

---

# **Si Euclides lo supiese..., se sentiría muy orgulloso**

*Patrones de regularidad máxima en Música, Geometría,  
Informática y otras disciplinas*

---

FRANCISCO GÓMEZ MARTÍN

Escuela Universitaria de Informática  
Universidad Politécnica de Madrid

9 de octubre de 2009

## **1. Introducción**

Ritmos africanos de campanas, escalas musicales de estilos diversos, fisión nuclear en aceleradores de neutrones en física, sucesiones lineales en matemáticas, palabras mecánicas y teoría de cadenas en informática, dibujo de rectas digitales en gráficos por ordenador, cálculo de años bisiestos en diseño de calendarios y, por último, aquel antiguo procedimiento de cálculo del máximo común divisor (divide mientras puedas), descubierto por Euclides, aquel insigne geómetra... todos estos conceptos, dispares y variopintos, ¿qué tienen en común? Una respuesta breve es: todos, de una u otra manera, poseen patrones distribuidos lo más regularmente posible. Para una respuesta más detallada a esta intrigante pregunta, siga leyendo el amable lector.

Varios investigadores de la música han observado que hay una tendencia a encontrar patrones distribuidos lo más regular o uniformemente posible. Tomemos como ejemplo el ritmo. Un ritmo está compuesto por pulsos de igual duración. En cada pulso puede haber una nota, a la cual desig-

nares por  $[\times]$ , o un silencio, que denotaremos por  $[\cdot]$ . Así, por ejemplo, el ritmo de palmas de la sevillana se puede notar como  $[\times \cdot \cdot \times \cdot \cdot \times \cdot \cdot \times \cdot \cdot]$ . Salta a la vista que sus 4 notas están distribuidas muy regularmente en los 12 pulsos de que consta el ritmo; de hecho, están distribuidas de la manera más regular posible. Por el contrario, el ritmo  $[\times \times \times \times \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot]$  no tiene las notas distribuidas regularmente, sino más bien amontonadas.

En los ritmos de la música tradicional del mundo, especialmente en la no occidental, esta distribución de notas con regularidad máxima es muy frecuente. ¿Por qué esos ritmos muestran tal preferencia? Primero hay que decir que muchos de los ritmos con distribución regular de notas pertenecen a la categoría de las claves. En muchas de esas tradiciones musicales hay un ritmo que se repite invariablemente, llamado clave, y que sirve como referencia rítmica y métrica, muchas veces incluso de referencia estructural. Ese ritmo suele tener una estructura de pregunta-respuesta. La pregunta rítmica se plantea creando tensión rítmica y la respuesta relajando dicha tensión. Los ritmos de regularidad máxima tienden a crear tensión rítmica, sobre todo si el número de notas y el número de pulsos son primos entre sí (no tienen divisores comunes salvo el 1). En este caso las notas “contradicen” las notas que se esperan a partir del número total de pulsos. Consideremos, por ejemplo, el ritmo  $[\times \cdot \cdot \times \cdot \cdot \times \cdot]$ . Tiene 8 pulsos y 3 notas y observamos que 3 y 8 son primos entre sí. Por ser 8 divisible por 2 y 4, las notas sobre múltiplos de 2 y 4 se perciben como estables. Sin embargo, este ritmo tiene notas en 0, 3 y 7. Al tocar ese ritmo se percibe una superposición de un ritmo ternario, las tres notas del ritmo, sobre un ritmo binario, la estructura binaria de los pulsos. Todo ello, ciertamente crea tensión rítmica.

Demain y otros colegas, autores del trabajo *The Distance Geometry of Music* [DGM<sup>+</sup>09], investigaron la relación entre la distribución de regularidad máxima de patrones y otras disciplinas, con especial énfasis en el ritmo musical.

## 2. Euclides y la regularidad máxima en varias disciplinas

¿Recuerda el lector, ejem, de cierta edad, de su más tierna infancia el cálculo del máximo común divisor? Probablemente, le suene un método para calcularlo en que había de realizar muchas divisiones. Era el llamado algoritmo (o método) de Euclides (importante matemático griego que vivió alrededor del 300 a.C., autor de *Los elementos*). Sorprendentemente, los ritmos de máxima regularidad de que hablamos se pueden generarse con el viejo algoritmo de Euclides. Veamos cómo.

### 2.1. El algoritmo de Euclides

El algoritmo de Euclides consiste en hacer divisiones sucesivas para hallar el máximo común divisor de dos números positivos (m.c.d. de aquí en adelante). Si queremos hallar el m.c.d. de dos números  $a$  y  $b$ , suponiendo que  $a > b$ , primero dividimos  $a$  entre  $b$ , y obtenemos el resto  $r$  de la división. Euclides se dio cuenta de que el m.c.d. de  $a$  y  $b$  era el mismo que el de  $b$  y  $r$ . En efecto, cuando dividimos  $a$  entre  $b$ , hallamos un cociente  $c$  y un resto  $r$  de tal manera que se cumple que:

$$a = c \cdot b + r$$

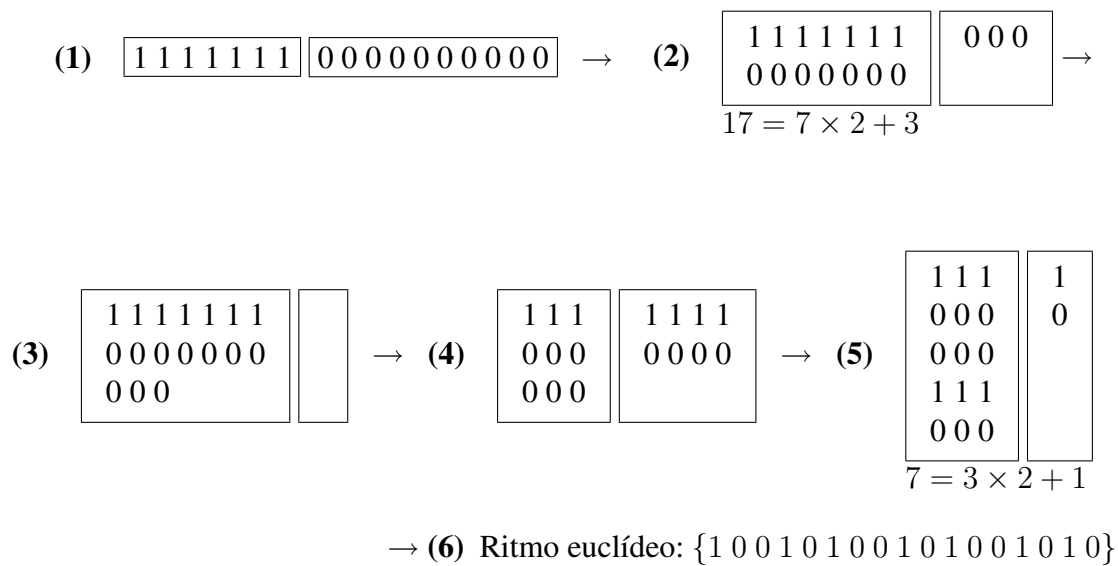
Esta ecuación nos dice que todo divisor común de  $a$  y  $b$  tiene que serlo también de  $r$ . En particular, el m.c.d. de  $a$  y  $b$  es el m.c.d. de  $b$  y  $r$ .

Por ejemplo, calculemos el máximo común de 17 y 7. Como  $17 = 7 \cdot 2 + 3$ , entonces el m.c.d.(17, 7) es igual al m.c.d.(7, 3). De nuevo, como  $7 = 3 \cdot 2 + 1$ , entonces el m.c.d.(7, 3) es igual al m.c.d.(3, 1). Aquí es claro que el m.c.d. entre 3 y 1 es simplemente 1. Por tanto, el m.c.d. entre 17 y 7 es 1 también.

## 2.2. Ritmos euclídeos

¿Cómo se transforma el cálculo del máximo común divisor en un método para generar patrones distribuidos con regularidad máxima?

Ilustraremos el proceso con un ejemplo de ritmos. Supongamos que tenemos 17 pulsos y queremos distribuir de forma regular 7 notas en los 17 pulsos. Sigamos los pasos dados en la figura 1. Primero, alineamos el número de notas y el número de silencios (siete unos y diez ceros); véase la figura 1–paso (1). A continuación, formamos grupos de 7, los cuales corresponden a efectuar la división de 17 entre 7; obtenemos, pues, 7 grupos formados por [10] (en columnas en el paso (2) de la figura). Sobran tres ceros, lo cual indica que en el paso siguiente formaremos grupos de 3. Tras formar el primer grupo–véase el paso (3) de la figura– nos quedamos sin ceros. Continuamos agrupando de 3 en 3 tomando los grupos de la otra caja, en la que quedan 4 columnas (figura 1–paso (4)). Procedemos así que queden uno o cero grupos; de nuevo, esto es equivalente a efectuar la división de 7 entre 3. En nuestro caso, queda un solo grupo y hemos terminado (paso (5)). Finalmente, el ritmo se obtiene leyendo por columnas y de izquierda a derecha la agrupación obtenida (paso (6)).



**Figura 1:** Generación de ritmos euclídeos.

Aquí cada 1 representa una nota [ $\times$ ] y cada 0, un silencio [ $\cdot$ ]. El ritmo que hemos generado con

nuestra notación se escribe entonces como  $[\times \cdot \cdot \times \cdot \times \cdot \cdot \times \cdot \times \cdot \cdot \times \cdot \times \cdot]$

Los ritmos generados por este método se llaman ritmos euclídeos. El ritmo euclídeo de  $k$  notas y  $n$  pulsos se designa por  $E(k, n)$ . Otra manera útil de designar un ritmo es mediante las duraciones de las notas en términos de pulsos. Así, por ejemplo, el ritmo de la sevillana  $[\times \cdot \cdot \times \cdot \cdot \times \cdot \cdot \times \cdot \cdot]$  se puede escribir como (3333), donde cada 3 indica que dura tres pulsos. El ritmo euclídeo que acabamos de obtener con esta notación se escribe  $E(7, 17) = [\times \cdot \cdot \times \cdot \times \cdot \cdot \times \cdot \times \cdot \cdot \times \cdot \times \cdot \cdot] = (3232322)$ .

Demain y sus coautores [DGM<sup>+</sup>09] probaron formalmente que este algoritmo proporciona, salvo rotaciones, la única manera de distribuir  $k$  objetos entre  $n$  del modo más regular posible. Aún más, había varios algoritmos propuestos de manera independiente y ellos probaron que, en realidad, eran todos equivalentes al viejo algoritmo de Euclides. Suponemos que si Euclides lo supiese... estaría muy orgulloso. Quizás nos oye desde su tumba y está sonriéndose ahora.

Damos a continuación una pequeñísima muestra de ritmos euclídeos que se encuentran en las músicas tradicionales del mundo.

- $E(5, 8) = [\times \cdot \times \times \cdot \times \times \cdot] = (21212)$  es el cinquillo cubano, así como el *malfuf* de Egipto, o el ritmo coreano para tambor *mong P'yŏn*. Si el ritmo se empieza a tocar desde la segunda nota aparece un popular ritmo típico de Oriente Próximo, así como el *timini* de Senegal. Si se empieza en la tercera nota tenemos el ritmo del tango.
- $E(5, 12) = [\times \cdot \cdot \times \cdot \times \cdot \cdot \times \cdot \times \cdot \cdot] = (32322)$  es un ritmo muy común en África central que tocan los pigmeos aka. Cuando se toca desde la segunda nota es, entre otros, la clave columbia de la música cubana y el ritmo de la danza chakacha de Kenya.
- $E(5, 16) = [\times \cdot \cdot \times \cdot \cdot \times \cdot \cdot \times \cdot \cdot \times \cdot \cdot \cdot] = (33334)$  es el ritmo de la bosa-nova de Brasil. Este ritmo se toca a partir de la tercera nota.

Existen cerca de dos centenares de ritmos de músicas del mundo documentados que son generados por el algoritmo de Euclides.

## 2.3. Los sistemas de sincronización en los aceleradores de neutrones

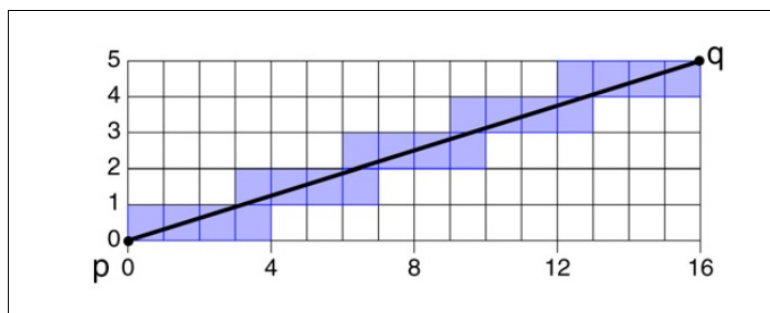
En las líneas anteriores hemos planteado el problema de distribuir notas en un número dado de pulsos de la manera más regular posible. Bjorklund, del Laboratorio de los Álamos en Estados Unidos, se encontró con un problema similar, aunque en un contexto diferente. Bjorklund tenía un sistema de sincronización que activaba una serie de puertas a lo largo de un periodo fijo de tiempo [Bjor03] compuesto de  $n$  intervalos (cada intervalo tenía 10 segundos). Las puertas, a su vez, controlaban el voltaje en un acelerador de neutrones. Cada puerta puede activarse durante cualquier periodo de tiempo dentro de los  $n$  intervalos. El problema era activar las puertas dentro de los  $n$  intervalos de tiempo de la manera más regular posible. Bjorklund lo consiguió imitando el comportamiento del algoritmo de Euclides.

## 2.4. El dibujo de rectas digitales

Los ritmos euclídeos y los patrones distribuidos regularmente también aparecen en gráficos por ordenador [KR04]. El problema aquí es convertir una recta descrita matemáticamente por dos pun-

tos en el plano a una sucesión de píxeles (elementos de pantalla) que representen lo más fielmente posible dicha recta. El conocido algoritmo de Bresenham se usa para dibujar esas rectas digitales. Dicho algoritmo calcula qué píxeles interseca la recta y esos son los que aparecen iluminados. Curiosamente, los píxeles de la recta se pueden generar como si fueran un ritmo euclídeo.

En la figura 2 tenemos un segmento de recta entre los puntos  $(0, 0)$  y  $(16, 5)$ . La pantalla, como sabemos, es una retícula formada por cuadrados de lado un píxel. Los píxeles sobre los que pasa la recta se iluminan, en azul en la figura 2. Si examinamos el patrón de píxeles iluminados por debajo de la recta, vemos que se trata de  $(43333)$ , que es el ritmo euclídeo  $E(5, 16) = [\times \cdot \cdot \cdot \times \cdot \cdot \times \cdot \cdot \times \cdot \cdot]$ . En cambio, los píxeles iluminados por encima de la recta dan el patrón  $(33334)$ , que es una rotación de  $E(5, 16)$ .



**Figura 2:** Ritmos euclídeos y dibujo de rectas digitales.

## 2.5. El cálculo de años bisiestos

Durante cientos de años el ser humano ha observado y medido el tiempo que media entre dos puestas de sol (el día) y entre dos estaciones consecutivas (el año). Como explica Marcia Ascher, profesora emérita de la Universidad de Ítaca (Nueva York), estos sucesos naturales han guiado el diseño de calendarios en diversas culturas [Asch02]. Llamemos  $A$  a la duración de una revolución completa de la Tierra alrededor del Sol, comúnmente conocida como un año. Designemos por  $D$  la duración de la rotación de la Tierra sobre sí misma, también conocida por un día. Estas dos duraciones no son constantes, cambian con el tiempo debido a causas físicas. No obstante, el cociente  $A/D$  se puede tomar como 365,242199..., aproximadamente. Por tanto, parece conveniente hacer que un año tenga 365 días. El problema de despreciar la parte decimal de ese cociente, un mísero 0,242199..., surge cuando ese error se acumula a lo largo del tiempo y entonces se convierte en una cantidad de tiempo más que apreciable. El calendario juliano, así llamado en honor a Julio César, soluciona este problema de un modo simple: añade un día cada cuatro años, pues  $0,242199 \cdot 4 = 0,968796 \approx 1$ . Un año con un día de más se llama un año bisiesto en este calendario. El calendario juliano todavía introduce errores significativos. Establece que el año tenga 365,25 días y esto produce un error menor que el puro truncamiento ( $0,25 - 0,242199 = 0,007801$ ), aunque por exceso. El calendario gregoriano se introdujo para evitar ese redondeo por exceso. En el calendario gregoriano un año bisiesto se define como un año divisible por 4, excepto aquellos no divisibles por 100 y aquellos no divisibles por 400. Con esta regla un año bisiesto dura  $365 + \frac{1}{4} - \frac{1}{100} + \frac{1}{400} = 365,2425$ , una aproximación mucho mejor a la verdadera longitud del año.

Otra solución la brinda el calendario hebreo, el cual usa la idea de ciclos (aquí es donde entran los patrones distribuidos regularmente). Un año regular tiene 12 meses y un año bisiesto, 13 meses. El ciclo tiene 19 años que incluye 7 años bisiestos. Los 7 años bisiestos hay que distribuirlos lo más regularmente posible en el ciclo de 19 años. Si el resto de dividir un año de un ciclo es 3, 6, 8, 11, 14, 17 o 19, entonces es un año bisiesto. El año 2009, que es el 5770 en el calendario hebreo, no es bisiesto porque  $5770 = 303 \cdot 19 + 13$ , pero el año 2010 sí lo será. La distribución de los años bisiestos en el ciclo se puede pensar como un ritmo euclídeo de 7 notas en 19 pulsos, esto es,  $E(7, 19) = [\times \cdot \cdot \times \cdot \times \cdot \cdot \times \cdot \cdot \times \cdot \cdot \times \cdot \cdot]$ . Cuando se lee el ritmo a partir del séptimo pulso, se obtiene el patrón  $[\cdot \cdot \times \cdot \cdot \times \cdot \times \cdot \cdot \times \cdot \cdot \times \cdot \cdot \times \cdot \times]$ , que es exactamente el patrón del calendario hebreo (obsérvese las notas en las posiciones 3, 6, 8, 11, 14, 17 y 19).

### 3. Curiosidades de los ritmos euclídeos

Por falta de espacio, no hemos explorado las relaciones de los ritmos euclídeos en otros campos. Así, por ejemplo, los ritmos euclídeos en matemáticas aparecen en las sucesiones de Beatty, y en informática, dentro de la teoría de cadenas en relación con las palabras mecánicas y las cadenas euclídeas.

Los ritmos euclídeos, aparte de su gran ubicuidad, como hemos visto en las secciones anteriores, tienen propiedades interesantes por sí mismos. El lector habrá advertido que un ritmo euclídeo está compuesto por la repetición de un patrón, llamado el patrón principal, más posiblemente otro patrón, llamado la cola. Por ejemplo, el ritmo  $E(7, 17) = [\times \cdot \cdot \times \cdot \times \cdot \cdot \times \cdot \times \cdot \cdot \times \cdot \times \cdot]$  está formado por la repetición tres veces de  $[\times \cdot \cdot \times \cdot]$ , el patrón principal, seguido de  $[\times \cdot]$ , la cola. Si  $E(k, n)$  es un ritmo euclídeo y  $k$  y  $n$  no son primos entre sí, entonces la cola es vacía. En caso contrario, la cola no es vacía. Gómez, Talaskian y Toussaint [GTT09a] y [GTT09b] probaron que el patrón principal y la cola son euclídeos también. Esto confiere a los ritmos euclídeos una fascinante propiedad de autosimilitud, la cual los relaciona profundamente con los fractales. Esos mismos autores investigaron las operaciones con ritmos euclídeos, tales como la concatenación, la sombra de un ritmo, el complementario (intercambiar notas y silencios en un ritmo euclídeo produce otro ritmo euclídeo) y la alternancia. También abordaron problemas sobre descomposición de un ritmo euclídeo en otros ritmos euclídeos y lo pusieron en relación con los ritmos entrelazados, esto es, conjuntos de ritmos que comparten ciertas notas.

### 4. Para saber más

Los resultados expuestos en este trabajo han sido obtenidos por Francisco Gómez y sus colegas. Para más información véanse los artículos [DGM<sup>+</sup>09], [GTT09a] y [GTT09b].

[Asch02] Ascher, M. (2002). *Mathematics Elsewhere: An Exploration of Ideas Across Cultures*. Princeton: Princeton University Press.

[Bjor03] Bjorklund, E. (2003). The theory of rep-rate pattern generation in the SNS timing system. *SNS ASD Technical Note SNS-NOTE-CNTRL-99*. Laboratorio Nacional de Los Álamos, LosAla-

mos, Estados Unidos.

[DGM<sup>+</sup>09] Demaine, E. D.; Gómez Martín, F. ; Meijer, F. ; Rappaport, D.; Taslakian, P.; Toussaint, G. T.; Winograd, T. y Wood, D. R (2009). The distance geometry of music. *Computational Geometry: Theory and Application*, 42, 429–454.

[GTT09a] Gómez, F., Talaskian, P. and Toussaint, G.T. (2009). Structural Properties of Euclidean Rhythms. *Journal of Mathematics and Music*, vol. 3, núm. 1, páginas 1–14.

[GTT09b] Gómez, F., Talaskian, P. y Toussaint, G.T. (2009). Interlocking and Euclidean Rhythms, *Journal of Mathematics and Music*, vol. 3, núm. 1, páginas 15–30.

[KR04] Klette, R. ; Rosenfeld, A (2004). Digital straightness—a review. *Discrete Applied Mathematics*, 139, 197–230.