

Méthodes avancées pour les systèmes non linéaires

Document réalisé sur base des notes du cours SMATM227
donné à l'Université de Namur par A. MAUROY



Par

• **MARVYN GULINA** • **ANTHONY HASTIR** •

Faculté des Sciences – Département de Mathématiques

Année académique 2016 – 2017



Contenu

Contenu	i
Listes	iii
Introduction : approche classique	1
Temps discret	1
Temps continu	1
1 Approche "opérationnelle"	3
1.1 Définition préliminaires	3
1.2 Opérateur de Perron-Frobenius (ou de transfert)	4
1.2.1 Définition	4
1.2.2 Linéarité	5
1.2.3 Exemple	6
1.2.4 Cas où $T \in \mathcal{C}^1$ et invertible	7
1.3 Opérateur de Koopman	7
1.3.1 Définition	7
1.3.2 Linéarité	7
1.3.3 Exemple	8
1.4 Relation entre les opérateurs de Perron-Frobenius et de Koopman	8
1.5 Passage en temps continu	9
1.5.1 Définitions des opérateurs P et U	9
1.5.2 Générateurs infinitésimaux	9
2 Mesure invariante	13
2.1 Définition	13
2.2 Caractérisation de la densité stationnaire	14
2.3 Isométrie	15
2.4 Unitarité des opérateurs P et U	16
2.5 Evolution de la densité pour T invertible	16
3 Théorie de l'ergodicité	17
3.1 Définitions	17
3.1.1 Exemples d'applications ergodiques	18
3.1.2 Quelques propriétés	18
3.2 Théorème de Birkhoff	19
3.3 Application mélangeante	19

4	Spectre et fonctions propres	21
4.1	Opérateur de Koopman	21
4.1.1	Temps discret	21
4.1.2	Temps continu	21
4.2	Opérateur de Perron-Frobenius	21
4.3	Unitarité de U	22
4.3.1	Temps discret	22
4.3.2	Temps continu	22
4.4	Cas d'une fonction constante	23
4.5	Cas d'un ensemble A invariant	23
5	Méthodes numériques	25

Listes

Définitions

Définition 0.1	— <i>Orbite</i>	1
Définition 1.1	— <i>σ-algèbre et espace mesurable</i>	3
Définition 1.2	— <i>Mesure et espace mesuré</i>	3
Définition 1.3	— <i>Densité</i>	4
Définition 1.4	— <i>Opérateur de transfert de Perron-Frobenius</i>	4
Définition 1.5	— <i>Opérateur de Koopman</i>	7
Définition 2.1	— <i>Mesure invariante</i>	13
Définition 3.1	— <i>Ensemble T-invariant</i>	17
Définition 3.2	— <i>Application ergodique</i>	17
Définition 3.3	— <i>Application mélangeante</i>	19

Théorèmes

Théorème 1.1	— <i>Linéarité de l'opérateur de Perron-Frobenius</i>	5
Théorème 1.2	— <i>Linéarité de l'opérateur de Koopman</i>	8
Théorème 1.3	— <i>Relation entre P et U</i>	8
Théorème 1.4	— <i>Relation entre L_P et L_U</i>	10
Théorème 1.5	— <i>Equation de continuité</i>	11
Théorème 2.1	— <i>Densité stationnaire</i>	14
Théorème 2.2	— <i>U est une isométrie</i>	15
Théorème 3.1	— <i>Théorème de Birkhoff</i>	19
Théorème 4.1	— <i>Egalité des spectres</i>	22

Figures

1.1	Représentation graphique de la définition de l'opérateur de Perron-Frobenius. L'aire hachurée sous les courbes définies par ρ et $P\rho$ sont égales.	5
1.2	Application logistique avec $\mu = 4$	6
1.3	Représentation graphique de la définition de l'opérateur de Koopman	7
2.1	L'application de Bernoulli est invariante pour la mesure de Lebesgue	13

Introduction : approche classique

Temps discret

Soit n le paramètre temporel discret et $T : X \rightarrow X$ une application régulière sur l'espace des états $X \subseteq \mathbb{R}^n$ définie par :

$$x[n] = T(x[n-1])$$

Comme $\text{Dom}(T) = \text{Im}(T)$, on peut itérer de manière bien définie l'action de T sur un point x_0 de X . On définit alors naturellement une orbite de la manière suivante :

Définition 0.1 (Orbite).

Soit $T : X \rightarrow X$ régulière. Une orbite de T est une suite de N points, notée $(x_i)_{i=0}^{N-1} \subset X$, construite de manière itérative à partir du point initial $x_0 \in X$:

$$x_{i+1} = T(x_i), \quad i \in \{0, \dots, N-2\} \quad (1)$$

où l'on a noté $x[n] \stackrel{\text{not}}{=} x_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$

La dimension de tels systèmes est bien souvent finie et, si ce n'était pas le cas, on réalise un maillage afin que ça soit le cas.

Temps continu

Lorsque le paramètre temporel devient continu, on doit faire face à une équation différentielle :

$$\dot{x} = F(x) \text{ où } x \in X = \mathbb{R}^n$$

On peut montrer que la trajectoire au départ de $x_0 \in \mathbb{R}^n$ s'écrit $x(t) = \varphi^t(x_0)$ où $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est le flot. La dimension de tels systèmes peut-être infinie.

Finalement, l'approche classique consiste à étudier la dynamique **locale** autour des points fixes des méthodes de linéarisation. Le but de ce cours sera donc de trouver des méthodes systématiques pour l'étude de la dynamique **globale**. Comme nous le verrons, le prix à payer sera l'utilisation d'espaces fonctionnels de dimension infinie.

Approche "opérationnelle"

L'idée de cette approche est d'introduire un espace fonctionnel \mathcal{F} de fonctions $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} et d'y étudier les orbites d'un opérateur linéaire $A : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ associé à l'application régulière T .

1.1 Définition préliminaires

Commençons par rappeler la notion d'espace mesurable à l'aide de la définition suivante :

Définition 1.1 (σ -algèbre et espace mesurable).

Soit X un ensemble. Une σ -**algèbre** est une classe \mathcal{A} de sous-ensembles de X telle que :

- ▷ $\emptyset \in \mathcal{A}$
- ▷ \mathcal{A} est stable par passage au complémentaire : $A \in \mathcal{A} \implies A^c \in \mathcal{A}$
- ▷ \mathcal{A} est stable par unions dénombrables : $(A_k)_{k \in \mathbb{N}_0} \subset \mathcal{A} \implies \bigcup_{k \in \mathbb{N}_0} A_k \in \mathcal{A}$

Le couple (X, \mathcal{A}) est appelé **espace mesurable**.

Enfin, si on considère une mesure, on aura un espace mesuré :

Définition 1.2 (Mesure et espace mesuré).

Soit (X, \mathcal{A}) , un espace mesurable. On appelle **mesure** une fonction $\mu : \mathcal{A} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ qui vérifie les propriétés suivantes :

- ▷ $\mu(\emptyset) = 0$
- ▷ μ est positive : $\forall A \in \mathcal{A} : \mu(A) \geq 0$
- ▷ μ est σ -additive : $\forall (A_k)_{k \in \mathbb{N}_0} \subset \mathcal{A}$ telle que $\forall i \neq j : A_i \cap A_j = \emptyset$:

$$\mu \left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}_0} A_k \right) = \sum_{k \in \mathbb{N}_0} \mu(A_k)$$

Le triplet (X, \mathcal{A}, μ) est appelé **espace mesuré**.

Notons que la propriété suivante découle du fait que T soit régulière :

$$\forall A \in \mathcal{A} : \mu(A) = 0 \implies \mu(T^{-1}(A)) = 0$$

Géométriquement, ceci traduit le fait que le graphe de T ne possède pas de "plateaux".

Pour terminer, la définition 1.3 nous rappelle les propriétés d'une densité.

Définition 1.3 (Densité).

Soient (X, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré et $\rho : X \rightarrow \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

On dit que ρ est une densité sur X si et seulement si :

$$\triangleright \rho \text{ est normalisée : } \|\rho\|_{\mathbb{L}_1} = \int_X \rho(x) \mu(dx) = 1$$

$$\triangleright \rho \text{ est positive : } \forall x \in X : \rho(x) \geq 0$$

L'ensemble des densités sur (X, \mathcal{A}, μ) est noté $D(X)$.

Notons que, pour une densité $\rho \in D(X)$, on peut définir une nouvelle mesure :

$$\mu_\rho(A) = \int_A \rho(x) \mu(dx) \quad (1.1)$$

Lorsque ce sera nécessaire, on pourra donc remplacer la mesure quelconque μ par la mesure de Lebesgue moyennant l'introduction de la densité associée.

1.2 Opérateur de Perron-Frobenius (ou de transfert)

1.2.1 Définition

L'idée de cette définition est de considérer une densité de conditions initiales et d'observer son évolution sous T .

Définition 1.4 (Opérateur de Perron-Frobenius).

Soient (X, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré, $T : X \rightarrow X$ régulière et $\rho \in D(X)$.

On définit P , l'opérateur de Perron-Frobenius, via la relation suivante :

$$\forall A \in \mathcal{A} : \int_{T^{-1}(A)} \rho(x) \mu(dx) = \int_A P\rho(x) \mu(dx) \quad (1.2)$$

En utilisant (1.1), on peut encore écrire (1.2) comme :

$$\forall A \in \mathcal{A} : \mu_\rho[T^{-1}(A)] = \mu_{P\rho}(A) \quad (1.3)$$

La figure 1.1 illustre la définition 1.4.

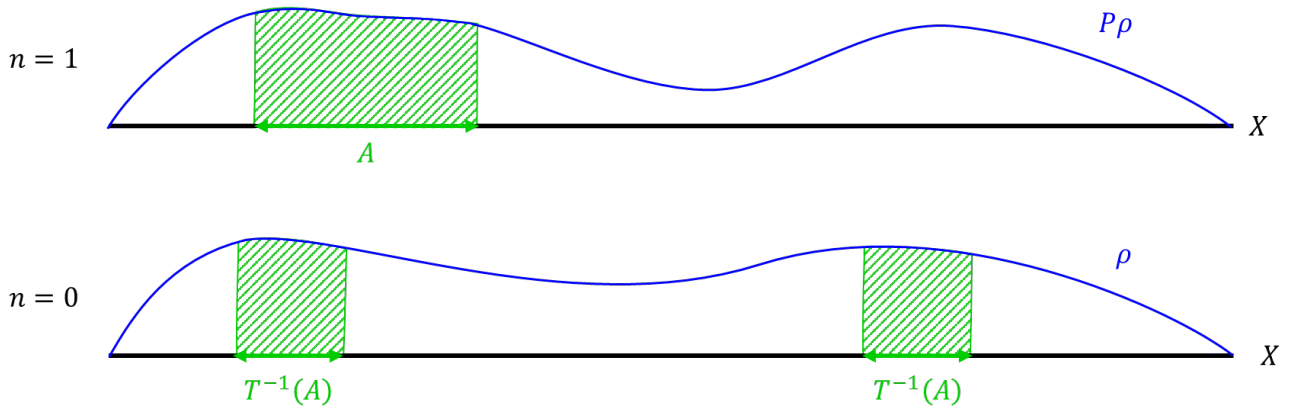


FIGURE 1.1 – Représentation graphique de la définition de l'opérateur de Perron-Frobenius. L'aire hachurée sous les courbes définies par ρ et $P\rho$ sont égales.

1.2.2 Linéarité

Montrons que P est un opérateur linéaire.

Théorème 1.1 (Linéarité de l'opérateur de Perron-Frobenius).

Soit l'opérateur de Perron-Frobenius P , tel que défini par l'équation (1.2). P est linéaire.



Preuve

Soit a_1, a_2 des réels et ρ_1, ρ_2 des densités. Pour tout $A \in \mathcal{A}$ il vient :

$$\begin{aligned}
 \int_A P(a_1\rho_1(x) + a_2\rho_2(x)) \mu(dx) &\stackrel{(1.2)}{=} \int_{T^{-1}(A)} a_1\rho_1(x) + a_2\rho_2(x) \mu(dx) \\
 &= a_1 \int_{T^{-1}(A)} \rho_1(x) \mu(dx) + a_2 \int_{T^{-1}(A)} \rho_2(x) \mu(dx) \\
 &\stackrel{(1.2)}{=} a_1 \int_A P\rho_1(x) \mu(dx) + a_2 \int_A P\rho_2(x) \mu(dx) \\
 &= \int_A a_1 P\rho_1(x) + a_2 P\rho_2(x) \mu(dx)
 \end{aligned}$$

Le résultat étant valable pour tout $A \in \mathcal{A}$, on peut égaler les intégrandes :

$$P(a_1\rho_1(x) + a_2\rho_2(x)) = a_1 P\rho_1(x) + a_2 P\rho_2(x)$$

d'où la thèse. □

1.2.3 Exemple

Dans le cas de l'application logistique, on considère $X = [0, 1]$ et $T(x) = 4x(1 - x)$. Avec la mesure de Lebesgue, l'équation (1.2) donne, pour $x \in [0, 1]$:

$$\int_{T^{-1}([0, x])} \rho(s) ds \stackrel{(1.2)}{=} \int_0^x P\rho(s) ds$$

On dérive membre à membre par rapport à x pour obtenir :

$$\frac{d}{dx} \int_{T^{-1}([0, x])} \rho(s) ds = P\rho(x)$$

Compte tenu de la figure 1.2, l'équation ci-dessus s'écrit :

$$\begin{aligned} P\rho(x) &= \frac{d}{dx} \left(\int_0^{x_-} \rho(s) ds + \int_{x_+}^1 \rho(s) ds \right) \\ &= \frac{dx_-}{dx} \rho(x_-(x)) - 0 + 0 - \frac{dx_+}{dx} \rho(x_+(x)) \\ &= \frac{1}{4\sqrt{1-x}} [\rho(x_-(x)) + \rho(x_+(x))] \end{aligned}$$

avec : $x_{\pm}(x) = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{1-x}}{2}$. Numériquement, on a vu que l'application répétée de l'opérateur de Perron-Frobenius sur $\rho_0 \equiv 1$ converge vers $\rho^*(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}}$.

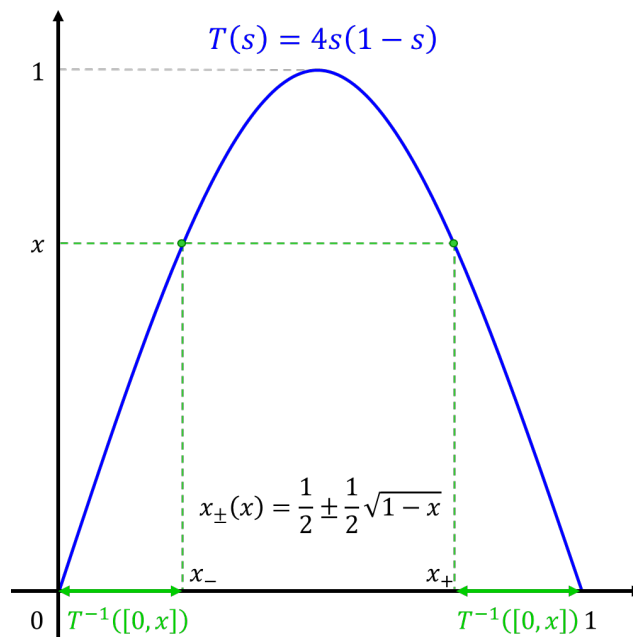


FIGURE 1.2 – Application logistique avec $\mu = 4$

1.2.4 Cas où $T \in \mathcal{C}^1$ et invertible

Si $T \in \mathcal{C}^1$ et T est invertible, on peut poser $y = T(x)$ et l'équation (1.2) devient :

$$\forall A \in \mathcal{A} : \int_A P \rho(x) \mu(dx) \stackrel{(1.2)}{=} \int_{T^{-1}(A)} \rho(x) \mu(dx) = \int_A \rho(T^{-1}(y)) |J_{T^{-1}}(y)| \mu(dy)$$

où $|J_{T^{-1}}(y)|$ est le déterminant de la matrice Jacobienne pour T^{-1} . Le premier et le dernier membre étant égaux pour tout $A \in \mathcal{A}$, on peut égaliser les intégrandes pour obtenir une définition plus simple dans le cas où $T \in \mathcal{C}^1$ est invertible :

$$P\rho(x) = |J_{T^{-1}}(x)| \rho(T^{-1}(x)) \quad (1.4)$$

1.3 Opérateur de Koopman

1.3.1 Définition

Définition 1.5 (Opérateur de Koopman (ou de composition)).

Soit (X, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré, $T : X \rightarrow X$ régulière et $f \in \mathbb{L}_\infty : X \rightarrow \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . On définit U , l'opérateur de Koopman via la relation suivante :

$$\forall x \in X : (Uf)(x) = (f \circ T)(x) \quad (1.5)$$

La fonction f considérée est appelée "observable". L'opérateur de Koopman capture son évolution le long d'une trajectoire. On remarque que P effectue une propagation de la densité vers l'avant via T alors que U correspond à une propagation de l'observable vers l'arrière avec T^{-1} .

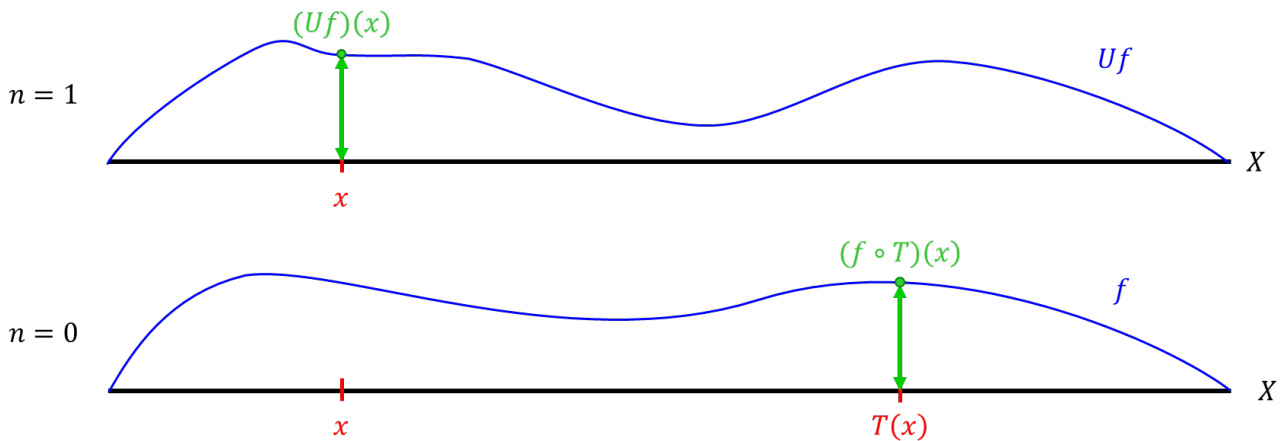


FIGURE 1.3 – Représentation graphique de la définition de l'opérateur de Koopman

1.3.2 Linéarité

Montrons que U est un opérateur linéaire.

Théorème 1.2 (Linéarité de l'opérateur de Koopman).

Soit l'opérateur de Koopman U , tel que défini par l'équation (1.5).
 U est linéaire.



Preuve

Soient a_1, a_2 des réels et f_1, f_2 des fonctions dans \mathbb{L}_∞ associant un réel (ou un complexe) à chaque état $x \in X$. On a alors la chaîne d'égalités suivante :

$$U(a_1 f_1 + a_2 f_2) \stackrel{(1.5)}{=} (a_1 f_1 + a_2 f_2) \circ T = a_1 f_1 \circ T + a_2 f_2 \circ T \stackrel{(1.5)}{=} a_1 U f_1 + a_2 U f_2$$

□

1.3.3 Exemple

Dans le cas de l'application logistique, on peut observer dans les simulations numériques qu'en régime chaotique ($\mu = 4$), Uf a un comportement oscillatoire alors que dans un régime périodique ($\mu = 3.6$), Uf rentre dans un cycle limite oscillant.

1.4 Relation entre les opérateurs de Perron-Frobenius et de Koopman

Les deux opérateurs P et U sont conjugués l'un de l'autre (ils sont adjoints dans un espace de Hilbert).

Théorème 1.3 (Relation entre P et U).

Soit (X, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré. Considérons $\rho \in D(X)$ une densité et $f \in \mathbb{L}_\infty : X \rightarrow \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . Définissons le produit :

$$\langle f, \rho \rangle = \int_X f(x) \rho(x) \mu(dx) \quad (1.6)$$

Alors on a la relation de dualité suivante :

$$\langle f, P\rho \rangle = \langle Uf, \rho \rangle \quad (1.7)$$

Bien que ce résultat soit admis, nous l'illustrons dans le cas où $f \equiv \chi_A$ pour tout $A \in \mathcal{A}$:

$$\begin{aligned}
 \langle f, P\rho \rangle &\stackrel{(1.6)}{=} \int_X \chi_A(x) P\rho(x) \mu(dx) \\
 &= \int_A P\rho(x) \mu(dx) \\
 &\stackrel{(1.2)}{=} \int_{T^{-1}(A)} \rho(x) \mu(dx) \\
 &= \int_X \chi_{T^{-1}(A)}(x) \rho(x) \mu(dx) \\
 &= \int_X (\chi_A \circ T)(x) \rho(x) \mu(dx) \\
 &\stackrel{(1.5)}{=} \int_X (U\chi_A)(x) \rho(x) \mu(dx) \\
 &\stackrel{(1.6)}{=} \langle Uf, \rho \rangle
 \end{aligned}$$

Le résultat découle en fait du lemme d'approximation par fonctions étagées.

1.5 Passage en temps continu

1.5.1 Définitions des opérateurs P et U

En temps continu on avait $\dot{x} = F(x)$ dont la solution était donnée par le flot : $x(t) = \varphi^t(x_0)$ où x_0 est la condition initiale. On comprend que l'on doit remplacer T par φ^t . De la sorte, on obtient un semi-groupe d'opérateurs et la définition de P devient :

$$\forall A \in \mathcal{A} : \int_{\varphi^{-t}(A)} \rho(x) \mu(dx) = \int_A P^t \rho(x) \mu(dx) \quad (1.8)$$

Celle de U , quant à elle :

$$\forall x \in X : (U^t f)(x) = (f \circ \varphi^t)(x) \quad (1.9)$$

1.5.2 Générateurs infinitésimaux

Voyons comment exploiter $F(x)$. Définissons le générateur infinitésimal de U , appliqué à l'observable $f \in C^1(X)$ (à support compact) :

$$L_U f = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{U^t f - f}{t}$$

Nous pouvons écrire :

$$L_U f = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(f \circ \varphi^t)(x) - (f \circ \varphi^0)(x)}{t}$$

Par le théorème de la valeur moyenne, $\exists \theta \in [0, 1]$ tel que :

$$\begin{aligned}
 L_U f &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{d}{dt} (f \circ \varphi^{t'}) (x) \Big|_{t'=\theta t} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \vec{\nabla} f \cdot (\varphi^{\theta t}) \cdot \frac{d}{dt} (\varphi^t)(x) \Big|_{t'=\theta t} \\
 &= \vec{\nabla} f \cdot \vec{F}
 \end{aligned}$$

On a donc que le générateur infinitésimal de l'opérateur de Koopman vérifie :

$$L_U f = \vec{\nabla} f \cdot \vec{F} \quad (1.10)$$

Nous admettons la proposition suivante :

Théorème 1.4 (Relation entre L_P et L_U).

Soit (X, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré. Considérons $\rho \in \mathbb{L}_1$ une densité continue dérivable et $f \in \mathbb{L}_\infty : X \rightarrow \mathbb{R}$ un observable continu dérivable. Alors on a la relation de dualité suivante :

$$\langle f, L_P \rho \rangle = \langle L_U f, \rho \rangle \quad (1.11)$$

A partir de (1.10) et de ce résultat, on peut en déduire L_P :

$$\begin{aligned}
 \langle f, L_P \rho \rangle &\stackrel{(1.11)}{=} \langle L_U f, \rho \rangle \\
 &\stackrel{(1.10)}{=} \int_{\mathbb{R}^n} (\vec{F}(x) \cdot \vec{\nabla} f(x)) \rho(x) dx \\
 &= \int_{\mathbb{R}^n} \vec{\nabla} \cdot (\rho(x) \vec{F}(x) f(x)) dx - \int_{\mathbb{R}^n} \vec{\nabla} \cdot (\rho(x) \vec{F}(x)) f(x) dx \\
 &\stackrel{(1.6)}{=} \langle f, -\vec{\nabla} \cdot (\vec{F} \rho) \rangle
 \end{aligned}$$

où le premier terme de la troisième ligne s'annule car $f \equiv 0$ sur la frontière (on suppose que f est à support compact). On a donc que le générateur infinitésimal de l'opérateur de Perron-Frobenius vérifie :

$$L_P \rho(x) = -\vec{\nabla} \cdot (\vec{F} \rho(x)) \quad (1.12)$$

Nous terminons ce chapitre sur une autre proposition admise.

Théorème 1.5 (Equation de continuité).

Soit (X, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré. Considérons $\rho \in C_1(X)$.

Si on définit $g(x, t) = P^t \rho(x)$, alors $g(x, t)$ doit satisfaire l'équation de continuité :

$$\frac{\partial g}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\vec{F} g(x, t)) = 0 \quad (1.13)$$

De même, considérons $f \in C_1(X)$. Si on définit $g(x, t) = U^t f(x)$, alors $g(x, t)$ doit satisfaire l'équation de continuité :

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \vec{F} \cdot \vec{\nabla} g(x, t)$$

Mesure invariante

Ce chapitre a pour but d'introduire la notion de mesure invariante et de voir comment se comportent les opérateurs introduits auparavant face à ce type de mesure.

2.1 Définition

Définition 2.1 (Mesure invariante).

Soient (X, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré et $T : X \rightarrow X$ une application régulière. T est μ -invariante si et seulement si :

$$\forall A \in \mathcal{A} : \mu(T^{-1}(A)) = \mu(A) \quad (2.1)$$

On doit considérer T^{-1} plutôt que T pour pouvoir tenir compte des situations où T n'est pas invertible (dans ce cas, l'ensemble $T^{-1}(A)$ n'est pas connexe). Ceci peut effectivement arriver et, pour s'en convaincre, considérons la figure 2.1 qui nous montre que l'application de Bernoulli est invariante pour la mesure de Lebesgue.

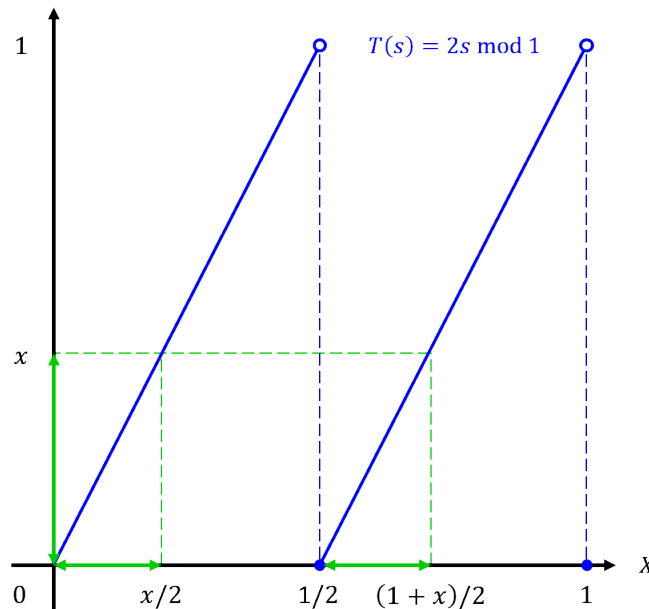


FIGURE 2.1 – L'application de Bernoulli est invariante pour la mesure de Lebesgue

Notons que, comme pour l'application de Bernoulli, une application invariante pour la mesure de Lebesgue préservera les volumes.

2.2 Caractérisation de la densité stationnaire

Cette section est dédiée à l'exposition du résultat 2.1 montrant l'invariance d'une densité sous l'opérateur de Perron-Frobenius lorsque la mesure considérée est invariante.

Théorème 2.1 (Densité stationnaire).

Soient (X, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré, $T : X \rightarrow X$ une application régulière et P l'opérateur de Perron-Frobenius. Alors on a l'équivalence suivante :

$$\forall A \in \mathcal{A} : T \text{ est } \mu_\rho\text{-invariante} \Leftrightarrow P\rho = \rho \quad (2.2)$$

avec la mesure μ_ρ donnée par l'équation (1.1) : $\mu_\rho(A) = \int_A \rho(x) \mu(dx)$.



Preuve

On a, $\forall A \in \mathcal{A}$:

$$\begin{aligned} \int_A P\rho(x) \mu(dx) &\stackrel{(1.2)}{=} \int_{T^{-1}(A)} \rho(x) \mu(dx) \\ &\stackrel{(1.1)}{=} \mu_\rho(T^{-1}(A)) \\ &\stackrel{(2.1)}{=} \mu_\rho(A) \\ &\stackrel{(1.1)}{=} \int_A \rho(x) \mu(dx). \end{aligned}$$

L'égalité est valable $\forall A \in \mathcal{A}$ et on en conclut que $P\rho = \rho$ par identification des intégrandes. Cette chaîne d'égalités peut se lire dans les deux sens et on a l'équivalence annoncée. \square

Un exemple peut être envisagé dans le cadre de l'application logistique en considérant :

$$\rho(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}} \text{ et } \mu_\rho(A) = \int_A \frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}} dx$$

2.3 Isométrie

Nous voyons ici un résultat en lien avec la conservation des normes lors de l'application de l'opérateur de Koopman dans le cas où la mesure considérée est invariante.

Théorème 2.2 (U est une isométrie).

Soient (X, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré, $T : X \rightarrow X$ une application régulière, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ un observable et U l'opérateur de Koopman. Alors :

$$T \text{ est } \mu_\rho\text{-invariante} \iff \|Uf\|_{\mathbb{L}_2(X, \mu_\rho)} = \|f\|_{\mathbb{L}_2(X, \mu_\rho)} \quad (2.3)$$

avec la mesure μ_ρ donnée par l'équation (1.1).



Preuve

$$\begin{aligned} \|Uf\|_{\mathbb{L}_2(X, \mu_\rho)} &= \int_X |Uf(x)|^2 \mu_\rho(dx) \\ &\stackrel{(*)}{=} \int_X U|f(x)|^2 \rho(x) \mu(dx) \\ &\stackrel{(1.6)}{=} \langle U|f|^2, \rho \rangle \\ &\stackrel{(1.7)}{=} \langle |f|^2, P\rho \rangle \\ &\stackrel{(2.2)}{=} \langle |f|^2, \rho \rangle \\ &\stackrel{(1.6)}{=} \int_X |f(x)|^2 \mu_\rho(dx) \\ &= \|f\|_{\mathbb{L}_2(X, \mu_\rho)} \end{aligned}$$

où le raisonnement pour l'égalité $(*)$ est le suivant :

$$|Uf(x)|^2 \stackrel{(1.5)}{=} |f(T(x))|^2 = |f|^2(T(x)) \stackrel{(1.5)}{=} U|f(x)|^2$$

Ceci termine la preuve de la condition nécessaire. La démonstration dans l'autre sens demande simplement de remplacer l'utilisation de (2.2) où l'hypothèse était que T est μ_ρ -invariante par la nouvelle hypothèse $\|Uf\|_{\mathbb{L}_2(X, \mu_\rho)} = \|f\|_{\mathbb{L}_2(X, \mu_\rho)}$. \square

Notons que le fait que l'opérateur de Koopman préserve les normes implique que ses valeurs propres se situent sur le cercle unité. De plus, dans ces conditions, il ne peut pas y avoir d'attracteur.

2.4 Unitarité des opérateurs P et U

Pour montrer le caractère unitaire des opérateurs P et U , nous allons directement nous servir du théorème ci-dessus. A noter que toutes les hypothèses nécessaires ne sont pas rappelées ici (voir le point précédent). On a donc

$$\begin{cases} \|Uf\|^2 \stackrel{(1.6)}{=} \langle Uf, Uf \rangle_\mu \stackrel{(1.7)}{=} \langle f, PUf \rangle_\mu \\ \|f\|^2 \stackrel{(1.6)}{=} \langle f, f \rangle_\mu \end{cases}$$

En se servant de (2.3), on a alors que $PU = Id$.

Si, de plus, U est invertible, il vient :

$$U^{-1} = P$$

Et l'opérateur de Koopman est également unitaire, c'est-à-dire $U^{-1} = U^*$. Notons que cet opérateur peut être invertible alors que T ne l'est pas. De nouveau, l'application de Bernoulli illustre cette situation.

Enfin, il est évident que ces résultats sont également valables pour P .

2.5 Evolution de la densité pour T invertible

Une analyse est abordée ici quant à l'évolution d'une densité sous l'opérateur de Perron-Frobenius lorsque l'application T est invertible et que la mesure μ considérée est invariante (au sens de la définition 2.1).

Soient (X, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré où μ est invariante, $T : X \rightarrow X$ une application régulière, $\rho \in D(X)$ une densité et P l'opérateur de Perron-Frobenius. Reprenons la relation (1.4) vue dans le chapitre précédent :

$$P\rho(x) = |J_{T^{-1}}(x)| \rho(T^{-1}(x))$$

En présence d'une mesure invariante on a que $|J_{T^{-1}}(x)| = 1$, $\forall x \in X$ et il vient :

$$P\rho(x) = \rho(T^{-1}(x)) \tag{2.4}$$

Théorie de l'ergodicité

Ce chapitre développe brièvement la théorie de l'ergodicité, présentant les résultats majeurs liés à cette théorie.

3.1 Définitions

Nous introduisons d'abord la définition d'ensemble T -invariant. Nous nous concentrons ensuite sur la définition de l'ergodicité.

Définition 3.1 (Ensemble T -invariant).

Soit (X, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré, $T : X \rightarrow X$ régulière.
 $A \in \mathcal{A}$ est T -invariant si et seulement si :

$$T^{-1}(A) = A$$

Notons que $T^{-1}(A) = A$ est équivalent à :

$$\begin{cases} \forall x \in A : T(x) \in A \\ \forall x \notin A : T(x) \notin A \end{cases}$$

Nous abordons à présent la définition d'application ergodique.

Définition 3.2 (Application ergodique).

Soient (X, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré et $T : X \rightarrow X$ une application régulière.
 T est ergodique si et seulement si :

$$\forall A \in \mathcal{A} : A \text{ est } T\text{-invariant} \implies \mu(A) = 0 \text{ ou } \mu(X \setminus A) = 0$$

Il est important de remarquer que la propriété d'ergodicité dépend de la mesure μ considérée.
On peut montrer que cette définition est équivalente à :

$$\forall A \in \mathcal{A} \text{ tel que } \mu(A) \neq 0, \forall x_0 \in X : \exists n \in \mathbb{N} \text{ tel que } T^{on}(x_0) \in A$$

où l'on voit finalement que les orbites de T « voyagent partout ».

3.1.1 Exemples d'applications ergodiques

On donne ici deux exemples d'applications ergodiques :

$$\begin{aligned} T_1 : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (x + \sqrt{2}, y + \sqrt{3}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_2 : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x + \frac{\sqrt{2}}{2} \pmod{1} \end{aligned}$$

L'ergodicité est liée dans ce cas-ci aux rapports irrationnels apparaissant dans les expressions des applications présentées.

3.1.2 Quelques propriétés

Nous présentons ici quelques résultats importants, sans les mettre en forme comme les théorèmes précédents.

Soit (X, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré, soit $T : X \rightarrow X$ une application régulière, soit P l'opérateur de Perron-Frobenius et soit U l'opérateur de Koopman.

- ▷ Si T est ergodique, il existe au plus une densité $\rho \in D(X)$ telle que $P\rho = \rho$
- ▷ Si il existe une densité stationnaire unique, alors l'application T est ergodique.
- ▷ T est ergodique $\Leftrightarrow [Uf = f \implies f \text{ est constante, avec } f : X \rightarrow \mathbb{R}]$.

On se rend compte que les équations

$$\begin{cases} Uf = f \\ P\rho = \rho \end{cases}$$

sont des équations aux valeurs propres. On cherchera donc les **fonctions propres** de U et P .

3.2 Théorème de Birkhoff

Nous présentons ici le théorème de Birkhoff, sans en apporter la démonstration.

Théorème 3.1 (Théorème de Birkhoff).

Soit (X, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré, soit $T : X \rightarrow X$ une application régulière, soit $\rho \in D(X)$ et soit U l'opérateur de Koopman.

(1) Si T est μ_ρ -invariante, alors $\forall f \in \mathbb{L}_1 : \exists f^* \in \mathbb{L}_1$ telle que

$$Uf^* = f^* \text{ avec } f^*(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(T^k(x)) \text{ p.p.}$$

(2) De plus, si T est ergodique, on a

$$f^*(x) = \int_X f(x) \mu_\rho(dx)$$

On voit donc comment étudier les observables à partir de la densité stationnaire. Illustrons ce théorème. En choisissant $f(x) = \chi_A(x)$, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \chi_A(T^k(x)) = \int_A \rho(x) \mu(dx)$$

Le membre de gauche de l'équation ci-dessus nous indique une fraction du « temps de passage » dans l'ensemble A tandis que le membre de droite se rapporte à une moyenne spatiale (cf. hypothèse ergodique en physique).

3.3 Application mélangeante

Nous introduisons ici la notion d'application mélangeante.

Définition 3.3 (Application mélangeante).

Soit (X, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré, soit $T : X \rightarrow X$ une application régulière et soit $\rho \in D(X)$.

On dit que T est mélangeante si et seulement si elle est μ_ρ -invariante et si

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\mu_\rho(A \cap T^{-n}(B))}{\mu_\rho(A)} = \frac{\mu_\rho(B)}{\mu_\rho(X)}, \quad \forall A, B \in \mathcal{A}$$

où l'on normalise en général de sorte que $\mu_\rho(X) = 1$.

En d'autres termes, tout ensemble $B \in \mathcal{A}$ se retrouvera dans n'importe quel ensemble $A \in \mathcal{A}$ après suffisamment d'itérations, dans la même proportion que la sienne dans X .

Nous abordons à présent quelques propriétés en lien avec les notions d'application mélangeante et ergodique. Nous supposons les hypothèses utilisées dans la définition d'application mélangeante toujours vérifiées.

▷ T mélangeante $\implies T$ ergodique (admis).

▷ T ergodique si et seulement si :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \langle P^k \rho, f \rangle_\mu = \langle \rho, f \rangle_\mu = \langle 1, f \rangle_{\mu_\rho}$$

▷ T mélangeante si et seulement si :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \langle P^k \rho, f \rangle_\mu = \langle \rho, f \rangle_\mu$$

Cette propriété utilise en fait la notion de convergence faible.

Spectre et fonctions propres

Nous distinguons ici deux parties : la partie temps discret et la partie temps continu. Nous distinguons également l'opérateur de Koopman de l'opérateur de Perron-Frobenius.

4.1 Opérateur de Koopman

4.1.1 Temps discret

Une fonction propre est une fonction ϕ_μ telle que $\|\phi_\mu\| \neq 0$ et qui vérifie

$$U\phi_\mu = \mu\phi_\mu \quad (4.1)$$

La valeur $\mu \in \mathbb{C}$ est la valeur propre de U associée, qui appartient au spectre $\sigma(P)$ de l'opérateur de Koopman. Cette définition est analogue à celle de vecteur propre en dimension finie.

4.1.2 Temps continu

La caractérisation de valeur et vecteur propre change quelque peu dans le cadre du temps continu. Nous travaillons à présent avec le générateur infinitésimal de l'opérateur de Koopman L_U . On trouve donc

$$L_U\phi_\lambda = \lambda\phi_\lambda \quad (4.2)$$

ou encore

$$U^t\phi_\lambda = e^{\lambda t}\phi_\lambda \quad (4.3)$$

où ϕ_λ une fonction propre et λ une valeur propre associée à cette fonction propre.

4.2 Opérateur de Perron-Frobenius

On arrive à des définitions similaires de valeurs propres, vecteurs propres pour l'opérateur de Perron-Frobenius par rapport aux définitions introduites à la section précédente pour l'opérateur de Koopman.

Théorème 4.1 (Egalité des spectres).

Soit U l'opérateur de Koopman et soit P l'opérateur de Perron-Frobenius. Nous notons μ une valeur propre de l'opérateur de Koopman, $\tilde{\mu}$ une valeur propre de l'opérateur de Perron-Frobenius. Nous notons également ϕ_μ et $\tilde{\phi}_{\tilde{\mu}}$ les fonctions propres respectives. On a alors les résultats suivant :

$$\sigma(U) = \sigma(P) \text{ et } \langle \phi_\mu, \tilde{\phi}_{\tilde{\mu}} \rangle = 0, \text{ si } \mu \neq \tilde{\mu}$$


Preuve

Nous nous servons du produit scalaire pour démontrer cela. D'une part, on a :

$$\langle U\phi_\mu, \tilde{\phi}_{\tilde{\mu}} \rangle \stackrel{(1.7)}{=} \langle \phi_\mu, P\tilde{\phi}_{\tilde{\mu}} \rangle = \langle \phi_\mu, \tilde{\mu}\tilde{\phi}_{\tilde{\mu}} \rangle = \tilde{\mu}\langle \phi_\mu, \tilde{\phi}_{\tilde{\mu}} \rangle$$

et d'autre part :

$$\langle U\phi_\mu, \tilde{\phi}_{\tilde{\mu}} \rangle \stackrel{(4.1)}{=} \langle \mu\phi_\mu, \tilde{\phi}_{\tilde{\mu}} \rangle = \mu\langle \phi_\mu, \tilde{\phi}_{\tilde{\mu}} \rangle$$

En écrivant $(\mu - \tilde{\mu})\langle \phi_\mu, \tilde{\phi}_{\tilde{\mu}} \rangle = 0$, la conclusion est alors immédiate. \square

4.3 Unitarité de U

Nous abordons les propriétés du spectre de U et P dans le cas où ils sont unitaires.

4.3.1 Temps discret

Pour rappel, nous avons vu dans le théorème 2.2 que $\|Uf\|_{\mathbb{L}_2(X, \mu_\rho)} = \|f\|_{\mathbb{L}_2(X, \mu_\rho)}$ dans le cas où l'application T est μ -invariante. Nous nous servons à présent de ce résultat pour montrer la conséquence sur les valeurs propres de U dans un tel cas. On a d'une part

$$\|U\phi_\mu\| = \|\phi_\mu\|$$

D'autre part, on trouve

$$\|U\phi_\mu\| = |\mu| \|\phi_\mu\|$$

On en déduit que $|\mu| = 1$ et les valeurs propres sont sur le cercle unité du plan complexe.

4.3.2 Temps continu

On fait le même raisonnement dans le cas temps continu. On a d'une part

$$\|U^t\phi_\lambda\| = \|\phi_\lambda\|$$

D'autre part, on a également

$$\|U^t\phi_\lambda\| = |e^{\lambda t}| \|\phi_\lambda\|$$

On en déduit que $|e^{\lambda t}| = 1$, ce qui peut s'exprimer comme $Re\{\lambda\} = 0$ ou encore comme $\lambda \in i\mathbb{R}$ (λ est purement imaginaire).

4.4 Cas d'une fonction constante

Une fonction constante partout sur son domaine de définition sera toujours une fonction propre de l'opérateur de Koopman associée à une valeur propre égale à 1 en temps discret et à 0 en temps continu. Concentrons-nous sur le cas continu. Sans perte de généralité, en prenant $\phi_{\lambda=0}(x) = 1 \forall x \in \text{Dom}(\phi)$, on a

$$U^t \phi_0(x) = \phi_0(\varphi^t(x)) = 1 = \phi_0(x)$$

où on a utilisé la définition de l'opérateur de Koopman.

4.5 Cas d'un ensemble A invariant

Soit (X, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré, soit $A \in \mathcal{A}$ un ensemble invariant, c'est-à-dire $\varphi^{-t}(A) = A, \forall t \geq 0$ et soit $\phi_0(x) = \chi_A(x)$. On a

$$U^t \phi_0(x) = \phi_0(x)$$

En effet, par la définition de l'opérateur de Koopman, on a

$$U^t \phi_0(x) \stackrel{(1.9)}{=} (\phi_0 \circ \varphi^t)(x) = (\chi_A \circ \varphi^t)(x) = \chi_{\varphi^{-t}(A)}(x) = \chi_A(x) = \phi_0(x)$$

On a bien que $\phi_0(x) = \chi_A(x)$ est une fonction propre de l'opérateur de Koopman, dans le cas où A est un ensemble invariant.

Méthodes numériques

Ce chapitre présente une méthode numérique pour estimer l'application de l'opérateur de Perron-Frobenius sur une fonction. Les méthodes permettant d'obtenir les propriétés spectrales de l'opérateur de Koopman (fonctions propres et valeurs propres) ne sont pas développées ici.

Evaluation d'une fonction par l'opérateur de Perron-Frobenius

Nous proposons ici une méthode numérique permettant de simuler l'action de l'opérateur de Perron-Frobenius sur une densité. Soit (X, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré. L'espace X est l'espace d'état sur lequel sont définies les densités que nous considérons. Soient les ensembles $\{A_i\}_{i=1}^n$ définissant une partition de l'espace d'état X , C'est-à-dire que ces ensembles vérifient les propriétés suivantes :

$$(1) A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j$$

$$(2) \bigcup_{i=1}^n A_i = X$$

Soit $\rho : X \rightarrow \mathbb{R}$ une densité définie sur l'espace d'état X . Nous notons ρ_i l'aire sous ρ sur A_i :

$$\rho_i = \int_{A_i} \rho(x) \mu(dx) \quad (5.1)$$

Nous pouvons à présent estimer notre fonction de densité par la valeur moyenne sur chaque A_i :

$$\rho(x) \approx \sum_{i=1}^n \frac{\rho_i}{\mu(A_i)} \chi_{A_i}(x) \quad (5.2)$$

On remarque que cette approximation conserve l'aire totale. On a en effet :

$$\begin{aligned} \int_X \sum_{i=1}^n \frac{\rho_i}{\mu(A_i)} \chi_{A_i}(x) \mu(dx) &= \sum_{i=1}^n \frac{\rho_i}{\mu(A_i)} \int_X \chi_{A_i}(x) \mu(dx) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\rho_i}{\mu(A_i)} \int_{A_i} \mu(dx) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\rho_i}{\mu(A_i)} \mu(A_i) \\ &= \sum_{i=1}^n \rho_i \\ &= \int_X \rho(x) \mu(dx) \\ &= 1 \end{aligned}$$

puisque ρ est une densité, et que donc son intégrale sur tout l'espace vaut 1. Nous pouvons à présent passer à l'expression de l'action de l'opérateur de Perron-Frobenius sur la densité (approchée dans ce cas-ci). On trouve :

$$\begin{aligned}
 (P\rho)_i &= \int_{A_i} P\rho(x) \mu(dx) \\
 &\stackrel{(1.2)}{=} \int_{T^{-1}(A_i)} \rho(x) \mu(dx) \\
 &\stackrel{(5.2)}{\approx} \int_{T^{-1}(A_i)} \sum_{j=1}^n \frac{\rho_j}{\mu(A_j)} \chi_{A_j}(x) \mu(dx) \\
 &= \sum_{j=1}^n \frac{\rho_j}{\mu(A_j)} \int_{T^{-1}(A_i)} \chi_{A_j}(x) \mu(dx) \\
 &= \sum_{j=1}^n \frac{\rho_j}{\mu(A_j)} \int_{T^{-1}(A_i) \cap A_j} \mu(dx) \\
 &= \sum_{j=1}^n \frac{\mu(T^{-1}(A_i) \cap A_j)}{\mu(A_j)} \rho_j \\
 &\triangleq \sum_{j=1}^n K_{ij} \rho_j
 \end{aligned}$$

En écrivant la relation précédente sous forme matricielle, on trouve alors

$$P\vec{\rho} = K\vec{\rho} \quad (5.3)$$

où $\vec{\rho} = (\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n)^T$. La matrice K est appelée **matrice de propagation**.

Propriétés de la matrice de propagation

(1) La matrice de propagation K vérifie la relation $\sum_i K_{ij} = 1$. En effet, calculons :

$$\sum_i K_{ij} = \sum_i \frac{\mu(T^{-1}(A_i) \cap A_j)}{\mu(A_j)} = \frac{\mu(X \cap A_j)}{\mu(A_j)} = \frac{\mu(A_j)}{\mu(A_j)} = 1$$

(2) La matrice de propagation vérifie la propriété de Perron-Frobenius : elle possède toujours une valeur propre égale à 1. Le vecteur propre associé à cette valeur propre est tel que toutes ces composantes sont positives. En appelant \vec{v} ce vecteur et en posant $\vec{v} = \vec{\rho}^*$, on a :

$$\rho^* \approx \sum_i \frac{v_i}{\mu(A_i)} \chi_{A_i}$$

En restant prudent et sous réserve de certaines conditions, on peut affirmer que

$$\left\| \rho^* - \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \frac{v_i}{\mu(A_i)} \chi_{A_i} \right\|_{\mathbb{L}_1} = 0$$