Период нестационарной точки

Мироненко Фома 431

28.09.21

Лемма. *Пусть на множествах X, T задана непрерывная динамическая система $\{\psi^t\}$, и фазовое пространство X является хаусдорфовым. Тогда если периодическая точка $p \in X$ не является неподвижной, а отображение $\Psi_p(t) := \psi^t(p) : T \to X$ является непрерывным, то точка p имеет (не нулевой) период.*

Доказательство

Поскольку решение задачи Коши с начальными данными p продолжимо на всю вещественную полуось $\mathbb{R}_+$, не умаляя общности будем считать, что $T = \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$.

Покажем сначала, что точка $0 \in \Psi_p^{-1}\big(\{p\}\big)$ является изолированной точкой в этом множестве. Предположим, что это не так:

$$\text{Пусть } \forall \varepsilon > 0 \quad \exists t_\varepsilon \in (0, \varepsilon] : \Psi_p(t_\varepsilon) = p$$

Тогда для любого натурального $n \in \mathbb{N}$ выполнено:

$$\Psi_p(n \cdot t_\varepsilon) \ = \ \psi^{n \cdot t_\varepsilon}(p) \ = \ \Psi_p^n(t_\varepsilon) \ = \ p$$

Множество $\{n \cdot t_\varepsilon \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq \Psi_p^{-1}\big(\{p\}\big)$ образует ε-сеть в T. Вспомним теперь, что по условию p не является стационарной, что по определению означает существование точки $h \in (0, \infty)$ такой что

$$\Psi_p(h) \ = \ q \ \neq \ p$$

для каждого $k \in \mathbb{N}$ множество $\varepsilon(k) := \{n \cdot t_{\frac{1}{k}} \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq \Psi_p^{-1}\big(\{p\}\big)$ образует $\frac{1}{k}$-сеть, и найдётся точка $t_{(k)} \in \varepsilon(k)$ такая что $|t_{(k)} - h| < \frac{1}{k}$. Имеем:

$$t_{(k)} \xrightarrow{k \to \infty} h, \ \ \Psi_p\big(t_{(k)}\big) = p, \ \ \Psi_p(h) = q$$

Но это невозможно, так как у точек p, q существуют непересекающиеся окрестности $U(p) \cap V(q) = \emptyset$, а отображение Ψ_p непрерывно:

$$U(p) \ \ni \ p \ = \ \Psi_p\big(t_{(k)}\big) \xrightarrow{k \to \infty} \Psi_p(h) \ = \ q \ \in \ V(q) \quad \textbf{Противоречие}$$

Итак, доказано:

$$\exists \varepsilon > 0 \ : \ \forall t \in (0, \varepsilon] \ \ \Psi_p(t) \neq p \tag{1}$$

Конец доказательства не составляет никакого труда. Множество $\Psi_p^{-1}\big(\{p\}\big) \subseteq [0,\infty) = T$ является замкунтым как пробраз замкнутого множества под действием непрерывного отображения (одноточечные множества в Хаусдорфовых пространствах всегда замкнуты). По (1) оно содержит изолированную точку $\{0\}$. Тогда $\Psi_p^{-1}\big(\{p\}\big)\backslash\{0\}$ также замкнуто и, более того, непусто, так как p периодическая. Имеем:

$$\inf\Big\{t \in T, t > 0 \mid \psi^t(p) = p\Big\} \;=\; \inf\Big(\Psi_p^{-1}\big(\{p\}\big)\backslash\{0\}\Big) \;=$$

$$=\; \min\Big(\Psi_p^{-1}\big(\{p\}\big)\backslash\{0\}\Big) \;=\; t_0 \;\in\; \Psi_p^{-1}\big(\{p\}\big)\backslash\{0\} \;=$$

$$=\; \Big\{t \in T, t > 0 \mid \psi^t(p) = p\Big\}$$

Таким образом, доказано существование ненулевого минимального периода $t_0 > 0$.