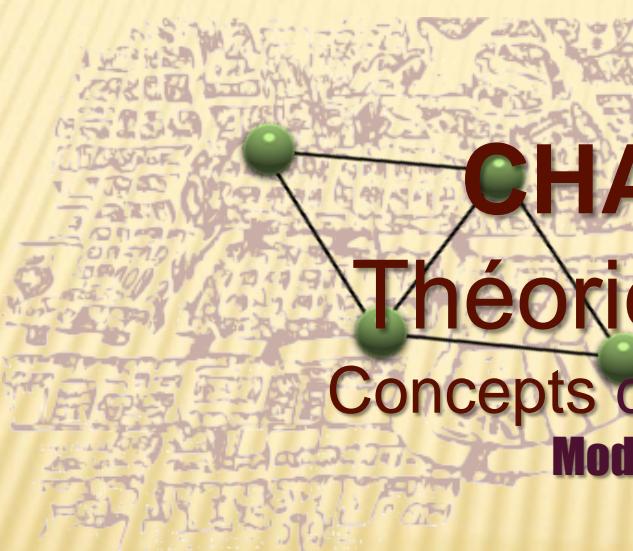


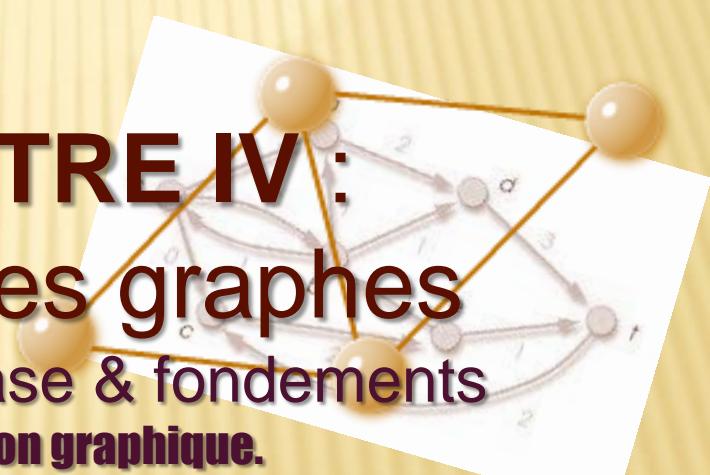
Université de Béchar
Laboratoire des Études Énergétiques en Zones Arides
Équipe Modélisation & Simulation des Systèmes



CHAPITRE IV :

Théorie des graphes

Concepts de base & fondements
Modélisation graphique.



Les sept ponts de Konigsberg

Cours réalisé par : Pr. TAMALI Mohammed,

<http://www.univ-bechar.dz/mtamali>

Université de Béchar | FS&T
(ENERGARID Lab./SimulIA)



Présentation

L'Université de Béchar est née en 1986 en tant que instituts Nationaux de l'enseignement Supérieur (INES), en 1992, elle se transforme en Centre Universitaire et le 07/01/2007, elle a été déclarée officiellement comme université. Depuis, beaucoup d'équipes de recherche ont vues le jour. En 2011, Le laboratoire d'Études des Systèmes ENERGétique en Zones ARIDes est animé par un groupe de chercheurs jeunes et bien motivés (7 équipes de recherche) pour résoudre les problèmes réel touchant les zones arides, l'équipe SimulIA, est une partie intégrante. Le plan de charge de SimulIA concerne les études et applications de la modélisation et simulation des systèmes (application aux zones arides).

Axes de recherche :

- Énergie & Environnement
- Application de la thermique dans les zones arides
- Économie de l'énergie.
- Cartographie et mise en valeur des ressources dans les zones arides.
- Pour SimulIA, Constituer une base de codes de calcul pour la modélisation et la simulation accessible en ligne.
- Site Internet du laboratoire : www2.univ-bechar.dz/energarid

Plan

Généralités & Présentations

Définitions & Bases

Le point de vue étymologique

Cadre d'utilisation

Modélisation

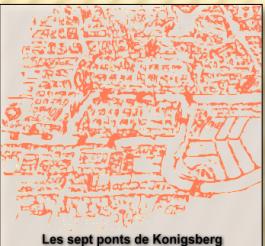
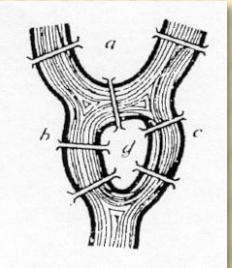
Conclusions

Références



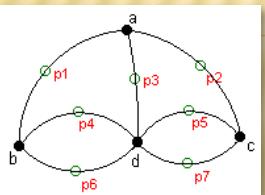
Généralités & Présentations

On fait généralement remonter la naissance de la Théorie des Graphes au célèbre problème des ponts de Königsberg (aujourd'hui Kaliningrad) qui passionnait la bourgeoisie prussienne du XVIIIème siècle : La Ville de Königsberg, sur la Pregel, était pourvue de 7 ponts et la question était de savoir si l'on pouvait imaginer une promenade dans la ville qui emprunterait chacun des 7 ponts une fois et une seule pour revenir à son point de départ.

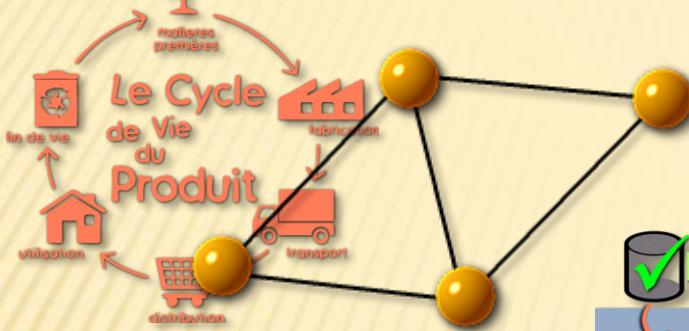


La théorie des graphes s'est alors développée et intégrée dans diverses disciplines telles que la chimie, la biologie, les sciences sociales et sans oublier les réseaux d'ordinateurs et de télécommunication. Depuis le début du XXe siècle, elle constitue une branche à part entière des mathématiques, grâce aux travaux de König, Menger, Cayley puis de Berge et d'Erdős [1].

De manière générale, un graphe permet de représenter la structure, les connexions d'un ensemble complexe dit 'système' (S) en exprimant les relations entre ses éléments tel que les réseaux de communication, les réseaux routiers, interaction de diverses espèces animales, circuits électriques, en programmation et le plus intéressant son application aux sciences de l'Internet.



Définitions & Bases (1)



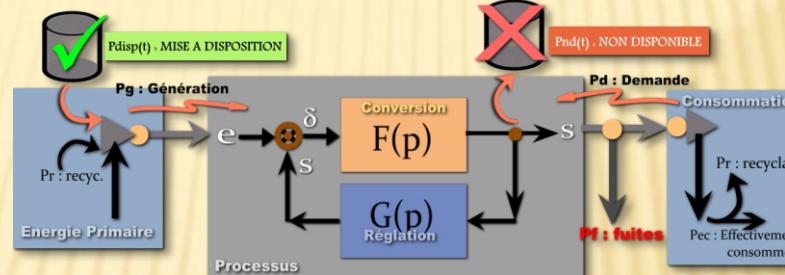
Un graphe simple noté G est un couple formé de deux ensembles liés par une application mathématique. L'un d'eux est l'ensemble $X=\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$ dont les éléments sont appelés '**sommets**', l'autre est l'ensemble $A=\{a_1,a_2,\dots,a_m\}$, partie de l'ensemble $P^2(X)$ des parties à deux éléments (couple de sommets) de X , dont les éléments sont appelé '**les arêtes**'. On notera cette relation $G=(X,A)$.

Lorsque $a=\{x,y\}\in A$, on dit que a est l'arête de G d'extrémités x et y , ou que a joint x et y , ou que a passe par x et y . Les sommets x et y sont dits **adjacents** dans G .

Un **multi-graphe** $G = (X,A,f)$ est déterminé par:

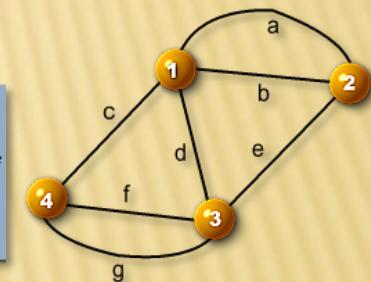
- L'ensemble X des sommets
- L'ensemble A , cette fois abstrait
- L'application $f : A \rightarrow P^2(X)$

un multi-graphe avec boucles peut comprendre des arêtes multiples entre deux sommets donnés ainsi que des boucles multiples en un sommet.



Exemple de cas où le modèle graphe est recommandé

Les graphes constituent donc une méthode de pensée qui permet de modéliser une grande variété de problèmes en se ramenant à l'étude de sommets et d'arcs. Les derniers travaux en théorie des graphes sont souvent effectués par des informaticiens, du fait de l'importance que revêt l'aspect algorithmique.

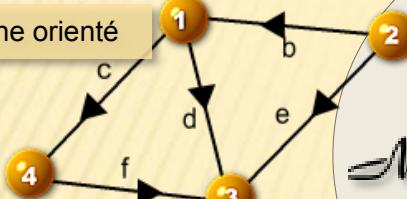


Dans le cadre général, un graphe est dit non orienté si il ne contient pas de sens sur les arêtes.

Le nombre de sommets présents dans un graphe est l'ordre du graphe. **Le degré** d'un sommet x , noté $d(x)$ est le nombre d'arêtes dont ce sommet est une extrémité.

Définitions & Bases

Exemple graphe orienté



Un **graphe orienté** G_n est formé de deux ensembles: un ensemble $X=\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$ dont les éléments sont appelés sommets, et un ensemble $A=\{a_1,a_2\dots,a.n\}$, partie du produit cartésien $X\times X$, dont les éléments sont appelés arcs. On notera $G_n=(X,A)$.

Si $a=(x,y)$ est un arc du graphe G , x est l'**extrémité initiale** de a et y l'**extrémité finale** de a .

À tout graphe orienté $G_n(X,A)$, on associe le graphe simple $G(X,B)$ où :

$$\{x,y\} \in B \neq ((x,y) \in A \text{ ou } (y,x) \in A))$$

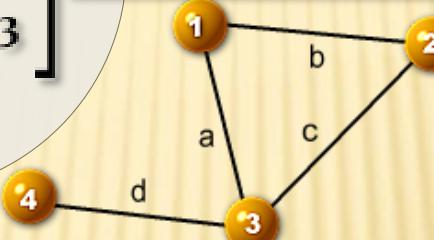
On appelle **graphe complet** un graphe dont tous les sommets sont adjacents.

Un graphe dont les arêtes sont caractérisées par une quantité est dit **valué**.

Un **sous-graphe** d'un graphe G est un graphe G' composé de certains sommets de G , ainsi que toutes les arêtes qui relient ces sommets.

La **matrice associée** à un graphe d'ordre n dont les sommets sont numérotés de 1 à n est une matrice symétrique, de dimension $n\times n$, où le terme à l'intersection de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne vaut k , nombre d'arêtes reliant i et j . C'est encore la matrice de liaison \mathcal{M} .

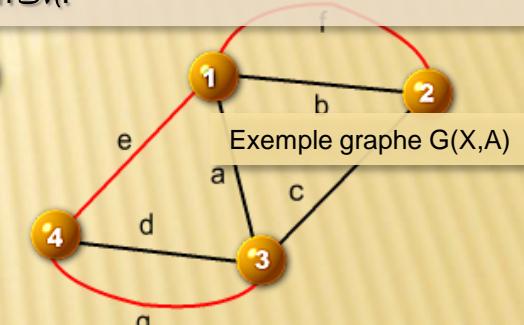
$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$



Sous-graphe G' de $G(X,A)$

Une **chaîne** est une liste ordonnée de sommets telle que chaque sommet de la liste soit adjacent au suivant. La longueur d'une chaîne est le nombre d'arêtes qui la composent.

La **distance** entre deux sommets est la plus courte longueur des chaînes qui les relient. Le **diamètre** d'un graphe est la plus grande distance entre deux sommets.



Soit x un sommet d'un graphe orienté. On note $d^+(x)$ le nombre d'arcs ayant x comme extrémité initiale, et $d^-(x)$ le nombre d'arcs ayant x comme extrémité finale. Ainsi, on a :

$$d(x)=d^+(x)+d^-(x)$$

La matrice des distances du graphe G est la matrice

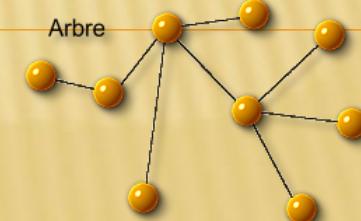
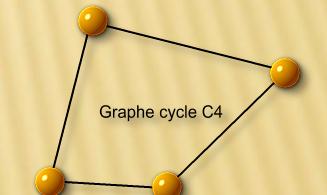
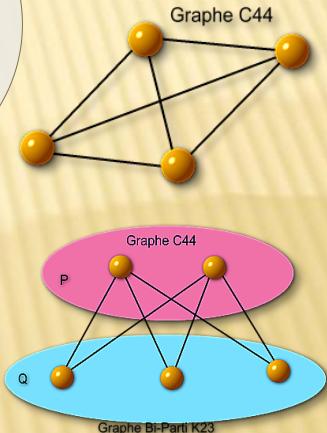
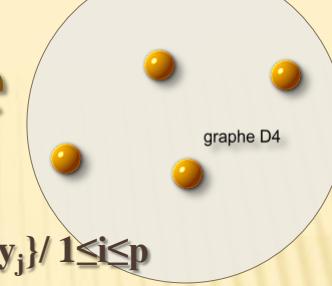
$$D=\{d(i,j)=(d(xi,xj))\}.$$

Le point de vue étymologique

- Le graphe **discret** d'ordre n , $D_n = (X, \emptyset)$.
- Le graphe **complet** d'ordre n , K_{nn} où $X = \{1, 2, \dots, n\}$ et $A = P^2(X)$
- Le graphe **biparti-complet** K_{pq} où $X = \{x_1, x_2, \dots, x_p, y_1, y_2, \dots, y_q\}$ et $A = f(x_i, y_j) / 1 \leq i \leq p$ et $1 \leq j \leq q\}$.
- Le **cycle** C_{nn} où $X = \{1, 2, \dots, n\}$ et $A = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \dots, \{n-1, n\}, \{n, 1\}\}$.
- Un graphe **valué** est un graphe orienté $G_n(X, A)$, muni d'une fonction **C** appelée fonction de coût.
- Le **coût d'un chemin** est la somme des coûts des arcs de ce chemin. On peut définir la matrice des coûts du graphe, c'est la matrice $C = \{c_{i,j}\}$ où : $c_{i,j}$ est le coût de l'arête (i, j) .
- Un graphe est dit **simplement connexe** si pour tout couple $(i, j) \in A$, il y a toujours un chemin de i vers j .
- Un **arbre** est un sous-graphe simple connexe ne possédant pas de cycle simple et construit à base de tous les nœuds du graphe d'origine.
- La **matrice d'incidence** A d'un graphe orienté G_n est définie par :

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si l'arête } j \text{ est incidente sur le noeud } i \\ -1 & \text{si l'arête } j \text{ est sortante du noeud } i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

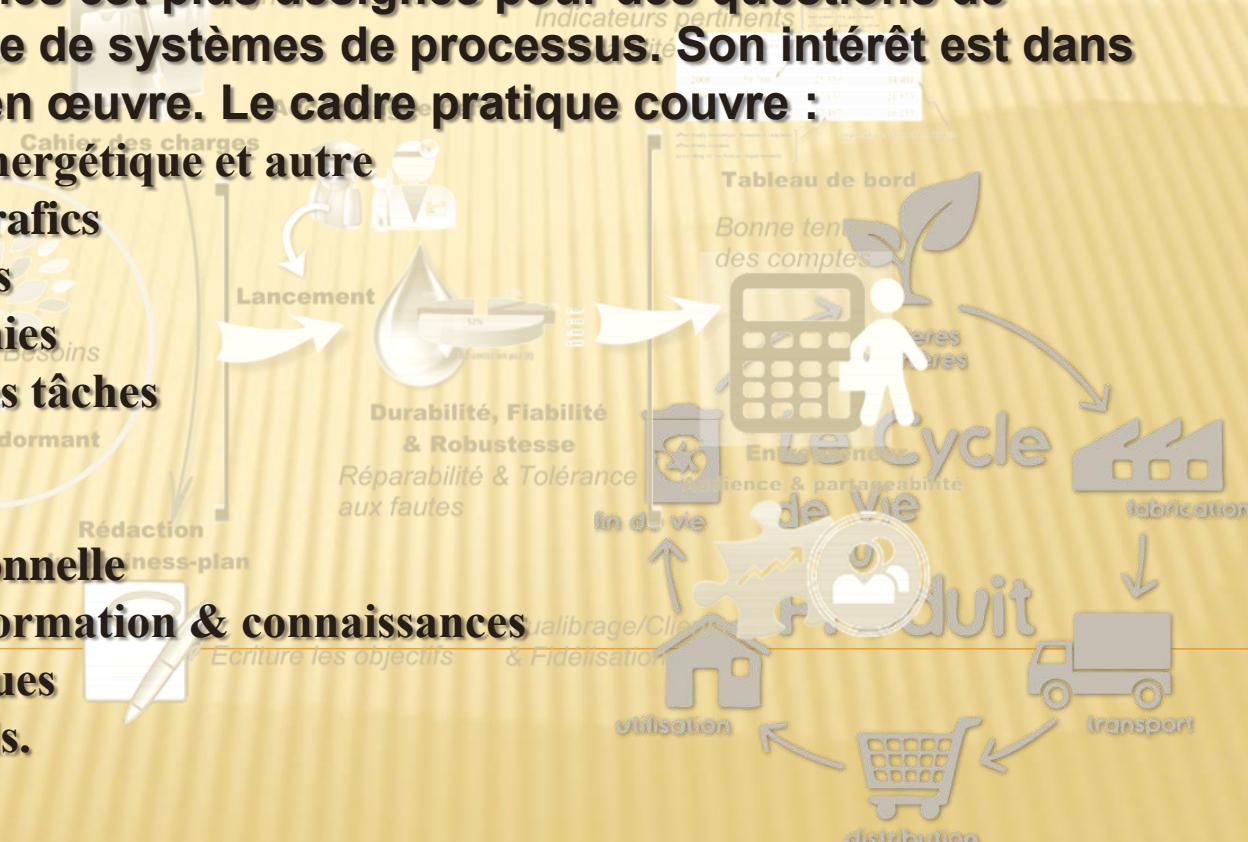
- **Valeur d'une chaîne**: la somme des valeurs des arêtes (arcs) d'une chaîne d'un graphe **valué**.



Cadres d'utilisation

La topologie des graphes est plus désignée pour des questions de modélisation graphique de systèmes de processus. Son intérêt est dans sa simplicité de mise en œuvre. Le cadre pratique couvre :

- Gestion des bilans énergétique et autre
- Gestion des flux et trafics
- Gestion des échanges
- Gestion des hiérarchies
- Ordonnancement des tâches
- Planification
- Projection
- Organisation fonctionnelle
- Traitements de l'information & connaissances
- Systèmes automatiques
- Systèmes relationnels.
- ...



Modélisation par la topologie des graphes



Le qualificatif '**un robot marcheur**' veut dire quoi?

Ensemble matériel pouvant se déplacer d'un point A vers un autre B. *Marcher* c'est la capacité du déplacement. La marche nécessite l'existence de **membres articulés** dont la fonction est d'aider leur support à marcher.

Les articulations désigne le noeuds alors que les membres, les arêtes. L'adaptation des arêtes par rapport aux sommets est modélisable par un **graphe G(X,A)**.

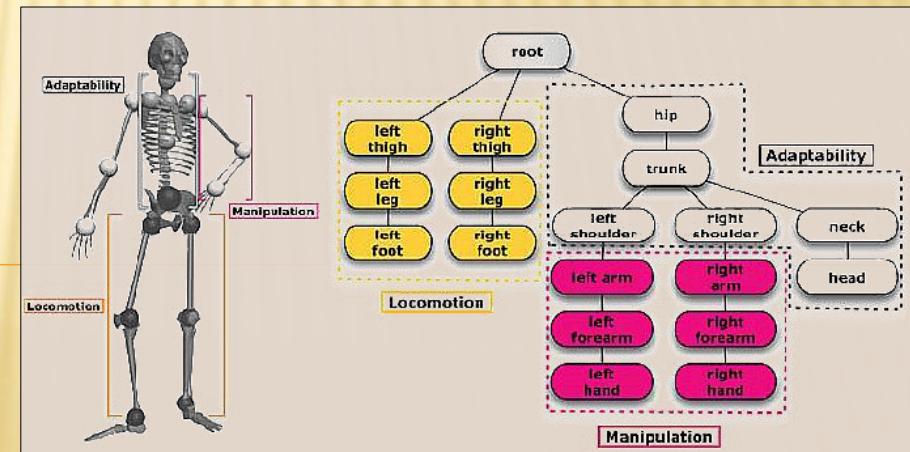
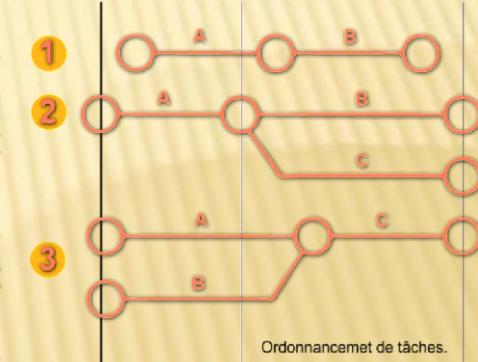
Les caractéristiques relationnelles et fonctionnelles sont mises en évidence.

La planification d'un projet intervient après établissement des plans pour se mettre à l'exécution de l'objet du projet.

C'est en ce moment que les termes se clarifient en fixant les limites des contrats, des budgets, des plannings, du staff, des notes d'organisation, des structures logistiques et d'infrastructures. Les cahiers des charges, moraux, financiers et techniques sont édités.

Pour se faire, la théorie des graphes est recommandées.

Les diagrammes GANT et PERT sont les outils par excellence, utilisés. Les gains d'une telle modélisation à stratégie graphique est le gain en temps et coût.



Conclusions

Pour entreprendre des actions sûres et avec impact réel, la méthodologie est d'une grande importance. C'est, en d'autres termes, ce qui justifie le prix payé avant d'atteindre son but. Nous en tant que créations, les systèmes qui nous entourent, recèlent de beaucoup de surprises. L'adaptation d'une stratégie d'observation nous permet de délimiter la zone appropriée pour entamer son étude et la région équivalente au domaine de définition de notre système.

Juger c'est la dernière action mais appréhender en est la première. Une amélioration, une évolution d'un système donné, ne sont acceptable que si l'on a, à priori, bien collecté toutes les informations relatives à la composition et constitution, au fonctionnement et à la dépendance vis-à-vis des autres systèmes adjacents.

Le coût encourut si l'erreur est commise pourrait être fatale, pas seulement pour le système en question mais aussi pour tout les systèmes en relation directe ou indirecte.

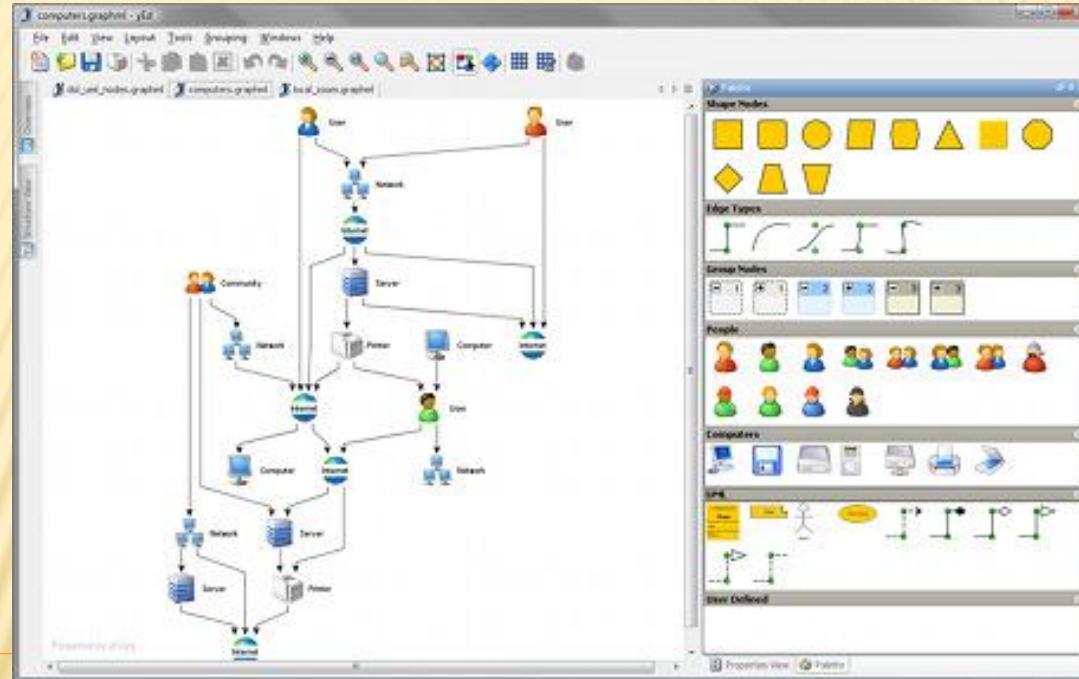
Garder l'équilibre universelle est une affaire primordiale. L'observation scientifique, la modélisation et la simulation sont des outils de manœuvres très importants.

Leur optimisation reste pour toujours une question de possibilités offertes à l'opérateur pour améliorer selon son besoin sans enfreindre à l'équilibre des compositions et relations totales.

Les libertés à l'introduction d'une certaine mise à jour est toujours garantie, sauf nécessité de garantir la non interférence avec la sûreté des ensemble voisins.

Nous sommes interpellés par le besoin : ne cherchez jamais à en inventer !

Faites LA bonne Observation, décomposer, recomposer et valider une **Conception**



MERCI POUR VOTRE ATTENTION
Fin du quatrième chapitre

Références

- [1]- E.SIGWARD; 'Introduction à la théorie des graphes', e.sigward@ac-nancy-metz.fr
- [2]- L.-V. Bertalanfy, 'General System Theory', Edition MASSON, 1972.
- [3]- <http://intelligence-artificielle-robotique.weebly.com/planification-du-mouvement-pour-les-systegrevemes-anthropique.html> 09/11/2014 (0h10min).
- [4]- <http://www.yworks.com/>, 09/11/2014 (0h42).