

# WYZNACZANIE MOMENTU BEZWŁADNOŚCI

T. Fąs

17 maja 2017

## STRESZCZENIE

Celem doświadczenia było wyznaczenie stosunku momentu bezwładności do iloczynu masy i kwadratu promienia walca. Do wyznaczenia tej wielkości posłużono się dwoma różnymi metodami. Wyznaczony współczynnik wynosi  $\beta = 0,77160 \pm 0,00032$ .

## WSTĘP

Moment bezwładności ciała jest odpowiednikiem bezwładności dla ruchu obrotowego. Zależy on od jego masy, rozmiarów oraz umiejscowienia osi obrotu ciała. Dla ciał o masie  $m$ , której rozkład jest ciągły, moment bezwładności  $I$  dany jest wzorem:

$$I = \int_V r^2 dm, \quad (1)$$

gdzie  $V$  oznacza, iż należy całkować względem całej objętości  $V$  ciała, a  $r$  jest odległością masy  $dm$  od osi obrotu [1].

Jeśli dane ciało stacza się z równi, o kącie nachylenia  $\alpha$  w polu grawitacyjnym o przyspieszeniu  $g$ , to wzór na wartość przyspieszenia  $a$  środka masy danego ciała jest następujący:

$$a = \frac{g \sin \alpha}{1 + I/mR^2}, \quad (2)$$

gdzie  $R$  jest promieniem tego ciała [2]. W doświadczeniu wykorzystano walec wydrążony w środku, o masie  $m$ , promieniu wewnętrznym  $r$  i promieniu zewnętrznym  $R$ . Wyliczenie momentu bezwładności z Równania (1) daje następujący wynik:

$$I = \frac{1}{2}m(R^2 + r^2). \quad (3)$$

W doświadczeniu szukano stosunku momentu bezwładności do iloczynu masy i kwadratu promienia walca. Oznaczono tę wielkość symbolem  $\beta = I/mR^2$ . Stosując to podstawienie do Równania (2) i Równania (3) a następnie rozwiązując je względem  $\beta$  otrzymano następujące wzory:

$$\beta = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{r^2}{R^2} \right) \quad (4)$$

$$\beta = \frac{g \sin \alpha}{a} - 1 \quad (5)$$

Równanie (4) pozwala na wyznaczenie współczynnika  $\beta$  na drodze podstawowej teorii i bezpośrednich pomiarów promieni lub średnic walca, z kolei Równanie (5) wymaga pomiarów przyspieszenia i kątów nachylenia równi. Jest to metoda oparta na pomiarach pośrednich. Z tego powodu wartość współczynnika  $\beta$  dla metody opartej o Równanie (4) będzie traktowana jako wartość wzorcowa. Zgodność wartości współczynnika  $\beta$  obu tych metod będzie potwierdzeniem teorii oraz poprawności przeprowadzonego eksperymentu.

## UKŁAD DOŚWIADCZALNY

Układ doświadczalny składał się z walca metalowego wydrążonego w środku, równi o kontrolowanym kącie nachylenia do poziomu, dwóch fotokomórek rejestrujących położenie ciała na równi, zegara o dokładności 0,0001 s oraz suwmiarki i taśmy mierniczej o działkach odczytu kolejno 0,01 mm i 1 mm. Na potrzeby metody opartej o Równanie (4) zmierzono suwmiarką średnicę  $D$  całego walca oraz średnicę  $d$  wydrążenia. W takim wypadku, należałoby wprowadzić modyfikacje do Równania (4), aby wyrażało się ono przez średnice walca. Jednak zmiana ta jest kosmetyczna, gdyż wystarczy jedynie zamienić symbole  $R$  i  $r$  na kolejno  $D$  i  $d$ . Wynika to z równości stosunku promienia do średnicy.

Przyśpieszenie środka masy walca wyznaczono w sposób pośredni. Dwie fotokomórki wyznaczały początek i koniec pewnego odcinka, którego długość mierzono przy pomocy taśmy mierniczej. Fotokomórki te były podłączone do zegara. Gdy walec przecinał pierwszą wiązkę, zegar się uruchamiał, a zatrzymywał się, gdy ciało przecinało drugą wiązkę. W ten sposób zmierzono czas, jakiego potrzebuje walec na pokonanie znanej odległości. Aby dokładniej wyznaczyć przyśpieszenie oraz współczynnik  $\beta$  pomiary wykonywano wielokrotnie, dla różnych odległości pomiędzy fotokomórkami oraz dla różnych kątów nachylenia równi. Co więcej, pierwsza fotokomórka była tak ustawiona, że walec, będąc na szczycie równi, prawie stykał się z wiązką. Pomiarów długości odcinka dokonywano od wewnętrznej strony równi, starając się zmierzyć odległość pomiędzy środkiem pierwszej, a środkiem drugiej fotokomórki. Szerokość fotokomórek wynosiła 4 mm, więc precyzyjne ustalenie środka było ciężkie, dodatkowo miarka ulegała niewielkiemu skręceniu w trakcie pomiaru. Obie te niedogodności uwzględniono w analizie danych. Kąt nachylenia równi, a konkretniej jego sinus, wyznaczono w następujący sposób. Wybrano dwa charakterystyczne punkty na równi, a następnie zmierzono odległość między nimi wzdłuż równi oraz ich wysokość względem podstawy równi. Stosunek różnicy wysokości do odległości tych punktów jest poszukiwaną wartością sinusa kąta nachylenia równi. Zważywszy na to, że punktami charakterystycznymi były nity o dokładnie określonym środku, jedyna niepewność związana z tym pomiarem to rozdzielczość taśmy mierniczej.

## WYNIKI POMIARÓW

Wymiary walca zmierzono pięciokrotnie, a wyniki przedstawiono w Tabeli 1.

Tabela 1: Wymiary walca

$D$ [mm]	49,56	49,55	49,56	49,55	49,55
$d$ [mm]	36,52	36,53	36,52	36,52	36,52

Pomiary czasów  $t$  staczania się walca wykonano dziesięciokrotnie dla siedmiu różnych odległości  $x$  oraz dla dwóch kątów nachylenia równi. Wyniki tych pomiarów zaprezentowane są w Tabeli 2 i Tabeli 3.

Tabela 2: Wyniki pomiarów czasów staczania się walca

$\sin\alpha = 0,10980$							
$x$ [cm]	9	11,35	17,4	20,4	30,3	38,7	54,6
Numer pomiaru	Pomiary czasów $t$ [s]						
1	0,37680	0,44170	0,58290	0,64540	0,82140	0,95530	1,16880
2	0,37910	0,44170	0,58270	0,64350	0,82300	0,95320	1,16940
3	0,38000	0,43980	0,58340	0,64200	0,82670	0,95450	1,17010
4	0,38080	0,44210	0,58220	0,64330	0,82580	0,95430	1,16770
5	0,37940	0,44020	0,58330	0,64380	0,82060	0,95450	1,16890
6	0,37800	0,44140	0,58090	0,64540	0,82200	0,95550	1,17030
7	0,37920	0,44080	0,58110	0,64250	0,82310	0,95500	1,16880
8	0,37830	0,44120	0,58120	0,64650	0,82040	0,95520	1,16950
9	0,37760	0,44070	0,58160	0,64160	0,82120	0,95360	1,16750
10	0,37890	0,44090	0,58060	0,64390	0,82020	0,95590	1,16830

Wartości sinusów oparte są na danych przedstawionych w Tabeli 4

Tabela 3: Wyniki pomiarów czasów staczania się walca

$\sin\alpha = 0,12891$							
$x$ [cm]	9	16,7	23,3	31,1	43,7	58,3	82,9
Numer pomiaru	Pomiary czasów $t$ [s]						
1	0,34830	0,52350	0,64670	0,77390	0,94860	1,12620	1,37180
2	0,34800	0,52370	0,64620	0,77210	0,94680	1,12540	1,36850
3	0,34850	0,52360	0,64540	0,77380	0,94710	1,12480	1,37100
4	0,34920	0,52400	0,64550	0,77340	0,94880	1,12510	1,37020
5	0,34890	0,52350	0,64580	0,77160	0,94770	1,12530	1,36980
6	0,34810	0,52320	0,64540	0,77190	0,94710	1,12480	1,37160
7	0,34850	0,52300	0,64610	0,77270	0,94800	1,12540	1,37150
8	0,34770	0,52320	0,64560	0,77310	0,94740	1,12600	1,36580
9	0,34780	0,52280	0,64610	0,77220	0,94790	1,12450	1,37080
10	0,34910	0,52310	0,64690	0,77200	0,94920	1,12570	1,37120

Tabela 4: Wyznaczanie kąta nachylenia

Wysokość $H_1$ [cm]	Wysokość $H_2$ [cm]	Długość $L$ [cm]	$\Delta H = H_2 - H_1$	$\sin\alpha = \Delta H/L$
10,1	12,9	25,5	2,8	0,10980
10	13,3	25,6	3,3	0,12891

## ANALIZA DANYCH

Pomiar czasu, oparty na dwóch fotokomórkach i zegarze, był niezwykle dokładny, z rozdzielczością przyrządu  $\Delta_t = 0,0001$  s. Dodatkowo eliminował on błąd obserwatora, ponieważ całość działała automatycznie. Z tych powodów głównym źródłem niepewności w przypadku pomiarów czasu jest rozrzut statystyczny wyników. Z kolei pomiarów odległości dokonywano jednokrotnie, korzystając z taśmy mierniczej o dokładności 1 mm, która to jest o dwa rzędy wielkości mniejsza od mierzonych odległości, w porównaniu do trzech, a nawet czterech rzędów wielkości w przypadku pomiaru czasu. Dodatkowo, taśma ulegała niewielkiemu skręceniu w trakcie pomiaru, jaki również precyzyjne ustalenie początku i końca mierzonego odcinka było utrudnione, ponieważ szerokość fotokomórki była większa od dokładności miarki. Z tych powodów postanowiono ustalić maksymalny błąd pomiaru na poziomie  $\Delta_x = 2$  mm.

Pomiary czasu dla każdej serii postanowiono uśrednić, korzystając ze średniej arytmetycznej:

$$\bar{t} = \sum_{i=1}^N \frac{t_i}{N}, \quad (6)$$

gdzie  $N$  jest liczbą pomiarów, w tym przypadku  $N = 10$ .

Ostateczne niepewności pomiarów czasu  $u_t$  obliczono, korzystając z odchylenia standardowego średniej  $s$ , które jest wyrażone wzorem:

$$s_t^2 = \sum_{i=1}^N \frac{(t_i - \bar{t})^2}{N(N-1)} \quad [3] \quad (7)$$

oraz ze związku pomiędzy odchyleniem standardowym średniej, a maksymalnym dopuszczalnym błędem pomiaru  $\Delta$ :

$$u_t^2 = s_t^2 + \frac{\Delta_t}{3}. \quad (8)$$

Dla pomiarów odległości  $x$  wartość odchylenia średniej jest równa zero, więc niepewność  $u_x$  dana jest wzorem:

$$u_x^2 = \frac{\Delta_x}{3}. \quad (9)$$

Z kolei niepewności pomiarów średnic  $D$  i  $d$  są dane wzorami analogicznymi do niepewności pomiaru czasu, z wartością  $\Delta_s = 0,01$  mm. Obliczenia oparte na Równaniach (6), (7), (8) i (9) przedstawiono w Tabeli 5 i Tabeli 6.

W dalszej części analizy skupiono się na wyznaczeniu współczynnika  $\beta$  i jego niepewności na podstawie danych z Tabeli 6 i Równania (4). Otrzymano następujący wynik:  $\beta = 0,77159$ . Aby wyznaczyć niepewność tego

Tabela 5: Wyznaczanie niepewności

$\sin\alpha = 0,10980$							
$x$ [cm]	9	11,35	17,4	20,4	30,3	38,7	54,6
Średnia $\bar{t}$ [s]	0,37881	0,44105	0,58199	0,64379	0,82244	0,95470	1,16893
$s_t$ [s]	0,00037	0,00023	0,00033	0,00050	0,00071	0,00027	0,00029
$\Delta_t$ [s]	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001
$\Delta_t/\sqrt{3}$ [s]	0,00006	0,00006	0,00006	0,00006	0,00006	0,00006	0,00006
$u_t$ [s]	0,00038	0,00023	0,00033	0,00050	0,00071	0,00027	0,00030
$\sin\alpha = 0,12891$							
$x$ [cm]	9	16,7	23,3	31,1	43,7	58,3	82,9
Średnia $\bar{t}$ [s]	0,34841	0,52336	0,64597	0,77267	0,94786	1,12532	1,37022
$s_t$ [s]	0,00017	0,00011	0,00017	0,00026	0,00025	0,00017	0,00058
$\Delta_t$ [s]	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001
$\Delta_t/\sqrt{3}$ [s]	0,00006	0,00006	0,00006	0,00006	0,00006	0,00006	0,00006
$u_t$ [s]	0,00018	0,00013	0,00018	0,00027	0,00026	0,00018	0,00059
$\Delta_x/\sqrt{3}$ [mm]	1,15470	1,15470	1,15470	1,15470	1,15470	1,15470	1,15470
W przeliczeniu na cm	0,11547	0,11547	0,11547	0,11547	0,11547	0,11547	0,11547

Tabela 6: Wyznaczanie niepewności średnic

Wielkość	$D$	$d$
Średnia [mm]	49,55400	36,52200
$s_k$ [mm]	0,00245	0,00200
$\Delta_s$ [mm]	0,01	0,01
$\Delta_s/\sqrt{3}$ [mm]	0,00577	0,00577
$u_k$ [mm]	0,00627	0,00611

współczynnika posłużono się metodą propagacji małych błędów, która pozwala na przenoszenie niepewności. Ogólny wzór na wyznaczanie niepewności tą metodą jest następujący:

$$u_f^2 = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} u_i \right)^2, \quad (10)$$

gdzie  $u_f$  jest niepewnością szukanej wielkości zależnej od  $x_i$ , a  $u_i$  jest niepewnością  $x_i$  [4]. Stosując Równanie (10) do Równania (4) oraz stosując stosowne podstawienia otrzymano następujący wzór:

$$u_{\beta_1} = \frac{d}{D^2} \sqrt{u_d^2 + \left( \frac{d}{D} u_D \right)^2} \quad (11)$$

Stosując Równanie (11) do danych z Tabeli 6 otrzymano następującą niepewność:  $u_{\beta} = 0,00011$ . Ostateczny wynik można zapisać jako  $\beta = 0,77159 \pm 0,00011$ .

Na potrzeby dalszej analizy stworzono wykres zależności  $x(t)$  dla obu kątów nachylenia równi opierając się na wartościach średnich. Wykresy te są przedstawione na Rysunku 1 i Rysunku 2. Wyraźnie widać zależność opisaną równaniem kwadratowym:

$$x(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0t, \quad (12)$$

gdzie  $v_0$  jest prędkością początkową walca. Wyznaczanie przyspieszenia na podstawie tego równania byłoby skomplikowane, dlatego postanowiono zastosować podstawienie  $w = x(t)/t$ . W takim przypadku Równanie (12) przyjmuje postać:

$$w(t) = \frac{x(t)}{t} = \frac{1}{2}at + v_0. \quad (13)$$

Jest to równanie prostej  $w = At + b$ , w którym współczynnik kierunkowy jest połową przyspieszenia środka masy, a wyraz wolny jest wartością początkowej prędkości walca. Wartości  $w$  oraz  $t$  zaprezentowane są w Tabeli 7.

Na podstawie Tabeli 7 stworzono dwa wykresy zależności  $w(t)$  przedstawione na Rysunku 3 i Rysunku 4. W obu przypadkach widać wyraźnie układanie się punktów na prostej. Stanowi to potwierdzenie słuszności

Tabela 7: Wartości  $w(t)$ 

$\sin\alpha = 0,10980$							
$x$ [cm]	9	11,35	17,4	20,4	30,3	38,7	54,6
Średnia $\bar{t}$ [s]	0,37881	0,44105	0,58199	0,64379	0,82244	0,95470	1,16893
$w(t)$ [cm/s]	23,75861	25,73404	29,89742	31,68735	36,84159	40,53629	46,70938
$\sin\alpha = 0,12891$							
$x$ [cm]	9	16,7	23,3	31,1	43,7	58,3	82,9
Średnia $\bar{t}$ [s]	0,34841	0,52336	0,64597	0,77267	0,94786	1,12532	1,37022
$w(t)$ [cm/s]	25,83164	31,90920	36,06979	40,25004	46,10385	51,80749	60,50123

zastosowanych wzorów oraz zastosowanego podstawienia. Do wyznaczenia przyspieszeń na podstawie równania prostej posłużono się metodą najmniejszych kwadratów. Polega ona na minimalizacji wielkości, która w naszym przypadku jest dana wzorem:

$$R(a, b) = \sum_{i=1}^n \left( \frac{w_i - \hat{A}t - \hat{b}}{u_i} \right)^2, \quad (14)$$

gdzie  $u_i$  to niepewności wielkości  $w_i$ , z kolei  $n$  jest liczbą pomiarów. W naszym przypadku  $n = 7$ . Niepewność wielkości  $w$  obliczono korzystając z Równania (10). Otrzymano następujący wzór:

$$u_{wi} = w_i \sqrt{\left( \frac{u_{ti}}{t_i} \right)^2 + \left( \frac{u_{xi}}{x_i} \right)^2}. \quad (15)$$

Korzystając z metody najmniejszych kwadratów na osi X należy odkładać zmienną obarczoną mniejszą niepewnością. Opierając się na danych z Tabeli 5 założono, że jest to wielkość  $t$ . Aby zyskać absolutną pewność co do wyboru zmiennej należy sprawdzić, czy iloczyn  $0,5Au_t$ , gdzie  $A$  jest wstępną oceną parametru prostej, jest znacząco mniejszy od wartości  $u_w$ . Wynik ten wynika z zastosowania Równania (10) do prawej strony Równania (13), czyli sprawdzamy, czy niepewność  $u_w$  jest mniejsza czy też większa od maksymalnej niepewności prawej strony Równania (13). Na potrzeby tej analizy przeprowadzono odpowiednie obliczenia, wyniki przedstawiono w Tabeli 8. Wartości  $A$  wyliczono dla punktów skrajnych, to znaczy, dla pierwszego i ostatniego pomiaru.

Tabela 8: Wybór zmiennej niezależnej

$A = 29,04720 \text{ cm/s}^2$							
$u_w$ [cm/s]	0,30573	0,26216	0,19915	0,18106	0,14400	0,12151	0,09951
$u_t$ [s]	0,00038	0,00023	0,00033	0,00050	0,00071	0,00027	0,00030
$0,5Au_t$ [cm/s]	0,00545	0,00338	0,00486	0,00731	0,01037	0,00399	0,00435
$0,5Au_t/u_w$	0,01784	0,01291	0,02439	0,04040	0,07200	0,03281	0,04374
$A = 33,92959 \text{ cm/s}^2$							
$u_w$ [cm/s]	0,33168	0,22077	0,17903	0,15010	0,12247	0,10295	0,08816
$u_t$ [s]	0,00018	0,00013	0,00018	0,00027	0,00026	0,00018	0,00059
$0,5Au_t$ [cm/s]	0,00300	0,00218	0,00300	0,00457	0,00440	0,00307	0,00994
$0,5Au_t/u_w$	0,00904	0,00987	0,01678	0,03047	0,03596	0,02986	0,11279

Jak widać, wybór zmiennej niezależnej był dobry. Teraz można wyznaczyć parametry prostej, dla której wielkość opisana Równaniem (14) przyjmuje wartość najmniejszą. Jawny wzór przy wykorzystaniu aktualnie zdefiniowanych symboli przyjmuje zbyt skomplikowaną postać, dlatego zdecydowano się podzielić ten wzór na szereg pomniejszych wartości, które wyglądają następująco:

$$\hat{A} = u_A^2 \sum_{i=1}^n \frac{(t_i - \bar{t}_w)(w_i - \bar{w}_w)}{u_{wi}^2}, \quad \hat{b} = \bar{w}_w - \hat{A}\bar{t}_w, \quad u_A^2 = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \left( \frac{t_i - \bar{t}_w}{u_{wi}} \right)^2}$$

$$u_b^2 = \bar{t}_w^2 u_A^2, \quad \bar{t}_w = \frac{1}{S} \sum_{i=1}^n \frac{t_i}{u_{wi}^2}, \quad \bar{w}_w = \frac{1}{S} \sum_{i=1}^n \frac{w_i}{u_{wi}^2}, \quad \bar{t}_w^2 = \frac{1}{S} \sum_{i=1}^n \frac{t_i^2}{u_{wi}^2}, \quad S = \sum_{i=1}^n \frac{1}{u_{wi}^2}.$$

Na podstawie tych wzorów stworzono Tabelę 9.

Tabela 9: Wyznaczanie współczynników

$\sin\alpha = 0,10980$							
$u_w$ [cm/s]	0,30573	0,26216	0,19915	0,18106	0,14400	0,12151	0,09951
$1/u^2$ [s <sup>2</sup> /cm <sup>2</sup> ]	10,69842	14,55016	25,21431	30,50226	48,22865	67,730107	100,99593
$t/u^2$ [s <sup>3</sup> /cm <sup>2</sup> ]	4,05267	6,41735	14,67448	19,63705	39,66517	64,66193	118,05717
$w/u^2$ [s/cm]	254,17960	374,43439	753,84298	966,53599	1776,82035	2745,52719	4717,45767
$(t - t_w)/u = \delta_t$ [s <sup>3</sup> /cm <sup>2</sup> ]	-1,69417	-1,73833	-1,58064	-1,39718	-0,51620	0,47675	2,73511
$(w - w_w)/u = \delta_w$ [s/cm]	-49,52200	-50,21747	-45,20064	-39,82938	-14,28838	13,47425	78,49132
$\delta_t \delta_w$ [s <sup>4</sup> /cm <sup>2</sup> ]	83,89864	87,29464	71,44576	55,64897	7,37572	6,42381	214,68244
$\delta_t^2$ [s <sup>6</sup> /cm <sup>4</sup> ]	2,87021	3,02180	2,49841	1,95212	0,26647	0,22729	7,48083
$t^2/u^2$ [s <sup>4</sup> /cm <sup>2</sup> ]	1,53519	2,83037	8,54040	12,64214	32,62222	61,73274	138,00057
$\sin\alpha = 0,12891$							
$u_w$ [cm/s]	0,33168	0,22077	0,17903	0,15010	0,12247	0,10295	0,08816
$1/u^2$ [s <sup>2</sup> /cm <sup>2</sup> ]	9,09002	20,51709	31,20037	44,38447	66,66681	94,35206	128,67787
$t/u^2$ [s <sup>3</sup> /cm <sup>2</sup> ]	3,16705	10,73783	20,15450	34,29455	63,19080	106,17626	176,31698
$w/u^2$ [s/cm]	234,80998	654,68404	1125,39056	1786,47692	3073,59706	4888,14313	7785,16955
$(t - t_w)/u = \delta_t$ [s <sup>3</sup> /cm <sup>2</sup> ]	-2,11073	-2,37863	-2,24838	-1,83758	-0,82166	0,74626	3,64955
$(w - w_w)/u = \delta_w$ [s/cm]	-71,36908	-79,69362	-75,03565	-61,64638	-27,75593	22,38225	124,75708
$\delta_t \delta_w$ [s <sup>4</sup> /cm <sup>2</sup> ]	150,64055	189,56173	168,70894	113,28005	22,80608	16,70298	455,30748
$\delta_t^2$ [s <sup>6</sup> /cm <sup>4</sup> ]	4,45516	5,65789	5,05523	3,37669	0,67513	0,55690	13,31923
$t^2/u^2$ [s <sup>4</sup> /cm <sup>2</sup> ]	1,10343	5,61975	13,01920	26,49837	59,89604	119,48227	241,59306
Kąt nachylenia	$\bar{t}_w$ [s]	$\bar{w}_w$ [cm/s]	$\bar{t}_w^2$ [s <sup>2</sup> ]	$\hat{A}$ [cm/s <sup>2</sup> ]	$\hat{b}$ [cm/s]	$u_A$ [cm/s <sup>2</sup> ]	$u_b$ [cm/s]
$\sin\alpha = 0,10980$	0,89677	38,89905	0,86568	28,75833	13,10941	0,23365	0,21740
$\sin\alpha = 0,12891$	1,04849	1,18315	49,50324	33,75029	14,11630	0,17382	0,18907

Jak widać, wartości współczynnika  $A$  są w przybliżeniu równe wstępnym ocenom tych parametrów, dodatkowo wartości współczynnika  $b$  pokrywają się z wartością wynikającą z wizualnego dopasowania krzywej do punktów przedstawionego na Rysunku 3 i Rysunku 4.

Aby zyskać pewność, co do przyjętego modelu teoretycznego, przeprowadzono test  $\chi^2$  Pearsona. Polega on na sprawdzeniu, czy wartość  $\chi_0^2$ , wynikająca z ocen parametrów, jest mniejsza od wartości krytycznej  $\chi^2$  wynikającej z modelu. Wartość  $\chi^2$  zależy od ilości stopni swobody oraz od prawdopodobieństwa popełnienia błędu I rodzaju, czyli odrzucenia hipotezy prawdziwej. Na potrzeby tego testu przyjęto prawdopodobieństwo na poziomie  $P = 0,005$ . Ilość stopni swobody to różnica pomiędzy ilością wykonanych pomiarów a liczbą parametrów. W tym przypadku liczba pomiarów wynosi 7, a liczba parametrów jest równa 2. Tak więc liczba stopni swobody wynosi  $\nu = 7 - 2 = 5$ . Wartość krytyczną  $\chi^2 = 16,75$  odczytano z tablic statystycznych [6]. Aby wyznaczyć wartość  $\chi_0^2$  posłużono się wzorem:

$$\chi_0^2 = \sum_{i=1}^N \frac{(y_i - \hat{a}x - \hat{b})^2}{u_i^2} \quad [5], \quad (16)$$

który dla rozpatrywanego przypadku przyjmuje postać:

$$\chi_0^2 = \sum_{i=1}^7 \frac{(w_i - \hat{A}x - \hat{b})^2}{u_i^2} \quad (17)$$

Na podstawie Równania (17) stworzono Tabelę 10.

Tabela 10: Obliczanie reszt oraz  $\chi^2$ 

$\sin\alpha = 0,10980$							
$w_i - \hat{A}t - \hat{b} = \varepsilon_i$ [cm/s]	-0,24475	-0,05923	0,05094	0,06361	0,08018	-0,02870	-0,01651
$(w_i - \hat{A}t - \hat{b}/u_i)^2$	0,64084	0,05105	0,06544	0,12342	0,31002	0,05579	0,02753
$\sin\alpha = 0,12891$							
$w_i - \hat{A}t - \hat{b} = \varepsilon_i$ [cm/s]	-0,04361	0,12935	0,15181	0,05590	-0,00300	-0,28870	0,13961
$(w_i - \hat{A}t - \hat{b}/u_i)^2$	0,01729	0,34326	0,71902	0,13870	0,00060	7,86380	2,50788

Obliczone wartości  $\chi_0^2$  wynoszą kolejno:  $\chi_{01}^2 = 1,27409$  oraz  $\chi_{02}^2 = 11,59055$ . Jak widać wartości te są mniejsze od wartości krytycznej  $\chi^2 = 16,75$ . Wynika stąd, iż wybrany model nie jest sprzeczny z danymi. Dodatkowo, stworzono wykres reszt  $\varepsilon_i$  dla kąta nachylenia o wartości  $\sin \alpha = 0,10980$ . Wykres ten przedstawiono na Rysunku 5. W przypadku idealnym wszystkie punkty oscylowałyby wokół zera, a suma ich wartości byłaby równa zero. W naszym przypadku mamy 3 reszty dodatnie i 4 ujemne, dodatkowo, ze względu na dużą wartość jednej z reszt względem pozostałych, ciężko jest wychwycić oscylacje wokół zera. Jednak biorąc pod uwagę fakt, jak niewielkie są to odchylenia w stosunku do wartości  $w_i$  można śmiało założyć, że przeprowadzone obliczenia doprowadziły do najlepszego przybliżenia wartości współczynników prostej.

Aby wyznaczyć współczynnik  $\beta$  i jego niepewność należy na podstawie współczynnika  $A$  wyznaczyć przyspieszenie walca, niepewność przyspieszenia oraz z danych z Tabeli 4 wyznaczyć niepewność wartości  $\sin \alpha$ . Na podstawie relacji wynikającej z Równania (13) wyznaczono przyspieszenie  $a = 2A$ . Jego niepewność wyznaczono opierając się o Równanie (10) i otrzymano:

$$u_a = 2u_A. \quad (18)$$

Z relacji  $\sin \alpha = \Delta H/L$  otrzymano z Równania (10) następującą niepewność  $\sin \alpha$ :

$$u_{\sin} = \sin \alpha \sqrt{\frac{2\Delta_d^2}{3\Delta H^2} + \frac{\Delta_d^2}{3L^2}}, \quad (19)$$

przy czym  $\Delta_d = 1$  mm. Podstawiając dane do Równania (18), Równania (19) oraz do Równania (5) otrzymano wyniki, które wstawiono do Tabeli 11. Na potrzeby obliczeń przyjęto wartość  $g = 9,8132$  m/s<sup>2</sup>. Dodatkowo otrzymaną wartość  $a$  zamieniono z cm/s<sup>2</sup> na m/s<sup>2</sup> w trakcie obliczania współczynników  $\beta$ .

Tabela 11: Wartości niepewności oraz współczynnik  $\beta$

$\sin \alpha$	$u_{\sin}$	$a$ [cm/s <sup>2</sup> ]	$u_a$ [cm/s <sup>2</sup> ]	$\beta$	$u_\beta$
0,10980	0,00321	57,51667	0,46731	0,87325	0,05686
0,12891	0,00319	67,50058	0,34765	0,87386	0,04736

Wartości niepewności współczynnika  $\beta$  obliczono korzystając z Równania (5) i Równania (10) i wyliczając:

$$u_\beta = \frac{g}{a} \sqrt{\frac{\sin^2 \alpha}{a^2} u_a^2 + u_{\sin}^2}. \quad (20)$$

Aby się przekonać, czy wartości  $\beta$  otrzymane dla różnych kątów nachylenia równi są ze sobą zgodne, przeprowadzono test  $3\sigma$ . Polega on na sprawdzeniu, czy moduł różnicy  $|\beta_1 - \beta_2|$  jest mniejszy od trzykrotności niepewności tej różnicy. Niepewność różnicy wyznaczono na podstawie Równania (10) i otrzymano:

$$u_r = \sqrt{u_{\beta 1}^2 + u_{\beta 2}^2} \quad (21)$$

Otrzymane wartości przedstawiono w Tabeli 12.

Tabela 12: Test  $3\sigma$

$ \beta_1 - \beta_2 $	$u_r$	$3\sigma$	$ \beta_1 - \beta_2 /3\sigma$
0,00061	0,07400	0,22200	0,00277

Jak widać, wyniki te są ze sobą zgodne. Dzięki temu można wyznaczyć najlepszą ocenę parametru  $\beta$ , która wynika z obu tych wartości oraz ich niepewności korzystając ze średniej ważonej. Średnia ważona  $N$  wielkości  $x_i$  o niepewnościach  $u_i$  zdefiniowana jest w następujący sposób:

$$\bar{x}_w = \frac{\sum_{i=1}^N \frac{x_i}{u_i^2}}{\sum_{i=1}^N \frac{1}{u_i^2}}. \quad (22)$$

Niepewności średniej ważonej wrażają się w następującymi wzorami:

$$u_{int}^2 = \frac{1}{\sum_{i=1}^N \frac{1}{u_i^2}}, \quad (23)$$

$$u_{ext}^2 = \frac{u_{int}^2}{N-1} \sum_{i=1}^N \left( \frac{x_i - \bar{x}_w}{u_i} \right)^2. \quad (24)$$

Jako ostateczną niepewność niepewność wielkości  $\bar{x}_w$  wybiera się większą z niepewności  $u_{int}$  lub  $u_{ext}$  [7]. Na podstawie Równania (22), Równania (23) i Równania (24) stworzono Tabelę 13.

Tabela 13: Średnia ważona

$\beta$	$u_\beta$	$1/u_i^2$	$\beta/u_i^2$	$\beta - \beta_w$	$(\beta - \beta_w/u_i^2)^2$
0,87325	0,05686	309,26122	270,06133	-0,00036	0,00004
0,87386	0,04736	445,88519	389,64147	0,00025	0,00003
$\beta_w = 0,87361$		$u_{int} = 0,03639$		$u_{ext} = 0,00030$	

Ostateczny wynik można zapisać jako  $\beta = 0,87361 \pm 0,03639$ . Aby uzyskać pewność, czy wynik ten jest zgodny z wynikiem otrzymanym dla pomiarów średnic walca należy przeprowadzić test  $3\sigma$ . Postępowanie jest analogiczne do tego, które doprowadziło do powstania Tabeli 12. Wyniki przedstawiono w Tabeli 14.

Tabela 14: Test  $3\sigma$

$\beta_1$	$\beta_2$	$ \beta_1 - \beta_2 $	$u_r$	$ \beta_1 - \beta_2 /\sigma$
0,77159	0,87361	0,10201	0,03639	2,80333

Otrzymane wyniki są ze sobą zgodne, więc po raz kolejny można wyznaczyć najlepszą ocenę współczynnika  $\beta$  korzystając ze średniej ważonej. Stworzono Tabelę 15 analogiczną do Tabeli 13.

Tabela 15: Średnia ważona

$\beta$	$u_\beta$	$1/u_i^2$	$\beta/u_i^2$	$\beta - \beta_w$	$(\beta - \beta_w/u_i^2)^2$
0,77159	0,00011	77015213,55207	59424549,13452	0,00000	0,00008
0,87361	0,03639	755,14641	659,70280	0,10201	7,85858
$\beta_w = 0,77160$		$u_{int} = 0,00011$		$u_{ext} = 0,00032$	

Ostatecznie otrzymano współczynnik  $\beta = 0,77160 \pm 0,00032$ . Jak widać w Tabeli 15, największy wkład miała wartość obliczona na podstawie pomiarów średnicy walca. Wkład pochodzący od obliczeń dla przyspieszenia środka masy walca jest pomijalny. Wynika to z dużej niepewności jaką był obarczony pomiar współczynnika  $\beta$  dla tego sposobu.

## DYSKUSJA WYNIKÓW I WNIOSKI

Otrzymany wynik w dużej mierze zależał od wyniku otrzymanego drogą bezpośredniego pomiaru średnic walca. Warto zwrócić uwagę na dużą rozbieżność wyniku otrzymanego metodą wyznaczania przyspieszenia względem metody bezpośredniego pomiaru. Ich różnica z niewielkim marginesem przeszła test  $3\sigma$ . Duża rozbieżność tych wyników może wynikać z błędów eksperymentalnych. Przede wszystkim, walec oraz równię należałoby wycierać po każdej serii pomiarowej, aby pozbyć się zanieczyszczeń, które mogłyby wpłynąć na otrzymywane wyniki. Jednak nie uczyniono tego, ponieważ ręczniki papierowe nie zostały dostarczone do pracowni. Inną możliwą przyczyną może być stan równi, która nosiła wyraźnie ślady eksploatacji, a jej powierzchnię przecinały sporej wielkości rysy. Dodatkowo, jak wspomniano w analizie danych, pomiar odległości pomiędzy fotokomórkami był



obarczony sporą niepewnością. Biorąc pod uwagę te wszystkie przeciwności rozbieżność wyników staje się mniej zaskakująca. Aby zyskać absolutną pewność co do otrzymanego wyniku ostatecznego, należałoby przeprowadzić dodatkowe eksperymenty na innych równiach przy zachowaniu szczególnej ostrożności przy pomiarach drogi oraz przykładając szczególną wagę do czystości walca. Aczkolwiek otrzymany wynik jest obarczony niewielką niepewnością w porównaniu do wszystkich pomiarów pośrednich, które doprowadziły do niego. Jak widać, skuteczna analiza danych pozwoliła na znaczące zmniejszenie niepewności. Warto jeszcze zwrócić uwagę na podejrzenie niską wartość  $\chi^2_{01}$ . Choć mogłoby się wydawać, że tak niska wartość świadczy o doskonałym dopasowaniu modelu do wyników, to może być również podstawą, by stwierdzić iż otrzymane wyniki  $w_i$  nie są niezależne od siebie. Wziąwszy pod uwagę wszystkie wymienione przeciwności może to być prawdą, walec zbierał coraz więcej brudu z każdym kolejnym pomiarem, więc kolejne otrzymywane wartości faktycznie mogły zależeć od siebie.

## Literatura

- [1] D. Halliday, R. Resnick, J. Walker, *Podstawy Fizyki, Tom 1*, PWN, Warszawa, 2003, s. 273.
- [2] D. Halliday, R. Resnick, J. Walker, *Podstawy Fizyki, Tom 1*, PWN, Warszawa, 2003, s. 301.
- [3] J. R. Taylor, *Wstęp do analizy błęd pomiarowego*, PWN, Warszawa, 1995, s. 101.
- [4] J. R. Taylor, *Wstęp do analizy błęd pomiarowego*, PWN, Warszawa, 1995, s. 81.
- [5] J. R. Taylor, *Wstęp do analizy błęd pomiarowego*, PWN, Warszawa, 1995, s. 251.
- [6] N. W. Smirnow, I. W. Dunin-Barkowski, *Kurs rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej dla zastosowań technicznych*, PWN, Warszawa, 1973, s. 544.
- [7] J. R. Taylor, *Wstęp do analizy błęd pomiarowego*, PWN, Warszawa, 1995, s. 169.