

TERMISTOR JAKO TERMOMETR

T. Fąs

14 października 2017

STRESZCZENIE

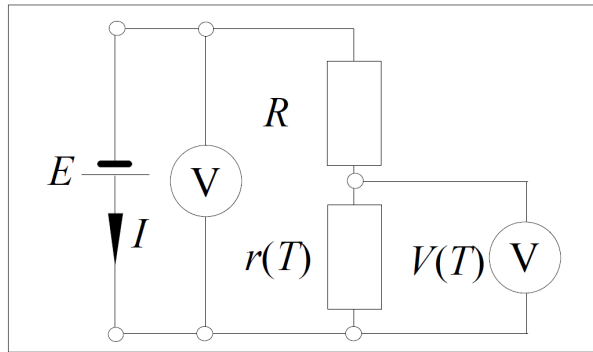
Celem doświadczenia była kalibracja termistora tak, aby układ o określonym oporze złożony z termistora oraz woltomierza mógł służyć jako termometr. Otrzymano liniową zależność temperatury od napięcia na termistorze postaci $t(U) = \hat{H}U + \hat{G}$, gdzie $\hat{H} = -7,196 \pm 0,069 \text{ } ^\circ\text{C/V}$, $\hat{G} = 140,41 \pm 0,72 \text{ } ^\circ\text{C}$, a ocena kowariancji pomiędzy \hat{H} i \hat{G} wynosi $c_{HG} = -0,04987 \text{ } ^\circ\text{C}^2/\text{V}$.

WSTĘP

Termistor jest rezystorem o oporze wrażliwym na zmiany temperatury. Wraz ze wzrostem temperatury maleje opór termistora. Jego wrażliwość na zmiany temperatury czyni z niego potencjalny termometr o wysokiej dokładności. Dokładna zależność oporu r termistora od temperatury T dana jest wzorem:

$$r(T) = r_\infty \exp\left(\frac{B}{T}\right), \quad (1)$$

gdzie B oraz r_∞ są stałymi charakteryzującymi dany termistor [1], a temperatura wyrażona jest w skali Kelvina. Aby móc wykorzystać wrażliwość termistora na zmiany temperatury należy podłączyć go do obwodu w sposób przedstawiony na Rysunku 1. Symbolem R oznaczono tu opornik, którego wartość dobrano tak, by napięcie na termistorze silnie zależało od jego temperatury. Poprzez symbol E rozumiemy tu źródło SEM, a $V(T)$ to napięcie mierzone na termistorze. Tak skonstruowany obwód nazywa się dzielnikiem napięć.



Rysunek 1: Schemat obwodu.

Korzystając z prawa Kirchhoffa można znaleźć wzór opisujący zależność napięcia od temperatury, który przyjmuje następującą postać:

$$V(T) = \frac{r(T)}{R + r(T)} E \quad (2)$$

Niewielkie zmiany temperatury wokół punktu T_0 mogą zostać wyznaczone z zadowalającą dokładnością korzystając z przybliżenia Równania (2) do postaci liniowej:

$$V(T) \approx h(T - T_0) + V_0, \quad (3)$$

co po zamianie temperatury na skalę Celsjusza oraz zapisanie stałych w postaci jednej stałej g sprowadza się do wzoru:

$$U(t) = ht + g. \quad (4)$$

Zastosowano zamianę symbolu V na U aby odróżnić przybliżenie od dokładnej wartości. Aby móc skonstruować termometr należy wyznaczyć wartości B oraz r_∞ , które są potrzebne do wyznaczenia wartości R . Najdokładniejsze przybliżenie U można uzyskać dla wartości R obliczonej na podstawie punktu przegięcia funkcji $V(T)$. Dzięki takiemu założeniu można pozbyć się wyrazu kwadratowego w rozwinięciu Taylora, więc przybliżenie liniowe będzie charakteryzowało się większą dokładnością. Otrzymano następujący wzór pozwalający wyznaczyć wartość R :

$$R = \frac{B - 2T}{B + 2T} r_\infty \exp\left(\frac{B}{T}\right) \quad (5)$$

Następnie należy wyznaczyć wartości współczynników h oraz g z Równania (4). Ostatnim krokiem będzie odwrócenie zależności opisanej Równaniem (4) i wyznaczenie niepewności tak otrzymanej wartości temperatury.

UKŁAD DOŚWIADCZALNY

Układ doświadczalny składał się z termistora opatrzonego numerem 14, termometru o działce odczytu 0,1 °C, którego wskazania traktowano jako dokładne oraz z miernika uniwersalnego Brymen 805 i miernika CHY 38. Niepewności pomiaru miernika Brymen obliczono na podstawie instrukcji dołączonej przez producenta [2]. Termistor oraz termometr były połączone ze sobą w taki sposób, aby wartości temperatury odczytywane na termometrze wzorcowym można było uznać za temperaturę termistora. Dodatkowo w dalszej części pomiarów wykorzystano płytkę drukowaną z miejscem na podłączenie oporników, zasilania oraz mierników. Po złożeniu układ był zgodny ze schematem przedstawionym na Rysunku 1. Wykorzystano go do zmierzenia zależności napięcia od temperatury dla wybranego opornika R .

W pierwszej części pomiarów termistor podłączono do miernika Brymen w funkcji omomierza, a sam termistor zanurzono w wodzie o temperaturze początkowej około 80 °C. Przez 30 min notowano wartości oporu dla danej temperatury. Zmierzono kilkadziesiąt wartości oporu i temperatury. Aby uczynić pomiar dokładniejszym zastąpiono gorącą wodę inną, schłodzoną do temperatury początkowej około 5 °C. W tym przypadku również wykonywano pomiary przez 30 min. Jednak ze względu na powolny wzrost temperatury cieczy odnotowano jedynie kilkanaście pomiarów. Korzystając z paru punktów otrzymanych w tych pomiarach wyznaczono wstępne oceny parametrów B oraz r_∞ , a stąd oszacowanie wartości R . Wybrano opornik, którego opór był najbliższy wartości R . Dla tak wybranego opornika skonstruowano obwód zgodnie ze schematem przedstawionym na Rysunku 1. Po raz kolejny wykonywano pomiary przez 30 minut. Napięcie na termistorze mierzono miernikiem Brymen, a temperaturę wzorcowym termometrem. Z kolei napięcie na źródle mierzono przy pomocy miernika CHY. Pomiary miernikiem CHY miały na celu zbadanie stabilności napięcia wysyłanego przez źródło.

WYNIKI POMIARÓW

Wyniki pomiarów oporu w zależności od temperatury przedstawiono w Tabeli 1.

Na podstawie danych zawartych w Tabeli 1 wstępnie oszacowano wartości $B \approx 3535$ K oraz $r_\infty \approx 1,66$ Ω jak i również założone, iż punkt przegięcia znajduje się w okolicach 65 °C. Na tej podstawie, wykorzystując Równanie (5), oszacowano wartość $R \approx 37,8$ kΩ. Wybrano opornik o oporze $R_o = 41,7$ kΩ, którego wartość była najbliższa wartości otrzymanej teoretycznie. Wartość tego oporu zmierzono korzystając z miernika Brymen. Ten opornik, jak i termistor wraz z termometrem podłączono do obwodu zgodnie ze schematem przedstawionym na Rysunku 1. Przy pomocy miernika Brymen zmierzono wartości napięcia panującego na termistorze, jak i temperaturę odpowiadającą danemu napięciu. Dane zebrane w trakcie tych pomiarów zebrano w Tabeli 2.

W trakcie wykonywania pomiarów napięcie na źródle oscylowało pomiędzy wartością 18,05, a 18,06 V. Jako, że odchylenia pokrywają się z działką odczytu to można założyć, że przyłożone napięcie było stałe.

ANALIZA DANYCH

Dla danych zawartych w Tabeli 1 wykonano wykres zależności $r(t)$ przedstawiony na Rysunku 2. Wyraźnie widać zależność eksponencjalną. Najlepszą metodą wyznaczenia współczynników B oraz r_∞ jest znalezienie krzywej najlepszego dopasowania. W tym celu należałoby zastosować metodę najmniejszych kwadratów. Jednak stosowanie jej do funkcji eksponencjalnej byłoby problematyczne, dlatego też zdecydowano się na sprowadzenie

Tabela 1: Wartości oporu i temperatury.

Opór r [k Ω]	Temp. t [°C]	Opór r [k Ω]	Temp. t [°C]	Opór r [k Ω]	Temp. t [°C]
40,3	77	64	62	89,1	52
41,2	75,8	65	61,5	91	51,5
42,1	75	65,9	61	92,5	51
43,3	74,5	66,6	60,5	94,1	50,5
44	74	60	57	95,9	50
45	73,2	69	59,5	551	5
45,5	72,9	70	59,1	543	5,2
47,2	71,5	70,7	58,9	537	5,5
71,2	58,5	71,2	58,5	524	6
49,6	70	73	58	509	6,5
50,8	69,2	74,3	57,5	495	7,1
52,2	68,3	75,7	57	484	7,6
53,7	67,4	76,8	56,5	474	8,1
55,1	66,7	78,2	56	459	8,8
55,6	66,2	79,8	55,5	441	9,4
58,4	65	81	55	434	9,9
59,3	64,5	82,4	54,5	425	10,2
60,2	64	83,8	54	420	10,7
61,8	63,2	58	53,5	413	11,1
62,2	63	86,2	53	410	11,4
63,1	62,5	87,6	52,5	400	11,9

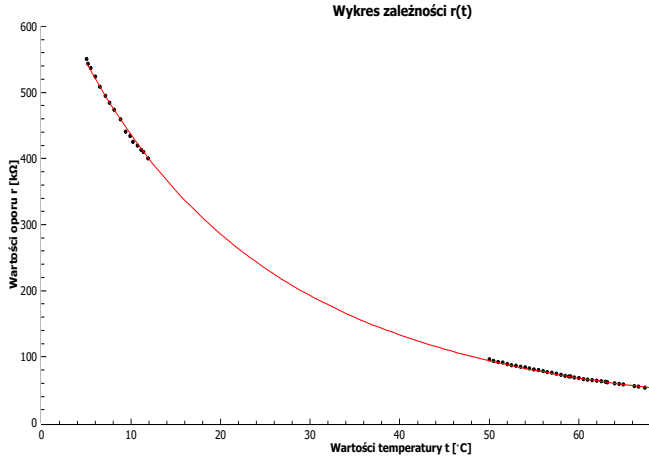
Tabela 2: Wartości napięcia i temperatury.

Temp. t [°C]	Napięcie U [V]	Temp. t [°C]	Napięcie U [V]
75,2	9,07	63,9	10,66
74	9,21	63,5	10,71
73,3	9,33	63	10,75
72,8	9,41	62,5	10,86
72,3	9,48	62	10,92
71,7	9,6	61,5	10,97
71	9,67	61	11,04
70,5	9,72	60,5	11,1
70	9,73	59,9	11,18
69,3	9,86	59,5	11,22
68,7	9,96	59	11,32
68	10,05	58,5	11,39
67,5	10,12	58	11,46
67,2	10,15	57,5	11,52
66,7	10,22	57	11,59
66,3	10,29	56,5	11,67
65,6	10,38	56	11,73
64,9	10,48	55,5	11,8
64,5	10,57	55	11,86

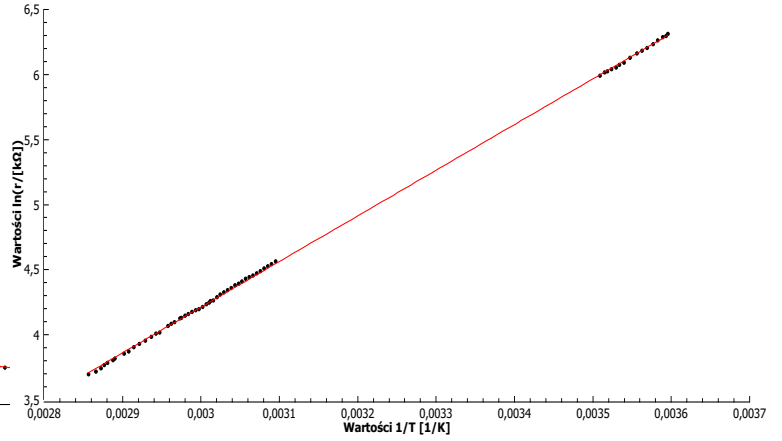
Równania (1) do postaci liniowej. Stosując obustronnie logarytm naturalny oraz podstawienia otrzymano zależność postaci:

$$\eta = \alpha x + \beta, \quad (6)$$

gdzie $\eta = \log(r/[\Omega])$, $\alpha = B$, $x = 1/T$, a $\beta = \log(r_\infty/[\Omega])$. W przypadku logarytmów zastosowano dzielenie przez jednostkę, aby uniknąć obliczania logarytmów z wartości mianowanych. Operacja tego typu byłaby pozbawiona sensu. Należy również wziąć pod uwagę fakt, że Równanie (1) jest słuszne tylko dla temperatury wyrażonej w skali Kelvina, dlatego też na potrzeby wyznaczania krzywej najlepszego dopasowania posługiwano się tą skalą, jak i stosowano wartości oporu w k Ω . Korzystając z tych zależności stworzona Tabele 3 oraz Rysunek 3 przedstawiający wykres zależności $\eta(x)$.



Rysunek 2: Wykres dla danych z Tabeli 1



Rysunek 3: Wykres dla danych z Tabeli 3

Tabela 3: Wartości napięcia i temperatury.

$\ln(r/[k\Omega])$	$1/T [1/K]$	$\ln(r/[k\Omega])$	$1/T [1/K]$	$\ln(r/[k\Omega])$	$1/T [1/K]$
0,00286	3,69635	0,00298	4,15888	0,00308	4,48976
0,00287	3,71844	0,00299	4,17439	0,00308	4,51086
0,00287	3,74005	0,00299	4,18814	0,00309	4,52721
0,00288	3,76815	0,00300	4,19870	0,00309	4,54436
0,00288	3,78419	0,00300	4,21361	0,00310	4,56331
0,00289	3,80666	0,00301	4,23411	0,00360	6,31173
0,00289	3,81771	0,00301	4,24850	0,00359	6,29711
0,00290	3,85439	0,00301	4,25845	0,00359	6,28600
0,00291	3,87120	0,00302	4,26549	0,00358	6,26149
0,00291	3,90399	0,00302	4,29046	0,00358	6,23245
0,00292	3,92790	0,00302	4,30811	0,00357	6,20456
0,00293	3,95508	0,00303	4,32678	0,00356	6,18208
0,00294	3,98341	0,00303	4,34120	0,00356	6,16121
0,00294	4,00915	0,00304	4,35927	0,00355	6,12905
0,00295	4,01818	0,00304	4,37952	0,00354	6,08904
0,00296	4,06732	0,00305	4,39445	0,00353	6,07304
0,00296	4,08261	0,00305	4,41159	0,00353	6,05209
0,00297	4,09767	0,00306	4,42843	0,00352	6,04025
0,00297	4,12390	0,00306	4,44265	0,00352	6,02345
0,00298	4,13035	0,00307	4,45667	0,00351	6,01616
0,00298	4,14472	0,00307	4,47278	0,00351	5,99146

Widać niewielkie odchylenia od prostej, można więc przypuszczać, iż ocena parametrów prostej będzie dobrym przybliżeniem ich rzeczywistych wartości.

Metoda najlepszych kwadratów polega na minimalizacji wielkości podanej wzorem:

$$R(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\eta_i - \hat{\alpha}x - \hat{\beta}}{u_i} \right)^2, \quad (7)$$

gdzie u_i są niepewnościami pomiarów oporu, n jest liczbą pomiarów, a $\hat{\alpha}$ i $\hat{\beta}$ są poszukiwanymi, najlepszymi ocenami parametrów prostej [3]. Aby stosować metodę najmniejszych kwadratów, należy wybrać zmienną niezależną, która będzie traktowana jako znana dokładnie, tj. o zerowej niepewności. W naszym przypadku zmienną niezależną jest pomiar temperatury. Niepewności u_i pomiaru oporu obliczono korzystając z instrukcji dołączonej przez producenta. Dopuszczalny graniczny błąd wskazania na danym zakresie pomiarowym miernika wyznaczono na podstawie wzoru:

$$\Delta_p = pz + nc, \quad (8)$$

gdzie poszczególne symbole oznaczają: p – wynik pomiaru, w – dokładność wskazanej wartości z wyrażona w procentach, nc – dokładność cyfrowa określana jako liczba n najmniej znaczących jednostek c odczytu. Wielkości w , n oraz c odczytano z instrukcji miernika. Ostateczna niepewność pojedynczego pomiaru wyrażona jest

wzorem:

$$u_i = \frac{\Delta_p}{\sqrt{3}}. \quad (9)$$

Stosując Równanie (8) oraz Równanie (9) stworzono Tabelę 8 oraz Tabelę 9, w których zawarto wyniki pomiarów oporu z Tabeli 1 i Tabeli 2 wraz z ich niepewnościami. Tabele te umieszczono w Dodatku, ze względu na ich rozmiary.

Znając niepewności można zacząć stosować metodę najmniejszych kwadratów. Minimalizacja wielkości wyrażonej Równaniem (7) prowadzi do następujących wzorów:

$$\hat{\alpha} = \frac{1}{\Delta} (SS_{x\eta} - S_x S_\eta), \quad u_\alpha^2 = \frac{S}{\Delta}, \quad \hat{\beta} = \frac{1}{\Delta} (S_\eta S_{xx} - S_{x\eta} S_x), \quad u_\beta^2 = \frac{\Delta}{S_{xx}},$$

$$S = \sum_{i=1}^n \frac{1}{u_{\eta i}^2}, \quad S_x = \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{u_{\eta i}^2}, \quad S_{xx} = \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{u_{\eta i}^2}, \quad S_\eta = \sum_{i=1}^n \frac{\eta_i}{u_{\eta i}^2}, \quad S_{x\eta} = \sum_{i=1}^n \frac{x_i \eta_i}{u_{\eta i}^2}, \quad \Delta = SS_{xx} - S_x^2.$$

W tym przypadku $u_{\eta i}$ jest niepewnością η_i , którą wyznaczono korzystając z metody propagacji małych błędów. Ogólny wzór przenoszenia niepewności w tej metodzie jest następujący:

$$u_f^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} u_i \right)^2 + \sum_{i=1, i \neq j}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} c_{ij} \right), \quad (10)$$

gdzie wielkość f zależy od wielkości x_i o niepewnościach u_i i o ocenach kowariancji c_{ij} [4]. W omawianym przypadku kowariancja pomiędzy η a r wynosi zero. Stosując Równanie (10) do zależności $\eta = \log(r/[\Omega])$ otrzymano następujący wzór na określenie niepewności:

$$u_{\eta i} = \frac{u_i}{r}. \quad (11)$$

Podstawiając wartości liczbowe otrzymano następujące wyniki:

$$S = 1099434,03067, \quad S_x = 3378,11487 \frac{1}{K}, \quad S_{xx} = 10,42096 \frac{1}{K^2},$$

$$S_\eta = 4914120,14112, \quad S_{x\eta} = 15244,42898 \frac{1}{K}, \quad \Delta = 45502,23581 \frac{1}{K^2}.$$

Szczegółowe obliczenia, które doprowadziły do tych wyników znajdują się w Tabeli 10, Tabeli 11, Tabeli 12 i Tabeli 13, które to są umieszczone w Dodatku.

Wykorzystując zależności $\hat{\alpha} = \hat{B}$, $x = 1/T$, $\hat{\beta} = \log(r_\infty/[\Omega])$ oraz stosując dane z Tabeli 1, Tabeli 2, Tabeli 8 i Tabeli 9 uzyskano oceny parametrów: $B = \hat{\alpha} = 3511,5 \pm 4,9 \text{ K}$, $\hat{\beta} = -6,320 \pm 0,015 \Rightarrow r_\infty = 1,800 \pm 0,027 \Omega$. Niepewność r_∞ otrzymano stosując Równanie (10) i otrzymując $u_r = \exp(\beta)u_\beta$. Aby ocenić charakter zależności pomiędzy wielkościami $\hat{\alpha}$ oraz $\hat{\beta}$ należy wyznaczyć ocenę ich kowariancji $c_{\alpha\beta}$ oraz współczynnik korelacji $\rho_{\alpha\beta}$. Dla tych konkretnych wielkości wyrażają się one wzorami:

$$c_{\alpha\beta} = \frac{-S_x}{\Delta} [4], \quad (12)$$

$$\rho_{\alpha\beta} = \frac{c_{\alpha\beta}}{u_\alpha u_\beta} [?]. \quad (13)$$

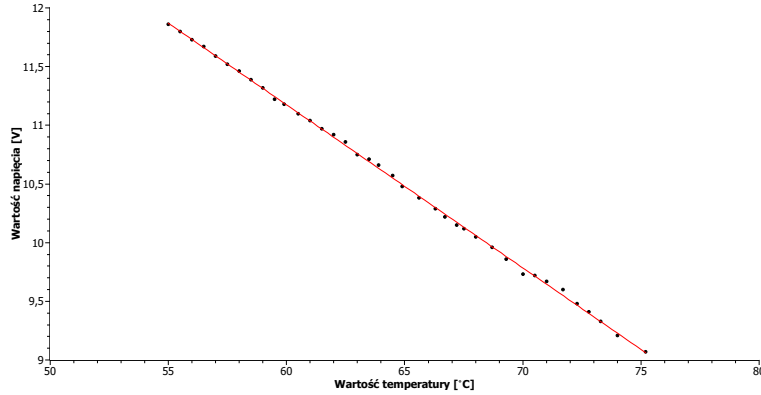
Podstawiając dane liczbowe otrzymano wartości $c_{\alpha\beta} = -0,07424 \text{ K}$ oraz $\rho_{\alpha\beta} = -0,99801$. Otrzymanie wartości ρ bliskiej -1 świadczy o odwrotnej proporcjonalności porównywanych wielkości, tj wraz ze wzrostem x maleje η . Aby przenieść ocenę kowariancji na wartości B oraz r_∞ należy zastosować wzór:

$$c_{Br} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial B}{\partial x_i} \frac{\partial r}{\partial x_j} u_i + \sum_{i=1, i \neq j}^n \frac{\partial B}{\partial x_i} \frac{\partial r}{\partial x_j} c_{\alpha\beta} [4], \quad (14)$$

który zwraca wartość $c_{Br} = \exp\beta c_{\alpha\beta} = -0,00013 \text{ K}\Omega$, a ocena korelacji p_{Br} jest taka sama jak $\rho_{\alpha\beta}$, gdyż dodatkowy wyraz przy niepewności r zredukuje się z analogicznym wyrazem w wartości c_{Br} .

Znając dokładne wartości B oraz r_∞ można wyznaczyć dokładny opór dzielnika napięć, którego wartość wyraża się Równaniem (5). Podstawiając dane otrzymano wartość $R = 39,49772 \text{ k}\Omega$. Dodatkowo odwracając zależność z Równania (1) można wyznaczyć temperaturę, dla której byłby destynowany opornik użyty w pomiarach, którego opór wynosił $R_p = 41,7 \text{ k}\Omega$. Otrzymana wartość temperatury wynosi $t_p = 76,25473 \text{ }^\circ\text{C}$. Pomimo tego, że użyty opornik ostatecznie cechował się opornością bliższą tej oczekiwanej, niż pierwotnie sądzono, to nie pozwoliło to uniknąć rozbieżności w wartości temperatury punktu przełączenia.

W dalszej części analizy danych zajęto się wyznaczaniem parametrów prostej opisanej Równaniem (4) na podstawie danych z Tabeli 2. Rysunek 4 przedstawia wykres zależności napięcia U od temperatury t . Do wyznaczenia parametrów krzywej po raz kolejny zastosowano wykorzystano metodę najmniejszych kwadratów. Niepewności napięcia wyznaczono korzystając z Równania (8) oraz z instrukcji miernika. Otrzymane wzory służące do wyznaczenia najlepszych ocen parametrów prostej są analogiczne do wzorów wykorzystanych w poprzedniej analizie. Wartości napięć i ich niepewności przedstawia Tabela 4.



Rysunek 4: Wykres zależności $U(t)$

Tabela 5 prezentuje wartości składników sum występujących w metodzie najmniejszych kwadratów.

Na podstawie danych z Tabeli 5 wyznaczono następujące wartości sum:

$$\begin{aligned} S &= 16759,54666 \frac{1}{V^2}, & S_t &= 1089944,88273 \frac{^{\circ}C}{V^2}, & S_{tt} &= 71447033,01494 \frac{^{\circ}C^2}{V^2}, \\ S_U &= 175560,66677 \frac{1}{V}, & S_{Ut} &= 11339184,95965 \frac{^{\circ}C}{V}, & \Delta &= 9440036389,05640 \frac{^{\circ}C^2}{V^4}. \end{aligned}$$

Obliczone parametry prostej wraz z niepewnościami wynoszą: $h = -0,1390 \pm 0,0013 \text{ V}/^{\circ}\text{C}$ i $g = 19,513 \pm 0,087 \text{ V}$. Na podstawie Równania (12) oraz Równania (13) obliczono ocenę kowariancji jak i ocenę korelacji pomiędzy h i g . Otrzymano: $c_{hg} = -0,00012 \text{ V}^2/^{\circ}\text{C}$ i $\rho_{hg} = -0,99605$. Po raz kolejny ocena korelacji wskazuje na silnie skorelowaną zależność odwrotnie proporcjonalną. Wartość ta jest zgodna z oczekiwaniami. Na potrzeby analizy danych obliczono również reszty napięć ϵ_i , czyli różnice pomiędzy wartością zmierzoną U_i , a wartością teoretyczną obliczoną dla danej temperatury tj. $ht_i + g$. Wartości tych reszt są zaprezentowane w Tabeli 6, a ich wykres znajduje się na Rysunku 5.

Jak widać reszty są w miarę równomiernie rozłożone po obu stronach osi $x = 0$. Jednak można zauważyć coś na kształt zależności sinusoidalnej. Być może jest to przypadek albo w trakcie pomiarów doszło do wprowadzenia błędu systematycznego. Jednak na potrzeby dalszej analizy danych założono, iż nie ma żadnych błędów systematycznych.

Ostatnim krokiem pozostałym do stworzenia termometru jest odwrócenie zależności wyrażonej przez Równanie (4) oraz wyznaczenie niepewności otrzymanej w ten sposób wartości temperatury. Zależność $t(U)$ można zapisać w sposób:

$$t(U) = HU + G, \quad (15)$$

gdzie $H = 1/h = -7,19597 \text{ }^{\circ}\text{C}/\text{V}$ oraz $G = -g/h = 140,41393 \text{ }^{\circ}\text{C}$. Niepewności tych współczynników można wyznaczyć korzystając z Równania (10). Otrzymano w ten sposób:

$$u_H = \frac{u_h}{h^2}, \quad (16)$$

$$u_G = \sqrt{\frac{u_g^2}{h^2} + \frac{u_h^2 g^2}{h^4} - 2 \frac{g}{h^3} c_{gh}}. \quad (17)$$

Tabela 4: Wartości napięcia oraz jego niepewności

Napięcie U [V]	Wartość w	Wartość nc	Wartość Δ_p [V]	u_i [V]
9,07000	0,00500	0,03000	0,07535	0,04350
9,21000	0,00500	0,03000	0,07605	0,04391
9,33000	0,00500	0,03000	0,07665	0,04425
9,41000	0,00500	0,03000	0,07705	0,04448
9,48000	0,00500	0,03000	0,07740	0,04469
9,60000	0,00500	0,03000	0,07800	0,04503
9,67000	0,00500	0,03000	0,07835	0,04524
9,72000	0,00500	0,03000	0,07860	0,04538
9,73000	0,00500	0,03000	0,07865	0,04541
9,86000	0,00500	0,03000	0,07930	0,04578
9,96000	0,00500	0,03000	0,07980	0,04607
10,05000	0,00500	0,03000	0,08025	0,04633
10,12000	0,00500	0,03000	0,08060	0,04653
10,15000	0,00500	0,03000	0,08075	0,04662
10,22000	0,00500	0,03000	0,08110	0,04682
10,29000	0,00500	0,03000	0,08145	0,04703
10,38000	0,00500	0,03000	0,08190	0,04728
10,48000	0,00500	0,03000	0,08240	0,04757
10,57000	0,00500	0,03000	0,08285	0,04783
10,66000	0,00500	0,03000	0,08330	0,04809
10,71000	0,00500	0,03000	0,08355	0,04824
10,75000	0,00500	0,03000	0,08375	0,04835
10,86000	0,00500	0,03000	0,08430	0,04867
10,92000	0,00500	0,03000	0,08460	0,04884
10,97000	0,00500	0,03000	0,08485	0,04899
11,04000	0,00500	0,03000	0,08520	0,04919
11,10000	0,00500	0,03000	0,08550	0,04936
11,18000	0,00500	0,03000	0,08590	0,04959
11,22000	0,00500	0,03000	0,08610	0,04971
11,32000	0,00500	0,03000	0,08660	0,05000
11,39000	0,00500	0,03000	0,08695	0,05020
11,46000	0,00500	0,03000	0,08730	0,05040
11,52000	0,00500	0,03000	0,08760	0,05058
11,59000	0,00500	0,03000	0,08795	0,05078
11,67000	0,00500	0,03000	0,08835	0,05101
11,73000	0,00500	0,03000	0,08865	0,05118
11,80000	0,00500	0,03000	0,08900	0,05138
11,86000	0,00500	0,03000	0,08930	0,05156

Wartości tych niepewności wynoszą: $u_H = 0,06900$ °C/V, $u_G = 0,72488$ °C. Ostatecznie można zapisać: $\bar{h} = -7,196 \pm 0,069$ °C/V oraz $\bar{G} = 140,41 \pm 0,72$ °C. Dodatkowo można wyznaczyć ocenę kowariancji G i H korzystając z Równania (14), który po dostosowaniu do nowych zmiennych daje następujący wynik:

$$c_{HG} = \frac{-g}{h^4} u_h^2 + \frac{c_{hg}}{h^3}. \quad (18)$$

Po podstawieniu danych liczbowych otrzymano $c_{HG} = -0,04987$ °C²/V oraz $\rho_{HG} = -0,99706$. W tym przypadku $\rho_{HG} \neq \rho_{hg}$ ponieważ wartości pochodnej niepewności i kowariancji nie redukują się wzajemnie. Przy takim zestawie danych można wyznaczyć niepewność temperatury t dla danego napięcia U stosując Równanie (10) do Równania (15). Otrzymano:

$$u_t = \sqrt{H^2 u_U^2 + U^2 u_H^2 + u_G^2 + 2U^2 c_{HG}} \quad (19)$$

Niepewność napięcia u_U można, dla miernika Brymen, obliczyć z Równania (8). W ten sposób otrzymujemy kompletną informację o wartości temperatury i jej niepewności. Dla przykładu można założyć, iż zmierzono napięcie o wartości $U = 7,82$ V. W takim wypadku wartość temperatury wraz z niepewnością powinna wynosić $t = 84,14 \pm 0,35$ °C. Jak widać niepewność ta jest wysoka, w szczególności porównując ją do działki odczytu termometru wzorcowego otrzymujemy trzykrotny wzrost niepewności.

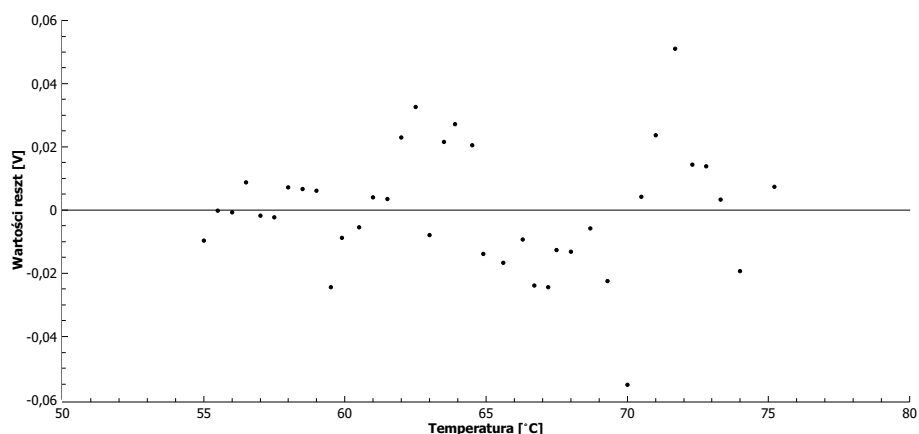
Tabela 5: Wartości pośrednie

$1/u_i$ [1/V]	S_i [1/V ²]	S_t [°C/V ²]	S_U [1/V]	S_{tt} [°C ² /V ²]	S_{Ut} [°C/V]
22,98674	528,39018	39734,94187	4792,49897	2988067,62866	360395,92277
22,77516	518,70785	38384,38067	4777,29927	2840444,16953	353520,14596
22,59688	510,61896	37428,36973	4764,07489	2743499,50151	349206,68962
22,47957	505,33103	36788,09912	4755,16501	2678173,61574	346176,01269
22,37792	500,77119	36205,75687	4747,31086	2617676,22138	343230,57509
22,20578	493,09665	35355,02959	4733,72781	2534955,62130	339408,28402
22,10658	488,70103	34697,77303	4725,73895	2463541,88514	335527,46520
22,03627	485,59719	34234,60171	4720,00466	2413539,42078	332760,32865
22,02226	484,97997	33948,59778	4718,85509	2376401,84470	330319,85641
21,84175	477,06206	33060,40083	4703,83192	2291085,77735	325975,55216
21,70490	471,10257	32364,74645	4692,18158	2223458,08129	322352,87467
21,58319	465,83399	31676,71121	4681,63158	2154016,36242	318350,94768
21,48946	461,79707	31171,30208	4673,38633	2104062,89060	315453,57708
21,44955	460,08301	30917,57805	4669,84252	2077661,24472	313813,41717
21,35698	456,12045	30423,23417	4661,55102	2029229,71898	310925,45319
21,26520	452,20887	29981,44813	4653,22928	1987770,01109	308509,10127
21,14836	447,25319	29339,80956	4642,48816	1924691,50711	304547,22323
21,02003	441,84183	28675,53492	4630,50240	1861042,21651	300519,60599
20,90586	437,05514	28190,05634	4619,67280	1818258,63393	297968,89551
20,79293	432,34581	27626,89710	4608,80631	1765358,72452	294502,72306
20,73071	429,76233	27289,90800	4602,75456	1732909,15791	292274,91467
20,68120	427,71219	26945,86768	4597,90599	1697589,66362	289668,07752
20,54627	422,14933	26384,33319	4584,54174	1649020,82463	286533,85849
20,47341	419,16067	25987,96171	4577,23455	1611253,62574	283788,54182
20,41309	416,69430	25626,69955	4571,13649	1576042,02223	281124,89405
20,32923	413,27779	25209,94512	4562,58679	1537806,65212	278317,79409
20,25790	410,38268	24828,15225	4555,24777	1502103,21124	275592,49000
20,16357	406,56962	24353,52042	4545,44839	1458775,87307	272272,35828
20,11673	404,68299	24078,63800	4540,54317	1432678,96094	270162,31835
20,00059	400,02347	23601,38461	4528,26566	1392481,69226	267167,67384
19,92008	396,80952	23213,35687	4519,66042	1357981,37707	264400,13478
19,84022	393,63415	22830,78062	4511,04734	1324185,27572	261640,74586
19,77227	390,94264	22479,20185	4503,65922	1292554,10646	258960,40533
19,69359	387,83729	22106,72571	4495,03423	1260083,36563	256216,95101
19,60442	384,33342	21714,83806	4485,17098	1226888,35018	253412,16012
19,53808	381,73658	21377,24831	4477,77005	1197125,90531	250755,12267
19,46125	378,74006	21020,07322	4469,13269	1166614,06388	248036,86403
19,39587	376,19961	20690,97836	4461,72733	1138003,80965	245395,00332

Tabela 6: Wartości reszt

Temperatura t [°C]	75,2	74	73,3	72,8	72,3	71,7	71
Reszta [V]	0,00743	-0,01933	0,00340	0,01391	0,01443	0,05105	0,02377
Temperatura t [°C]	70,5	70	69,3	68,7	68	67,5	67,2
Reszta [V]	0,00429	-0,05519	-0,02247	-0,00585	-0,01313	-0,01261	-0,02430
Temperatura t [°C]	66,7	66,3	65,6	64,9	64,5	63,9	63,5
Reszta [V]	-0,02378	-0,00937	-0,01665	-0,01392	0,02049	0,02711	0,02152
Temperatura t [°C]	63	62,5	62	61,5	61	60,5	59,9
Reszta [V]	-0,00796	0,03256	0,02307	0,00359	0,00411	-0,00538	-0,00876
Temperatura t [°C]	59,5	59	58,5	58	57,5	57	56,5
Reszta [V]	-0,02434	0,00617	0,00669	0,00721	-0,00228	-0,00176	0,00876
Temperatura t [°C]	56			55,5			55
Reszta [V]	-0,00073			-0,00021			-0,00969

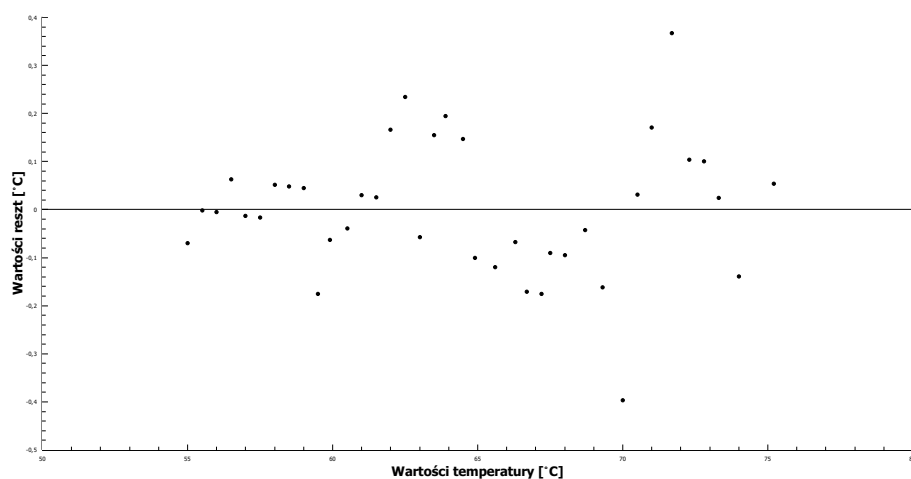
Aby dopełnić analizę danych należałoby wykonać wykres reszt $\delta_i = t_i - (HU_i + G)$. Wartości reszt przedstawiono w Tabeli 7. Na podstawie tych danych stworzono wykres przedstawiony na Rysunku 6.



Rysunek 5: Wykres reszt ϵ_i [V]

Tabela 7: Wartości reszt

Temperatura t [°C]	75,2	74	73,3	72,8	72,3	71,7	71
Reszta [°C]	0,05350	-0,13906	0,02445	0,10013	0,10385	0,36736	0,17108
Temperatura t [°C]	70,5	70	69,3	68,7	68	67,5	67,2
Reszta [°C]	0,03088	-0,39716	-0,16169	-0,04209	-0,09445	-0,09073	-0,17486
Temperatura t [°C]	66,7	66,3	65,6	64,9	64,5	63,9	63,5
Reszta [°C]	-0,17114	-0,06742	-0,11978	-0,10019	0,14745	0,19509	0,15489
Temperatura t [°C]	63	62,5	62	61,5	61	60,5	59,9
Reszta [°C]	-0,05727	0,23428	0,16604	0,02584	0,02956	-0,03869	-0,06301
Temperatura t [°C]	59,5	59	58,5	58	57,5	57	56,5
Reszta [°C]	-0,17517	0,04443	0,04814	0,05186	-0,01638	-0,01266	0,06302
Temperatura t [°C]	56			55,5			55
Reszta [°C]	-0,00523			-0,00151			-0,06975



Rysunek 6: Wykres reszt δ_i [°C]

Wykres ten przyjmuje identyczny kształt jak wykres reszt ϵ_i , jednak w tym przypadku zmieniła się skala. Dodatkowo wykres ten pozwala określić, w jakim przedziale temperatury pomiary termistorem byłyby najdokładniejsze. Jak widać najmniejsze odchylenie przypada na przedział poniżej 60 °C. Różnica pomiędzy wartościami teoretycznymi, a eksperymentalnymi rośnie gwałtownie powyżej tej granicy. W tym przedziale termistor staje się niedokładnym termometrem, jednak dla wartości poniżej tej wartości termistor wykazuje się zadowalającą dokładnością.

DYSKUSJA WYNIKÓW I WNIOSKI

Otrzymana wartość niepewności dla przykładowego napięcia, jak i struktura wykresu reszt przedstawiona na Rysunku 6 pozwala stwierdzić, iż termometr oparty o ten termistor byłby wysoce niedokładny. Może to wynikać z faktu błędnego wybrania opornika do dzielnika napięć. Jednak w tym przypadku wybór był niewielki, więc możliwość ponownej kalibracji przyrządu przy oporniki o oporze bliższym wartości oporu teoretycznego pozwoliłaby rozwiązać tę kwestię. Dodatkowo można sądzić, iż w pomiarach miał miejsce błąd systematyczny. Tłumaczyłoby to błędną kalibrację przyrządu, jak i otrzymanie skrajnych współczynników w porównaniu z innymi termistorami. Jeśli błąd systematyczny faktycznie miał miejsce, to miał on swoje źródło w mierniku. Wykorzystanie innego miernika pozwoliłoby na lepszą ocenę sytuacji.

Literatura

- [1] H. Szydłowski, *Pracownia fizyczna*, PWN, Warszawa, 1973, s. 385.
- [2] Praca zbiorowa, *Multimetry cyfrowe BM805, BM806T, BM807*, BRYMEN Technology Co., Taiwan, s. 20.
- [3] J. R. Taylor, *Wstęp do analizy błęd pomiarowego*, PWN, Warszawa, 1995, s. 175.
- [4] J. R. Taylor, *Wstęp do analizy błęd pomiarowego*, PWN, Warszawa, 1995, s. 197.

DODATEK

Tabela 8: Wartości oporu oraz jego niepewności

Opór r [kΩ]	Wartość w	Wartość nc	Wartość Δ_p [kΩ]	u_i [kΩ]
40,3	0,006	0,4	0,64180	0,37054
41,2	0,006	0,4	0,64720	0,37366
42,1	0,006	0,4	0,65260	0,37678
43,3	0,006	0,4	0,65980	0,38094
44	0,006	0,4	0,66400	0,38336
45	0,006	0,4	0,67000	0,38682
45,5	0,006	0,4	0,67300	0,38856
47,2	0,006	0,4	0,68320	0,39445
48	0,006	0,4	0,68800	0,39722
49,6	0,006	0,4	0,69760	0,40276
50,8	0,006	0,4	0,70480	0,40692
52,2	0,006	0,4	0,71320	0,41177
53,7	0,006	0,4	0,72220	0,41696
55,1	0,006	0,4	0,73060	0,42181
55,6	0,006	0,4	0,73360	0,42354
58,4	0,006	0,4	0,75040	0,43324
59,3	0,006	0,4	0,75580	0,43636
60,2	0,006	0,4	0,76120	0,43948
61,8	0,006	0,4	0,77080	0,44502
62,2	0,006	0,4	0,77320	0,44641
63,1	0,006	0,4	0,77860	0,44952
64	0,006	0,4	0,78400	0,45264
65	0,006	0,4	0,79000	0,45611
65,9	0,006	0,4	0,79540	0,45922
66,6	0,006	0,4	0,79960	0,46165
67,6	0,006	0,4	0,80560	0,46511
69	0,006	0,4	0,81400	0,46996
70	0,006	0,4	0,82000	0,47343
70,7	0,006	0,4	0,82420	0,47585
71,2	0,006	0,4	0,82720	0,47758
73	0,006	0,4	0,83800	0,48382

Tabela 9: Wartości oporu oraz jego niepewności

Opór r [k Ω]	Wartość w	Wartość nc	Wartość Δ_p [k Ω]	u_i [k Ω]
74,3	0,006	0,4	0,84580	0,48832
75,7	0,006	0,4	0,85420	0,49317
76,8	0,006	0,4	0,86080	0,49698
78,2	0,006	0,4	0,86920	0,50183
79,8	0,006	0,4	0,87880	0,50738
81	0,006	0,4	0,88600	0,51153
82,4	0,006	0,4	0,89440	0,51638
83,8	0,006	0,4	0,90280	0,52123
85	0,006	0,4	0,91000	0,52539
86,2	0,006	0,4	0,91720	0,52955
87,6	0,006	0,4	0,92560	0,53440
89,1	0,006	0,4	0,93460	0,53959
91	0,006	0,4	0,94600	0,54617
92,5	0,006	0,4	0,95500	0,55137
94,1	0,006	0,4	0,96460	0,55691
95,9	0,006	0,4	0,97540	0,56315
551	0,01	4	9,51000	5,49060
543	0,01	4	9,43000	5,44441
537	0,01	4	9,37000	5,40977
524	0,01	4	9,24000	5,33472
509	0,01	4	9,09000	5,24811
495	0,01	4	8,95000	5,16728
484	0,01	4	8,84000	5,10378
474	0,01	4	8,74000	5,04604
459	0,01	4	8,59000	4,95944
441	0,01	4	8,41000	4,85552
434	0,01	4	8,34000	4,81510
425	0,01	4	8,25000	4,76314
420	0,01	4	8,20000	4,73427
413	0,01	4	8,13000	4,69386
410	0,01	4	8,10000	4,67654
400	0,01	4	8,00000	4,61880

Tabela 10: Wartości oporu oraz jego niepewności

x [1/K]	η	$u_{\eta i}$	$1/u_{\eta i}$	S_i
0,00286	3,69635	0,00919	108,75919	11828,56121
0,00287	3,71844	0,00907	110,26034	12157,34299
0,00287	3,74005	0,00895	111,73665	12485,07937
0,00288	3,76815	0,00880	113,66747	12920,29486
0,00288	3,78419	0,00871	114,77445	13173,17463
0,00289	3,80666	0,00860	116,33177	13533,08086
0,00289	3,81771	0,00854	117,10002	13712,41409
0,00290	3,85439	0,00836	119,66159	14318,89606
0,00291	3,87120	0,00828	120,84075	14602,48783
0,00291	3,90399	0,00812	123,15040	15166,02138
0,00292	3,92790	0,00801	124,84135	15585,36180
0,00293	3,95508	0,00789	126,77096	16070,87754
0,00294	3,98341	0,00776	128,78860	16586,50401
0,00294	4,00915	0,00766	130,62688	17063,38213
0,00295	4,01818	0,00762	131,27321	17232,65496
0,00296	4,06732	0,00742	134,79713	18170,26655
0,00296	4,08261	0,00736	135,89655	18467,87245
0,00297	4,09767	0,00730	136,98037	18763,62212
0,00297	4,12390	0,00720	138,86967	19284,78462
0,00298	4,13035	0,00718	139,33466	19414,14788
0,00298	4,14472	0,00712	140,37042	19703,85371
0,00298	4,15888	0,00707	141,39190	19991,67014
0,00299	4,17439	0,00702	142,51051	20309,24531
0,00299	4,18814	0,00697	143,50283	20593,06122
0,00300	4,19870	0,00693	144,26536	20812,49479
0,00300	4,21361	0,00688	145,34091	21123,97922
0,00301	4,23411	0,00681	146,82003	21556,12168
0,00301	4,24850	0,00676	147,85800	21861,98691
0,00301	4,25845	0,00673	148,57558	22074,70263
0,00302	4,26549	0,00671	149,08368	22225,94271
0,00302	4,29046	0,00663	150,88271	22765,59145
0,00302	4,30811	0,00657	152,15343	23150,66767
0,00303	4,32678	0,00651	153,49596	23561,00869
0,00303	4,34120	0,00647	154,53241	23880,26699
0,00304	4,35927	0,00642	155,82878	24282,60781
0,00304	4,37952	0,00636	157,27999	24736,99498
0,00305	4,39445	0,00632	158,34776	25074,01312
0,00305	4,41159	0,00627	159,57176	25463,14816
0,00306	4,42843	0,00622	160,77299	25847,95513
0,00306	4,44265	0,00618	161,78497	26174,37508
0,00307	4,45667	0,00614	162,78105	26497,67044
0,00307	4,47278	0,00610	163,92356	26870,93480
0,00308	4,48976	0,00606	165,12490	27266,23098

Tabela 11: Wartości oporu oraz jego niepewności

$x [1/K]$	η	$u_{\eta i}$	$1/u_{\eta i}$	S_i
0,00308	4,51086	0,00600	166,61377	27760,14732
0,00309	4,52721	0,00596	167,76408	28144,78770
0,00309	4,54436	0,00592	168,96743	28549,99171
0,00310	4,56331	0,00587	170,29288	28999,66403
0,00360	6,31173	0,00996	100,35331	10070,78718
0,00359	6,29711	0,01003	99,73527	9947,12392
0,00359	6,28600	0,01007	99,26481	9853,50280
0,00358	6,26149	0,01018	98,22453	9648,05757
0,00358	6,23245	0,01031	96,98722	9406,52151
0,00357	6,20456	0,01044	95,79499	9176,67988
0,00356	6,18208	0,01054	94,83174	8993,05911
0,00356	6,16121	0,01065	93,93502	8823,78815
0,00355	6,12905	0,01080	92,55079	8565,64947
0,00354	6,08904	0,01101	90,82454	8249,09760
0,00353	6,07304	0,01109	90,13310	8123,97564
0,00353	6,05209	0,01121	89,22686	7961,43251
0,00352	6,04025	0,01127	88,71480	7870,31529
0,00352	6,02345	0,01137	87,98733	7741,77004
0,00351	6,01616	0,01141	87,67171	7686,32830
0,00351	5,99146	0,01155	86,60254	7500,00000

Tabela 12: Wartości oporu oraz jego niepewności

$S_{xi} [1/K]$	$S_{\eta i}$	$S_{tti} [1/K^2]$	$S_{\eta ti} [1/K]$
33,78624	43722,51959	0,09650	124,88580
34,84478	45206,32928	0,09987	129,56816
35,86636	46694,79288	0,10303	134,14189
37,17001	48685,64312	0,10693	140,06226
37,95210	49849,79087	0,10934	143,61795
39,07907	51515,87130	0,11285	148,76082
39,63125	52350,05228	0,11454	151,30073
41,55222	55190,66553	0,12058	160,15863
42,46144	56529,16565	0,12347	164,37675
44,20292	59208,00845	0,12883	172,56779
45,53129	61217,68580	0,13302	178,84220
47,07346	63561,64643	0,13788	186,17940
48,71220	66070,89571	0,14306	194,04081
50,21596	68409,65360	0,14778	201,32329
50,78884	69243,96469	0,14969	204,07888
53,74228	73904,21385	0,15895	218,58685
54,70341	75397,10791	0,16204	223,33267
55,66189	76887,17557	0,16512	228,08418
57,34399	79528,58819	0,17051	236,48108
57,76301	80187,32276	0,17186	238,58174
58,71232	81666,97171	0,17495	243,34616
59,65882	83143,01874	0,17803	248,11405
60,69709	84778,65510	0,18140	253,37315
61,63742	86246,59133	0,18449	258,14604

Tabela 13: Wartości oporu oraz jego niepewności

S_{xi} [1/K]	$S_{\eta i}$	S_{tti} [1/K ²]	$S_{\eta ti}$ [1/K]
62,38757	87385,51715	0,18701	261,94699
63,41633	89008,16746	0,19038	267,21155
64,81095	91270,91501	0,19486	274,41646
65,80971	92880,54738	0,19810	279,59226
66,49007	94003,91970	0,20027	283,14434
67,02637	94804,59900	0,20213	285,90048
68,75745	97674,84676	0,20766	295,00105
70,02622	99735,64492	0,21182	301,68072
71,37537	101943,25786	0,21622	308,82538
72,45227	103669,12589	0,21982	314,53011
73,78489	105854,43518	0,22420	321,64824
75,27996	108336,25094	0,22909	329,69036
76,42186	110186,47574	0,23292	335,83199
77,72634	112332,85360	0,23726	342,89638
79,02157	114465,93769	0,24158	349,94172
80,14199	116283,62032	0,24538	356,04293
81,25627	118091,37761	0,24918	362,13241
82,52744	120187,80657	0,25346	369,12717
83,87029	122418,81506	0,25798	376,55741
85,52109	125222,12445	0,26347	385,77364
86,83983	127417,32616	0,26794	393,14201
88,22618	129741,38454	0,27264	400,93135
89,75445	132334,34036	0,27779	409,57704
36,21283	63564,13802	0,13022	228,56576
35,74245	62638,12675	0,12843	225,07412
35,36792	61939,09983	0,12695	222,32268
34,56846	60411,23225	0,12386	216,45013
33,64278	58625,65633	0,12032	209,67688
32,75046	56937,24038	0,11688	203,20214
32,03797	55595,85499	0,11414	198,06147
31,37905	54365,18818	0,11159	193,33282
30,38542	52499,29571	0,10779	186,23376
29,20035	50229,12547	0,10336	177,80221
28,70663	49337,26585	0,10144	174,33663
28,10248	48183,29944	0,09920	170,07871
27,73191	47538,70900	0,09772	167,50778
27,24057	46632,14610	0,09585	164,08215
27,01697	46242,15906	0,09496	162,53834
26,31579	44935,98410	0,09234	157,67012