Аппроксимация квадратного корня

Мироненко Фома 431

28.09.21

Для неотрицательного вещественного числа $c \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ рассмотрим последовательность чисел $y_n \in \mathbb{R}$, заданную рекуррентным соотношением:

$$y_n \;=\; \begin{cases} 1, & n = 0 \\ \frac{1}{2}\Big(y_{n-1} + \frac{c}{y_{n-1}}\Big), & n > 0 \end{cases} \tag{1}$$

Данная последовательность задаёт динамическую систему с дискретным временем $T = \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$, фазовым пространством $X = \mathbb{R}$ и правилом эволюции, задаваемым формулой (1).

Покажем, что данная последовательность аппроксимирует величину $\sqrt{c}$.

Лемма. *Для числа $c \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$, последовательность y_n, заданная рекуррентным соотношением (1) сходится к числу $\sqrt{c}$, и к числу $-\sqrt{c}$, если в формуле (1) положить $y_0 = -1$.*

Доказательство

Докажем Лемму для неортицательного числа c, и тогда доказательство для отрицательного числа получим, произведя замену $z_n := -y_n$. При $c = 0$ имеем $y_n = 2^{-n} \xrightarrow{n\to\infty} 0 = c$. Рассмотри случай $c > 0$. Пусть уже известно, что существует предел

$$\exists\, Y = \lim_{n\to\infty} y_n \neq 0 \tag{2}$$

Тогда переходя к пределу в (1), получаем

$$2Y = Y + \frac{c}{Y} \tag{3}$$

откуда и выводим искомое тождество $Y = \sqrt{c}$, поскольку очевидно, что все y_n неотрицательны. Остаётся доказать (2).

По индукции покажем, что при $n > 0$: $y_n \geqslant \sqrt{c}$, $\;y_n \searrow$, откуда следует существование предела.

$$y_1 \;=\; \frac{1}{2} + \frac{1}{2}c \;\geqslant\; \sqrt{c}$$

что верно поскольку $1 + c \geqslant 2\sqrt{c} \;\Leftrightarrow\; (1 - \sqrt{c})^2 \geqslant 0$.

$$y_n \;=\; \frac{1}{2} y_{n-1} + \frac{1}{2} \frac{c}{y_{n-1}} \quad \begin{cases} \leqslant\; \frac{1}{2} y_{n-1} + \frac{1}{2}\sqrt{c} \;\leqslant\; y_{n-1} \\ \geqslant\; \sqrt{c} \end{cases}$$

Верхние неравенства верны в силу индукционного предположения: $y_{n-1} \geqslant \sqrt{c}$. Нижнее неравенство верно так как

$$y_{n-1} + \frac{c}{y_{n-1}} \geqslant 2\sqrt{c} \;\Leftrightarrow\; y_{n-1}^2 - 2\sqrt{c} \cdot y_{n-1} + c \geqslant 0 \;\Leftrightarrow\; (y_{n-1} - \sqrt{c})^2 \geqslant 0$$

Таким образом, последовательность y_n является ограниченной снизу и невозрастающей; у неё существует предел (2) и он равняется $\sqrt{c}$ из (3).