Задачи для внеаудиторной работы

Задача 3.4.

По данным табл. 1.5 найти:

а) несмещенные оценки для математического ожидания и дисперсии;

б) коэффициент асимметрии и эксцесс выборки.

Задача 3.5.

Дана выборка

40, 43, 43, 46, 46, 46, 54, 56, 59, 62, 64, 64, 66, 66, 67, 67, 68, 68, 69, 69, 71, 75, 75, 76, 76, 78, 80, 82, 82, 82, 82, 82, 83, 84, 86, 88, 90, 90, 91, 91, 95, 102, 127, 69, 92.

Найти несмещенные оценки для математического ожидания и дисперсии:

а) не прибегая к группировке чисел;

б) объединяя числа в группы с интервалами в 5 единиц: 40–44; 45–49; 50–54 и т. д.

Занятие 4

ИНТЕРВАЛЬНЫЕ ОЦЕНКИ

Краткие теоретические сведения

Точечная оценка неизвестного параметра генеральной совокупности является приближенным его значением даже в том случае, если она несмещенная, эффективная и состоятельная, и в случае выборки малого объема может существенно от него отличаться.

В этом случае лучше использовать интервальную оценку параметра.

Интервальной называют оценку, которая определяется двумя числами – концами интервала, который с определенной вероятностью γ накрывает неизвестное значение параметра θ генеральной совокупности. Границы интервала и его величина находятся по выборочным данным, поэтому являются случайными величинами в отличие от оцениваемого параметра θ – величины неслучайной.

В качестве интервальной оценки используют доверительные интервалы. Интервал, содержащий оцениваемый параметр генеральной совокупности, называют ***доверительным интервалом***, а вероятность γ – ***доверительной вероятностью*** или надежностью оценки.

Если исследуемая СВ распределена по нормальному закону с известным средним квадратическим отклонением σ, то доверительный интервал для математического ожидания определяется неравенством

$$\bar{x}_в - t_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_в + t_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \tag{4.1}$$

где $\delta = t_\gamma \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ – точность оценки;

n – объем выборки;

t_γ – значение аргумента функции Лапласа, при котором $2\Phi(t_\gamma) = \gamma \Rightarrow \Phi(t_\gamma) = \dfrac{\gamma}{2}$.

Если среднее квадратическое отклонение неизвестно, то доверительный интервал для математического ожидания исследуемой СВ определяется неравенством

$$\bar{x}_в - t_{\gamma,n} \frac{S}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_в + t_{\gamma,n} \frac{S}{\sqrt{n}}, \tag{4.2}$$

где $S = \sqrt{D_и}$;

значения $t_{\gamma,n}$ находят по табл. П3 по заданным n и γ;

$\delta = t_{\gamma,n} \dfrac{S}{\sqrt{n}}$ – точность оценки математического ожидания.

Доверительный интервал для среднего квадратического отклонения исследуемой СВ определяется неравенством

$$Sq_1 < \sigma < Sq_2. \tag{4.3}$$

Значения q_1 и q_2 находятся по табл. П4 по заданным γ и n.

Пример 4.1. Случайная величина X имеет нормальное распределение с известным средним квадратическим отклонением $\sigma = 3$. Найти доверительный интервал для оценки неизвестного математического ожидания a с надежностью $\gamma = 0,95$, если по данным выборки объемом $n = 36$ вычислено $\overline{x}_\text{в} = 4,1$.

Решение. Определим значение t_γ по табл. П2:

$$\Phi(t_\gamma) = \frac{\gamma}{2} = \frac{0,95}{2} = 0,475 \Rightarrow t_\gamma = 1,96.$$

Точность оценки $\delta = t_\gamma \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = \dfrac{1,96 \cdot 3}{6} = 0,98.$

Подставим в неравенство (4.1):

$$4,1 - 0,98 < a < 4,1 + 0,98;$$

$$3,12 < a < 5,08.$$

Смысл полученного результата:

если произведено достаточно большое число выборок по 36 в каждой, то 95 % из них определяют такие доверительные интервалы, в которых a заключено, и лишь в 5 % случаев оно может выйти за границы доверительного интервала.

Пример 4.2. Для исследования нормального распределения СВ X извлечена выборка (табл. 4.1).

Таблица 4.1

$x_i - x_{i+1}$	[45–47)	[47–49)	[49–51)	[51–53)	[53–55)	[55–57]
n_i	4	13	34	32	12	5

Найти с надежностью $\gamma = 0,95$ доверительные интервалы для математического ожидания и среднего квадратического отклонения исследуемой СВ.

Решение. Найдем несмещенные оценки для математического ожидания и дисперсии, используя метод произведений (табл. 4.2).

Таблица 4.2

x_i^*	n_i	U_i	$U_i \cdot n_i$	$U_i^2 \cdot n_i$	$(U_i + 1)^2 \cdot n_i$
46	4	–2	–8	16	4
48	13	–1	–13	13	0
50	34	0	0	0	34
52	32	1	32	32	128
54	12	2	24	48	108
56	5	3	15	45	80
$\sum$	100	–	50	154	354

Контроль: $354 = 100 + 2 \cdot 50 + 154.$ $\qquad 354 = 354.$

$$\overline{\text{v}}_1 = \frac{1}{100} \cdot 50 = \frac{1}{2} = 0,5; \quad \overline{\text{v}}_2 = \frac{154}{100} = 1,54; \quad b = 50; \quad h = 2;$$

$$\overline{x}_{\text{в}} = \overline{\text{v}}_1 \cdot h + b = \frac{1}{2} \cdot 2 + 50 = 51;$$

$$D_{\text{в}} = \left(\frac{154}{100} - \frac{1}{4}\right) \cdot 4 = 5,16;$$

$$D_{\text{и}} = \frac{100}{99} \cdot \frac{516}{100} = \frac{516}{99} \approx 5,21;$$

$$S = \sqrt{D_{\text{и}}} = 2,283.$$

По табл. П3 по данным $\gamma = 0,95$ и $n = 100$ находим $t_{\gamma,\,n} = t_{0,95;\,100} = 1,984$.

Для определения доверительного интервала для математического ожидания используем неравенство (4.2):

$$51 - \frac{1,984 \cdot 2,283}{10} < a < 51 + \frac{1,984 \cdot 2,283}{10};$$

$$50,547 < a < 51,453.$$

Таким образом, интервал $(50,547; 51,453)$ накрывает точку a с вероятностью $0,95$.

Для определения доверительного интервала для среднего квадратического отклонения используем неравенство (4.3). По табл. П4 по заданным $\gamma = 0,95$ и $n = 100$ находим $q_1 = 0,878$, $q_2 = 1,161$.

$$2,004 < \sigma < 2,651.$$

С вероятностью 0,95 неизвестное значение σ накрывается интервалом $(2,004; 2,651)$.

Задачи для аудиторной работы

Задача 4.1.

Найти минимальный объем выборки, при котором с надежностью 0,975 точность оценки математического ожидания нормально распределенной СВ равна 0,2, если среднее квадратическое отклонение $\sigma = 4$.

Задача 4.2.

СВ X имеет нормальное распределение. По выборке объемом n = 25 найдено S = 0,8. Найти доверительный интервал для неизвестного среднего квадратического отклонения с надежностью $\gamma = 0,95$.

Задача 4.3.

Даны результаты исследования грануляции порошка (в мкм) (табл. 4.3).

Таблица 4.3

Грануляция порошка x_i	0–40	40–80	80–120	120–160	160–200
Частота n_i	8	18	32	26	9

Найти интервальные оценки параметров нормального распределения с надежностью 0,95.

Задача 4.4.

Найти с надежностью 0,99 доверительные интервалы для математического ожидания и среднего квадратического отклонения по данным выборки (табл. 4.4).

Таблица 4.4

x_i	2,1	2,3	2,5	2,7	2,9
n_i	8	18	45	20	9

Задача 4.5.

Для контроля срока службы электроламп из большой партии было отобрано 25 штук. В результате испытаний оказалось, что средний срок службы отработанных ламп равен 985 часам, а среднее квадратическое отклонение их срока службы – 20 часов. Определить границы, в которых с вероятностью 0,95 заключен средний срок службы ламп во всей партии.

Задачи для внеаудиторной работы

Задача 4.6.

Найти с надежностью 0,95 доверительные интервалы для математического ожидания и среднего квадратического отклонения по данным выборки (табл. 4.5).

Таблица 4.5

Задание А					
x_i	1,4	1,8	2,2	2,6	3
n_i	8	18	45	20	9

Задание Б						
$x_i - x_{i+1}$	[2,69–2,74)	[2,74–2,79)	[2,79–2,84)	[2,84–2,89)	[2,89–2,94)	[2,94–3,01)
n_i	2	0	6	18	14	10

Задача 4.7.

Найти минимальный объем выборки, при котором с надежностью 0,925 точность оценки математического ожидания нормально распределенной СВ равна 0,3, если среднее квадратическое отклонение $\sigma = 1,5$.

Задача 4.8.

Телефонная компания провела оценку среднего времени междугородных переговоров в течение выходных, когда действует льготный тариф. Случайная выборка из 45 звонков дала среднюю $\overline{x}_{\text{в}} = 14,5$ мин со средним квадратическим отклонением $\sigma = 5,6$ мин. Найти 95 % и 90 %-е доверительные интервалы для средней продолжительности переговоров в выходные дни.