

PRAWO OHMA I KIRCHHOFFA

T. Fąs

11 maja 2017

STRESZCZENIE

Celem doświadczenia było sprawdzenie słuszności prawa Ohma i praw Kirchhoffa oraz wyznaczenie oporu wewnętrznego i siły elektromotorycznej baterii. Do wyznaczenia tych wielkości zastosowano wyżej wymienione prawa. Przeprowadzone pomiary wykazały zgodność z prawami Ohma i Kirchhoffa, z drobnymi zastrzeżeniami w przypadku pierwszego prawa Kirchhoffa. Wyznaczona wartość oporu własnego to $r = 0,5 \Omega$, a wartość SEM to $\mathcal{E} = 1,489 \text{ V}$.

WSTĘP

Prawo Ohma głosi, że natężenie prądu I płynącego przez przewodnik jest wprost proporcjonalne do przyłożonego napięcia U ; lub inaczej: stosunek napięcia do natężenia prądu jest stały i równy oporowi R przewodnika:

$$R = \frac{U}{I} \quad [1]. \quad (1)$$

Aby wyznaczyć opór trzeba zmierzyć wartości napięcia na oporze oraz przepływającego przezeń prądu. Otrzymane wartości oporu można wtedy porównać ze zmierzoną niezależnie wartością oporu. Ich zgodność będzie potwierdzeniem słuszności prawa Ohma.

Pierwsze prawo Kirchhoffa głosi, że sumy natężeń prądów wpływających i wypływających z węzła sieci są sobie równe. [2] Znaczący to, że jeśli przewód rozdziela się na trzy inne, to suma natężeń w tych trzech przewodach musi być równa natężeniu w pierwotnym przewodzie. W takim wypadku należy zmierzyć wartości natężeń prądów w poszczególnych gałęziach sieci i korzystając z prawa Kirchhoffa przyrównać sumy natężeń prądów wpływających i wypływających. Ich równość będzie potwierdzeniem prawa Kirchhoffa.

Z prawa Ohma i pierwszego prawa Kirchhoffa wynikają również reguły sumowania oporników podłączonych szeregowo lub równolegle. Dla n oporników podłączonych równolegle wzór na sumę oporów R_z ma postać:

$$\frac{1}{R_z} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{R_j}, \quad (2)$$

gdzie R_j są kolejnymi opornikami podłączonymi równolegle. Drugie prawo Kirchhoffa głosi, że suma wzrostów i spadków napięć w obwodzie zamkniętym jest równa zeru [3]. Zmierzenie wartości oporu wewnętrznego r baterii o SEM \mathcal{E} wymaga skorzystania z praw Ohma i obu praw Kirchhoffa. Mierzając natężenie prądu w obwodzie z baterią i opornikiem oraz napięcie na baterii otrzymamy wartości I oraz U . Z prawa Ohma oraz II prawa Kirchhoffa wiadomo, że:

$$U = IR \quad (3)$$

$$\mathcal{E} - Ir - IR = 0 \quad (4)$$

Rozwiązując ten układ Równań (3) i (4) ze względu na U otrzymano zależność:

$$U(I) = -rI + \mathcal{E} \quad (5)$$

Jest to równanie prostej $y = ax + b$ o współczynnikach $a = -r$ i $b = \mathcal{E}$. Aby poznać wartości oporu wewnętrznego baterii oraz jej SEM wystarczy poznać wartości współczynników prostej najlepszego dopasowania.

Innym celem tego ćwiczenia było dopasowanie krzywej Gaussa do histogramu gęstości 216 okresów wahadła. Modelowa gęstość rozkładu okresów T jest dana wzorem:

$$G(T; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(T - \mu)^2}{2\sigma^2}\right), \quad (6)$$

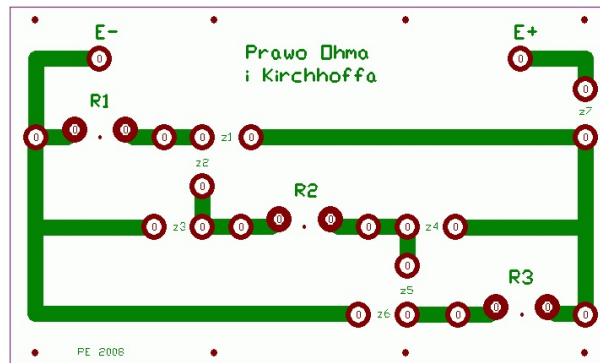
gdzie σ jest odchyleniem standardowym pomiarów, a μ jest wartością oczekiwaną pomiaru [4]. Aby znaleźć liczbę oczekiwanych pomiarów N_k z serii N pomiarów w danym przedziale, należy posłużyć się wzorem:

$$N_k = N \int_{T_k}^{T_k + \Delta} G(T; \mu, \sigma) dT, \quad (7)$$

gdzie T_k jest początkiem przedziału, a Δ jego szerokością. Porównanie wartości otrzymanych na drodze eksperymentu z wartościami teoretycznymi pozwoli na ocenę tego, czy dane przeczą hipotezie, czy też są z nią niesprzeczne. W tym przypadku posłużono się tylko wizualną oceną dopasowania krzywej do histogramu. W przypadku oceniania danych otrzymanych dla prawa Ohma i Kirchhoffa posłużono się testem 3σ . Polega on na sprawdzeniu, czy różnica pomiędzy wartością oczekiwaną, a otrzymaną nie przekracza trzykrotności odchylenia standardowego.

UKŁAD DOŚWIADCZALNY

Do wykonywania pomiarów wykorzystano miernik Brymen 805 oraz miernik CHY 38. Niepewności pomiaru miernika Brymen obliczono na podstawie instrukcji dołączonej przez producenta [5]. Wykorzystano dodatkowo oporniki o wartościach oporu powyżej i poniżej 1 k Ω . Jako zasilanie wykorzystano zasilacz generujący prąd o stałym napięciu, które w czasie pomiarów regulowano. Rysunek 1 przedstawia schemat płytki drukowanej, którą wykorzystano do testowania praw Ohma i Kirchhoffa. Do zacisków E– i E+ podłączono zasilanie. Do zacisków R1, R2 i R3 podłączano oporniki. Reszta zacisków służyła jako przełączniki, które były otwarte lub zamknięte, w zależności od potrzeb.



Rysunek 1: Układ do sprawdzenia praw Ohma i Kirchhoffa

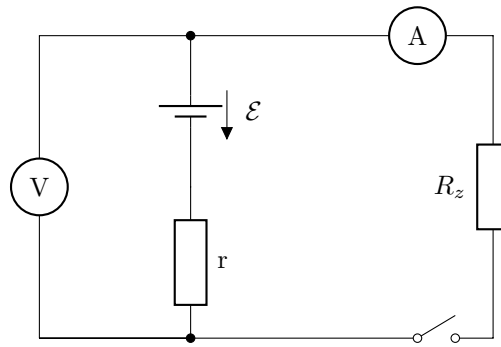
Na potrzeby sprawdzenia prawa Ohma do zacisków R1 podłączono kiloomowy opornik, a zaciski z1 i z7 zamknięto. Do zacisków E– i E+ podłączono zasilanie, z kolei do zacisków po lewej i prawej stronie R1 podłączono miernik CHY w charakterze woltomierza. Zacisk z1 zamknięto miernikiem Brymen w charakterze amperomierza. Na generatorze regulowano napięcie od 0 do 20 V, które następnie odczytywano na mierniku CHY, z kolei natężenie prądu odczytywano z miernika Brymen.

Dla drugiego prawa Kirchhoffa zamknięto zaciski z2, z5 i z7, a do zacisków R1, R2 i R3 podłączono kiloomowe oporniki. Podłączenie zacisków w taki sposób tworzy szeregowe połączenie oporników. Miernik Brymen, jako woltomierz podłączano do zacisków po lewej i prawej stronie kolejno R1, R2 i R3, a także, aby zmierzyć napięcie, jak i opór na całym obwodzie, do zacisków po lewej stronie R1 i prawej stronie R3.

Na potrzeby testu pierwszego prawa Kirchhoffa do zacisków R1, R2 i R3 podłączono kiloomowe oporniki, a zaciski z1, z3, z4, z6 i z7 zamknięto. Podłączenie zacisków w taki sposób tworzy równoległe połączenie oporników. Zaciski zamykano miernikiem Brymen, jako amperomierzem, którego wskazywania odczytywano, a następnie zmieniano jego pozycję. Opór całkowity zmierzono tym samym miernikiem podłączonym do zacisków po lewej stronie R1 i prawej stronie R3.

Do znalezienia oporu wewnętrznego baterii wykorzystano układ przedstawiony na Rysunku 2.

Strzałka oznacza tu kierunek przepływu prądu, \mathcal{E} oznacza SEM baterii, r jej opór wewnętrzny, a R_z to opornik podłączony do układu. Jako R_z podłączano różne oporniki o oporności poniżej 1 k Ω . W roli amperomierza i woltomierza posłużono się miernikami Brymen.



Rysunek 2: Układ wykorzystany do znalezienia oporu wewnętrznego baterii

Tabela 1: Prawo Ohma: wyniki pomiarów

Napięcie U [V]	1,99	4,05	6,12	8,07	10,00	12,11	14,05	15,98	17,19	18,86
Natężenie I [mA]	0,18	0,37	0,56	0,74	0,92	1,11	1,3	1,48	1,59	1,74

WYNIKI POMIARÓW

Testując prawo Ohma zmierzono rezystancję opornika $R_1 = 10,84 \text{ k}\Omega$. Następnie wykonano serię 10 pomiarów napięcia i natężenia w obwodzie z podłączonym opornikiem R_1 . Wyniki zaprezentowano w Tabeli 1.

W dalszej części dodano dwa kolejne oporniki o rezystancji $R_2 = 8,22 \text{ k}\Omega$ i $R_3 = 3,260 \text{ k}\Omega$. Wynik pomiaru oporu całkowitego wszystkich trzech oporników wynosi $R_c = 22,32 \text{ k}\Omega$. Następnie wykonano pomiary napięcia na opornikach i na całości obwodu. Wyniki zaprezentowano w Tabeli 2.

Tabela 2: Drugie prawo Kirchhoffa: wyniki pomiarów

Opornik	R_1	R_2	R_3	Całość
Napięcie U [V]	2,909	2,205	0,874	5,99

Wyniki pomiarów dla testu pierwszego prawa Kirchhoffa przedstawia Tabela 3. Poprzez oznaczenia oporników oznaczono gałęzie, w których dokonano pomiarów natężenia; dana gałąź zawierała tylko jeden opornik.

Tabela 3: Pierwsze prawo Kirchhoffa: wyniki pomiarów

Opornik	R_1	R_2	R_3	Całość
Natężenie I [μA]	550	724	1790	2978

Przy czym zmierzona wartość oporu całkowitego obwodu wynosi $R_z = 1,919 \text{ k}\Omega$.

Ostatnie pomiary dotyczyły pomiarów natężenia i napięcia w obwodzie związanym z baterią i jej oporem wewnętrznym. Obwód skonstruowany tak, jak na Rysunku 2 zamykano na czas pomiarów, które dokonywano możliwie szybko, aby nie wyczerpać baterii. Wykonano pięć pomiarów, przy pięciu różnych opornikach R oraz jeden pomiar bez żadnego opornika. Wyniki zaprezentowano w Tabeli 4.

Tabela 4: Bateria: wyniki pomiarów

Napięcie U [V]	1,495	1,485	1,481	1,479	1,474	1,466
Natężenie I [mA]	0	7,69	12,88	20,06	29,78	45,8

ANALIZA DANYCH

Na początku zajęto się kwestią histogramu i krzywej Gaussa dla 216 okresów drgań wahadła. Dane zostały dostarczone przez prowadzących ćwiczenia. Średni okres \bar{T} wynosi 3,4408 s, a odchylenie standardowe $\sigma = 0,0456$ s. Na ich podstawie stworzono histogram gęstości okresów oraz dopasowano do niego krzywą Gaussa. Sam wykres znajduje się na Rysunku 3. Dane, które posłużyły do jego skonstruowania są zaprezentowane w Tabeli 5. Wartości gęstości G oraz N_k obliczono na podstawie wzorów (6) i (7), aczkolwiek Równanie (7) uproszczono do postaci:

$$N_k \approx N'_k = NG(T_k; \bar{T}, s_T) \Delta \quad (8)$$

Celem dokładniejszego wyznaczenia całki z Równania (7) wprowadzono nową zmienną:

$$z = \frac{T - \mu}{\sigma}$$

i za jej pomocą wyznaczono dokładniejszą wartość N_k :

$$N_k = N(F(z_{k+1}) - F(z_k)), \quad (9)$$

gdzie

$$z_k = \frac{T_k - \mu}{\sigma}, \quad z_{k+1} = \frac{T_{k+1} + \Delta - \mu}{\sigma}, \quad F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z \exp -\frac{x^2}{2} dx.$$

Ostatecznie, przy obliczeniach skorzystano z Równania (6), Równania (8) i Równania (9).

Tabela 5: Wyniki pomiarów i obliczeń dla 216 okresów drgań wahadła

Krawędź dolna T_k [s]	3,25	3,30	3,35	3,40	3,45	3,50	3,55	3,60	—
Krawędź górna $T_k + \Delta$ [s]	3,30	3,35	3,40	3,45	3,50	3,55	3,60	3,65	—
Środek przedziału T_k [s]	3,275	3,325	3,375	3,425	3,475	3,525	3,575	3,625	Suma=
Liczba n_k danych	0	5	43	91	63	13	1	0	$N = 216$
Gęstość eksperymentalna $[s^{-1}]$	0,00	0,46	3,98	8,43	5,83	1,20	0,09	0,00	—
Gęstość $G(T_k; \bar{T}, s_T)$	0,01	0,35	3,09	8,24	6,60	1,59	0,12	0,00	—
N'_k	0,127	3,758	33,360	88,981	71,322	17,179	1,243	0,027	215,971
N_k	0,215	4,799	35,043	85,208	69,758	19,178	1,744	0,051	215,996

Przyglądając się Rysunkowi 3 oraz porównując wartości n_k i N_k można wyciągnąć wniosek, iż dane pokrywają się z krzywą Gaussa. Pozwala to na założenie, że wartością prawdziwą okresu jest wartość średnia, a niepewności są pochodzenia statystycznego. Krzywa Gaussa nie pokrywa się jednak idealnie z histogramem, wynika to z szerokości jego przedziałów. Gdyby wybrać mniejszą szerokość Δ przedziałów coraz bardziej zbliżałby się do krzywej.

Testowanie prawa Ohma: z danych z Tabeli 1 utworzono wykres przedstawiony na Rysunku 4. Zgodnie z Równaniem (1) zależność $U(I)$ jest zależnością liniową o współczynniku kierunkowym równym oporowi. Współczynnik kierunkowy obliczono dla punktów $U = 4,05$ V, $I = 0,37$ mA oraz $U = 10,00$ V i $I = 0,92$ mA. Wynika stąd, iż prosta jest dana równaniem: $U(I) = 10,82I + 0,0466$, gdzie $a = 10,82 \frac{V}{mA} = 10,82$ k Ω jest bliski zmierzonemu oporowi $R_1 = 10,84$ k Ω , z kolei $b = 0,0466$ V jest bliskie zeru. Otrzymane wyniki stanowią potwierdzenie prawa Ohma.

Dopuszczalny graniczny błąd wskazania na danym zakresie pomiarowym miernika wyznaczono na podstawie wzoru:

$$\Delta_p = wx + nc, \quad (10)$$

gdzie poszczególne symbole oznaczają: x – wynik pomiaru, w – dokładność wskazanej wartości x wyrażona w procentach, nc – dokładność cyfrowa określana jako liczba n najmniej znaczących jednostek c odczytu. Wielkości w , n oraz c odczytano z instrukcji miernika dołączonej przez producenta. Aby wyznaczyć niepewności pomiarów dla testu pierwszego i drugiego prawa Kirchhoffa posłużono się metodą propagacji małych błędów, daną wzorem:

$$u_f^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} u_i \right)^2, \quad (11)$$

gdzie u_f jest niepewnością szukanej wielkości zależnej od x_i , a u_i jest niepewnością x_i daną wzorem:

$$u_i^2 = \frac{\Delta_p^2}{3} \quad [6]. \quad (12)$$

Na podstawie tych wzorów stworzono Tabelę 6.

Tabela 6: Tabela wyników i niepewności pomiarów

Opornik	R_1	R_2	R_3	Całość
Napięcie U [V]	2,909	2,205	0,874	5,99
Składowa w niepewności	0,005	0,005	0,005	0,005
Składowa nc	0,003	0,003	0,003	0,03
Dopuszczalny błąd Δ_{V_i} [V]	0,01755	0,01403	0,00737	0,05995
Niepewność u_i napięcia [V]	0,01013	0,00810	0,00426	0,03461

Na potrzeby testu drugiego prawa Kirchhoffa obliczono sumę wszystkich napięć U_S , moduł różnicy U_r sumy i całego zmierzonego napięcia U_C oraz ich niepewności. Niepewności te, wyznaczone z Równania (11), dane są wzorami:

$$u_{U_S}^2 = u_{U_{R1}}^2 + u_{U_{R2}}^2 + u_{U_{R3}}^2 \quad (13)$$

$$u_{U_r}^2 = u_{U_S}^2 + u_{U_C}^2 \quad (14)$$

Obliczone wartości wstawiono do Tabeli 7.

Tabela 7: Tabela wyników i niepewności pomiarów

U_S [V]	U_C [V]	U_r [V]	u_{U_S} [V]	u_{U_r} [V]
5,988	5,990	0,00200	0,01365	0,03721

Aby przejść test 3σ stosunek U_r/u_{U_r} musi być mniejszy od 3. Obliczona wartość tego stosunku wynosi 0,05375, która jest znacznie mniejsza od 3. Pozwala to stwierdzić iż otrzymane wyniki nie są sprzeczne z drugim prawem Kirchhoffa.

Analogiczne obliczenia wykonano dla pierwszego prawa Kirchhoffa, czyli Tabeli 3. Wyniki obliczeń zapisano w Tabeli 8.

Tabela 8: Tabela wyników i niepewności pomiarów

Opornik	R_1	R_2	R_3	Całość
Natężenie I [μ A]	550	724	1790	2978
Składowa w niepewności	0,012	0,012	0,012	0,012
Składowa nc	3	3	3	3
Dopuszczalny błąd Δ_{I_i} [μ A]	9,6000	11,6880	24,4800	38,7360
Niepewność u_i natężenia I [μ A]	5,54256	6,74807	14,13353	23,36424

Wzory (13) i (14), jak i cała procedura stosują się również do natężeń. Tak więc można stworzyć analogiczną tabelę z wynikami oraz wykonać test 3σ .

Tabela 9: Tabela wyników i niepewności pomiarów

I_S [mA]	I_C [mA]	I_r [mA]	u_{I_S} [mA]	u_{I_r} [mA]	I_r/u_{I_r}
3,064	2,978	0,086	0,01661	0,02786	3,08688

Jak widać w Tabeli 9, wykonane pomiary zdają się przeczyć pierwszemu prawu Kirchhoffa. Trzeba jednak wziąć pod uwagę, że mogły wystąpić pewne niedokładności samego obwodu w postaci np. poluzowanego zacisku czy też drobne fluktuacje natężenia generowanego przez zasilacz. Nie brano pod uwagę niedokładności obwodu czy też zasilacza, dlatego też wyniki mogą zdawać się przeczyć prawu Kirchhoffa, choć błąd znajduje się po stronie eksperymentatora. Wziąwszy pod uwagę niewielkie odstępstwo od wartości 3 obliczonego stosunku można założyć, że wyniki nie odbiegają aż tak bardzo od oczekiwanej wartości, ale granica jest ścisła, więc test 3σ dla pierwszego prawa Kirchhoffa nie został zaliczony.

Aby sprawdzić słuszność Równania (2) należy przeprowadzić analizę podobną do tej przeprowadzonej dla praw Kirchhoffa. Tabela 10 przedstawia wyniki obliczeń opartych na Równaniach (10) i (12) przeprowadzonych dla wartości oporów R_1 , R_2 i R_3 oraz ich oporu zastępczego R_z .

Tabela 10: Tabela wyników i niepewności pomiarów

Opornik	R_1	R_2	R_3	R_z
Opór R [kΩ]	10,84	8,22	3,260	1,919
Składowa w niepewności	0,006	0,006	0,006	0,006
Składowa nc	0,04	0,04	0,004	0,004
Dopuszczalny błąd Δ_{R_i} [kΩ]	0,10504	0,08932	0,02356	0,01551
Niepewność u_i [kΩ]	0,06064	0,05157	0,01360	0,00896

Sumę oporów R_S obliczono, korzystając z Równania (2). Niepewność tej sumy dana jest wzorem:

$$u_{R_z}^2 = R_z^4 \left(\frac{u_{R_1}^2}{R_1^4} + \frac{u_{R_2}^2}{R_2^4} + \frac{u_{R_3}^2}{R_3^4} \right) \quad (15)$$

Korzystając z Równania (2), Równania (15) oraz obliczają różnicę R_r oporów wyliczonego i zmierzonego stworzono Tabelę 11. Niepewność różnicy dana jest wzorem analogicznym do Równania (14).

Tabela 11: Tabela wyników i niepewności pomiarów

R_S [kΩ]	R_z [kΩ]	R_r [kΩ]	u_{R_S} [kΩ]	u_{R_r} [kΩ]	R_r/u_{R_r}
1,92066	1,91900	0,00166	0,00582	0,01068	0,0,15559

Jak widać, test 3σ został zaliczony, otrzymane wyniki nie są sprzeczne z hipotezą.

Korzystając z danych z Tabeli 4 wykonano wykres zależności $U(I)$ przedstawiony na Rysunku 5. Parametry prostej obliczono dla punktów $U = 1,485$ V, $I = 7,69$ mA oraz $U = 1,466$ V i $I = 45,8$ mA. Otrzymano wartości $a = -0,0005$ V/mA oraz $b = 1,489$ V. Zgodnie z zależnością wyprowadzoną w Równaniu (5) opór wewnętrzny baterii jest równy $0,5 \Omega$ a jej SEM jest równa $1,489$ V. Otrzymana wartość oporu wewnętrznego jest typowa dla baterii tego typu. Wątpliwości budzi jednak otrzymana wartość SEM, która nie pokrywa się z wartością zmierzoną. Jednak w tym przypadku błąd znajduje się po stronie eksperymentatora. Wykonano dwie serie pomiarowa, ponieważ w pierwszej z nich miernik wskazywał błędne wartości natężenia. Dlatego też wykonano drugą serię pomiarową, jednak nie wykonano ponownie pomiaru napięcia na samej baterii, bez opornika. Dlatego też otrzymana wartość SEM jest niższa; wynika to z rozładowania baterii. Otrzymana wartość wskazuje SEM baterii przed drugą serią pomiarową i jest to wartość poprawna, biorąc pod uwagę jej rozładowanie i ignorując pierwotny pomiar napięcia bez opornika.

DYSKUSJA WYNIKÓW I WNIOSKI

Prawie wszystkie przeprowadzone testy praw Ohma i Kirchhoffa wykazały słuszność tych praw, z wykluczeniem testu dla pierwszego prawa Kirchhoffa. Jedna zważywszy na niewielkie odchylenie od wartości σ oraz wzięwszy pod uwagę niedokładności układu można stwierdzić, iż również i ten test nie jest sprzeczny z prawem Kirchhoffa. Aby móc mieć absolutną pewność należałoby przeprowadzić dodatkowe pomiary.

W przypadku wyznaczania oporu wewnętrznego baterii oraz jej SEM również napotkano na problemy dotyczące wartości SEM baterii, jednak ten problem bez problemu rozwiązano, a zaprezentowana wartość SEM jest prawdziwa i zgodna z przewidywaniami. Jednak tak jak w przypadku prawa Kirchhoffa, całkowitą pewność można uzyskać dopiero po ponownym przeprowadzeniu pomiarów.

Jednak pomimo tych wszystkich niepewności otrzymane wyniki były zgodne z przewidywaniami, nawet te budzące zastrzeżenia, ponieważ ich odchylenia od wartości oczekiwanych były niewielkie. Podsumowując, można powiedzieć, iż wszystkie otrzymane wyniki są zgodnie z przewidywaniami i nie są sprzeczne z prawem Ohma oraz prawami Kirchhoffa.

Literatura

- [1] D. Halliday, R. Resnick, J. Walker, *Podstawy Fizyki, Tom 3*, PWN, Warszawa, 2003, s. 140.

- [2] D. Halliday, R. Resnick, J. Walker, *Podstawy Fizyki, Tom 3*, PWN, Warszawa, 2003, s. 165.
- [3] D. Halliday, R. Resnick, J. Walker, *Podstawy Fizyki, Tom 3*, PWN, Warszawa, 2003, s. 158.
- [4] N. W. Smirnow, I. W. Dunin-Barkowski, *Kurs rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej dla zastosowań technicznych*, PWN, Warszawa, 1973, s. 151.
- [5] Praca zbiorowa, *Multimetry cyfrowe BM805, BM806T, BM807*, BRYMEN Technology Co., Taiwan, s. 20.
- [6] J. R. Taylor, *Wstęp do analizy błędów pomiarowych*, PWN, Warszawa, 1995, s. 87.