Циклы динамической системы

Мироненко Фома 431

19.10.21

Утверждение. *Пусть задающая одномерную динамическую систему функция $f(x)$ непрерывна и динамическая система имеет цикл периода 2. Тогда динамическая система имеет неподвижную точку.*

Лемма. *Пусть задающая одномерную динамическую систему функция $f(x)$ непрерывна и динамическая система имеет цикл периода 2^k. Тогда динамическая система имеет циклы периодов 2^m где $m \in \overline{0 : k-1}$.*

Доказательство

Воспользуемся индукцией по k. В качестве базы уже имеется Утверждение. Пусть $k > 1$ и Лемма доказана для меньших степеней. У функции f есть цикл длины 2^k, то есть $\exists x_0 : \quad f^{2^k}(x_0) = x_0$. Рассмотрим функцию $f_1(x) = f^{2^{k-1}}(x)$. Она также непрерывна, и $f_1^2(x_0) = \left(f^{2^{k-1}}\right)^2(x_0) = f^{2^k}(x_0) = x_0$. Тогда по индукционному предположению $\exists x_1 : \quad f^{2^{k-1}}(x_1) = f_1(x_1) = x_1$. Таким образом, f имеет цикл длины 2^{k-1}, и по индукционному предположению, также и длины 2^m для всех $m \in \overline{0 : k-2}$.

Лемма доказана