

# WSPÓŁCZYNNIKI ZAŁAMANIA W RUTYLU

T. Fąs

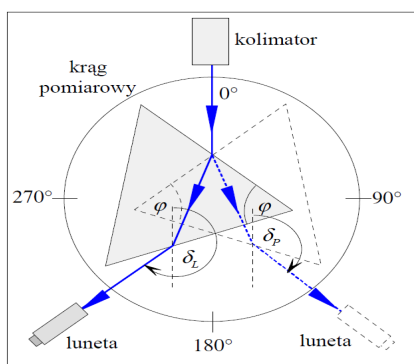
14 grudnia 2017

## STRESZCZENIE

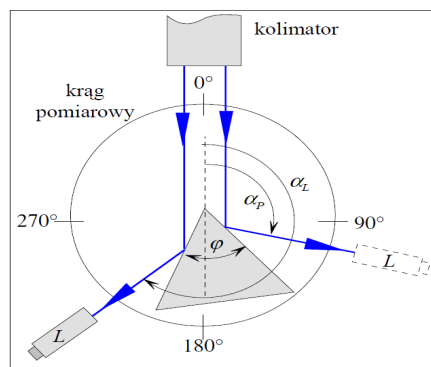
W doświadczeniu wyznaczono zależność współczynników załamania światła od długości fali dla promienia zwykłego i nadzwyczajnego w uproszczonym modelu Sellmeiera postaci  $n^2 - 1 = B_i \lambda^2 / (\lambda^2 - C_i)$ . Otrzymano wartości: dla promienia zwykłego  $B_z = 5,0929 \pm 0,0083 \text{ 1/nm}^2$ ,  $C_z = 46524 \pm 432 \text{ nm}^2$ , dla promienia nadzwyczajnego:  $B_n = 6,309 \pm 0,038 \text{ 1/nm}^2$ ,  $C_n = 51692 \pm 1564 \text{ nm}^2$ .

## WSTĘP

Kryształ rutylu –  $\text{TiO}_2$  – jest kryształem wykazującym dwójłomność. W związku z tym promień padający na taki kryształ ulega rozdzieleniu na promień zwykły i nadzwyczajny, o różnych właściwościach. Zależność współczynnika załamania dla kryształu rutylu jest inna dla promienia zwykłego i nadzwyczajnego. Celem doświadczenia było znalezienie tej zależności dla obu promieni.



Rysunek 1: Wyznaczanie kąta najmniejszego odbicia.



Rysunek 2: Wyznaczanie kąta łamiącego.

Jeżeli promień pada na kryształ tak, jak na Rysunku 1, to współczynnik załamania  $n$  można wyznaczyć, korzystając z prawa Snella. Jeżeli znamy kąt najmniejszego odbicia  $\delta$  oraz kąt łamiący pryzmatu  $\varphi$ , to  $n$  wyrażone jest wzorem:

$$n = \frac{\sin\left(\frac{1}{2}(\delta + \varphi)\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\varphi\right)}, \quad (1)$$

przy czym zachodzi równość:

$$\delta = \frac{1}{2}(\delta_l - \delta_p). \quad (2)$$

Z kolei z Rysunku 2 wynika, iż kąt łamiący pryzmatu można wyznaczyć ze związku

$$\varphi = \frac{1}{2}(\alpha_l - \alpha_p). \quad (3)$$

Jeżeli znane są różne wartości współczynników  $n$  dla różnych długości fali  $\lambda$ , to można do tych danych dopasować zależność:

$$n = A_0 + \frac{A_1}{\lambda^2}, \quad (4)$$

lub

$$n^2 - 1 = \frac{B_1 \lambda^2}{\lambda^2 - C_1}, \quad (5)$$

przy czym  $A$ ,  $B$ ,  $C$  to współczynniki dopasowania.

## UKŁAD DOŚWIADCZALNY

Do pomiarów kątów skorzystano z goniometru, a źródłem światła była lampa sodowa i rtęciowa. Goniometr w trakcie pomiarów był ustawiany zgodnie z Rysunkiem 1 i Rysunkiem 2. Do rozróżnienia promienia zwyczajnego od nadzwyczajnego wykorzystano polaryzator.

## WYNIKI POMIARÓW

Zmierzono:  $\alpha_p = 140^\circ 01'$ ,  $\alpha_l = 200^\circ 20'$ . Tabela 1 przedstawia pomiary kątów  $\delta_l$  i  $\delta_p$  wraz z powiązаныmi z nimi długościami fali.

Tabela 1: Kąty załamania.

Długość fali $\lambda$ [nm]	589,3	650,0	546,1	404,1
$\delta_p$ (zwyczajny)	123°33'	125°10'	122°59'	114°29'
$\delta_l$	247°46'	234°20'	236°56'	245°27'
$\delta_p$ (nadzwyczajny)	112°14'	113°03'	109°55'	97°33'
$\delta_l$	235°23'	246°55'	249°54'	262°20'

## ANALIZA DANYCH

Niepewność pomiarów kątów  $\alpha_l$  i  $\alpha_p$  oszacowano na  $\Delta_\alpha = 1'$ . Z kolei niepewności kątów  $\delta_i$  przyjęto jako równe  $\Delta_\delta = 5'$ , ponieważ uchwycenie momentu, w którym dochodzi do cofania się obrazu kolimatora jest trudne. Również goniometr nie był idealnie wypoziomowany, co mogło zaburzyć niektóre pomiary.

Aby przenieść te niepewności na niepewności kąta łamiącego i kąta najmniejszego odchylenia, skorzystano z metody propagacji małych błędów. Ogólny wzór przenoszenia niepewności w tej metodzie jest następujący:

$$u_f^2 = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} u_i \right)^2 + \sum_{i=1, i \neq j}^n \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} c_{ij} \right), \quad (6)$$

gdzie wielkość  $f$  zależy od wielkości  $x_i$  o niepewnościach  $u_i$  i o ocenach kowariancji  $c_{ij}$  [1]. W przypadku mierzonych kątów, kowariancja między nimi wynosi 0.

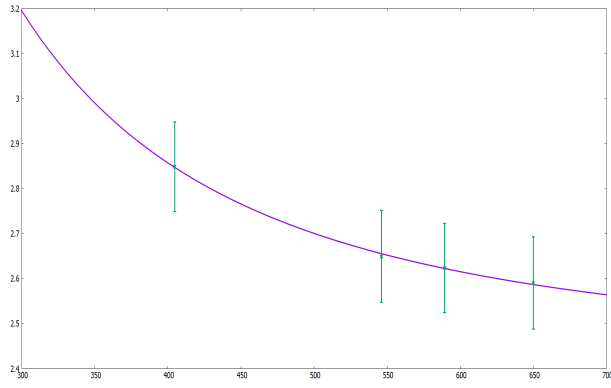
Stosując dane z Tabeli 1 oraz Równanie (6) wyznaczono kąt łamiący pryzmatu  $\varphi = (30,158 \pm 0,012)^\circ$  oraz współczynniki załamania  $n_z$  i  $n_n$  dla kolejno promienia zwyczajnego i nadzwyczajnego wraz z ich niepewnościami  $u_i$ . Wyniki umieszczono w Tabeli 2.

Tabela 2: Współczynniki załamania i ich niepewności.

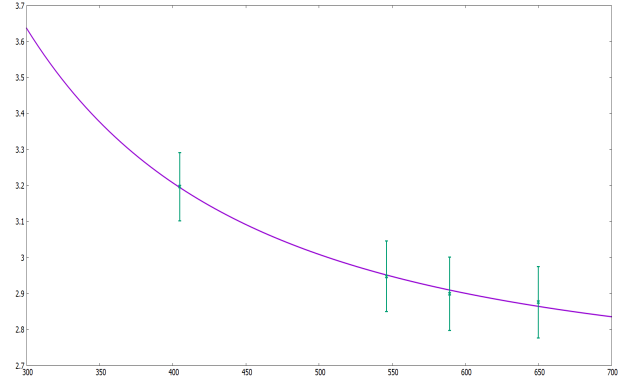
Długość fali $\lambda$ [nm]	589,3	650,0	546,1	404,7
$n_z$	2,623	2,590	2,649	2,849
$u_{nz}$	0,099	0,102	0,102	0,099
$n_n$	2,899	2,881	2,948	3,197
$u_{nn}$	0,102	0,099	0,098	0,095

Otrzymane współczynniki dla linii widmowej sodu  $\lambda = 589,3$  nm są zgodne ze współczynnikami wzorcowymi, które wynoszą odpowiednio  $n_z = 2,61$ ,  $n_n = 2,910$  [2]. Zgodność zbadano za pomocą testu  $3\sigma$ , czyli sprawdzono, czy różnica wyników jest mniejsza od trzykrotnej niepewności tej różnicy.

W następnym kroku, korzystając z programu *gnuplot* wykonano dopasowanie danych z Tabeli 2 zgodnie z Równaniem (4). Krzywe najlepszego dopasowania są przedstawione na Rysunku 3 i Rysunku 4, a parametry dopasowania wraz z ich niepewnościami  $u_i$  przedstawione są w Tabeli 3.



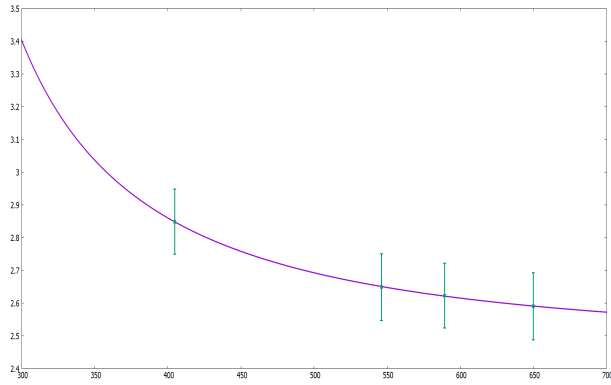
Rysunek 3: Dopasowanie danych: promień zwyczajny.



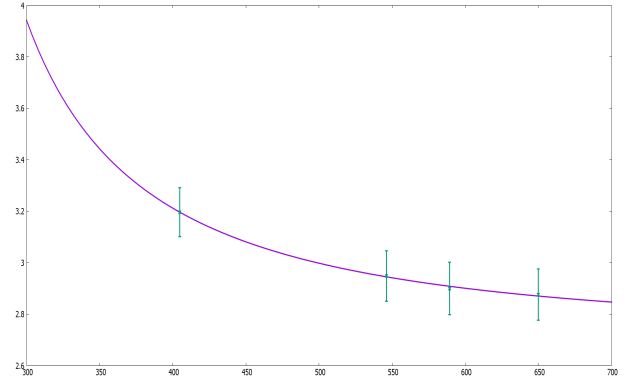
Rysunek 4: Dopasowanie danych: promień nadzwyczajny.

Tabela 3: Parametry dopasowania.

Promień	$A_0$	$A_1$ [nm <sup>2</sup> ]	$u_{A0}$	$u_{A1}$ [nm <sup>2</sup> ]	$\chi^2$
Zwyczajny	2,4234	69696	0,0050	1629	0,0028
Nadzwyczajny	2,638	91080	0,015	4894	0,028



Rysunek 5: Dopasowanie danych: promień zwyczajny.



Rysunek 6: Dopasowanie danych: promień nadzwyczajny.

Tabela 4: Parametry dopasowania.

Promień	$B_1$ [1/nm <sup>2</sup> ]	$C_1$ [nm <sup>2</sup> ]	$u_{B1}$ [1/nm <sup>2</sup> ]	$u_{C1}$ [nm <sup>2</sup> ]	$\chi^2$
Zwyczajny	5,0929	46525	0,0084	432	0,00077
Nadzwyczajny	6,308	51693	0,038	1564	0,017

Analogiczną procedurę zastosowano w przypadku dopasowywania danych do Równania (5). Krzywe wynikłe z tego dopasowania przedstawiono na Rysunku (5) i Rysunku (6), a parametry dopasowania są przedstawione w Tabeli 4.

Otrzymane wartości  $\chi^2$  sugerują, iż zależność wyrażona Równaniem (5), czyli model Sellmeiera, jest lepszym odwzorowaniem faktycznie uzyskiwanych wyników.

## DYSKUSJA WYNIKÓW I WNIOSKI

Dysponując gotową krzywą kalibracyjną, można odwrócić zależność wyrażoną przez Równanie (5) by uzyskać zależność pozwalającą na wyznaczanie długości fali przy znajomości współczynnika załamania. W ten sposób otrzymano spektroskop. Jednak nie przeprowadzono tej procedury w analizie danych, gdyż ze względu na małą liczbę punktów zdecydowano się włączyć współczynniki załamania sodu do analizy kalibracyjnej. Jednak niezwykle niskie wartości  $\chi^2$  jak i niskie wartości niepewności współczynników pozwalają sądzić, iż otrzymane długości fali byłyby zgodne z wartościami rzeczywistymi jak i byłyby obarczona małymi niepewnościami.

## Literatura

- [1] J. R. Taylor, *Wstęp do analizy błędu pomiarowego*, PWN, Warszawa, 1995, s. 175.
- [2] J. R. DeVore, *Refractive Indices of Rutile and Sphalerite*, OSA, 06.1951, t. 41 s. 416–419.