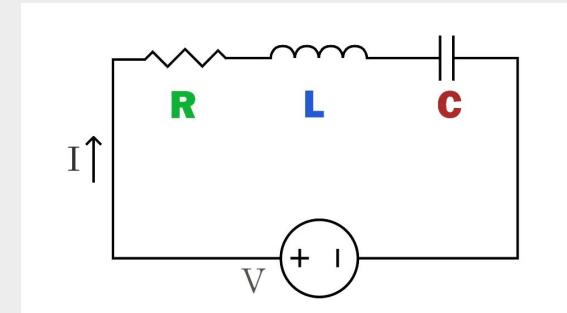




# RLC Áramkör Másodrendű Differenciálegyenlettel

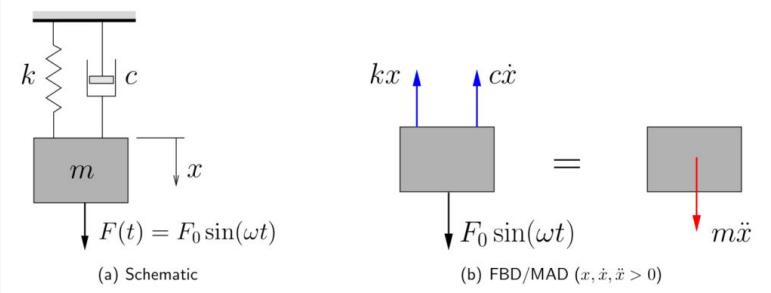
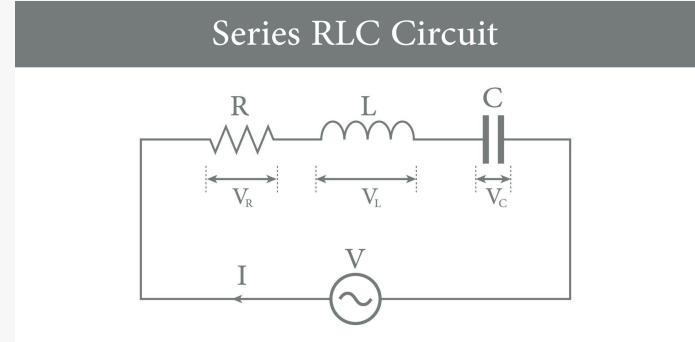
Emelt szintű matematika mérnököknek

Babos Dávid  
Kaffai Levente



# Mi az az RLC kör és miért fontos?

- **Komponensek:**
  - Ellenállás (disszipáció)
  - Tekercs (mágneses energia)
  - Kondenzátor (elektromos energia)
- **Fizikai lényeg:**
  - Energia periodikus átalakulása (oszcilláció) a két tároló elem között.
- **Alkalmazás:**
  - Frekvenciaszelekció (rádió, TV, Wi-Fi)
  - Jelszűrés
  - Zajcsökkentés.
- **Analógia:** A mechanikai rugó-tömeg rendszer elektromos megfelelője.



# Kirchhoff huroktörvénye

A forrásfeszültség megegyezik a komponenseken eső feszültségek összegével.

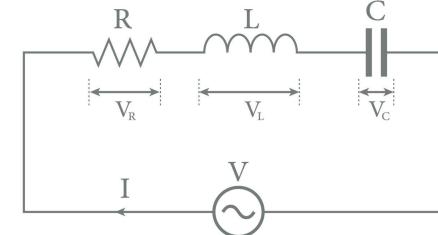
- **Ellenállás (R):** Ohm törvénye
- **Tekercs (L):** Indukció törvénye
- **Kondenzátor (C):** Kapacitás definíciója

$$V_R = R \cdot I$$

$$V_L = L \cdot \frac{dI}{dt}$$

$$V_C = \frac{1}{C} \cdot Q$$

Series RLC Circuit



$$V_L + V_R + V_C = E(t)$$

$$L \frac{dI}{dt} + R \cdot I + \frac{1}{C} Q = E(t)$$

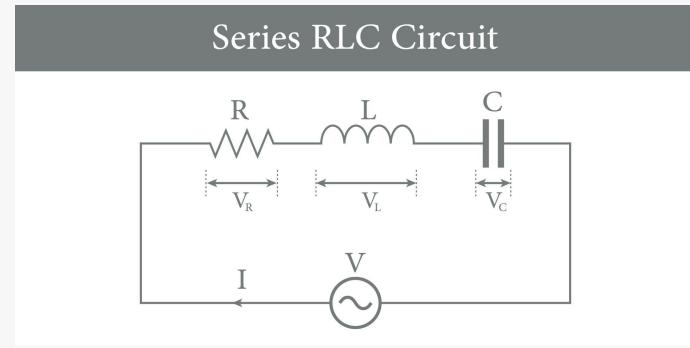
# Differenciálegyenlet

Probléma: Két ismeretlenünk van ( $I$  és  $Q$ ).

$$V_L + V_R + V_C = E(t)$$

$$L \frac{dI}{dt} + R \cdot I + \frac{1}{C} Q = E(t)$$

$$I = \frac{dQ}{dt}, \quad \frac{dI}{dt} = \frac{d^2Q}{dt^2}$$



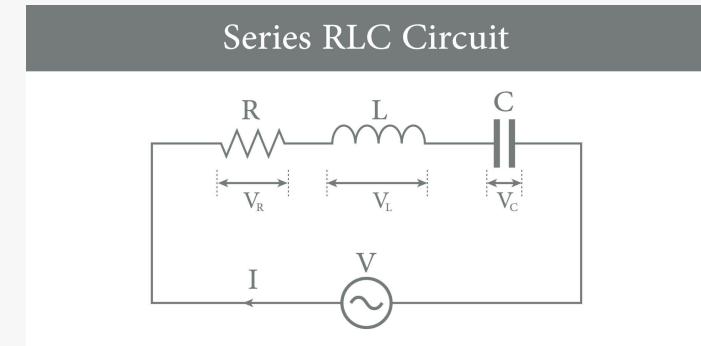
$$L \frac{d^2Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C} Q = E(t)$$

# A Rendszer Saját Viselkedése

$$L \frac{d^2Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C} Q = E(t)$$

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{LC} Q = \frac{E(t)}{L}$$

$$\alpha = \frac{R}{2L}, \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$



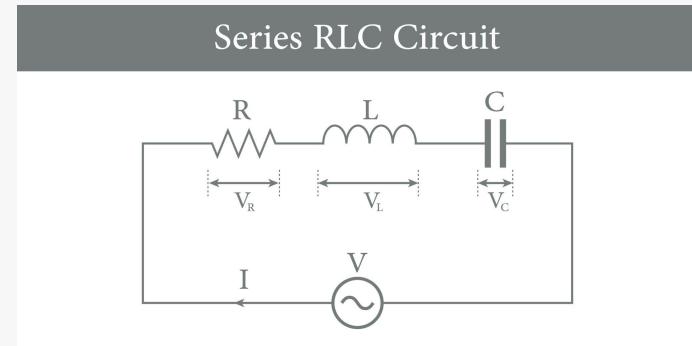
$$\frac{d^2Q}{dt^2} + 2\alpha \frac{dQ}{dt} + \omega_0^2 Q = f(t)$$

# Homogén Egyenlet

- $E(t) = 0 \Rightarrow$  homogén egyenlet
- karakterisztikus egyenlet (Laplace tr.)

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + 2\alpha \frac{dQ}{dt} + \omega_0^2 Q = 0$$

$$s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2 = 0$$



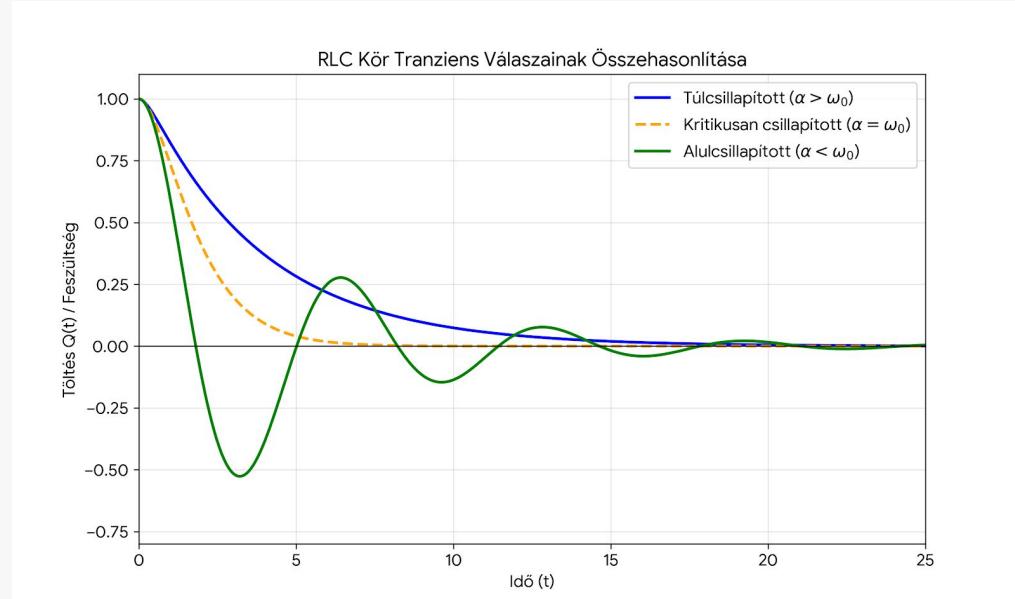
$$s_{1,2} = \frac{-2\alpha \pm \sqrt{4\alpha^2 - 4\omega_0^2}}{2}$$

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

# A Három Csillapítási Eset

1. **Túlcsillapított**
  - Matek: Két valós, negatív gyök.
  - Fizika: Nagy ellenállás (R). A rendszer lassan, "lustán" kúszik vissza egyensúlyba. Nincs rezgés.
2. **Kritikusan csillapított**
  - Matek: Egy valós, kétszeres gyök.
  - Fizika: A határhelyzet. A lehető leggyorsabb beállás tűllendülés nélkül.
3. **Alulcsillapított**
  - Matek: Komplex konjugált gyökpárok.
  - Fizika: Kis ellenállás. A rendszer "tűllendül" és oszcillálva, fokozatosan halkul el.

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

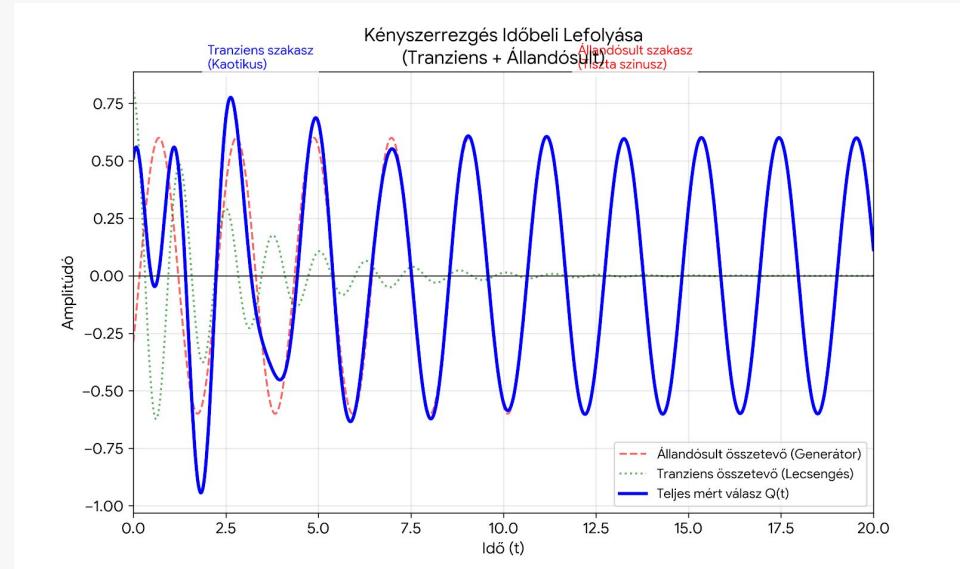


# Inhomogén Egyenlet

- $E(t)$  - váltóáram, szinuszos jel

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + 2\alpha \frac{dQ}{dt} + \omega_0^2 Q = \frac{E_0}{L} \sin(\omega t)$$

$$Q(t) = Q_h(t) + Q_p(t)$$

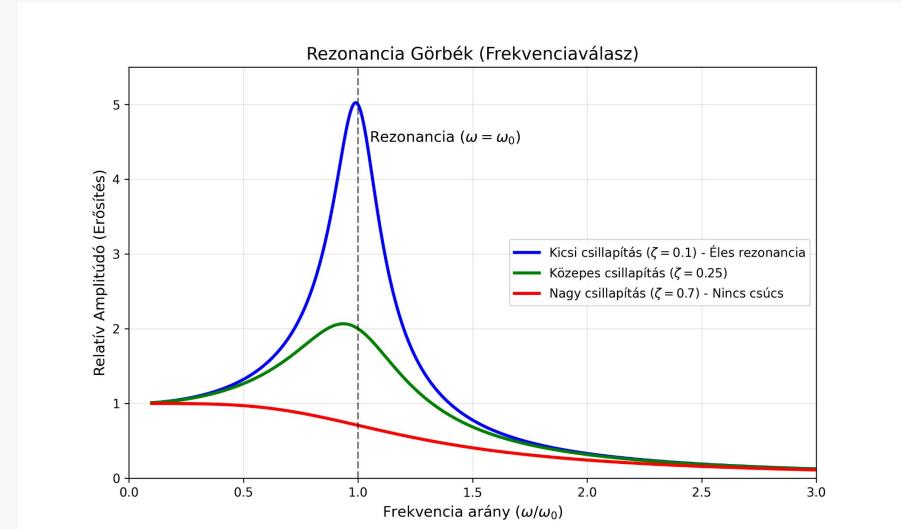


# Frekvenciaválasz és Rezonancia

- A külső gerjesztés frekvenciája megközelíti a sajátfrekvenciát.
- A csúcsos görbe a kis ellenállás (nagy veszély/nagy szelektivitás), a lapos görbe a nagy ellenállás.

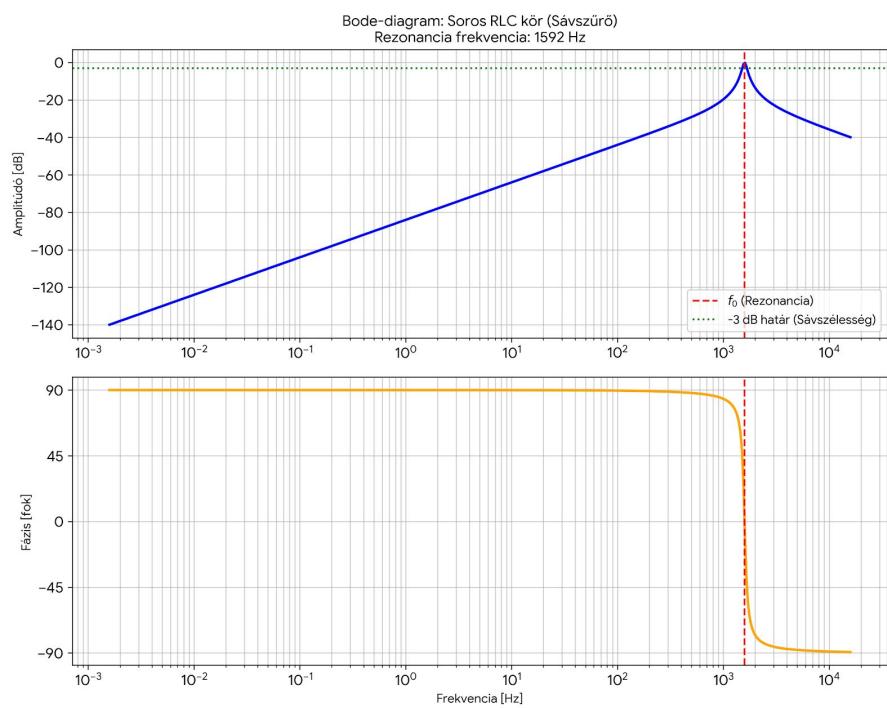
$$\omega \approx \omega_0$$

$$A(\omega) = \frac{F_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\alpha\omega)^2}}$$



# Bode-diagram

- **Felül (Amplitúdó):** A vízszintes tengely logaritmikus (frekvencia), a függőleges decibelben (dB) van. A görbe közepén van egy "púp" (ez a rezonancia).
- **Alul (Fázis):** Hogyan késik vagy siet a jel. (Rezonanciánál fordul át a fázis).

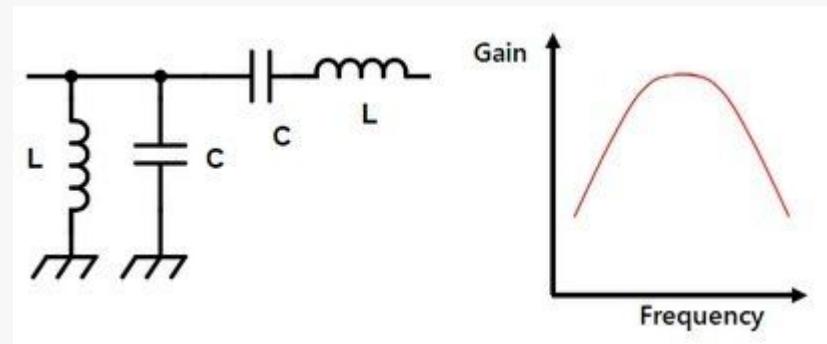


# Alkalmazás: A Rádió Hangolása

## A Hangolás menete:

- A gomb tekerésével változtatjuk a **C** kapacitást.
- Ezzel eltoljuk a sajátfrekvenciát
- Sávszűrés

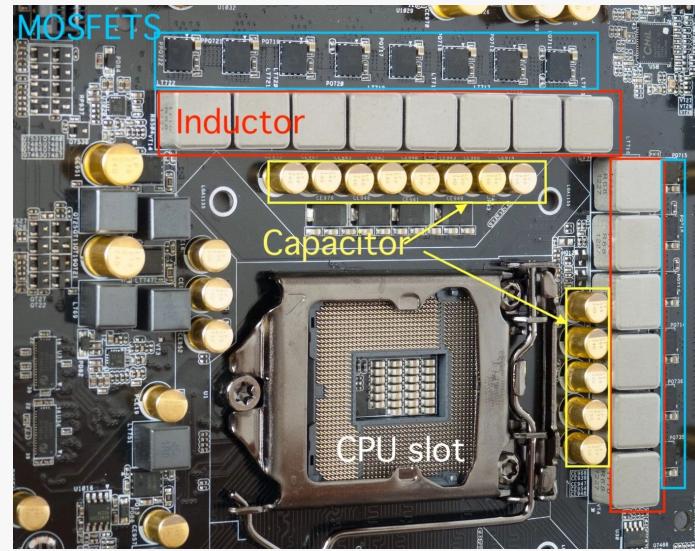
$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{L \cdot C(t)}}$$



# Alkalmazás: Feszültségszabályozás

Hogyan kap áramot a processzor?

- Bemenet: 12V (Szaggatott négyszögel)
- Kimenet: 1.2V (Sima egyenfeszültség)

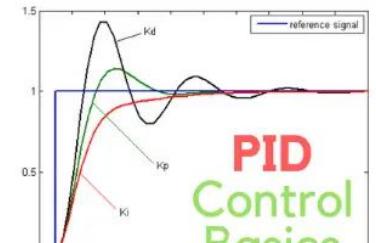
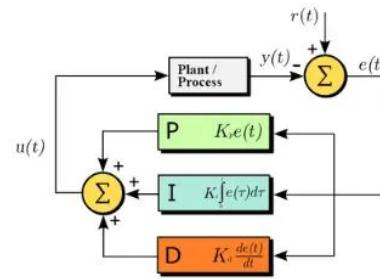


# Alkalmazás: Analóg PID szabályozás

$$U_C(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt \quad \Rightarrow \quad \text{A töltés felhalmozása}$$

$$U_L(t) = L \frac{di(t)}{dt} \quad \Rightarrow \quad \text{Reakció a változás}$$

**What is PID Control?**



**PID Control Basics**



**Electrical 4 U**

$$u(t) = K_p \cdot e(t) + K_i \int_0^t e(\tau) d\tau + K_d \frac{de(t)}{dt}$$

Köszönjük a  
figyelmet!

Kérdések?