1).

Совокупность этих уравнений называется ***преобразованиями Галилея***. Равенство $t' = t$, означает, что время в обеих системах течет одинаково.

Таким образом, преобразования Галилея позволяют, зная координаты в одной инерциальной системе отсчёта, определить координаты в другой инерциальной системе отсчёта.

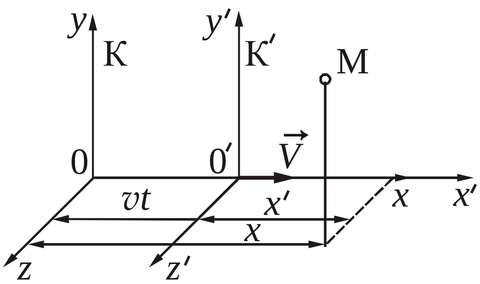


Рисунок 10.1

Законы Ньютона выполняются только при условии, что движение рассматривается относительно инерциальных систем отсчёта.

$$\begin{array}{ll} x = x' + vt & x' = x - vt \\ y = y' & y' = y \\ z = z' & z' = z \\ t = t' & t' = t \end{array} \qquad (10.1)$$

Если законы Ньютона верны при рассмотрении движения относительно одной системы отсчёта, то они верны и относительно любой другой системы отсчёта, движущейся относительно первой равномерно и прямолинейно. Таких систем отсчёта бесчисленное множество. Это означает следующее:

1. Законы механики одинаково формулируются во всех инерциальных системах отсчёта.

2. Все механические явления во всех инерциальных системах отсчёта протекают одинаково при одинаковых начальных условиях.

Эти утверждения называются ***принципом относительности Галилея***. Из принципа относительности следует, что никакими механическими опытами, проведёнными внутри инерциальной системы отсчёта, невозможно установить покоится она или движется прямолинейно и равномерно.

Величины, которые имеют одно и то же численное значение во всех системах отсчёта, называются ***инвариантными*** (invariants– «неизменяющийся»). В преобразованиях Галилея инвариантными величинами являются масса, ускорение, сила, время. Неинвариантные: скорость, импульс, кинетическая энергия.

10.2 *Постулаты специальной теории относительности*

В основе специальной теории относительности лежат два постулата: принцип относительности Эйнштейна и принцип постоянства скорости света. Принцип относительности Эйнштейна является распространением механического принципа Галилея на все без исключения физические явления.

1. В любых инерциальных системах отсчёта все физические явления (механические, оптические, тепловые и т.д.) протекают одинаково (при одинаковых условиях). Это означает, что уравнения, выражающие законы природы, инвариантны по отношению к преобразованиям координат и времени при переходе от одной инерциальной системы отсчёта к другой.
2. Скорость света в вакууме одинакова во всех инерциальных системах отсчёта, не зависит от скорости движения источника и приемника света, является предельным значением скорости передачи сигнала. $c = 3\cdot 10^8$ м/с.

10.3 *Преобразования Лоренца*

Преобразования, которые удовлетворяют постулатам Эйнштейна, называются преобразованиями Лоренца. Если система К′ движется относительно системы К со скоростью v, направленной вдоль оси x (рис.10.1), то эти преобразования имеют вид:

$$\begin{cases} x = \dfrac{x' + vt'}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \dfrac{t' + \dfrac{vx'}{c^2}}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = \dfrac{x - vt'}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \dfrac{t - \dfrac{vx}{c^2}}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} \end{cases} \qquad (10.2)$$

Проанализируем преобразования Лоренца:

1. Если $v << c$, то $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \approx 1$.

Преобразования Лоренца при этом перейдут в преобразования Галилея. Это означает, что выполняется ***принцип соответствия***. Принцип соответствия состоит в том, что всякая новая теория содержит в себе старую теорию в качестве частного случая.

2. Предположим, что $v > c$. При этом $\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right) < 0$.

Это означает, что преобразования не имеют смысла. Отсюда следует, что движение со скоростью $v > c$ невозможно.

3. Из преобразований Лоренца видно, что временные и пространственные координаты взаимосвязаны.

Используя преобразования Лоренца можно получить релятивистский закон сложения скоростей:

$$V = \frac{v' + v}{1 + \frac{v}{c^2} v'} \tag{10.3}$$

Если v и v' много меньше скорости света, то уравнение (10.3) переходит в классический закон сложения скоростей.

$$V = v' + v$$

10.4 *Следствия из преобразований Лоренца*

1. Понятие одновременности событий относительно, а не абсолютно, как это считается в классической механике. Это означает, что события, одновременные, но происходящие в разных точках пространства системы К′, будут неодновременными в системе К.
2. Собственное время меньше времени, отсчитанного по часам, движущимся относительно тела:

$$\Delta\tau = \frac{\Delta\tau_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \tag{10.4}$$

где $\Delta\tau_0$ – промежуток времени, измеренный по часам, движущимся вместе с телом (собственное время);

$\Delta\tau$ – промежуток времени в системе отсчёта, движущейся со скоростью v.

3. Сокращение линейных размеров в направлении движения (лоренцево сокращение)

$$l = l_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,, \qquad (10.5)$$

где l_0 – длина тела в системе отсчёта, относительно которой оно покоится (собственный размер);
l – длина тела в системе отсчёта, относительно которой оно движется со скоростью v.

10.5 *Основные соотношения релятивистской динамики*

1 Зависимость массы тела от скорости движения.

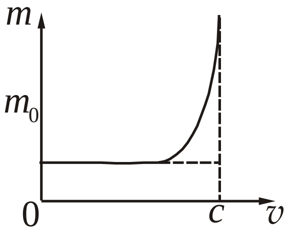


Рисунок 10.2

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\,, \qquad (10.6)$$

где m_0 – масса тела в покоящейся системе отсчёта (масса покоя);
m – масса движущегося тела.

График зависимости массы тела от скорости представлен на рис. 10.2. Если скорость тела стремится к скорости света ($v \to c$), то его масса устремляется к бесконечности.

2. Релятивистский импульс.

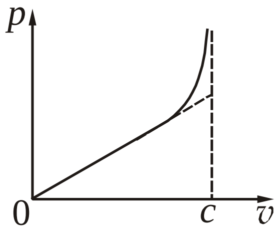


Рисунок 10.3

$$\vec{p} = \frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\,. \qquad (10.7)$$

График зависимости импульса от скорости представлен на рис. 10.3.

3. Взаимосвязь массы и энергии.

Величину

$$E = mc^2 \qquad (10.8)$$

называют полной (релятивистской) энергией, а величину

$$E_0 = m_0c^2 \qquad (10.9)$$

энергией покоя.
Выражение (10.9) представляет собой закон взаимосвязи энергии и массы.

Полная энергия материального объекта равна произведению его релятивистской массы на квадрат скорости света в вакууме.

Изменение массы тела на Δm сопровождается изменением его энергии на величину

$$\Delta E = \Delta m c^2 . \qquad (10.10)$$

4. Релятивистское выражение для кинетической энергии имеет вид:

$$W_к = E - E_0 = mc^2 - m_0c^2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - m_0c^2 ,$$

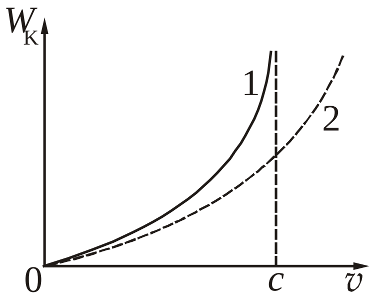


Рисунок 10.4

$$W_к = m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1\right). \qquad (10.11)$$

На рис. 10.4 график 1 соответствует релятивистской зависимости, график 2 – классической.

5. Связь кинетической энергии с импульсом релятивистской частицы:

$$p = \frac{1}{c}\sqrt{W_к\left(W_к + 2E_0\right)} . \qquad (10.12)$$

Релятивистские эффекты для обычных макроскопических тел и обычных скоростей незначительны. В большинстве отраслей техники классическая физика «работает» также хорошо, как и прежде.