WAHADŁA SPRZĘŻONE

T. Fąs

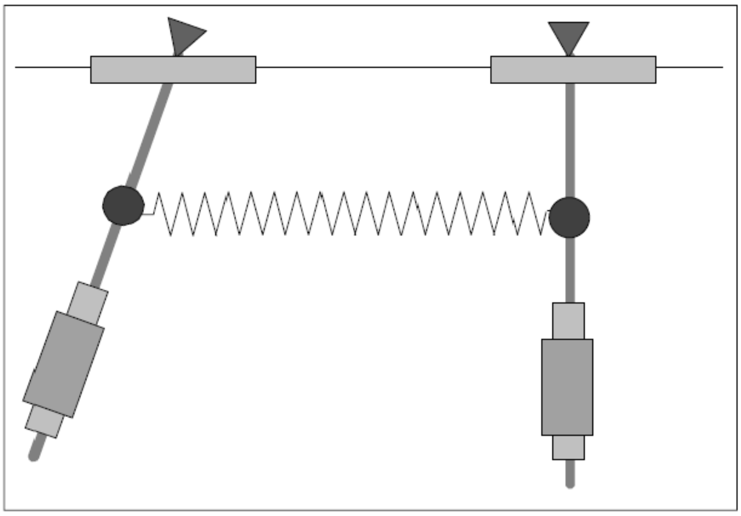
12 grudnia 2017

STRESZCZENIE

W doświadczeniu wyznaczano współczynnik sprężystości k sprężyny dwoma metodami. Otrzymano ostateczną wartość $k = (26,295030 \pm 0,000036)$ N/m.

WSTĘP

Ruch dwóch identycznych wahadeł o momencie bezwładności I połączonych sprężyną o współczynniku sprężystości k silnie zależy od warunków początkowych. Ich okresy różnią się zależności od wzajemnego położenia początkowego.



Rysunek 1: Wahadła sprzężone.

Dla układu przedstawionego na Rysunku 1, możliwe są następujące warunki:

1. Jeżeli wahadła są wychylone o taki sam kąt w tym samym kierunku, to ich okresy są identyczne i dane wzorem:
$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgr}}. \tag{1}$$
2. Jeżeli są wychylone o taki sam kąt, ale w przeciwne strony, to okres ich ruchu dany jest wzorem:
$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgr + 2ka^2}}. \tag{2}$$
3. Jeżeli jedno z wahadeł jest unieruchomione, to okres drgań drugiego z nich wyraża się wzorem:
$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgr + ka^2}}. \tag{3}$$

4. Jeżeli jedno z wahadeł początkowo spoczywa, to dochodzi do zjawiska okresowej zmiany amplitudy drgań wahadeł, czyli dudnień. W takim wypadku okres szybkich drgań dany jest wzorem:

$$T_s = \frac{2T_1T_2}{T_1 + T_2}, \tag{4}$$

a okres dudnień dany jest wzorem:

$$T_d = \frac{2T_1T_2}{T_1 - T_2}. \tag{5}$$

Przy czym w wzorach m oznacza masę wahadła, a jest odległością sprężyny od osi obrotu, a r odległością środka masy od osi obrotu.

Doświadczenie miało na celu pomiar tych wszystkich okresów drgań, sprawdzenie, czy zmierzone wartości T_s i T_d są zgodne z ich wartościami teoretycznymi oraz wyznaczenie współczynnika sprężystości k.

Inną metodą wyznaczania współczynnika sprężystości jest wykorzystanie prawa Hooke'a, które głosi, iż wydłużenie Δx sprężyny jest wprost proporcjonalne do działającej na nią siły F. Czyli:

$$F = k\Delta x. \tag{6}$$

Mierząc zmianę wydłużenia sprężyny przy działaniu znanej siły można w prosty sposób wyznaczyć stałą sprężystości k.

UKŁAD DOŚWIADCZALNY

Układ doświadczalny składał się z dwóch wahadeł, sprężyny, nitki, zapalniczki, stopera, miarki, ciężarków, ostrza pryzmatycznego i wagi.

Przy pomocy stopera mierzono okresy wahadeł, a przy pomocy nitki wiązano wahadła, by zwalniać je w tej samej chwili przepalając sznurek. Do przytrzymania jednego z wahadeł wykorzystano statyw.

W trakcie wykonywania pomiarów związanych z prawem Hooke'a sprężyna była zawieszona na statywie. Na sprężynie zawieszano kolejne ciężarki, a odchylenie mierzono przy pomocy miarki.

Również przy pomocy miarki zmierzono odległość sprężyny od osi obrotu. Przy pomocy ostrza pryzmatycznego wyznaczono położenie środka masy i miarką wyznaczono jego odległość od osi obrotu.

Aby upewnić się, czy wahadła są identyczne, badano ich synchronizację w trakcie kilkuminutowego ruchu. Stwierdzono, że ruch wahadeł jest zgodny w odpowiednio długim okresie.

WYNIKI POMIARÓW

W trakcie pomiarów mierzono, dla lepszej dokładności, dziesięć okresów T_1, T_2 i T_0 oraz pięć okresów T_s. Planowano również zmierzyć wielokrotność okresów T_d, jednakże uciekający czas eksperymentu na to nie pozwolił. Wyniki pomiarów przedstawiono w Tabeli 1. Pomiary przeprowadzono dla wartości $r = 81,9$ cm,

Tabela 1: Wyniki pomiarów okresów.

$10T_1$ [s]	$10T_2$ [s]	T_d [s]	$5T_s$ [s]	$10T_0$ [s]
18,91	16,06	20,75	9,44	17,18
18,88	15,78	20,50	9,41	17,18
18,88	16,08	20,87	9,41	17,19
18,81	16,00	20,91	9,43	17,16
18,97	15,84	20,97	9,50	17,19
19,03	16,00	20,82	9,53	17,13
18,87	15,94	20,31	9,50	17,10
18,84	15,93	20,87	9,47	17,15
18,78	16,00	20,78	9,47	17,13
18,90	15,97	20,69	9,41	17,19

$a = 41,5$ cm, masa m wahadła wynosiła $m = (3000 \pm 40)$ g. Rozdzielczość stopera wynosiła $\Delta_t = 0,01$ s, a czas reakcji obserwatora wynosił $t_r = 0,3$ s.

W przypadku rozciągania sprężyny wykonano pomiar długości od górnej krawędzi statywu do końca sprężyny. Rożnica pomiędzy długością przy obciążeniu, a długością bez obciążenia jest szukanym wydłużeniem sprężyny. Pomiar masy był dokonywany przy pomocy wagi i ponawiany po każdym dodaniu nowego ciężarka. Tabela 2 przedstawia wyniki pomiarów dla tej części eksperymentu.

Tabela 2: Wyniki pomiarów: prawo Hooke'a.

Masa m ciężarków [g]	0	120,49	140,30	159,79	179,38	199,20	219,08	239,79	278,81	308,33	378,75
Długość x [cm]	34,0	38,3	39,5	40,0	40,7	41,5	42,3	43,0	44,2	45,7	47,9

ANALIZA DANYCH

Pomiary czasu dla każdej serii postanowiono uśrednić, korzystając ze średniej arytmetycznej:

$$\bar{T} = \sum_{i=1}^{N} \frac{T_i}{N}, \tag{7}$$

gdzie N jest liczbą pomiarów, w tym przypadku $N = 10$.

Ostateczne niepewności pomiarów czasu u_T obliczono, korzystając z odchylenia standardowego średniej s, które jest wyrażone wzorem:

$$s_T^2 = \sum_{i=1}^{N} \frac{(T_i - \bar{T})^2}{N(N-1)} \quad [1] \tag{8}$$

oraz ze związku pomiędzy odchyleniem standardowym średniej, a maksymalnym dopuszczalnym błędem pomiaru Δ:

$$u_T = \sqrt{s_t^2 + \frac{\Delta_T^2}{3} + t_r^2}. \tag{9}$$

Następnie przeniesiono to na grunt pojedynczych okresów, czyli wielkości podzielono przez 10 lub 5. Wyniki analizy przedstawia Tabela 3.

Tabela 3: Analiza okresów.

	$10T_1$ [s]	$10T_2$ [s]	T_d [s]	$5T_s$ [s]	$10T_0$ [s]
Średnia	18,89	15,96	20,75	9,46	17,16
Odchylenie	0,023	0,029	0,064	0,014	0,010
Pojedynczy okres	1,889	1,596	20,75	1,891	1,716
Ostateczna niepewność	0,030	0,030	0,31	0,060	0,030

Porównanie okresów T_s i T_d z ich wartościami teoretycznymi wynikającymi z Równania (4) i Równania (5) przeprowadzono, korzystając z testu 3σ. Polega on na sprawdzeniu, czy różnica dwóch porównywanych wielkości jest mniejsza od trzykrotności niepewności tej różnicy. W tym przypadku niepewność związaną z wartościami teoretycznymi T_s i T_d obliczono, korzystając z metody propagacji małych błędów. Wzór przenoszenia niepewności w tej metodzie jest następujący:

$$u_f^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} u_i \right)^2, \tag{10}$$

gdzie wielkość f zależy od wielkości x_i o niepewnościach u_i [2].

Otrzymano wartości $T_{s2} = 1,730 \pm 0,022$ s oraz $T_{d2} = 20,60 \pm 3,08$ s. Tak więc różnica $T_s - T_{s2}$ wynosi 0,161 s przy niepewności 0,064 s, a różnica $T_d - T_{d2}$ wynosi 0,15 s przy niepewności 3,1 s. Jak widać, obie te wielkości są ze sobą zgodne na poziomie 3σ.

W dalszej części analizy skupiono się na współczynniku sprężystości k. Korzystając z Równania (1), Równania (2) i Równania (3) oraz wiedząc że $2\pi = T_i\omega_i$ otrzymano:

$$k_1 = \frac{\left(\omega_2^2 - \omega_1^2\right) mgr}{2a^2\omega_1^2}. \tag{11}$$

$$k_2 = \frac{\left(\omega_0^2 - \omega_1^2\right) mgr}{a^2\omega_1^2}. \tag{12}$$

Niepewność tych współczynników obliczono, korzystając z Równania (10), uprzednio wyznaczając niepewności ω_i. Za niepewności pomiaru r i a przyjęto 1 mm, ponieważ ustawienie miarki dokładnie w punkcie obrotu było utrudnione. Wykorzystano wartość $g = 9,80665$ m/s^2. Otrzymano wartości: $k_1 = (28,0 \pm 4,6)$ N/m, $k_2 = (29,6 \pm 8,0)$ N/m. Przy tak dużych niepewnościach wartości bez problemu przechodzą test σ. Aby uzyskać lepszą ocenę wartości współczynnika k obliczono średnią ważoną obu otrzymanych współczynników. Średnia ważona N wielkości x_i o niepewnościach u_i zdefiniowana jest w następujący sposób:

$$\bar{x}_w = \frac{\sum_{i=1}^{N} \frac{x_i}{u_i^2}}{\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{u_i^2}}. \tag{13}$$

Niepewności średniej ważonej wrażają się w następującymi wzorami:

$$u_{int}^2 = \frac{1}{\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{u_i^2}}, \tag{14}$$

$$u_{ext}^2 = \frac{u_{int}^2}{N-1} \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{x_i - \bar{x}_w}{u_i} \right)^2. \tag{15}$$

Jako ostateczną niepewność niepewność wielkości $\bar{x}_w$ wybiera się większą z niepewności u_{int} lub u_{ext} [3].

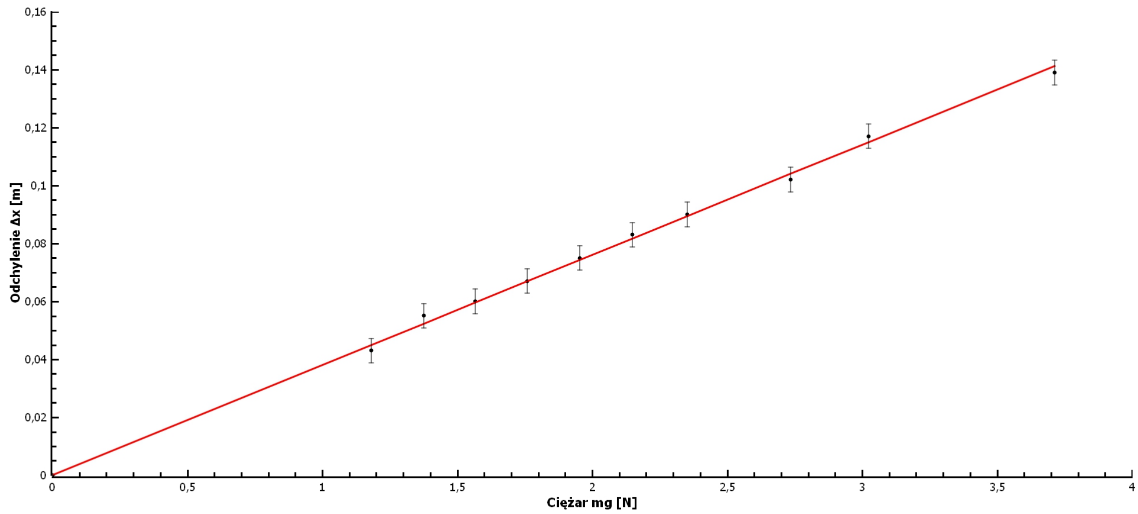
Po podstawieniu odpowiednich wartości otrzymano $k = 28,4 \pm 4,2$ N/m.

W przypadku analizy danych związanych z prawem Hooke'a niepewność pomiaru masy wynosiła 0,01 g, a niepewność długości przyjęto jako 3 mm, ponieważ ciężko było znaleźć łatwo dostępny punkt charakterystyczny znakujący koniec sprężyny. Aby wyznaczyć współczynnik sprężystości postanowiono do otrzymanych danych dopasować prostą. Jako, że niepewność związana z wydłużeniem sprężyny jest procentowo większa od niepewności pomiaru masy ciężarków, to na osi OY zdecydowano się odłożyć wielkość Δx. Dodatkowo, dla wygody analizy, zamieniono jednostki na metry i kilogramy i obliczono siłę ciężaru związaną z danym ciężarkiem. Niepewność wydłużenia obliczono z Równania (10). Ostateczne wartości punktów wraz z niepewnościami przedstawiono w Tabeli 4.

Tabela 4: Analiza danych: prawo Hooke'a.

Ciężar mg [N]	0	1,182	1,376	1,567	1,759	1,953	2,148	2,352	2,734	3,024	3,714
Wydłużenie Δx [m]	0	0,043	0,055	0,060	0,067	0,075	0,083	0,090	0,102	0,117	0,139
Niepewność wydłużenia [m]	0	0,004	0,004	0,004	0,004	0,004	0,004	0,004	0,004	0,004	0,004

Z Równania (6) wynika, że efektem dopasowania powinna być prosta, o współczynniku kierunkowym równym odwrotności stałej sprężystości: $\Delta x = mg/k$. Aby dopasować prostą do punktów z Tabeli 4 posłużono się programem SciDAvis. Otrzymaną w ten sposób krzywą najlepszego dopasowania przedstawiono na Rysunku 2.



Rysunek 2: Wahadła sprzężone.

Współczynnik kierunkowy tej krzywej wynosi $1/k = 0,038030000000 \pm 0,000000052727$ m/N, a wartość $\chi^2 = 1,48$. Wartość ta jest mniejsza od wartości krytycznej, tak więc dane są niesprzeczne z Równaniem (6).

Odwracając współczynnik kierunkowy otrzymano wartość współczynnika $k = 26,295030 \pm 0,000036$ N/m. Wielkość ta, na mocy testu 3σ jest zgodna z poprzednio otrzymaną wartością współczynnika. Zastosowanie średniej ważonej do obu tych wielkości zwraca praktycznie taki sam wynik, jak obliczony właśnie współczynnik. Dlatego też ostateczna wartość stałej sprężystości wynosi $k = 26,295030 \pm 0,000036$ N/m.

DYSKUSJA WYNIKÓW I WNIOSKI

Otrzymana wartość współczynnika cechuje się niewiarygodnie niską niepewnością, jednakże patrząc na bardzo dobre dopasowanie prostej do punktów oraz na wartości niepewności, które same w sobie są niskie, to otrzymanie takiej wartości dziwi trochę mniej. Zdecydowanie mniej dziwi zgodność wyników w przypadku okresów dudnień i drgań szybkich. Dysponując wielokrotnymi pomiarami oraz zsynchronizowanymi wahadłami otrzymanie zgodnych wyników było niemal pewne. Ostatecznie można uznać uzyskane wynika za zadowalające.

Literatura

[1] J. R. Taylor, *Wstęp do analizy błędu pomiarowego*, PWN, Warszawa, 1995, s. 101.

[2] J. R. Taylor, *Wstęp do analizy błędu pomiarowego*, PWN, Warszawa, 1995, s. 175.

[3] J. R. Taylor, *Wstęp do analizy błędu pomiarowego*, PWN, Warszawa, 1995, s. 169.