

# DOŚWIADCZALNE SPRAWDZENIE DRUGIEJ ZASADY DYNAMIKI

T. Fąs

8 listopada 2017

## STRESZCZENIE

Celem doświadczenia było sprawdzenie, czy w warunkach eksperymentu spełniona jest druga zasada dynamiki Newtona. Udało się udowodnić, że przyspieszenie jest wprost proporcjonalne do działającej siły oraz odwrotnie proporcjonalne do masy ciała. Dodatkowo, korzystając z wyznaczonej doświadczalnie masy układu, wyznaczono masę efektywną bloczka  $m_{eff} = 0,0598 \pm 0,0084$  kg.

## WSTĘP

Zgodnie z drugą zasadą dynamiki Newtona, jeśli na ciało o masie  $m$  działa siła  $F$  lub siły o wypadkowej  $F$ , to ciało to porusza się z przyspieszeniem:

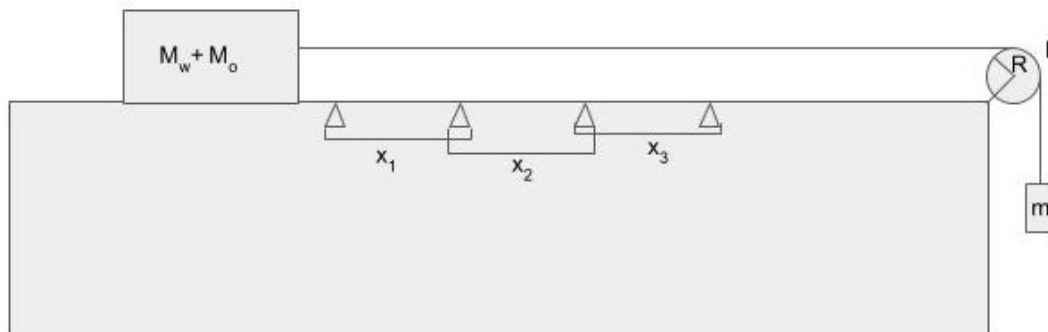
$$a = \frac{1}{m}F. \quad (1)$$

Dla układu przedstawionego na Rysunku 1 zależność z Równania (1) przyjmuje postać:

$$a = \frac{mg}{M_w + M_o + m + I/R^2} = \frac{mg}{M}, \quad (2)$$

gdzie  $I$  jest momentem bezwładności krążka, a  $R$  jego promieniem. Celem doświadczenia było sprawdzenie, czy przy stałej masie układu  $M = M_w + M_o + m + I/R^2$  przyspieszenie jest wprost proporcjonalne do siły oraz czy przy stałej sile  $mg$  przyspieszenie jest odwrotnie proporcjonalne do masy.

## UKŁAD DOŚWIADCZALNY



Rysunek 1: Układ doświadczalny.

W doświadczeniu wykorzystano: wózek o masie  $M_w$ , 4 druty jako ciężarki o masie  $m$ , ciężarki o masach  $M_o$ , bleczek o promieniu zewnętrznym  $R_1$  i wewnętrznym  $R_2$  i o masie  $m_b$ , miarkę, wagę, nitkę oraz tor powietrzny wyposażony w fotokomórki. Układ był złożony tak, jak przedstawia to Rysunek 1, gdzie trójkąty symbolizują położenie fotokomórek.

## WYNIKI POMIARÓW

W pierwszej kolejności zważono wózek oraz ciężarki i otrzymano wartości:  $M_w = 0,957$  kg,  $M_{o1} = 0,500$  kg,  $M_{o2} = 0,500$  kg,  $M_{o3} = 0,499$  kg,  $M_{o4} = 0,250$  kg oraz  $m = 0,010$  kg dla każdego drutu. Za niepewność pomiaru przyjęto wartość  $u_m = 0,001$  kg.

Następnie zmierzono szerokość fotokomórki  $d = 1,4$  cm i ustawiono je w odległościach  $x_1 = x_2 = x_3 = 21,4$  cm. W ten sposób odległość między środkami fotokomórek wynosi 20 cm. Pomiarów dokonano przy pomocy miarki o działce pomiaru  $\Delta_x = 0,1$  cm. Działka pomiaru fotokomórki wynosi  $\Delta_t = 0,01$  s.

Przy takiej konfiguracji zmierzono trzykrotnie czasy przejazdu wózka między pierwszą fotokomórką, a każdą kolejną. W pierwszej części wózek był obciążony drutami i po każdym trzech pomiarach przekładano drut z wózka i doczepiano go do końcówki nitki. W ten sposób zwiększano siłę wymuszającą ruch, jednocześnie zachowując stałą masę układu.

W drugiej części pomiarowej do końcówki nitki doczepiono cztery druty i nie zmieniano ich liczby przez cały czas trwania pomiaru. W ten sposób zapewniono stałość siły wymuszającej. Obciążenie wózka zmieniano wykorzystując ciężarki o masach 500 g i 250 g w różnych konfiguracjach. Obciążenie wózka było zmieniane po każdym trzech pomiarach czasu przejazdu.

Po wykonaniu pomiarów przesunięto fotokomórki na nowe pozycje, tworząc tym samym nowe odległości i nowe punkty pomiarowe. Nowe odległości wynosiły:  $x_1 = 26,4$  cm,  $x_2 = 26,4$  cm,  $x_3 = 18,4$  cm. Wszystkie wyniki zostały zebrane w Tabeli 1 i Tabeli 2 oraz Tabeli 3.

Tabela 1: Wyniki pomiarów: stała masa układu.

Jeden drucik ( $m = 0,01$ kg)							Dwa druciki ( $m = 0,02$ kg)					
Odległość $s$ [m]	0,20	0,40	0,60	0,25	0,50	0,67	0,20	0,40	0,60	0,25	0,50	0,67
Czas $t_1$ [s]	1,36	2,17	2,83	1,58	2,48	2,98	0,95	1,52	1,98	1,10	1,74	2,09
Czas $t_2$ [s]	1,36	2,17	2,83	1,58	2,48	2,98	0,95	1,52	1,99	1,11	1,74	2,10
Czas $t_3$ [s]	1,36	2,17	2,84	1,57	2,48	2,98	0,95	1,52	1,99	1,11	1,74	2,10
Trzy druciki ( $m = 0,03$ kg)							Cztery druciki ( $m = 0,04$ kg)					
Czas $t_1$ [s]	0,77	1,24	1,62	0,90	1,42	1,71	0,67	1,07	1,40	0,77	1,22	1,47
Czas $t_2$ [s]	0,77	1,24	1,62	0,90	1,42	1,70	0,67	1,07	1,40	0,78	1,22	1,47
Czas $t_3$ [s]	0,77	1,24	1,62	0,91	1,41	1,69	0,67	1,06	1,39	0,78	1,23	1,47

Tabela 2: Wyniki pomiarów: stała siła

$M_o = 0,25$ kg							$M_o = 0,5$ kg					
Odległość [m]	0,20	0,40	0,60	0,25	0,50	0,67	0,20	0,40	0,60	0,25	0,50	0,67
Czas $t_1$ [s]	0,74	1,19	1,56	0,87	1,37	1,65	0,81	1,30	1,70	0,96	1,50	1,81
Czas $t_2$ [s]	0,74	1,19	1,56	0,87	1,37	1,65	0,81	1,30	1,70	0,95	1,50	1,80
Czas $t_3$ [s]	0,74	1,19	1,56	0,87	1,37	1,65	0,81	1,30	1,70	0,95	1,49	1,79
$M_o = 0,75$ kg							$M_o = 1$ kg					
Czas $t_1$ [s]	0,88	1,40	1,84	1,03	1,62	1,95	0,94	1,50	1,97	1,10	1,73	2,07
Czas $t_2$ [s]	0,89	1,40	1,84	1,03	1,62	1,95	0,94	1,50	1,97	1,10	1,73	2,08
Czas $t_3$ [s]	0,88	1,40	1,84	1,03	1,62	1,94	0,94	1,50	1,97	1,11	1,74	2,09
$M_o = 1,25$ kg							$M_o = 1,5$ kg					
Czas $t_1$ [s]	1,00	1,60	2,09	1,17	1,84	2,21	1,05	1,69	2,20	1,23	1,94	2,33
Czas $t_2$ [s]	1,00	1,60	2,09	1,17	1,84	2,21	1,05	1,69	2,20	1,24	1,94	2,33
Czas $t_3$ [s]	1,00	1,60	2,09	1,17	1,84	2,21	1,05	1,70	2,20	1,23	1,93	2,32

Tabela 3: Stała siła: pomiar kontrolny

$M_o = 0$ kg						
Odległość [m]	0,20	0,40	0,60	0,25	0,50	0,67
Czas $t_1$ [s]	0,67	1,07	1,40	0,78	1,23	1,47
Czas $t_2$ [s]	0,67	1,07	1,40	0,78	1,23	1,47
Czas $t_3$ [s]	0,67	1,07	1,40	0,78	1,23	1,47

## ANALIZA DANYCH

W pierwszej kolejności obliczono odległość  $s$  między środkiem pierwszej fotokomórki i każdej kolejnej. Odległości te dane są wzorami:

$$s_1 = x_1 - d \quad (3)$$

$$s_2 = x_1 + x_2 - 2d \quad (4)$$

$$s_3 = x_1 + x_2 + x_3 - 3d \quad (5)$$

Otrzymano wartości takie jak w Tabeli 1. Niepewności tych wielkości można obliczyć, korzystając z metody propagacji małych błędów. Ogólny wzór przenoszenia niepewności w tej metodzie jest następujący:

$$u_f^2 = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} u_i \right)^2 + \sum_{i=1, i \neq j}^n \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} c_{ij} \right), \quad (6)$$

gdzie wielkość  $f$  zależy od wielkości  $x_i$  o niepewnościach  $u_i$  i o ocenach kowariancji  $c_{ij}$  [1]. W rozpatrywanym przypadku kowariancja wynosi zero. Niepewność pomiaru odległości lub szerokości fotokomórki dana jest wzorem:

$$u_x = \frac{\Delta_x}{\sqrt{3}} \quad [2]. \quad (7)$$

Łącząc Równanie (6) z Równaniem (5) i równaniem (7) otrzymano:

$$u_{s1} = \frac{\sqrt{2}\Delta_x}{\sqrt{3}} \quad (8)$$

$$u_{s2} = \frac{2\Delta_x}{\sqrt{3}} \quad (9)$$

$$u_{s3} = \frac{\sqrt{6}\Delta_x}{\sqrt{3}}. \quad (10)$$

W przypadku analizy czasów przejazdu wyznaczono średnią dla każdego odcinka jak i niepewność tej średniej korzystając ze wzorów:

$$\bar{t} = \sum_{i=1}^n \frac{t_i}{n} \quad (11)$$

$$f_t^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(t_i - \bar{t})^2}{n(n-1)} \quad [2]. \quad (12)$$

Przy czym na mocy równania (6) ostateczna niepewność pomiaru czasu dana jest wzorem;

$$u_t = \sqrt{f_t^2 + \frac{\Delta_t^2}{3}}. \quad (13)$$

Wartości odległości, średniego czasu oraz ich niepewności znajdują się w Tabeli 4, Tabeli 5 i Tabeli 6.

W dalszej części analizy zastąpiono oznaczenie  $\bar{t}$  zwykłym  $t$  ze względu na prostotę i estetykę.

Zależność  $s(t)$  jest klasycznym przykładem prostoliniowego ruchu z przyspieszeniem, który wyraża się wzorem:

$$r(t) = r_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2, \quad (14)$$

gdzie  $r_0$  jest położeniem początkowym, a  $v_0$  jest prędkością początkową. Zależność tę można sprowadzić do postaci liniowej dzieląc obie strony przez  $t$ :

$$\frac{r - r_0}{t} = v_0 + \frac{1}{2} a t \quad (15)$$

Dodatkowo w rozpatrywanym przypadku  $r - r_0 = s$ , co dodatkowo upraszcza zależność. Oznaczając  $s/t = w$  można tę zależność zapisać jako:

$$w = A t + B, \quad (16)$$

gdzie  $a = 0,5 \cdot a$ ,  $B = v_0$ . Aby znaleźć wartości przyspieszeń, należy do punktów z Tabeli 5 dopasować prostą według Równania (15) i Równania (16). W tym celu posłużono się metodą najmniejszych kwadratów. Polega ona na minimalizacji wielkości, która w tym przypadku dana jest wzorem:

$$R(A, B) = \sum_{i=1}^6 \left( \frac{w_i - A t_i - B}{u_{w_i}} \right)^2 \quad [3] \quad (17)$$

Tabela 4: Analiza danych: stała masa układu.

s [m]	0,200	0,400	0,600	0,250	0,500	0,670
$u_s$ [m]	0,00082	0,00115	0,00141	0,00082	0,00115	0,00141
$m = 0,01$ kg						
$\bar{t}$ [s]	1,3600	2,1700	2,8333	1,5767	2,4800	2,9800
$u_{\bar{t}}$ [s]	0,0058	0,0058	0,0067	0,0067	0,0058	0,0058
$m = 0,02$ kg						
$\bar{t}$ [s]	0,9500	1,5200	1,9867	1,1067	1,7400	2,0967
$u_{\bar{t}}$ [s]	0,0058	0,0058	0,0067	0,0067	0,0058	0,0067
$m = 0,03$ kg						
$\bar{t}$ [s]	0,7700	1,2400	1,6200	0,9033	1,4167	1,7000
$u_{\bar{t}}$ [s]	0,0058	0,0058	0,0058	0,0067	0,0067	0,0082
$m = 0,04$ kg						
$\bar{t}$ [s]	0,6700	1,0667	1,3967	0,7767	1,2233	1,4700
$u_{\bar{t}}$ [s]	0,0058	0,0067	0,0067	0,0067	0,0067	0,0058

Tabela 5: Analiza danych: stała siła.

s [m]	0,20000	0,4000	0,6000	0,2500	0,5000	0,6700	0,20000	0,4000	0,6000	0,2500	0,5000	0,6700
$u_s$ [m]	0,00082	0,00115	0,00141	0,00082	0,00115	0,00141	0,00082	0,0012	0,0014	0,0008	0,0012	0,0014
$M_o = 0,25$ kg							$M_o = 0,5$ kg					
$\bar{t}$ [s]	0,7400	1,1900	1,5600	0,8700	1,3700	1,6500	0,8100	1,3000	1,7000	0,9533	1,4967	1,8000
$u_{\bar{t}}$ [s]	0,0058	0,0058	0,0058	0,0058	0,0058	0,0058	0,0058	0,0058	0,0058	0,0442	0,0442	0,0580
$M_o = 0,75$ kg							$M_o = 1$ kg					
$\bar{t}$ [s]	0,8833	1,4000	1,8400	1,0300	1,6200	1,9467	0,9400	1,5000	1,9700	1,1033	1,7333	2,0800
$u_{\bar{t}}$ [s]	0,0442	0,0058	0,0058	0,0058	0,0058	0,0442	0,0058	0,0058	0,0058	0,0442	0,0442	0,0580
$M_o = 1,25$ kg							$M_o = 1,5$ kg					
$\bar{t}$ [s]	1,0000	1,6000	2,0900	1,1700	1,8400	2,2100	1,0500	1,6933	2,2000	1,2333	1,9367	2,3267
$u_{\bar{t}}$ [s]	0,0058	0,0058	0,0058	0,0058	0,0058	0,0058	0,0058	0,0442	0,0058	0,0442	0,0442	0,0442

Tabela 6: Stała siła: pomiar kontrolny.

s [m]	0,200	0,400	0,600	0,250	0,500	0,670
$u_s$ [m]	0,00082	0,00115	0,00141	0,00082	0,00115	0,00141
$M_o = 0$ kg						
$\bar{t}$ [s]	0,6700	1,0700	1,4000	0,7800	1,2300	1,4700
$u_{\bar{t}}$ [s]	0,0058	0,0058	0,0058	0,0058	0,0058	0,0058

Niepewności  $w_i$  otrzymano, korzystając z Równania (6):

$$u_{w_i} = w_i \sqrt{\frac{u_{t_i}^2}{t_i^2} + \frac{u_{s_i}^2}{s_i^2}} \quad (18)$$

Ostateczne wartości parametrów wraz z ich niepewnościami podano w Tabeli 7. dodatkowo podano też wartości przyspieszeń  $a$  wraz z niepewnościami.

Tabela 7: Dopasowywanie prostej: stała masa układu.

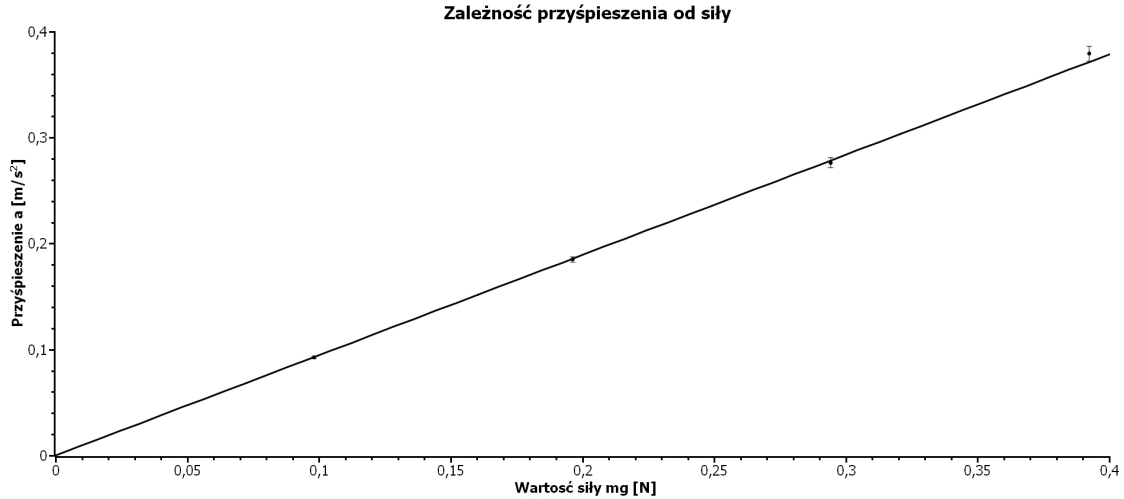
$m$ [kg]	0,01	0,02	0,03	0,04
$A$ [m/s <sup>2</sup> ]	0,04632	0,0925	0,1382	0,1896
$u_A$ [m/s <sup>2</sup> ]	0,00052	0,0013	0,0024	0,0035
$B$ [m/s]	0,08471	0,1233	0,1527	0,1730
$u_B$ [m/s]	0,00126	0,0023	0,0033	0,0042
$a$ [m/s <sup>2</sup> ]	0,0926	0,1850	0,2763	0,3792
$u_a$ [m/s <sup>2</sup> ]	0,0010	0,0027	0,0048	0,0070

W ten sposób otrzymano zestaw punktów pozwalających na sprawdzenie zależności opisanej przez Równanie (2). Aby dopasować dane z Tabeli 7 do Równania (2) ponownie zastosowano metodę najmniejszych kwadratów oraz Równanie (17) dla  $B = 0$ . Przyjęto, że  $g = 9,81$  m/s<sup>2</sup> jest wartością znaną dokładnie. Wyniki tej analizy

przedstawiono w Tabeli 8. Krzywą najlepszego dopasowania, wraz ze słupkami niepewności przedstawiono na Rysunku 2.

Tabela 8: Regresja liniowa: stała masa układu.

$m$ [kg]	0,01	0,02	0,03	0,04
$mg$ [N]	0,04632	0,0925	0,1382	0,1896
$a$ [m/s <sup>2</sup> ]	0,0926	0,1850	0,2763	0,3792
$u_a$ [m/s <sup>2</sup> ]	0,0010	0,0027	0,0048	0,0070
$1/M_d = 0,9462 \pm 0,0069$ 1/kg				



Rysunek 2: Krzywa najlepszego dopasowania.

Aby zyskać pewność, co do poprawnego dopasowania krzywej, przeprowadzono test  $\chi^2$ . Test ten pozwoli też określić, czy dane są w zgodności z drugą zasadą dynamiki.

W rozpatrywanym przypadku wartość  $\chi^2$  dana jest wzorem:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^4 \left( \frac{a_i - \frac{1}{M_d} F_i}{u_{a_i}} \right)^2 \quad (19)$$

Za prawdopodobieństwo popełnienia błędu pierwszego rodzaju przyjęto  $p = 0,005$ . Przy 4-1=3 stopniach swobody wartość krytyczna  $\chi_0^2 = 12,84$ . Wartość obliczona wynosi  $\chi^2 = 1,57$ . Wartość ta jest mniejsza od wartości krytycznej, czyli dane otrzymane w doświadczeniu nie są sprzeczne z drugą zasadą dynamiki Newtona.

Współczynnik  $M_d$  jest masą układu wyznaczoną doświadczalnie. Można porównać ją z wartością otrzymaną w bezpośrednich pomiarach mas wózka i drutów. Wiadomo, że masa krążka wynosiła  $m_b = 36$  g, a jego promienie, zewnętrzny i wewnętrzny wynosiły kolejno:  $R_1 = 96$  mm i  $R_2 = 8$  mm. Bezwładność krążka wynosiła  $I = \frac{1}{2} m_b (R_1^2 + R_2^2)$ . Oznaczmy  $I/mR_1^2 = m_{eff}$ . Wtedy  $M = M_w + 4m + m_{eff} = 1,0568$  kg. Niepewność tej wielkości obliczono, korzystając z Równania (6). Otrzymano  $u_M = 0,0065$  kg. W analizie danych założono, że wielkość  $m_{eff}$  jest znana dokładnie. Aby porównać, czy  $M$  jest zgodne z wartością  $M_d$  przeprowadzono test  $3\sigma$ . Polega on na sprawdzeniu, czy wielkość  $|M - M_d|$  jest mniejsza od trzykrotności niepewności tej różnicy. Otrzymano wartości:  $(|M - M_d| = (0,0477 > 3 \cdot 0,077))$  kg. Jak widać, współczynniki te nie są ze sobą zgodne. Mimo to postanowiono założyć, że  $M_d = M_w + 4m + m_{eff}$  aby obliczyć eksperymentalną wartość masy efektywnej  $m_{def}$ . Niepewność tej wielkości obliczono, korzystając z Równania (6). Otrzymano:  $m_{def} = 0,0598 \pm 0,0084$  kg. Porównując tę wartość z wartością  $m_{eff}$  i przeprowadzając test  $3\sigma$  otrzymano zgodność wyników. Zgodność wyników wynika z dużej niepewności, jaką obarczona jest wielkość  $m_{def}$ .

Szukanie przyspieszeń dla stałej siły wymuszającej wyglądało podobnie, jak w przypadku stałej masy układu. Wyniki analizy dla wartości z Tabeli 5 i Tabeli 6 przedstawiono w Tabeli 9.

W przypadku stałej siły wymuszającej Równanie (2) można przekształcić do postaci:

$$\frac{g}{a_i} = \frac{1}{4m} M_i + \left( 1 + \frac{I}{4mR_1^2} \right), \quad (20)$$

Tabela 9: Analiza danych: stała siła.

$M_o$ [kg]	0	0,25	0,50	0,75	1,00	1,25	1,50
$a$ [m/s <sup>2</sup> ]	0,3772	0,2934	0,2379	0,2067	0,1775	0,1671	0,1436
$u_a$ [m/s <sup>2</sup> ]	0,0066	0,0049	0,0055	0,0047	0,0037	0,0022	0,0028

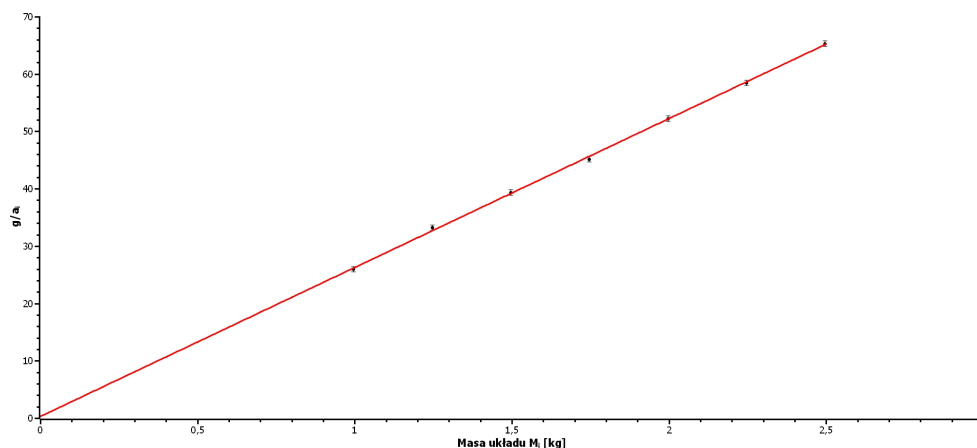
gdzie  $M_i$  to masa układu przy i-tym pomiarze.

W ten sposób otrzymano zależność liniową  $\eta = \alpha M_i + \beta$ . Do takiej zależności można dostosować prostą przy pomocy metody najmniejszych kwadratów. Stosując Równanie (17) oraz Równanie (6) względem Równania (20) otrzymano wartości przedstawione w Tabeli 10.

Tabela 10: Regresja liniowa: stała siła.

$M_i$ [kg]	0,9970	1,2470	1,4970	1,7470	1,9970	2,2470	2,4970
$a_i$ [m/s <sup>2</sup> ]	0,3780	0,2955	0,2496	0,2172	0,1879	0,1678	0,1502
$u_a$ [m/s <sup>2</sup> ]	0,0537	0,0428	0,0400	0,0338	0,0293	0,0238	0,0229
$g/a_i$	25,9511	33,1986	39,3085	45,1585	52,2099	58,4574	65,2923
$u_{gai}$	3,6888	4,8080	6,3008	7,0204	8,1370	8,3026	9,9342
$\alpha = 25,92 \pm 0,35$ 1/kg				$\beta = 0,38 \pm 0,63$			

Krzywą na podstawie tych danych przedstawiono na Rysunku 3.



Rysunek 3: Krzywa najlepszego dopasowania.

Obliczono wartość  $\chi^2 = 0,31$ , przy czym wartość krytyczna dla  $7-2=5$  punktów swobody wynosi  $\chi_0^2 = 16,75$ .  $\chi^2 < \chi_0^2$  więc dane nie są sprzeczne z drugą zasadą dynamiki Newtona. Warto jeszcze porównać otrzymane współczynniki z ich wartościami teoretycznymi.

Wartość  $1/4m = 25$  1/kg dla drucików o  $m = 0,01 \pm 0,001$  kg. Przeprowadzając test  $3\sigma$  dla tej wartości i wartości  $\alpha$  uzyskano zgodność wyników. Zaniechano przeprowadzenie testu dla wartości  $\beta$ , gdyż jej wartość jest mniejsza od niepewności z nią związaną oraz dlatego, iż aktualna wartość  $\beta$  sugeruje ujemną wartość bezwładności krążka.

## DYSKUSJA WYNIKÓW I WNIOSKI

W obu przypadkach uzyskano zgodność danych z drugą zasadą dynamiki. Jednak niepokojącym jest fakt, iż nie zawsze udało się uzyskać zgodność wyznaczonych współczynników z ich przewidywaniami teoretycznymi. Prawdopodobnie wynika to z propagacji błędów przez wszystkie etapy analizy. Jednak w ogólności, zważywszy na niskie wartości  $\chi^2$ , można stwierdzić, iż w warunkach eksperymentu druga zasada dynamiki jest spełniona.

## Literatura

- [1] J. R. Taylor, *Wstęp do analizy błędów pomiarowych*, PWN, Warszawa, 1995, s. 197.
- [2] J. R. Taylor, *Wstęp do analizy błędów pomiarowych*, PWN, Warszawa, 1995, s. 101.
- [3] J. R. Taylor, *Wstęp do analizy błędów pomiarowych*, PWN, Warszawa, 1995, s. 175.