<<<<< ALGEBRA I – TID: 405 >>>>>

INTRODUCCIÓN

Hola! Bienvenido a esta apasionante materia!! Un espacio en el que podremos aprender juntos muchas herramientas matemáticas que nos serán de gran utilidad para el desarrollo de los programas y algoritmos que se utilizan para resolver innumerable cantidad de Situaciones Profesionales.

A lo largo de esta materia revisaremos los Sistemas de Numeración y la manera en que las computadoras almacenan y procesan datos numéricos: nada menos que la materia prima de nuestros programas!

También nos ocuparemos de aprender de qué manera interactúan dos o más funciones lineales, y en qué punto coinciden: no sólo en el plano, sino también en el espacio o incluso en más dimensiones. Comprenderemos que la matemática lo explica todo de manera muy simple, más allá de las limitaciones sensoriales de nuestra propia existencia humana en la que apenas podemos interpretar hasta 3 dimensiones en el espacio. Por cierto: esto puede parecer metafísico… pero nada más alejado de ello! Los problemas computacionales y de campos tan relacionados como la ciencia de datos y la inteligencia artificial, habitualmente se modelan en mucho más que tres dimensiones. Por ello, la matemática es una herramienta tan valiosa ya que nos permite agregar más y más dimensiones al modelo, y resolverlo, sin necesidad de tener que imaginarlo pues no sería posible.

Siguiendo con el recorrido de este maravilloso viaje, veremos algunos recursos matemáticos y de distribución de datos que hacen sencillísimo resolver problemas que de otro modo serían inabarcables: estoy hablando precisamente de vectores y matrices. Quizá algunos de ustedes estén ya familiarizados con estos recursos en programación… Pues bien, enterarnos que “matemáticamente” estos son mucho más que una simple colección de datos homogénea, y que las reglas propias que definen sus operaciones nos permiten encontrar la manera de representar y resolver muchísimos procesos computacionales que no sería posible de otro modo. Gracias a las definiciones y hallazgos de matemáticos brillantes como Carl Friedrich Gauss y Wilhelm Jordan, o Ferdinand Georg Frobenius y Eugène Rouché, y muchos, muchos otros, hoy podemos representar, procesar y resolver problemas que hacen de nuestra experiencia cotidiana con la tecnología algo tan intuitivo y “humano” como la capacidad de un software para “literalmente” conversar con nosotros, o que Netflix sea capaz de sugerirnos las películas que más probablemente nos gustarán, o poder proyectar en el tiempo el consumo de cada producto para una empresa, y que esta proyección, le permita mejorar su proceso de compra y almacenamiento de mercaderías haciéndola aún más eficiente. La lista sigue casi sin límites a espacios como la posibilidad de jugar al ajedrez contra la compu – y que sea casi imposible ganarle! – o que un personaje virtual con inteligencia artificial sea capaz de darnos una lucha cuerpo a cuerpo en un juego de rol en 3D, o recomendarnos recetas según nuestros hábitos de consumo, o reconocer nuestra escritura, nuestros gestos, e incluso escucharnos, interpretarnos, y traducirnos a cualquier otro idioma en el mundo!!

Abrumador, verdad? Bueno… nada, pero nada de todo lo que he mencionado sería posible sin los recursos matemáticos que estudiaremos! Así que a ponerse manos a la obra: estudiar, practicar, investigar… y aprender!!!

Pero como en todo viaje, para comenzar, es bueno revisar el equipaje y tener todo preparado. Así que les recomiendo darle una repasadita a lo que ya han aprendido de Álgebra durante sus estudios anteriores, en la secundaria. En este documento adjunto encontrarán un buen resumen, ejemplificado y con ejercicios, de las Nociones Elementales de Álgebra ((Poner link interno al PDF: Pre.1. Nociones_preliminares_algebra.pdf :: URL de descarga: https://drive.google.com/file/d/1VNUhrM_yVipuJZzyRMcXvwQ1pGL8W6ag/view?usp=sharing)). Se trata del primer capítulo de un texto publicado en la plataforma Academia.edu, un excelente portal donde encontrar millones de artículos y recursos técnicos.

En el mismo portal puede descargarse la segunda parte, en la que le recomiendo revisar las leyes algebraicas que aplican a las operaciones de Exponenciación y Radicación: este suele ser un aspecto algo descuidado en los estudios previos y conviene repasarlo... Aquí le dejo ese documento para que también pueda repasarlo: Álgebra ((Poner link interno al PDF: Pre.2. Leyes_de_exponentes_algebra.pdf :: URL de descarga: https://drive.google.com/file/d/19AwETyB-ebLyKwLMUtqOLPHc54OGfxw0/view?usp=sharing))

Ahora sí, con el equipaje listo, podemos empezar nuestro viaje!

Éxitos, y buena travesía!!

En una empresa de desarrollo de modelos de predicción analíticos utilizando técnicas de Big Data cuentan con un conjunto de datos de imágenes registrados con una precisión de 15 bits, utilizando 5 bits por color: Rojo, Verde, y Azul.

El conjunto de datos tiene 5 millones de registros, requiriendo cada uno de ellos los 15 bits mencionados.

A los fines de poder almacenar y procesar dichos datos se requiere de un modelo de representación de los mismos en Sistema Binario, y Hexadecimal.

Para poder decidir cuáles son las alternativas de almacenamiento, usted deberá poder analizar el problema y responder las siguientes cuestiones:

1. Si se representa cada componente de color utilizando un byte: ¿Cuántos bytes serán necesarios? ¿Cuál será el grado de ineficiencia en el almacenamiento? Considere que habrán 3 bits inútiles en cada byte utilizado.

2. Si la estrategia a implementar permite almacenar todos los bits significativos en bloque, ¿cuántos bytes serán necesarios para contener el conjunto de datos?

3. Si el sistema de cómputo del que dispone permite almacenar cada dato en un registro de tres dígitos hexadecimales: ¿cuál sería la precisión posible para los datos? Es decir, en vez de manejar datos de 15 bits (con 5 bits por componente), ¿cuál sería la cantidad de bits posible para cada registro? Y en consecuencia: ¿Cuántos colores diferentes puede tener un registro con los datos originales, y cuántos serían si se utilizara el sistema propuesto de 3 dígitos hexadecimales para cada dato?

4. Si cada componente (intensidad de color: Rojo, Verde y Azul) tuviera que ser representado con un único dígito numérico: ¿Cuál debería ser la base del sistema de numeración para cada uno de esos componentes?

5. ¿Cómo expresaría el siguiente pixel (punto de un color) en las otras bases? Complete la siguiente tabla

Color	Binario	Decimal	Hexadecimal
Rojo	01101		
Verde	11100		
Azul	00010		

Un Sistema de Numeración nos dice, básicamente, la manera en la que se ordenan los números que representan cantidades, considerando básicamente dos elementos: cada símbolo y el valor que representa según la posición que ocupa en el número conformado.

El Sistema de Numeración Decimal es nuestro sistema "natural". En él, tenemos 10 símbolos diferentes para cada dígito, que son los número que conocemos, del 0 (cero) al 9 (nueve). Probablemente este ha sido el sistema utilizado y sostenido a lo largo de milenios por toda la humanidad, en razón de ser 10 (diez) los dedos que tenemos en las manos: cuando el hombre comenzó a contar ha de haberlo hecho utilizando sus dedos como primera noción…

El caso es que, mucho más acá en el tiempo, aparece un elemento nuevo: el 0 (cero) !! Y los números más grandes que la cantidad de dedos que tenemos en las manos debían de representarse de algún modo. Así fue que se estableció el sistema posicional de sucesivas potencias de diez, de derecha a izquierda, para atribuir a cada dígito su peso relativo dentro del número que conforma!

Por ejemplo, en el número 123 tenemos tres dígitos:

- El 1 que ocupa la "tercera" posición, de derecha a izquierda y que por tanto ha de valer mucho más que los otros
- El 2 que ocupa la "segunda" posición, y por estar en tal lugar, ha de valer menos que el 1 de la tercera posición y más que el 3 de la primera
- El 3 que ocupa la "primera" posición (siempre contando de derecha a izquierda), y es el único que simplemente vale 3.

El modo de atribuir a cada dígito su valor es, como mencionábamos al principio, valiéndonos de **sucesivas potencias de 10 que es la "base" del sistema**. De este modo, el número 123 representa una **suma**: $1 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 3 \times 10^0$

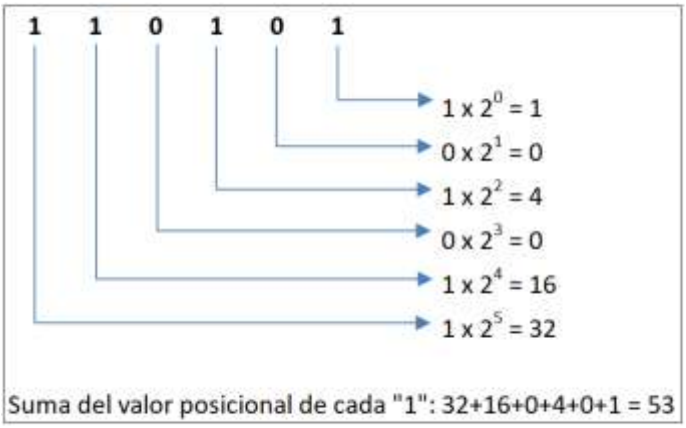
Que es lo mismo que $100 + 20 + 3 = 123$

Pero… todo esto usted ya lo sabe! Al fin y al cabo, lleva mucho tiempo escribiendo y comprendiendo los números escritos en Base 10, del llamado Sistema Decimal.

Veamos ahora lo nuevo… Sucede que tecnológicamente procesar operaciones con dígitos decimales no es conveniente ni económico. Las computadoras son máquinas digitales, binarias, y por tanto el Sistema Natural de numeración para ellas es el BINARIO. En este sistema, los valores posibles para cada dígito son sólo dos: 0 (cero) y 1 (uno)

Pero funciona exactamente igual que el otro sistema! Es posicional, y en potencias naturales de su base, crecientes de derecha a izquierda.

Veamos pues que el número binario 110101_2 (se nombra "uno, uno, cero, uno, cero, uno en base 2") no es otra cosa que una suma:



En el video que sigue puede verse cómo llegamos a esos valores.

((Insertar acá Video (#1) “01_Sistema de Numeración Posicional (Binario a Decimal)”)) https://youtu.be/w3oKhKSSZOY

En nuestra situación profesional trabajamos con "***bits***", que es la ***mínima unidad de información posible***: correspondiente al ***valor de un dígito binario!***

Comprender el sistema de numeración binario nos permitirá encarar el problema indicado y muchos otros, ya que al fin y al cabo, trabajamos con computadoras y este es su recurso natural de tratamiento de la información...

<u>Progresión de valores de cada dígito en la cuenta</u>

Si disponemos en una tabla los primeros elementos de la secuencia numérica en base 10 y en base 2, podrá descubrir un cierto “patrón” en la forma en que los números van creciendo, y cómo van generándose nuevos dígitos cuando se acaban los de la posición anterior.

Decimal	Binario	Cálculo	... con potencias resueltas	... con productos resueltos
0	0	$0x2^0$	0x1	0
1	1	$1x2^0$	1x1	1
2	10	$1x2^1 + 0x2^0$	1x2 + 0x1	2 + 0
3	11	$1x2^1 + 1x2^0$	1x2 + 1x1	2 + 1
4	100	$1x2^2 + 0x2^1 + 0x2^0$	1x4 + 0x2 + 0x1	4 + 0 + 0
5	101	$1x2^2 + 0x2^1 + 1x2^0$	1x4 + 0x2 + 1x1	4 + 0 + 1
6	110	$1x2^2 + 1x2^1 + 0x2^0$	1x4 + 1x2 + 0x1	4 + 2 + 0
7	111	$1x2^2 + 1x2^1 + 1x2^0$	1x4 + 1x2 + 1x1	4 + 2 + 1
8	1000	$1x2^3 + 0x2^2 + 0x2^1 + 0x2^0$	1x8 + 0x4 + 0x2 + 0x1	8 + 0 + 0 + 0
9	1001	$1x2^3 + 0x2^2 + 0x2^1 + 1x2^0$	1x8 + 0x4 + 0x2 + 1x1	8 + 0 + 0 + 1
10	1010	$1x2^3 + 0x2^2 + 1x2^1 + 0x2^0$	1x8 + 0x4 + 1x2 + 0x1	8 + 0 + 2 + 0
11	1011	$1x2^3 + 0x2^2 + 1x2^1 + 1x2^0$	1x8 + 0x4 + 1x2 + 1x1	8 + 0 + 2 + 1
12	1100	$1x2^3 + 1x2^2 + 0x2^1 + 0x2^0$	1x8 + 1x4 + 0x2 + 0x1	8 + 4 + 0 + 0
13	1101	$1x2^3 + 1x2^2 + 0x2^1 + 1x2^0$	1x8 + 1x4 + 0x2 + 1x1	8 + 4 + 0 + 1
14	1110	$1x2^3 + 1x2^2 + 1x2^1 + 0x2^0$	1x8 + 1x4 + 1x2 + 0x1	8 + 4 + 2 + 0
15	1111	$1x2^3 + 1x2^2 + 1x2^1 + 1x2^0$	1x8 + 1x4 + 1x2 + 1x1	8 + 4 + 2 + 1
16	10000	$1x2^4 + 0x2^3 + 0x2^2 + 0x2^1 + 0x2^0$	1x16 + 0x8 + 0x4 + 0x2 + 0x1	16 + 0 + 0 + 0 + 0
17	10001	$1x2^4 + 0x2^3 + 0x2^2 + 0x2^1 + 1x2^0$	1x16 + 0x8 + 0x4 + 0x2 + 1x1	16 + 0 + 0 + 0 + 1
18	10010	$1x2^4 + 0x2^3 + 0x2^2 + 1x2^1 + 0x2^0$	1x16 + 0x8 + 0x4 + 1x2 + 0x1	16 + 0 + 0 + 2 + 0
19	10011	$1x2^4 + 0x2^3 + 0x2^2 + 1x2^1 + 1x2^0$	1x16 + 0x8 + 0x4 + 1x2 + 1x1	16 + 0 + 0 + 2 + 1
20	10100	$1x2^4 + 0x2^3 + 1x2^2 + 0x2^1 + 0x2^0$	1x16 + 0x8 + 1x4 + 0x2 + 0x1	16 + 0 + 4 + 0 + 0

Observe en la tabla anterior, por ejemplo, el renglón correspondiente al número 7: fíjese que en binario, 7 se dice 111. Formalmente, esta igualdad se escribe así

$$7_{10} = 111_2$$

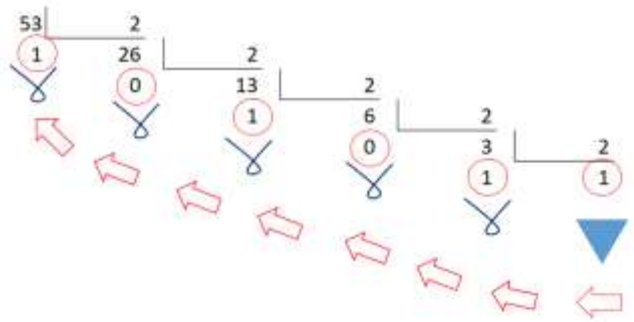
Se escribe al final del número, su base, más chiquito en formato de subíndice. Se lee “Siete en base 10 es uno, uno, uno en base 2”

7 es 111 ya que $1 \times 2^0 + 1 \times 2^1 + 1x2^2$ es 1 por 1, más 1 por 2, más 1 por 4; o sea, 1 + 2 + 4

<u>¿Cómo podemos “convertir” un número en base 10, a su equivalente en base 2?</u>

Existen muchos métodos o algoritmos para hacerlo, además de usar la calculadora, claro está. Vemos a continuación dos de ellos:

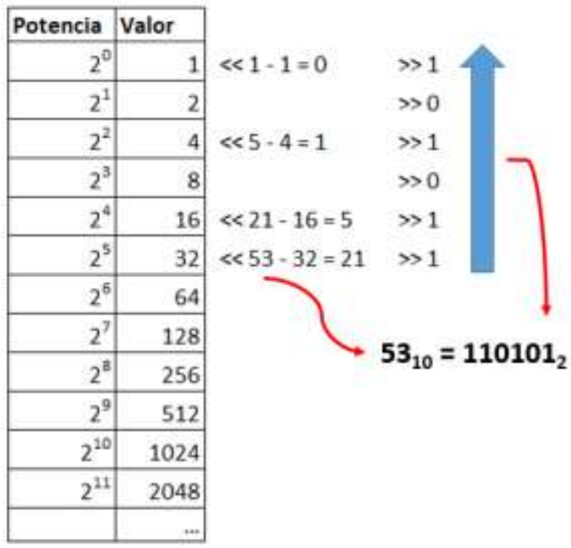
- **<u>Método #1</u>**: Conversión mediante la concatenación de los restos (o residuos) de sucesivas divisiones por la base (2).
  Simplemente dividimos el número en base 10 por 2, de manera entera, con lo cual obtendremos un cociente, y un resto. Luego, dividimos ese cociente por 2, del mismo modo, obteniendo un nuevo cociente, y su resto. Y así sucesivamente hasta que ya no puede dividirse más. Finalmente: el número en binario será la “concatenación” del último cociente seguido de todos los restos de manera ascendente.



$53_{10} = 110101_2$

((Insertar video (#2) “02_Conversión Decimal a Binario”))
https://youtu.be/m_6zub3ASeQ

- **Método #2**: Conversión por suma de dígitos de potencias significativas.
  Disponemos en una tabla la secuencia de potencias ascendentes de la base, y buscamos la mayor de ellas que sea menor o igual al número a convertir. Restamos dicho valor al número y repetimos el proceso, de manera descendente. La concatenación de mayor a menor de todas las potencias involucradas en cada una de esas restas es el número en binario: poniendo “uno” en cada potencia significativa, y “cero” en las que no.



Potencia	Valor
2^0	1
2^1	2
2^2	4
2^3	8
2^4	16
2^5	32
2^6	64
2^7	128
2^8	256
2^9	512
2^{10}	1024
2^{11}	2048
	...

Uso de estas estrategias para otras conversiones de base

El primero de los métodos presentados puede utilizarse para conversiones de decimal a cualquier otra base! Siempre el resultado será la concatenación del último cociente seguido de todos los restos de las divisiones enteras en orden ascendente.

El segundo método, en cambio, sólo podrá aplicarlo para convertir de decimal a binario. Si quisiéramos generalizar su uso para otras bases, deberíamos agregar el “peso” específico de cada factor (o dígito) en su correspondiente posición, lo cual lo haría demasiado complejo…

Conversión de números en cualquier base a Sistema Decimal

También podrá estar preguntándose cómo se realiza el camino inverso… Pues es muy sencillo: tal cual lo hasta aquí dicho, las mismas reglas que atribuyen a cada dígito su "peso" se aplican a un número en cualquier base.

Al principio veíamos de qué modo el número decimal 123 se componía de 1 centena + 2 decenas + 3 unidades. De igual manera, si consideramos por ejemplo el número 435_8 (se denomina sistema "octal" al que tiene por base 8) su equivalente en decimal estará dado por la suma de potencias de 8 ponderadas según su posición y el símbolo utilizado en cada dígito.

Así: $435_8 = 4 \text{ x } 8^2 + 3 \text{ x } 8^1 + 5 \text{ x } 8^0 = 4\text{x}64 + 3\text{x}8 + 5 = 256 + 24 + 5 = 285_{10}$

Ejercicio práctico: *realice diferentes conversiones de base y compruebe sus resultados valiéndose de la calculadora: la de Windows tiene un modo llamado "Programador" que maneja 4 Bases: 2, 8, 10 y 16; y automáticamente convierte los números expresados en una cualquiera de ellas a las restantes.*

Operaciones matemáticas elementales con números binarios (o de cualquier base)

La mecánica de cálculo para operaciones elementales que usted ya conoce se aplica sin ninguna modificación en cualquier sistema de numeración. Sólo debemos cambiar las "reglas mentales" que nos hacen saber que 2 + 3 es 5, y pensar en los posibles resultados para dos dígitos cualesquiera de la base en cuestión: por ejemplo, en binario, 1 + 0 es 1, lo mismo que 0 + 1. Obviamente 0 + 0 es 0, y finalmente 1 + 1 es 0 en esa columna, y "me llevo uno a la columna de la izquierda", es decir, el resultado es 10_2

Revise paso por paso la obtención de los resultados para las siguientes operaciones:

```
   1 0 0 1 1        1 0 1 1 0
 + 0 1 0 1 0      - 0 0 1 0 1
   ---------        ---------
   1 1 1 0 1        1 0 0 0 1
```

```
        0 1 1 0
      * 1 0 1 1
        -------
        0 1 1 0
      0 1 1 0
    0 0 0 0
  0 1 1 0
  -------------
  1 0 0 0 0 1 0
```

```
  1 0 0 1 0  | 1 0 1            Cálculos aux
    1 0 0 0  +------
      0 1 1      1 1            1 0 0 1
                              -   1 0 1
                                -------
                                  1 0 0

                                1 0 0 0
                              -   1 0 1
                                -------
                                  0 1 1
```

((Insertar video (#3) "Algoritmos de las operaciones básicas en cualquier base"))
https://youtu.be/-2W6wArizn l

1. Expresar en Sistema Binario los siguientes números:
    a. 3 ((Resultado correcto: 11))
    b. 15 ((Resultado correcto: 1111))
    c. 16 ((Resultado correcto: 10000))
    d. 17 ((Resultado correcto: 10001))
    e. 75 ((Resultado correcto: 1001011))

2. Convertir a Sistema Binario los siguientes números:
    a. 254 ((Resultado correcto: 11111110))
    b. 255 ((Resultado correcto: 11111111))
    c. 256 ((Resultado correcto: 100000000))
    d. 1023 ((Resultado correcto: 1111111111))
    e. 1024 ((Resultado correcto: 10000000000))

3. Convertir a Sistema Decimal los siguientes números binarios:
    a. 11 ((Resultado correcto: 3))
    b. 100 ((Resultado correcto: 4))
    c. 111 ((Resultado correcto: 7))
    d. 1000 ((Resultado correcto: 8))

4. Convertir a Sistema Decimal los siguientes números binarios:
    a. 1111 ((Resultado correcto: 15))
    b. 10000 ((Resultado correcto: 16))
    c. 11111111111111111111 <<Nota: son 20 dígitos en 1>> ((Resultado correcto: 1048575))
    d. 100000000000000000000 <<Nota: es un 1 y 20 dígitos en 0>> ((Resultado correcto: 1048576))

5. Realizar las siguientes operaciones (*) expresando el resultado en sistema decimal.

   (*) Nota: Realice las operaciones respetando la Base de los números indicados. Finalmente, convierta sólo el resultado a base 10. Es verdad que también puede resolver estos ejercicios convirtiendo previamente cada número a base 10 y luego operar normalmente, pero ese no es el objetivo de esta actividad… La idea es que se divierta probando la mecánica o algoritmo que usted ya conoce, pero con números en base 2!

   a. 1002 + 112 ((Respuesta correcta: 7))

   b. 110012 – 10112 ((Respuesta correcta: 14))

   c. 10112 * 10102 ((Respuesta correcta: 110))

   d. 11002 / 1102 ((Respuesta correcta: 2))

Este sistema se utiliza mucho por ser muy cómodo para la representación de los datos binarios almacenados y procesados en la computadora.

Tiene base 16, es decir, que sus símbolos no son 2, ni 8 ni 10 como los mencionados hasta acá, sino 16! Se utilizan los números del 0 al 9, y luego las letras de la A a la F. De este modo, los valores "decimales" de cada dígito son los siguientes:

Decimal	Binario	Hexadecimal
0	0000	0
1	0001	1
2	0010	2
3	0011	3
4	0100	4
5	0101	5
6	0110	6
7	0111	7
8	1000	8
9	1001	9
10	1010	A
11	1011	B
12	1100	C
13	1101	D
14	1110	E
15	1111	F

Observar que la totalidad de los valores posibles para un dígito hexadecimal se representan utilizando 4 dígitos binarios: es una correspondencia perfecta ya que $2^4 = 16$

Para representar un byte (que son 8 bits) se necesitan exactamente 2 dígitos hexadecimales: cuatro bits por cada uno. Eso lo convierte en el sistema de numeración por excelencia en el ámbito computacional. Las computadoras almacenan y procesan datos en binario; por eso, cuando se representa información de bajo nivel no se utilizan ceros y unos ya que serían de muy difícil lectura para los profesionales calificados, sino el sistema hexadecimal.

Baste considerar que la ubicación – o dirección – de un byte en particular dentro de toda la memoria de una computadora, o de un disco duro de digamos 2 TeraBytes, puede indicarse así:

Binario: 0010 0101 0010 0010 1001 1111 1110 0110 1110 0000 $_2$

Hexadecimal: 25 22 9F E6 E0 $_{16}$

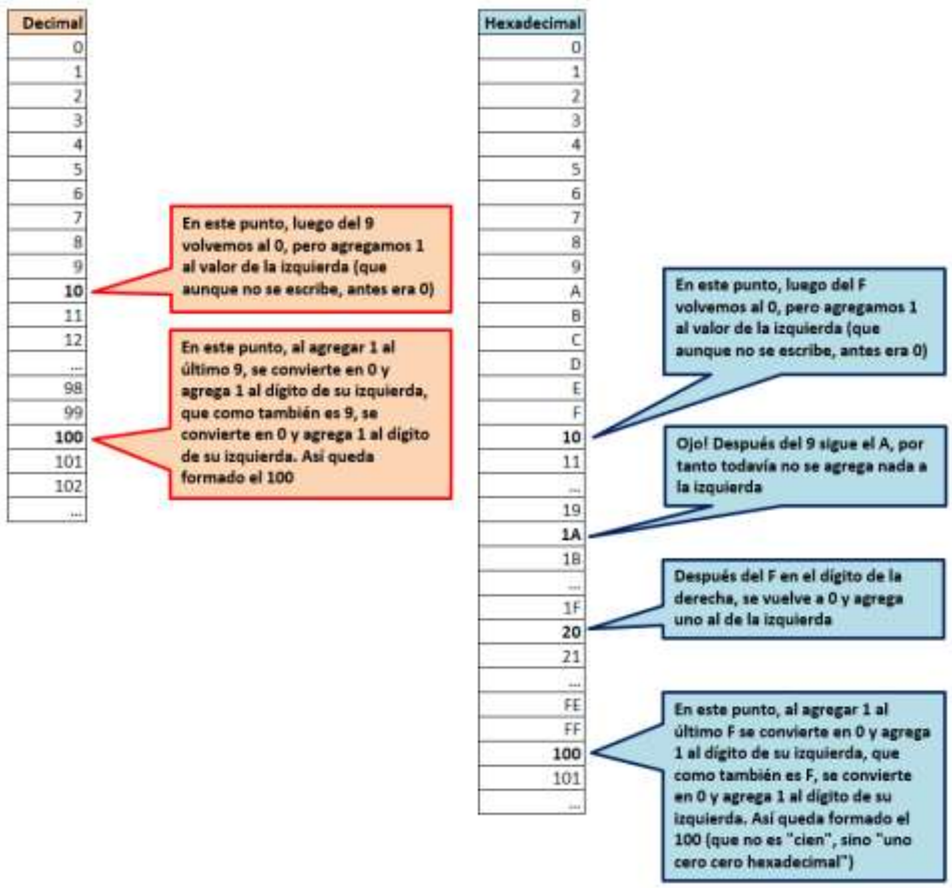
Evidentemente, es mucho más corto y fácil de manejar un número de 10 dígitos que otro de 40!!

Ejemplo de "conteo"

Cuando usted "cuenta" utilizando el sistema decimal, tal como aprendió desde muy pequeño, lo que hace es ir incrementando el dígito de menor valor en una unidad: primero 0, luego 1, luego 2, y así sucesivamente hasta el 9. Luego, cuando hay que contar el número que sigue, después del nueve vuelve a aparecer el 0, pero se agrega uno al dígito de la izquierda. De este modo, la cuenta recorre desde el 0 hasta el máximo valor de cada dígito, y una vez superado, se incrementa en uno el dígito a su izquierda volviendo a 0 el dígito en cuestión.

Lo mismo ocurre con los demás sistemas de numeración, exactamente con la misma mecánica, sólo que con **<u>más</u>** o **<u>menos</u>** valores posibles según su base.

Vea las siguientes secuencias:



<u>Cálculo de la capacidad de un número de longitud fija en un sistema de numeración</u>

¿Cuántos números diferentes podemos representar con 7 cifras en un Sistema Base 2?

¿Y cuántos si son 12 cifras en sistema base 8? ¿Y en otra base?...

Para responder las preguntas anteriores, basta con comprender que cada cifra tiene N valores posibles, donde N es la base del sistema. Así, un número de un solo dígito decimal puede tener 10 valores diferentes, pues 10^1 es 10.

Si el número decimal tiene 3 cifras, puede representar 1000 valores diferentes: desde el 0 hasta el 999. Y como se ve, $10^3 = 1000$. **La base del sistema elevada a la cantidad de cifras nos da la respuesta!**

Si se tratara de un número Binario de 2 cifras, los posibles números son 4: 00, 01, 10 y 11. Y vemos que se sigue cumpliendo la regla, ya que $2^2 = 4$

Un número de 7 cifras en sistema Binario puede tener 128 diferentes valores, pues $2^7 = 128$

En base Octal, con 12 cifras podemos representar $8^{12} = 68.719.476.736$ valores diferentes.

Y así podríamos seguir con infinidad de ejemplos...

<u>Determinación de la Base Requerida para un Sistema en función de los datos necesarios y cantidad de dígitos posibles</u>

También podemos hacer el cálculo al revés. Vea este caso:

Si tenemos 2 cifras, sólo dos, y debemos poder representar con ellas 144 posibles valores diferentes: ¿cuántos valores diferentes tiene que poder tomar cada cifra?

Será que la base del sistema deberá ser tal que elevada al cuadrado (porque son 2 dígitos) deberá darnos como mínimo 144.

En símbolos: (B) = Base del sistema

$B^2 = 144 \quad \rightarrow \quad \sqrt[2]{144} = B$

La respuesta es 12, ya que $12^2 = 144$

Ahora bien, si necesitáramos un sistema que con 2 cifras pudiera representar 150 valores diferentes, claramente 12 no puede ser la base: nos faltaría un poquito… En cambio $13^2 = 169$, es decir que con un sistema base 13 nos alcanza, e incluso nos sobra algo de capacidad de representación; pero eso es inevitable: no podemos escribir un número que tenga $\sqrt[2]{150} = 12{,}25$ valores posibles por cada cifra: o tiene 12, o tiene 13. Uno no puede escribir 12 símbolos y cuarto en cada posición!

Entonces, **siempre tomaremos como respuesta el menor entero que sea mayor o igual a la raíz obtenida.**

Finalmente, ¿qué haremos si debemos averiguar cuántas cifras necesitamos para representar 5000 valores diferentes en un sistema base 16? Pues lo mismo… en este caso, tendremos que “despejar” el exponente de esta operación:

(B) Base = 16

(C) Combinaciones = 5000

(n) Dígitos necesarios = ?

Ya que

$$B^n = C \quad \rightarrow \quad n = Log_B(C)$$

O lo que es lo mismo:

$$B^n = C \quad \rightarrow \quad n = \frac{Log(C)}{Log(B)}$$

Entonces, para la pregunta planteada: necesitaremos n = Log(5000) / Log(16) cifras n = 3,699… / 1,204… = 3,072

Pero no puedo escribir 3 cifras y un poquito: **la respuesta entonces será que Necesito 4 cifras, ya que con 3 no me alcanza, pues 16^3 = 4096. Deberé optar por 4 cifras, aunque me sobre, ya que podré representar 16^4 = 65536 valores diferentes.**

Comprender las características propias de estos sistemas de numeración y entender la magnitud de cada cifra resultan fundamentales para poder encarar el análisis de cualquier conjunto de datos numéricos representados con estos sistemas, tal como se propone en esta Situación Profesional.

Sistemas Multibase y casos particulares

Evidentemente, todo el sistema de numeración que se utiliza en cualquier contexto o proyecto ha de ser siempre el mismo. Los detalles aquí analizados tienen que ver con una mirada "por dentro" de los datos y las maneras de representarlo, especialmente cuando se trata del mundo computacional.

Sin embargo, existen algunas situaciones particulares en las que se pueden utilizar sistemas de numeración no estándar, e incluso con diferente base para cada uno de sus dígitos!

Por ejemplo, considere el sistema de numeración de las Patentes de Automotor actual en la Argentina: el número de un auto puede ser AD465XP o AA332AB

Se trata de un sistema "Alfanumérico" en el que los primeros dos dígitos (de izquierda a derecha) son letras, los siguientes tres son números, y los últimos dos también son letras. Los números son 10, y las letras utilizadas 26.

Claramente, ahora que sabemos cómo funciona un sistema de numeración, podemos intuir que el primer auto patentado con este sistema tendrá la patente AA000AA, y el día que se patente el último auto posible será el ZZ999ZZ.

Siguiendo con esta línea de pensamiento, el segundo auto será AA000AB y el tercero AA000AC, y así sucesivamente.

Pues bien, ¿quién puede decirme qué número de orden corresponde a la patente AD465XP?

Para resolver esto, tenga en cuenta que hay 3 cifras con base 10 y 4 cifras con base 26.

AUTOEVALUACIÓN SP1-H2

1. Exprese los siguientes números en Sistema Hexadecimal.
   Cuidado! Prestar atención a la base en que cada numero está expresado.
   a. 125(10) ((Respuesta correcta: 7D))
   b. 1101011(2) ((Respuesta correcta: 6B))
   c. 4095(10) ((Respuesta correcta: FFF))
   d. 11111111(2) ((Respuesta correcta: FF))
   e. 65536(10) ((Respuesta correcta: 10000))

2. Exprese en sistema decimal los siguientes números nexadecimales.
    a. AA(16) ((Respuesta correcta: 170))
    b. 12B5(16) ((Respuesta correcta: 4789))
    c. FFFF(16) ((Respuesta correcta: 65535))
    d. 10000(16) ((Respuesta correcta: 65536))
    e. A0000(16) ((Respuesta correcta: 655360))

3. Responder la pregunta planteada al final de la herramienta vista: ¿Qué número de orden corresponde a la patente AD465XP en el Sistema de Numeración de automotores en la Argentina? Para resolver esto, tenga en cuenta que hay 4 cifras con base 26 y 3 cifras con base 10; también considere que el "Número de orden" de una patente es qué lugar ocupa en una cuenta secuencial, y que a los fines prácticos, comenzaremos contando desde 0 (cero). Como se indicó, el Número de Orden 0 (el primero de la secuencia) corresponde a la patente AA000AA, el Número de Orden 1 (el segundo) corresponde a la patente AA000AB, el Número de Orden 2 (el tercero) será el de AA000AC, y así sucesivamente.
   ((Respuesta correcta: 2.342.954))
   ((Incluir un Tip de ayuda:)) Encontrará en este link ((linkear el archivo "Patentes_a_NroSecuencial (Números multibase).xlsx")) una hoja de cálculo de Excel en la que están hechos los cálculos para poder resolver este problema: es interesante que revise las fórmulas y pueda comprender completamente la solución desarrollada.

4. ¿Cuál es la cantidad máxima de números que puedo representar en un sistema de Base 16, utilizando 4 cifras?
   ((Respuesta correcta: 65536))

5. ¿Cuántos Dígitos Binarios son necesarios para representar 2050 números diferentes?
   ((Respuesta correcta: 12 bits))

6. ¿Cuántos símbolos diferentes (base) debe tener un sistema de numeración que me permita representar 7500 valores diferentes usando 3 dígitos?
   ((Respuesta correcta: 20))

SP1-H3: Notación Científica

Cuando trabajamos en computación suele ocurrir que algunos datos, o el resultado de su procesamiento, son números muy grandes o muy pequeños. En esos casos, resulta poco práctico escribir grandes cantidades de cifras enteras, o por el contrario, un cero seguido de muchos ceros luego de su coma para tener dígitos significativos al final.

Solo como recordatorio: llamamos números grandes a aquellos que están muy lejos del 0 (cero), y pueden ser tanto positivos como negativos. Son ejemplos de números grandes los siguientes: 1.000.000.000.000.000 o -5.333.450.000.000 donde el primero es positivo y el segundo negativo.

En cambio, un número pequeño es aquel que está muy próximo al cero, ya sea negativo o positivo. Por ejemplo: 0,0000000012 o -0,000000245 (igual que antes, el primero es positivo y el segundo, negativo).

Cuando hacemos cuentas con la computadora, es posible que un resultado se visualice como **3.65e8**, este es un número expresado en "Notación Científica". Vamos a analizarlo para entender a qué número se refiere:

- Lo primero es recordar que los lenguajes de programación en general utilizan el signo de punto (.) como separador de la parte entera y la parte decimal de un número. Esto viene de los usos y costumbres del idioma inglés que son diferentes a los del castellano. En Argentina utilizamos la coma (,) para separar la parte entera de la parte decimal, y el punto (.) para agrupar múltiplos de mil en la parte entera; pero en inglés es justo al revés…
  Entonces, volviendo al número en cuestión ya sabemos que la primera parte del mismo representa 3 enteros y 65 centésimos (pues es el resultado que nos ha dado la computadora utilizando algún lenguaje de programación)

- También sabemos que es un número "positivo", pues si fuera negativo deberíamos leer un guion a la izquierda del 3.

- ¿Y qué representa la letra "e"? Esa letra, en el formato universalmente aceptado para la notación científica, significa que **el número de la izquierda debe multiplicarse por 10 elevado al exponente de la derecha**. Dicho de otro modo, el número dado (escrito en castellano y con la notación matemática habitual) es: $3{,}65 \times 10^8 = 3{,}65 \times 100.000.000$

Finalmente, podemos operar y escribir de manera normal (sin notación científica) ese número como: $3{,}65 \times 100.000.000 = 365.000.000$ (trescientos sesenta y cinco millones)

Lo mismo aplica para números negativos, y también para números "pequeños", en los que se utilizan exponentes negativos para las potencias de 10 que desplazan la coma decimal. Por ejemplo:

-4.56e-5 es -0,00456

Veamos que el signo "-" al principio indica que se trata de un número negativo (anterior al cero en la recta numérica), y el exponente indicado luego de la letra "e" es -5, o sea, deberemos multiplicar por 1/100.000 el número a la izquierda de la "e" para obtener el valor que representa.

Estas dos partes tienen un nombre particular: se denominan "Mantisa" (lo que está antes de la "e") y "Exponente" (lo que sigue después).

Resumiendo:

La Notación Científica sigue un formato específico en el cual un número es expresado como el producto de un número mayor o igual que uno y menor que 10 y una potencia de 10.

El formato se escribe como:

a x 10 n = aen

*Donde **a**, como dijimos, es un número que cumple lo siguiente y puede ser decimal:*

1 ≤ a < 10

*El exponente **n**, puede ser positivo o negativo, pero siempre es un número entero.*

El sistema de notación científica es la base para la gestión de números con decimales en las computadoras y se utiliza en todos los lenguajes de programación!

Veamos algunos ejemplos:

- Debemos expresar el número 0,000095 utilizando notación científica:

  En este ejemplo debemos desplazar la coma decimal hacia la derecha hasta que se obtenga el número 9, que está comprendido entre 1 y 10 como es la condición antes mencionada.

  Se movió 5 lugares, esto le permite obtener un número más grande que el original. En este caso deberemos multiplicar por una potencia negativa de 10 para obtener un número equivalente al original, este sería:

  0,000095 = 9,5e-5 = 9,5 x 10-5

Veamos otro ejemplo, en este caso de un número grande:

- Ahora debemos escribir el número 483.000 en notación científica:

  La coma decimal no está escrita en 483.000, pero si lo estuviera sería después del último cero.

  Primero movemos la coma decimal hacia la izquierda hasta que obtengamos una cifra, que debe ser igual o mayor de uno y menor de 10. En nuestro caso es 4.

  Si empezamos a recorrer la coma decimal un lugar cada vez, llegaremos a 4,83 después de moverlo 5 veces.

  483.000 = 4,83e5 = 4,83 x 105

Estudiaremos más al respecto en la siguiente Herramienta de esta Situación Profesional.

AUTOEVALUACIÓN SP1-H3

1. Expresar en notación científica los siguientes números:
   a. 1.200 (Respuesta correcta: 1,2e3) ((Si se puede, que ingresen x separado mantisa y exponente))
   b. 23.123.000.000.000.000.000 (Respuesta correcta: 2,3123e19)

    c. 0,0000000125 (Respuesta correcta: 1,25e-8)
    d. -0,25 (Respuesta correcta: -2,5e-1)
    e. -30.000 (Respuesta correcta: -3e4)

2. Expresar en notación directa o convencional los siguientes números:
    a. -2,23567e5 (Respuesta correcta: -223567)
    b. -2,23567e-5 (Respuesta correcta: -0,0000223567)
    c. 1,23456e3 (Respuesta correcta: 1234,56)
    d. 6,54321e0 (Respuesta correcta: 6,54321)
    e. 3,141592e-5 (Respuesta correcta: 0,00003141592)

3. Unir con flechas los números equivalentes de ambos grupos: ((Presentárselos mezclados manteniendo cada grupo en su columna))

    1.200 <==> 1,2e3
    1,2 <==> 1,2e0
    0,12 <==> 1,2e-1
    120 <==> 1,2e2
    0,0012 <==> 1,2e-4

4. Señale cuál es la opción correcta:
    a. 3,14 = 3,14e2
    b. -3140 = 3,14e-3
    c. -3140 = -3,14e-3
    d. -3140 = -3,14e3 ((<<< Esta es la respuesta correcta!))
    e. 3,14 = 3,14e-2

5. Responder con Verdadero o Falso:
    a. -12.345,6789 = -1,23456789e4 ((Verdadero))
    b. 0 = 0e0 ((Falso: El cero no tiene notación científica))
    c. 0,0000000001 = -1e10 ((Falso))
    d. 0,0000000001 = 1e-10 ((Verdadero))
    a. 3,141592 = 3,141592e0 ((Verdadero))

SP1-H4: Capacidad de representación computacional

Como consecuencia de los cálculos que debemos obtener para resolver nuestra situación profesional, probablemente obtengamos números muy grandes, ó muy pequeños. Veamos entonces cómo se gestionan dichos números en una computadora.

Las computadoras son capaces de procesar datos que almacenan en números de diferentes “tamaños” o “tipos de datos” posibles. Así, por ejemplo, puede representar 256 enteros diferentes utilizando un byte. O 65536 enteros si utiliza dos bytes! Puede imaginar cuántos serán los enteros posibles utilizando 4 bytes? Y 8 bytes?

Un microprocesador actual procesa datos de 64 bits, es decir, de 8 bytes!! Eso es algo “ENOOOOOORME”

Hagamos algunas cuentas: con un byte podemos representar 256 valores diferentes ya que cada byte tiene 8 bits, y un bit sólo dos valores posibles (0 y 1), por tanto, las posibles combinaciones son 2^8=256

Para 2 bytes tenemos 2^{16} = 65.536 valores diferentes

Para 4 bytes serán 2^{32} = 4.294.967.296

Y finalmente, un entero “sin signo” de 64 bits tendrá 2^{64} = 18.446.744.073.709.551.616

Más de 18 trillones!! Abrumado?... Espere! Todavía hay más, muuuuuucho más!!

Punto Flotante

Los números con decimales no pueden representarse de este modo, así que como comentábamos antes, se utiliza el sistema de Notación Científica incluso para almacenar los datos, y para procesarlos.

Este tipo de datos se denomina generalmente sistema de “Punto Flotante” y es el tipo por defecto para los datos numéricos.

Puede leer una nota técnica interesante al respecto en la siguiente web:

http://puntoflotante.org/formats/fp/

En ese sistema, la estructura que canónicamente se utiliza para números de punto flotante de 64 bits es:

- 1 bit para el signo (0=positivo o 1=negativo)
- 52 bits para la Mantisa
- 11 bits para el Exponente: aprox 1024 (que es 2^{10}) más el signo

De este modo, el número más pequeño que puede representarse tendrá dígitos significativos recién más allá de la cifra decimal número 300: es decir, sería un cero, seguido de una coma, seguido de 300 ceros y recién entonces aparecerían los primeros dígitos significativos de dicho número!

De igual modo, el número más grande posible con este tipo de datos tendrá más de 300 cifras enteras.

Son números tan enormes que ni si quiera tienen nombre… En español: un millón es un uno con 6 ceros, un billón es un uno seguido de 12 ceros, un trillón tiene 18, y así sucesivamente. Nadie puede imaginar cuánto es un número que tenga 300 ceros significativos!! No hay siquiera esa cantidad de átomos en todo el universo…

Ver: https://www.fayerwayer.com/2014/03/cuantos-atomos-hay-en-el-universo/

Según esta nota hay alrededor de 10^{82} átomos. Les pregunto entonces: ¿Será que 10^{328} es cuatro veces más que 10^{82}?

¿Lo ha pensado? Hágalo, por favor… Luego siga leyendo.

Si su respuesta fue NO, es correcta. Cuatro veces más que 10^{82} es 4 x 10^{82}, o sea 40^{82}. Apenas cambia la base, no el exponente.

Entonces, ¿cuánto es 10^{328} respecto de 10^{82}? Pues es 10^{246} veces más!! Una monstruosidad de veces más; tanto que, como decíamos, dicho múltiplo ni si quiera tiene nombre…

Veamos de dónde sale ese cálculo:

Como usted sabrá - y si no, es momento de refrescar “Operaciones de números con potencias” en los PDF anexos indicados en la Introducción de este texto - en la división de números expresados como potencias de igual base, simplemente se restan sus exponentes. Así, en nuestro ejemplo:

$\mathbf{10^{328} / 10^{82} = 10^{(328-82)} = 10^{246}}$

<u>Sobre la precisión</u>

Quizá ya se lo está preguntando… Podemos manejar números enormemente grandes, o infinitesimalmente pequeños, pero ¿Cómo es posible que tengamos 308 cifras decimales utilizando sólo 64 bits?

La respuesta es simple: NO se puede!

Claramente, al estar hablando de Notación Científica, tenemos un exponente que puede construir números enormes o pequeñísimos, pero la “precisión” estará siempre dada por la “Mantisa”, y en un dato de Punto Flotante normal, esa precisión de es apenas 52 bits más el signo. Ojo! Eso no es poco!! Es muchísimo!!! Pero no tanto como parece al leer los números anteriores.

Por ejemplo, si sumamos 1 trillón + 2 trillones la computadora sin duda nos dirá que el resultado es 3 trillones. Pero si a eso le sumamos 1 trillonésimo (es decir, 0,000000000000000001) resultado seguirá siendo 3.000.000.000.000.000.000 ya que el exponente siempre será el necesario para representar la “magnitud” del número.

Para ejemplificar la situación, veamos el siguiente fragmento de código, en Python:

```
A = 1000000000000000000
B = 2000000000000000000
print(A+B)

>>> Out: 3000000000000000000

C = 0.000000000000000001
D = 0.000000000000000002
print(C+D)

>>> Out: 3.0e-18

print(A+C)

>>> Out: 1000000000000000000
```

En la última suma, los decimales que aporta la variable C se pierden...

Desbordamiento

Como mencionamos antes, existen diferentes "tipos" de datos numéricos, cada uno con sus límites en la capacidad de representación. Por ello, si intentamos darle como valor a un entero de un byte el número 500 recibiremos un mensaje de error, pues ese número "no cabe" en un entero de 8 bits!

Otro ejemplo es crear 3 variables enteras de 8 bits cada una:

Variable A = 200

Variable B = 150

Variable C = A + B

La tercera de estas instrucciones, no importa cuál sea el lenguaje utilizado, y siempre que hablemos taxativamente de enteros de 8 bits, producirá un ERROR, pues 350 no cabe en un entero de 8 bits, cuyo máximo valor posible es 255! Si en cambio la variable C fuera de 16 bits, no habría ningún problema.

Siguiendo esta lógica, puede uno hacer "desbordar" incluso un número gigante!

Al fin y al cabo, el infinito puede simularse computacionalmente, pero no almacenarse ni procesarse. La computadora se define como un "Ordenador **Finito** Secuencial", una definición de casi un siglo que pese a todos los avances tecnológicos no ha perdido vigencia.

Cómo calcular el tamaño mínimo de un tipo de datos numérico según nuestras necesidades de almacenamiento y procesamiento

Supongamos que debemos procesar los datos de saldos de cuentas bancarias en un sistema que integra esa información proporcionada por todos los bancos del país, expresados en pesos. La pregunta es: ¿Qué tamaño deberá tener el dato numérico en el que almacenemos cada uno de esos importes?

Para responder, deberemos indagar para saber de antemano cuál es el mayor valor posible (o previsible) y cuál la precisión requerida.

La respuesta a estas preguntas podría ser - y esto son sólo datos imaginarios - que el mayor importe en una cuenta bancara radicada en nuestro país es del orden de los $ 50.000.000.000 (cincuenta mil millones de pesos), y que la precisión requerida para los datos a procesar, incluye hasta el orden de centavos, es decir, dos cifras decimales.

Evidentemente, si utilizamos un número de punto flotante de 64 bits como los mencionados más arriba, será más que suficiente! Recordar que contamos con 52 bits para la mantisa, y 2^{52} es 4.503.599.627.370.496 : un número de 16 cifras, de las cuales la más significativa llega sólo hasta el 4, es decir que al menos podemos tener mantisas completas de 15 cifras, desde la 0 hasta la 999.999.999.999.999

Pues bien, como el número que queremos guardar es como máximo 50.000.000.000,01 tenemos allí 11 cifras enteras y dos decimales, lo que hace un total de 13 cifras significativas.

Entonces, evidentemente un número de punto flotante de 64 bits estándar nos alcanzará bien, e incluso nos sobran dos dígitos decimales de precisión!

AUTOEVALUACIÓN SP1-H4

1. Cuántos bits debe tener **como mínimo** un tipo de dato “Entero” que nos permita almacenar el número de orden secuencial de cualquier fecha desde el primer día de nuestra era, es decir, desde el 1 de enero del año 0 D.C?
   a. 10 bits
   b. 19 bits
   c. 20 bits ←Correcto
   d. 21 bits
   e. 6 bytes

2. Si utilizamos un entero de 16 bits para identificar el código de producto para el catálogo de un importador: ¿Cuántos productos diferentes podremos catalogar?
   a. Aproximadamente 65.000 ←Correcto
   b. 16536
   c. 16
   d. Más de 2 millones

3. Si tenemos que multiplicar dos números de 8 bits, ¿cuántos bits tendrá como máximo el resultado?
   a. 64
   b. 16 ←Correcto
   c. 28
   d. 15

4. Si tenemos almacenado en un entero de 16 bits el número 37500, al multiplicarlo por 12 se producirá un desbordamiento.
   a. Verdadero ←Correcto
   b. Falso

5. Considerando los tamaños estándar de datos enteros: ¿Cuántos bits necesitaremos como mínimo para almacenar el resultado de 32767 * 32767?
   a. 16
   b. 32 ←Correcto
   c. 64
   d. 128

SITUACIÓN PROFESIONAL RESUELTA

La Situación Profesional se resuelve respondiendo a las cuestiones planteadas:

1. Evidentemente, si cada dato consiste en un color conformado por 3 componentes y cada uno de esos componentes se representara utilizando un byte, necesitaríamos 3 bytes (o sea, 24 bits) para representar cada dato.
   De ese modo, el grado de ineficiencia en el almacenamiento sería de 3 bits por byte, ya que sólo necesitamos 5 bits por componente y estaríamos utilizando 8.
   Haciendo las cuentas 3 dividido 8 es 0,375 es decir que el "desperdicio" de memoria será del orden del 37,5%. En otras palabras, del 100% de la memoria utilizada para contener todos los datos, un 62,5% contendrá datos significativos y un 37,5% solo ceros que no utilizaremos nunca.

2. Si almacenamos los bits "en bloque", es decir, como una única secuencia de 15 bits, con 2 bytes será suficiente para cada color, ya que 2 bytes contienen 16 bits.
   Entonces, como son 5 millones de registros, a 2 bytes por registro, serán 10.000.000 bytes, es decir, del orden de 10 MegaBytes

3. Utilizar 3 dígitos hexadecimales por registro nos permitirá 4 bits por componente de color: un dígito hexadecimal son 4 bits! Por tanto, evidentemente tendremos una situación de "pérdida de información" ya que en origen son 5 los bits que codifican cada componente.
   Yendo a la cuestión de cuántos colores diferentes podremos representar, considere que originalmente en este problema un "color" está compuesto por 3 componentes de 5 bits cada uno, es decir, 2^5=32 posibles valores para cada componente. Los colores posibles serán entonces 32 * 32 * 32 = 36.768 colores diferentes.
   Si en cambio, en vez de 5 bits por componente, sólo utilizamos 4, tendremos 16 valores posibles para Rojo, Verde o Azul y por tanto 16 * 16 * 16 = 4.096 colores diferentes para cada dato. Una pérdida de precisión en la información enorme! Ya que 4.096 es apenas el 11% de 36.768
   En otras palabras, tendremos una pérdida de calidad cercana al 90%

4. Como son 5 bits por componente, necesitamos 5 dígitos binarios. Para representar lo mismo con un único digito, la base del sistema de numeración deberá tener tantos valores diferentes para cada dígito como combinaciones posibles pueden hacerse con 5 bits, o sea: 2^5 = 32 combinaciones posibles.
   Será un sistema de numeración de base 32!! Sus símbolos podrían ser: { 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V }

5. La tabla completa es:

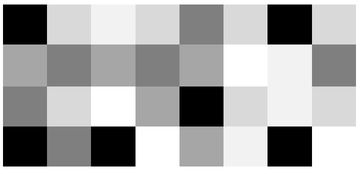
Color	Binario	Decimal	Hexadecimal
Rojo	01101	13	D
Verde	11100	28	1C
Azul	00010	2	2

EJERCICIO POR RESOLVER

Considere la siguiente situación y responda las preguntas indicadas al final:

Una fábrica de gadgets electrónicos ha conseguido desarrollar un escáner matricial ultra preciso y rápido que posibilita identificar 20 niveles diferentes de brillo por cada punto. La intención que tienen es la de etiquetar sus productos con un código matricial, compuesto por puntos en el que cada punto pueda tener un nivel de brillo diferente.

El que sigue es un ejemplo de dichos códigos:



En estos códigos, el primer y último punto de la matriz serán siempre, respectivamente, el más oscuro y el más claro de los tonos o niveles de brillo posible: así, el punto de la esquina superior izquierda es “negro” y el de la esquina inferior derecha, “blanco”. Por tanto, esos dos puntos no son parte de la identificación sino que sirven para calibrar la sensibilidad del escáner para el resto de los puntos.
Tampoco es parte del código almacenado el penúltimo punto, que se utiliza como dígito verificador para detectar errores de lectura. Por tanto, siguiendo lo anterior, los puntos útiles para el código son todos los presentes en la matriz, menos 3 (tres).

El problema es que fabrican realmente muchos productos diferentes, y cada día se agregan nuevos productos a la lista. Lamentablemente los códigos no pueden reutilizarse, pues perderían la identificación de cada ítem, de modo tal que a cada nuevo producto que desarrollen deberán asignarle un nuevo código.

Al día de hoy, la fábrica ha desarrollado desde sus inicios más de 150.000 productos diferentes.

El equipo de especialistas contratado para el desarrollo de este sistema de codificación enfrenta ahora el problema de establecer las dimensiones (cantidad de puntos) que deberán tener sus códigos a los efectos de poder identificar cada producto diferente que hayan creado, más todos los que habrán de desarrollar en los próximos 20 años. A tal fin, estiman que el universo total será cercano a los 320.000 productos!

Usted ha sido invitado a formar parte de dicho equipo, para lo que deberá responder correctamente las siguientes preguntas:

1. ¿Será suficiente un código de las dimensiones propuestas en el ejemplo (4 filas x 8 columnas) para identificar tantos productos? ¿O es que deberán crear una matriz de mayor tamaño?

2. Exprese numéricamente la cantidad de códigos posibles que pueden conformarse con este sistema.

3. Para almacenar en el sistema informático cada punto de cada código, disponen utilizar 2 caracteres numéricos, ya que con solo un dígito no alcanzaría pues sólo podría tener 10 valores posibles, y acabamos der ver que el escáner es capaz de identificar 20 niveles de brillo diferentes por punto: ¿será esta la decisión más inteligente? ¿Qué alternativa propondría?

4. El IEAD (Índice de Eficiencia del Almacenamiento de Datos) es la medida de cuánto espacio informático se desperdicia en promedio para almacenar cada dato. Es un "cociente" entre la cantidad de datos diferentes a guardar respecto de la cantidad de datos posibles para el sistema de codificación. Considerando los números indicados: ¿cuál es dicho índice para el código propuesto, considerando los 320.000 valores diferentes que se necesitarán y la cantidad de valores diferentes posibles en la matriz de 4x8? *Recuerde que hay 3 puntos que no son parte del código.*

5. Si quisiera utilizar los escáneres desarrollados y generar un sistema de codificación más eficiente en cuanto a sus dimensiones y espacio de almacenamiento requerido: ¿Qué distribución matricial propone? *Tenga en cuenta que sí o sí deberá ser una matriz que tenga como mínimo 2 filas y 2 columnas ya que sin eso no pueden establecerse las coordenadas del inicio y el fin del código*; *y que de todos los puntos que conforman la matriz habrá 3 que no son útiles (Inicio, Fin, y Dígito verificador)*.

6. En las pruebas de laboratorio resultó que la precisión de los escáneres es muy alta, con un nivel de error promedio en la lectura del orden de 183 errores cada 3,657e7 lecturas. ¿Cuál es la cantidad promedio de lecturas realizadas por cada error?

7. A vistas de lo hasta aquí dicho, manteniendo la estructura original del código, el líder del proyecto está considerando reemplazar completamente el diseño por una simple identificación binaria: ¿Cuántos dígitos binarios serán necesarios para poder codificar la misma cantidad potencial de productos que la que ofrece el código originalmente propuesto?

8. Siguiendo con lo anterior, y ajustando los números a la realidad de la empresa, cuántos dígitos binarios serían necesarios para identificar a cada uno de los 320.000 productos posibles?

9. Si en vez de dígitos binarios le propusieran almacenar cada código utilizando dígitos hexadecimales: ¿cuántos dígitos serían necesarios? Considere dos respuestas:

    a. Para tener la misma capacidad de representación que la matriz originalmente propuesta

    b. Para poder codificar los 320.000 productos como máximo

10. Si asignáramos un número entero consecutivo a cada nivel de brillo posible, éstos se numerarían del 0 (blanco total), al 19 (negro total). Teniendo en cuenta esto, e

imaginando como posible estructura para el código una matriz de 3 filas por 4 columnas (sabiendo que hay 3 puntos que no son parte del dato almacenado), un código posible será el correspondiente a la siguiente secuencia:

{ 6 ; 19 ; 8 ; 5 ; 2 ; 5 ; 12 ; 18 ; 1 }

Exprese dicho valor numéricamente en los tres sistemas que manejamos: Decimal, Binario y Hexadecimal.

EVALUACIÓN DE PASO

---

1. Indique cuál o cuáles de las siguientes opciones son equivalentes al número $23154_{(10)}$
    a. $101101001110010_{(2)}$ ((<<< Primera Respuesta correcta))
    b. $5A71_{(16)}$
    c. $5A72_{(16)}$ ((<<< Segunda Respuesta correcta))
    d. $110000000000011_{(2)}$
    e. Ninguna de las anteriores

2. Señale el mayor de los siguientes números:
    Tip: si lo piensa bien, no necesita utilizar la calculadora!
    a. 1110 1101 1100 0111 1010 $_{(2)}$
    b. $5AB52_{(16)}$
    c. 3.215.100 $_{(10)}$ ((<< Respuesta correcta))

3. Señale el menor de los siguientes números:
    Tip: si lo piensa bien, no necesita utilizar la calculadora!
    a. 1111 1111 1111 1111 1111 0101 1010 0011 $_{(2)}$
    b. $1ABC52A8_{(16)}$ ((<< Respuesta correcta))
    c. 4.000.000.000 $_{(10)}$

4. Indique cuáles de los siguientes datos producirían un error de desbordamiento si intentáramos almacenarlos en un dato numérico de punto flotante, de 64 bits de tamaño:
    ***Nota**: en los lenguajes de programación habitualmente se utiliza el asterisco * para indicar multiplicación o producto, y la marca de acento circunflejo ^ para indicar potencia.*
    a. 1,6e30 * 5,22e100
    b. 1,6e30 ^ 5,22e15 ((<< Respuesta correcta))
    c. 2,97e55 ^ 4,23e-12
    d. -6,45e255 ^ 2 ((<< Respuesta correcta))
    e. 8,33e-250 ^ 1,23e-100

5. ¿Cuántos dígitos serán necesarios en el Sistema de Numeración Octal (de base 8) para representar 4 millones de valores diferentes?
    ((Respuesta correcta: 8))

6. ¿Cuál es la base de un Sistema de Numeración que permita almacenar 7 millones de valores distintos utilizando sólo 5 dígitos?
((Respuesta correcta: 24))

A modo de cierre: entendiendo de qué hablamos cuando decimos “dato”…

Cómo venimos hasta acá? Un lío de números?

Creo sinceramente que ahora podemos comprender cabalmente qué es un dato numérico, cómo se representa, de qué manera se almacena, procesa y opera digitalmente…

Como profesionales tecnológicos, el modo en que las computadoras gestionan esto no puede ser para nosotros algo arbitrario, ni casual, ni desconocido.

Pero… ¿Para qué nos servirán los datos? ¿Podremos resolver problemas reales usándolos y procesándolos?

En las Situaciones Profesionales que siguen haremos un exhaustivo uso de datos numéricos para modelar, operar, y resolver problemas reales valiéndonos de esta maravillosa herramienta que es el Álgebra.

Vamos, que esto está empezando muy bien!!

SP2: SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Una empresa dedicada a la auditoría de costos de procesamiento de grandes volúmenes de transacciones necesita estudiar la evolución de tres variables y el resultado económico que produce su interacción: sucede que 45 **Transferencias** + 3 **Sustituciones** + 2 **Altas** tuvieron un costo de Servidor de u$s 125, en tanto que para 12 **Transferencias** + 8 **Sustituciones** + 4 **Altas** el costo fue de u$s 140.

Se necesita poder <u>calcular el impacto unitario de cada una de esas tres operaciones</u> (Transferencias, Sustituciones y Altas) **en el costo computacional del sistema.**

¿Será posible, a partir de los datos que tenemos, inferir al costo individual de cada una de estas operaciones?

SP2H1: Funciones Lineales. Ecuación de la Recta.

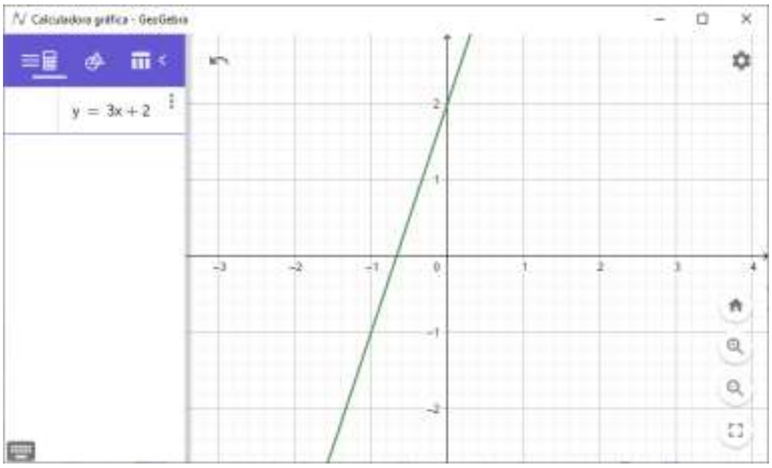
En matemática, el uso de funciones lineales es un excelente recurso para resolver muchos y muy variados problemas!

<u>Función Lineal</u>

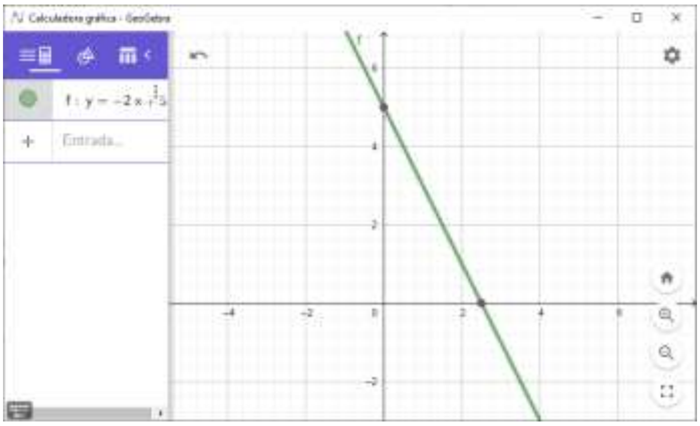
Como su nombre lo indica, este recurso matemático consta de 2 elementos fundamentales:

- Por un lado, una FUNCIÓN es una RELACIÓN entre dos o más variables, de manera que cuando una de ellas cambia su valor, dicho cambio impacta en la otra.
- Por otro lado, la naturaleza de dicho impacto es “Lineal”, es decir, que si graficamos en un sistema de ejes cartesianos los diferentes valores que pueden tomar ambas variables veremos que describen una “Línea Recta”

Ejemplo de funciones graficadas

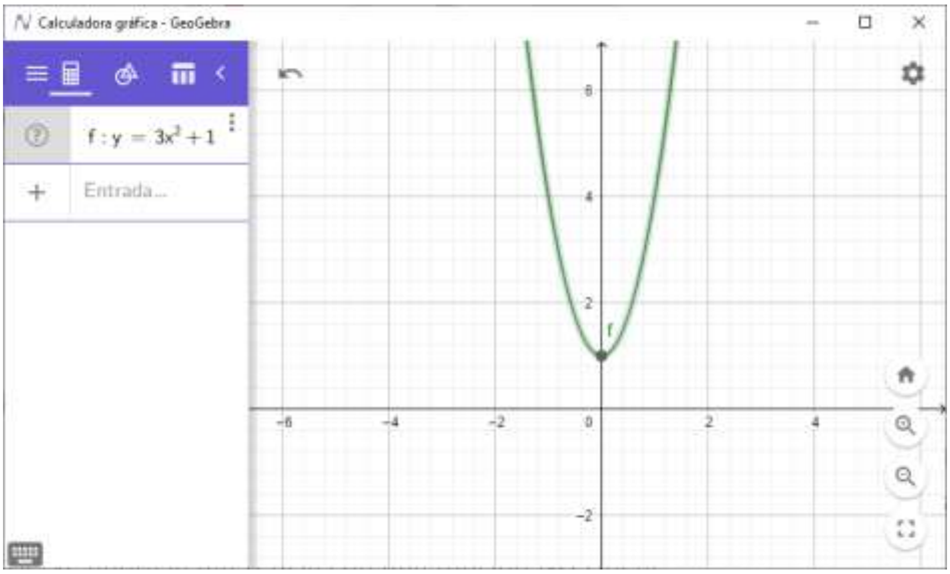


Esta es una “<u>Función Lineal</u>”: puede observar de qué modo, los infinitos puntos que constituyen la relación entre la variable **x** (en el eje horizontal, también llamado abscisa) y la variable **y** (en el eje vertical, también llamado ordenada) conforman una <u>línea recta</u>.



Esta otra función también es Lineal. Sólo cabe señalar que tiene una pendiente de signo opuesto a la anterior, es decir, la diagonal en la que se desplaza expresa que a medida que se hace mayor el valor de ***x***, el de ***y*** se hace cada vez menor; y viceversa: mientras retrocede el valor de ***x***, crece el de ***y***.

Observe ahora la diferencia con una función NO Lineal:



En esta otra función, también existe un único valor de y para cada valor de x, lo que es condición elemental para considerar a esta Relación como una Función. Pero observe que los valores de ambas variables graficados no trazan una Línea Recta, sino una parábola… Por eso no es una "Función Lineal".

<u>Herramientas para graficar</u>

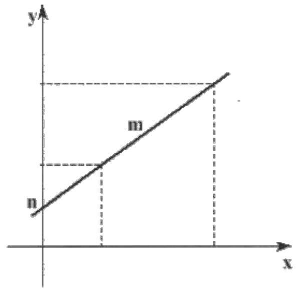
Recomiendo el uso de una herramienta de software como GeoGebra (https://www.geogebra.org/download) para realizar gráfica y análisis de funciones. Las imágenes anteriores han sido generadas con ese programa, que es sumamente versátil y gratuito.

<u>Ecuación de la Recta</u>

Cuando consideramos funciones lineales de sólo 2 variables, la ecuación de la Recta se representa generalmente de dos modos:

- Ecuación ***General*** o ***Clásica*** de la Recta: Ax + By + C = 0
  Donde A y B son respectivamente los coeficientes de los términos variables en x e y, y C es el término independiente.

- Ecuación ***Principal*** o ***Explícita*** de la Recta: y = ***m***x + ***n***
  Esto dice lo mismo que antes, sólo que de otro modo: aquí ***m*** *y* ***n*** *son las constantes que determinan el resultado de* ***y*** *en función de* ***x****; donde* ***m*** *es la pendiente de la recta, y* ***n*** *es la ordenada al origen.*



Ver:
https://www.profesorenlinea.cl/geometria/Recta_Ecuacion_de.html

Como observará, dicen exactamente lo mismo, sólo que con una estructura formal diferente, y de hecho puede convertirse una en otra con algunos sencillos pasos algebraicos.

((Insertar aquí video (#4): "Convertir Ecuación General de la Recta en Ecuación Explícita de la Recta", para 2x + 3y - 4 = 0))
https://youtu.be/BDWzUDKKb4E

Matemáticamente, puede definirse una recta de muchas otras maneras, e incluso utilizando otros recursos como Vectores, pero a los fines de comprender lo que es una función lineal y el modo en que pueden relacionarse 2 o más de ellas, esto ha sido suficiente.

Gráfica de la Recta en un Plano Cartesiano

Para graficar "manualmente" una recta, necesitamos expresarla mediante su Ecuación Principal o Explícita, es decir, con la forma **y = mx + n** ya que intentarlo mediante su Ecuación General (Ax + By + C = 0) es mucho más incómodo.

En el video vimos como ejemplo la recta definida por: **2x + 3y – 4 = 0**

En el siguiente, veremos una aproximación a cómo graficarla y luego le pediremos a GeoGebra que haga la gráfica por nosotros, para corroborar.

((Insertar aquí video (#5) "Gráfica de funciones lineales" : Captura pantalla GeoGebra graficando ambas formas de la ecuación, y mostrando cómo se trata en realidad de la misma recta))
https://youtu.be/ilAAPKj-bsY

Ecuación de la recta que pasa por dos puntos

No siempre tendremos dada una "ecuación" para una función lineal… A veces deberemos averiguarla!

Supongamos que tenemos 2 puntos definidos en el plano, por ejemplo: punto **A=(2;3)** y **B=(-1;1)**

¿Cuál será la ecuación de la recta que pasa por esos dos puntos?

Podemos averiguar la respuesta a esta, y a muchas otras preguntas, aplicando simplemente lo que ya sabemos de álgebra. Comentaremos a continuación dos de los muchos métodos o técnicas que pueden utilizarse para resolver esta cuestión:

A. Método #1: Cálculo de la pendiente como cociente de diferencias en *x* e *y* entre los dos puntos dados

Este método consiste en averiguar la pendiente de la recta, y luego calcular su ordenada al origen.

Recordemos que la recta en cuestión tendrá la forma:

y = *m*.x + *n*

Donde ***m*** es la pendiente, y ***n*** la ordenada al origen.

La pendiente de la recta, como sabemos, es la medida de cuánto cambia la variable ***y*** por cada unidad de ***x***; dicho de otro modo, es la relación o "razón" entre ambas variables.
De manera que si tenemos dos puntos, digamos **(x_1 ; y_1)** y **(x_2 ; y_2)** la pendiente ***m*** será el cociente entre la diferencia de ambas variables:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Una vez averiguada la pendiente, simplemente reemplazamos en la ecuación las variables ***x*** e ***y*** por los datos de uno cualquiera de los puntos, y también ***m*** por el valor obtenido. Finalmente, despejamos la ordenada al origen (***n***), y listo!

Veamos un ejemplo, con otros puntos: Sean **A = (-2 ; -4)** y **B = (2 ; -1)**

Para la recta **y = *m*.x + *n*** tendremos que:

$$m = \frac{(-1) - (-4)}{2 - (-2)} = \frac{-1 + 4}{2 + 2} = \frac{3}{4}$$

Reemplazando en la definición de la recta las variables ***x*** e ***y*** por el valor correspondiente para uno de los puntos, digamos **B = (2 ; -1)**, y también ***m*** por el valor obtenido, tendremos que:

$$-1 = \left(\frac{3}{4}\right).2 + n$$

Despejando entonces ***n***, tenemos que:

$$n = -1 - \left(\frac{3}{4}\right).2 = -\left(\frac{5}{2}\right)$$

Finalmente, como ya hemos averiguado ***m*** y ***n***, tenemos la recta!

$$y = \left(\frac{3}{4}\right).x - \left(\frac{5}{2}\right)$$

En el siguiente video vemos paso a paso este método:

((Insertar aquí video (#6a) "Ecuación de la recta que pasa por dos puntos - Cálculo de la pendiente por cociente de diferencias"))
https://youtu.be/ywlle1aSGd4

B. Método #2: Sustituyendo las variables por constantes y despejando la pendiente y la ordenada al origen

Básicamente, queremos obtener una Ecuación de la forma **y = *m*.x + *n*** que se satisfaga para ambos valores de ***x*** e ***y*** de los puntos dados.

Podemos formar dos ecuaciones reemplazando ***x*** e ***y*** por los respectivos valores de los puntos, y en ambas deberá cumplirse la igualdad!

En otras palabras, sabemos que el punto **A** es **(x = 2; y = 3)**

Es decir que si reemplazamos en la ecuación el valor de las variables deberá satisfacerse que **3 = m.2 + n**

Por otra parte, el punto **B** es **(x = -1 ; y = 1)**

Es decir que si reemplazamos en la ecuación el valor de las variables deberá satisfacerse que **1 = m.(-1) + n**

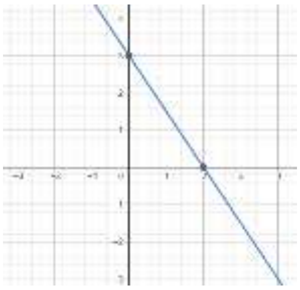
¡Ambas ecuaciones deberán ser simultáneamente ciertas! Por lo tanto, podemos averiguar el valor de una de las incógnitas y reemplazar en la otra… así obtendremos cuánto es ***m*** y ***n***, y sabremos de este modo la ecuación de la recta que pasa por ambos puntos!

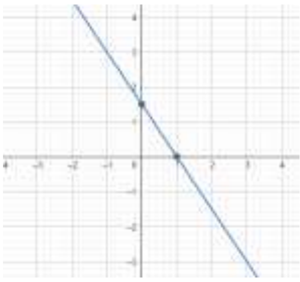
En la próxima herramienta veremos en detalle cómo se resuelve un sistema de ecuaciones, pero como anticipo podemos ver en el siguiente video la resolución para hallar la recta que buscamos:

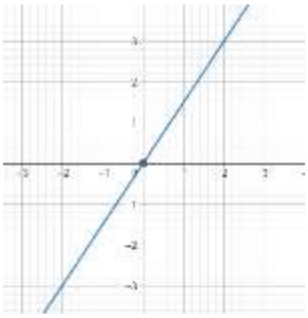
((Insertar aquí video (#6b) "Ecuación de la recta que pasa por dos puntos - Sustituyendo las variables por constantes y despejando la pendiente y la OO"))
https://youtu.be/tPB50TOFODo

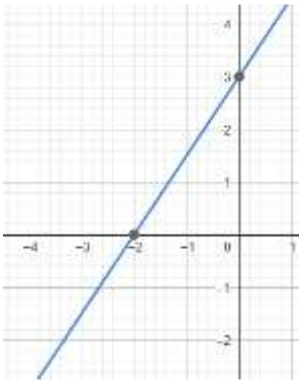
AUTOEVALUACIÓN SP2-H1

1. ¿Cuál de las siguientes gráficas corresponde a la ecuación 3X + 2Y – 3 = 0 ?

a. 

b.  ←Correcto

c. 

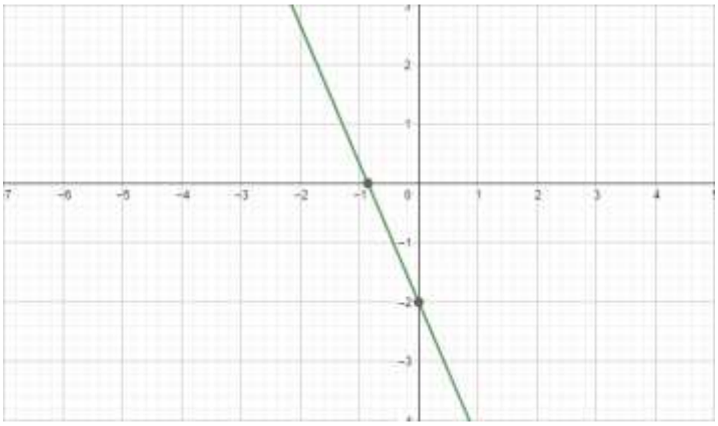
d. 

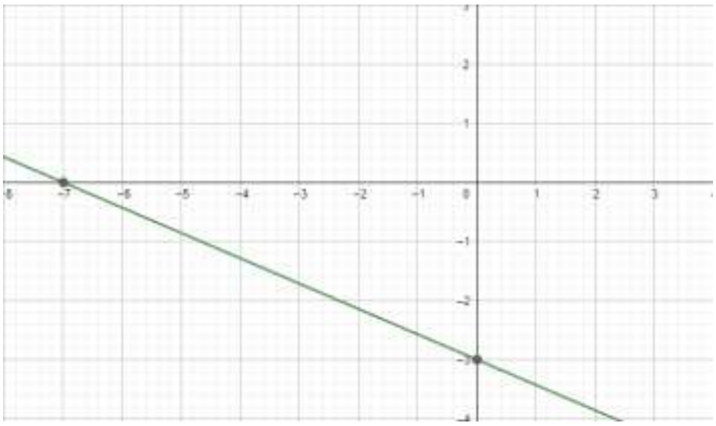
2. ¿Cuál es la ordenada al origen de la ecuación anterior?
   *Recuerde que la ordenada al origen es el valor de **y** cuando **x** vale 0 (cero)*
   a. 1,5 ←Correcto
   b. 1,666
   c. 1,333
   d. 0
   e. No se puede calcular

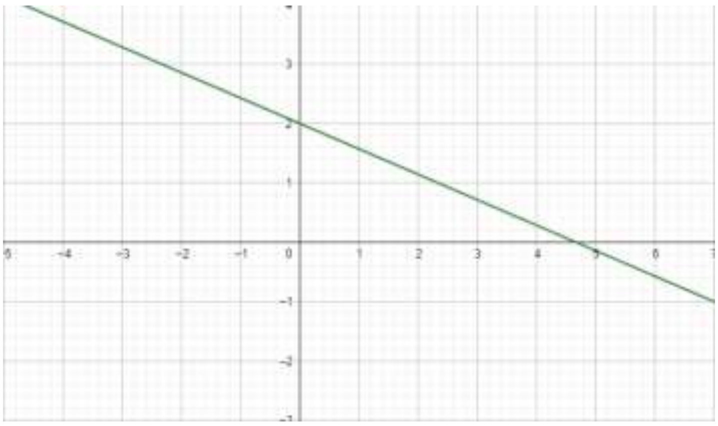
3. ¿Cuál es la Ecuación General de la recta definida por la función y = (3/5)x + 2 ?
   a. (3/5)x + y = 2

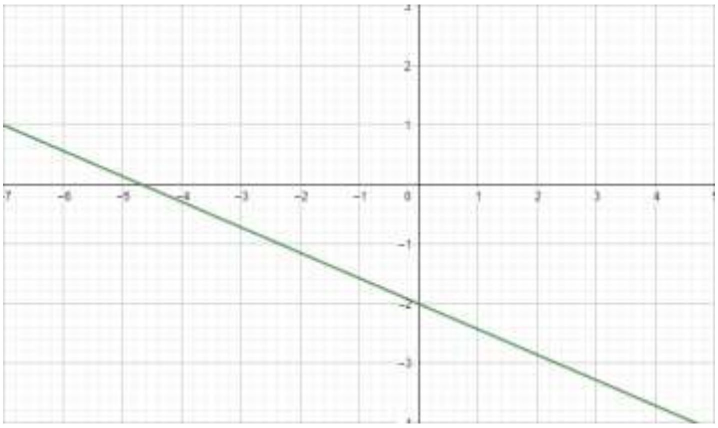
b. -3x + 5y – 10 = 0
c. (3/5)x - y + 2 = 0 ←Correcto
d. 3x + 10 = 5y
e. No se puede calcular

4. ¿Cuál de las siguientes gráficas corresponde a la ecuación y = -(3/7)x - 2 ?

a. 

b. 

c. 

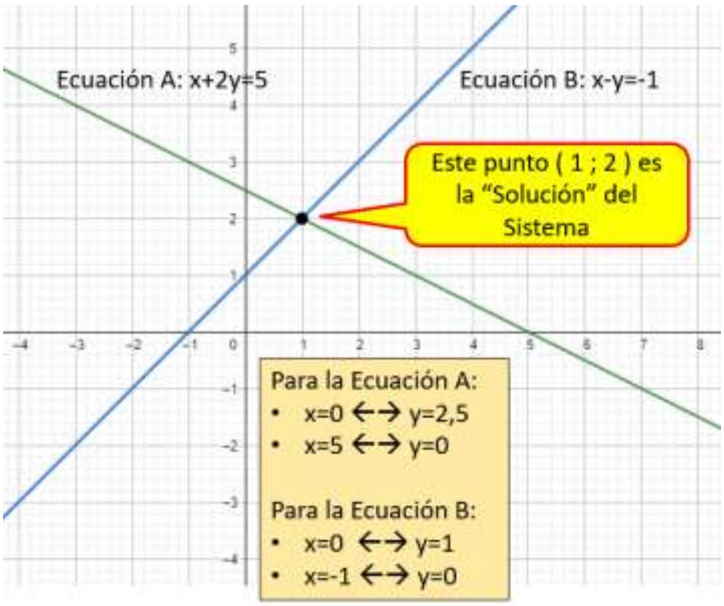
d.  ←Correcto

5. ¿Cuál es la ordenada al origen de la ecuación anterior?
   *Recuerde que la ordenada al origen es el valor de **y** cuando **x** vale 0 (cero)*
   a. -4,666…
   b. -3
   c. -2 ←Correcto
   d. -7
   e. No se puede calcular

SP2H2: Sistemas de ecuaciones

Cuando consideramos simultáneamente 2 rectas no paralelas en el plano, hay sólo un punto en que se cortan. Esto es lo que llamamos un sistema de ecuaciones ***compatible*** y ***determinado***; donde el ***punto*** en que las rectas se cortan, es su ***solución***.

Se observa claramente en el siguiente ejemplo:



También puede suceder, que dos rectas sean idénticas, es decir, que se tocan en sus infinitos puntos; es lo que llamamos un Sistema de ecuaciones ***compatible*** e ***indeterminado*** pues tiene

infinitas soluciones: ambas rectan se tocan en infinitos puntos, pues son idénticas tanto en su inclinación como en su posición!

Por último, podemos tener en un Sistema dos rectas paralelas, es decir que no se cortan nunca. A este sistema le llamamos ***incompatible***, pues ***no tiene solución***: no existe ningún punto en común entre las rectas que lo componen.

Siguen a continuación algunos conceptos útiles, herramientas específicas de resolución de Sistemas de Ecuaciones, y ejemplos:

Un ***sistema de ecuaciones lineales*** es un conjunto de ecuaciones que tienen más de una incógnita. Las incógnitas aparecen en varias de las ecuaciones, pero no necesariamente en todas. Lo que hacen estas ecuaciones es relacionar las incógnitas entre sí.

Ejemplo de un sistema de **dos ecuaciones con dos incógnitas**:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ x - 5y = 6 \end{cases}$$

Recuerde! Resolver un sistema de ecuaciones consiste en encontrar el valor de cada incógnita para que se cumplan todas las ecuaciones del sistema.

La solución al sistema del ejemplo anterior es: **{ x=1 ; y=−1 }**

Y puede verificarlo comprobando el resultado para cada ecuación, al sustituir las variables por los valores hallados en la solución:

I)	3x + 2y = 1	(Si consideramos **x=1** y **y=-1**) →	3.(1) + 2.(-1) = 3 + (-2) = 1
II)	x - 5y = 6	(Si consideramos **x=1** y **y=-1**) →	1 - 5.(-1) = 1 - (-5) = 6

Para resolver un sistema (compatible determinado) necesitamos tener **al menos** tantas ecuaciones como incógnitas.

Sigue a continuación una reseña de diferentes métodos (analíticos) de resolución:

- **Método de sustitución**: consiste en despejar o aislar una de las incógnitas (por ejemplo, **x**) y sustituir su expresión en la otra ecuación. De este modo, obtendremos una ecuación de primer grado con la otra incógnita, **y**. Una vez resuelta, calculamos el valor de **x** sustituyendo el valor de **y** que ya conocemos.

- **Método de reducción**: consiste en operar entre las ecuaciones como, por ejemplo, sumar o restar ambas ecuaciones, de modo que una de las incógnitas desaparezcan. Así, obtenemos una ecuación con una sola incógnita.

- **Método de igualación**: consiste en aislar en ambas ecuaciones la misma incógnita para poder igualar las expresiones, obteniendo así una ecuación con una sola incógnita.

No olvidemos que si multiplicamos una ecuación por un número distinto de 0, la ecuación inicial y la obtenida son equivalentes. Esto quiere decir que ambas ecuaciones tienen las mismas soluciones y, por tanto, podemos trabajar con una u otra. Usaremos esta propiedad con frecuencia en el método de reducción.

En el siguiente enlace encontrará una revisión de los tres métodos comentados, con explicación, ejemplo y video: https://yosoytuprofe.20minutos.es/2016/06/03/sistema-de-ecuaciones/

Veamos estos métodos con un Sistema de Ejemplo:

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$$

- **Método de Sustitución**

  Despejamos en la primera ecuación la **x**:

  $$x + y = 3 \rightarrow \quad x = 3 - y$$

  Y la sustituimos en la segunda:

  $$2x - y = 0 \quad \rightarrow$$

  $$2(3 - y) - y = 0 \quad \rightarrow$$

  $$6 - 2y - y = 0 \quad \rightarrow$$

  $$6 - 3y = 0 \quad \rightarrow$$

  $$6 = 3y \quad \rightarrow$$

  $$y = \frac{6}{3} = 2$$

  Calculamos **x** sabiendo **y=2**:

  $$x = 3 - y = 3 - 2 = 1$$

  Por tanto, la solución del sistema es

  $$x = 1, \quad y = 2$$

- **Método de Igualación**

  Despejamos en ambas ecuaciones la **y**

  $$x + y = 3 \quad \rightarrow \quad y = 3 - x$$
  $$2x - y = 0 \quad \rightarrow \quad y = 2x$$

  Como **y=y**, igualamos las expresiones y resolvemos la ecuación:

$$3 - x = 2x \quad \rightarrow$$

$$3 = 3x \quad \rightarrow$$

$$x = \frac{3}{3} = 1$$

Ahora, sustituimos el valor de la incógnita **x=1** en la primera de las ecuaciones anteriores para calcular **y**:

$$y = 3 - x = 3 - 1 = 2$$

Por tanto, la solución del sistema es

$$x = 1, \;\; y = 2$$

- **<u>Método de Reducción</u>**

Para sumar las ecuaciones y que desaparezca una de las dos incógnitas, los coeficientes de dicha incógnita deben ser iguales pero de signo distinto. Para ello, multiplicamos por -2 la primera ecuación.

Después, sumamos las ecuaciones y resolvemos la ecuación obtenida:

$$\begin{array}{l} x + y = 3 \\ 2x - y = 0 \end{array}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{array}{r} -2x - 2y = -6 \\ 2x \;\; - y = \;\; 0 \\ \hline 0x - 3y = \; -6 \end{array}$$

$$\downarrow$$

$$-3y = -6$$

$$\downarrow$$

$$y = \frac{-6}{-3} = 2$$

Finalmente, sustituimos el valor de **y=2** en la primera ecuación y la resolvemos:

$$x + y = 3 \quad \rightarrow$$

$$x + 2 = 3 \quad \rightarrow$$

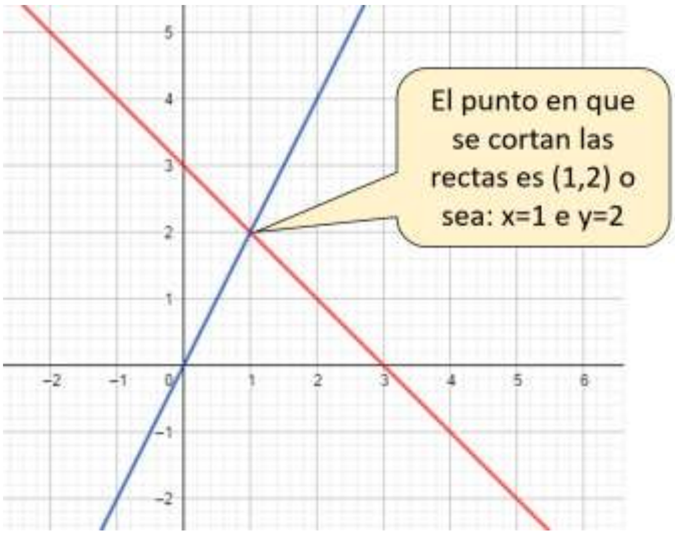
$$x = 3 - 2 = 1$$

Por tanto, la solución del sistema de ecuaciones es

$$x = 1, \;\; y = 2$$

Además de los mencionados, puede resolverse gráficamente el sistema (obviamente, con un cierto grado de error en la precisión). Lo único que debe hacer es graficar ambas rectas sobre el plano cartesiano de manera simultánea, y establecer gráficamente los valores de ambos ejes en el punto en que las líneas se intersectan.

Por ejemplo, el sistema anterior se vería del siguiente modo:



Existen muchos otros métodos…!! Serán de especial interés los que denominaremos métodos matriciales, como por ejemplo el de Gauss-Jordan, o el de Cramer; pero los veremos más adelante!

Sistemas en 3D

Del mismo modo que la relación de valores de dos variables definen una función en el plano (típicamente lineal en los sistemas vistos); observaremos que la evolución de tres variables lineales definen **un plano, en el espacio**!

Y también por analogía, excepto que se trate de planos paralelos, los mismos han de intersectarse simultáneamente en un único punto: el que será la "solución" del sistema.

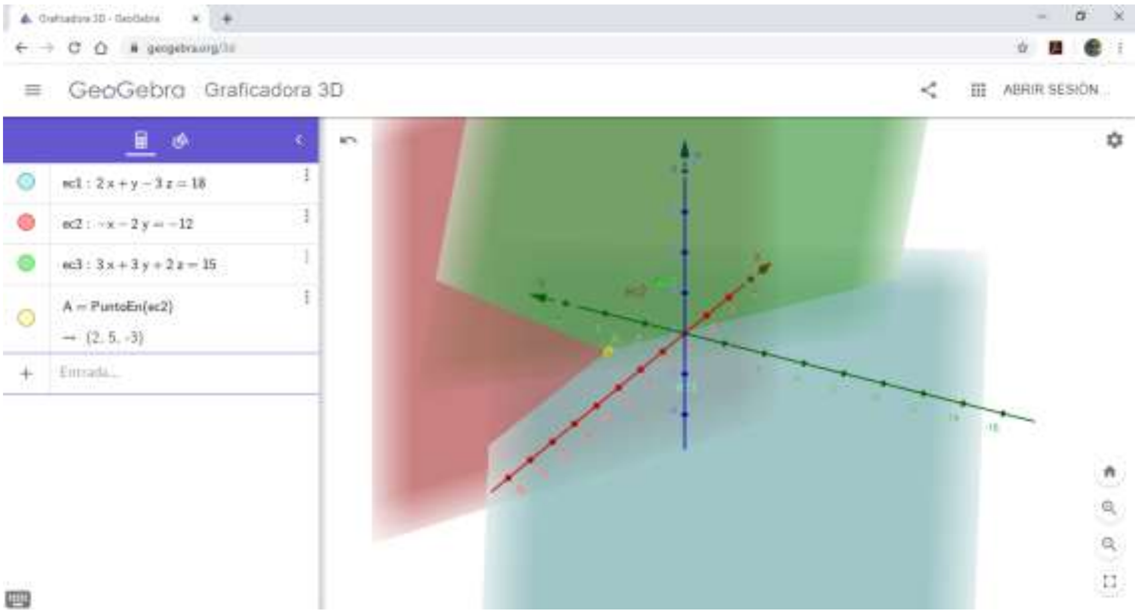
Ejemplo de Sistema de 3 Ecuaciones con 3 incógnitas: $\begin{cases} 2x + y - 3z = 18 \\ -x - 2y = -12 \\ 3x + 3y + 2z = 15 \end{cases}$

Como ve, no es necesario que todas las ecuaciones incluyan todas las variables: en la segunda ecuación, la variable **z** no existe (está anulada, o factorizada por cero). Sin embargo, es importante que cada variable esté presente en al menos una de las ecuaciones.

La solución de este sistema está en el punto **(2 ; 5 ; -3)**

es decir que cuando **x=2** , **y=5** y **z=-3** el resultado de las 3 ecuaciones se verifica!

En la siguiente imagen puede observar, graficados en GeoGebra, los tres planos correspondientes a cada una de las tres ecuaciones, y el punto en el que los mismos se cortan:



Intente por favor resolverlo mediante los métodos antes explicados… verá que es posible, aunque no tan simple!

Precisamente, en sistemas como éste o en otros aún mayores, es que cobran importancia los métodos matriciales y de resolución por cálculo iterativo: nos permiten resolver cualquier sistema, independientemente de su tamaño, con mínimo esfuerzo!!

Intente por favor resolverlo mediante los métodos antes explicados… verá que es posible, aunque no tan simple!

Sistemas N-Dimensionales

No existe un límite en la cantidad de variables que pueden interrelacionarse en un sistema, pero obviamente, nos sería imposible "concebirlas" gráficamente… Pese a ello, resolverlas matemáticamente es posible, útil, y relativamente sencillo si aplicamos las herramientas adecuadas.

Veremos las siguientes Situaciones Profesionales algunas de esas herramientas, tales como:

- Métodos Matriciales
- Implementación de algunos de ellos utilizando una Planilla de Cálculo

1. Indique cuál de las siguientes es la solución para el sistema:

$$\begin{cases} 3x - 3z = 6 \\ -x + 2y - 2z = 4 \\ 2x + y + z = 3 \end{cases}$$

   a. $x = 10 \;;\; y = 15 \;;\; z = 8$

   b. $x = \frac{10}{9} \;;\; y = \frac{15}{9} \;;\; z = \frac{8}{9}$

   c. $x = \frac{10}{9} \;;\; y = \frac{15}{9} \;;\; z = -\frac{8}{9}$ ←Correcta

   d. El sistema no puede resolverse pues hay dos rectas paralelas

   e. El sistema tiene infinitas soluciones, pues contiene dos planos iguales

2. Indique cuál de las siguientes es la solución para el sistema:

$$\begin{cases} 3x - 2y = 6 \\ x - \frac{2}{3}y = 2 \end{cases}$$

   a. x=4 ; y=3
   b. x=2 ; y=0
   c. x=7 ; y=3
   d. El sistema no puede resolverse pues son dos rectas paralelas
   e. El sistema tiene infinitas soluciones, pues se trata de la misma recta ←Correcta

3. Indique cuál de las siguientes es la solución para el sistema:

$$\begin{cases} -5x + y = 6 \\ 10x - 2y = 10 \end{cases}$$

   a. x=0 ; y=6
   b. x=1 ; y=0
   c. x=0 ; y=0,5
   d. El sistema no puede resolverse pues son dos rectas paralelas ←Correcta
   e. El sistema tiene infinitas soluciones, pues se trata de la misma recta

4. Indique cuál de las siguientes es la solución para el sistema:

$$\begin{cases} -x - y = 1 \\ 2x + 2y + 2z = 2 \\ 3x = 3 \end{cases}$$

a. x=1 ; y=-2 ; z=2 ←Correcta
b. x=1 ; y=2 ; z=-2
c. x=0 ; y=0 ; z=0
d. El sistema no puede resolverse

5. Indique cuál de las siguientes es la solución para el sistema:

$$\begin{cases} 5\mathrm{z} + 3\mathrm{x} = 9 \\ -2x + 2y = -8 \\ 3x - z = 9 \end{cases}$$

a. x=-3 ; y=1 ; z=0
b. x=3 ; y=-1 ; z=0 ←Correcta
c. x=1 ; y=3 ; z=0
d. El sistema no puede resolverse

SITUACIÓN PROFESIONAL RESUELTA

La Situación Profesional se resuelve planteando el Sistema de Ecuaciones para las funciones lineales dadas, y encontrando su solución en el punto en que se cortan.

Sean las variables:
A = Transferencias
B = Sustituciones
C = Altas

El enunciado indica dos ecuaciones:
i) 45.A + 3.B + 2.C = u$s 125
ii) 12.A + 8.B + 4.C = u$s 140

Como puede observarse, la cantidad de Ecuaciones definidas es insuficiente para resolver el sistema: son 3 variables y sólo 2 ecuaciones! Es decir, no podríamos obtener "**una**" solución, pues en este caso en particular el sistema es **compatible indeterminado**, y tiene por lo tanto **infinitas soluciones**.

Para poder resolver este caso entonces, requeriremos el análisis de un ciclo de facturación más, para poder conformar una tercera ecuación. Al hacerlo, obtenemos el nuevo dato que necesitamos: que **20 transferencias + 5 altas, importaron a la empresa u$s 85**.

Observe que en esta nueva información tenemos Transferencias (A) y Altas (C), pero no Sustituciones (B). Puesto en formato de ecuación, tenemos:

iii) 20.A + 5.C = u$s 85

Es importante resaltar que NO es necesario que las tres variables participen en las tres ecuaciones! Es suficiente con que cada variable esté presente en “al menos una” de las ecuaciones del sistema.

Finalmente, el Sistema queda conformado del siguiente modo:

$$\begin{cases} 45.\mathrm{A} + 3.\mathrm{B} + 2.\mathrm{C} = 125 \quad \text{(ecuación i)} \\ 12.\mathrm{A} + 8.\mathrm{B} + 4.\mathrm{C} = 140 \quad \text{(ecuación ii)} \\ 20.\mathrm{A} + 0.\mathrm{B} + 5.\mathrm{C} = 85 \quad \text{(ecuación iii)} \end{cases}$$

Si lo resolvemos, podremos averiguar el valor de cada una de las tres variables que contiene!

Para comenzar, podemos ver que la tercera ecuación solo tiene 2 variables, será mucho más sencillo empezar por ella, por ejemplo, operando algebraicamente para obtener un valor de C expresado en términos de A, lo que nos permitirá luego sustituir dicha variable (C) en cualquiera de las otras ecuaciones y así despejar B, por ejemplo, para que también quede expresada en términos de A. Finalmente, será cuestión de despejar el valor de una de las variables, y luego las otras. Veamos esto paso a paso:

La ecuación iii) dice que 20.A + 5.C = 85 : despejaremos C

5.C = 85 – 20.A

C = (85 – 20.A) / 5

Aplicando la propiedad distributiva de la división, nos queda que

C = - 4.A + 17   <<**C** expresado en función de **A**>>

Luego, Reemplazando C en la ecuación i) por su equivalente, tenemos:

45.A + 3.B + 2.C = 125

Al Reemplazar C queda:

45.A + 3.B + 2.(-4.A + 17) = 125

Operando la distributiva del producto…
45.A + 3.B - 8.A + 34 = 125

Agrupando los términos semejantes en A y términos independientes:

(45.A - 8.A) + 3.B = (125 - 34)

37.A + 3.B = 91

3.B = 91 - 37.A

B = (91 - 37.A) / 3

Finalmente, obtenemos:

B = (91/3) - (37/3).A <<**B** expresado en función de **A**>>

Finalmente, usando <<**B** expresado en función de **A**>> y <<**C** expresado en función de **A**>> en la ecuación ii) podemos obtener el valor de **A**

ii) 12.A + 8.B + 4.C = u$s 140

Reemplazando B y C por las expresiones halladas, esto queda así:

$$12.A + 8.\left(\left(\frac{91}{3}\right) - \left(\frac{37}{3}\right).A\right) + 4.(-4.A + 17) = 140$$

$$12.A + \left(\frac{728}{3}\right) - \left(\frac{296}{3}\right).A - 16.A + 68 = 140$$

$$12.A - \left(\frac{296}{3}\right).A - 16.A = 140 - \left(\frac{728}{3}\right) - 68$$

$$-\left(\frac{308}{3}\right).A = -\left(\frac{512}{3}\right)$$

Simplificando: 308.A = 512

A = (512/308) --> A = u$s 1,66

Usando el valor de **A** que hemos descubierto, podemos averiguar el valor de **B** reemplazando en <<**B** expresado en función de **A**>>, y el de **C** reemplazando en <<**C** expresado en función de **A**>>

Si A = u$s 1,66 y B = (91/3) - (37/3).A , entonces B = u$s 9,86

Si A = u$s 1,66 y C = - 4.A + 17 , entonces C = u$s 10,36

Y así hemos encontrado la solución a la Situación Profesional planteada!

Podemos verificarla reemplazando en las tres ecuaciones iniciales las variables por sus respectivos valores, y encontraremos que las igualdades se cumplen en los tres casos:

Siendo el resultado:

A = u$s 1,66
B = u$s 9,86

$\boxed{C = u\$s\ 10{,}36}$

Se cumple que

45.A + 3.B + 2.C = u$s 125   (ecuación i)

Y también…

12.A + 8.B + 4.C = u$s 140   (ecuación ii)

Y también…

20.A + 5.C = u$s 855   (ecuación iii)

A modo de cierre: potentes herramientas por descubrir…

Le pareció largo? Complejo?

Si lo vemos en detalle y paso a paso no ha sido difícil… pero sí un poquito largo.

Imaginemos qué pasaría si en vez de resolver la relación entre tres variables, el sistema tuviera que encontrar la solución para 4, o 5, o 10!! Claramente sería una tarea ciclópea y muy propensa a errores, verdad?

Ahora que sabemos y entendemos bien qué es una función lineal, y cómo funciona un Sistema de Ecuaciones…

Ahora que entendemos de qué manera descubrir el valor de una de las variables nos permite encontrar las restantes…

Ahora que podemos comprender de qué modo todas las rectas de un Sistema de Ecuaciones Lineales se cortan en un único punto…

Ahora? Ahora estamos en condiciones de usar **potentes recursos matemáticos y computacionales** que, de manera muy simple, nos permitirán resolver este tipo de situaciones e incluso otras mucho más complejas!

Como ejemplo, vea que el sistema anterior hubiera podido resolverse en Python escribiendo un programa tan simple como éste:

```python
import numpy as np

A=np.matrix([ [ 45,  3,  2],
              [ 12,  8,  4],
              [ 20,  0,  5] ])

b=np.matrix([ [125],
              [140],
              [ 85] ])

print(np.linalg.solve(A,b))
```

Y la respuesta habría sido la misma:

```
In [1]:
[[ 1.66233766]
 [ 9.83116883]
 [10.35064935]]
```

(*) La pequeña diferencia en los resultados se debe a que hemos operado, manualmente, redondeando a 2 cifras decimales.

Aprenderemos esta y muchas herramientas más en las siguientes Situaciones Profesionales!!

SP2: EJERCICIO POR RESOLVER

Una empresa dedicada a la administración de capitales en la bolsa necesita discriminar las inversiones realizadas por su competencia en tres grupos de acciones a partir de los resultados obtenidos que se informan obligatoriamente al cierre de operaciones. Cada inversión realizada se contabiliza definiendo 3 grupos:

- A = Cantidad de operaciones realizadas en Acciones Tipo I
- B = Cantidad de operaciones realizadas en Acciones Tipo II
- C = Cantidad de operaciones realizadas en Acciones Tipo III

Se sabe lo siguiente:

- En total se han realizado 45 operaciones.
- Cada operación genera una ganancia o pérdida según el siguiente detalle:
  - Cada operación A reportó una **ganancia** media de u$s 150
  - Cada operación B reportó una **pérdida** media de u$s 10
  - Cada operación C reportó una **ganancia** media de u$s 30
  - El resultado final o "suma" de todo lo ganado y perdido con las inversiones realizadas ha sido de u$s 1670
- Cada inversión realizada tiene un costo, y se sabe que dicho costo acumulado (sumando todas las inversiones) ha sido de u$s 316, según el siguiente detalle:
  - Cada operación A tuvo un costo de u$s 5
  - Cada operación B tuvo un costo de u$s 7
  - Cada operación C tuvo un costo de u$s 12

Se necesita saber cuántas operaciones de cada tipo han sido realizadas.

1. ¿ Cuál de las siguientes rectas pasa por los puntos (8;-2) y (4;7) ?
   a. y = -(9/4)x + 16 ((<<< Respuesta correcta!))
   b. y = -(4/9)x + 16
   c. y = (9/4)x + 16
   d. y = (4/9)x - 16
   e. Ninguna de las anteriores

2. ¿ Cuál de los siguientes puntos **no pertenece** a la recta definida por: y = 3x – 6 ?
   a. (4;6)
   b. (0;2) ((<<< Respuesta correcta!))
   c. (2;0)
   d. (-2;-12)
   e. Todos los puntos dados pertenecen a esta recta

3. ¿ Cuál es la Ordenada al Origen de la recta que tiene pendiente 3,15 y a la cual pertenece el punto (2;4) ?
   a. 4,666…
   b. 3,2
   c. 3
   d. -2,3 ((<<< Respuesta correcta!))
   e. 2,3

4. ¿ Cuál es la pendiente de una recta cuya Ordenada al Origen es 3 y a la cual pertenece el punto (2;1) ?
   a. 1
   b. 0
   c. –1 ((<<< Respuesta correcta!))
   d. –(3/2)
   e. –(2/3)

5. ¿ Cuál es la solución, si es que existe, del siguiente Sistema de Ecuaciones ?
   Resuelva el sistema utilizando algún método algebraico, y compruébelo gráficamente con GeoGebra.

$$\begin{cases} 2x + \frac{3}{5}y = 14 \\ -\frac{3}{4}x - 2y = 40 \end{cases}$$

   a. { x = 0 ; y = 0 }
   b. { x = -(1810/71) ; y = (1040/71) }
   c. { x = (1040/71) ; y = -(1810/71) } ((<<< Respuesta correcta!))
   d. { x = -(71/1810) ; y = (71/1040) }

e. El sistema dado no tiene solución

6. ¿ Cuál es la solución, si es que existe, del siguiente Sistema de Ecuaciones ?
Resuelva el sistema utilizando algún método algebraico y compruébelo numéricamente con las tres ecuaciones dadas.

$$\begin{cases} 4x - 5y = 12 \\ 2x + 3z = -6 \\ 3x - 2y + 3z = 10 \end{cases}$$

a. { x = -(56/3) ; y = -(52/3) ; z = 94/9 }} ((<<< Respuesta correcta!))
b. { x = 28/3 ; y = 26/3 ; z = 94/9 }
c. { x = 12 ; y = -6 ; z = 10 }
d. { x = -(28/3) ; y = -(26/3) ; z = 9/94 }
e. El sistema dado no tiene solución

7. ¿ Cuál es la solución, si es que existe, del siguiente Sistema de Ecuaciones ?
Para resolver este sistema deberá utilizar alguna de las herramientas tecnológicas que hemos visto, ya que su resolución algebraica puede ser extremadamente larga y propensa a errores… <u>Recomendación</u>: Python

$$\begin{cases} 4t + 8u - 2v + 5w + 2x - 3y - 4z = 12 \\ -t - 2u - 3v - 4w + 5x + 3y + 9z = 30 \\ 2t + 2u - 3v + 4w + 8x - 2y - 3z = 20 \\ -2t + 3u - 2v + 2w + 2x - 3y - 5z = -11 \\ 8t + 7u + 6v + 5w + 4x + 3y + 2z = 10 \\ -7t - 3u + 4v + 9w - 5x - 7y + 2z = -25 \\ 2t + 2u - 4v - 4w + 3x - 4y - 8z = -4 \end{cases}$$

a. { t= 2,46554689 ;
u= -5,64589952 ;
v= -2,66451277 ;
w= -1,64645513 ;
x= 3,14159278 ;
y= 4,64598732 ;
z= 0,00000125 }

b. { t= 3,58640597 ;
u= -1,19981121 ;
v= -4,45640455 ;
w= 1,71277007 ;
x= 0,39047235 ;
y= 0,54516608 ;
z= 2,34231002 } ((<<< Respuesta correcta))

c. { t= -2,46554689 ;
u= 5,64589952 ;
v= 2,66451277 ;

w= 1,64645513 ;
x= -3,14159278 ;
y= -4,64598732 ;
z= -0,00000125 }

d. { t= -3,58640597 ;
u= 1,19981121 ;
v= 4,45640455 ;
w= -1,71277007 ;
x= -0,39047235 ;
y= -0,54516608 ;
z= -2,34231002 }

e. El sistema no puede resolverse

SP3: SISTEMAS DE INECUACIONES Y PROGRAMACIÓN LINEAL

Una fábrica de teléfonos celulares inteligentes tiene una de sus líneas de producción dedicada a la fabricación de dos productos en particular: el modelo llamado J35, y otro de más alta gama conocido como TX30. A los efectos de simplificar el enunciado los llamaremos de aquí en más simplemente por su nombre "J35" y "TX30".

Cada uno de los dos tipos de productos requiere tres etapas para ser fabricado: Prueba de componentes, Armado, y Empaquetado. Sigue a continuación la tabla de tiempos requeridos por cada producto en estas diferentes etapas de producción:

- J35
    - Prueba de componentes: 12 minutos
    - Armado: 5 minutos
    - Empaquetado: 3 minutos

- TX30
    - Prueba de componentes: 3 minutos
    - Armado: 10 minutos
    - Empaquetado: 4 minutos

El costo total de fabricación por unidad es de u$s 120 por cada J35, y u$s 90 por cada TX30.

La fábrica dispone de 60 Hs semanales de trabajo en el sector de Prueba de componentes, 80 Hs semanales en el sector de Armado, y 33 Hs semanales en el sector de Empaquetado.

La demanda semanal de productos (es decir, lo que se estima como volumen de venta) no supera las 600 unidades en total (sin discriminar J35 de TX30). Pero sí se sabe que la venta de J35 será siempre mayor a 100 unidades semanales.

El precio de venta de cada J35 es de u$s 230 por unidad, y el de cada TX30 es u$s 390.

Se requiere:

a. *Calcular un sistema en el que participen todas las variables nombradas y nos permita determinar <u>cuál es la cantidad ideal de J35 y cuál la de TX30 a fabricar</u> para **maximizar las ganancias** de la fábrica, respetando todas las restricciones indicadas.*

b. *¿A cuánto asciende la ganancia máxima esperable en este sistema?*

SP3H1: Inecuaciones. Analítica y Gráfica.

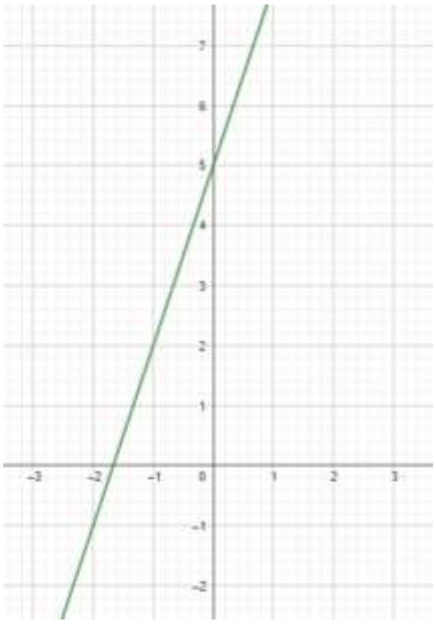
Una "Inecuación" se parece mucho a una ecuación, con la diferencia de la que relación entre los dos miembros (el de la izquierda y el de la derecha) no es una relación de igualdad, sino de desigualdad.

Veamos un ejemplo:

- Esta es una ecuación, y como ya sabemos, define una recta en el plano (pues tiene 2 variables)

$$y = 3x + 5$$

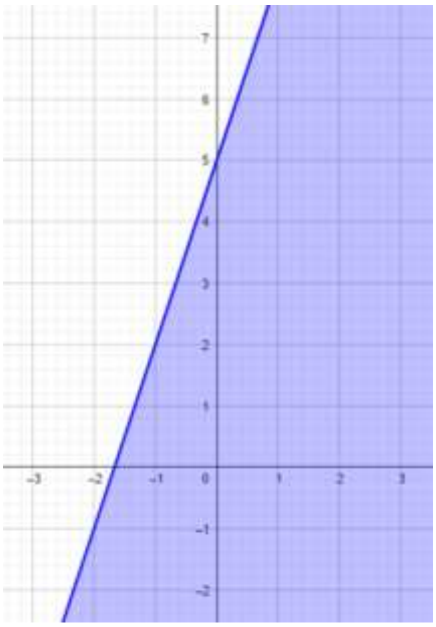
Su gráfica será:



- En cambio, esta que sigue es una **inecuación**, la cual define un "hemiplano", es decir, marca una recta en el plano y refiere todos los puntos que están a un lado de dicha recta.

$$y \leq 3x + 5$$

Su gráfica será:



Cualquier punto del plano puede estar dentro o fuera de esa inecuación: *si está dentro, decimos que **el punto está incluido en el hemiplano** definido por la inecuación; y por el contrario, si está fuera, **el punto es ajeno al hemiplano**.*

Las relaciones de desigualdad posibles para las inecuaciones son las siguientes:

- "Mayor que" : Por ejemplo $y > 3x - 2$

- “Mayor o igual que” : Por ejemplo $y \geq 5x$
- “Menor que” : Por ejemplo $y < 7x + 6$
- “Menor o igual que” : Por ejemplo $y \leq x + 8$

Evidentemente, todas las que hemos planteado como ejemplo son “**Inecuaciones lineales en el plano**”: Lineales porque la relación se basa en una función lineal (*es decir, un polinomio de grado 1*), y en el plano porque conjugan sólo dos variables.

Pueden definirse inecuaciones de otro grado, o de más variables (en espacios 3D o más), y si bien la lógica es la misma, no nos ocuparemos de ellas en el desarrollo que sigue.

Habrá notado que la relación entre la variable dependiente y la independiente puede incluir la igualdad, o no.

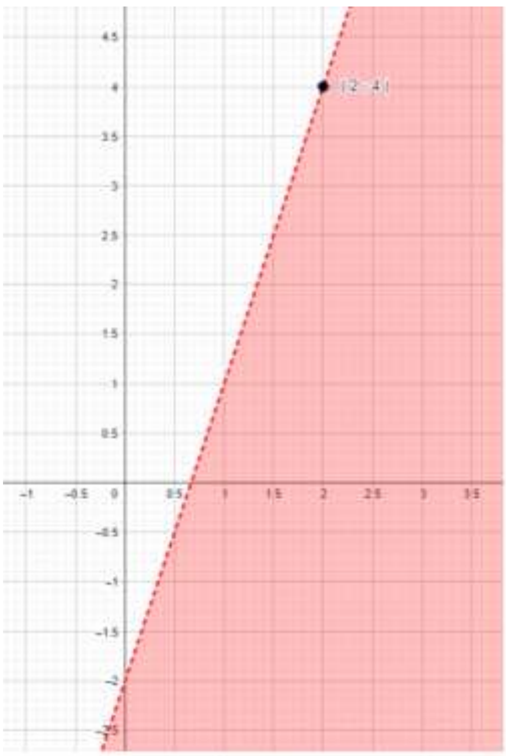
Por ejemplo:

Dadas las siguientes inecuaciones

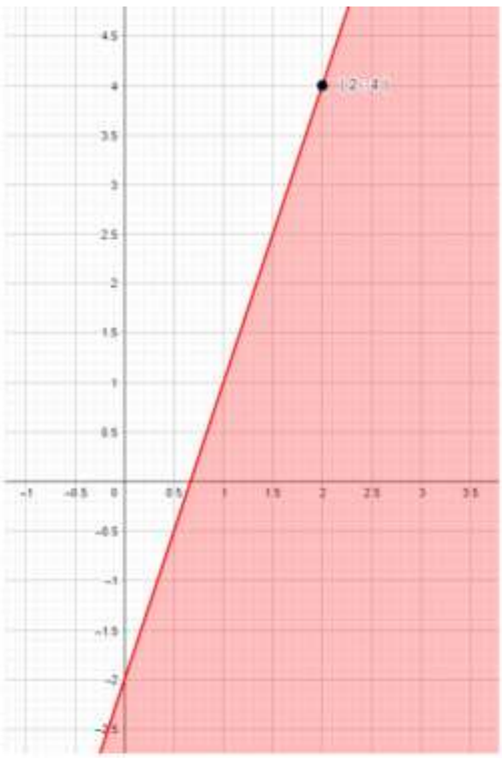
$$i)\ \ y > 3x - 2$$

$$ii)\ \ y \geq 3x - 2$$

Su gráfica es muy similar, pues ambas definen el mismo hemiplano: la diferencia es que la primera no incluye la recta, y la segunda sí. Esto suele “enfatizarse” en la gráfica.



y < 3x - 2

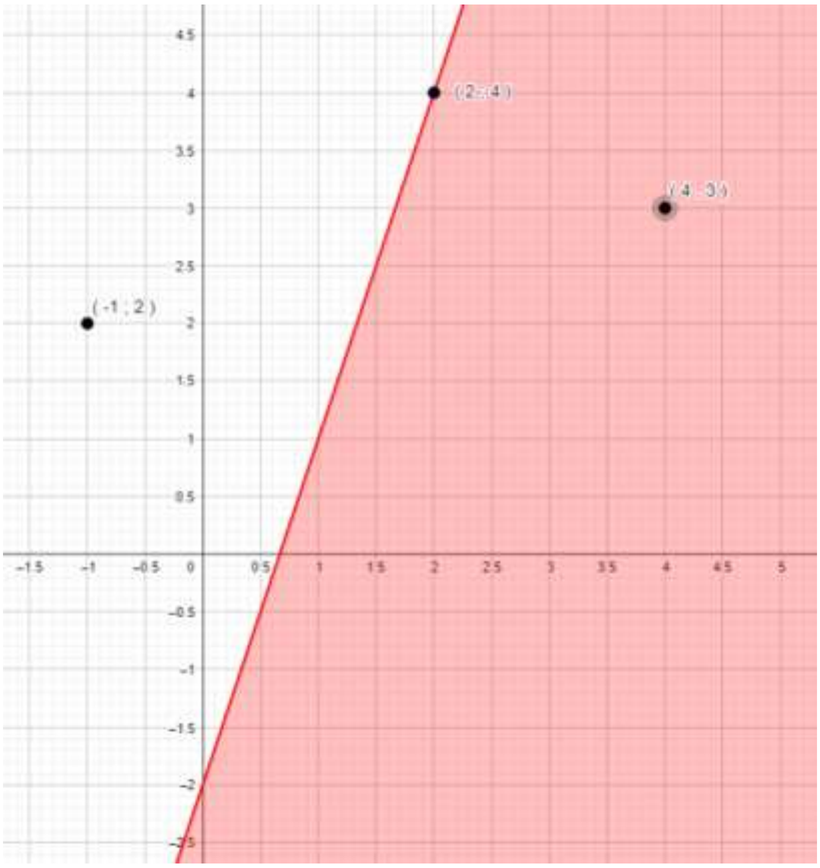


y ≤ 3x - 2

Así, por ejemplo, veamos que el punto **(2 ; 4) pertenece a la segunda inecuación** (pues está exactamente sobre la recta) en tanto que **no pertenece a la primera**.

Una inecuación tiene “**infinitos puntos que la satisfacen**”, y también “**infinitos puntos que no**”.

Por ejemplo, para la inecuación recién planteada, veamos los siguientes puntos:



Claramente, el punto **(** **4** **;** **3** **)** está dentro del hemiplano definido y por tanto "**satisface la inecuación**", es decir, es un posible par ordenado de los infinitos definidos por esta inecuación.

Analíticamente podemos observar esto sustituyendo las variables por sus valores y revisando si la relación definida se cumple, o no.

$$y \leq 3x - 2$$

Reemplazamos x e y por los valores del punto y tenemos que:

Para **x = 4** e **y = 3**

$$\mathbf{3} \leq 3.(\mathbf{4}) - 2$$

Es decir

$$\mathbf{3 \leq 10}$$

Lo cual es cierto! El punto "**Satisface la ecuación**"!

Por su parte, para el punto **(** **-1** **;** **2** **)** tenemos

$$y \leq 3.x - 2$$

Y reemplazando **x** e **y** por sus valores nos queda:

$$\mathbf{2} \leq 3.(\mathbf{-1}) - 2$$

Es decir

$$\mathbf{2 \leq -5}$$

Lo cual es falso! El punto “**NO Satisface la ecuación**”!

Para construir la gráfica de una inecuación, lo hacemos de modo muy similar a la gráfica de una ecuación, sólo agregando tres pasos al algoritmo:

1. **Convertimos la inecuación en una ecuación**: reemplazando la relación de desigualdad por una de igualdad.
2. Graficamos la recta que describe.
3. **Elegimos un punto arbitrario a uno de los dos lados en que la recta corta el plano**: si el punto elegido satisface la inecuación, el hemiplano al que pertenece dicho punto es el área de la inecuación; en caso contrario, es el lado opuesto.
4. Finalmente, si **la relación incluye la igualdad** (“Mayor o igual que..” o “Menor o igual que..”), la recta está incluida en la solución; en caso contrario, está excluida.

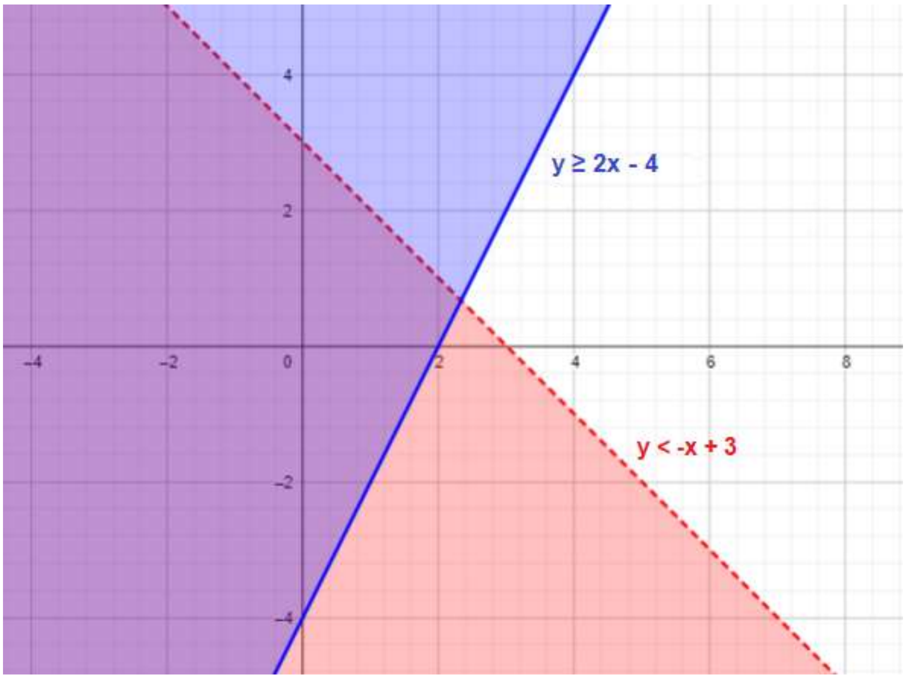
Sistemas de Inecuaciones

Al igual que lo ya visto con las ecuaciones, podemos construir “Sistemas de Inecuaciones”. La diferencia entre un **Sistema de Ecuaciones** y un ***Sistema de Inecuaciones*** es que en el primero (siempre que se trate de un Sistema Compatible Determinado) tendremos un único punto que satisface todas las ecuaciones del sistema: el que conocemos como “Solución del Sistema”. En cambio, para los Sistemas de Inecuaciones es esperable que nos encontremos con “Infinitos Puntos que Satisfacen el Sistema”, es decir, infinitas posibles soluciones.

Veamos este ejemplo:

$$\begin{cases} y < -x + 3 \\ y \geq 2x - 4 \end{cases}$$

En su gráfica vemos que la superposición del área de los dos hemiplanos determina un área también abierta: a la que pueden pertenecer infinitos puntos.



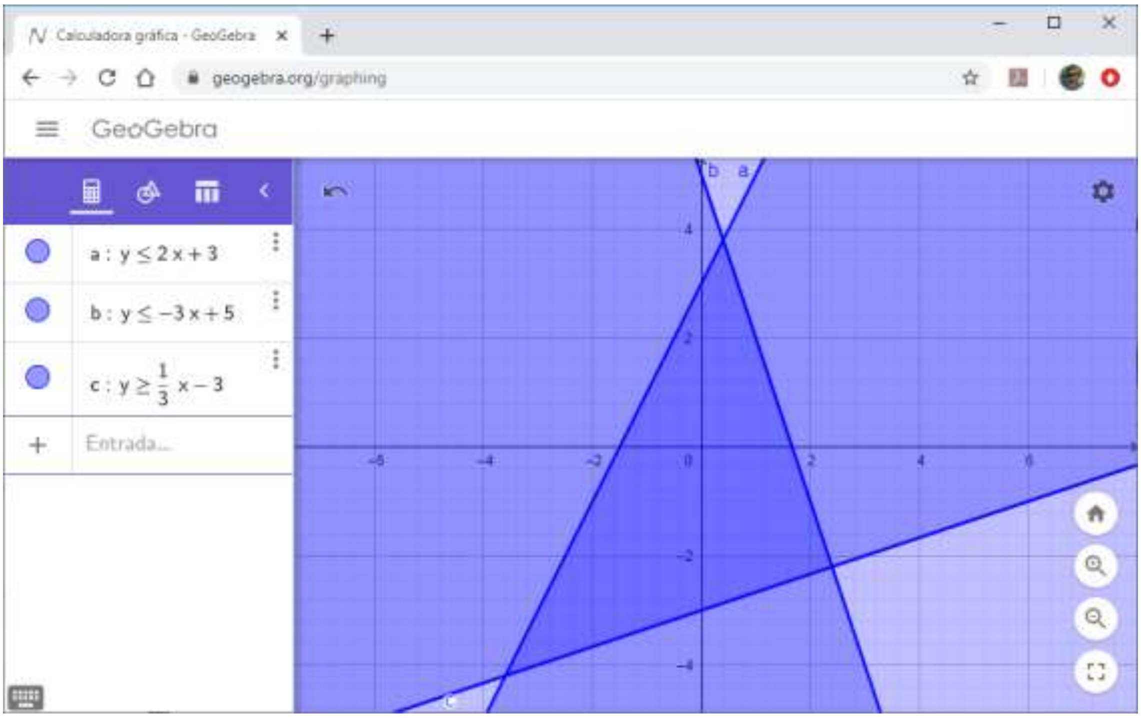
En este sistema puede observarse que:

- La primera inecuación “incluye” su recta (**$y \geq 2x - 4$**)
- La segunda inecuación “excluye” su recta (**$y < -x + 3$**)
- El área comprendida por la intersección de ambos hemiplanos es el espacio de la “Región Factible” del Sistema: es decir, los infinitos puntos compatibles con el sistema son los que existen en dicha área. *Para este caso por ejemplo, el Origen **(0 ; 0)** está comprendida en la **Región Factible** de este sistema.*

Un sistema puede, como el anterior, definir un área abierta, o por el contrario, puede delimitar un área cerrada. Veamos el siguiente caso:

$$\begin{cases} y \leq 2x + 3 \\ y \leq -3x + 5 \\ y \geq \dfrac{1}{3}x - 3 \end{cases}$$

Su gráfica define un área triangular donde cada una de las inecuaciones establece una frontera. La superposición de las tres está delimitando dicha área cerrada.



No obstante ser cerrada, en esa área también existirán infinitos puntos!

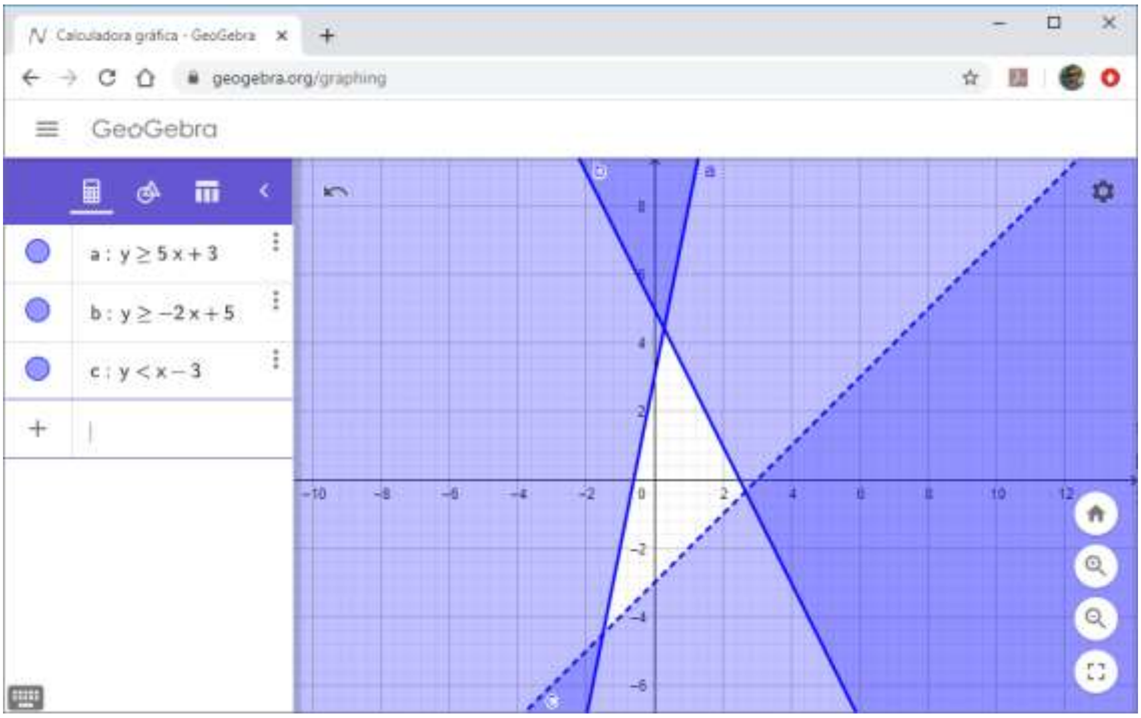
Pero entonces… ¿todos los sistemas de inecuaciones admitirán infinitas soluciones?

No necesariamente! Un sistema de Inecuaciones puede ser Incompatible si el conjunto que lo compone no define ningún área en el plano en el que todas las inecuaciones sean simultáneamente ciertas; o que por lo menos exista un punto donde esto ocurra!

Veamos por ejemplo:

$$\begin{cases} y \geq 5x + 3 \\ y \geq -2x + 5 \\ y < x - 3 \end{cases}$$

En su gráfica vemos que NO existe ningún área en la cual se superpongan las tres inecuaciones que lo componen. Podemos encontrar infinitos puntos en los que son simultáneamente ciertas las primeras dos inecuaciones, pero no la tercera; o la primera y la tercera, pero no la segunda; y así sucesivamente… Son áreas de superposición parcial, pero no total: ***No existe ningún punto en el plano que verifique las 3 inecuaciones al mismo tiempo!***



Software de gráficas de funciones: GeoGebra

Como habrá observado en las últimas dos imágenes, el sistema GeoGebra resulta ideal para realizar este tipo de investigación gráfica respecto del área de superposición de un sistema de inecuaciones. Nos permite graficar simultáneamente todas las inecuaciones (cada una representada por su propio semiplano), distingue si la frontera se incluye o no en el área definida mediante línea de trazo continuo o punteado, nos permite incluso establecer colores diferentes para cada una, y es muy fácil observar el área superpuesta. También podemos graficar un punto en cualquier coordenada y verificar si el mismo está dentro o fuera del área definida.

Para resolver las actividades que siguen este sistema le será de muchísima utilidad.

Lo invito a ver el siguiente Video ((Insertar video (#7_Aux): Geogebra para Sistemas de Inecuaciones)) donde veremos paso a paso cómo graficar los elementos que hemos visto.

https://youtu.be/tPB50TOFODo

¿Cómo nos ayudan los sistemas de inecuaciones para resolver el problema planteado al principio?

En nuestra Situación Profesional, deberemos encontrar la región factible para empezar a resolverlo, y para eso deberemos definir las inecuaciones y el sistema que forman.

Con lo visto hasta aquí sabemos determinar el área de factibilidad, pero… ¿De qué manera las restricciones de un sistema se convierten en inecuaciones? ¿Cómo podemos saber en qué punto del área de factibilidad se encontrará el máximo o mínimo valor para la función objetivo que queremos resolver?

¡En la siguiente ***herramienta*** *veremos cómo hacerlo!*

AUTOEVALUACIÓN SP3-H1

1. Dado el siguiente Sistema de Inecuaciones, indique para cada uno de los puntos indicados si dicho punto pertenece al sistema, o no:

$$\begin{cases} 2x - 3y \leq 4 \\ 5x + 2y \geq 5 \\ 4x - y \geq 6 \\ -x + 5y < 8 \end{cases}$$

   a. El punto P (0 ; 0) pertenece al Sistema
      - Verdadero
      - Falso ((Respuesta correcta!))

   b. El punto P (2 ; 1) pertenece al Sistema
      - Verdadero ((Respuesta correcta!))
      - Falso

   c. El punto P (3 ; -1) pertenece al Sistema
      - Verdadero
      - Falso ((Respuesta correcta!))

   d. El punto P (2 ; 0) pertenece al Sistema
      - Verdadero ((Respuesta correcta!))
      - Falso

   e. El punto P (2 ; 2) pertenece al Sistema
      - Verdadero
      - Falso ((Respuesta correcta!))

2. Indique para cada uno de los sistemas de inecuaciones que siguen a continuación si se trata de un Sistema Compatible, o no.

   a. $\begin{cases} 2x + 3y > 5 \\ -5x + y < 6 \end{cases}$

      - Es un Sistema Compatible ((Respuesta correcta!))
      - Es un Sistema Incompatible

   b. $\begin{cases} 3x + 4y > 5 \\ -6x - 8y \leq 7 \end{cases}$

      - Es un Sistema Compatible ((Respuesta correcta!))

- Es un Sistema Incompatible

c. $\begin{cases} 3x + 4y > 5 \\ -6x - 8y \geq 7 \end{cases}$

- Es un Sistema Compatible
- Es un Sistema Incompatible ((Respuesta correcta!))

d. $\begin{cases} 3x + 7y \leq 0 \\ -2x - y \leq 7 \\ x \leq y \end{cases}$

- Es un Sistema Compatible ((Respuesta correcta!))
- Es un Sistema Incompatible

e. $\begin{cases} 3x + 7y > 0 \\ -2x - y > 7 \\ x > y \end{cases}$

- Es un Sistema Compatible
- Es un Sistema Incompatible ((Respuesta correcta!))

f. $\begin{cases} 3x + 7y \geq 7 \\ -2x + 3y \geq 3 \\ y \leq 1 \end{cases}$

- Es un Sistema Compatible ((Respuesta correcta!))
- Es un Sistema Incompatible

g. $\begin{cases} 3x + y > 7 \\ x + y \leq 3 \\ x \geq 2 \end{cases}$

- Es un Sistema Compatible ((Respuesta correcta!))
- Es un Sistema Incompatible

h. $\begin{cases} 3x + y > 7 \\ x + y \leq 3 \\ x \geq 2 \\ x \leq y + 1 \end{cases}$

- Es un Sistema Compatible

- Es un Sistema Incompatible ((Respuesta correcta!))

SP3H2: Programación Lineal: Minimización / Maximización de la Función Objetivo

La Programación Lineal es el *conjunto de recursos y algoritmos matemáticos* que tiene por objeto "Optimizar" una función lineal (es decir, encontrar su máximo o su mínimo según se necesite), con la condición de que sus variables están sujetas a un conjunto de restricciones que normalmente se expresan como un Sistema de Inecuaciones, también lineales.

La función que necesitamos maximizar, o minimizar, se denomina "Función Objetivo". Suele representarse con la letra ***Z*** y está en función de las variables que participan del modelo, sobre las que se establecen las "Restricciones" que estén definidas para el problema a resolver.

El problema planteado en la situación profesional es típicamente un problema de programación lineal. Identifiquemos sus partes para ver si se cumplen las "condiciones de linealidad":

- Se pretende optimizar una **función lineal** que depende de dos variables (podríamos llamarlas x e y). Claramente el enunciado dice: "*¿cuál es la cantidad ideal de J35 y cuál la de TX30 a fabricar* para **maximizar las ganancias** de la fábrica?"
  Sabemos que las dos variables serán la cantidad de J35 y la cantidad de TX30 a fabricar. Podríamos llamarlas, respectivamente, ***x*** e ***y***.
  También sabemos que la función que queremos maximizar es "lineal", esto quiere decir, que los exponentes de sus variables son de grado 1 (dicho de otro modo, no son cuadráticas ni cúbicas ni de exponentes superiores, ni fraccionarios, ni negativos). Ya lo dice también el enunciado al referir que el costo de cada aparato, y también su precio de venta, es lineal: fabricar una unidad J35 cuesta u$s 120, fabricar dos costará u$s 240, fabricar tres costará u$s 360 y así sucesivamente. Por eso decimos que es lineal! Si a mayor cantidad fabricada tuviéramos un menor costo por unidad, la función sería – por ejemplo – logarítmica o de exponente fraccionario.
  Y lo mismo ocurre con el costo de fabricación del otro tipo de teléfono indicado, el TX30. También sucede del mismo modo con el precio de venta de ambos teléfonos… En todos los casos estamos hablando de variables "lineales": ese es un requisito fundamental.

- También observamos que las "restricciones" a las que deben ajustarse los posibles valores de esas variables están expresadas también de manera lineal. Dice el enunciado, por ejemplo, que "fabricar una unidad J35 requiere de 12 minutos en Prueba de componentes, 5 minutos en Armado, y 3 minutos en Empaquetado". Es decir, que fabricar dos unidades requerirá exactamente el doble de tiempo en cada etapa, y tres unidades el triple, y así sucesivamente... Nuevamente: **función lineal**.

  Las "restricciones" sobre los posibles valores para sus variables son las que se expresan como inecuaciones, y debemos verificar que también son "lineales". Veamos:

  Dice el enunciado dice que:

  a. Para fabricar una unidad J35 hacen falta 5 minutos de Armado
  b. Y que para fabricar una unidad TX30 son necesarios 10 minutos de Armado

c. Y también que disponemos de 80 hs semanales en el sector de Armado

¿Y entonces? ¿Tenemos allí una restricción? Pues claro! La información anterior significa que el tiempo Armado de un J35 multiplicado por la cantidad que armemos (variable ***x***) más el tiempo de Armado de un TX30 multiplicado por la cantidad que armemos (variable ***y***) deberá ser menor o igual a 80 hs que es el tiempo total para dicha tarea del que disponemos semanalmente. Dicho lo mismo en formato matemático, esto ***es una inecuación***:

5x + 10y <= 4800

Observar que 4800 son los minutos que tenemos en 80 hs semanales. Obviamente, la unidad de medida debe ser la misma a ambos lados de la inecuación.

Pero, detengamos aquí el análisis del enunciado. No nos ocuparemos ahora de resolverlo porque necesitamos aprender antes esta herramienta: justamente de eso se trata lo que sigue, así que ¡a seguir leyendo!

Veamos un ejemplo numérico:

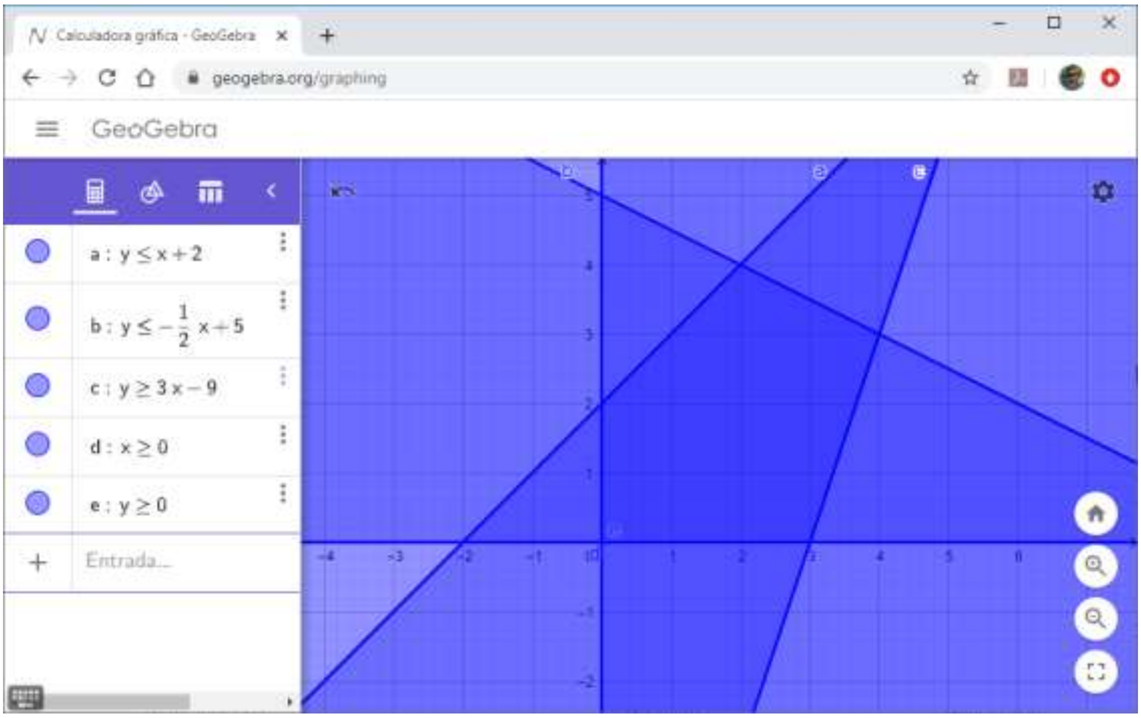
Tenemos que encontrar el valor máximo posible para la función objetivo:

$$\boldsymbol{z = \frac{2}{3}x + \frac{1}{2}y + 3}$$

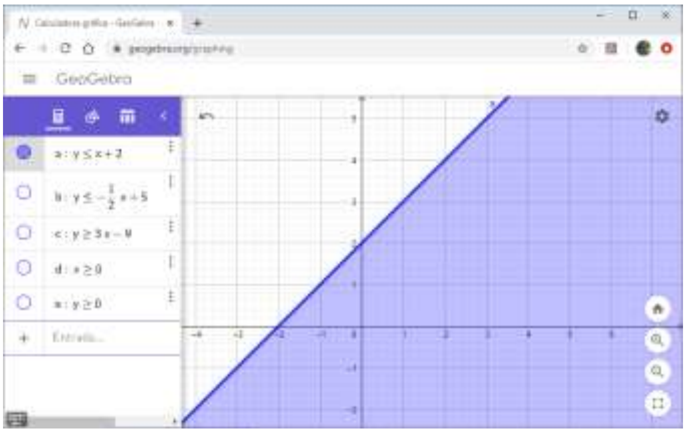
… considerando que dicho valor será el mayor de los valores posibles siempre que ***x*** e ***y*** cumplan las siguientes “restricciones”:

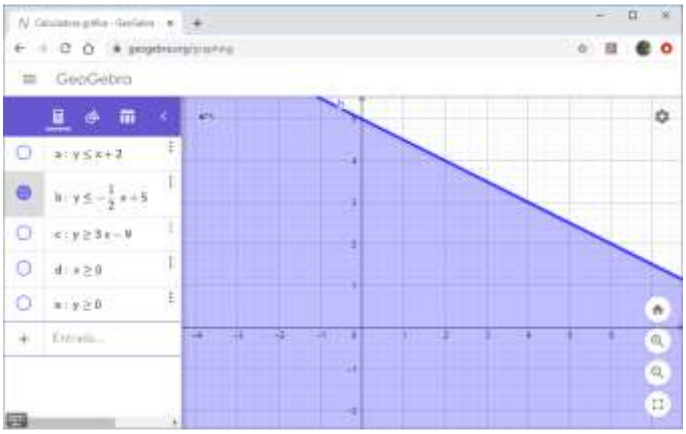
$$\begin{cases} y \leq x + 2 \\ y \leq -\dfrac{1}{2}x + 5 \\ y \geq 3x - 9 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

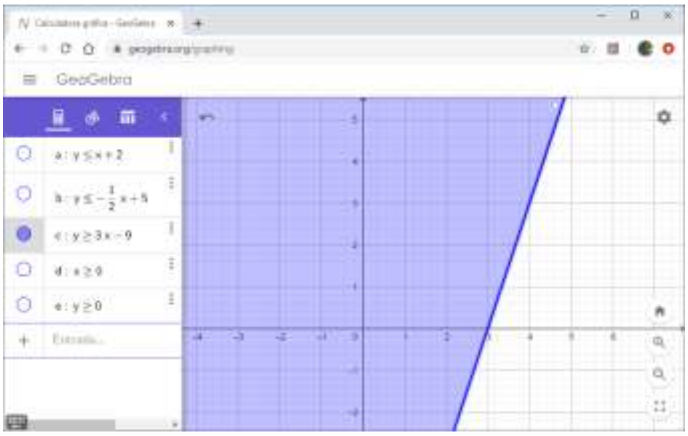
Las restricciones constituyen un Sistema de Inecuaciones. Si observamos su gráfica en GeoGebra tenemos:

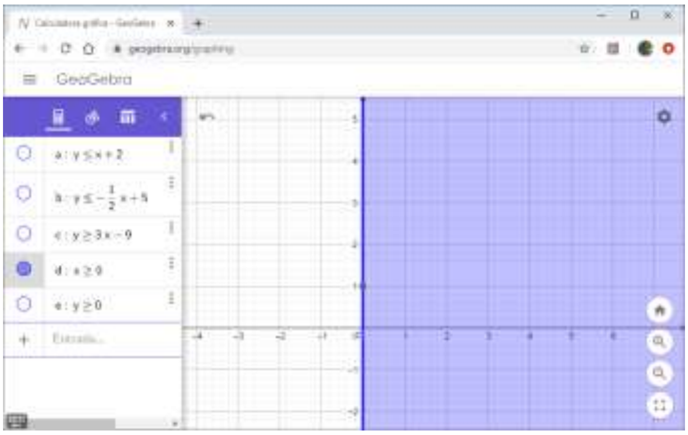


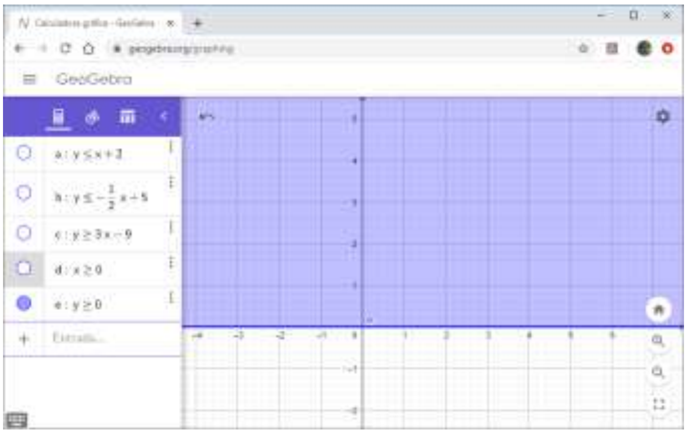
El Sistema define una "**Región Factible**", es decir, el área donde estarán los infinitos puntos que cumplen las 5 restricciones: esta región tiene forma de polígono irregular de 5 lados que resulta de superponer la gráfica de las 5 inecuaciones que lo componen:



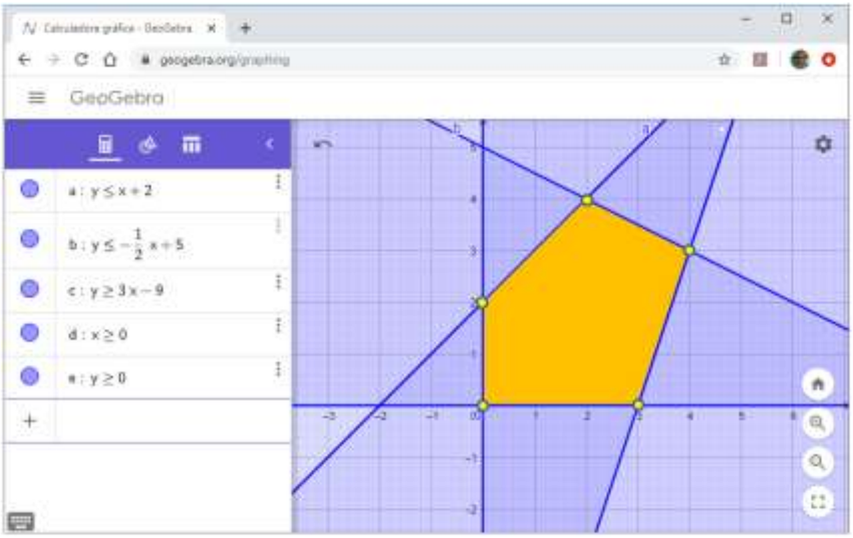








Superponiendo las 5 gráficas queda definida el área que antes mencionábamos como Región Factible para todas las posibles combinaciones de valores de x e y que cumplen las 5 restricciones definidas:



Comprendiendo la Función Objetivo…

Como mencionábamos al principio, nuestra función objetivo es

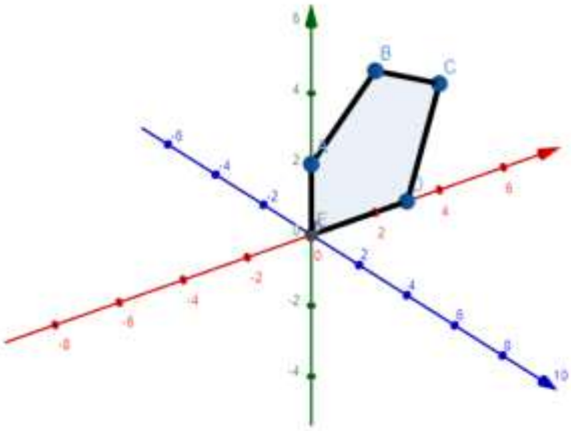
$$\boldsymbol{z = \frac{2}{3}x + \frac{1}{2}y + 3}$$

Esta es una “Función de dos variables”, es decir, que el valor de z depende a cada instante de lo que valgan x e y, ambas, no sólo una de ellas. Por tanto, no podemos representarla en el plano, sino en el espacio!

De este modo, la función objetivo tomará un valor para cada dupla de valores **(x ; y)**. Como ambas variables son de grado 1, la función también es lineal, y define un plano en el espacio.

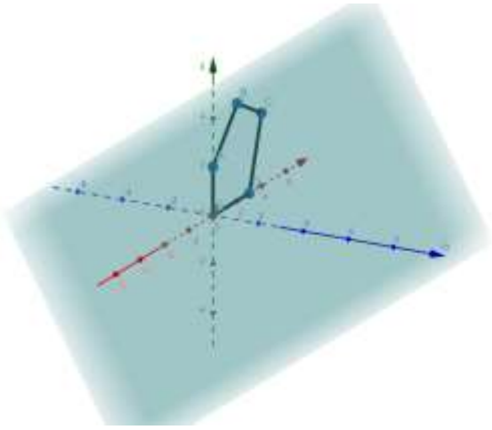
Como lo que estamos buscando es “maximizar” esa función, deberemos hallar el punto de la Región Factible del Sistema en el cual esta función alcanza su máximo valor.

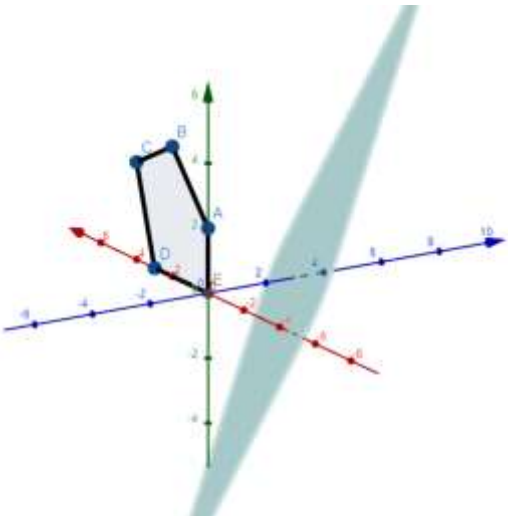
Dicho punto coincide siempre con alguno de los vértices del poliedro formado por el sistema de restricciones (que puede ser abierto o cerrado). También puede ocurrir, según sea la inclinación del plano correspondiente a la función objetivo, que dicha función sea paralela a alguno de los vértices, o incluso a todo el plano que contiene el sistema de restricciones: pero claramente se trata de una situación muy particular en el primer caso, o directamente incompatible en el segundo. Así que para visualizar esto podemos observar la gráfica tridimensional de la Región de valores factibles para ***x*** e ***y***, y el plano de la función objetivo. Construiremos esta gráfica por partes…



Aquí puede verse el área de factibilidad del sistema con el eje ***x*** en rojo, el eje ***y*** en verde (vertical), y el eje ***z*** en azul: aún no lo usamos, pero será el que contendrá el plano con los valores de la función objetivo.

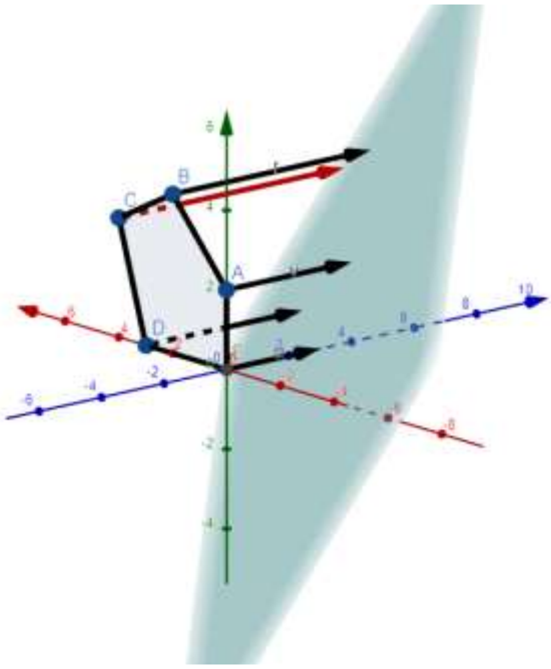
Si agregamos a la gráfica la función objetivo, veremos el plano que decíamos… Aquí va visto desde diferentes ángulos:





Aquí está como “visto de atrás” para que se note la distancia entre cada punto y dicho plano.

Podríamos imaginar esa distancia como las patas de una mesa que tiene su tabla “inclinada”…



En definitiva, el máximo de la función objetivo estará en el punto donde esa “pata” se haga más larga! Y obviamente el mínimo, donde esté la más corta!

Para comprender mejor la gráfica ponemos a continuación un video con la animación en GeoGebra.

((Insertar video (#7): Programación Lineal: Gráfica de un sistema de inecuaciones y la función objetivo))

https://youtu.be/ZyBxQE8Ikwk

¿Y cómo resolvemos el problema? ¿Cómo hallamos el máximo o mínimo que estamos buscando?

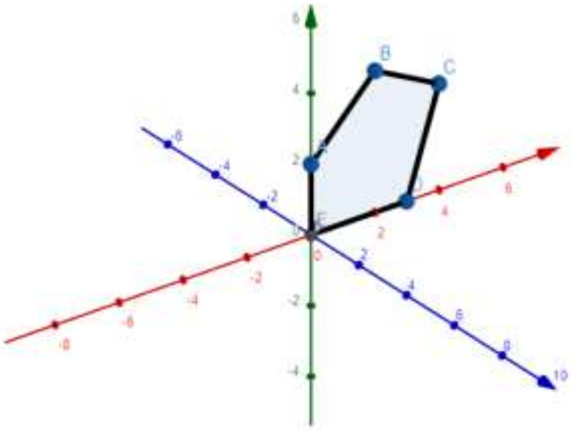
La respuesta quizá resulte obvia: basta con “evaluar” la función objetivo para cada uno de los vértices de la zona definida como Región de Factibilidad, buscando aquel en el que el resultado sea el más grande! *O el más chico si lo que buscamos es un mínimo…*

Entonces el problema será encontrar cada uno de esos puntos!

Cada uno de esos puntos es el corte o intersección de dos de las rectas de las restricciones: deberemos “resolver” como si de un sistema de ecuaciones se tratara esas dos rectas para encontrar el punto en que se cortan, y luego evaluar la función objetivo para dicho punto.

Por ejemplo:

Dada la gráfica del ejemplo que venimos analizando



El punto señalado como B se corresponde con la intersección de las dos primeras rectas de las restricciones:

$$\begin{cases} y \leq x + 2 \\ y \leq -\dfrac{1}{2}x + 5 \\ y \geq 3x - 9 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Para encontrarlo, cambiamos la relación por una de igualdad y lo resolvemos como un sistema:

$$\begin{cases} y = x + 2 \\ y = -\dfrac{1}{2}x + 5 \end{cases}$$

Utilizando las herramientas que ya conocemos, encontraremos que estas dos rectas se cortan en (**x=2** ; **y=4**).

Entonces evaluamos la función objetivo para ese punto:

$$\boldsymbol{z = \frac{2}{3}x + \frac{1}{2}y + 3}$$

Reemplazando las variables por sus valores para ese punto:

$$\boldsymbol{z = \frac{2}{3}2 + \frac{1}{2}4 + 3}$$

$$\boldsymbol{z = \frac{8}{3} + \frac{4}{2} + 3 = 6,33 \ldots}$$

Cotejamos ese valor con el de cada uno de los puntos. Por ejemplo, para el punto indicado como C tenemos la intersección de la segunda y la tercera: convertidas en ecuaciones para resolverlo…

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + 5 \\ y = 3x - 9 \end{cases}$$

La solución de este sistema está en (**x=4** ; **y=3**).

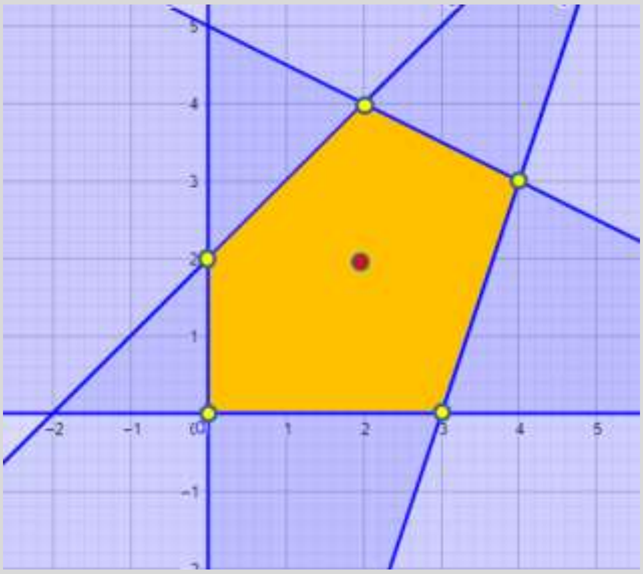
Entonces evaluamos la función objetivo para ese punto:

$$\boldsymbol{z = \frac{2}{3}.x + \frac{1}{2}.y + 3 = \frac{2}{3}.4 + \frac{1}{2}.3 + 3 = 7,166\ldots}$$

Evidentemente, este es un punto donde la Función a Maximizar resulta mayor que en el punto anterior! **Eureka!!**

Tip de utilidad práctica!! También podemos resolver este mismo problema siguiendo el siguiente algoritmo:

1. Elegimos un punto cualquiera, en el medio del área de la Región de Factibilidad de **x** e **y**. Por ejemplo, el punto (2 ; 2)



2. Evaluamos la función objetivo para dicho punto:

$$z = \frac{2}{3}x + \frac{1}{2}y + 3$$

Reemplazando las variables por los valores correspondientes del punto elegido:

$$z = \frac{2}{3}.2 + \frac{1}{2}.2 + 3 = \frac{4}{3} + 1 + 3 = \frac{16}{3} = 5,33\ldots$$

3. Trazamos todos los puntos de la función objetivo en los que tiene ese resultado: esta es una nueva recta, en 2D, que podemos construir forzando el valor de z al resultado obtenido. De este modo, se convierte en una función lineal sobre el mismo plano:

$$z = \frac{2}{3}x + \frac{1}{2}y + 3$$

Reemplazando **z** por 5,33…

$$5{,}33 = \frac{2}{3}x + \frac{1}{2}y + 3$$

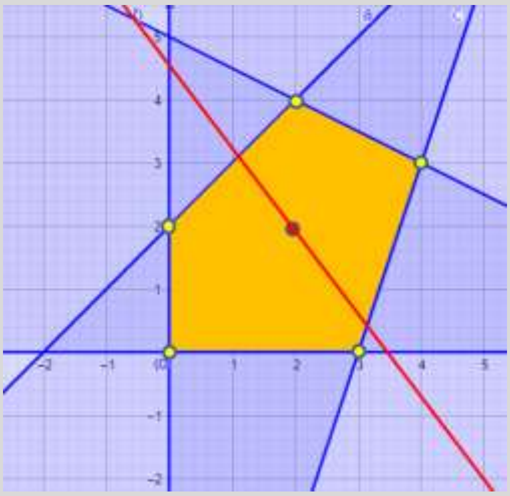
Despejamos la variable **y**:

$$-\frac{2}{3}x + 5{,}33 - 3 = \frac{1}{2}y$$

$$y = 2.\left(-\frac{2}{3}x + 5{,}33 - 3\right)$$

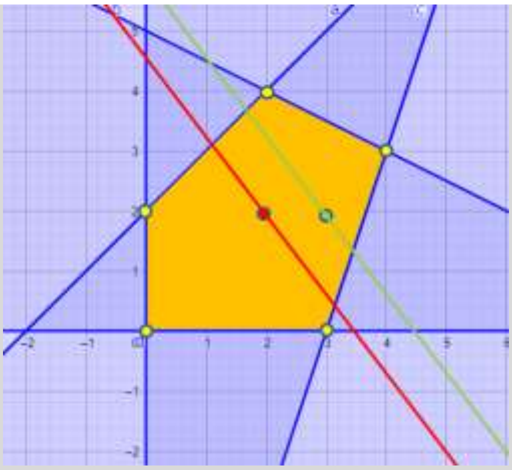
$$y = -\frac{4}{3}x + 10{,}66 - 6$$

$$y = -1{,}33\,x + 4{,}66$$



4. Elegimos otro punto, a un lado u otro de la recta recién trazada; y evaluamos para ese nuevo punto la Función Objetivo.
   a. Si es mayor que para el punto anterior, entonces avanzaremos en esa dirección con rectas paralelas a la trazada, y el máximo estará en el vértice que toque por último dicha recta
   b. Si por el contrario el nuevo punto arroja un valor menor que el anterior, significa que el máximo estará hacia el otro lado: también desplazaremos

imaginariamente esa recta en el sentido opuesto hasta tocar el último vértice en su recorrido.



Para el nuevo punto (**3** ; **2**) la función objetivo nos da como resultado **6**. Es decir que el máximo de la función estará hacia la derecha, en el último punto en que la recta toque el perímetro del área de la Región de Factibilidad.

Evidentemente, si buscamos un mínimo en vez de un máximo procederemos de manera opuesta.

5. Finalmente nos enteramos de cuál es ese punto:

El valor de la Función Objetivo para el punto hallado (**x=4** ; **y=3**) será:

$$z = \frac{2}{3}x + \frac{1}{2}y + 3$$

Reemplazando las variables por los valores correspondientes del punto elegido:

$$z = \frac{2}{3}.\mathbf{4} + \frac{1}{2}.\mathbf{3} + 3 = \frac{8}{3} + \frac{3}{2} + 3 = \frac{16+9}{6} + 3 = \frac{25}{6} + 3 = \mathbf{7,166} \dots$$

En resumen, estos son los pasos que debemos dar, una vez construido el gráfico del sistema:

Encuentramos el valor de ***x*** e ***y*** para los puntos que representan cada vértice, y valuamos la función objetivo en dicho punto para conocer el valor de ***z***. Podríamos construir, para este ejemplo, una tabla como la siguiente:

Vértice A: (0 , 2) ----------> z = 4

Vértice B: (2 , 4) ----------> z = 6,33...

Vértice C: (4 , 3) ----------> z = 7,166...

Vértice D: (3 , 0) ----------> z = 5

Vértice E: (0 , 0) ----------> z = 0

Finalmente, comparando los valores de ***z***, vemos que logramos el valor máximo de la función objetivo en el punto (4 ; 3).

Si el problema hubiera sido minimizar, la repuesta habría sido la de menor valor para ***z***, en este caso, el punto (0 ; 0).

Un caso de ejemplo más…

En el siguiente video ((Insertar video (#7b): Programación Lineal - Modelo y Calculo Asistido por Computadora : https://youtu.be/9jtnJQLyg24)) vemos el desarrollo completo de un caso más: se trata del Ejercicio por Resolver de esta Situación Profesional, por lo que es recomendable abordarlo solo – al menos inicialmente – y luego ver el video para comprobar resultados o solucionar cualquier aspecto que le haya generado dudas.

En este video, empezamos por el abordaje del problema, su comprensión, modelización, ensayo de escenarios posibles; para terminar formalizando el sistema de inecuaciones y la función objetivo a minimizar, asistiéndonos para ello con Excel y GeoGebra. ***¡Es muy importante ver completamente y con detenimiento este video, siguiéndolo paso a paso y realizando en paralelo la construcción de la solución con las herramientas allí indicadas!***

Resolución mediante herramientas de software

Existen muchas herramientas de software que nos permiten resolver un sistema de programación lineal de manera automática, mediante funciones específicamente diseñadas para ello. También hay, en el ámbito de los lenguajes de programación, paquetes o bibliotecas de funciones que podemos importar y utilizar en nuestro código, sin tener que ver por dentro la estructura del algoritmo utilizado: simplemente pasamos las variables y la herramienta se encarga de realizar los cálculos e informarnos la solución.

Nombraremos en este apartado dos ejemplos:

1. Python: función ***linprog*** de la biblioteca ***scipy.optimize***
   Como vimos en el video de ejemplo anterior, escribir un programa en Python para resolver un sistema de programación lineal es muy simple. Sólo debemos seguir los siguientes pasos:
   a. Importar la función ***linprog*** de la biblioteca ***scipy.optimize***
   b. "Normalizar" (*) todas las expresiones de acuerdo al formato requerido por la función ***linprog***
   c. Definir los coeficientes para la función objetivo
   d. Definir una matriz con los coeficientes del sistema de restricciones
   e. Definir los términos independientes de cada inecuación del sistema de restricciones
   f. Invocar a la función ***linprog*** pasándole como parámetros todos los datos definidos anteriormente, y ¡listo! Obtendremos el resultado: los valores óptimos de cada variable de decisión, y el valor resultante para la función objetivo.

   (*) Cuando decimos "Normalizar" todas las expresiones, debemos tener en cuenta que la función ***linprog*** requiere que los datos sean ingresados de una manera particular. Pasar dichos valores de otro modo, producirá resultados incorrectos. Así que para ajustarnos a la estructura que la función requiere, debemos seguir las siguientes instrucciones:

   - No es necesario enumerar las variables de decisión, ni asignarles nombre de variable: simplemente, habrá tantas variables como posiciones tengan los datos que se ingresan.

   - La función objetivo a optimizar se describe mediante los coeficientes de sus variables. No tiene ninguna incidencia en el modelo si hubiera un término independiente en la misma. **Es <u>muy importante</u> tener en cuenta que esta función linprog optimiza siempre buscando el "mínimo" para la función objetivo!** Por lo tanto, si queremos encontrar un "máximo", deberemos cambiar el signo a todos los coeficientes: *para resumirlo en una expresión, el máximo valor posible para A (sea la expresión que fuere) es lo mismo que el mínimo valor posible para –A.*

   - *Las restricciones se cargan como una combinación de una matriz de coeficientes más una lista ordenada de sus términos independientes, siempre con la forma genérica:*

     c1.x1 + c2.x2 + … + cn.xn <= ti

     Donde:
     c1 .. cn *= coeficientes para las variables de decisión x1 .. xn respectivamente.*
     ti *= término independiente*

     Entonces, por ejemplo, si una restricción dice:

     2x + 3y – 5z <= 15

     Deberemos cargar en la matriz una fila que diga: **[2,3,-5]** que son los tres coeficientes, y un elemento en la lista de ti que contenga el **[15]**, en la misma posición.
     Pero puede que la expresión de la restricción no esté normalizada, y por ejemplo sea la siguiente:

     3y+12>=2x

Entonces deberemos cambiar los términos de lado de modo que queden todas las variables de decisión a la izquierda -**ordenadas**-, y el **ti** a la derecha.
Quedaría así:

-2x+3y>=-12

Finalmente, el sistema exige que la relación de la inecuación sea siempre de "menor o igual que", de modo que para invertir el sentido de la relación, multiplicamos por (-1) ambos términos.
La versión final sería la siguiente:

2x-3y<=12

Ahora sí, podremos agregar esta restricción a la matriz!

Importante!! Si esta restricción fuera simultánea con la expresada anteriormente, observemos que una tiene 3 variables y la otra sólo 2: en tal caso, deberemos completar con un 0 (cero) los coeficientes que falten.

Por ejemplo, para las dos restricciones aquí descriptas, la matriz de coeficientes tendría esta estructura:

M = [[2,3,-5],
[2,-3,0]]

Por su parte, los términos independientes serían los siguientes:

ti = [15,12]

- *Las restricciones de No Negatividad, si las hubiere, pueden bien cargarse como cualquier otra restricción; o en su defecto, considerar los "rangos de valores posibles" para cada variable de decisión en el parámetro correspondiente, tal como se observó en el ejemplo del video.*

Programa de ejemplo: en este archivo ((Adjuntar Archivo Fuente Python: Prog Lineal (Optimización).py)) encontrará el código fuente en Python de un programa de ejemplo, con los comentarios necesarios para darle legibilidad al código.

2. Herramienta ***Solver*** de ***Microsoft Excel***
   Para usar esta herramienta, debemos instalar el complemento correspondiente en Excel.
   Una vez disponible, simplemente debemos seguir los siguientes pasos:
   a. Distribuir los elementos del problema en una hoja de Excel
      i. Variables de decisión. En todo el tratamiento que hemos dado a este tema siempre hemos considerado sólo dos, por cuestiones de practicidad y para poder utilizar el método gráfico, pero en realidad pueden ser mucho más de dos variables! Simplemente debemos asignar a cada variable una celda.

ii. Función objetivo. En otra celda construiremos nuestra función objetivo, apuntando a las celdas que contienen las variables de decisión.
iii. Restricciones. Debemos construir una tabla con la parte izquierda y la parte derecha de cada inecuación, dejando en claro cuál es la relación entre ellas (< ; ≤ ; > ; ≥). Luego, desde Solver, registraremos cada inecuación apuntando a cada miembro de la misma.

b. Abrir la herramienta señalando cada uno de dichos elementos
c. Elegimos el tipo de algoritmo a implementar (todos funcionan muy bien y rápido) y algunos otros parámetros, como por ejemplo, la restricción de no negatividad sobre las variables.
d. Listo!! Hacemos clic en el botón "Resolver" y tendremos la respuesta!

En este video ((Insertar referencia a la URL: https://www.youtube.com/watch?v=XTX_5Kwg2DY)) y en muchos otros podrá ver un ejemplo paso a paso.

AUTOEVALUACIÓN SP3-H2

1. En un sistema de programación lineal propuesto para una compañía proveedora de Internet se desea averiguar la cantidad óptima de Clientes Corporativos y Particulares que deben gestionarse, teniendo como restricciones la capacidad de servicio con que se cuenta. Hecho ya el análisis, sabemos que las dos variables independientes que participan del problema son:
   x = Cantidad de clientes corporativos
   y = Cantidad de clientas particulares
   Las restricciones que pesan sobre las mismas son las siguientes:
   - No puede haber menos de 1200 clientes particulares
   - No puede haber menos de 100 clientes corporativos
   - La cantidad de clientes particulares debe ser al menos el doble que la cantidad de clientes corporativos
   - Los clientes particulares tiene un consumo promedio de 10 Mbps (megabits por segundo) y los corporativos 25 Mbps. La máxima capacidad de servicio total de la empresa es de 35 Gbps (gibabits por segundo*). La restricción entonces es que la suma de los consumos teóricos promedio de ambos grupos de clientes no puede exceder la capacidad total de servicio.
     (*) Tenga en cuenta que 1 Gbps es igual a 1024 Mbps.

   Determine cuál de las siguientes es un conjunto de restricciones válido y completo para este sistema:

a. $\begin{cases} x \leq 1200 \\ y \leq 100 \\ x \leq 2y \\ 10x + 25y \leq 35840 \end{cases}$

b. $\begin{cases} x \geq 1200 \\ y \geq 100 \\ y \geq 2x \\ 10x + 25y \geq 35840 \end{cases}$

c. $\begin{cases} x \geq 1200 \\ y \geq 100 \\ x \geq 2y \\ 10x + 25y \leq 35840 \end{cases}$ ((<<< Respuesta correcta!))

d. $\begin{cases} x \geq 1200 \\ y \geq 100 \\ y \geq 2x \\ 10x + 25y \leq 35840 \end{cases}$

2. Para el mismo caso anterior, se establece que la ganancia media de la empresa por cada cliente particular es de u$s 37, mientras que cada cliente corporativo le da una rentabilidad media de u$s 215. Si la intención del sistema es maximizar la ganancia de la compañía: ¿Cuál de las siguientes es la función objetivo definida?

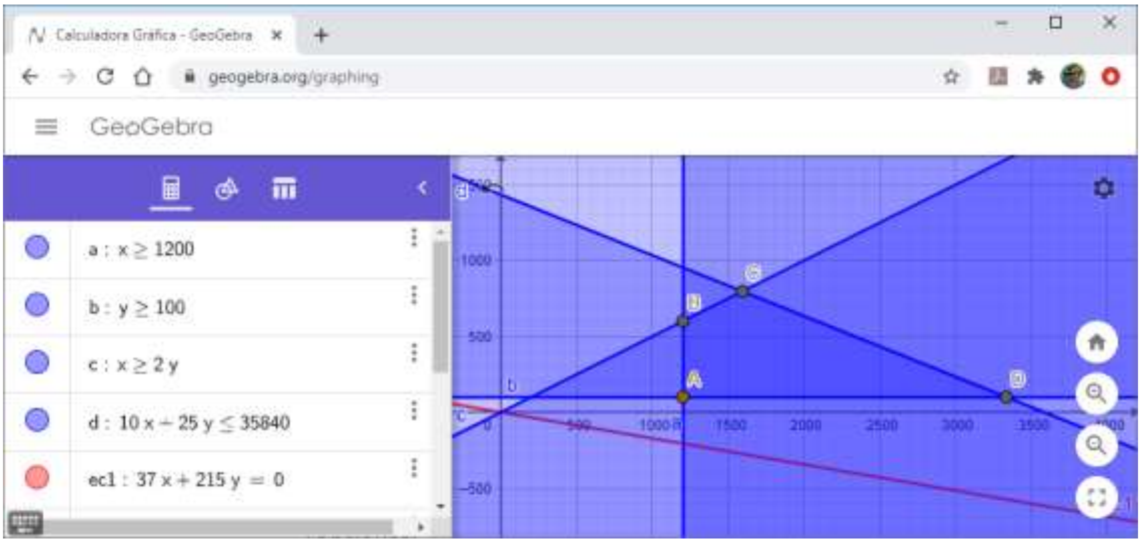
   a. Z = 37 x + 215 y ((<<< Respuesta correcta!))

   b. Z > 37 x + 215 y

   c. Z = 37 y + 215 x

   d. Z = (37 x) * (215 y)

3. Considerando el caso modelado en la siguiente hoja de GeoGebra



Y teniendo en cuenta que la función objetivo ha sido establecida con su término independiente nulo, el cual, obviamente, deberá ajustarse.

Responda:

a. ¿Cuál es la coordenada o valores de ***x*** e ***y*** (es decir, qué vértice de la gráfica: A, B, C ó D) en la que la función objetivo encuentra su **valor máximo**?
   - A = (1200 ; 100)
   - B = (1200 ; 600)
   - C = (1593 ; 796) ((<<< Respuesta correcta!))
   - D = (3334 ; 100)

b. ¿Cuál es el valor aproximado de la función objetivo en el punto C?
   - 230.000 ((<<< Respuesta correcta!))
   - 23.000
   - 1.593
   - 796

c. ¿Cuál es la coordenada o valores de ***x*** e ***y*** (es decir, qué vértice de la gráfica: A, B, C ó D) en la que la función objetivo encuentra su **valor mínimo**?
   - A = (1200 ; 100) ((<<< Respuesta correcta!))
   - B = (1200 ; 600)
   - C = (1593 ; 796)
   - D = (3334 ; 100)

d. Si la variable x = 1.800 y la variable y = 1.000 : ¿se encuentra dicho punto dentro del área de factibilidad de este sistema?
   - Sí
   - No ((<<< Respuesta correcta))

e. ¿Cuál será el valor medio aproximado de la función objetivo en este sistema? Es decir, el valor que se encuentra a mitad de camino entre el máximo y el mínimo.

- 143.000
- 145.000
- 148.000 ((<<< Respuesta correcta))
- 152.000

EJERCICIO RESUELTO

Resumimos los datos del problema a continuación:

Atención: *en los datos del problema hay tiempos expresados en horas, y otros en minutos. Es muy importante uniformar esas unidades para poder plantear el sistema.*

- **Variables:**
  - x = Cantidad de J35 a producir
  - y = Cantidad de TX30 a producir

- **Datos:**
  - Procesos y sus límites en "minutos"
    - Prueba de componentes: **P** (Max: 60 hs * 60 min/hs = **3600 minutos** semanales)
    - Armado: **A** (Max: 80 hs * 60 min/hs = **4800 minutos** semanales)
    - Empaquetado: **E** (Max: 33 hs * 60 min/hs = **1980 minutos** semanales)

  - Tiempos de producción por unidad (en "minutos")
    - 1 unidad J35 requiere: **12**P + **5**A + **3**E
    - 1 unidad TX30 requiere: **3**P + **10**A + **4**E

  - Costo / Precio de Venta / Ganancia por producto:
    - J35: Costo=u$s 120 / Precio de Venta=u$s 230 / Ganancia=u$s 110
    - TX30: Costo=u$s 90 / Precio de Venta=u$s 390 / Ganancia=u$s 300

- **Restricciones:**
  - Tiempos disponibles para producción (Ojo, en minutos!)
    - Prueba de componentes: **12**x **+ 3**y <= **3600**
    - Armado: **5**x **+ 10**y <= **4800**
    - Empaquetado: **3**x **+ 4**y <= **1980**

  - Cantidades mínimas y máximas a fabricar:
    - **x + y** <= **600**
    - **x** >= **100**

- Restricciones de No Negatividad:
    - **x** >= **0**
    - **y** >= **0**

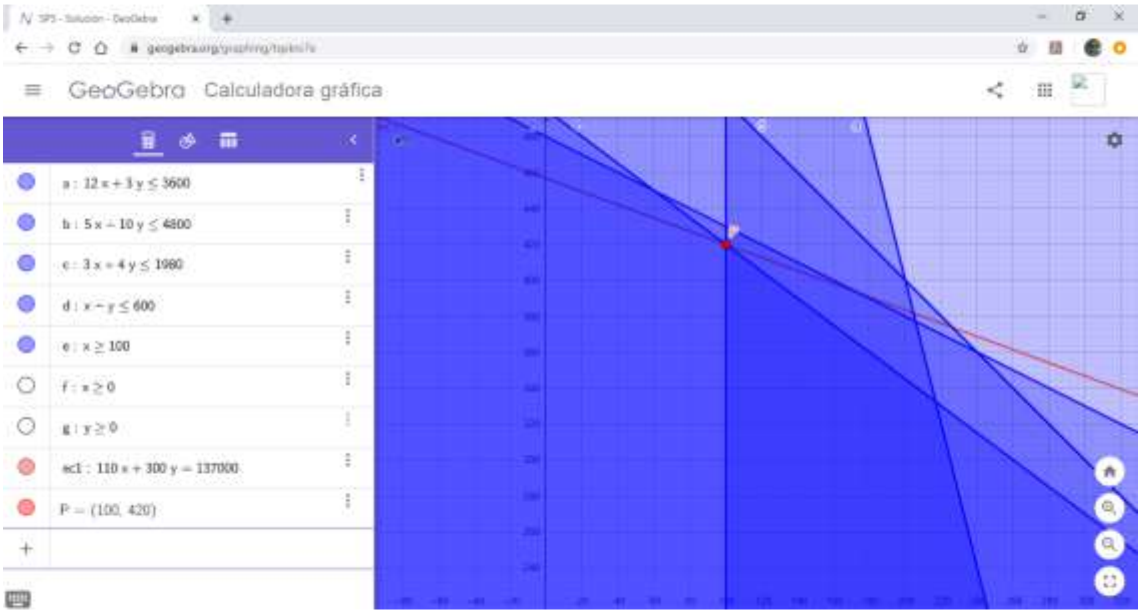
- **Función Objetivo (a maximizar):**
    - **Z = 110x + 300y**

Modelado del Sistema

Recomiendo realizar la gráfica valiéndose de una herramienta como GeoGebra, o en su defecto, utilizando una hoja milimetrada grande. En este último caso, le conviene calcular la ordenada al origen y la raíz de cada una de las inecuaciones (convertidas en "ecuaciones") para saber qué escala aplica al gráfico para que le quepa en la hoja.

Al graficar todas las inecuaciones del sistema para determinar el área de factibilidad (espacio en el que son simultáneamente ciertas todas las restricciones) obtenemos una figura poligonal. Como lo que buscamos es encontrar el "máximo" de la función objetivo dentro de dicho polígono, sabemos que dicho máximo estará en uno de los vértices del mismo.

Podemos trazar la función objetivo igualándola a cero, y buscar sobre sus paralelas cuál será el vértice de mayor valor para dicha función objetivo: así, veremos que se da en el punto P (100;420) señalado en el siguiente gráfico, donde la función objetivo (ganancia) ha sido trazada en rojo:



Entonces podemos responder la primera pregunta que nos formula esta situación:

a. Calcular un sistema en el que participen todas las variables nombradas y nos permita determinar <u>cuál es la cantidad ideal de J35 y cuál la de TX30 a fabricar</u> para ***maximizar las ganancias*** *de la fábrica, respetando todas las restricciones indicadas.*

El punto óptimo de producción es aquel en el que la cantidad de J35 y de TX30 producidos, **respetando todas las restricciones establecidas**, nos arroja el mayor beneficio económico para la función objetivo. Será pues: **100** unidades **J35 y 420** unidades **TX30**.

Resuelto esto, lo que sigue es muy fácil:

b. ¿A cuánto asciende la ganancia máxima esperable en este sistema?

El resultado económico producido será el resultado de multiplicar las 100 unidades de J35 y 420 unidades de TX30 por sus respectivas ganancias individuales, es decir:
Ganancia = (100 J35 . u$s 110) + (420 TX30 . u$s 300) = **u$s 137.000**

EJERCICIOS POR RESOLVER

1. En un laboratorio bioquímico disponen de dos contadores de bacterias.
   El contador C1 puede ser manipulado por un estudiante que gana $ 400 por hora. En promedio es capaz de contar 6 muestras en una hora.
   El contador C2 es más rápido, pero también más sofisticado. Sólo una persona bien preparada pero que gana $ 1000 por hora puede manipularlo. Con la misma precisión que C1 el contador C2 permite contar 10 muestras en una hora.
   Al laboratorio se le dan 1000 muestras para que se cuenten en un periodo que no exceda las 80 horas.
   Considerando todo lo anterior, y desarrollando el modelo correspondiente, deberemos responder las siguientes preguntas:

   a. ¿Cuántas horas deben usar cada contador para realizar la tarea con un costo mínimo?

   b. ¿Cuál es el dicho costo mínimo?

2. Una refinería tiene dos fuentes de petróleo crudo: una “liviana” que cuesta u$s 35 por barril, y otra “pesada” con un costo de u$s 30 por idéntica unidad. Por cada barril, la refinería produce sólo cuatro productos, en las sucesivas etapas de destilería, quedando al final un remanente considerado desperdicio.

   En la siguiente tabla se resume, para cada tipo de barril, las cantidades que pueden obtenerse de cada producto:

	Gasolina Normal	Fueloil (calefacción)	Combustible para Aviones	Gas licuado
Barril “liviano”	0.15	0.10	0.15	0.35
Barril “pesado”	0.15	0.20	0.10	0.10

   La refinería debe cumplir un contrato en el que se le ha requerido la producción de:

- ✓ 900 barriles de Gasolina Normal
- ✓ 800 barriles de Fueloil
- ✓ 800 barriles de Gas Licuado

Cabe aclarar que una vez que un barril es destilado, el proceso del mismo se completa hasta terminar: esto genera los subproductos indicados en la tabla, y no puede "guardarse" nada para seguir procesándolo más tarde.

La refinería necesita respuestas para las siguientes preguntas:

a. ¿Cuántos barriles de cada tipo comprar para poder dar cumplimiento a su contrato?

b. Al cliente sólo le interesa comprar 3 de los subproductos obtenidos de la destilación, y en las cantidades indicadas. Sin embargo, está dispuesto a asumir el 95% del costo de los barriles necesarios! En otras palabras: todo el Combustible para Aviones que se obtenga de la destilación tendrá prácticamente "costo hundido", es decir, será un producto que la refinería podrá vender a otros clientes prácticamente sin costo… De todos modos, se necesita conocer con exactitud cuánto sobrará de cada producto luego de la destilación, y cuál es el costo real de todo ese excedente, considerando que, como se ha indicado, el cliente absorberá el 95% del costo de los barriles necesarios para su pedido.

c. Deberán preverse el procesamiento ecológico de los desechos generados luego de terminada la producción. A los efectos de poder contratar a la empresa que se ocupará de dicha tarea: indicar cuántos barriles de "desecho liviano" y cuántos de "desecho pesado" se generarán.

EVALUACIÓN DE PASO

Una empresa desarrolladora de software ha implementado un sistema de gestión basado en metodologías ágiles, y necesita optimizar la cantidad de proyectos que desarrolla en paralelo en función de los tiempos de producción que cada tipo de proyecto requiere y los recursos de los que dispone.

Básicamente la empresa desarrolla dos tipos de proyectos (siempre customizados a la medida de las necesidades del cliente):

- Sistemas de Puntos de Venta (lo llamaremos P1)
- Terminales de Autoservicio (lo llamaremos P2)

Las etapas de producción de cada Proyecto son las mismas: Relevamiento, Documentación e Implementación. No obstante ello, la cantidad de tiempo que cada tipo de proyecto requiere en cada una de esas etapas es diferente. Se describe a continuación:

- Cada P1 requiere 30 hs de **Relevamiento**, en tanto que cada P2 sólo precisa 10 hs para dicha tarea.
- La **Documentación** de cada proyecto lleva 10 hs.

- La **Implementación** de un proyecto P1 necesita 40 hs, en tanto que los P2 se implementan en 10 hs.

La fuerza laboral de la empresa está compuesta por trabajadores especializados en cada una de estas etapas, según la siguiente distribución:

- Los empleados encargados de **Relevamiento** son 8, y cada uno trabaja 100 hs mensuales.
- La empresa cuenta con 500 hs mensuales de personal dedicado a **Documentación**: son 5 empleados de 100 hs mensuales cada uno.
- La **Implementación** es una tarea altamente especializada y la realizan 4 empleados, con una carga horaria mensual de 200 hs cada uno.

Cada proyecto P1 le deja a la empresa una utilidad de u$s 1.600 en tanto que cada proyecto P2 le permite ganar u$s 1.200.

Analice el caso planteado y desarrolle un modelo de Programación Lineal que le permita responder las siguientes preguntas:

a. ¿Cuántos Proyecto P1 y cuántos P2 puede producir mensualmente la empresa para maximizar su ganancia?
    i. P1=20 ; P2=60
    ii. P1=10 ; P2=50
    iii. P1=10 ; P2=40 ((Respuesta correcta))
    iv. P1=10 ; P2=30
    v. P1=0 ; P2=80

b. ¿Cuál es la máxima ganancia posible?
    i. u$s 96.000
    ii. u$s 66.000
    iii. u$s 64.000 ((Respuesta correcta))
    iv. u$s 42.700
    v. u$s 32.000

c. Haciendo este análisis, se ha detectado que existe capacidad ociosa en un grupo de trabajadores!! ¿Cuántos empleados debería despedir?
    i. 2 Empleados de **Documentación**
    ii. 1 Empleado de **Documentación**
    iii. No hay que despedir a nadie: el sistema se encuentra en su punto óptimo.
    iv. 1 Empleado de **Implementación**
    v. 1 empleado de **Relevamiento** ((Respuesta correcta))

d. El directorio de la empresa analizó la situación y gracias al aporte de este modelo pudo detectar que puede tomar otro tipo de decisiones… En vez de despedir empleados, puede “ampliar” la capacidad de la mano de obra para encontrar un punto óptimo de relación entre cantidad de horas trabajadas mensualmente en cada una de las etapas! Para esto puede contratar más profesionales o ampliar la carga horaria de los que ya tiene.

¿Cuál sería la cantidad de horas mensuales requeridas en el proceso de **Implementación**?

i. 800
ii. 850
iii. 900
iv. 950 ((Respuesta correcta))
v. 1000

e. ¿Cuánto ganará la empresa habiendo ampliado las horas mensuales dedicadas a Implementación?

i. u$s 96.000
ii. u$s 66.000 ((Respuesta correcta))
iii. u$s 64.000
iv. u$s 42.700
v. u$s 32.000

SP4: MATRICES . TRANSFORMACIONES DE GAUSS Y SISTEMAS DE ECUACIONES GRANDES

En una fábrica se utilizan 5 máquinas diferentes en sus líneas de producción, con las cuales se fabrican 8 productos. Cada uno de los productos fabricados requiere del uso de las máquinas mencionadas, en diferente cantidad de tiempo por unidad producida.

La información de cuántas horas de trabajo requiere cada producto en cada máquina se presenta en la siguiente tabla:

Matriz A: Producto / HsMaq unitario

Prod/Maq	Hs.Maq#1	Hs.Maq#2	Hs.Maq#3	Hs.Maq#4	Hs.Maq#5
Prod#1	0,80	2,00	0,25	0,00	2,00
Prod#2	2,00	0,40	1,00	1,00	0,10
Prod#3	3,00	1,00	1,30	1,00	0,00
Prod#4	1,20	2,00	0,00	1,20	0,00
Prod#5	0,70	2,10	1,10	0,40	0,00
Prod#6	2,00	0,80	1,20	0,50	1,20
Prod#7	1,50	1,30	1,00	0,20	1,10
Prod#8	1,80	1,20	0,00	3,00	0,50

Como puede observar, para producir "una unidad" del Prod#1 se requieren 0,80 hs de trabajo en la máquina#1, más 2 hs de trabajo en la #2, un cuarto de hora en la #3, este producto no utiliza la máquina #4 (por eso dice 0,00 en la celda correspondiente), y por último se requieren 2 hs más en la máquina #5.

Además, esta empresa también cuenta con información respecto de cuántas unidades de cada producto han sido producidas en los últimos cinco meses. La información se resume en la siguiente tabla:

Matriz B: Productos / Mes

Prod/Mes	Mes#1	Mes#2	Mes#3	Mes#4	Mes#5
Prod#1	12,00	20,00	8,00	7,00	11,00
Prod#2	25,00	12,00	13,00	18,00	14,00
Prod#3	0,00	25,00	20,00	32,00	11,00
Prod#4	12,00	25,00	23,00	14,00	8,00
Prod#5	8,00	12,00	12,00	12,00	21,00
Prod#6	5,00	15,00	11,00	14,00	20,00
Prod#7	7,00	8,00	17,00	11,00	15,00
Prod#8	14,00	10,00	21,00	15,00	19,00

Aquí, como puede observarse, para el Producto #1 tenemos que en el primer mes en estudio se produjeron 12 unidades, el segundo mes fueron 20, el tercero sólo 8, y así sucesivamente. Vea que no necesariamente se producen todos los productos, en todos los meses: por caso, el primer mes no se produjo ninguna unidad del Producto#3 (por eso dice 0,00 en la celda correspondiente).

Finalmente, para completar el cuadro de información disponible, todas las máquinas están conectadas a un circuito eléctrico independiente, lo que permite conocer el Costo Eléctrico mensual "conjunto" de la Fábrica, pero NO el consumo individual de cada máquina. Los datos son los siguientes:

Mes	Costo Eléct.
Mes#1	$ 100.373
Mes#2	$ 154.678
Mes#3	$ 154.755
Mes#4	$ 148.490
Mes#5	$ 148.258

Bien, hasta aquí los datos que tenemos. Están todos cargados y disponibles de manera electrónica, y pueden procesarse de manera "matricial".

Lo que nos solicitan es poder averiguar algunas informaciones que surgen de esos datos, valiéndonos de un recurso tan dúctil como la Matemática de Matrices! Los informes requeridos son los siguientes:

a. ¿Cuántas horas máquina se requieren para producir cada producto?
La información deberá proporcionarse en una Tabla que tenga sólo dos columnas: el identificador de cada máquina, y el tiempo total de uso de máquinas (sumando los tiempos parciales en cada máquina)

b. ¿Cuántos productos se produjeron por mes?
La información deberá proporcionarse en una Tabla que tenga sólo dos columnas: el identificador de cada mes, y la cantidad total de productos fabricados en él (sumando las cantidades parciales de cada producto)

c. ¿Cuántas horas de uso efectivo tuvo cada máquina, en cada mes?
La información deberá proporcionarse en una Tabla como la que sigue, con todas las celdas completas:

Mes	Hs.Maq#1	Hs.Maq#2	Hs.Maq#3	Hs.Maq#4	Hs.Maq#5
Mes#1	125,30	???	???	???	???
Mes#2	???	???	???	???	???
Mes#3	???	???	???	???	???
Mes#4	???	149,90	???	???	???
Mes#5	???	???	???	???	???

d. Sabemos cuál fue el consumo eléctrico total de cada mes, pero no está discriminado por máquina… Aunque sí sabemos, del cuadro anterior, cuál fue la cantidad de horas de uso por mes de cada máquina! Entonces podemos responder a la última y más importante de las consultas: ¿Cuál es el "Costo por hora de funcionamiento" de cada máquina?
Para resolver esta cuestión, evidentemente podemos plantear un Sistema de 5 Ecuaciones con 5 incógnitas, uniendo a la información anterior la columna de consumo eléctrico mensual. Nuestros "datos" pueden verse en la siguiente tabla (asumiendo que todas las celdas están completas):

Mes	Hs.Maq#1	Hs.Maq#2	Hs.Maq#3	Hs.Maq#4	Hs.Maq#5	Costo Eléct.
Mes#1	125,30	???	???	???	???	$ 100.373
Mes#2	???	???	???	???	???	$ 154.678
Mes#3	???	???	???	???	???	$ 154.755
Mes#4	???	149,90	???	???	???	$ 148.490
Mes#5	???	???	???	???	???	$ 148.258

Aquí, puede observarse que las 125,30 hs que trabajó la máquina #1 en el primer mes, más las ??? horas que trabajó la Maq#2 (recuerde que en el punto anterior habremos averiguado ese dato!), más las horas de trabajo de la Maq#3 para el mismo mes, y las de la #4 y la #5, totalizan $ 100.373. Y del mismo modo para los restantes meses… Entonces, si consideramos el "Costo por Hora" de cada máquina como una variable del sistema (que llamaremos para simplificar la nomenclatura: v, w, x, y, z), y los datos de estas celdas como sus respectivos coeficientes, y la columna de costo eléctrico como el término independiente, el Sistema queda construido!

Pues bien, ¿quién se anima a resolverlo mediante un algoritmo de **Sustitución**? ¿O será más conveniente usar uno de **Reducción**? ¿O **Igualación**?... O tendremos algún valiente capaz de graficar en 5 dimensiones y ver dónde se cortan estas 5 funciones lineales??!!

Evidentemente, los métodos anteriores son muy engorrosos, si no imposibles; sin mencionar la propensión a errores que conllevaría hacer semejante cantidad de cálculos manuales!!

Veremos, en las herramientas de esta Unidad, cómo resolver éstos y muchos otros problemas utilizando un recurso fundamental del Álgebra Lineal: las Matrices.

SP4H1: MATRICES. Componentes, Nomenclatura, Características, Tipos de Matrices.

En términos generales, una MATRIZ es básicamente un arreglo o distribución ordenada de datos en 2 o más dimensiones. Si son dos las dimensiones, las llamamos respectivamente Filas y Columnas.

Este es un recurso muy utilizado en Programación, pero también lo es en Matemática, donde se convierten en un recurso muy valioso ya que posibilitan realizar de manera muy simple determinadas operaciones e implementar ciertos algoritmos que permiten resolver problemas que de otro modo sería muy complejo!!

A los fines prácticos, utilizamos en matemática **matrices bidimensionales, que tienen un cierto tamaño, con una cantidad finita de filas y de columnas, en las cuales cada celda (intersección de una fila y columna en particular) contiene un número**.

Son ejemplos de matrices las siguientes:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & 12 \end{bmatrix}$$

Esta matriz se llama A y tiene 2 (dos) Filas de alto por 3 (tres) columnas de ancho.

Como observa, los números se escriben con distribución matricial, y van encerrados en corchetes que abarcan toda la estructura.

$$B = \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ -1 & 0 \\ -2 & 1 \\ 0 & 12 \end{bmatrix}$$

Esta otra matriz, llamada B, tiene 4 filas y 2 columnas.

$$C = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 4 & -1 & 8 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Y estas también son matrices. Las hemos llamado C y D. La primera tiene 1 sola fila y 5 columnas, en tanto que la segunda tiene 3 filas y solo 1 columna.

Orden

El "Tamaño" de una Matriz se denomina su Orden. Para los casos anteriores, se dice que la matriz **A** es de orden **2x3**, y se lee "***dos por tres***". De igual modo, la matriz **B** ejemplificada es de **4x2** ("***cuatro por dos***") en tanto que la matriz **C** es de **1x5** y la **D** es de **3x1**.

Evidentemente el orden habla de ambas dimensiones, nombrando primero la cantidad de filas y luego la cantidad de columnas (*siempre en el mundo de las matrices, primero van filas, y luego columnas*), y la cantidad total de datos que contiene es el producto de ambas dimensiones; en este caso: 2 x 3 = 6 datos

Tamaño mínimo y máximo posible de una matriz

La matriz más pequeña es aquella que sólo tiene un elemento: sólo una fila y una columna, es decir, sólo un dato.

Las matrices pueden ser cuadradas o Rectangulares, según tengan o no la misma cantidad de filas que de columnas.

Desde un punto de vista teórico o conceptual, pueden concebirse matrices de infinitos elementos; sin embargo, desde un punto de vista práctico – y especialmente considerando algoritmos computacionales para procesarlas - las matrices tienen siempre una cantidad "finita" de filas y de columnas, aunque pueden ser inmensamente numerosas.

Matriz Cuadrada

Cuando la matriz tiene la misma cantidad de filas que de columnas, se dice que es una matriz "Cuadrada", y su orden suele expresarse nombrando sólo una de las dimensiones ya que ambas son iguales. Por ejemplo:

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 & -1 \\ 1 & 1/5 & 0 & 10 \\ \pi & 0 & -2.5 & -3 \\ 0 & \pi/2 & 5 & 12 \end{bmatrix}$$

Esta es una “Matriz Cuadrada de orden 4”.

<u>Nomenclatura</u>

Las matrices habitualmente se “nombran” utilizando letras en mayúscula, típicamente empezando con la A, aunque esto no es un requisito.

<u>Elementos y su ubicación</u>

Cada elemento de una matriz se encuentra en una determinada fila y columna. Por ejemplo, en la matriz anterior, el número π se encuentra en la 3ra fila, y 1ra columna. Siempre se numeran desde 1, de manera consecutiva, y de arriba hacia abajo, o de izquierda a derecha, según sean filas o columnas.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} \text{Columna 1} & \text{Columna 2} & \text{Columna 3} & \text{Columna 4} \end{array} \\ B = & \left[\begin{array}{cccc} 2 & 4 & 3 & -1 \\ 1 & 1/5 & 0 & 10 \\ \pi & 0 & -2.5 & -3 \\ 0 & \pi/2 & 5 & 12 \end{array}\right] \begin{array}{l} \leftarrow \text{Fila 1} \\ \leftarrow \text{Fila 2} \\ \leftarrow \text{Fila 3} \\ \leftarrow \text{Fila 4} \end{array} \end{array}$$

Elemento: $b_{3,1}$

De manera genérica, podríamos indicar cada elemento de una matriz en un esquema como el siguiente:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Esta es una matriz genérica A_{mn} es decir: de orden mxn (m filas por n columnas).

Diagonales de una Matriz Cuadrada

Las matrices cuadradas tienen dos diagonales.

La **Diagonal Principal** (muy usada en los procedimientos algebraicos con matrices) contiene los elementos que están en la diagonal que va del elemento (1,1) al elemento (n,n). *En este caso, como sólo existe para matrices cuadradas, no nombramos genéricamente el último elemento como a_{mn} sino como a_{nn}.*

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & \cdots & A_{2n} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & \cdots & A_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{n1} & A_{n2} & A_{n3} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

La **Diagonal Secundaria** (muy poco usada) contiene los elementos que están en la diagonal que va del elemento (1,n) al elemento (n,1).

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & \cdots & A_{2n} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & \cdots & A_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{n1} & A_{n2} & A_{n3} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

Matrices "Especiales"

Existen algunas matrices particulares que vale la pena tener en cuenta:

- **Matriz Fila**: tiene 1 fila x n columnas. También puede llamarse "vector fila".

$$F = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

- **Matriz Columna**: tiene n filas x 1 columna. También puede llamarse "vector columna".

$$C = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

- **Matriz Nula**: está exclusivamente compuesta de ceros. Se representa con un **0** grande y en negrita. Puede ser cuadrada o rectangular, no importa su orden.

$$\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- **Matriz Diagonal**: es una matriz cuadrada que solo tiene datos en su **diagonal principal** (la que va del elemento 1,1 al elemento n,n), y las restantes celdas tienen cero.

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

- **<u>Matriz Identidad</u>**: es una Matriz Diagonal que tiene 1 (unos) en su diagonal principal, y 0 (ceros) en las celdas restantes. Se representa con una letra $\mathbf{I}$ mayúscula, grande y en negrita.
  Esta es una matriz de un uso muy especial en el álgebra de matrices, ya que es análoga al número 1 en operaciones escalares, especialmente en productos.

$$\boldsymbol{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- **<u>Matriz Triangular Superior</u>**: contiene 0 (ceros) en todas las celdas **<u>por debajo</u>** de la diagonal principal (sin incluirla).

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

- **<u>Matriz Triangular Inferior</u>**: contiene 0 (ceros) en todas las celdas **<u>por encima</u>** de la diagonal principal (sin incluirla).

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

- **<u>Matriz Escalonada</u>**: La cantidad de ceros a la izquierda de cada celda debe ser mayor o igual a la cantidad de la fila anterior (excepto la primera, claro)
  La matriz que sigue es una Matriz Escalonada. *Como puede observar, no es necesario que una Matriz Escalonada sea Cuadrada.*

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 & 4 \\ 0 & -5 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

La matriz que sigue, en cambio, NO es una Matriz Escalonada. *Como puede observar, La fila 3 tiene menos ceros a la izquierda que la fila 2.*

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Generalizando, podemos decir que toda Matriz Triangular Superior es una Matriz Escalonada.

AUTOEVALUACIÓN SP4-H1

---

1. ¿Cuántos elementos tiene una matriz cuadrada de Orden 15?

   a. 15
   b. 15^{15}
   c. 15^2 ← Correcta
   d. No puede determinarse
   e. Ninguna opción es correcta

2. Indique cuáles de las siguientes enunciados son válidos para la matriz dada:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

   a. Es una matriz rectangular ← Correcta
   b. Es una matriz cuadrada
   c. Es una matriz de orden 3x4 ← Correcta
   d. Es una matriz de orden 4x3
   e. Es una matriz triangular superior
   f. Es una matriz escalonada ← Correcta

3. ¿Cuántos **unos** contiene la **diagonal principal** de una matriz identidad?

   a. Ninguno: por ser identidad todas sus celdas están en cero
   b. Uno y sólo uno, siempre.
   c. Todas sus celdas deben valer uno, y todas las restantes cero ← Correcta
   d. Depende del orden de la matriz: si es par, ninguno; y si es impar, uno.

4. ¿Cuántos **unos** contiene la **diagonal secundaria** de una matriz identidad?

   a. Ninguno: por ser identidad todas sus celdas están en cero
   b. Uno y sólo uno, siempre.
   c. Todas sus celdas deben valer uno, y todas las restantes cero

d. Depende del orden de la matriz: si es par, ninguno; y si es impar, uno. ← Correcta

5. Indique cuáles de las siguientes enunciados son válidos para la matriz dada:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

a. Es una matriz rectangular
b. Es una matriz cuadrada ← Correcta
c. Es una matriz de orden 4 ← Correcta
d. Es una matriz de orden 4/2 = 2 , pues la mitad de sus elementos son nulos.
e. Es una matriz triangular superior ← Correcta
f. Es una matriz escalonada ← Correcta

SP4H2: Operaciones Algebraicas Fundamentales con Matrices.

Con las matrices se definen diferentes "Operaciones", las cuales tienen una manera de calcularse y cumplen con ciertas propiedades.

Muchas de esas operaciones son análogas al cálculo escalar, y eso permite aplicar las leyes algebraicas universales (con algunas restricciones) a las matrices.

Existen muchas operaciones definidas. Algunas de ellas universalmente aceptadas y nombradas de un modo único, otras no tan difundidas o para usos particulares. De hecho, nosotros podríamos inventar nuestras propias operaciones!

A los fines prácticos veremos las principales operaciones materiales en esta herramienta.

Transposición (Matriz Transpuesta)

La Matriz Transpuesta de A (de rango *nxp: **n** filas por **p** columnas*) se escribe A^T y es una matriz de rango *pxn (**p** filas por **n** columnas)*, en la que cada fila de A se convierte en cada columna de A^T, respetando su orden.

Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

Sus principales propiedades son las siguientes:

- Involutiva: *La transpuesta de la transpuesta es de nuevo la matriz original*
  $(A^T)^T = A$

- Distributiva respecto de la suma: *La transpuesta de una suma matricial A+B, es la suma de la transpuesta de cada una de las matrices*
  $(A+B)^T = A^T + B^T$

- Distributiva respecto del producto usual: *La transpuesta de un producto matricial A.B, es el producto de la transpuesta de cada una de las matrices*
  $(A.B)^T = A^T . B^T$

- Lineal: la transpuesta del producto una matriz **A** por un escalar **k**, es lo mismo que el producto de ese escalar **k** por la transpuesta de la matriz **A**
  $(k.A)^T = k.(A^T)$

- Matrices particulares en relación a su Transpuesta:

  - A es una matriz "**Simétrica**" si $A^T = A$
    Ejemplo: La matriz A que sigue es simétrica

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 6 \\ 5 & 6 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 6 \\ 5 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

    (*) Sólo pueden ser Simétricas las matrices cuadradas

  - A es una matriz "**Antisimétrica**" si $A^T = -A$
    Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -4 & -5 \\ 4 & 0 & -6 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 5 \\ -4 & 0 & 6 \\ -5 & -6 & 0 \end{bmatrix} = -A$$

    (*) Sólo pueden ser Simétricas las matrices cuadradas que tengan 0 (ceros) en su diagonal principal

Suma Matricial

La suma matricial sólo es posible entre matrices de un mismo orden (ambas deben coincidir en la cantidad de filas y de columnas). Se simboliza con un singo + y es análoga a la suma de dos números simples, o escalares.

El resultado de una suma de matrices es otra matriz, del mismo orden que las sumadas, en la cual cada elemento de la misma es la suma directa de los elementos que ocupan esa misma posición en las dos matrices operadas.

Dicho de otro modo: podemos sumar A + B sólo si A y B tienen el mismo tamaño y disposición (orden) y el resultado será una matriz R en la que: $R_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$ para cada posición i,j posible.

$$\mathbf{A}+\mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}$$

Suma de matrices. Fuente: Wikipedia

Ejemplo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -3 & -2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+3 & 2+0 \\ 5+(-3) & (-3)+(-2) \\ 0+(-1) & 4+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & -5 \\ -1 & 8 \end{bmatrix}$$

Sus principales propiedades son las siguientes:

- Interna: *el resultado de la matriz suma tendrá el mismo número de filas y columnas que las que se suman*
- Asociativa: A + (B+C) = (A+B) + C
- Elemento neutro: *la suma de una matriz más su matriz nula (compuesta solamente de ceros), dará como resultado la misma matriz*
  A + 0= A
- Elemento opuesto: A + (-A) = 0 (*matriz nula*)
- Conmutativa: A + B = B + A

Resta de Matrices:

Algebraicamente, una resta es una suma cambiando de signo; por lo tanto, restar dos matrices es lo mismo que sumarlas, cambiando el signo de cada elemento de la matriz que está a la derecha de la operación.

Por ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 30 \\ 20 & 40 \end{bmatrix} \; y \; B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \; A - B = \begin{bmatrix} 9 & 28 \\ 17 & 36 \end{bmatrix}$$

Del mismo modo, si tememos una matriz A de cualquier orden, la matriz –A es la misma con todos sus elementos cambiados de signo.

Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow -A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$$

Sus principales propiedades son las siguientes:

- Interna: *el resultado tendrá el mismo número de filas y columnas que las matrices que participan de la resta*

- No es Asociativa: A - (B-C) ≠ (A-B) - C

- Cumple con la Ley de los Signos: *el signo menos antes de un paréntesis cambia el signo de las matrices que contiene*
  A - (B+C) = A - B - C
  Operando secuencialmente, que sería como hacerlo jerarquizado así: (A - B) - C

- Elemento neutro: *restarle a una matriz la matriz nula (del mismo orden, compuesta solamente de ceros), no la modifica*
  A + 0 = A

- No es Conmutativa: A - B ≠ B + A

Producto de una Matriz por un Escalar:

Sea R = k.A :

R es una matriz de la misma dimensión que **A**, donde cada celda es igual a su homóloga de **A** multiplicada por el número escalar **k**.

Sus principales propiedades son las siguientes:

Para poder enunciarlas, digamos que **A** y **B** son matrices de m × n , y que **O** m × n es la matriz cero del mismo orden, y que **p** y **q** son escalares.

- Propiedad asociativa: p (qA) = (pq) A

- Propiedad de cierre: pA es una matriz m × n

- Propiedad conmutativa: pA = Ap

- Propiedad distributiva:
  - (p + q) A = pA + qA
  - p(A + B) = pA + pB

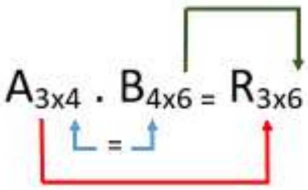
- Propiedad identidad: 1 · A = A

- Propiedad multiplicativa de –1: (–1) A = –A

- Propiedad multiplicativa de 0: 0 · A = O m × n

Producto de Matrices:

El producto matricial entre A y B tiene como condición que el Ancho de A sea igual = Alto de B. La resultante será una matriz con tantas filas como A, y tantas columnas como B.



En este caso, la cantidad de columnas de A es igual a la cantidad de filas de B (4 en ambos casos), por lo que la resultante tendrá 3 filas (*la misma cantidad de filas que A*) y 6 columnas (*la misma cantidad de columnas que B*).

Algoritmo (cómo calcularlo?): Dadas dos matrices $\mathbf{A_{mxn}}$ y $\mathbf{B_{nxp}}$, su producto **A·B** es otra matriz, de orden **m×p** tal que el elemento de la posición **(i,j)** es el resultado de la suma de los productos de cada elemento de la **fila i de A**, con su correspondiente elemento de la **columna j de B**.

En otras palabras: se suman los productos de cada celda de la fila 1 de A con su equivalente en distribución vertical de la columna 1 de B, y eso va en la posición 1,1 del Resultado. Y así sucesivamente, combinando cada fila de A con cada columna de B.

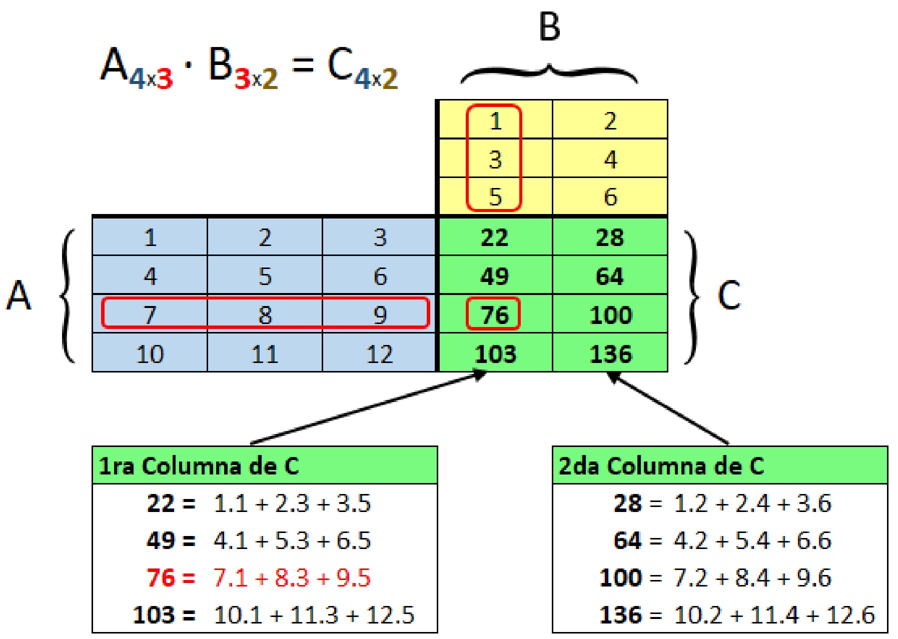
Ejemplo: $A_{2x3} . B_{3x4} = R_{2X4}$

$$R_{11} = (A_{11}.B_{11})+(A_{12}.B_{21})+(A_{13}.B_{31})$$
$$R_{12} = (A_{11}.B_{12})+(A_{12}.B_{22})+(A_{13}.B_{32})$$
…
$$R_{24} = (A_{21}.B_{14})+(A_{22}.B_{24})+(A_{23}.B_{34})$$

Ejemplo aplicado:

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\\5 & 6\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}7 & 8\\9 & 10\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}(1.7)+(2.9) & (1.8)+(2.10)\\(3.7)+(4.9) & (3.8)+(4.10)\\(5.7)+(6.9) & (5.8)+(6.10)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}7+18 & 8+20\\21+36 & 24+40\\35+54 & 40+60\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}25 & 28\\57 & 64\\89 & 100\end{bmatrix}$$

Ahora vemos otro ejemplo, también con números triviales y consecutivos para facilitar su lectura. Podemos observar la misma lógica en los cálculos si distribuimos las dos matrices que participan del producto del siguiente modo, poniendo cada celda del resultado en la intersección de cada fila de A con su correspondiente columna de B.



En las siguientes placas animadas puede ver otro ejemplo, donde se observan cuáles son los productos que participan de cada suma, para determinar el valor de cada celda del resultado:

((Poner acá la animación del TID viejo (Id TID 179) que se llama "Disposición práctica de las matrices para multiplicarse"))

Sus principales propiedades son las siguientes:

- <u>Asociativa</u>: A · (B · C) = (A · B) · C

- <u>Elemento neutro</u>: A · I = A *(Donde I es la matriz identidad del mismo orden que el "ancho" -cantidad de columnas- de la matriz A)*

- <u>Distributiva del producto respecto de la suma</u>: A · (B + C) = A · B + A · C

- <u>No es Conmutativa</u>: A · B ≠ B · A
  Mucho cuidado con esto!! *Por la lógica del cálculo, claramente no es lo mismo… Y si bien esta operación <u>no es un producto escalar</u>, sucede que como también se representa con un punto (.) puede prestarse a confusión.*

<u>Matriz Inversa</u>: A^{-1}

Restricción: Sólo las matrices cuadradas admiten inversa.

La matriz inversa de **A** (representada **A^{-1}**) es aquella que al hacer el producto con **A** nos da como resultado la matriz identidad: aquella que tiene 1 (unos) en la diagonal principal, y ceros en el resto de las celdas.

Evidentemente, la inversa de una matriz cuadrada A tiene su mismo orden, pues de no ser así no sería posible lo expresado anteriormente.

Veamos un ejemplo:

Sea la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

¿Existe alguna matriz X tal que al hacer A.X obtengamos como resultado la Identidad?

La respuesta es sí! Observe:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & -0{,}25 \end{bmatrix}$$

Si hacemos el producto…

$$A.A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & -0{,}25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1.0) + (2.0{,}5) & (1.0{,}5) + (2.(-0{,}25)) \\ (2.0) + (0.0{,}5) & (2.0{,}5) + (0.(-0{,}25)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

En efecto, el producto de **A** por su Inversa (**A^{-1}**) son da como resultado la matriz identidad!

¿Todas las matrices cuadradas son invertibles?

La respuesta es NO: Existen ciertas condiciones para que una matriz sea "Invertible". Por ejemplo, si una fila o una columna de la matriz es 0 (cero), entonces no puede Invertirse. Es decir, no existe ninguna matriz del mismo orden que al hacerle el producto con la original nos dé por resultado la identidad!

Lo mismo sucede si dos o más filas o columnas son proporcionales entre sí (veremos más adelante que a esto se le llama "combinación lineal"). Por ejemplo, las matrices que siguen NO admiten inversa:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

- La matriz A anterior, tiene una columna en 0: ***no es invertible***.
- Para el caso de la matriz B, fíjese que la columna 2 es exactamente el doble de la columna 1: ***no es invertible.***

En general, el criterio de Invertibilidad de una Matriz está dado por que la misma **no sea una Matriz Singular** (*o también llamada Degenerada*), y existe una manera muy interesante de determinar cuándo sucede esto!! Para ello, deberemos aprender una operación muy especial, llamada Determinante, que veremos en la siguiente herramienta. Por ahora, digamos que cuando el Determinante de una matriz es 0 (cero), esta **no admite inversa**!!

Las principales propiedades de la matriz inversa son las siguientes:

- La inversa de una matriz, es única.

- La inversa del producto de dos matrices es el producto de las inversas cambiando el orden: $(A.B)^{-1} = B^{-1} . A^{-1}$

- Si la matriz es invertible, también lo es su transpuesta, y la inversa de su transpuesta es la transpuesta de su inversa, es decir: $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

- También se verifica que la inversa de la inversa es la matriz original: $(A^{-1})^{-1} = A$

Algoritmo para calcular la inversa de una matriz

Para poder construir la matriz inversa a una dada existen diferentes algoritmos, pero en todos ellos deberemos valernos de los recursos que obtendremos con las siguientes herramientas en este texto. ¡Volveremos sobre este tema!

¿Pueden las operaciones matriciales dejarnos obtener resultados como los totales y cálculos agrupados que se plantean en esta Situación Profesional?

¡Claro que si! Si nos fijamos en el tipo de información que debemos obtener en la Situación Profesional planteada, ahora que conocemos las principales operaciones matriciales, veremos que utilizando ciertas combinaciones de operaciones como Transposición, Productos Matriciales, etc, podremos resolver buena parte de los objetivos planteados; pero no todos... Hay que seguir leyendo y trabajando las herramientas que siguen!

AUTOEVALUACIÓN SP4-H2

---

1. Considerando las matrices que siguen:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \end{bmatrix} \; ; \; B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

¿ Cuál es el resultado de A+B ?

a. $A + B = \begin{bmatrix} 6 & 5 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

b. $A + B = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$

c. $A + B = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

d. No pueden sumarse por ser incompatibles ← Correcta!

e. Existen infinitos resultados posibles

2. Considerando las matrices que siguen:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \ ; \ B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

¿ Cuál es el resultado de 3.(A+B) ?

a. No puede multiplicarse una suma de matrices por un número

b. $3.(A+B) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$

c. $3.(A+B) = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

d. $3.(A+B) = \begin{bmatrix} 9 & 15 \\ -6 & -3 \end{bmatrix}$ ← Correcta!

e. $3.(A+B) = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 3 & 5 & 3 & 5 \\ -2 & -1 & -2 & -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$

3. Considerando las matrices que siguen:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \ ; \ B = \begin{bmatrix} 10 & 40 & 70 \\ 20 & 50 & 80 \\ 30 & 60 & 90 \end{bmatrix}$$

¿ Cuál es el resultado de (A.B) ?

a. No puede hacerse el producto por ser incompatibles

b. $A.B = \begin{bmatrix} 1.10 + 4.40 + 7.70 & 2.10 + 5.40 + 8.70 & 3.10 + 6.40 + 9.70 \\ 1.20 + 4.50 + 7.80 & 2.20 + 5.50 + 8.80 & 3.20 + 6.50 + 9.80 \\ 1.30 + 4.60 + 7.90 & 2.30 + 5.60 + 8.90 & 3.30 + 6.60 + 9.90 \end{bmatrix}$

Operando nos queda…

$A.B = \begin{bmatrix} 660 & 780 & 900 \\ 780 & 930 & 1080 \\ 900 & 1080 & 1260 \end{bmatrix}$

c. $A.B = \begin{bmatrix} 140 & 320 & 500 \\ 320 & 770 & 1220 \\ 500 & 1220 & 1940 \end{bmatrix}$ ← Correcta!

d. $A.B = \begin{bmatrix} 10 & 80 & 210 \\ 80 & 250 & 480 \\ 210 & 480 & 810 \end{bmatrix}$

e. A.B = (1.10) + (2.40) + (3.70) + (4.20) + (5.50) + (6.80) + (7.30) + (8.60) + (9.90)

A.B = 10 + 80 + 210 + 80 + 250+ 480 + 210+ 480 + 810 = 2610

4. Considerando la matriz que sigue:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

¿ Cuál es el resultado de A^T ?

a. No puede calcularse la Transpuesta de una Matriz Rectangular

b. $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$ ← Correcta!

c. $A^T = \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

d. $A^T = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

5. Considerando la matriz que sigue:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

¿ Cuál es el resultado de $(A^T)^{-1}$?

a. No puede calcularse la Inversa de una Transpuesta

b. No puede calcularse la Inversa de una Matriz Cuadrada

c. $(A^T)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$

d. $(A^T)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ ← Correcta!

SP4H3: Determinantes

El Determinante de una matriz es un escalar, o sea, un simple número!

Se representa generalmente encerrando el nombre de la matriz (o su definición) entre barras verticales simples. Por ejemplo:

$$Si\ A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}\ entonces\ |A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 7$$

Preste atención a la simbología: la definición de la matriz (o sea, sus elementos ordenados) van siempre encerrados entre corchetes; si en cambio encerramos los mismos números entre barras verticales nos estamos refiriendo a su Determinante. Por eso escribir

$$|A| \quad o \quad \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}$$

es lo mismo: en ambos casos nos estamos refiriendo a su Determinantes, que en este caso es 7.

También suele escribirse con notación funcional como ***D(A)*** o ***Det(A)*** aunque eso es más frecuente en contextos de programación.

<u>¿Y qué significa ese número?</u>

Digamos que de alguna manera el Determinante de una matriz nos habla de la independencia de los datos que contiene, o mejor aún, de la relación de producto de sus datos “simplificados”… Esto puede sonarle un poco técnico o difícil de comprender por el momento, pero no se preocupe. Por el momento, dejemos claro que una matriz cuyo **<u>determinante es 0 (cero)</u>** es aquella en la que **<u>sus datos no son completamente independientes</u>**, sino que al menos una fila, o una columna, representa la misma información que otra: a esto se le denomina “Matriz Singular” como mencionamos anteriormente. Otra manera de decir que los datos no son completamente independientes, es referir que una fila o columna de la matriz es una “Combinación Lineal” de otra u otras. Iremos aclarando esto a lo largo de esta herramienta… Empecemos!

¿Y qué es una “Combinación Lineal de una Fila”?

En el contexto de las matrices sucede que si una fila tiene los mismos datos que otra, en el mismo orden, pero multiplicando cada número por una misma constante (k) que sea diferente de cero, decimos que la segunda es una “Combinación Lineal” de la primera. Por ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

En esta matriz, puede observar que la segunda fila (F2) es una Combinación Lineal de la primera (F1), ya que cada celda de F2 es igual a su homóloga de F1 pero multiplicada por 2.

En realidad, la misma relación puede verse en sentido contrario: podríamos decir que F1 es una Combinación Lineal de F2 ya que cada dato de F1 es igual a su homólogo de F2 pero multiplicado por 0,5 (o sea, exactamente al revés que antes: F1 = F2 . ½)

En otras palabras: ambas filas son una **Combinación Lineal** de la otra!

Si el factor por el que se multiplica una fila es 0 (cero), la resultante será obviamente una fila de ceros, o sea, una fila “nula”.

Todo lo antes dicho, es **exactamente del mismo modo para las columnas**: podemos tener columnas que son combinaciones lineales, y su impacto en el sistema es equivalente.

En cualquier caso, tanto en filas como en columnas, las combinaciones lineales inhabilitan muchas veces a la matriz para contener datos útiles a los efectos del cálculo, ya que una fila (o columna) redunda la información de otra y por tanto no aporta nueva información al sistema.

Pero… ***¿Cómo podemos darnos cuenta que tenemos una "combinación lineal" entre las filas o las columnas de una matriz?***

Hay algunos trucos: en el siguiente video los vemos…

((Insertar video (#8) "Cálculo de cocientes para comprobar una combinación lineal usando Excel": explicando la técnica de los cocientes entre elementos homólogos. Mencionar que también puede hacerse algebraicamente pero que es muy largo construir un sistema semejante))

Pero Cuidado!! Esto puede empeorar aún más!!

¿Pueden combinarse linealmente dos filas para producir una tercera?

Claro que sí! Las combinaciones lineales no tienen límites!

Podemos combinar tantas filas como queramos, multiplicando cada una de ellas por un escalar diferente, y sumándolas.

De este modo, por ejemplo, podemos tener una matriz de 3x3 en la cual *la tercera fila sea una combinación lineal de las otras dos*. Esto se cumplirá siempre que podamos encontrar las incógnitas de la siguiente ecuación:

F3 = a.F1 + b.F2

Tenemos que encontrar, si es que existen, sendos valores para a. y b. tales que se verifique la ecuación.

Por caso, veamos esto en un ejemplo:

Sea la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & -2 \\ 14 & 9 & -4 \end{bmatrix}$$

¿Será la tercera fila una combinación lineal de las dos primeras?

Para ello, debería suceder que existan dos escalares ***a*** y ***b*** tales que

(14 ; 9 ; -4) = ***a*** . (2 ; 3 ; 0) + ***b*** . (4 ; 0 ; -2)

Por tanto, si construimos cada elemento del resultado como una ecuación, tenemos que:

$$\begin{cases} 14 = a.2 + b.4 \\ 9 = a.3 + b.0 \\ -4 = a.0 + b.(-2) \end{cases}$$

Como vemos, es un sistema de ecuaciones! Si es compatible, debiéramos poder encontrar el valor para las incógnitas usando dos cualesquiera de las ecuaciones, y luego comprobar si la tercera sigue cumpliéndose: si eso sucede, entonces tenemos una combinación lineal! Si por el contrario llegamos a una contradicción en la que una de las ecuaciones deja de cumplirse, entonces tendremos que no hay una combinación lineal.

Veamos el caso:

Pongamos que utilizamos las dos primeras ecuaciones para despejar el valor de ***a*** y de ***b***. Luego trataremos de ver si la tercera ecuación se cumple para ellas:

$$\begin{cases} 14 = a.2 + b.4 \\ 9 = a.3 + b.0 \end{cases}$$

De la segunda ecuación tenemos que ***a*** = 3 (*realizando un simple despeje de dicha variable ya que el segundo término del miembro de la derecha se ha anulado por tener coeficiente cero*)

Entonces, reemplazando en la primera tenemos que 14 = 3.2 + b.4

De ahí deducimos que ***b*** = 2

En resumen, tenemos la solución en

$$\begin{cases} a = 3 \\ b = 2 \end{cases}$$

Si reemplazamos ***a*** y ***b*** en las dos primeras ecuaciones por los valores obtenidos, vemos que se cumplen:

$$\begin{cases} 14 = 3.2 + 2.4 \\ 9 = 3.3 + 2.0 \end{cases}$$

Ahora tenemos que averiguar si para los mismos valores encontrados se cumple también la tercera ecuación:

$$\begin{cases} 14 = a.2 + b.4 \\ 9 = a.3 + b.0 \\ \boldsymbol{-4 = a.0 + b.(-2)} \end{cases}$$

Siendo ***a*** = 3 y ***b*** = 2

$$-4 = 3.0 + 2.(-2)$$

Efectivamente se cumple!!

Esto quiere decir que en la matriz dada

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & -2 \\ 14 & 9 & -4 \end{bmatrix}$$

La tercera fila es una combinación lineal de las otras dos!

Pero esto podría no ser cierto para otro sistema… Por ejemplo, consideremos otra matriz, con las mismas dos primeras filas:

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & -2 \\ \mathbf{20} & \mathbf{6} & \mathbf{3} \end{bmatrix}$$

Si creemos que la tercera fila puede ser una combinación lineal de las otras dos, debería verificarse el sistema siguiente:

$$\begin{cases} \mathbf{20} = a.2 + b.4 \\ \mathbf{6} = a.3 + b.0 \\ \mathbf{3} = a.0 + b.(-2) \end{cases}$$

Si hacemos lo mismo que antes, observemos que con las dos primeras ecuaciones podemos obtener como solución: ***a*** = 2 y ***b*** = 4

Entonces, si la tercera es una combinación lineal de las primeras dos deberá verificarse que

3 = a.0 + b.(-2)

O sea…

3 = 2.0 + 4.(-2) = 0 + (-8) = -8

Evidentemente, la tercera ecuación no se cumple… Por tanto, la tercera fila de esta matriz no es una combinación lineal de las otras dos!!

Pero qué difícil es entonces saber si todas las filas de una matriz son realmente independientes!!!

Puede ser realmente largo y tedioso, ¿verdad? Sobre todo si la matriz es grande… Pero a no desesperar! Por suerte tenemos una herramienta que parece mágica, así que al fin les presento: **EL DETERMINANTE**!!

Basta con decir que cuando una matriz tiene filas o columnas (aunque sea sólo una) que son combinaciones lineales de otra u otras, el Determinante de dicha matriz es 0 (cero)!

Cálculo del Determinante de una Matriz

Restricciones: el determinante sólo puede calcularse para matrices cuadradas, no importa su orden.

Algoritmo para calcularlo: existen estrategias diferentes si la matriz es de 2x2, de 3x3, o de 4x4 o mayores. Veremos cada caso a continuación.

Matrices de 2x2

El determinante en una matriz de 2x2 es la resta de los **productos cruzados** de sus elementos.

$$Sea\ la\ matriz\ A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$Su\ Determinante\ |A|\ será\ \ (a_{11}.a_{22}) - (a_{12}.a_{21})$$

Ejemplo numérico:

$$Si\ A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\ entonces\ |A| = (2.4) - (5.3) = 8 - 15 = -7$$

Calcule y corrobore ahora los siguientes ejemplos:

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow |A| = (8.3) - (1.3) = 24 - 3 = 21$$

$$B = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow |B| = (8.3) - (0.3) = 24 - 0 = 24$$

$$C = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow |C| = (8.0) - (0.3) = 0 - 0 = 0$$

$$D = \begin{bmatrix} 8 & -1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow |D| = (8.3) - \big((-1).3\big) = 24 - (-3) = 24 + 3 = 27$$

$$E = \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ -3 & -3 \end{bmatrix} \rightarrow |A| = (8.(-3)) - \big(1.(-3)\big) = (-24) - (-3) = -21$$

<u>Matrices de 3x3</u>

Aquí la cosa se complica un poco: el cálculo de un determinante tiene que abarcar todos los productos cruzados posibles… Existe una técnica que simplifica esta tarea para matrices de tres por tres: es la **regla de Sarrus**.

((Insertar video (#9) "Regla de Sarrus": explicando la regla, tanto replicando filas o columnas))

Veamos otro ejemplo:

Sea la siguiente matriz

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ -5 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Construimos su matriz ampliada, repitiendo todas las columnas menos la última:

$$A\ ampliada = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 3 & -1 & 4 \\ 2 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ -5 & -2 & 1 & -5 & -2 \end{bmatrix}$$

Y sobre ella practicamos la suma de los productos de todas las secuencias diagonales principales, restando luego los productos de todas las secuencias diagonales secundarias:

|A| = (-1.2.1) + (4.0.-5) + (3.2.-2) – (3.2.-5) – (-1.0.-2) – (4.2.1)

Finalmente, será **|A|** = (-2) + 0 + (-12) – (-30) – (0) – (8) = **8**

Matrices de orden superior: 4x4 o mayores

Las técnicas anteriores no nos sirven para matrices más grandes… Pero por suerte existen otras!

Para poder seguir, debemos antes comprender una Herramienta Fundamental, muy utilizada en el cálculo con matrices: las **Transformaciones Elementales de Filas**

Básicamente, una matriz representa un conjunto de “relaciones” entre sus datos. Por eso, cuando estamos en presencia de una combinación lineal no hay aporte de información ya que la “relación” es la misma entre las filas combinadas.

Teniendo esto en cuenta, una matriz puede transformarse en otra “**Equivalente**” si aplicamos sobre sus filas ciertas operaciones que no modifican estas relaciones, aunque sí el valor puntual de cada número que contienen. Estas operaciones se denominan “**TRANSFORMACIONES ELEMENTALES**” y son las siguientes:

- **Fx << k.Fx : Multiplicar una fila por un escalar distinto de 0 (cero)**

  Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ -5 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

  Si definimos la matriz B como la misma matriz A pero multiplicando su segunda fila (F2) por un escalar (k) que en este caso haremos (k=3), solemos escribir dicha transformación así: **F2 << 3.F2**
  Y su resultado será el siguiente:

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 3 \\ 6 & 6 & 3 \\ -5 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

  Podemos decir entonces que A y B son, de cierto modo, “Equivalentes”. *No obstante su equivalencia, esta operación altera el determinante, que resulta ser el Determinante Original multiplicado por el mismo escalar (k).*

  En resumen: **Det(B) = 3.Det(A)**

- **Fx <<>> Fy : Intercambiar la ubicación de dos filas**
  Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ -5 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

  Si definimos la matriz B como la misma matriz A pero intercambiando la primera fila (F1) con la segunda (F2) seguimos obteniendo una Matriz Equivalente, aunque cambia el signo de su Determinante.

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 3 \\ -5 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Es decir que para este caso: **Det(B) = - Det(A)**

- **Fx << Fx + (k.Fy) : Asignar a una fila el valor que ya tiene, más otra fila multiplicada por un escalar.**

  Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ -5 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

  Podemos definir la matriz B como la misma matriz A pero asignándole a la tercera fila (F3) su propio valor más el de la segunda fila (F2) multiplicado por 2.
  En símbolos esto suele escribirse así: F3 << F3+(2.F2)

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ -5+(2.2) & -2+(2.2) & 1+(2.1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

  Seguimos obteniendo una Matriz Equivalente, y esta operación (Ojo! Sólo ésta!) **NO Cambia el Determinante**.

  Es decir: **Det(A) = Det(B)**

((Insertar video (#10) “Transformaciones elementales de Gauss sobre filas o columnas de una matriz”: ejemplificando las 3 operaciones elementales: hacer 2 partes concatenadas, una en papel y la otra en Excel))

Las operaciones mencionadas pueden realizarse con matrices de cualquier orden, incluso rectangulares: esto nos permite generar sucesivas equivalencias, modificando los números que contiene la matriz según nuestras necesidades, apuntando a algún objetivo o algoritmo concreto de cálculo, según veremos a continuación.

Cada nueva matriz equivalente verá alterado su determinante, pero las “relaciones” se mantienen.

Ahora sí, veamos la Técnica de Gauss para averiguar el Determinante de una matriz de orden 4x4 o superior:

Carl Friedrich Gauss (matemático alemán nacido en 1777) descubrió cosas muy interesantes al plantear el modelo matricial, aquí una de las más sorprendentes!

Recordar que en el cálculo del determinante participan todos los productos cruzados posibles: ambas diagonales (principal y secundaria), como así también todas las diagonales posibles en todas las posibles matrices ampliadas… Entonces, pensemos qué pasa si logramos construir una matriz equivalente a la dada, pero que sea “Triangular Superior” o “Triangular Inferior”, es decir, que todos los elementos por debajo (o por arriba) de la diagonal principal sean cero; una como la que sigue:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Aquí la idea brillante: De todos los productos posibles en esta matriz, el único que no incluye ningún elemento de la región de ceros es el producto de la Diagonal Principal!

Entonces, no tiene sentido calcular ningún otro producto ya que siempre se anularán porque contendrán al menos un cero; y por lo tanto, el determinante será simplemente el producto de su diagonal principal.

Pero cuidado! Si en el proceso de sucesivas transformaciones aplicó alguna de las dos primeras (**Fx << k.Fx**) o (**Fx <<>> Fy**) deberá tomar nota del impacto sobre el determinante para poder deducir el de la Matriz Original.

((Insertar Video (#11) : "Determinante por reducción a triangular superior de Gauss (a mano y en Excel)"))

Otro algoritmo para calcular el Determinante

Podemos hacer un proceso de cálculo recursivo del Determinante valiéndonos de una de sus propiedades: *el determinante de una matriz que tiene ceros en la primera columna (desde su segunda hasta su última fila) es igual al valor del primer elemento multiplicado por el determinante de la sub-matriz que resulta de suprimir de la original la fila y columna a la que pertenece dicho elemento: es lo que llamamos su “**Menor Complementario”**, o simplemente “**Adjunto**” del elemento en cuestión. ((Si se puede, poner el cuadro gris que sigue como una ventana emergente que el alumno puede “abrir” haciendo click en su ícono))*

Menor Complementaria, o Adjunto de un elemento

*En cualquier matriz cuadrada A (de orden n) podemos referirnos a una “sub-matriz” de la misma en función de cualquiera de sus elementos **a**$_{ij}$. El determinante de esta sub-matriz se llama **Menor Complementario**, o **Adjunto** del elemento **a**$_{ij}$ y es la resultante de quitarle a la matriz original (A) toda la fila y toda la columna de dicho elemento, conformando una nueva matriz (de orden n-1), calculando sobre la misma su determinante.*

Así, sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

Para obtener el **Adjunto** del elemento a_{11} debemos quitar toda la fila 1 y la columna 1

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

con lo que nos quedan los elementos restantes formando a su vez una matriz de orden **n-1** (siendo **n** el orden de la matriz original).

El resultado será: $Adj(a_{11}\ en\ A) = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = (5.9) - (6.8) = 45 - 48 = -3$

Esto aplica para cualquier elemento de A. Por ejemplo, para determinar el adjunto del elemento a_{23} en esa misma matriz A, tenemos que quitarle la fila 2 y la columna 3 y calcular el determinante de la sub-matriz resultante:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Así, el Adjunto del elemento a_{23} de A será:

$$Adj(a_{23}\ en\ A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = (1.8) - (2.7) = 8 - 14 = -6$$

((Continúa desde acá el texto principal))

Por ejemplo, si tengo una matriz como esta:

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -2 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Entonces el determinante de la matriz original será 7 multiplicado por su **adjunto**, que es el determinante de la sub-matriz resultante de eliminar la fila y la columna del dato en cuestión: en este caso, la primera fila y primera columna. Así:

$$Det(A) = \begin{vmatrix} 7 & -2 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 7\,.\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 4 \\ -3 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

Y este proceso se repite hasta resolver el último determinante mediante productos cruzados (2x2) o Sarrus (3x3).

Para continuar este ejemplo, podríamos aplicar las Transformaciones Elementales necesarias a esa segunda matriz (de orden 3) para dejar ceros en su primera columna, debajo del primer elemento, y repetir la definición anterior:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 4 \\ -3 & 2 & 2 \end{bmatrix} si\ hacemos\ F2 \ll F2 + (4.F1)\ queda: \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 8 \\ -3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Luego…

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 8 \\ -3 & 2 & 2 \end{bmatrix} si\ hacemos\ F3 \ll F3 + (-3.F1)\ queda: \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 8 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Ninguna de las dos Transformaciones Elementales realizadas altera el Determinante, de modo que podemos aplicar sobre esa última matriz transformada el mismo algoritmo que a la matriz de 4x4 original: tomar su primer elemento (cuya columna se ha convertido en ceros) y establecer que su Determinante es dicho elemento por su **adjunto**.

Finalmente, nos quedará que el Determinante de la matriz A original será:

$$Det(A) = 7\,.(-1).\begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$$

Entonces, resolviendo el último determinante por productos cruzados, escalamos hacia atrás con los resultados:

$$\begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 - 16 = -19$$

De ahí, sabemos que

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 8 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (-1).\begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = (-1).(-19) = 19$$

Y a su vez de ahí, llegamos hasta la matriz original:

$$|A| = \begin{vmatrix} 7 & -2 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 7.\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 8 \\ -3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 7\,.19 = 133$$

Aquellos interesados en programación pueden observar el algoritmo descripto implementado en dos lenguajes bien diferentes: Python y Visual Basic. Ambos son lenguajes que admiten la programación de funciones recursivas, es decir, funciones que se llaman a sí mismas una determinada cantidad de veces hasta alcanzar "su piso" y desde ahí emprenden el camino de regreso hasta el punto de llamada original. Esa es la naturaleza de éste método que hemos comentado ya que, en resumidas palabras, calcular el Determinante de una matriz de nxn consiste en poner en cero toda la columna de la izquierda excepto el primer elemento, luego calcular el Determinante de la submatriz adjunta al elemento (0,0), y luego multiplicar dicho resultado por el elemento (0,0). Es decir: para calcular un determinante necesito calcular otro determinante. Eso es precisamente un procedimiento recursivo. El punto de corte en los niveles de recursión está dado cuando el tamaño de la submatriz llega a 2x2: en ese caso, directamente calculamos el determinante mediante productos cruzados y empezamos a subir con los resultados hasta el nivel incial.

A continuación están los archivos de código fuente para la implementación en ambos lenguajes de este algoritmo:

- Versión en Python ((Poner link para descargar el archivo Cálculo Determinante (Desarrollo Propio).py))
- Versión en Visual Basic ((Poner link para descargar el archivo Cálculo Determinante (Desarrollo Propio).vb))

Propiedades de los Determinantes

Los Determinantes tienen muchas propiedades. Veremos a continuación las principales o más importantes para nosotros a efectos de la materia que nos ocupa:

- Si la matriz tiene un único elemento (matriz de orden 1) su determinante es igual a dicho elemento.

- Si una fila o una columna de la matriz **A** está completamente compuesta de 0 (ceros), entonces |A| es 0.

- Si dos filas o dos columnas de la matriz **A** son iguales, o si son "**linealmente dependientes**" (es decir que son una **"combinación lineal"**) , entonces |A| es 0.

- Al multiplicar todos los elementos de una fila o una columna de una matriz por un número (k), el determinante de la matriz resultante es igual al de la original multiplicado por ese mismo número (k). [Alteración por Transformación Elemental]

- Al intercambiar dos filas o dos columnas de una matriz, su determinante cambia de signo. [Alteración por Transformación Elemental]

- Al transformar una matriz sumándole a una fila el valor de otra fila multiplicada por un número, el determinante de la matriz NO cambia. [Transformación Elemental que no modifica el determinante]

- El determinante de una matriz triangular (o diagonal) es igual al producto de los elementos de su diagonal principal.

- El determinante de un producto de matrices, es igual al producto del determinante de cada una de esas dos matrices: |A.B| = |A|.|B|

- Si el determinante de una matriz es 0 (cero), dicha matriz "**no admite inversa**"

- El determinante de una matriz es igual al de su transpuesta: $|A| = |A^T|$

- El determinante de la inversa de una matriz es igual al inversa del determinante de dicha matriz: $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$

Determinantes para establecer si una Matriz es Invertible o no

Nos preguntábamos en la sección anterior, cuando estudiamos la Inversa de una Matriz, de qué manera podíamos averiguar si dicha matriz Admitía Inversa, o no???

La respuesta acabamos de verla: ***si el Determinante de una matriz es 0 (cero), dicha matriz NO Admite Inversa; en cualquier otro caso, sí***.

Cálculo de Determinantes y otras operaciones utilizando herramientas informáticas

En los siguientes videos podemos ver la manera de resolver los determinantes y otras operaciones matriciales valiéndonos de poderosas herramientas informáticas:

- Recursos de álgebra lineal para Python ((Insertar video (#12) mostrando en Python, incluir mensaje de error si la matriz no es cuadrada))
- Cálculo matricial en Excel ((Insertar video (#13) mostrando en Excel: mostrar cómo se cumplen las propiedades))

AUTOEVALUACIÓN SP4-H3

---

1. Calcular el determinante de las siguientes matrices:

   a. $A = [3]$ ((Respuesta correcta: 3))

   b. $A = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ ((Respuesta correcta: -22))

   c. $A = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ ((Respuesta correcta: 0))

   d. $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 6 & 1 & 5 \\ 3 & 3 & -1 \end{bmatrix}$ ((Respuesta correcta: 57))

   e. $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -1 \end{bmatrix}$ ((Respuesta correcta: 0))

   f. $A = \begin{bmatrix} -2 & -4 & -2 & -6 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ ((Respuesta correcta: 0))

   g. $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 0 & 8 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & 3 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ ((Respuesta correcta: 145))

2. Considerando las matrices que siguen:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 1 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix} \;\; ; \;\; B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Calcule el resultado de las siguientes operaciones:

a. Det(A) ((Respuesta correcta: 20))

b. Det(B) ((Respuesta correcta: -33))

c. Det(A.B) ((Respuesta correcta: -660)) ((Tip: El determinante de un producto matricial es igual al producto de los determinantes de ambas matrices))

d. Det(A^T) ((Respuesta correcta: 20)) ((Tip: El determinante de la transpuesta es igual al determinante de la matriz original))

e. 40.Det(A^{-1}) ((Respuesta correcta: 2)) ((Tip: El determinante de la Inversa es igual a la inversa del determinante de la matriz original))

SP4H4: Matrices, Transformaciones de Gauss y Sistemas de Ecuaciones

Hemos visto anteriormente el modo en que interactúan diferentes funciones lineales cuando conforman un “Sistema de Ecuaciones”, y también algunas estrategias para resolverlos de manera algebraica: recordemos que la “Solución” del sistema consiste en encontrar el punto en el que todas las ecuaciones del sistema se cumplen. Típicamente, si tenemos un sistema con sólo dos variables, esto será el punto en el plano donde las dos rectas se cruzan; si en cambio se trata de un sistema de 3 variables, cada ecuación define un “plano en el espacio”, y la solución será el punto donde esos tres planos se cortan; y así sucesivamente, aunque no podamos imaginarlo físicamente, un sistema de más variables, y por ende, más dimensiones, tendrá la misma particularidad. Tratándose de funciones lineales, si el sistema es ***compatible determinado*** (sistema de solución única) habrá un único punto en el que se cumplen simultáneamente todas las ecuaciones, y si es ***compatible indeterminado*** (sistema de infinitas soluciones) serán infinitos los puntos que permiten cumplir simultáneamente todas sus ecuaciones.

Dicho de otro modo, consideremos un sistema como el que sigue:

$$\begin{cases} 2w + z = 10 \\ 3x + 3y - 2z = 8 \\ -w - x + 2y = 9 \\ 4w + 2x - 3y + 5z = 12 \end{cases}$$

La solución de este sistema consiste en hallar un único valor para cada una de sus variables (w, x, y, z) y que dichos valores hagan que se cumplan simultáneamente todas las ecuaciones del sistema.

Ahora que ya sabemos utilizar un recurso tan potente como las matrices, llegó el momento de considerar esto un poco más profundamente: *veremos algunos algoritmos matemáticos que aprovechan la magia de las matrices para permitirnos resolver problemas que sería casi imposible mediante pasos algebraicos sucesivos.*

¿Todo Sistema de Ecuaciones tiene solución? ¿Siempre es una y sólo una?

La respuesta es NO. Si dos de las funciones que componen el sistema son paralelas, el sistema no tendrá una única solución. Particularmente, si dos funciones son idénticas, existen infinitos puntos en que se tocan: de hecho, se tocan en todos los posibles puntos! En tanto que si son paralelas pero no son la misma función (es decir que están separadas) no se tocarán jamás, y por tanto el sistema no tendrá solución.

Para esclarecer un poco esta situación, vamos a valernos del uso de matrices y de un atributo de las mismas que es su "Rango".

Pero antes, empecemos poniendo manos a la obra y resolviendo algunos sistemas como el recién propuesto utilizando matrices! *Si le parece que hacerlo mediante sucesivas equivalencias algebraicas y pasajes de términos puede ser un poco tortuoso con cuatro variables… imagínese con 10 o 20 o 100 variables! En los problemas propios del ámbito profesional de la informática y la inteligencia artificial no es extraño tener que ocuparnos de sistemas enormes, y de manera automatizada e instantánea.*

<u>Métodos Matriciales para la resolución de Sistemas de Ecuaciones Lineales</u>

Existen diferentes métodos. En todos ellos debemos ordenar los diferentes términos de cada ecuación para que queden encolumnados según la variable de cada uno, agregando los términos faltantes con coeficiente 0 (cero). Luego, podemos expresar dichas ecuaciones como un simple producto matricial. Veamos un ejemplo para la ecuación planteada al principio de esta herramienta:

$$\begin{cases} 2w + z = 10 \\ 3x + 3y - 2z = 8 \\ -w - x + 2y = 9 \\ 4w + 2x - 3y + 5z = 12 \end{cases}$$

En este sistema, claramente no todas las variables participan en cada ecuación. Entonces, podemos agregar a cada ecuación la(s) variable(s) faltante(s) con coeficiente 0 (cero), lo que no afecta su funcionamiento. Si además somos prolijos y encolumnamos por variable, el sistema puede reescribirse de este modo:

$$\begin{cases} 2w + 0x + 0y + 1z = 10 \\ 0w + 3x + 3y - 2z = -8 \\ -1w - 1x + 2y + 0z = 9 \\ 4w + 2x - 3y + 5z = 12 \end{cases}$$

Como ve, dice lo mismo!

Ahora, expresemos dichas ecuaciones como un producto matricial.

Sean:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & -2 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & -3 & 5 \end{bmatrix} \;;\; s = \begin{bmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} \;;\; b = \begin{bmatrix} 10 \\ -8 \\ 9 \\ 12 \end{bmatrix}$$

Resulta que:

A . s = b

Puede confirmarlo haciendo término por término este producto matricial: veamos uno por uno los valores del resultado…

$$A \, . \, s = \begin{bmatrix} (2.w) + (0.x) + (0.y) + (1.z) \\ (0.w) + (3.x) + (3.y) + (-2.z) \\ (-1.w) + (-1.x) + (2.y) + (0.z) \\ (4.w) + (2.x) + (-3.y) + (5.z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ -8 \\ 9 \\ 12 \end{bmatrix}$$

Entonces, de lo que se trata es de encontrar el valor del vector de incógnitas o matriz columna <w,x,y,z> que satisface esa ecuación: **A . s = b**

Existen diferentes técnicas para hacer esto utilizando matrices…

<u>Método de Gauss-Jordan</u>

El método de Gauss consiste en formular una matriz "ampliada" que contenga todos los coeficientes de cada ecuación, y los términos independientes. Luego, aplicar sobre la misma un conjunto de **Transformaciones Elementales de Filas** como las que ya hemos visto (*no se preocupe, aquí ((poner link al cuadro gris que sigue entre medio de este párrafo y el siguiente)) las tiene resumidas…*) de manera tal que se reduzca a una "Matriz triangular". Luego, si la matriz es triangular, la última ecuación sólo tendría una variable, y por tanto sería muy sencillo despejar su valor. Y a partir de ese, ir ascendiendo en la matriz teniendo en cada fila que averiguar el valor de sólo una variable.

Recuerde que las Transformaciones Elementales de matrices permiten **<u>convertir una matriz en otra equivalente</u>**, modificando todos los elementos de una fila mediante alguna de las siguientes operaciones:

1. Multiplicar una fila por un escalar (solemos anotarlo como **Fx ← Fx . k**) donde x es el número de fila y k el escalar.

2. Intercambiar la ubicación de dos filas (se anota como **Fx ←→ Fy**) donde x e y son los números de las filas intercambiadas.

3. Asignar a una fila su propio valor, sumándole el valor de otra fila multiplicada por un escalar (lo abreviamos como **Fx ← Fx + k . Fy**)

Por ejemplo, si logramos reducir la matriz ampliada a una triangular más la columna de Términos Independientes quedaría de este modo:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

Vamos despejando de abajo hacia arriba…

- De la **cuarta fila**, vemos que **4.z = 8** y por lo tanto **z = 2**

- Luego, sabiendo ya el valor de la última incógnita podemos de la **tercera fila** despejar **y**:
  Dice esa **tercera fila** que **3.y - z = -2** pero como ya sabemos que **z = 2** tenemos que **3.y - 2 = -2**
  Pasando de término tenemos **3.y = 0** y por lo tanto, **y = 0**

- Siguiendo del mismo modo, la **segunda fila** dice que **x + 3.y + 2.z = 5** pero como ya sabemos que **y = 0** y **z = 2** tenemos que
  x + 3.0 + 2.2 = 5
  Pasando de término tenemos **x + 4 = 5** y por lo tanto, **x = 1**

- Por último, llegamos a la primera fila donde dice que **2.w + 4.x - y + 3.z = 2** pero como ya sabemos que **x = 1** y que **y = 0** y **z = 2** tenemos que
  2.w + 4.1 - 0 + 3.2 = 2
  Operando los productos tenemos **2.w + 4 - 0 + 6 = 2**
  y por lo tanto **2.w = -8**, así que finalmente **w = -4**

Y así queda resuelto el sistema, con los siguientes valores para sus variables:

$$\begin{cases} w = -4 \\ x = 1 \\ y = 0 \\ z = 2 \end{cases}$$

Si verifica las ecuaciones verá que ésta es la solución!

$$\begin{cases} 2w + 4x - 1y + 3z = 2 \\ 0w + 1x + 3y + 2z = 5 \\ 0w + 0x + 3y - 1z = -2 \\ 0w + 0x + 0y + 4z = 8 \end{cases}$$

¿Y por qué se suele llamar a este método "Gauss-Jordan"?

Lo que agregó Jordan al método fue hacer lo mismo (lo de convertir a ceros) con la otra mitad de la matriz, y a la vez dejar unos en la diagonal principal; todo aplicando las mismas reglas de transformaciones elementales.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

De ese modo, si la matriz es la Identidad, la última columna contiene el valor de cada variable que resuelve el sistema.

Pero… ¿De qué manera debemos aplicar las Transformaciones Elementales para lograr todos esos ceros fuera de la Diagonal Principal, y al mismo tiempo convertir ésta en unos?

Más allá de algunas estrategias obvias como la de intercambiar filas si tengo coeficientes nulos en la diagonal principal, o multiplicar filas enteras por un escalar para reducir a 1 (uno) los cada elemento de la diagonal principal, lo más importante de la estrategia a seguir es **colocar los 0 (ceros) de la región triangular inferior empezando por la columna de la izquierda, desde arriba hacia abajo, utilizando el coeficiente no nulo de esa columna, también llamado pivote. Luego, se continúa con la siguiente columna hacia la derecha y así hasta el final. Esta estrategia se repite para la otra mitad (la región triangular superior) comenzando desde el otro costado, de derecha a izquierda y de abajo hacia arriba**.

Vea los siguientes recursos:

- En el PDF adjunto está explicado paso a paso el método de reducción con un ejemplo: ((Adjuntar "Método de reducción Gauss-Jordan.PDF"))

- En el video que sigue veremos otro ejemplo paso a paso. ((Insertar Video (#15) Desarrollando paso a paso el método de Gauss-Jordan))

- También recomendamos el uso de esta aplicación web llamada Online MSchooll: ((Insertar URL: http://es.onlinemschool.com/math/assistance/equation/gaus/)) *Aquí podrá ver paso a paso la resolución para cualquier matriz que uno ingrese.*

Como cierre sólo mencionar que hacer esto, incluso con matrices más grandes, es definitivamente más sencillo que construir eternos pasos algebraicos mediante métodos como el de sustitución o igualación, y por lejos mucho menos propenso a errores.

Pero existen otros métodos más, valiéndonos del álgebra de matrices que ya conocemos y de las propiedades de los determinantes. Los veremos a continuación, pero antes volvamos sobre una cuestión planteada al principio: **¿Cómo podemos saber - antes de ponernos a hacer tantas cuentas - si el sistema tiene una única solución o si por el contrario tenemos funciones paralelas en él?**

Para responder esa pregunta debemos considerar una propiedad de las matrices llamada **Rango**, y el teorema de **Rouché-Fröbenius** (*Eugène Rouché, matemático francés nacido en 1832 fue quien lo formuló, y Ferdinand Georg Frobenius, nacido en Alemania en 1849, lo demostró, aunque también se le atribuye a muchos otros matemáticos…*) que nos permite clasificar los sistemas.

<u>Rango de una Matriz</u>: establece la cantidad de filas (o también columnas) “significativas” (es decir, linealmente “independientes”) existentes en la matriz. Se calcula a partir de los determinantes.

Sea para A $_{m,n}$: Matriz A de ***m*** filas por ***n*** columnas: el rango será un número comprendido entre 0 y el Min(m,n)

- Si la totalidad de la matriz A es 0 (cero), el rango R(A) = 0
- Si existe aunque sea un solo número diferente de 0, el rango R(A) >= 1
- Si encuentro un determinante en alguna submatriz de 2x2 <> 0, entonces R(A) >= 2
- Si encuentro un determinante en alguna submatriz de 3x3 <> 0, entonces R(A) >= 3
- Y así sucesivamente hasta el máximo Rango posible, que será la menor de las dos dimensiones.

((Referir video de UNICOOS sobre cómo calcular el Rango, o hacer uno propio))

((Ver ejemplos [video (#16)]en python: np.linalg.matrix_rank))

Clasificación de Soluciones de un Sistema (Rouché-Fröbenius)

Esto es muy fácil si sabemos calcular el Determinante y el Rango de la Matriz Ampliada del sistema (A). La clasificación se resume del siguiente modo:

Sea **A** la matriz de coeficientes de un Sistema de ***m*** ecuaciones con ***n*** incógnitas, y **b** el vector (*matriz columna*) de sus términos independientes: tendremos que **(A|b)** es la “<u>matriz ampliada</u>” del sistema. Sucede entonces lo siguiente:

<table>
<tr><th colspan="3">Clasificación de las Soluciones de un Sistema de ecuaciones</th></tr>
<tr><th>Incompatible</th><th colspan="2">Compatible</th></tr>
<tr><td rowspan="4">Rango(A) ≠ Rango(A|b)

El sistema no tiene solución: no existe ningún punto por el que pasen todas las funciones lineales que lo componen.</td><td colspan="2">Rango(A) = Rango(A|b)

Existe al menos un punto por el que pasan todas las funciones lineales que lo componen.</td></tr>
<tr><td>Determinado</td><td>Indeterminado</td></tr>
<tr><td>Rango(A) = n (cantidad de incógintas)</td><td>Rango(A) < n (cantidad de incógintas)</td></tr>
<tr><td>Existe un único punto en el que coinciden sus funciones lineales.</td><td>Existen infinitos puntos en los que coinciden sus funciones; por lo tanto, tiene “infinitas soluciones”</td></tr>
</table>

Dicho de otro modo:

- Si el rango de la matriz de coeficientes es diferente del rango de la matriz ampliada, el sistema es Incompatible, es decir, no tiene solución!
- Si en cambio el rango de la matriz de coeficientes es igual al rango de la matriz ampliada, el sistema es Compatible! Deberemos averiguar si tiene una única solución, o si son infinitas soluciones. Entonces comparamos lo siguiente:
    - Si el rango de la matriz de coeficientes es igual el número de incógnitas, el sistema es “Compatible Determinado”, es decir, tiene una única solución: todas las funciones que lo componen se cortan en un único punto.
    - Por el contrario, si el rango de la matriz es menor que el número de incógnitas, el sistema es “Compatible Indeterminado”, o sea, tiene infinitas soluciones: existen infinitos puntos que verifican todas las funciones que lo componen (típicamente la intersección de sus funciones define una recta, o un plano, o un hiperplano para sistemas de mayor cantidad de dimensiones).

Algoritmo codificado en un lenguaje de programación (Python)

```python
import numpy as np

A=np.matrix([[ 1, 2, 1],
             [ 2, 5, 2],
             [ 1, 3, 1]])

b=np.matrix([[3],
             [7],
             [4]])

Det_A    = np.linalg.det(A)
Rango_A  = np.linalg.matrix_rank(A)
Ab       = np.concatenate((A,b),axis=1)
Rango_Ab = np.linalg.matrix_rank(Ab)

print("Determinante de A:", Det_A,    "\n")
print("Rango de A:"       , Rango_A,  "\n")
print("Rango de A|b:"     , Rango_Ab, "\n")

print("Resultado:")

if Rango_A == Rango_Ab:
    if Rango_A == len(b):
        print("Sistema Compatible Determinado (Única solución)")
        print(np.linalg.solve(A,b))
    else:
        print("Sistema Compatible Indeterminado (Infinitas soluciones)")
else:
    print("Sistema Incompatible (No tiene solución)")
```

Aplicación práctica del Teorema de Rouché-Fröbenius:

Caso #1

Si tenemos que resolver el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 2x + \quad y + 2z = 1 \\ 3x + 6y + 9z = 9 \\ 6x + 4y + \ 2z = 0 \end{cases}$$

Primero deberemos averiguar si tiene una única solución. Para eso, construimos su matriz de coeficientes y su matriz ampliada:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 6 & 9 \\ 6 & 4 & 2 \end{bmatrix} \qquad (A|b) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & \mathbf{1} \\ 3 & 6 & 9 & \mathbf{9} \\ 6 & 4 & 2 & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

Vemos que el **rango** de ambas matrices es 3, ya que el **determinante** de **A** es distinto de 0 (cero); en símbolos: **|A| ≠ 0**. (De hecho, si lo calculamos es |A| = -48)

Entonces, se trata de un **Sistema Compatible Determinado** (tiene una única solución) ya que la cantidad de incógnitas (3) es igual al rango de la matriz; y podemos calcular dicha solución por el método de Gauss-Jordan, o por cualquier otro de los que hemos visto, o los que veremos!

El resultado será: $\begin{cases} x = -5/8 \\ y = 1/2 \\ z = 7/8 \end{cases}$

Caso #2

Consideremos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 4x + 2y + 6z = 4 \\ 3x + y + 4z = 3 \\ 2x + 3y + 5z = 5 \end{cases}$$

Primero deberemos averiguar si tiene una única solución. Para eso, construimos su matriz de coeficientes y su matriz ampliada:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix} \qquad (A|b) = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 & \mathbf{4} \\ 3 & 1 & 4 & \mathbf{3} \\ 2 & 3 & 5 & \mathbf{5} \end{bmatrix}$$

Calculamos el Determinante de A y vemos que es 0 (cero)!! Entonces, su rango será menor que 3… Probamos con las submatrices de 2x2 que contiene y encontramos una cuyo determinante es distinto de 0 (cero), por ejemplo:

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

Entonces sabemos que el rango de A es 2.

Ahora averiguamos el rango de la matriz ampliada (A|b) y vemos que es 3, pues contiene una submatriz de 3x3 cuyo determinante es no nulo:

$$\begin{vmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \\ 3 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 6$$

<u>Conclusión</u>: como el rango de A es distinto del rango de (A|b) sabemos que se trata de un Sistema Incompatible, y por tanto, **no tiene solución**!

Caso #3

Veamos por último este otro sistema:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ 2x + 5y + 2z = 7 \\ x + 3y + z = 4 \end{cases}$$

Para averiguar si tiene solución y de qué tipo, construimos su matriz de coeficientes y su matriz ampliada:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad (A|b) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 2 & 7 \\ 1 & 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Calculamos el Determinante de A y vemos que es 0 (cero)!! Entonces, su rango será menor que 3… Probamos con las submatrices de 2x2 que contiene y encontramos una cuyo determinante es distinto de 0 (cero), por ejemplo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 1$$

Entonces sabemos que el rango de A es 2.

Ahora averiguamos el rango de la matriz ampliada (A|b) y vemos que también es 2, pues no contiene ninguna submatriz de 3x3 cuyo determinante no sea nulo. Los determinantes de las posibles submatrices de 3x3 (excepto A que ya fue evaluada) son:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 7 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0 \quad ; \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 7 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0 \quad ; \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

<u>Conclusión</u>: los rangos de A y de (A|b) coinciden, por lo tanto, el sistema es “Compatible”. Pero en ambos casos es 2, y la cantidad de incógnitas es 3; así que el sistema será “Compatible **Indeterminado**”, o sea, tiene infinitas soluciones!

1. Clasifique y resuelva los siguientes sistemas:

a. $\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ -z = 36 \\ -x + y + 2z = -10 \end{cases}$ ((Respuesta correcta: x=-35,6 ; y=26,4 ; z=-36))

b. $\begin{cases} -x + 2y + z = 0 \\ -2x + 3y - z = 4 \\ -3z + 3y - 2x + 5z = 10 \end{cases}$ ((Respuesta correcta: x=-18 ; y=-10 ; z=2))

c. $\begin{cases} 2x + 4w + 2y = 8 \\ -z + w = 5 \\ 3x + y + 4z - w = 6 \\ -z + 4y + 2z = -1 \end{cases}$ ((Respuesta correcta: w=-6,4 ; x=14,2 ; y=2,6 ; z=-11,4))

d. $\begin{cases} 2y = -3 \\ -x + z = 14 \\ x + 6y - x = -\frac{45}{5} \end{cases}$ ((Respuesta correcta: Sistema Indeterminado))

SP4H5: Solución a Sistemas de Ecuaciones mediante el Método de la Inversa

Acabamos de ver que, planteado con esquema matricial, un Sistema puede expresarse de la forma: **A . s = b** , donde **A** es la Matriz de Coeficientes, **s** es el vector columna de Variables, y **b** el vector columna de Términos Independientes.

Pues bien… Abracadabra!! Aquí aparece una vez más la magia del álgebra!

Lo que queremos es despejar en esa ecuación el valor de **s**, entonces qué ocurre si pasamos **A** al otro lado?

A . s = b → s = A^{-1} . b

Increíble, pero cierto! Si calculamos la "Inversa" de **A** (o sea, **A^{-1}**) y hacemos el producto de eso por **b**, obtendremos **s**, o sea, los valores de cada variable para la Solución del Sistema!!

Pero, claro está, para poder comprobar este método de resolución de un sistema de ecuaciones necesitaremos antes poder obtener la inversa de una matriz. Ya vimos en la primera herramienta de nuestra Situación Profesional la Inversa de una Matriz, representada como **A^{-1}** (como si se tratara de la potencia -1 aunque de hecho no es así, sino sólo la simbología que se utiliza para referir tal matriz).

Veremos a continuación un algoritmo simple que nos permite obtener dicha matriz.

Cálculo de la Inversa de una Matriz utilizando el Método de Gauss

Como vimos, no todas las matrices pueden invertirse: **sólo pueden invertirse las matrices cuadradas cuyo Determinante es diferente de 0 (cero).**

¿Y en qué puede ayudarnos Gauss?

A Gauss le gustaba mucho jugar con matrices, y descubrir múltiples aplicaciones para su descubrimiento sobre las Transformaciones Elementales! Y bueno… ya se lo imaginará… También para el cálculo de la Inversa esta herramienta resulta fundamental y muy útil!

Para invertir una matriz utilizando el Método de Gauss, simplemente debemos construir una "Matriz Ampliada", que tenga en su mitad izquierda la Matriz Original, y en su mitad derecha la Matriz Identidad. Así:

Sea: $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ construimos $A_{ampliada} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 8 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Luego, simplemente realizamos sobre ella las Transformaciones Elementales necesarias (afectando todos los elementos de cada fila con cada transformación) hasta **lograr que la mitad Izquierda sea la Identidad: cuando lo logramos, lo que queda en la mitad Derecha será la Inversa de la Matriz Original.**

Veamos el ejemplo dado desarrollado paso a paso:

Antes de empezar, averigüemos el Determinante de A, no sea que esa matriz no admita inversa!

Aplicando Sarrus, vemos que **|A|=128** lo que es distinto de 0 (cero), por lo tanto, esa matriz Sí Admite Inversa!!

Entonces, apliquemos el método de Gauss…

$$A_{ampliada} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 8 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 & 0 & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

F2 << F2 + (-2 . F1)

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{0} & -2 & 18 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

F3 << F3 + (-3 . F1)

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 18 & -2 & 1 & 0 \\ \mathbf{0} & -9 & 17 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

F3 << F3 + ((9/-2) . F2)

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 18 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{0} & -64 & 6 & -4{,}5 & 1 \end{bmatrix}$$

Hasta aquí ya logramos la triangular inferior = 0. Ahora haremos lo mismo para la triangular superior…

F2 << F2 + ((-18/-64) . F3)

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & \mathbf{0} & -0{,}3125 & -0{,}265625 & 0{,}28125 \\ 0 & 0 & -64 & 6 & -4{,}5 & 1 \end{bmatrix}$$

F1 << F1 + ((5/-64) . F3)

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & \mathbf{0} & 0{,}53125 & 0{,}3515625 & -0{,}078125 \\ 0 & -2 & 0 & -0{,}3125 & -0{,}265625 & 0{,}28125 \\ 0 & 0 & -64 & 6 & -4{,}5 & 1 \end{bmatrix}$$

F1 << F1 + ((-3/-2) . F2)

$$\begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} & 0 & 0{,}0625 & -0{,}046875 & 0{,}34375 \\ 0 & -2 & 0 & -0{,}3125 & -0{,}265625 & 0{,}28125 \\ 0 & 0 & -64 & 6 & -4{,}5 & 1 \end{bmatrix}$$

Con este ya hemos obtenido una Matriz Diagonal del lado Izquierdo. Ahora sólo nos resta aplicar los cocientes necesarios para convertir esa diagonal en 1 (unos).

F2 << F2 . (1/-2)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0{,}0625 & -0{,}046875 & 0{,}34375 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0{,}15625 & 0{,}1328125 & -0{,}140625 \\ 0 & 0 & -64 & 6 & -4{,}5 & 1 \end{bmatrix}$$

F3 << F3 . (1/-64)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0{,}0625 & -0{,}046875 & 0{,}34375 \\ 0 & 1 & 0 & 0{,}15625 & 0{,}1328125 & -0{,}140625 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & -0{,}09375 & 0{,}0703125 & -0{,}015625 \end{bmatrix}$$

Finalmente, la mitad derecha de la Matriz Ampliada es la INVERSA de la Matriz Original:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \to \boldsymbol{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}0625 & -0{,}046875 & 0{,}34375 \\ 0{,}15625 & 0{,}1328125 & -0{,}140625 \\ -0{,}09375 & 0{,}0703125 & -0{,}015625 \end{bmatrix}$$

Pero… *¿Será realmente la inversa lo que hemos obtenido?*

Muy fácil: si lo que obtuvimos es la inversa de **A**, debe cumplirse que **A . A^{-1} = I** (identidad)

Verificamos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0{,}0625 & -0{,}046875 & 0{,}34375 \\ 0{,}15625 & 0{,}1328125 & -0{,}140625 \\ -0{,}09375 & 0{,}0703125 & -0{,}015625 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Comprobamos, por ejemplo el primer 1 del resultado: es la suma de productos de la primera fila de la matriz de la izquierda por la primera columna de la matriz de la derecha

(1 . 0,0625) + (3 . 0,15625) + (-5 . -0,09375) = 1

Usted puede calcular los restantes…

O puede calcular la inversa con ayuda de la computadora y corroborar los resultados! Vea los siguientes recursos:

- Implementación del algoritmo de Gauss para calcular la inversa de una matriz utilizando Excel ((Insertar video # __ : "Inversa de una matriz - Algoritmo de Gauss en Excel"))
- Obtención de la matriz inversa utilizando funciones de biblioteca en Excel y Python ((Insertar video # __ : "Inversa de una matriz – Funciones de biblioteca en Excel y Python"))
- Aplicación web que nos permite calcular la inversa de una matriz de hasta 7x7 y nos muestra paso a paso la aplicación del algoritmo de gauss: http://es.onlinemschool.com/math/assistance/matrix/inverse/

Veamos el caso con un ejemplo:

Ya habíamos calculado en la herramienta anterior la inversa de una matriz de 3x3:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \to \boldsymbol{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}0625 & -0{,}046875 & 0{,}34375 \\ 0{,}15625 & 0{,}1328125 & -0{,}140625 \\ -0{,}09375 & 0{,}0703125 & -0{,}015625 \end{bmatrix}$$

Aprovecharemos ese resultado que ya tenemos para ver cómo opera el método de la inversa para resolver un sistema de ecuaciones. Para ello, consideremos que el Sistema a resolver es el siguiente:

$$\begin{cases} x + 3y - 5z = 6 \\ 2x + 4y + 8z = 2 \\ 3x + 2z = 5 \end{cases}$$

Como puede observarse, hemos utilizado la Matriz A como Matriz de Coeficientes para este sistema, a lo que sólo deberemos agregar el vector o matriz columna < 6, 2, 5> para los Términos Independientes. Así tendremos:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \;;\; b = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Para resolver el sistema sabemos que **A . s = b** y por lo tanto **s = A-1 . b**

Y ya calculamos antes:

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}0625 & -0{,}046875 & 0{,}34375 \\ 0{,}15625 & 0{,}1328125 & -0{,}140625 \\ -0{,}09375 & 0{,}0703125 & -0{,}015625 \end{bmatrix}$$

Tenemos entonces que:

$$s = \begin{bmatrix} 0{,}0625 & -0{,}046875 & 0{,}34375 \\ 0{,}15625 & 0{,}1328125 & -0{,}140625 \\ -0{,}09375 & 0{,}0703125 & -0{,}015625 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Operando el producto matricial, obtenemos la solución del sistema:

$$s = \begin{bmatrix} 2 \\ 0{,}5 \\ -0{,}5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 0{,}5 \\ z = -0{,}5 \end{cases}$$

Finalmente, en esto también la tecnología nos da una mano!

Podemos calcular la inversa de una matriz y hacer el producto utilizando múltiples herramientas informáticas! A continuación veremos esta solución en obra mediante Excel, y Python.

((Insertar video (#17) solucionando el sistema dado con Excel y con Python, mediante el método de la inversa))

AUTOEVALUACIÓN SP4-H5

1. Resuelva los mismos sistemas de la autoevaluación anterior, pero utilizando el método de la Inversa:

   a. $\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ -z = 36 \\ -x + y + 2z = -10 \end{cases}$

   b. $\begin{cases} -x + 2y + z = 0 \\ -2x + 3y - z = 4 \\ -3z + 3y - 2x + 5z = 10 \end{cases}$

   c. $\begin{cases} 2x + 4w + 2y = 8 \\ -z + w = 5 \\ 3x + y + 4z - w = 6 \\ -z + 4y + 2z = -1 \end{cases}$

2. Resuelva los siguientes sistemas utilizando el método de la Inversa:

a. $\begin{cases} -3x + 2y = 0 \\ -5y - z = -6 \\ x + y + 3z = 8 \end{cases}$ ((Respuesta correcta: x=0,5 ; y=0,75 ; z=2,25))

b. $\begin{cases} -2x + z = 0 \\ -5x + 3y - z = 60 \\ -2x + 3y + 5z = 15 \end{cases}$ ((Respuesta correcta: x=-3 ; y=13 ; z=-6))

SP4H6: Solución a Sistemas de Ecuaciones mediante el Método de Cramer

Quizá a estas alturas creemos haber descubierto ya toda la magia posible de los Determinantes… Pues NO, de hecho hay más!

Resulta que Gabriel Cramer (*matemático suizo nacido en 1704*) descubrió que la solución de un Sistema de Ecuaciones puede obtenerse haciendo unos simples cocientes entre algunos determinantes de la Matriz de Coeficientes y Matrices Particulares de cada variable (reemplazando en la Matriz de coeficientes la columna de cada variable por los valores de los Términos Independientes).

Los determinantes que deben calcularse son:

- El de la matriz de coeficientes: **D(C)**
- El propio de cada variable: que es el de la matriz de coeficientes pero "reemplazando" la columna de la variable en cuestión con la columna de términos independientes. Los llamaremos genéricamente como D(x), D(y), D(z) y así para cada variable

Luego, con un simple cociente entre ***D(C)*** y ***D(x)*** obtenemos el valor de la variable ***x*** para la Solución del Sistema; y del mismo modo para cada variable.

x = D(x) / D(C)

y = D(y) / D(C)

z = D(z) / D(C)

Veamos un ejemplo:

Utilizaremos nuevamente el sistema de la herramienta anterior, cuyas soluciones ya conocemos de antemano, y así nos resultará más práctico comprobar el funcionamiento de este método.

Sea el Sistema:

$$\begin{cases} x + 3y - 5z = 6 \\ 2x + 4y + 8z = 2 \\ 3x + 2z = 5 \end{cases}$$

Su representación Matricial está dada por:

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \;;\; ti = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Siendo **A** la Matriz de Coeficientes, y **b** el vector vertical de Términos Independientes.

Calcularemos entonces los 4 Determinantes necesarios en este caso (*usando Sarrus, por ejemplo*) :

$$\boldsymbol{Det(C)} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 128$$

$$\boldsymbol{Det(x)} = \begin{vmatrix} \mathbf{6} & 3 & -5 \\ \mathbf{2} & 4 & 8 \\ \mathbf{5} & 0 & 2 \end{vmatrix} = 256$$

$$\boldsymbol{Det(y)} = \begin{vmatrix} 1 & \mathbf{6} & -5 \\ 2 & \mathbf{2} & 8 \\ 3 & \mathbf{5} & 2 \end{vmatrix} = 64$$

$$\boldsymbol{Det(z)} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & \mathbf{6} \\ 2 & 4 & \mathbf{2} \\ 3 & 0 & \mathbf{5} \end{vmatrix} = -64$$

Entonces, la solución del sistema será:

$$\begin{cases} x = \dfrac{Det(x)}{Det(C)} = \dfrac{256}{128} = 2 \\ y = \dfrac{Det(y)}{Det(C)} = \dfrac{64}{128} = 0{,}5 \\ z = \dfrac{Det(z)}{Det(C)} = -\dfrac{64}{128} = -0{,}5 \end{cases}$$

((Insertar video (#18) con “otro” ejemplo, utilizando el mismo método: incluir clasificación del sistema para asegurarnos que tenga una única solución))

AUTOEVALUACIÓN SP4-H6

---

1. Resuelva los mismos sistemas de la autoevaluación anterior, pero utilizando el método de Cramer:

a. $\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ -z = 36 \\ -x + y + 2z = -10 \end{cases}$

b. $\begin{cases} -x+2y+z=0 \\ -2x+3y-z=4 \\ -3z+3y-2x+5z=10 \end{cases}$

c. $\begin{cases} 2x+4w+2y=8 \\ -z+w=5 \\ 3x+y+4z-w=6 \\ -z+4y+2z=-1 \end{cases}$

2. Resuelva los siguientes sistemas utilizando el método de Cramer:

a. $\begin{cases} 4x+2z=16 \\ -5y-z=-18 \\ 3x-y+3z=5 \end{cases}$ ((Respuesta correcta: x=5 ; y=4 ; z=-2))

b. $\begin{cases} 3x+y-z=4 \\ -3y+z=4 \\ -3x+3y+5z=-4 \end{cases}$ ((Respuesta correcta: x=2 ; y=-1 ; z=1))

La Situación Profesional se resuelve operando con matrices según las herramientas vistas. Veremos a continuación cada una de las cuestiones planteadas, y su solución.

Lo primero será expresar la información que tenemos de manera matricial:

Matriz A: Producto / HsMaq unitario

Prod/Maq	Hs.Maq#1	Hs.Maq#2	Hs.Maq#3	Hs.Maq#4	Hs.Maq#5
Prod#1	0,80	2,00	0,25	0,00	2,00
Prod#2	2,00	0,40	1,00	1,00	0,10
Prod#3	3,00	1,00	1,30	1,00	0,00
Prod#4	1,20	2,00	0,00	1,20	0,00
Prod#5	0,70	2,10	1,10	0,40	0,00
Prod#6	2,00	0,80	1,20	0,50	1,20
Prod#7	1,50	1,30	1,00	0,20	1,10
Prod#8	1,80	1,20	0,00	3,00	0,50

$$A = \begin{bmatrix} 0,80 & 2,00 & 0,25 & 0,00 & 2,00 \\ 2,00 & 0,40 & 1,00 & 1,00 & 0,10 \\ 3,00 & 1,00 & 1,30 & 1,00 & 0,00 \\ 1,20 & 2,00 & 0,00 & 1,20 & 0,00 \\ 0,70 & 2,10 & 1,10 & 0,40 & 0,00 \\ 2,00 & 0,80 & 1,20 & 0,50 & 1,20 \\ 1,50 & 1,30 & 1,00 & 0,20 & 1,10 \\ 1,80 & 1,20 & 0,00 & 3,00 & 0,50 \end{bmatrix}$$

Matriz B: Productos / Mes

Prod/Mes	Mes#1	Mes#2	Mes#3	Mes#4	Mes#5
Prod#1	12,00	20,00	8,00	7,00	11,00
Prod#2	25,00	12,00	13,00	18,00	14,00
Prod#3	0,00	25,00	20,00	32,00	11,00
Prod#4	12,00	25,00	23,00	14,00	8,00
Prod#5	8,00	12,00	12,00	12,00	21,00
Prod#6	5,00	15,00	11,00	14,00	20,00
Prod#7	7,00	8,00	17,00	11,00	15,00
Prod#8	14,00	10,00	21,00	15,00	19,00

$$B = \begin{bmatrix} 12 & 20 & 8 & 7 & 11 \\ 25 & 12 & 13 & 18 & 14 \\ 0 & 25 & 20 & 32 & 11 \\ 12 & 25 & 23 & 14 & 8 \\ 8 & 12 & 12 & 12 & 21 \\ 5 & 15 & 11 & 14 & 20 \\ 7 & 8 & 17 & 11 & 15 \\ 14 & 10 & 21 & 15 & 19 \end{bmatrix}$$

Mes	Costo Eléct.
Mes#1	$ 100.373
Mes#2	$ 154.678
Mes#3	$ 154.755
Mes#4	$ 148.490
Mes#5	$ 148.258

$$C = \begin{bmatrix} 100.373 \\ 154.678 \\ 154.755 \\ 148.490 \\ 148.258 \end{bmatrix}$$

Ahora que podemos referirnos matemáticamente a estar matrices por su nombre (A, B, C) podemos analizar cada información requerida, y cómo obtenerla.

Los informes requeridos son los siguientes:

a. ¿Cuántas horas máquina se requieren para producir cada producto?
La información deberá proporcionarse en una Tabla que tenga sólo dos columnas: el identificador de cada máquina, y el tiempo total de uso de máquinas (sumando los tiempos parciales en cada máquina)

Partiendo de la tabla provista (matriz **A**):

Matriz A: Producto / HsMaq unitario

Prod/Maq	Hs.Maq#1	Hs.Maq#2	Hs.Maq#3	Hs.Maq#4	Hs.Maq#5
Prod#1	0,80	2,00	0,25	0,00	2,00
Prod#2	2,00	0,40	1,00	1,00	0,10
Prod#3	3,00	1,00	1,30	1,00	0,00
Prod#4	1,20	2,00	0,00	1,20	0,00
Prod#5	0,70	2,10	1,10	0,40	0,00
Prod#6	2,00	0,80	1,20	0,50	1,20
Prod#7	1,50	1,30	1,00	0,20	1,10
Prod#8	1,80	1,20	0,00	3,00	0,50

Queremos obtener, **por fila**, la "suma" de cada una de sus celdas. Podemos obtener matemáticamente dicha suma si hacemos el "Producto Matricial" de esta matriz, por un **vector columna** de 8 posiciones, enteramente compuesto de 1 (unos). Así, en lenguaje matricial, tenemos que el Resultado (**R**) será la Matriz columna (o vector) resultante de:

$R = A \ . \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ o sea, de manera más explícita….

$$R = \begin{bmatrix} 0{,}80 & 2{,}00 & 0{,}25 & 0{,}00 & 2{,}00 \\ 2{,}00 & 0{,}40 & 1{,}00 & 1{,}00 & 0{,}10 \\ 3{,}00 & 1{,}00 & 1{,}30 & 1{,}00 & 0{,}00 \\ 1{,}20 & 2{,}00 & 0{,}00 & 1{,}20 & 0{,}00 \\ 0{,}70 & 2{,}10 & 1{,}10 & 0{,}40 & 0{,}00 \\ 2{,}00 & 0{,}80 & 1{,}20 & 0{,}50 & 1{,}20 \\ 1{,}50 & 1{,}30 & 1{,}00 & 0{,}20 & 1{,}10 \\ 1{,}80 & 1{,}20 & 0{,}00 & 3{,}00 & 0{,}50 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5{,}05 \\ 4{,}50 \\ 6{,}30 \\ 4{,}40 \\ 4{,}30 \\ 5{,}70 \\ 5{,}10 \\ 6{,}50 \end{bmatrix}$$

Luego será cuestión de "rotular" adecuadamente cada dato

b. ¿Cuántos productos se produjeron por mes?
La información deberá proporcionarse en una Tabla que tenga sólo dos columnas: el identificador de cada mes, y la cantidad total de productos fabricados en él (sumando las cantidades parciales de cada producto)

Partiendo de la tabla provista (matriz **B**):

Matriz B: Productos / Mes

Prod/Mes	Mes#1	Mes#2	Mes#3	Mes#4	Mes#5
Prod#1	12,00	20,00	8,00	7,00	11,00
Prod#2	25,00	12,00	13,00	18,00	14,00
Prod#3	0,00	25,00	20,00	32,00	11,00
Prod#4	12,00	25,00	23,00	14,00	8,00
Prod#5	8,00	12,00	12,00	12,00	21,00
Prod#6	5,00	15,00	11,00	14,00	20,00
Prod#7	7,00	8,00	17,00	11,00	15,00
Prod#8	14,00	10,00	21,00	15,00	19,00

Para usar una estrategia similar a la del punto anterior, necesitaríamos que los datos estén dispuestos al revés! Teniendo en las filas los meses, y en las columnas los productos… Entonces podemos hacer la Transpuesta de B para que nos queden acomodados como necesitamos!

$$B = \begin{bmatrix} 12 & 20 & 8 & 7 & 11 \\ 25 & 12 & 13 & 18 & 14 \\ 0 & 25 & 20 & 32 & 11 \\ 12 & 25 & 23 & 14 & 8 \\ 8 & 12 & 12 & 12 & 21 \\ 5 & 15 & 11 & 14 & 20 \\ 7 & 8 & 17 & 11 & 15 \\ 14 & 10 & 21 & 15 & 19 \end{bmatrix} \rightarrow \quad B^T = \begin{bmatrix} 12 & 25 & 0 & 12 & 8 & 5 & 7 & 14 \\ 20 & 12 & 25 & 25 & 12 & 15 & 8 & 10 \\ 8 & 13 & 20 & 23 & 12 & 11 & 17 & 21 \\ 7 & 18 & 32 & 14 & 12 & 14 & 11 & 15 \\ 11 & 14 & 11 & 8 & 21 & 20 & 15 & 19 \end{bmatrix}$$

Y luego procedemos de modo similar: obtenemos, **<u>por fila</u>**, la "suma" de cada una de sus celdas. Podemos obtener matemáticamente dicha suma si hacemos el "Producto Matricial" de esta matriz, por un **<u>vector columna</u>** de 5 posiciones, enteramente compuesto de 1 (unos). Así, en lenguaje matricial, tenemos que el Resultado (**R**) será **vector columna** resultante de:

$R = B^T \ . \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ o sea, de manera más explícita….

$$R = \begin{bmatrix} 12 & 25 & 0 & 12 & 8 & 5 & 7 & 14 \\ 20 & 12 & 25 & 25 & 12 & 15 & 8 & 10 \\ 8 & 13 & 20 & 23 & 12 & 11 & 17 & 21 \\ 7 & 18 & 32 & 14 & 12 & 14 & 11 & 15 \\ 11 & 14 & 11 & 8 & 21 & 20 & 15 & 19 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 83 \\ 127 \\ 125 \\ 123 \\ 119 \end{bmatrix}$$

Luego será cuestión de "rotular" adecuadamente cada dato, y listo!

c. ¿Cuántas horas de uso efectivo tuvo cada máquina, en cada mes?
La información deberá proporcionarse en una Tabla como la que sigue, con todas las celdas completas:

Mes	Hs.Maq#1	Hs.Maq#2	Hs.Maq#3	Hs.Maq#4	Hs.Maq#5
Mes#1	125,30	???	???	???	???
Mes#2	???	???	???	???	???
Mes#3	???	???	???	???	???
Mes#4	???	149,90	???	???	???
Mes#5	???	???	???	???	???

La información que tenemos disponible en B^T (de rango 5x8) es Mes/Producto (meses en las filas, productos en las columnas), y la información de A (de rango 8x5) es Producto/Hs.Máquina (productos en las filas, Hs.Máquina en las columnas).
Como puede verse, las matrices son compatibles B^T_{5x8} y A_{8x5} y la dimensión pivote entre ellas es la misma (el producto) o sea que Mes/Producto * Producto/Hs.Máquina nos dará la relación buscada: Mes/Hs.Máquina

De modo que la respuesta es tan simple como **R = B^T . A**

De manera más explícita:

$$R = \begin{bmatrix} 12 & 25 & 0 & 12 & 8 & 5 & 7 & 14 \\ 20 & 12 & 25 & 25 & 12 & 15 & 8 & 10 \\ 8 & 13 & 20 & 23 & 12 & 11 & 17 & 21 \\ 7 & 18 & 32 & 14 & 12 & 14 & 11 & 15 \\ 11 & 14 & 11 & 8 & 21 & 20 & 15 & 19 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0{,}80 & 2{,}00 & 0{,}25 & 0{,}00 & 2{,}00 \\ 2{,}00 & 0{,}40 & 1{,}00 & 1{,}00 & 0{,}10 \\ 3{,}00 & 1{,}00 & 1{,}30 & 1{,}00 & 0{,}00 \\ 1{,}20 & 2{,}00 & 0{,}00 & 1{,}20 & 0{,}00 \\ 0{,}70 & 2{,}10 & 1{,}10 & 0{,}40 & 0{,}00 \\ 2{,}00 & 0{,}80 & 1{,}20 & 0{,}50 & 1{,}20 \\ 1{,}50 & 1{,}30 & 1{,}00 & 0{,}20 & 1{,}10 \\ 1{,}80 & 1{,}20 & 0{,}00 & 3{,}00 & 0{,}50 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} 125{,}30 & 104{,}70 & 49{,}80 & 88{,}50 & 47{,}20 \\ 213{,}40 & 179{,}40 & 88{,}70 & 110{,}90 & 73{,}00 \\ 213{,}70 & 168{,}50 & 84{,}40 & 137{,}30 & 59{,}70 \\ 234{,}30 & 149{,}90 & 102{,}35 & 125{,}80 & 52{,}20 \\ 190{,}80 & 157{,}00 & 93{,}15 & 113{,}00 & 73{,}40 \end{bmatrix}$$

Luego será cuestión de “rotular” adecuadamente cada fila y cada columna, y listo!

d. Sabemos cuál fue el consumo eléctrico total de cada mes, pero no está discriminado por máquina… Aunque sí sabemos, del cuadro anterior, cuál fue la cantidad de horas de uso por mes de cada máquina! Entonces podemos responder a la última y más importante de las consultas: **¿Cuál es el “Costo por hora de funcionamiento” de cada máquina?**
Para resolver esta cuestión, evidentemente podemos plantear un Sistema de 5 Ecuaciones con 5 incógnitas, uniendo a la información anterior la columna de consumo eléctrico mensual. Nuestros “datos” pueden verse en la siguiente tabla (ahora ya la tenemos con todas sus celdas completas):

Mes	Hs.Maq#1	Hs.Maq#2	Hs.Maq#3	Hs.Maq#4	Hs.Maq#5	Costo Eléct.
Mes#1	125,30	104,70	49,80	88,50	47,20	$ 100.373
Mes#2	213,40	179,40	88,70	110,90	73,00	$ 154.678
Mes#3	213,70	168,50	84,40	137,30	59,70	$ 154.755
Mes#4	234,30	149,90	102,35	125,80	52,20	$ 148.490
Mes#5	190,80	157,00	93,15	113,00	73,40	$ 148.258

Aquí, puede observarse que las 125,30 hs que trabajó la máquina #1 en el primer mes, más las 104,70 horas que trabajó la Maq#2, más las horas de trabajo de la Maq#3 para el mismo mes, y las de la #4 y la #5, totalizan $ 100.373. Y del mismo modo para los restantes meses… Entonces, si consideramos el "Costo por Hora" de cada máquina como una variable del sistema (que llamaremos para simplificar la nomenclatura: v, w, x, y, z), y los datos de estas celdas como sus respectivos coeficientes, y la columna de costo eléctrico como el término independiente, el Sistema queda construido!

<u>Para resolverlo definiremos las siguientes Matrices</u>:
C = Matriz de Coeficientes (Hs.Máquina trabajadas por mes)
s = Vector columna con las variables del sistema (Costo hora de cada máquina)
e = Vector columna con los Términos Independientes del Sistema (factura de electricidad para cada mes)

$$C = \begin{bmatrix} 125,30 & 104,70 & 49,80 & 88,50 & 47,20 \\ 213,40 & 179,40 & 88,70 & 110,90 & 73,00 \\ 213,70 & 168,50 & 84,40 & 137,30 & 59,70 \\ 234,30 & 149,90 & 102,35 & 125,80 & 52,20 \\ 190,80 & 157,00 & 93,15 & 113,00 & 73,40 \end{bmatrix} \; ; \; s = \begin{bmatrix} v \\ w \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} \; ; \; e = \begin{bmatrix} 100373 \\ 154678 \\ 154755 \\ 145490 \\ 148258 \end{bmatrix}$$

Ahora simplemente deberemos utilizar cualquiera de las técnicas vistas para resolverlo y obtener el valor de cada variable, es decir, para enterarnos de cuánto cuesta cada hora de trabajo de cada máquina: *aquel valor que multiplicado por el trabajo realizado en cada mes, y sumando todos esos productos parciales, nos dice cuánto se pagó de factura eléctrica*.

Si construimos por ejemplo la matriz ampliada y calculamos los determinantes de Cramer, tendremos:

$$C_{ampliada} = \begin{bmatrix} 125,30 & 104,70 & 49,80 & 88,50 & 47,20 & 100373 \\ 213,40 & 179,40 & 88,70 & 110,90 & 73,00 & 154678 \\ 213,70 & 168,50 & 84,40 & 137,30 & 59,70 & 154755 \\ 234,30 & 149,90 & 102,35 & 125,80 & 52,20 & 145490 \\ 190,80 & 157,00 & 93,15 & 113,00 & 73,40 & 148258 \end{bmatrix}$$

Calculando los determinantes (*ojalá que con ayuda de la computadora…*) obtenemos:

D(C) = -36074005,76008
D(v) = -4328880691,20965
D(w) = -8657761382,41915
D(x) = -6132580979,21358
D(y) = -12625902016,028
D(z) = -15872562534,4352

Entonces, la solución del Sistema será:

$$\begin{cases} v = \dfrac{D(v)}{D(C)} = -\dfrac{-4328880691{,}20965}{-36074005{,}76008} = 120 \\ w = \dfrac{D(w)}{D(C)} = \dfrac{-8657761382{,}41915}{-36074005{,}76008} = 240 \\ x = \dfrac{D(x)}{D(C)} = \dfrac{-6132580979{,}21358}{-36074005{,}76008} = 170 \\ y = \dfrac{D(y)}{D(C)} = \dfrac{-12625902016{,}028}{-36074005{,}76008} = 350 \\ z = \dfrac{D(z)}{D(C)} = \dfrac{-15872562534{,}4352}{-36074005{,}76008} = 440 \end{cases}$$

Dicho en castellano:

- La Máquina #1 tiene un consumo de $120 por hora de funcionamiento
- La Máquina #2 tiene un consumo de $240 por hora de funcionamiento
- La Máquina #3 tiene un consumo de $170 por hora de funcionamiento
- La Máquina #4 tiene un consumo de $350 por hora de funcionamiento
- La Máquina #5 tiene un consumo de $440 por hora de funcionamiento

Puede arribar a los mismos resultados utilizando cualquier otro de los métodos vistos…

Por ejemplo, mediante el **<u>método de la Inversa</u>**: calculamos $\mathbf{C}^{-1}$ y el producto de $\mathbf{C}^{-1}$ por el vector **e** nos dará el vector **s**, es decir, la solución!
Veámoslo:

$$C = \begin{bmatrix} 125{,}30 & 104{,}70 & 49{,}80 & 88{,}50 & 47{,}20 \\ 213{,}40 & 179{,}40 & 88{,}70 & 110{,}90 & 73{,}00 \\ 213{,}70 & 168{,}50 & 84{,}40 & 137{,}30 & 59{,}70 \\ 234{,}30 & 149{,}90 & 102{,}35 & 125{,}80 & 52{,}20 \\ 190{,}80 & 157{,}00 & 93{,}15 & 113{,}00 & 73{,}40 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \; C^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}061482933 & 0{,}029761492 & -0{,}053837682 & 0{,}033327942 & -0{,}049048941 \\ -0{,}078337809 & 0{,}003328208 & 0{,}0644419 & -0{,}036966513 & 0{,}020940817 \\ -0{,}097059313 & -0{,}043077877 & 0{,}048142137 & -0{,}015674694 & 0{,}077248202 \\ 0{,}009631659 & -0{,}033160335 & 0{,}024342418 & -0{,}006749228 & 0{,}011786887 \\ 0{,}116087056 & 0{,}021237068 & -0{,}096461606 & 0{,}022718416 & -0{,}019846846 \end{bmatrix}$$

Finalmente,

$$s = e.C^{-1} = \begin{bmatrix} 100373 \\ 154678 \\ 154755 \\ 145490 \\ 148258 \end{bmatrix} .C^{-1} = \begin{bmatrix} 120 \\ 240 \\ 170 \\ 350 \\ 440 \end{bmatrix}$$

A modo de cierre: potentes herramientas por descubrir…

Wowww! Increíble la potencia de las Matrices, ¿verdad?

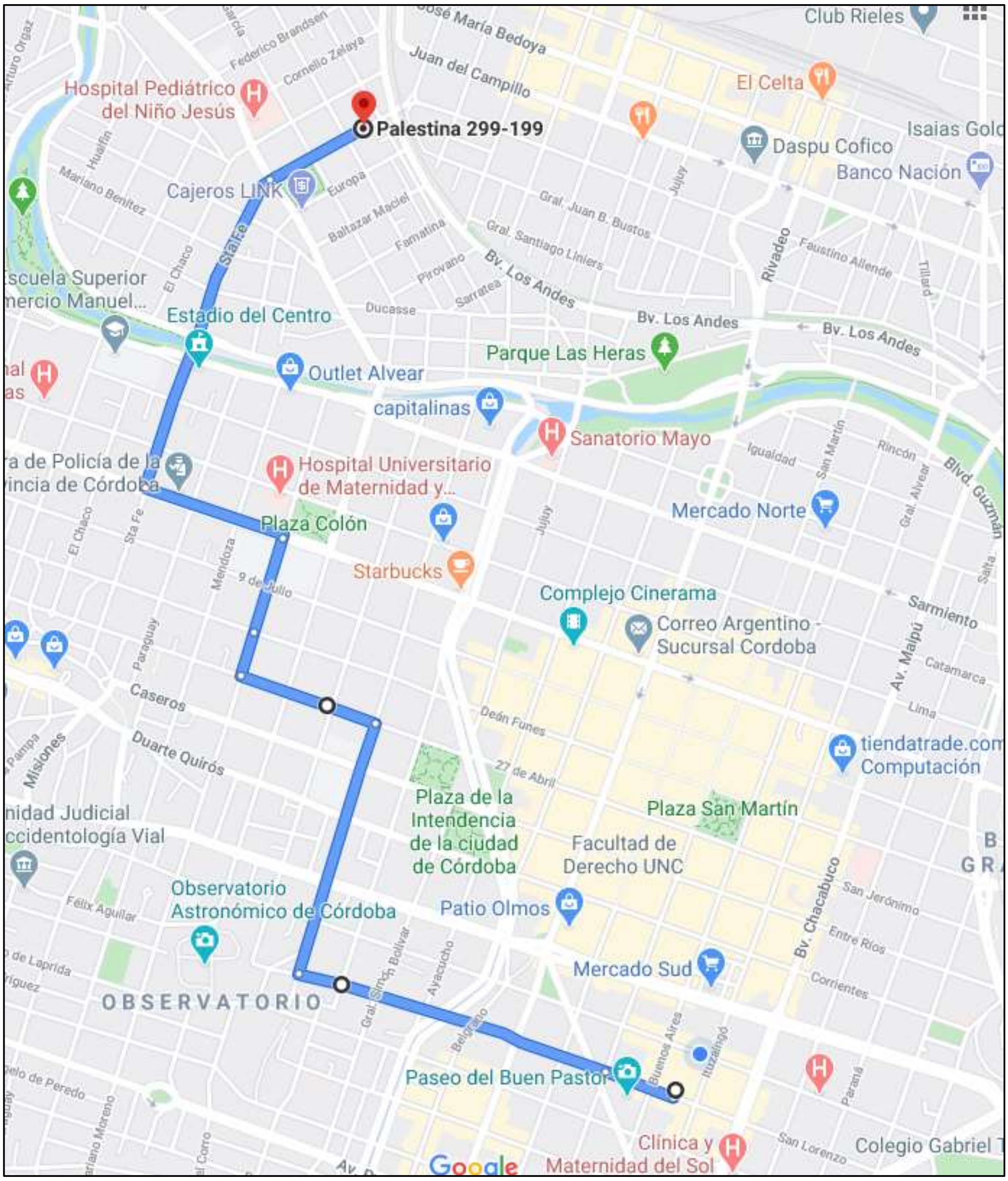
¿Habrá podido imaginar Gauss todo lo que se derivaría de su trabajo?

Utilizaremos estas herramientas incluso en otros ámbitos… En la siguiente situación profesional trabajaremos con un tipo de matriz muy especial: los vectores.

Sus aplicaciones son increíbles! Descubrámoslas juntos!!

Una empresa dedicada al desarrollo de aplicaciones GPS necesita agregar nuevas funcionalidades a su software: se trata de la posibilidad de calcular la **distancia lineal** entre dos puntos que se encuentran unidos por una ruta trazada.

Por ejemplo: el sistema puede establecer entre dos puntos de la ciudad la siguiente ruta:

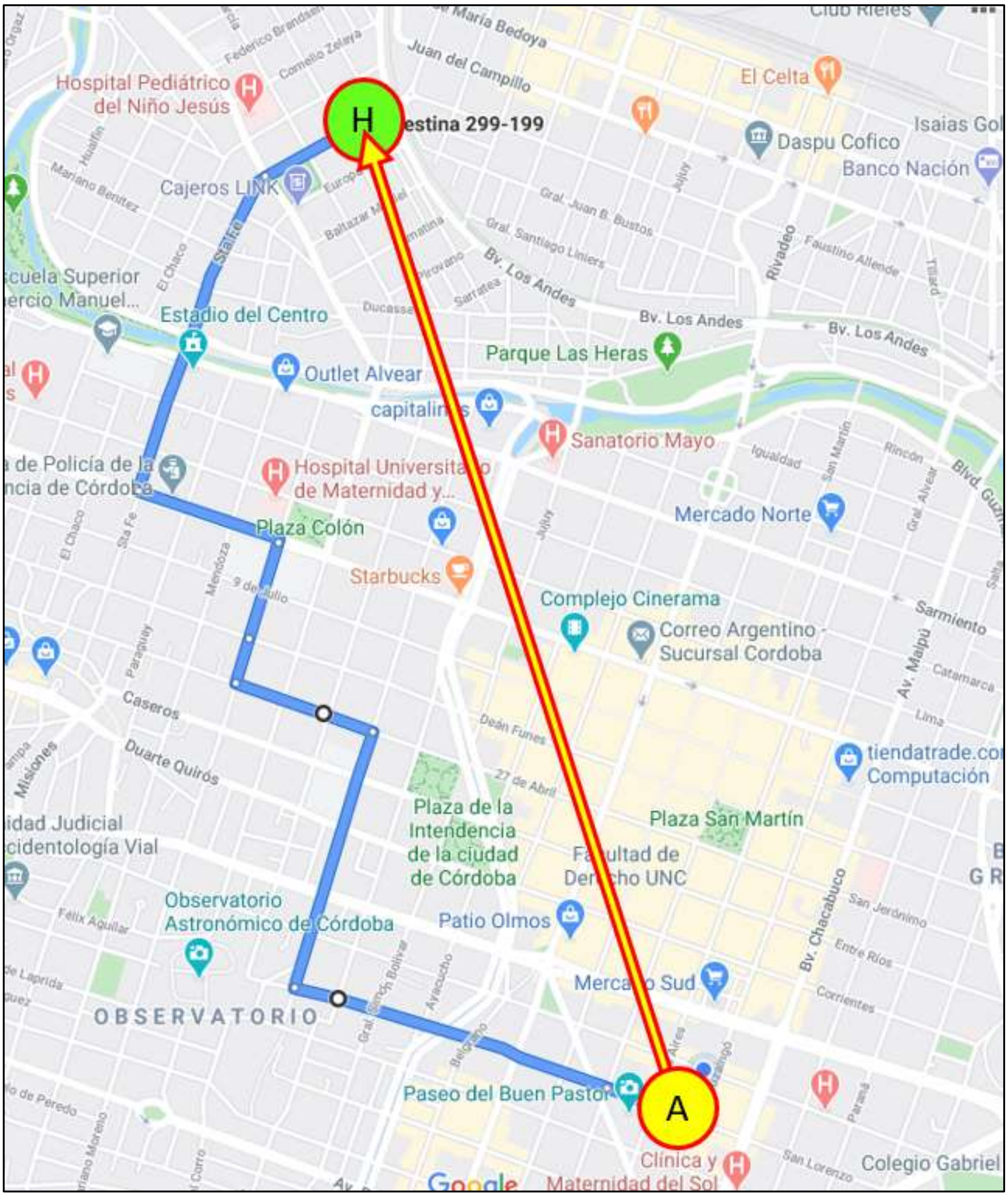


Los datos con los que contamos para cada segmento son sólo 2:

- Su dirección
- Su longitud (en metros).

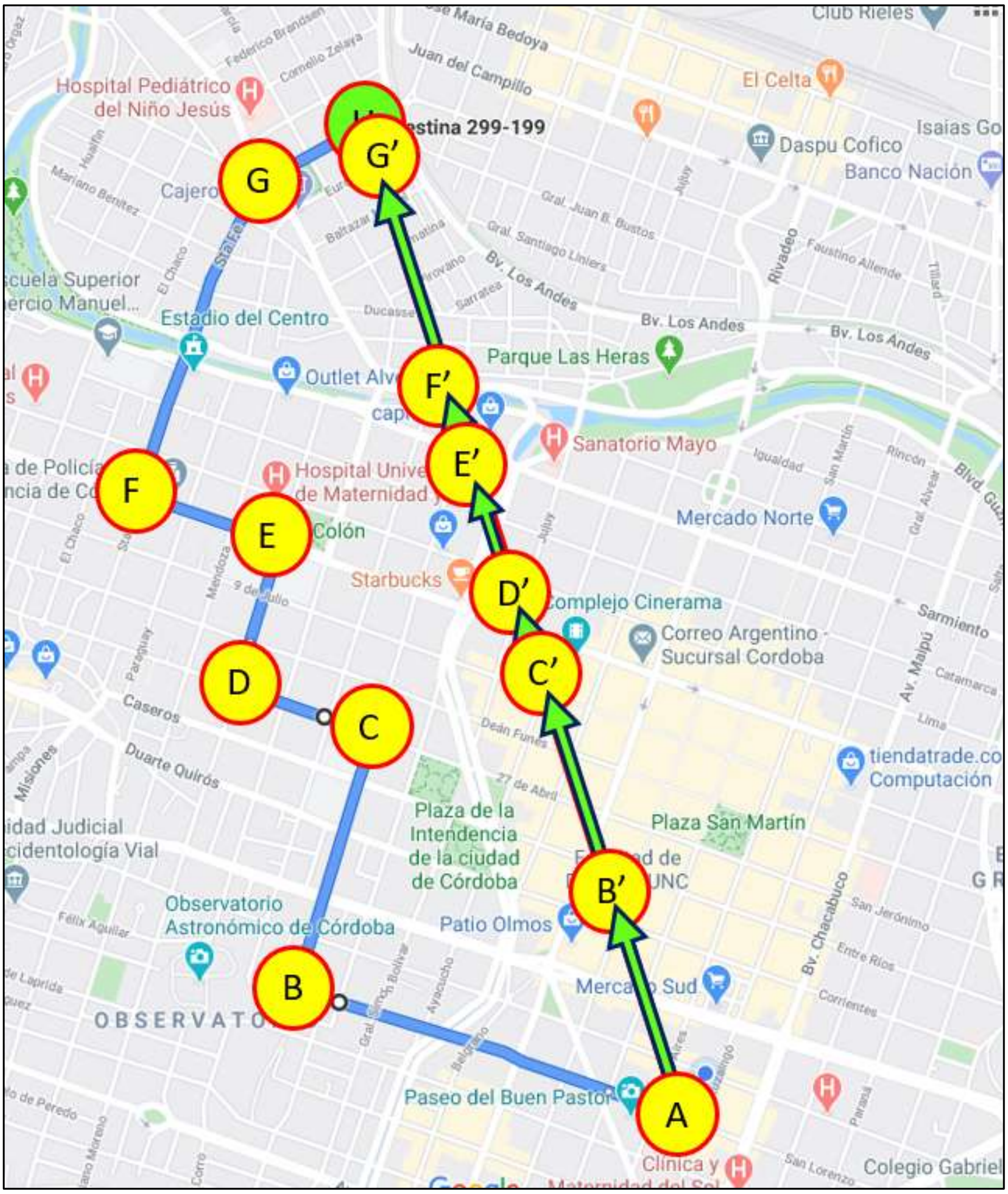
Lo que se requiere es desarrollar los algoritmos matemáticos que permitan lo siguiente:

1. Poder calcular la **distancia lineal** entre el punto de origen y el de destino. Para ejemplificarlo, observe dicha distancia graficada de manera superpuesta.



Si la ruta original es de 3.200 mts, lo que necesitan averiguar es cuál es la distancia lineal graficada (*que obviamente será menor*).

2. Además, también solicitan poder establecer cuántos metros avanza en esa **trayectoria lineal** cada segmento de los que componen la ruta original. Puede interpretarse la necesidad en la siguiente imagen.



Dicho de otro modo: Si el trayecto (A) – (B) tiene una longitud de 850 mts, ¿cuánto medirá el segmento (A) – (B’)?
¿Y cuál será la diferencia entre (B) – (C) y (B’) – (C’)?
Y así uno tras otro hasta el final…

Claramente, la suma de las longitudes de todos los **<u>segmentos lineales</u>** calculados dará la distancia total entre (A) y (H).

Veremos a continuación un recurso matemático maravilloso, sumamente versátil, que permite estas y muchas otras operaciones: los **<u>Vectores</u>**!

Empecemos por el principio...

¿Qué es un vector?

Podemos considerarlo de tres maneras:

- Un vector es un conjunto de números, en un determinado orden
- Un vector es una matriz de sólo una dimensión
- Un vector es un "segmento orientado" que tiene una determinada longitud, dirección y sentido.

Veamos algunos ejemplos que nos permitirán entender más esta idea. Los siguientes son ejemplos de vectores, representados de diferente manera:

El primer vector lo llamaremos $\vec{\boldsymbol{r}}$ y estará compuesto por dos números: 4 y 3. *Los vectores nombran habitualmente con letras minúsculas desde la* ***r*** *en adelante y se les suele colocar una flechita encima - aunque no es obligatorio utilizar esa nomenclatura -.*

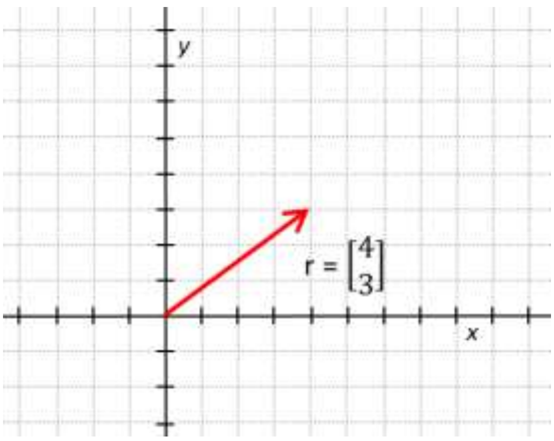
Se puede representar matemáticamente así:

$\vec{r} = (\,4\,;\;3\,)$ o así: $\vec{r} = <\;4\,;\,3\,>$

o también así:

$\vec{r} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$

También podríamos graficarlo en un sistema de ejes cartesianos del siguiente modo:



Este es lo que denominamos un vector en 2D o dos dimensiones. Decimos que pertenece al espacio vectorial $\mathbb{R}^2$ (eso significa 2 dimensiones "Reales", cabe la aclaración porque también podría tratarse un vector con otro tipo de números, como los complejos por ejemplo).

Un **Espacio Vectorial** es un concepto matemático abstracto sobre el que nosotros trabajaremos desde la práctica, sin entrar en definiciones elevadas. Por el momento, entendamos a dicho espacio como el capaz de contener todos los vectores de un mismo orden.

Cada uno de los números del vector se denomina "**<u>Componente</u>**", y normalmente designan un valor que refiere a cada una de sus dimensiones. En este caso, el vector **< 4 ; 3 >** tiene un 4 como componente en **x**, y un 3 como componente en **y**.

Como en nuestro caso anterior se trató de vectores de 2 componentes, y ambos componentes son números reales, decimos que dichos vectores están en $\mathbb{R}^2$.

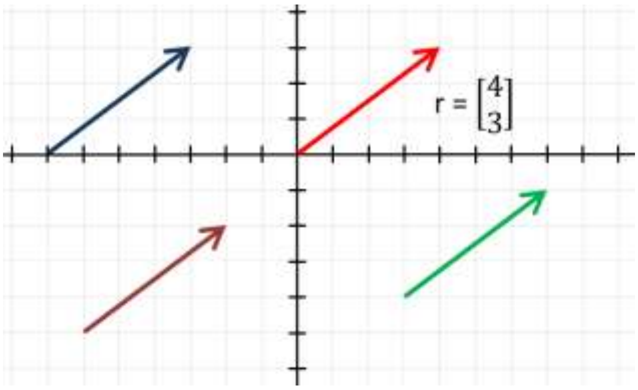
Genéricamente, designamos a cada componente de un vector por su ubicación u orden, requiriendo un único subíndice y no dos como sucedía con las matrices:

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

MUY IMPORTANTE!!

Todo vector tiene <u>sólo dos atributos</u>: su **orientación**, y su **magnitud** (o tamaño, o longitud…) *Esto último se denomina formalmente su "**<u>Módulo</u>**"*. Pero **<u>NO</u>** <u>tiene una "***ubicación***"</u>. De hecho, el vector anterior podría representarse en cualquier lugar del plano cartesiano: la única condición es que desde su punto de partida, hasta su punto de llegada, se desplace 4 unidades en **x**, y 3 unidades en **y**, pues sus componentes son (4 ; 3).

En la imagen siguiente graficamos el mismo vector varias veces… Y es, en todos los casos, el mismo vector!



Puede observar cómo el desplazamiento entre punto de origen y punto de destino de cada segmento orientado es el mismo.

Entonces… ¿Siempre un vector es una coordenada en x e y?

Digamos que esa es una "manera de interpretarlo"… Un vector no es, per se, una coordenada sino – tal cual vimos – es un <u>segmento orientado</u> en su espacio, con una determinada dirección, sentido y longitud.

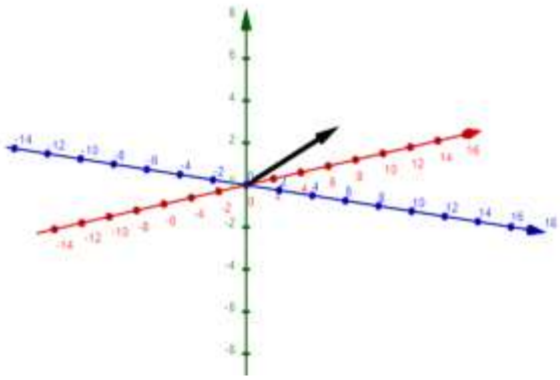
Sólo podemos considerarlo como una coordenada en su espacio si lo graficamos partiendo del origen, o sea, del punto (0 ; 0) en un plano cartesiano… En dicho punto se cortan los ejes del gráfico. Como ya dijimos, la imagen anterior presenta el mismo vector graficado cuatro veces: en la tabla siguiente podemos ver las coordenadas del punto de partida y punto de destino de cada una de esas representaciones gráficas del mismo vector

Color	Origen	Destino	Componente X	Componente Y
Rojo	(0 ; 0)	(4 ; 3)	4 - 0 = 4	3 - 0 = 3
Azul	(-7 ; 0)	(-3 ; 3)	(-3) - (-7) = 4	3 - 0 = 3
Verde	(3 ; -4)	(7 ; -1)	7 - 3 = 4	(-1) - (-4) = 3
Púrpura	(-6 ; -5)	(-2 ; -2)	(-2) - (-6) = 4	(-2) - (-5) = 3

Efectivamente, se trata del mismo vector en todos los casos, sólo que dibujado en un lugar diferente del gráfico.
Su primer componente (**x**) es la coordenada **x de Destino** menos la coordenada **x de Origen**. Lo mismo sucede con el segundo componente (**y**), que es la coordenada **y de Destino** menos la coordenada **y de Origen**.

Para el análisis de datos y abordaje de determinados problemas, puede ser conveniente considerar a los vectores como coordenadas, pero de nuevo: "Es sólo una interpretación posible".

Por otra parte, los vectores de 2 componentes (también llamados bidimensionales, o en 2D, o de orden 2) pueden ser graficados en el plano cartesiano, en **x** e **y**. También hay vectores en 3D, o de orden 3, cuya representación gráfica requeriría de tres ejes coordenados.



Está grafica (desarrollada con GeoGebra: www.geogebra.org) representa el vector

$$\vec{s} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Este vector proyecta su módulo **2** unidades en **x**, **3** unidades en **y**, y **4** unidades en **z**.

((Insertar aquí Video #19: Vector en 3D con GeoGebra))

https://youtu.be/IMrIqpzub0Q

((Poner lo que sigue en un Recuadro Destacado))

Nota: *Puede consultar en la web innumerables tutoriales y ejemplos del uso de esta magnífica herramienta... Además, para ver una breve introducción al uso de ese sistema, tiene aquí a continuación un breve video introductorio.*

((Insertar aquí Video #20: Introducción al GeoGebra: Desde cómo se abre –versión web- la distinción entre gráficas en 2D y 3D. Mostrar ejemplo de construcción de un par de funciones en 2D, activando y desactivando la vista de cada una:

En 2D:

a. Funciones distintas enfatizando el punto que se cortan.
b. Misma función con dos notaciones diferentes: explícita y general. Prendiendo y apagando una y otra para que se note que “son la misma”.

En 3D:

a. Definir un punto, luego un vector, Ojo! No la recta que definen. Todavía no lo vieron…
b. Rotar la gráfica desde múltiples ángulos, señalando con el mouse el valor en cada eje que acompaña al punto creado, o al extremo del vector.

Mensaje de cierre: investigar, investigar, e investigar…))

((Fin Recuadro Destacado))

Entonces… ¿Todos los vectores serán de 2 o de 3 dimensiones?

No. No existe límite para la cantidad de dimensiones de un vector, o un conjunto de vectores!

De hecho, las operaciones vectoriales, las reglas y propiedades que aprenderemos valen tanto para vectores en 2D, como en 3D, o 4D, o 500D. Eso es justamente lo “mágico” de trabajar con modelos matemáticos: que no debemos ceñirnos a las dos coordenadas que observamos en una hoja, ni a las tres que podemos experimentar con nuestros ojos. El modelo matemático multidimensional trasciende nuestros sentidos! Y de hecho, es común en las disciplinas tecnológicas y especialmente en la Programación e Inteligencia Artificial trabajar con vectores, o matrices en mucho más que 3 dimensiones!!

Coherencia: No obstante lo anterior, normalmente trabajaremos con “conjuntos de vectores”, realizando con ellos operaciones y construcciones que nos permitan obtener resultados para nuestros problemas… Y en ese contexto, todos los vectores serán de un mismo orden.

Diferencia entre Orientación, Dirección y Sentido

En nuestro vocabulario cotidiano solemos cometer ciertas imprecisiones, e incluso tal vez utilizar estas palabras como sinónimos, pero no lo son.

En el caso específico de los Vectores, la Dirección del vector es la Recta a la que pertenece: si nos refiriéramos a ella en otro contexto (el funcional) podríamos relacionarlo con el concepto de pendiente de una función lineal.

Por su parte, el Sentido dictamina hacia cuál de ambos lados de dicha recta apunta el vector.

Por eso, para referirnos de manera conjunta a ambos atributos, simplemente decimos “Orientación”, entendiendo como tal la dirección y sentido del vector.

Para poner esto en un ejemplo: los vectores $\vec{r} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ y $\vec{s} = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \end{bmatrix}$ son dos vectores de idéntico **Módulo**, idéntica **Dirección**, pero **Sentido** Opuesto. Grafíquelos y compruébelo.

Es más, sobre esos dos vectores podemos decir también que uno es combinación lineal del otro! Usted ya está familiarizado con esto a partir de lo visto entre las filas (o las columnas) de una matriz, cuando una es igual a la otra multiplicada por un escalar diferente de 0 (cero).

Operaciones elementales con vectores

Existen muchas operaciones definidas, y de hecho nosotros mismos podríamos inventar o definir otras tantas! El caso es que hay dos que son las operaciones por excelencia en el ámbito de los vectores: la suma vectorial, y el producto por un escalar. Son las que usted ya conoce: operan exactamente igual que como vimos con matrices.

Veremos a continuación cada una de ellas, su funcionalidad, sus implicaciones gráficas y propiedades.

Suma Vectorial

Sólo pueden sumarse vectores "compatibles", es decir, que tengan el mismo orden o, en un lenguaje un poco más técnico, que pertenezcan a un mismo espacio vectorial.

La mecánica es muy simple: se suman los componentes de uno con su homólogo del otro.

Por ejemplo: Sean los vectores

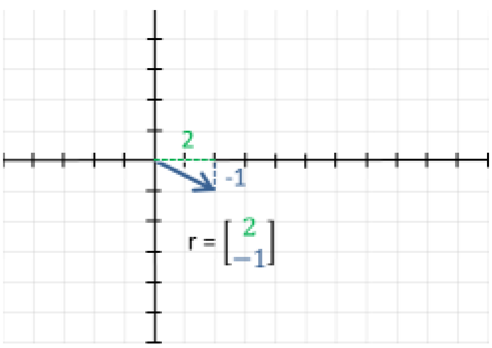
$\vec{r} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$; $\vec{s} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$

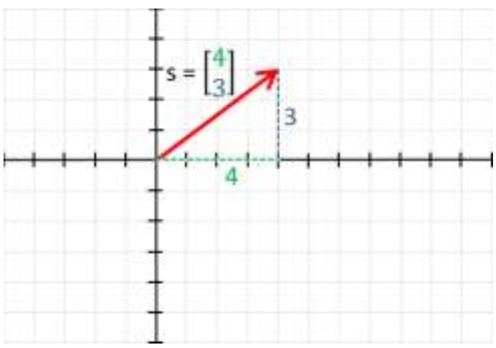
La suma vectorial es:

$$\vec{\boldsymbol{r}} + \vec{\boldsymbol{s}} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+4 \\ -1+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{6} \\ \mathbf{2} \end{bmatrix}$$

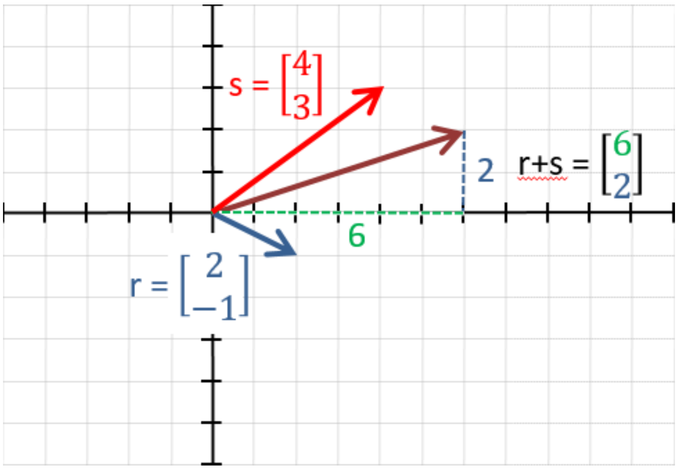
Esta operación tiene una propiedad geométrica maravillosa! Observemos su representación gráfica:

Estos son los dos vectores a sumar:

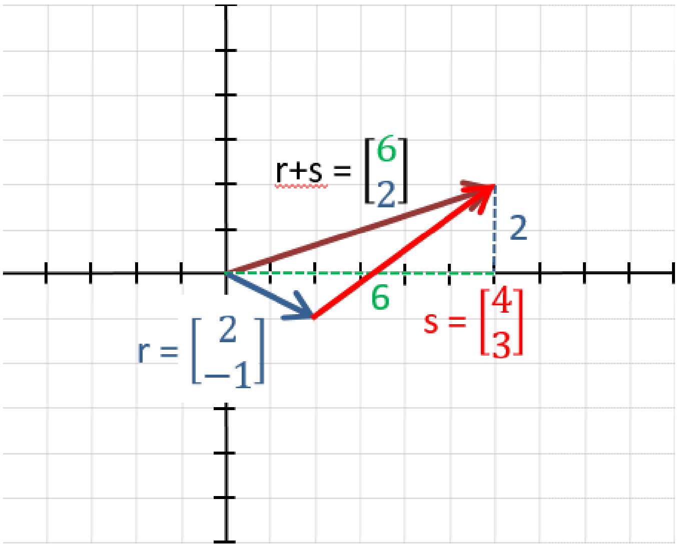




Y aquí los tenemos superpuestos junto al resultado de la suma:



Observe qué sucede si desplazamos en el plano el vector **s**, de manera que su punto de partida coincida con el punto de llegada de **r**…



¿Se ha dado cuenta? La suma de vectores nos permite "**encadenarlos**" de manera que haciendo coincidir el extremo inicial de uno con el final del anterior en la secuencia de suma, obtenemos un <u>recorrido</u> o <u>desplazamiento total</u> (desde el inicio del primero hasta el final del último) que es el **resultado de la suma**!

<u>Producto de un Vector por un Escalar</u>

En esta operación multiplicamos todos los componentes de un vector por un número real (llamado escalar). El resultado es un nuevo vector, de idéntica dirección al original pero de diferente magnitud, e incluso cambia de sentido si el escalar es negativo.

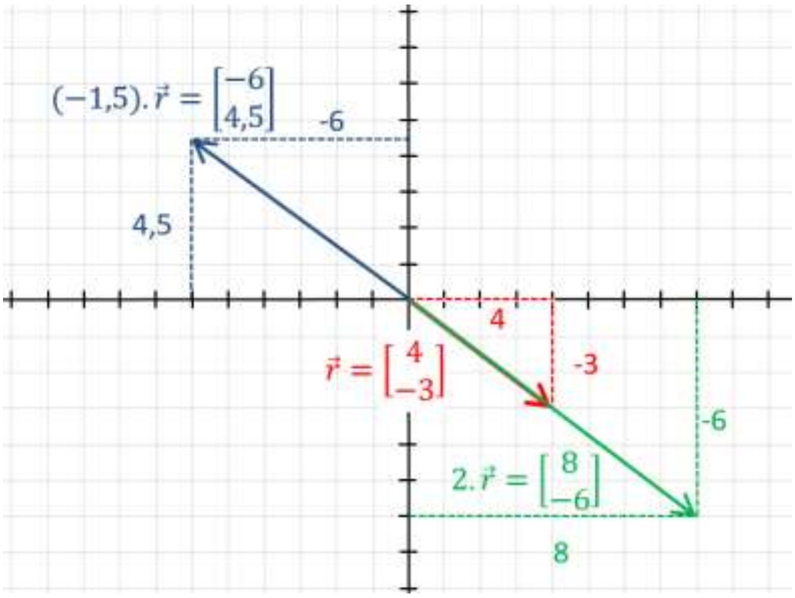
Por ejemplo: Sea el vector $\vec{r} = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix}$ y el escalar k = 2

Su producto es:

$$\boldsymbol{k}\,.\,\vec{\boldsymbol{r}} \;=\; 2\,.\begin{bmatrix}4\\-3\end{bmatrix} \;=\; \begin{bmatrix}2.4\\2.(-3)\end{bmatrix} \;=\; \begin{bmatrix}\mathbf{8}\\\mathbf{-6}\end{bmatrix}$$

Si multiplicamos un vector por 0 (cero), obtenemos un vector “nulo”, sólo compuesto de ceros.

Podemos observar gráficamente el impacto del producto por un escalar.



Esta es la gráfica del vector dado de ejemplo, y su producto por 2, y por (-1,5).

Observe cómo los tres vectores tienen una misma dirección, diferentes magnitudes o longitud, y para el caso del producto por (-1,5) incluso cambia el sentido: apunta hacia el lado opuesto que el original.

<u>Resta de dos vectores</u>

Al igual que en el álgebra general con números simples, la resta es la misma operación que la suma, pero cambiando de signo el segundo término. En este caso, cambiar el signo de un vector es como hacer el producto por el escalar (-1).

En términos prácticos: a cada componente del vector de la izquierda, se le resta su homólogo del vector de la derecha.

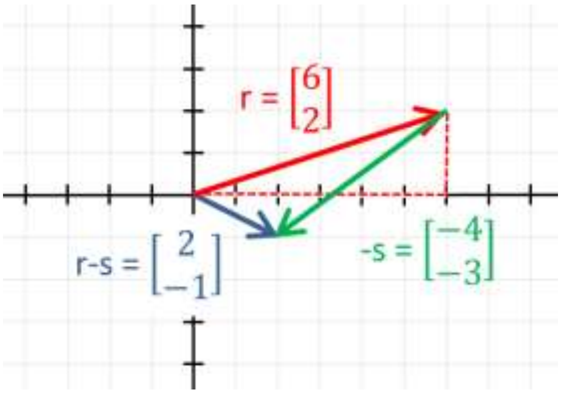
Por ejemplo: Sean los vectores

$\vec{r} = \begin{bmatrix}6\\2\end{bmatrix}\ ;\ \vec{s} = \begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}$

La resta vectorial es:

$$\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{s}} \;=\; \begin{bmatrix}6\\2\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix} \;=\; \begin{bmatrix}6-4\\2-3\end{bmatrix} \;=\; \begin{bmatrix}\mathbf{2}\\\mathbf{-1}\end{bmatrix}$$

Gráficamente:

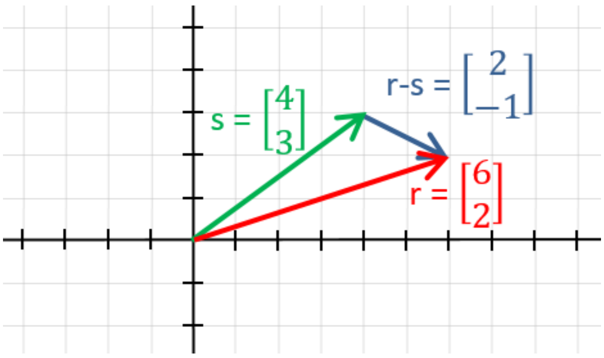


Aquí puede observarse claramente lo que mencionábamos antes: la resta es como "sumar" cambiando de signo. Fíjese que en la gráfica, en vez de dibujar el vector **s**, dibujamos su opuesto, y la funcionalidad es la misma que la de la suma.

Distancia entre vectores: otra lectura interesante de la resta de vectores…

Si consideráramos los vectores partiendo siempre del origen, un vector podría ser análogo a una coordenada en plano. Entonces, con esa disposición, la resta de vectores nos da por resultado la "distancia" entre ellos, justamente expresada como un vector.

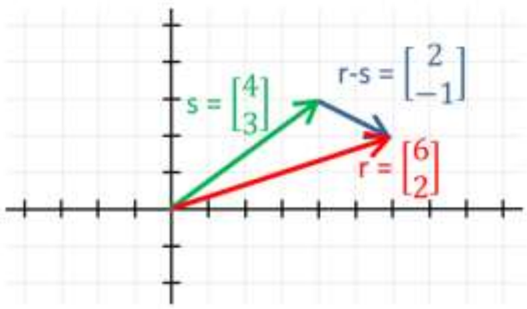
Esto es evidente si acomodamos los elementos del gráfico anterior de otro modo (recuerde que podemos dibujar los vectores donde queramos pues no tienen "ubicación" espacial)

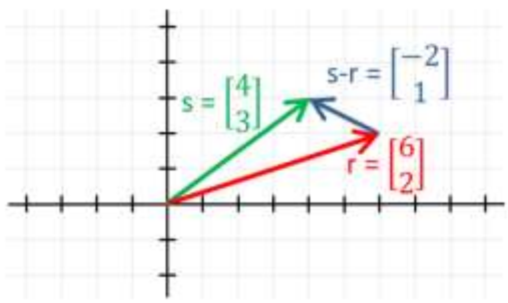


Aquí se observa gráficamente cómo la "**Distancia**" entre **r** y **s** está dada por **r-s**, igual que ocurre con la resta convencional de números reales.

Si habláramos de simples números enteros, la "distancia" o "diferencia" entre 7 y 5 es 7-2, o sea, 2. De igual modo, si planteamos la operación al revés tenemos (5 – 7) = -2. En ambos casos, la distancia "absoluta" entre esos dos números es 2 unidades, en uno u otro sentido.

Observe ahora en el siguiente gráfico qué pasa si invertimos el orden de los vectores en esta operación:





Evidentemente, en uno y otro caso obtenemos como resultado un vector de idéntica magnitud y dirección, pero de sentido opuesto.

Espacios Vectoriales: breve reseña sobre las propiedades de la suma y el producto por un escalar

En Álgebra Lineal, sobre todo desde un enfoque teórico, suele nombrarse a los vectores que participan de un problema o un sistema indicando el Espacio Vectorial al que pertenecen. De hecho hemos visto antes que los que hemos trabajado de ejemplo pertenecían a $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$ según fueran su cantidad de componentes. Si bien es un concepto abstracto, no hemos avanzado más allá de alguna idea intuitiva sobre lo que es formalmente un Espacio Vectorial, pero ahora que conocemos los vectores y sus operaciones fundamentales, podremos comprender sus propiedades y así abarcar completamente la idea de Espacio Vectorial.

- ***Propiedades de la Suma***

  Sean los vectores $\vec{r}$; $\vec{s}$; $\vec{t}$ de un mismo orden (no importa cuál), siempre se cumple que:

  - Propiedad asociativa: $\vec{r} + \left(\vec{s} + \vec{t}\,\right) = \left(\vec{r} + \vec{s}\,\right) + \vec{t}$
  - Propiedad conmutativa: $\vec{r} + \vec{s} = \vec{s} + \vec{r}$
  - Existe un elemento neutro: el vector nulo (enteramente compuesto de ceros) no afecta el resultado cuando participa de una suma.
    Por ejemplo: **< 1 ; 2 ; 3 > + < 0 ; 0 ; 0 > = < 1 ; 2 ; 3 >**
  - Todo vector tiene su elemento opuesto: aquel que al sumarlo nos da como resultado el vector nulo: simplemente se trata del mismo vector cambiando el signo de todos sus componentes.
    Por ejemplo: **< 1 ; 2 ; 3 > + < -1 ; -2 ; -3 > = < 0 ; 0 ; 0 >**

- ***Propiedades del Producto por un Escalar***

  Sean los vectores $\vec{r}$; $\vec{s}$ ambos de un mismo orden (no importa cuál), y ***k*** y ***h*** dos números reales, siempre se cumple que:

  - Propiedad distributiva sobre la suma de vectores: $\boldsymbol{k}\,.\left(\vec{r} + \vec{s}\,\right) = \boldsymbol{k}.\vec{r} + \boldsymbol{k}.\vec{s}$
  - Propiedad distributiva sobre la suma de escalares: $\left(\boldsymbol{k} + \boldsymbol{h}\right).\vec{r} = \boldsymbol{k}.\vec{r} + \boldsymbol{h}.\vec{r}$
  - Propiedad asociativa entre escalares y el vector: $\left(\boldsymbol{k}\,.\,\boldsymbol{h}\right).\vec{r} = \boldsymbol{k}\,.\left(\boldsymbol{h}\,.\vec{r}\,\right)$

- El escalar 1 es el elemento neutro de esta operación: $1\,.\,\vec{\boldsymbol{r}} \;=\; \vec{\boldsymbol{r}}$

Un Espacio Vectorial, pues, es una estructura matemática en la que existen vectores de un mismo orden y en la que se verifican las ocho operaciones indicadas anteriormente.

Por ejemplo: el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$ puede contener infinitos vectores de 2 componentes, entre los que se pueden efectuar las operaciones de suma de vectores y producto por un escalar, y se verifican estas ocho propiedades.

Módulo de un vector

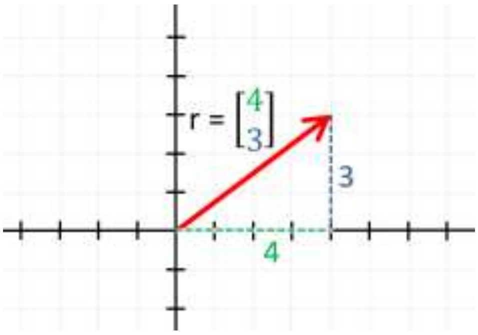
Como mencionamos anteriormente, el "Módulo" de un vector es su tamaño, magnitud, longitud… En definitiva: cuánto mide.

Probablemente ya se ha imaginado cómo calcularlo, y es que usted ya conoce esto desde hace mucho tiempo: **Pitágoras!** *Este brillante filósofo y matemático griego nacido en el año 569 A.C. descubrió, entre muchas otras cosas, que en todo triángulo rectángulo la suma del cuadrado de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa. Pensó que no volvería a oír de él? Pues aquí lo tenemos de nuevo!!*

Veamos esto en términos prácticos. Sea el vector

$\vec{r} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$

En la gráfica



Claramente, cada componente del vector es análogo a los catetos de un triángulo rectángulo. Entonces, la longitud del vector propiamente dicho será la resultante de aplicar el teorema de Pitágoras aquí. De este modo, **el módulo del vector será la raíz cuadrada de la suma del cuadrado de cada componente**.

El módulo de un vector se designa poniendo entre barras (típicamente barras dobles) su nombre. Así:

$$\|\vec{\boldsymbol{r}}\| \;=\; \sqrt{3^2 + 4^2} \;=\; \sqrt{9 + 16} \;=\; \sqrt{25} \;=\; \mathbf{5}$$

Otras implicaciones: visto esto, podemos generalizar mucho (o casi todo) de lo que ya sabemos de geometría y trigonometría para el cálculo vectorial. Pero incluso con una gran ventaja: todo eso que siempre vimos en 2D aquí se aplica de idéntico modo, no importa cuántas sean las dimensiones de los vectores!

Así, para un vector en 3D como $\vec{s} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ podemos calcular su módulo agregando bajo la raíz el cuadrado de cada uno de sus componentes:

$$||\vec{s}|| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{4 + 9 + 16} = \sqrt{29} = \mathbf{5,38} \ldots$$

Vectores unitarios

A los fines del cálculo resulta muy útil definir un tipo especial de vectores: son aquellos que tienen su módulo igual a 1 (uno). Se llaman Vectores Unitarios y se representan con un angulito encima de su nombre, en vez de la flecha.

Por ejemplo: el vector **s = < 0,6 ; 0,8 >** es un vector unitario ya que su módulo es 1 (uno). Veamos:

$$||s|| = \sqrt{(0{,}6)^2 + (0{,}8)^2} = 1$$

Este es un ejemplo "casual"… La utilidad de los vectores unitarios es cuando los calculamos a partir de uno dado, o cuando los consideramos como generadores de la Base del Espacio Vectorial: no ahondaremos demasiado en aspectos teóricos, pero sí consideraremos estos dos tipos especiales de vectores unitarios a continuación.

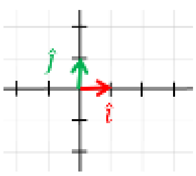
- El vector unitario que tiene longitud 1 y sólo se proyecta en x tiene un nombre especial: suele referirse como vector $\hat{\boldsymbol{\imath}}$ y sus componentes son $\hat{\boldsymbol{\imath}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ (siempre hablando de un espacio $\mathbb{R}^2$

  Si consideramos ese vector en $\mathbb{R}^3$ obviamente será $\hat{\boldsymbol{\imath}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

  Su compañero se llama $\hat{\boldsymbol{\jmath}}$ y sus componentes son $\hat{\boldsymbol{\jmath}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ o $\hat{\boldsymbol{\jmath}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ según estemos en un sistema de 2 o de 3 dimensiones.

  Finalmente, el vector $\widehat{\boldsymbol{k}}$ sólo se considera en espacios de 3 dimensiones, y es $\widehat{\boldsymbol{k}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

  Aquí los vemos en el gráfico:



Estos son "**especiales**" porque son los generadores canónicos del espacio $\mathbb{R}^2$, es decir que nos permiten definir cualquier vector de su espacio como una "suma vectorial", lo cual también es una notación frecuente en la materia. En esta notación, el vector $\vec{\boldsymbol{r}} = \begin{bmatrix} \mathbf{3} \\ \mathbf{4} \end{bmatrix}$ también puede expresarse como $\vec{\boldsymbol{r}} = \mathbf{3}\hat{\boldsymbol{\imath}} + \mathbf{4}\hat{\boldsymbol{\jmath}}$

<u>Analicemos esto un poco</u>: El vector $\vec{\boldsymbol{r}} = < \mathbf{3} \,; \mathbf{4} >$ nos dice que se proyecta 3 unidades en el eje ***x***, y 4 en el eje ***y***. Como el vector unitario $\hat{\boldsymbol{\imath}}$ se proyecta 1 en ***x***, y el vector unitario $\hat{\boldsymbol{\jmath}}$ se proyecta 1 en ***y***; podemos expresar el vector original como $\vec{\boldsymbol{r}} = \mathbf{3}\hat{\boldsymbol{\imath}} + \mathbf{4}\hat{\boldsymbol{\jmath}}$ ya que (*recordemos producto por un escalar…*) : **3$\hat{\boldsymbol{\imath}}$ = (3,0)** y **4$\hat{\boldsymbol{\jmath}}$ = (0,4)** , entonces $\mathbf{3}\hat{\boldsymbol{\imath}} + \mathbf{4}\hat{\boldsymbol{\jmath}} = (\mathbf{3}, \mathbf{0}) + (\mathbf{0}, \mathbf{4}) = (\mathbf{3}, \mathbf{4})$

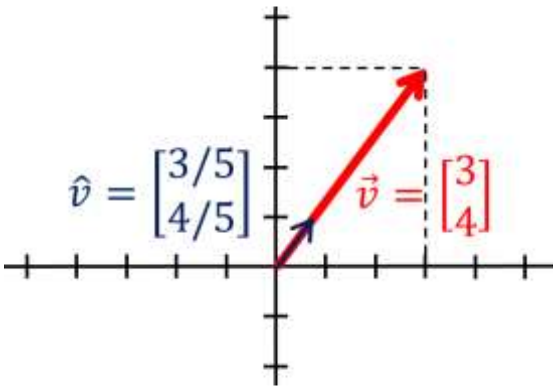
- También resulta de utilidad calcular el Vector Unitario de otro vector dado: es decir, un vector unitario que tenga la misma dirección y sentido que el vector original, pero de magnitud 1.

  En general, un Vector Unitario se calcula estableciendo el Módulo del vector original y usándolo como divisor sobre los dos componentes del mismo.

  Ejemplo: Si $\vec{\boldsymbol{v}} \;= < \;\mathbf{3} \,; \;\mathbf{4} \;>$ entonces $\|\vec{\boldsymbol{v}}\| = \sqrt{\mathbf{3^2} + \mathbf{4^2}} = \mathbf{5}$

  Luego, $\hat{\boldsymbol{v}} \;= < \frac{3}{5} ; \frac{4}{5} >$ ya que $\sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2} = 1$

  Gráficamente:



AUTOEVALUACIÓN SP5-H1

---

1. Sean los vectores: **r = < 2 ; -3 > y s = < -1 ; -2 >**

   ¿Cuánto es **r + s** ?

   a. (2 + (-1)) + ((-3) + (-2)) = (1) + (-5) = -4

   b. < 1 ; -5 > ((Respuesta correcta))

   c. < -5 ; 1 >

d. No pueden sumarse porque no son compatibles: tienen números positivos y negativos al mismo tiempo

e. **< < 2 ; -3 > ; < -1 ; -2 > >**

2. Sean los vectores: **r = < 2 ; 6 > y s = < -3 ; 5 >**

   ¿Cuánto es **-s - r** ?

   a. < 2.(-3) ; 6.5 > = < -6 ; 30 >

   b. < 2-3 ; 6-5 > = < 1 ; 1 >

   c. < 2.5 , 6.(-3) > = < 10 ; -18 >

   d. No pueden sumarse porque no son compatibles: tienen números positivos y negativos al mismo tiempo

   e. < 3-2 ; -5-6 > = < 1 ; -11 > ((Respuesta correcta))

3. Sean el vector: **r = < 2 ; -3 >**

   ¿Cuánto es 5.**r** ?

   a. 5 . (2 – 3) = 5 . (-1) = -5

   b. 5 . 2 + 5 . (-3) = 10 – 15 = -5

   c. < 10 ; -15 > ((Respuesta correcta))

   d. No puede multiplicarse un número por un vector: son claramente incompatibles!

4. Señale cuál o cuáles de las siguientes son maneras correctas de expresar el vector **r = < 3/5 ; 3/2 >**

   a. $\vec{r} = \left\| \begin{matrix} \frac{3}{5} \\ \frac{3}{2} \end{matrix} \right\|$

   b. $\vec{r} = \begin{bmatrix} 3/5 \\ 3/2 \end{bmatrix}$ ((Respuesta correcta))

   c. $\vec{r} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

d. $\vec{r} = \begin{bmatrix} 0,6 \\ 1,5 \end{bmatrix}$ ((Respuesta correcta))

e. $\vec{r} = \frac{3\hat{\imath}}{5} + \frac{3\hat{\jmath}}{2}$ ((Respuesta correcta))

5. Calcule el módulo de cada uno de los siguientes vectores:

a. $\vec{r} = \begin{bmatrix} -8 \\ -6 \end{bmatrix}$ ((Respuesta correcta: 10))

b. $\vec{s} = \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ -24 \end{bmatrix}$ ((Respuesta correcta: 25))

c. $\vec{t} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ((Respuesta correcta: 1))

d. $\vec{u} = \begin{bmatrix} 6 \\ -1 \\ -2 \\ 20 \end{bmatrix}$ ((Respuesta correcta: 21))

e. $\vec{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ((Respuesta correcta: 0))

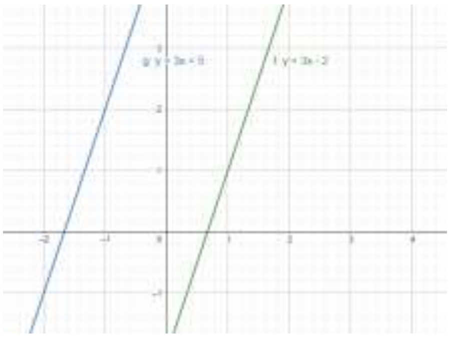
SP5H2: Colinealidad y Combinación Lineal de vectores.

¿Pueden dos vectores ser paralelos?

La respuesta es NO, o SÍ, dependiendo del punto de vista!

Para ser más precisos: dos vectores que tengan la misma orientación y el mismo módulo, son de hecho, el mismo vector! Recordemos que los vectores no tienen "ubicación" en su espacio… Por otra parte, si tienen la **misma Orientación y diferente Módulo**, o misma **Dirección y diferente Sentido**, claramente no son el mismo vector, pero pertenecen a la misma recta. Entonces, **no existe algo llamado "Vectores paralelos en diferentes rectas"**, pues, si son paralelos, pertenecen de hecho a la misma recta!

Para ser más gráficos… si hablamos de dos funciones lineales sabemos que sí pueden ser paralelas: si tienen la misma pendiente son paralelas. La discriminación respecto de si se trata de la misma función o no estará dada por si tienen la misma ordenada al origen.



En esta gráfica, tenemos trazadas dos rectas o funciones lineales: ambas con pendiente 3, pero la primera con una ordenada al origen (o término independiente) de 5, y la otra -2. Son paralelas, y no son la misma recta.

Esto es justamente lo que **NO ocurre con los vectores!** Cuando dos vectores pertenecen a una misma recta, decimos que son "**colineales**".

Esto es totalmente evidente al graficarlos a ambos partiendo del origen, o de cualquier punto fijo en el plano. Pero para reconocerlo sin gráfica basta con realizar el cociente entre sus componentes para ambos y si dan lo mismo, se trata de vectores colineales.

Dos vectores $\vec{r} =< r_1\ ;\ r_2\ ; \dots ;\ r_n >$ y $\vec{s} =< s_1\ ;\ s_2\ ; \dots ;\ s_n >$ son **colineales** siempre y cuando se verifique que $\frac{r_1}{s_1} = \frac{r_2}{s_2} = \cdots = \frac{r_n}{s_n}$

Sean por ejemplo los vectores: $\vec{r} = \begin{bmatrix} -15 \\ 3 \end{bmatrix}$; $\vec{s} = \begin{bmatrix} -75 \\ 15 \end{bmatrix}$

Para este caso: $\frac{-15}{-75} = 0{,}2$ y $\frac{3}{15} = 0{,}2$: efectivamente **son colineales**!

Combinación Lineal de Vectores

Una combinación lineal de vectores produce uno nuevo, sumando todos los que queramos, ponderando cada uno por el producto con un escalar.

$$\vec{w} = k_1\vec{v_1} + k_2\vec{v_2} + \cdots + k_n\vec{v_n}$$

Por ejemplo: sean los vectores $\vec{r} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}$; $\vec{s} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$

Podemos construir el vector $\vec{t} = \begin{bmatrix} 10 \\ -16 \end{bmatrix}$ como combinación lineal de los otros dos, ya que se verifica en este caso que $\vec{t} = 3\vec{r} - 2\vec{s}$

$$3\vec{r} - 2\vec{s} = 3.\begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix} - 2.\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.4 \\ 3.(-2) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2.1 \\ 2.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 - 2 \\ -6 - 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ -16 \end{bmatrix} = \vec{t}$$

Para los mismos dos vectores dados: $\vec{r} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}$; $\vec{s} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$ podríamos plantear muchas otras combinaciones lineales que generen otros vectores. De hecho, podrían ser infinitos!!

Por ejemplo:

$$Si\ quiero\ obtener \begin{bmatrix} -4 \\ 24 \end{bmatrix} puedo\ hacer: \ -2.\begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix} + 4.\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$Si\ quiero\ obtener \begin{bmatrix} 15 \\ 9 \end{bmatrix} puedo\ hacer: \ 3.\begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix} + 3.\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$Si\ quiero\ obtener \begin{bmatrix} 28 \\ 41 \end{bmatrix} puedo\ hacer: \ \frac{9}{2}.\begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix} + 10.\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Importante! El vector nulo es un caso especial…

- La única combinación lineal de vectores que genera como resultado el vector nulo (enteramente compuesto de ceros) es aquella en la que todos los coeficientes son 0 (cero):

  $$Si\ quiero\ obtener \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} sólo\ puedo\ hacer: \ 0.\begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix} + 0.\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

- Si dos vectores son "colineales", basta con igualar sus módulos y orientación (con el coeficiente que corresponda sobre uno de ellos) y restarlos:

  $$Si\ quiero\ obtener \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} puedo\ hacer: \ \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} - 2.\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

  o también al revés, con un coeficiente para el primero en vez del segundo:

  $$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = -0{,}5.\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

  Observe que < 4 ; 6 > es "colineal" a < 2 ; 3 > ya que el primero es el doble del segundo. Si comprobamos sus razones: 4/2 = 6/3 = 2

- Toda combinación lineal de una suma de vectores nulos, sólo puede generar vectores nulos:

  $$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = a.\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + b.\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

  No existe ningún valor de *a* ni de *b* que pueda arrojar otro resultado para esta combinación lineal.

¿Cómo podemos saber qué coeficientes utilizar en una combinación lineal de dos vectores para producir el que nos interese?

Con una combinación lineal de al menos dos vectores - ***que no sean colineales ni nulos*** - podemos construir otro cualquiera, siempre en $\mathbb{R}^2$. Básicamente, lo que queremos lograr es esto:

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix}$$

Lo que es lo mismo que escribirlo de este otro modo:

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x.r_1 \\ x.r_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y.s_1 \\ y.s_2 \end{bmatrix}$$

Que también podríamos expresar como un sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x.r_1 + y.s_1 = w_1 \\ x.r_2 + y.s_2 = w_2 \end{cases}$$

Y ya sabemos cómo resolver un Sistema de Ecuaciones!!

Pongámoslo en un ejemplo:

Dados los vectores que teníamos recién: $\vec{r} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}$; $\vec{s} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$

¿Qué coeficientes deberíamos usar para cada uno de ellos si queremos obtener como resultado el vector $\begin{bmatrix} -17 \\ 25 \end{bmatrix}$?

Resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} x.4 + y.1 = 17 \\ x.-2 + y.5 = 25 \end{cases}$$

Y obtenemos la solución: x = -5 ; y = 3

Se cumple entonces que $\begin{bmatrix} -17 \\ 25 \end{bmatrix} = (-5).\begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix} + 3.\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$

Importante! Recordar que debemos antes verificar que los dos vectores dados no sean colineales.

¿Esto aplica a vectores en cualquier Espacio Vectorial?

Lo visto aplica para vectores de cualquier cantidad de dimensiones; pero no siempre serán 2 ecuaciones: claro está que si son vectores de orden 4 por ejemplo, necesitaremos también 4 vectores en la combinación lineal! Al fin y al cabo, es resolver un sistema de 4 incógnitas.

Veamos con un caso qué sucede si tenemos menos vectores que dimensiones:

Si tenemos 2 vectores de orden 3, sean

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \; ; \; \vec{s} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Y queremos construir con ellos el vector $\vec{w} = \begin{bmatrix} 10 \\ 19 \\ 29 \end{bmatrix}$

Resulta que "casualmente" hay dos coeficientes que cumplen esa igualdad:

$$3\vec{r} + 4\vec{s} = \vec{w}$$

Si lo vemos desplegado, tenemos: $3.\begin{bmatrix}2\\1\\3\end{bmatrix}+4.\begin{bmatrix}1\\4\\5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10\\19\\29\end{bmatrix}$

Pero cuidado! Ha sido casual!! Fue posible porque el resultado era, de hecho, una combinación lineal de los dos vectores dados... De hecho, puedo construir en $\mathbb{R}^3$ una combinación lineal de dos vectores, o incluso de uno solo! **Lo que no puedo es garantizar que con esas combinaciones lograré construir "cualquier otro vector" en el mismo espacio.** Para hacerlo, como dijimos, serán necesarios 3 vectores independientes.

Veamos otro posible resultado: ¿qué pasa si queremos que $x.\begin{bmatrix}2\\1\\3\end{bmatrix}+y.\begin{bmatrix}1\\4\\5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10\\19\\15\end{bmatrix}$?

Con los coeficientes anteriores se cumplen los dos primeros componentes del resultado:

- Con (x=3 ; y=4) tenemos (3.2)+(4.1) = 10 (1° componente del resultado: OK)
- Con (x=3 ; y=4) tenemos (3.1)+(4.4) = 19 (2° componente del resultado: OK)
- El problema lo tenemos con el tercer componente, ya que con (x=3 ; y=4) tenemos (3.3)+(4.5) = 29, no 15! Y aquí viene lo más importante: *podríamos lograr ese 15 que queremos con otros valores de x y de y (por ejemplo: x=0 ; y=3), pero la igualdad para los dos componentes anteriores dejarían de cumplirse!!*

Entonces, sin un tercer vector en $\mathbb{R}^3$ que nos permita equilibrar el sistema, jamás podríamos encontrar una combinación lineal que cumpla lo que necesitamos…

Por caso, consideremos que a los dos vectores anteriores agregamos un tercero que tenga 0 (cero) en las dos primeras componentes y compensamos el valor del tercero para obtener el resultado que deseamos:

$$x.\begin{bmatrix}2\\1\\3\end{bmatrix}+y.\begin{bmatrix}1\\4\\5\end{bmatrix}+z.\begin{bmatrix}0\\0\\-14\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10\\19\\15\end{bmatrix}$$

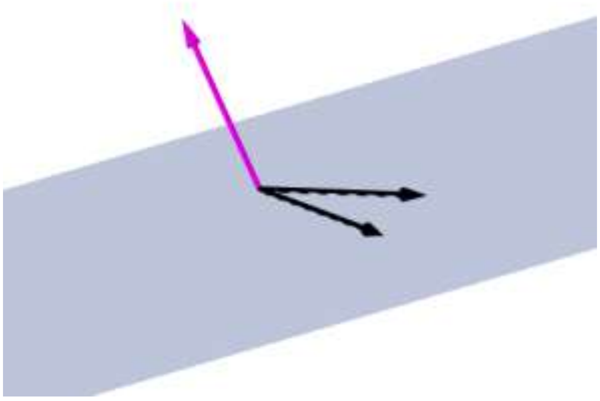
Vemos aquí que con (x = 3 ; y = 4 ; z=1) se confirma el resultado deseado.

<u>**Conclusión**</u>: *para construir una combinación lineal de vectores en $\mathbb{R}^n$ que nos dé como resultado cualquier posible vector en dicho espacio, necesitaremos contar con **n** vectores "independientes" o "libres" en dicha combinación; es decir, **n** vectores en los que ninguno de ellos sea combinación lineal de los otros!*

Vectores coplanares

Considerando un plano en un espacio 3D, dos vectores diferentes pueden pertenecer a ese mismo plano: en tal caso se denominan "**coplanares**".

Veámoslo en un gráfico:



En este gráfico, vemos un "plano" y sobre él 2 vectores (en negro). Estos son coplanares a dicho plano, en tanto que el tercer vector (en púrpura) claramente sobresale en otra dirección, es decir, "atraviesa al plano".

¿Qué define un plano en un espacio 3D?

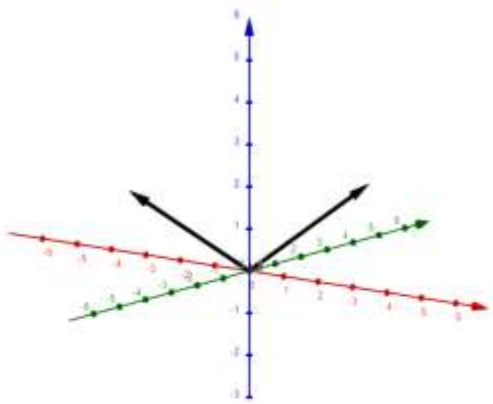
Además del concepto general geométrico de plano en el espacio, que establece que "**Tres puntos no colineales definen un plano en el espacio**", podemos considerar el tema de los planos desde la perspectiva de los vectores. Así, tenemos que:

- Dos vectores en el espacio 3D siempre definen un único plano en el que se apoyan ambos, excepto que sean dos vectores colienales, en cuyo caso son infinitos los planos que los contienen.

- Un vector en 3D más un punto en dicho espacio también definen un único plano que los contiene, excepto que el punto sea colineal al vector, en cuyo caso son infinitos los planos que los contienen.

¿Cómo es que dos vectores definen un plano?

Imaginemos dos vectores no colineales graficados en un espacio tridimensional, ambos con el mismo punto o coordenada de origen, existe un único plano que pasa por ambos:



En este gráfico generado con GeoGebra podemos ver los tres ejes en sus colores característicos, y dos vectores en color negro: (2 , 2 , 2) y (-2 , -2 , 2).

Sólo existe un plano que contiene esos dos vectores! En el video siguiente podemos ver en el programa dichos vectores y su plano, desde diferentes perspectivas:

((Insertar aquí Video #21: Plano que contiene 2 vectores en 3D))

https://youtu.be/KWAculiTWi0

AUTOEVALUACIÓN SP5-H2

1. Indique cuáles de los siguientes pares de vectores son "**colineales**":

   a. $\begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} 508 \\ -381 \end{bmatrix}$ ((Respuesta: Sí))

   b. $\begin{bmatrix} 55 \\ 22 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} 66 \\ 33 \end{bmatrix}$ ((Respuesta: No))

   c. $\begin{bmatrix} 21 \\ 14 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} 30 \\ 20 \end{bmatrix}$ ((Respuesta: Sí))

   d. $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ((Respuesta: No))

   e. $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$ ((Respuesta: No))

   f. $\begin{bmatrix} 3{,}14 \\ 2{,}71 \\ 5{,}89 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} 21{,}98 \\ 18{,}97 \\ 41{,}23 \end{bmatrix}$ ((Respuesta: Sí))

2. Complete, para los siguientes pares de vectores la componente faltante para lograr que se trate de vectores "**colineales**".

   a. $\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} 6 \\ ??? \end{bmatrix}$ ((Respuesta: 15))

   b. $\begin{bmatrix} ??? \\ 3 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} 121 \\ 33 \end{bmatrix}$ ((Respuesta: 11))

   c. $\begin{bmatrix} -3 \\ ??? \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} 46{,}5 \\ -15{,}5 \end{bmatrix}$ ((Respuesta: 1))

   d. $\begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} 18 \\ ??? \\ -9 \end{bmatrix}$ ((Respuesta: 12))

e. $\begin{bmatrix} -2 \\ 15 \\ ??? \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} 6 \\ ??? \\ -27 \end{bmatrix}$ ((Respuesta: 9 para el primer vector y -45 para el 2do))

f. $\begin{bmatrix} ??? \\ 2 \\ 8 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} 8 \\ 16 \\ ??? \end{bmatrix}$ ((Respuesta: 1 para el primer vector y 64 para el 2do))

3. Complete en las siguientes ecuaciones los coeficientes necesarios para que se cumpla la igualdad planteada.

a. $\begin{bmatrix} 17 \\ 42 \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}$
((Respuesta: a=7 y b=1))

b. $\begin{bmatrix} 2 \\ -10 \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} - b \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$
((Respuesta: a=-2 y b=6))

c. $\begin{bmatrix} -1 \\ 7 \\ -8 \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} - b \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$
((Respuesta: a=3, b=2 y c=2))

d. $\begin{bmatrix} 16 \\ 14 \\ -29 \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} - c \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$
((Respuesta: a=4, b=0 y c=-3))

e. $\begin{bmatrix} 0 \\ 16 \\ -4 \\ 17 \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}$
((Respuesta: a=1, b=2, c=-1 y d=2))

f. $\begin{bmatrix} 13 \\ 12 \\ 11 \\ 6 \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} - c \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} - d \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$
((Respuesta: a=3, b=2, c=1 y d=5))

SP5H3: Operaciones especiales con vectores. Productos. Proyecciones.

Como mencionábamos al principio, pueden definirse innumerables operaciones con vectores, con matrices, con escalares, o combinando todo eso junto! *La matemática es una herramienta sumamente elástica, será siempre cuestión de construir con ella los recursos que necesitemos para modelar y resolver los problemas que tengamos…*

En este contexto, hay algunas operaciones vectoriales universalmente reconocidas y estudiadas, muy versátiles por sus aplicaciones. Veremos aquí dos productos vectoriales de especial utilidad!

Producto Cruz

También conocida como Producto Vectorial de Gibbs, esta es una operación definida para vectores en el espacio $\mathbb{R}^3$; no puede calcularse para vectores en 2D.

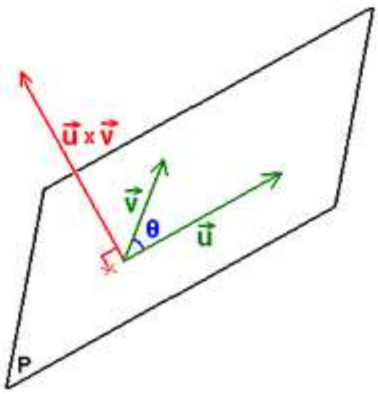
Funcionalidad: **Dados dos vectores en el espacio (que definen un plano), el producto cruz de uno por otro define un tercer vector que es perpendicular a ambos!**

Se enuncia así: $\vec{r}$ x $\vec{s}$ *(por eso se llama "Producto Cruz", porque el signo de esta operación es precisamente una cruz, lo que la distingue de otras operaciones como el "Producto Punto" que obviamente se representa con un punto)*

Sobre sus atributos:

- Módulo: $\|\vec{r}x\vec{s}\| = \|\vec{r}\| \,.\, \|\vec{s}\| \,.\, \boldsymbol{sen}(\propto)$
  … donde $\propto$ es el ángulo que forman los 2 vectores (visualmente: si se hacen coincidir sus puntos de partida)
  De manera más explícita: el módulo del producto cruz de dos vectores es igual al producto del módulo de cada uno de ellos multiplicado por el seno del ángulo que forman!

- Dirección: es perpendicular a ambos vectores $\vec{r}$ y $\vec{s}$
  Esto quiere decir que si imaginamos los dos vectores unidos por su punto de partida, en el espacio, el vector resultante está en un ángulo de 90 grados respecto de ambos.

  Fuente: Wikipedia

- Sentido: regla de la mano derecha. Situamos el canto de la mano derecha en $\vec{r}$ *(el vector de la izquierda en la expresión)* y la cerramos hacia $\vec{s}$ por el camino más corto: entonces el pulgar indica el sentido del vector resultante de este producto vectorial.

Cálculo: se disponen los componentes de cada vector como filas de una matriz, añadiendo una primera fila con los vectores unitarios del sistema: el vector resultante se obtiene mediante una suma de los Determinantes de la adjunta de cada vector unitario, cambiando el signo del término central. Ver el siguiente ejemplo:

Dados:

$\vec{r}$ = (1 ; 4 ; 5)

$\vec{s}$ = (3 ; 2 ; 8)

Calculamos el producto vectorial con la suma algebraica de signos alternados de los determinantes de las adjuntas a cada vector unitario de esta matriz:

$$\vec{r}\ x\,\vec{s} = \ \boldsymbol{suma \ldots de\ los\ det\ de}\!: \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 1 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 8 \end{vmatrix}$$

Del siguiente modo:

$$\vec{r}\ x\,\vec{s} = \ +\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 8 \end{vmatrix}\hat{\imath}\ \ -\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}\hat{\jmath}\ \ +\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}\hat{k}$$

$$\vec{r}\ x\,\vec{s} = \ +((4.8)-(5.2))\hat{\imath}\ \ -((1.8)-(5.3))\hat{\jmath}\ \ +((1.2)-(4.3))\hat{k}$$

$$\vec{r}\ x\,\vec{s} = \ +((32)-(10))\hat{\imath}\ \ -((8)-(15))\hat{\jmath}\ \ +((2)-(12))\hat{k}$$

$$\vec{r}\ x\,\vec{s} = \ 22\hat{\imath}+7\hat{\jmath}-10\hat{k}\ = \ (22,7,-10) = \begin{bmatrix} 22 \\ 7 \\ -10 \end{bmatrix}$$

Podríamos generalizar el procedimiento del siguiente modo:

Sean:

$$\vec{r} = (r_i\ ;\ r_j\ ;\ r_k)$$
$$\vec{s} = (s_i\ ;\ s_j\ ;\ s_k)$$

La matriz de cálculo será:

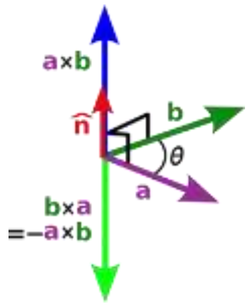
$$\begin{bmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ r_i & r_j & r_k \\ s_i & s_j & s_k \end{bmatrix}$$

El producto será:

$$\vec{r}\ x\,\vec{s} = \ +\begin{vmatrix} r_j & r_k \\ s_j & s_k \end{vmatrix}\hat{\imath}\ \ -\begin{vmatrix} r_i & r_k \\ s_i & s_k \end{vmatrix}\hat{\jmath}\ \ +\begin{vmatrix} r_i & r_j \\ s_i & s_j \end{vmatrix}\hat{k}$$

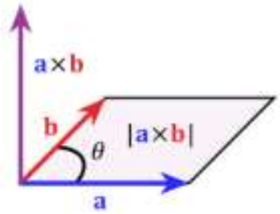
<u>Propiedades</u>:

- No es conmutativo! Precisamente por la regla del sentido, invertir el orden de sus términos produciría el mismo vector resultante pero exactamente hacia el sentido opuesto. De hecho esta propiedad se denomina “Anticonmutativa”.



Esta imagen (Wikipedia) representa la perpendicularidad del producto cruz respecto de los dos vectores operados, y también puede observarse el cambio de sentido del vector resultante si se invierten los vectores operados.

- El módulo del producto vectorial representa el área del paralelogramo que forman los dos vectores.



Esta imagen (Wikipedia) representa gráficamente la correspondencia entre el área del paralelogramo que forman los vectores y el módulo de su producto cruz.

- No es asociativo! $\vec{r}\ x\left(\vec{s}\ x\ \vec{t}\right) \neq (\vec{r}\ x\ \vec{s})\ x\ \vec{t}$

- Si $\vec{\boldsymbol{r}}\ \boldsymbol{x}\ \vec{\boldsymbol{s}} = \vec{\mathbf{0}}$ con $\vec{r} \neq \vec{0}$ y $\vec{s} \neq \vec{0}$ significa que los dos vectores son paralelos!

- Nilpotencia: Siempre ocurre que $\vec{\boldsymbol{r}}\ \boldsymbol{x}\ \vec{\boldsymbol{r}} = \vec{\mathbf{0}}$

- Sean ***a*** y ***b*** dos escalares, y ***r*** y ***s*** dos vectores en $\mathbb{R}^3$ se verifica que
  $(a\ .\ \vec{r})\ x\ (b\ .\ \vec{s}) = (\vec{r}\ x\ \vec{s})\ .\ a\ .\ b$

Le recomiendo ver este Excelente Video en línea sobre las aplicaciones del Producto Vectorial:
https://www.youtube.com/watch?v=-2ELkfk2FGw

También puede serle de utilidad esta Calculadora On Line de Producto Vectorial:
http://es.onlinemschool.com/math/assistance/vector/multiply1/

Producto Interior o "Producto Punto"

Quizás sea esta la más importante de las operaciones vectoriales! También se denomina "Producto Escalar" (por el resultado que produce), o "Producto Punto" (por el símbolo que se utiliza para representarlo.

Esta es una operación definida para dos vectores de un mismo orden o en un mismo espacio ($\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, etc) y produce como resultado un escalar: un simple número.

Cálculo y representación: se representa con un punto, y para calcularlo se multiplican los componentes de ambos, cada uno con su homólogo, y se suman esos productos.

Sean:

$$\vec{\boldsymbol{r}} = (\boldsymbol{r_i}\ ;\ \boldsymbol{r_j}\ ;\ \boldsymbol{r_k})$$
$$\vec{\boldsymbol{s}} = (\boldsymbol{s_i}\ ;\ \boldsymbol{s_j}\ ;\ \boldsymbol{s_k})$$

El producto punto será:

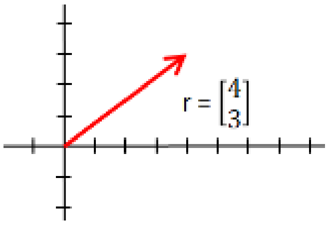
$$\vec{\boldsymbol{r}}\,.\,\vec{\boldsymbol{s}} = (\boldsymbol{r_1}.\boldsymbol{s_1}) + (\boldsymbol{r_{\dots}}.\boldsymbol{s_{\dots}}) + (\boldsymbol{r_n}.\boldsymbol{s_n})$$

Propiedades:

- Es conmutativo: $\vec{\boldsymbol{r}}\,.\,\vec{\boldsymbol{s}} = \vec{\boldsymbol{s}}\,.\,\vec{\boldsymbol{r}}$
- Es distributivo respecto de la suma: $\vec{\boldsymbol{r}}.\left(\vec{\boldsymbol{s}} + \vec{\boldsymbol{t}}\right) = (\vec{\boldsymbol{r}}.\vec{\boldsymbol{s}}) + (\vec{\boldsymbol{r}}.\vec{\boldsymbol{t}})$
- Es asociativo sobre el producto por un escalar (k): $\vec{\boldsymbol{r}}.(\boldsymbol{k}.\vec{\boldsymbol{s}}) = \boldsymbol{k}.(\vec{\boldsymbol{r}}.\vec{\boldsymbol{s}})$
- **Súper Importante!! La raíz cuadrada del producto punto de un vector por sí mismo, nos da la longitud (o módulo) del vector!**

$$|\vec{\boldsymbol{r}}| = \sqrt{\vec{\boldsymbol{r}}.\vec{\boldsymbol{r}}}$$

Por ejemplo: observemos el siguiente vector



Para calcular la longitud (también llamada **módulo**, o **norma**) de este vector, podemos imaginar que constituye la hipotenusa de un triángulo rectángulo que tiene por catetos 4 (que es su coordenada en x) y 3 (que es su coordenada en y). Entonces, simplemente necesitamos obtener la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de dichos componentes; es decir: $|\vec{\boldsymbol{r}}| = \sqrt{\boldsymbol{4^2} + \boldsymbol{3^2}}$

Si hacemos el producto punto del vector ***r*** por sí mismo, tenemos:

$r.r = \begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix} = (4.4) + (3.3)$, o sea, $4^2 + 3^2$

Entonces, por el teorema de Pitágoras, ya que $|\vec{\boldsymbol{r}}|^2 = \boldsymbol{4^2} + \boldsymbol{3^2}$ obtenemos que $|\vec{\boldsymbol{r}}| = \sqrt{\boldsymbol{4^2} + \boldsymbol{3^2}}$

Generalizando la Regla del Producto Punto para calcular el módulo de un vector:

$$|\vec{r}| = \sqrt{\vec{r}.\vec{r}} \qquad \textbf{o lo que es lo mismo:} \qquad |\vec{r}|^2 = \vec{r}.\vec{r}$$

Pero… ¿Y cómo hacemos si el vector está en R3 o más dimensiones?
Lo más maravilloso y elegante de este cálculo, es precisamente que aplica para vectores en cualquier cantidad de dimensiones: siempre calcularemos su módulo como la raíz cuadrada de la suma del cuadrado de todos sus componentes!

Así, por ejemplo, si el vector es

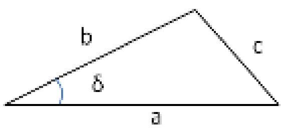
$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Su módulo será

$$|\vec{v}| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 4^2}$$

<u>Aplicación de la regla del producto punto para conocer el “ángulo” entre dos vectores.</u>

Considerando los lados de un triángulo y la relación con sus ángulos, sabemos por trigonometría que el cateto opuesto a un ángulo cualquiera, en todo triángulo es:



$$c^2 = a^2 + b^2 - 2.a.b.coseno(\delta)$$

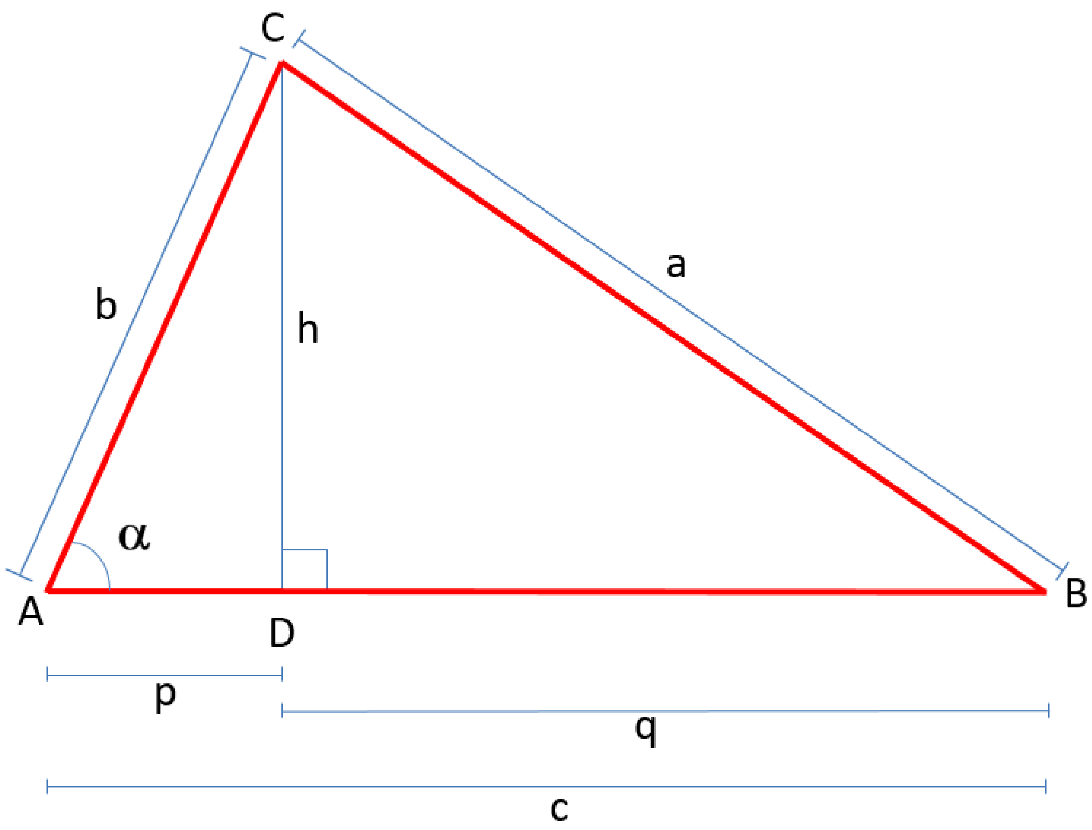
Si quiere averiguar o repasar de dónde proviene esta ecuación, puede consultar esta breve ayuda ((Poner link que muestre en una ventanita separada el texto que sigue con fondo pintado de pintado de gris))

¿Por qué se verifica siempre, para cualquier triángulo, la fórmula siguiente?

a² = b² + c² – 2 . b . c . coseno(**α**)

… siendo **α** el ángulo opuesto al cateto **a**

Para abordar esto deberemos nombrar las partes de un triángulo imaginario cualquiera, subdividido a su vez en otros dos, identificando los siguientes elementos:



Puntos: A, B, C, D

Segmentos (catetos): a, b, c, h, p, q

Definiciones:

- El segmento **h** es la “altura” del triángulo **ABC** si consideramos **AB** como su base.
- El punto en que **h** corta a la base **c** determina dos segmentos: **p** y **q**.
- El segmento **h** es perpendicular a **AB**, por tanto, forma un ángulo recto con **DA** y con **DB**.

  Esto determina a su vez 2 triángulos rectángulos que son DAC y DBC que utilizaremos para resolver este problema usando el Teorema de Pitágoras.

Hacemos entonces un poquito de álgebra…

Para el triángulo DBC obtenemos que:

$\mathbf{h^2 + q^2 = a^2}$

o sea que:

$\mathbf{h^2 = a^2 - q^2}$

Mientras que para el triángulo DAC vemos que:

$h^2 + p^2 = b^2$

o sea que:

$h^2 = b^2 - p^2$

Igualando ambas ecuaciones por su término común (**h^2**) tenemos que:

$a^2 - q^2 = b^2 - p^2$

lo que implica que:

$a^2 = b^2 - p^2 + q^2$

Pero también sabemos que **$q = c - p$**, lo que al reemplazar en la expresión anterior permite obtener que:

$a^2 = b^2 - p^2 + (c - p)^2$

Desarrollando el binomio cuadrado perfecto de la derecha, resulta lo siguiente:

$a^2 = b^2 - p^2 + c^2 - 2cp + p^2$

y simplificando lo términos que se anulan, tenemos:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2cp$

Ahora bien, de la definición del coseno sabemos que

coseno(**α**) = **(p / b)** de donde obtenemos que: **p = b .** coseno(**α**)

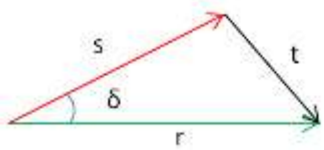
Finalmente, si reemplazamos la **p** de $a^2 = b^2 + c^2 - 2cp$

por esto último, obtenemos lo que buscábamos!!

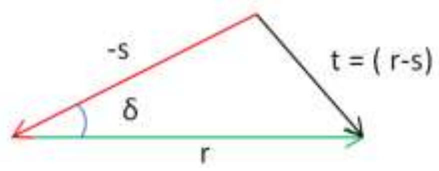
$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \text{coseno}(\alpha)$

((Fin ventanita separada))

Aplicando esto a vectores, donde los catetos son la longitud de dichos vectores y los ángulos del triángulo son análogos a los de los vectores en su espacio, tenemos que el mismo triángulo podría concebirse del siguiente modo:



Para la utilidad del cálculo que sigue, consideremos el vector ***s*** invertido. Observemos entonces cómo queda la regla trigonométrica anterior expresada con estos vectores:



((A)) $|\vec{r}-\vec{s}|^2 = |\vec{r}|^2 + |\vec{s}|^2 - 2.|\vec{r}|.|\vec{s}|.coseno(\delta)$

Utilizando la regla del Producto Punto, sabemos que el tamaño de un vector $|\vec{v}| = \sqrt{v.v}$ Entonces, aquí sucede que:

$$|\vec{r}-\vec{s}| = \sqrt{(\vec{r}-\vec{s}\,).(\vec{r}-\vec{s}\,)}$$

Por lo tanto, aplicando lo anterior en la parte izquierda de ((A)) tendremos que:

((B)) $(\vec{r}-\vec{s}).(\vec{r}-\vec{s}) = |\vec{r}|^2 + |\vec{s}|^2 - 2.|\vec{r}|.|\vec{s}|.coseno(\delta)$

Si descomponemos la parte izquierda de esta nueva ecuación, tenemos que:

$$(\vec{r}-\vec{s}).(\vec{r}-\vec{s}) = \vec{r}.\vec{r} - \vec{r}.\vec{s} - \vec{s}.\vec{r} + \vec{s}.\vec{s}$$

Otra vez, por la regla del producto punto, sabemos que ***r.r*** es igual al cuadrado de su módulo (***r.r*** = |***r***|^2), es decir que lo anterior es:

$$(\vec{r}-\vec{s}).(\vec{r}-\vec{s}) = |\vec{r}|^2 - 2.\vec{r}.\vec{s} + |\vec{s}|^2$$

Reemplazando entonces en la parte izquierda de la ecuación ((B)), tenemos:

$$|\vec{r}|^2 - 2.\vec{r}.\vec{s} + |\vec{s}|^2 = |\vec{r}|^2 + |\vec{s}|^2 - 2.|\vec{r}|.|\vec{s}|.coseno(\delta)$$

Finalmente, si suprimimos los términos comunes a ambos lados de la ecuación, nos queda:

$$\boxed{\vec{\boldsymbol{r}}.\vec{\boldsymbol{s}} = |\vec{\boldsymbol{r}}|.|\vec{\boldsymbol{s}}|.\boldsymbol{coseno}(\boldsymbol{\delta})}$$

Y por lo tanto, conociendo dos vectores, podemos conocer el ángulo que los mismos forman!

Despejando δ obtenemos:

$$\frac{\vec{r}.\vec{s}}{|\vec{r}|.|\vec{s}|} = \text{coseno}(\delta) \quad \rightarrow \quad \delta = \text{arcocoseno}\left(\frac{\vec{r}.\vec{s}}{|\vec{r}|.|\vec{s}|}\right)$$

El ángulo (δ) que forman dos vectores (***r*** y ***s***) partiendo de un mismo punto, se calcula con:

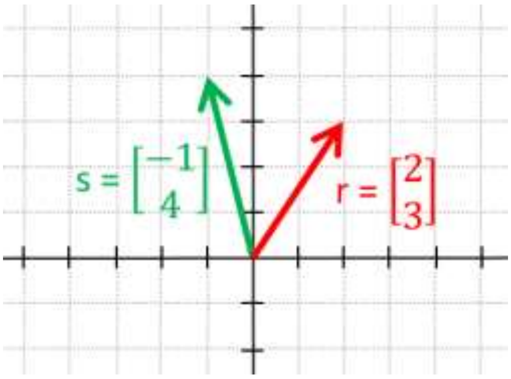
$$\boxed{\delta = \text{arcocoseno}\left(\frac{\vec{r}.\vec{s}}{|\vec{r}|.|\vec{s}|}\right)}$$

Veamos ahora un ejemplo de dos vectores y calculemos el ángulo que forman:

Sean:

$r = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$; $s = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}$

Si los graficamos partiendo desde el origen, tendremos lo siguiente:



Si bien podemos usar un transportador para leer "aproximadamente" el ángulo que forman, resulta poco práctico si necesitamos hacer esto con numerosos vectores. E incluso sería imposible con vectores en espacios más grandes que $\mathbb{R}^2$!

Podemos entonces utilizar lo que hemos aprendido sobre el Producto Punto para averiguar el ángulo entre dos vectores, valiéndonos de la ecuación

$$\frac{\vec{r}.\vec{s}}{|\vec{r}|.|\vec{s}|} = \text{coseno}(\delta)$$

Para el caso dado, resolvemos todos los cálculos auxiliares:

$\vec{r} = (\,2\,;3\,)$

$\vec{s} = (-1\,;4\,)$

$|\vec{r}| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$

$|\vec{s}| = \sqrt{(-1)^2 + 4^2} = \sqrt{1+16} = \sqrt{17}$

$\vec{r}.\vec{s} = \big(2.(-1)\big) + (3.4) = -2 + 12 = 10$

$|\vec{r}|.|\vec{s}| = \sqrt{13}.\sqrt{17} = \sqrt{13.17} = \sqrt{221}$

Reemplazando en la ecuación, tenemos que:

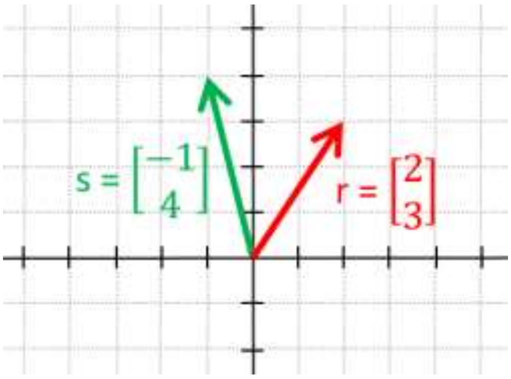
$\frac{10}{\sqrt{221}} = \text{coseno}(\delta)$

Es decir que el ángulo será

$$\delta = arcocoseno\left(\frac{10}{\sqrt{221}}\right) = arcocoseno(0{,}672 \ldots) = 0{,}8329 \ldots Radianes$$

O lo que es lo mismo (convirtiendo Radianes en Grados Sexagesimales) 47,72… Grados

Si lo observa gráficamente, es razonable:



El ángulo descripto es apenas superior a un ángulo de 45°

Consideraciones Importantes de Referencia:

- Este cálculo nos dará siempre un valor comprendido entre 0 y π radianes, o lo que es lo mismo, entre 0 y 180 grados. *(Recuerde que para convertir un ángulo de radianes a grados, simplemente hay que multiplicarlo por 180 y dividirlo por π)*

- Es el más pequeño de los ángulos que forman los dos vectores: si lo consideramos girando desde $\vec{r}$ hasta $\vec{s}$ en el sentido opuesto sería un ángulo mayor a 180°

- Dado lo anterior, este cálculo es "conmutativo", pues da lo mismo la separación angular de $\vec{r}$ a $\vec{s}$, que de $\vec{s}$ a $\vec{r}$.

- Este mismo cálculo aplica para vectores de cualquier dimensión, sabiendo que la regla para calcular el módulo (Pitágoras) se generaliza para espacios euclideanos de cualquier orden.

Recurso Digital: Encontrará en este Link ((Poner link al archivo "Calcular el Ángulo entre dos Vectores.xlsx")) una hoja de Excel con los cálculos ya resueltos para averiguar el ángulo entre dos vectores en 2D y 3D. Puede utilizarlo para corroborar sus ejercicios, y de paso revisar las fórmulas!

Vectores Paralelos y Ortogonales

Una aplicación particular de lo que hemos visto, consiste en determinar si dos vectores son Paralelos u Ortogonales.

Dos vectores son Paralelos si entre ellos forman un ángulo de 0° o de 180° (según tengan el mismo sentido, o sentidos opuestos). Y son Ortogonles si entre ellos forman un ángulo recto (90°).

Como ya sabemos calcular el ángulo entre dos vectores…

$$\text{coseno}(\delta) = \frac{\vec{r}.\vec{s}}{|\vec{r}|.|\vec{s}|}$$

Sabemos también que el coseno de estos ángulos es un número muy particular:

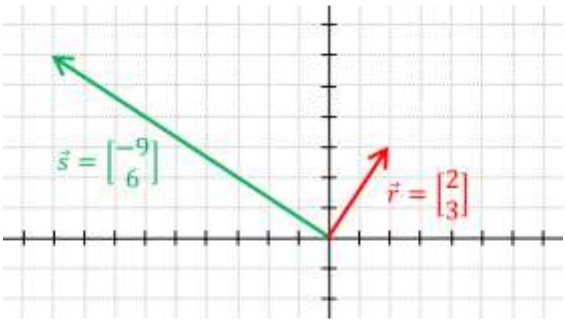
- Coseno(0°) = 1
- Coseno(90°) = 0
- Coseno(180°) = -1

Entonces, si $\frac{\vec{r}.\vec{s}}{|\vec{r}|.|\vec{s}|} = \pm 1$ tendremos dos vectores paralelos; y si da 0, serán ortogonales.

Veamos algunos ejemplos:

- <u>Con vectores en 2D</u>:

Caso#1. Sean: $r = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$; $s = \begin{bmatrix} -9 \\ 6 \end{bmatrix}$



$$\frac{\vec{r}.\vec{s}}{|\vec{r}|.|\vec{s}|} = \frac{(2.(-9)) + (3.6)}{\sqrt{2^2+3^2}\ .\ \sqrt{(-9)^2+6^2}} = \frac{-18+18}{\sqrt{13}\ .\ \sqrt{117}} = \frac{0}{39} = 0$$

El **coseno 90° es 0**, es decir que estos son dos vectores **Ortogonales**!

Caso#2. Sean: $r = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$; $s = \begin{bmatrix} -4 \\ -6 \end{bmatrix}$

$$\frac{\vec{r}.\vec{s}}{|\vec{r}|.|\vec{s}|} = \frac{(2.(-4)) + (3.(-6))}{\sqrt{2^2+3^2}\ .\ \sqrt{(-4)^2+(-6)^2}} = \frac{-8-18}{\sqrt{13}\ .\ \sqrt{52}} = \frac{-26}{26} = -1$$

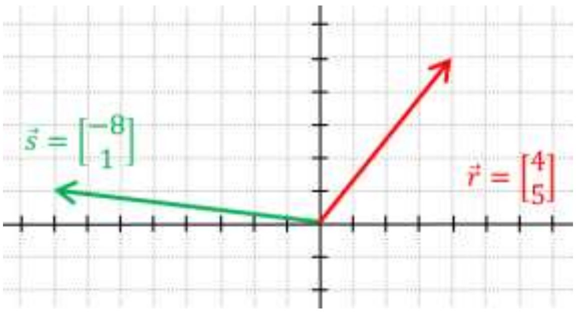
El coseno 180° es -1, es decir que estos son dos **Vectores Paralelos**, y de direcciones opuestas!

Caso#3. Sean: $r = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$; $s = \begin{bmatrix} -8 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\frac{\vec{r}.\vec{s}}{|\vec{r}|.|\vec{s}|} = \frac{\left(4.(-8)\right) + (5.1)}{\sqrt{4^2+5^2}\ .\ \sqrt{(-8)^2+1^2}} = \frac{-32+5}{\sqrt{41}\ .\ \sqrt{65}} = \frac{-27}{51{,}62\ldots} = -0{,}523\ldots$$

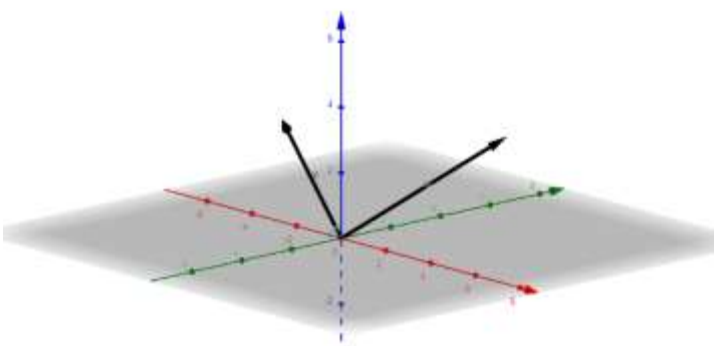
El ángulo cuyo coseno es – 0,523… evidentemente no es nulo, recto, ni llano. Por tanto, estos dos vectores no son paralelos ni ortogonales entre sí. De hecho forman un ángulo de 121° y fracción.

Si los graficamos, resulta evidente:



- <u>Con vectores en 3D</u>:

Caso#1. Sean: $r = \begin{bmatrix} -6 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$; $s = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$



Debemos resolver…

$$\frac{\vec{r}.\vec{s}}{|\vec{r}|.|\vec{s}|}$$

, así que comenzamos por el numerador:

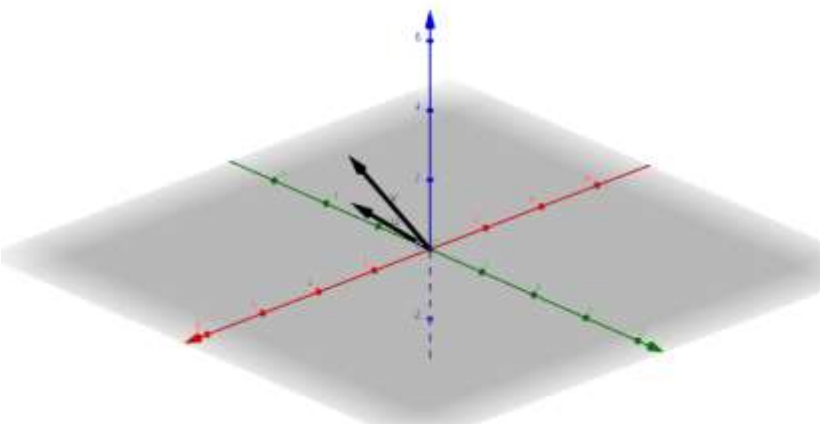
$$\vec{r}.\vec{s} = (-6.3) + (3.4) + (2.3) = -18 + 12 + 6 = 0$$

Como el numerador nos da 0 (cero), el resultado del cociente también será 0; y por lo tanto, el arcocoseno de 0 será un ángulo de 90°

$$\cos^{-1}(0) = 90°$$

Conclusión: los vectores son **ortogonales** en el espacio!

Caso#2. Sean: $r = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$; $s = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$



Debemos resolver…

$$\frac{\vec{r}.\vec{s}}{|\vec{r}|.|\vec{s}|}$$

, así que comenzamos por el numerador:

$$\vec{r}.\vec{s} = (2.1) + ((-1).(-2)) + (3.1) = 2 + 2 + 3 = 7$$

Como el numerador NO nos da 0 (cero), ya sabemos que los vectores no son ortogonales. Averiguamos ahora el denominador, y calculamos:

$$|\vec{r}|.|\vec{s}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 3^2} \ . \ \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{14} \ . \ \sqrt{6} = \sqrt{84}$$

Finalmente, el coseno del ángulo que forman los vectores será:

$$\text{coseno}(\delta) = \frac{\vec{r}.\vec{s}}{|\vec{r}|.|\vec{s}|} = \frac{7}{\sqrt{84}} = 0{,}763 \ldots$$

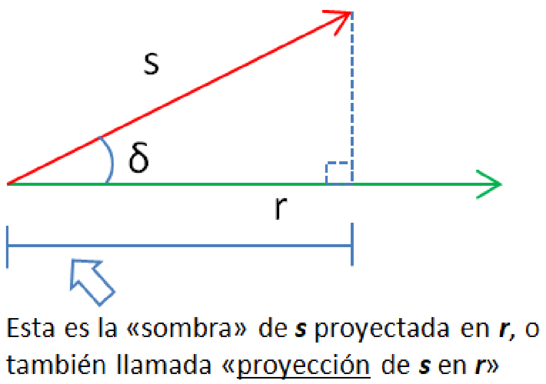
Conclusión: los vectores son **paralelos**! De hecho, el ángulo que forman es

$$\delta = cos^{-1}(0{,}763 \ldots) = 0{,}701 \ldots radianes$$

O lo que es lo mismo: $\frac{0{,}701 \ . \ 180}{\pi}$ grados = 40,20 °

Proyección Escalar de un Vector sobre otro

Otra aplicación de gran utilidad es la de poder calcular la "Proyección Escalar" de un vector sobre otro.



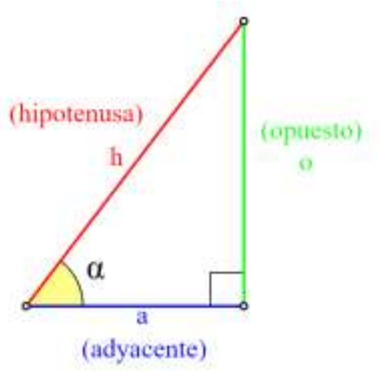
Considerando dos vectores y su ángulo, podemos calcular la "proyección" de uno sobre otro, como si hubiera un tercer segmento formando un triángulo rectángulo y la luz se proyectara en esa misma dirección: ¿Qué sombra proyectaría uno sobre el otro?

Sabemos que: $\text{coseno}(\delta) = \frac{Cateto\ Adyacente}{Hipotenusa} = \frac{Cateto\ Adyacente}{|s|}$

Si no recuerda los cocientes trigonométricos (Seno, Coseno y Tangente) puede ver esta ayuda ((Poner link interno para ventanita con el siguiente contenido))

En Trigonometría se estudian tres cocientes fundamentales de todos los tiángulos rectángulos: Seno, Coseno y Tangente. Y también sus inversas: Arcoseno, Arcocoseno, y Arcotangente.

Una mnemotecnia práctica para memorizarlos es la recordar la palabra "SOH-CAH-TOA"



SOH es **S**eno = **O**puesto / **H**ipotenusa

CAH es **C**oseno = **A**dyacente / **H**ipotenusa

TOA es **T**angente = **O**puesto / **A**dyacente

((Fin Ventanita))

Y queremos averiguar el tamaño del Cateto Adyacente… (Lo referiremos como Ady)

Por tanto, si llevamos |s| al otro lado de la ecuación, tenemos

$$|\vec{s}|\,.\,\text{coseno}(\delta) = Ady$$

Sabemos además que

$$\vec{r}.\vec{s} = |\vec{r}|\,.\,|\vec{s}|\,.\,\text{coseno}(\delta)$$

y de allí vemos que los últimos dos factores del lado derecho |***s***| . coseno(δ), son Ady.

O sea que, reemplazando en la segunda ecuación tenemos:

$$\vec{r}.\vec{s} = |\vec{r}|\,.\,Ady$$

Es decir que la Proyección Escalar del vector ***s*** sobre el vector ***r*** es :

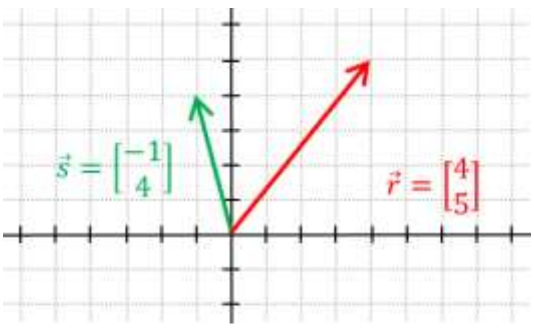
$$Cateto\ Adyacente = \frac{\vec{r}.\vec{s}}{|\vec{r}|}$$

Veamos el siguiente ejemplo:

Sean:

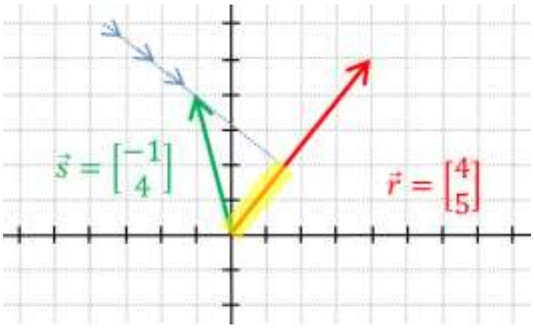
$\vec{r} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$; $\vec{s} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}$

Si los graficamos partiendo desde el origen, tendremos lo siguiente:



Queremos averiguar el "largo" de la sombra que proyecta el vector ***s*** sobre el vector ***r***, considerando la dirección de dicha proyección en un ángulo recto sobre el vector ***r***.

Así: (queremos saber la "magnitud" del segmento sombreado de amarillo)



Resolvemos la fórmula que lo define:

$$Proyección\ Escalar\ \boldsymbol{de}\ \vec{\boldsymbol{s}}\ \boldsymbol{en}\ \vec{\boldsymbol{r}} = \frac{\vec{r}.\vec{s}}{|\vec{r}|}$$

$$Proyección\ Escalar\ \boldsymbol{de}\ \vec{\boldsymbol{s}}\ \boldsymbol{en}\ \vec{\boldsymbol{r}} = \frac{\big(4.(-1)\big) + (5.4)}{\sqrt{4^2 + 5^2}} = \frac{-4 + 20}{\sqrt{41}} = 2{,}49$$

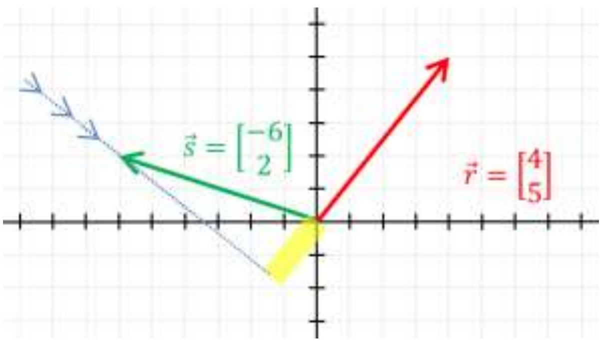
Algunas consideraciones sobre este valor…

Esa proyección puede tener como valor máximo el propio módulo del vector ***s***, situación que sólo ocurrirá cuando el ángulo entre los vectores sea nulo, es decir, como si uno estuviera totalmente apoyado sobre el otro.

También puede, como en este caso, tener un valor comprendido entre dicho módulo, y 0 (cero).

La Proyección Escalar de ***s*** en ***r*** puede incluso ser 0 (cero)! ¿Cuándo ocurrirá esto? Si está pensando en la “perpendicularidad” entre ***s*** y ***r*** está en lo correcto! Evidentemente, cuando ***s*** esté a 90° con ***r***, no proyectará sombra, y este valor será cero.

Incluso más, puede ***s*** estar a más de 90° respecto de ***r***, en cuyo caso, el valor de la proyección escalar será negativo! Eso representa que se proyecta en sentido opuesto al de ***r***. Observe la siguiente ilustración:

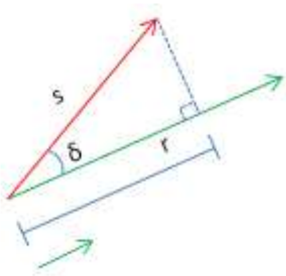


Calculamos el valor de la Proyección Escalar de ***s*** en ***r*** …

$$Proyección\ Escalar\ \boldsymbol{de}\ \vec{\boldsymbol{s}}\ \boldsymbol{en}\ \vec{\boldsymbol{r}} = \frac{\big(4.(-6)\big)+(5.2)}{\sqrt{4^2+5^2}} = \frac{-24+10}{\sqrt{41}} = -2{,}19$$

<u>"Vector Proyección"</u>

De lo anterior podemos derivar un vector especial, también denominado "Proyección Vectorial". Se trata de obtener un vector con el módulo recién calculado, y la dirección de ***r***, que es quien "recibe" la proyección.



La <u>Proyección Escalar</u> sólo nos dice la longitud de la proyección de ***s*** sobre ***r***…

Si queremos además codificar la dirección de esa proyección, podemos construir un **Vector Proyección**

Para ello, a la proyección escalar $\frac{\vec{r}.\vec{s}}{|\vec{r}|}$ la multiplicamos por el vector ***r*** dividido su tamaño, para hacerlo de longitud 1.

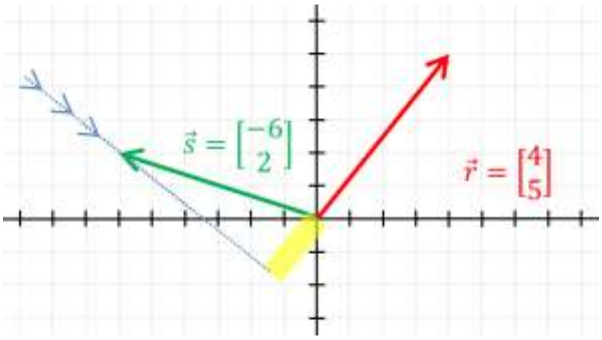
Así, el **<u>Vector Proyección</u>** será: $\vec{r}.\frac{\vec{r}.\vec{s}}{|\vec{r}|.|\vec{r}|}$ o lo que es lo mismo: $\vec{r}.\frac{\vec{r}.\vec{s}}{\vec{r}.\vec{r}}$

(*ya que como sabemos:* $|\vec{r}|.|\vec{r}| = \vec{r}.\vec{r}$)

Aplicado como ejemplo en el caso anterior:

Sean:

$\vec{r} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$; $\vec{s} = \begin{bmatrix} -6 \\ 2 \end{bmatrix}$



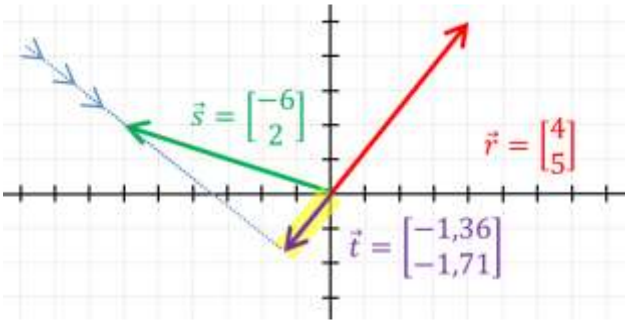
Podemos calcular el Vector Proyección de ***s*** en ***r*** ...

$$Vector\ Proyección\ \boldsymbol{de}\ \vec{\boldsymbol{s}}\ \boldsymbol{en}\ \vec{\boldsymbol{r}} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} . \frac{\left(4.(-6)\right) + (5.2)}{\left(\sqrt{4^2 + 5^2}\right)^2}$$

$$Vector\ Proyección\ \boldsymbol{de}\ \vec{\boldsymbol{s}}\ \boldsymbol{en}\ \vec{\boldsymbol{r}} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} . \frac{-24 + 10}{4^2 + 5^2}$$

$$Vector\ Proyección\ \boldsymbol{de}\ \vec{\boldsymbol{s}}\ \boldsymbol{en}\ \vec{\boldsymbol{r}} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} . \frac{-14}{41} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} . -0{,}341 \ldots$$

$$Vector\ Proyección\ \boldsymbol{de}\ \vec{\boldsymbol{s}}\ \boldsymbol{en}\ \vec{\boldsymbol{r}} = \begin{bmatrix} -1{,}36 \ldots \\ -1{,}71 \ldots \end{bmatrix}$$



AUTOEVALUACIÓN SP5-H3

1. Dados los siguientes vectores

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix} \quad ; \quad \vec{s} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix} \quad ; \quad \vec{t} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} \quad ; \quad \vec{u} = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Indique el resultado de las siguientes operaciones:

** Los números que tengan decimales deberán truncarse a la segunda cifra decimal.*

a. $\vec{r}.\vec{s}$ ((Respuesta: 25))

b. $-\vec{s}.\vec{r}$ ((Respuesta: -25))

c. $\vec{t}\ x\ \vec{u}$ ((Respuesta: $\begin{bmatrix} 5 \\ -19 \\ -2 \end{bmatrix}$))

d. $\vec{u}\ x\ \vec{t}$ ((Respuesta: $\begin{bmatrix} -5 \\ 19 \\ 2 \end{bmatrix}$))

e. $\vec{t}.\vec{u}$ ((Respuesta: 4))

f. $|\vec{r}|$ ((Respuesta: 4,12))

g. $|\vec{t}|$ ((Respuesta: 5,38))

h. $|\vec{t}\ x\ \vec{u}|$ ((Respuesta: 19,74))

i. $\left|\begin{matrix} \vec{t}\,.\vec{u} \\ \vec{s}.\vec{r} \end{matrix}\right|$ ((Respuesta: 25,31))

2. Indique el coseno del ángulo que forman los siguientes vectores (truncando el resultado en 3 decimales)

a. $\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}\ y\ \begin{bmatrix} 7 \\ -2 \end{bmatrix}$ ((Respuesta: -0,033))

b. $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\ y\ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ((Respuesta: 0))

c. $\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\ y\ \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$ ((Respuesta: 0,207))

d. $\begin{bmatrix} -2 \\ -10 \\ 1 \end{bmatrix}\ y\ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ ((Respuesta: 0,097))

e. $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}\ y\ \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ -5 \\ 2 \end{bmatrix}$ ((Respuesta: 0,181))

f. $\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 11 \\ 3 \end{bmatrix} y \begin{bmatrix} 7 \\ 9 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}$ ((Respuesta: 0,434))

3. Indique el ángulo que forman los siguientes vectores (truncando el resultado en 2 decimales)

    a. $\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} y \begin{bmatrix} 7 \\ -2 \end{bmatrix}$ $en\ radianes$: ((Respuesta: 1,60))

    b. $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} y \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ en grados: ((Respuesta: 90))

    c. $\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} y \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$ $en\ radianes$: ((Respuesta: 1,36))

    d. $\begin{bmatrix} -2 \\ -10 \\ 1 \end{bmatrix} y \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ en grados: ((Respuesta: 84,39))

    e. $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} y \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ -5 \\ 2 \end{bmatrix}$ $en\ radianes$: ((Respuesta: 1,38))

    f. $\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 11 \\ 3 \end{bmatrix} y \begin{bmatrix} 7 \\ 9 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}$ en grados: ((Respuesta: 64,21))

4. Indique cuáles de los siguientes vectores son **ortogonales**:

    a. $\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} y \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \end{bmatrix}$ ((Respuesta: No))

    b. $\begin{bmatrix} -9 \\ 15 \end{bmatrix} y \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix}$ ((Respuesta: No))

    c. $\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -5 \end{bmatrix} y \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$ ((Respuesta: Si))

    d. $\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} y \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ ((Respuesta: No))

5. Indique cuáles de los siguientes vectores son colineales:

   a. $\begin{bmatrix}-1\\-6\end{bmatrix}\ y\ \begin{bmatrix}12\\2\end{bmatrix}$ ((Respuesta: No))

   b. $\begin{bmatrix}-3\\12\end{bmatrix}\ y\ \begin{bmatrix}21\\-84\end{bmatrix}$ ((Respuesta: Sí))

   c. $\begin{bmatrix}20\\130\\-45\end{bmatrix}\ y\ \begin{bmatrix}4\\26\\-9\end{bmatrix}$ ((Respuesta: Sí))

   d. $\begin{bmatrix}14\\8\\17\end{bmatrix}\ y\ \begin{bmatrix}126\\72\\153\end{bmatrix}$ ((Respuesta: Sí))

6. Indique el valor de las siguientes proyecciones escalares (truncando el resultado a 2 cifras decimales)

   a. $Proyección\ de\ \begin{bmatrix}4\\12\end{bmatrix}\ en\ \begin{bmatrix}15\\8\end{bmatrix}$ ((Respuesta: 9,17))

   b. $Proyección\ de\ \begin{bmatrix}-5\\3\end{bmatrix}\ en\ \begin{bmatrix}1\\14\end{bmatrix}$ ((Respuesta: 2,63))

   c. $Proyección\ de\ \begin{bmatrix}12\\3\\-15\end{bmatrix}\ en\ \begin{bmatrix}41\\6\\-8\end{bmatrix}$ ((Respuesta: 14,92))

   d. $Proyección\ de\ \begin{bmatrix}-3\\-5\\27\end{bmatrix}\ en\ \begin{bmatrix}4\\13\\2\end{bmatrix}$ ((Respuesta: -1,67))

7. Indique los siguientes Vectores Proyección (truncando cada componente a 2 cifras decimales)

   a. $Proyección\ de\ \begin{bmatrix}4\\12\end{bmatrix}\ en\ \begin{bmatrix}15\\8\end{bmatrix}$ ((Respuesta: $\begin{bmatrix}8{,}09\\4{,}31\end{bmatrix}$))

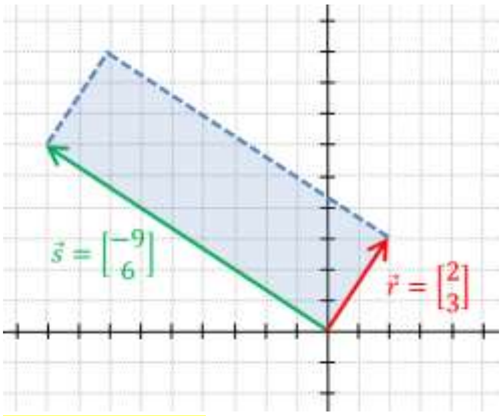
   b. $Proyección\ de\ \begin{bmatrix}-5\\3\end{bmatrix}\ en\ \begin{bmatrix}1\\14\end{bmatrix}$ ((Respuesta: $\begin{bmatrix}0{,}18\\2{,}62\end{bmatrix}$))

   c. $Proyección\ de\ \begin{bmatrix}12\\3\\-15\end{bmatrix}\ en\ \begin{bmatrix}41\\6\\-8\end{bmatrix}$ ((Respuesta: $\begin{bmatrix}14{,}50\\2{,}12\\-2{,}82\end{bmatrix}$))

   d. $Proyección\ de\ \begin{bmatrix}-3\\-5\\27\end{bmatrix}\ en\ \begin{bmatrix}4\\13\\2\end{bmatrix}$ ((Respuesta: $\begin{bmatrix}-0{,}48\\-1{,}58\\-0{,}24\end{bmatrix}$))

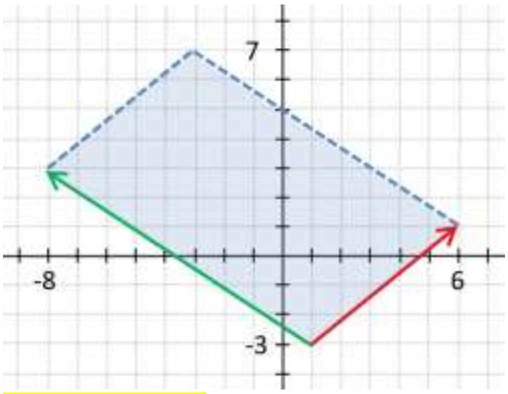
8. Indique el área de los siguientes paralelogramos definidos en el plano (truncando el resultado a 2 cifras decimales)

a.



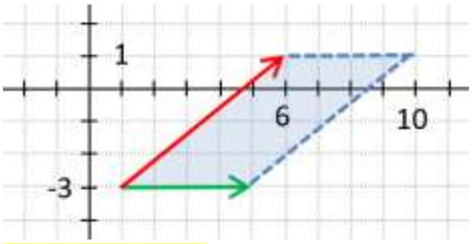
((Respuesta: 39))

b.



((Respuesta: 66))

c.



((Respuesta: 16))

SP5H4: Ecuaciones Vectoriales y Paramétrica de la recta.

Vimos al principio del texto dos formas de representar una recta: su Ecuación General y su Ecuación Explícita. Son dos maneras diferentes de escribir la misma función.

Recordemos su estructura para rectas en el plano (en 2D):

- Ecuación General: **A**x + **B**y + **C** = 0

- Ecuación Explícita: y = **m**x + **n**

Como vimos, dada una recta expresada con uno de estos dos formatos, puede reexpresarse en el otro mediante un sencillo procedimiento algebraico:

De la Ecuación General podemos despejar **y** en función de **x**. Así tendremos:

Ax + **B**y + **C** = 0

By = **-A**x **- C**

y = (**-A**x **- C**) / **B**

que tiene la forma **y = mx + n** donde claramente **m** = **-A/B** ; y **n** = **-C/B**

Y también podemos hacer el proceso inverso: partiendo de la Ecuación Explícita, operar haciendo el pasaje de términos para obtener la estructura de la Ecuación General.

y = **m**x + **n**

y - **m**x = **n**

y - **m**x - **n** = 0

-mx + y **- n** = 0

Esa última ecuación tiene la forma General: veamos que si…

A = -m

B = 1

C = -n

Allí dice, sustituyendo, **A**x + **B**y + **C** = 0

Puesto en números:

Sea la *Ecuación General*: **3**x **+ 2**y **- 1** = 0

La *Ecuación Explícita* equivalente será:

$$2y = -3x + 1$$

$$y = \frac{-3x + 1}{2}$$

$$\boldsymbol{y = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}}$$

Y también al revés: sea la *Ecuación Explícita* y = **5**x **+ 4**

La *Ecuación General* equivalente será:

$$-5x + y = 4$$

$$-5x + y - 4 = 0$$

Ahora lo nuevo… Existen otras maneras de representar una recta. Veremos los dos modelos de ecuación mencionados en el título: mediante su Ecuación Vectorial y sus Ecuaciones Paramétricas.

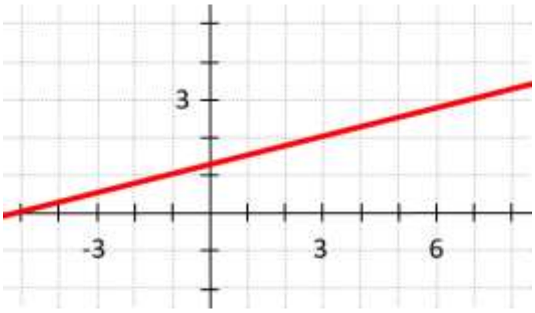
Ecuación Vectorial de la Recta

Para comprender la estructura de esta ecuación, debemos pensar que la misma define todos y cada uno de los infinitos puntos que componen una recta!

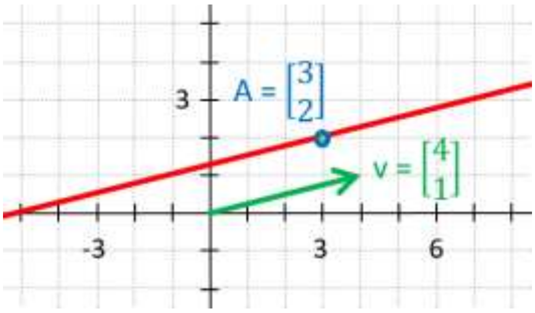
Su forma abstracta es la siguiente: $P = A + \vec{v}.t \qquad \forall t \in \mathbb{R}$

Que interpretamos diciendo que "*el punto **P** es igual al punto **A** más el vector **v** (llamado vector director) modificado en su magnitud y sentido por el parámetro de proporcionalidad **t**: siendo este último cualquier número real.*"

Si vemos esto en una gráfica, pensemos en la recta siguiente:



Dicha recta puede expresarse mediante los elementos de la Ecuación Vectorial si consideramos los siguientes elementos:



Como se observa, si al punto **A** (3,2) le sumo el vector **v** (4,1) modificado por el parámetro ***t*** para hacerlo más grande, más pequeño, e incluso con valores negativos para cambiar su dirección… haciéndolo para los infinitos posibles valores de ***t*** (o sea, todos los números reales), lo que obtenemos no es otra cosa que los infinitos puntos que constituyen esa recta!

Para ponerlo en términos numéricos, la función antes graficada puede expresarse de la forma $P = A + \vec{v}.t \qquad \forall t \in \mathbb{R}$

Poniendo las constantes en su sitio, la Ecuación Vectorial de esta recta es:

$P = (3, 2) + (4, 1).t$

Pues la función pasa por el punto **(3 , 2)** y su pendiente es la que resulta de avanzar **4** unidades en ***x***, y **1** unidad en ***y***.

¿Y cómo podemos averiguar la expresión General o la Explícita de dicha función?

Haciendo un poco de álgebra y pasaje de términos podemos reexpresar esa ecuación del modo que necesitemos! Veamos cómo:

Como estamos en un sistema en 2D, el punto P está formado por dos valores (x , y), es decir que:

$$(x, y) = (\,3\,, 2\,) + (\,4\,, 1\,).\, t$$

También podemos trazarlo con la notación vectorial a la que estamos más acostumbrados:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} t$$

Como ve, claramente son 3 vectores, por eso se llama "***Ecuación Vectorial***" !!

Seguimos operando, ahora hacemos explícitos los cálculos:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4.\, t \\ 1.\, t \end{bmatrix}$$

Resolvemos la suma vectorial:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 + 4.\, t \\ 2 + 1.\, t \end{bmatrix}$$

De lo que se desprenden dos ecuaciones clásicas:

$$\begin{cases} x = 4t + 3 \\ y = t + 2 \end{cases}$$

Si despejamos ***t*** en ambas ecuaciones.

$$En\ la\ primera: x - 3 = 4t \rightarrow \quad t = \frac{1}{4}x - \frac{3}{4}$$

$$En\ la\ segunda: y - 2 = t \rightarrow \quad t = y - 2$$

Como tenemos dos ecuaciones igualadas a ***t***, resulta que son equivalentes y por tanto puedo igualar sus términos derechos. Así tendremos:

$$\frac{1}{4}x - \frac{3}{4} = y - 2$$

Finalmente, podemos despejar ***y*** con lo que obtenemos la Ecuación Explícita!

$$y = \frac{1}{4}x - \frac{3}{4} + 2$$

Finalmente (sumando los términos semejantes: en este caso los independientes) tenemos:

$$\boldsymbol{y = \frac{1}{4}x + \frac{5}{4}} \quad (Ecuación\ Explícita!)$$

Y en términos Generales será:

$$4y = x + 5$$

$$\mathbf{-1x + 4y - 5 = 0} \quad (Ecuación\ General!)$$

¿Es posible el proceso inverso? Es decir: puedo obtener la Ecuación Vectorial de una recta definida por su ecuación explícita o general?

Claro que sí!! Otra vez, con un poquito de álgebra lo resolveremos:

Podríamos empezar por cualquiera de ellas, pero elegiremos partir de la Ecuación General. Si tenemos la recta definida por **Ax+By+C=0** tendríamos que averiguar dos puntos de la misma, y con eso ya tenemos los elementos necesarios para determinar también su vector director.

Para obtener un par de puntos, lo que hacemos es simplemente asignarle un valor arbitrario a una de las variables y despejar la otra.

Determinamos el Primer Punto: asumimos para ello que **x=0**; tendremos entonces que **By+C=0** (pues se está anulando el término de x).

De lo anterior, despejamos ***y*** con lo que obtenemos $y = \frac{-C}{B}$

Punto 1 = (x = 0 ; y = -C/B)

Determinamos el Segundo Punto: asumimos para ello que **x=1**; tendremos entonces que A+By+C=0 (*No ponemos **x** pues vale 1*).

De lo anterior, despejamos ***y*** con lo que obtenemos $y = \frac{-C-A}{B}$

Punto 2 = (x = 1 ; y = (-C-A)/B)

Establecemos el Vector Director: conocidos dos puntos de la recta, el vector que apunta del primero al segundo es la “resta” del segundo menos el primero.

Así: **Vector Director = Punto 2 – Punto 1**

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ \left(\frac{-C-A}{B}\right) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ \left(\frac{-C}{B}\right) \end{bmatrix}$$

Si operamos componente a componente, tenemos que

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 1-0 \\ \left(\frac{-C-A}{B}\right) - \left(\frac{-C}{B}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \left(\frac{-C-A+C}{B}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \left(\frac{-A}{B}\right) \end{bmatrix}$$

En resumen, la ecuación vectorial equivalente estará dada por:

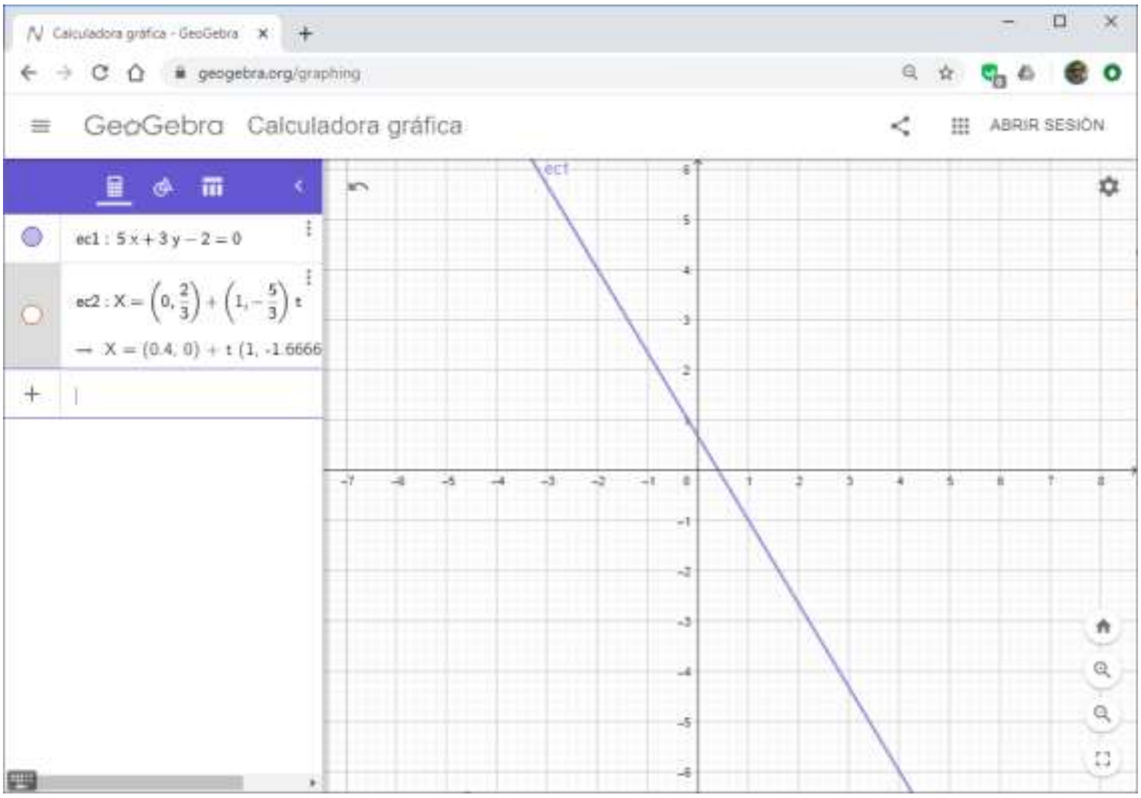
Punto: $\boldsymbol{A} = \left(\mathbf{0}\ ;\ \frac{-C}{B}\right)$; **Vector Director**: $\vec{v} = \left(\mathbf{1}\ ;\ \left(\frac{-A}{B}\right)\right)$

Veamos un ejemplo con números:

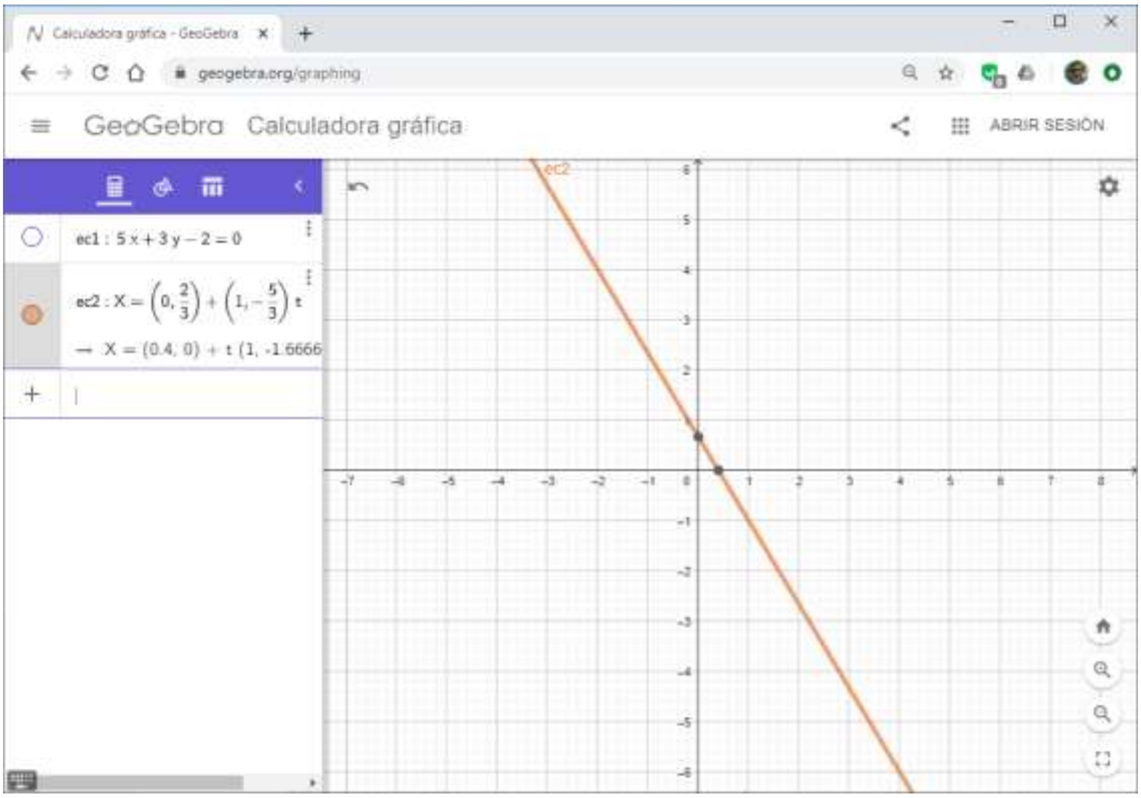
Sea $\mathbf{5}\boldsymbol{x}+\mathbf{3}\boldsymbol{y}-\mathbf{2}=\mathbf{0}$ *(Tiene forma Ax+By+C=0 donde A=5; B=3; C=-2)*

La ecuación vectorial equivalente será: $\boldsymbol{R}=\left(\mathbf{0}\,;\,\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\right)+\left(\mathbf{1}\,;\,\left(\frac{\mathbf{-5}}{\mathbf{3}}\right)\right)\boldsymbol{t}$

Puede verificar la equivalencia utilizando un graficador como GeoGebra:



Aquí está graficada la primera ecuación, y a continuación la segunda:



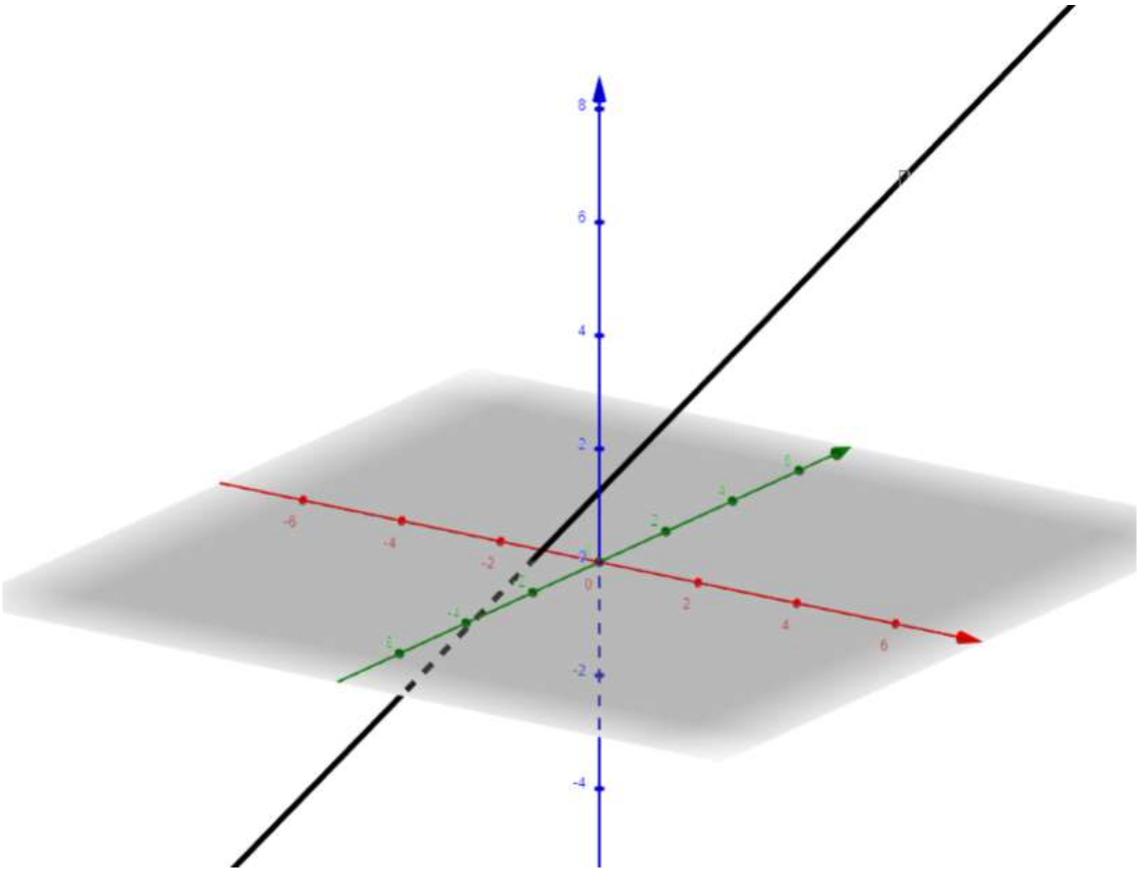
Como puede observar, las gráficas son idénticas!

Ecuación de una recta en el espacio, o en más dimensiones…

Algo interesante de esta manera de formular una recta es que podemos utilizar la misma estructura para funciones lineales en 3D o más, incluso en espacios no graficables por la cantidad de dimensiones!

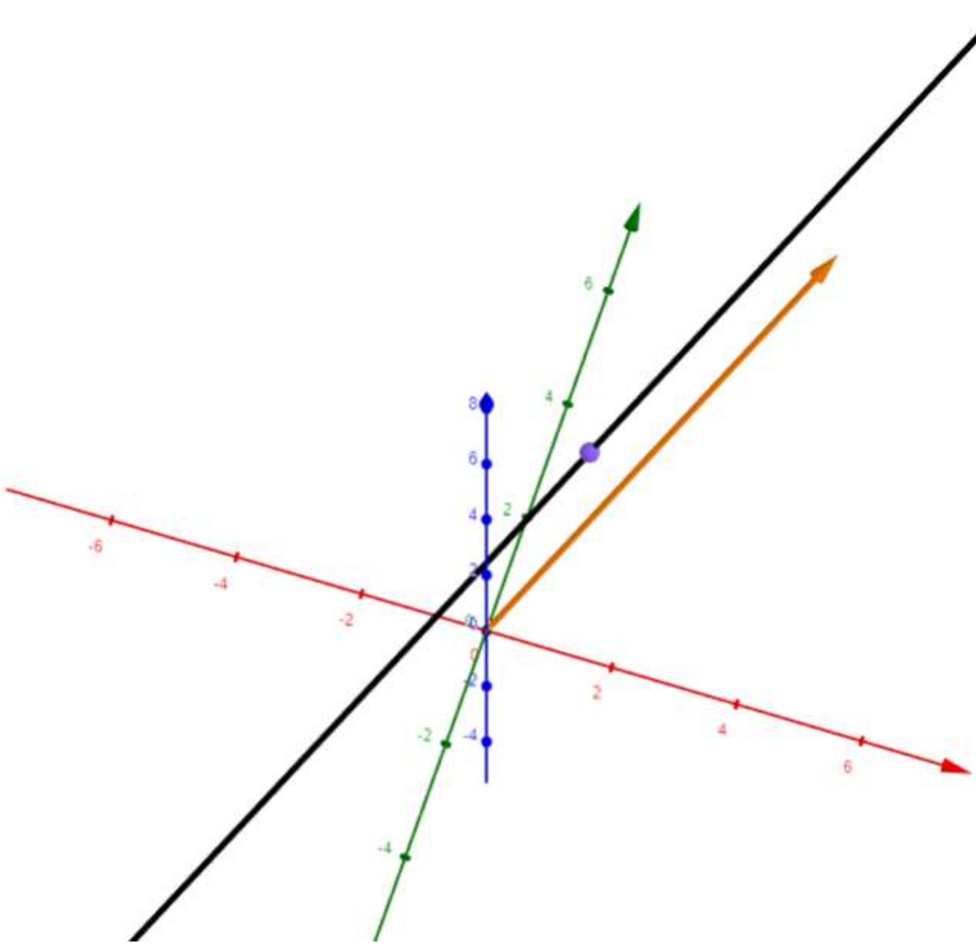
En todos los casos, la Recta estará siempre definida por un Punto y un Vector Director en dicho espacio.

Por ejemplo, esta es la definición de una recta en 3D: **(x;y;z) = (1;2;3) + (4;5;6)t**



Esta es la recta que pasa por el punto (1;2;3) y que tiene la dirección del vector (4;5;6).

En el gráfico siguiente podemos ver la misma recta, con el punto (1;2;3) señalado y su vector director dibujado por separado, partiendo del origen.



Es difícil visualizar “tridimensionalmente” la imagen en una imagen en 2D como esta. Por eso, lo invito a utilizar algún programa de graficación que le permita ver esta imagen desde diferentes ángulos: específicamente, la que aquí se presenta está hecha con GeoGebra. Sigue a continuación un corto video en el que se puede ver esta recta en diferentes posiciones.

((Insertar video #22: Recta en 3D con punto y vector director))

https://youtu.be/E2AAAPjooDo

Nota: *puede construir unos anteojos 3D como los referidos simplemente con un trocito de papel celofán rojo (para el ojo izquierdo) y otro azul (para el ojo derecho), usando cualquier armazón… Encontrará en línea muchas maneras ingeniosas de hacerlo!*

Ecuaciones Paramétricas de la Recta

Las ecuaciones paramétricas también definen la recta en función de un punto que pertenece a dicha recta, y un vector director que tiene su misma dirección. Se diferencian de la Ecuación Vectorial solamente en su estructura, que se deriva de la anterior mediante un par de simples pasos algebraicos.

Así, por caso, si la Ecuación Vectorial de una recta en 3D se define como:

$$P = A + \vec{v}.t \quad \forall \mathrm{t} \in \mathbb{R}$$

Desglosando sus miembros con nombres genéricos, tenemos:

$$P(x;y;z) = A(x_0;y_0;z_0) + \vec{v}(a;b;c).t \quad \forall \text{ t} \in \mathbb{R}$$

Por tanto, operando la igualdad obtenemos la estructura general de las Ecuaciones Vectoriales de dicha recta:

$$\begin{cases} x = x_0 + a.t \\ y = y_0 + b.t \\ z = z_0 + c.t \end{cases} \quad \forall \text{ t} \in \mathbb{R}$$

Siendo las constantes $(x_0;y_0;z_0)$ el punto P por donde pasa la recta; y los coeficientes $(a;b;c)$ el vector director de dicha recta.

Recuerde: tanto la Ecuación Vectorial como las Ecuaciones Paramétricas tienen la ventaja de que pueden utilizarse para plantear rectas en espacios de cualquier dimensión!

<u>Ecuación Continua de Recta</u>

Del sistema que acabamos de plantear como definición de una recta en el espacio:

$$\begin{cases} x = x_0 + a.t \\ y = y_0 + b.t \\ z = z_0 + c.t \end{cases} \quad \forall \text{ t} \in \mathbb{R}$$

… Podemos despejar el parámetro t en todos los miembros e igualarlos: a eso se le denomina Ecuación Continua y tendrá tantos términos como dimensiones participen en la recta en cuestión.

De la primera, tenemos: $x - x_0 = a.t \quad \rightarrow \quad \frac{x-x_0}{a} = t$

De la segunda, tenemos: $y - y_0 = b.t \quad \rightarrow \quad \frac{y-y_0}{b} = t$

De la tercera, tenemos: $z - z_0 = c.t \quad \rightarrow \quad \frac{z-z_0}{c} = t$

Igualando las tres (ya que todas ellas son iguales a ***t***) tenemos:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

<u>ECUACIÓN DE LA RECTA QUE PASA POR DOS PUNTOS</u>: Ejemplo con números

Veamos todos estos formatos con un ejemplo numérico: pongamos que necesitamos calcular una recta que pasa por dos puntos dados.

Sean: **A = (2 ; 3 ; -1)** y **B = (4 ; 1 ; 5)**

Son 2 puntos en un espacio tridimensional. Evidentemente existe una única recta que pasa por ambos… Para calcularla necesitamos uno de esos puntos (cualquiera) y el “vector director de dicha recta”.

Para obtener el vector director, necesitamos saber “cuánto se desplaza” en cada uno de los tres ejes dicho vector. Pues bien, si ese vector es capaz de ir desde el punto A hasta el punto B, se desplazará tanto en cada eje como sea la diferencia de B – A.

Entonces, **será el vector** $\boldsymbol{\vec{v}} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{2} \\ \mathbf{-2} \\ \mathbf{6} \end{bmatrix}$

La recta R será igual a:

- <u>Ecuación Vectorial</u>:

$$R = A + \vec{v}t \quad \forall \text{ t} \in \mathbb{R}$$

$$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{2} \\ \mathbf{3} \\ \mathbf{-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{2} \\ \mathbf{-2} \\ \mathbf{6} \end{bmatrix} \boldsymbol{t} \quad \forall \text{ t} \in \mathbb{R}$$

- <u>Ecuaciones Paramétricas</u>:

$$R = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 6 \end{bmatrix} t \quad \forall \text{ t} \in \mathbb{R}$$

Cualquier punto $P \in R$ será

$$(x; y; z) = (2; 3; -1) + (2; -2; 6).\, t$$

$$(x; y; z) = (2 + 2t; 3 - 2t; -1 + 6t)$$

O sea que:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x = 2 + 2t} \\ \boldsymbol{y = 3 - 2t} \\ \boldsymbol{z = -1 + 6t} \end{cases} \quad \forall \text{ t} \in \mathbb{R}$$

- <u>Ecuación Continua</u>:

Dado que $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 3 - 2t \\ z = -1 + 6t \end{cases} \quad \forall \text{ t} \in \mathbb{R}$

Despejando t en todas las ecuaciones tenemos: $\begin{cases} \frac{x-2}{2} = t \\ \frac{y-3}{-2} = t \\ \frac{z+1}{6} = t \end{cases} \quad \forall \text{ t} \in \mathbb{R}$

Entonces la ecuación continua es: $\boldsymbol{\frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+1}{6}}$

Recursos Adicionales Disponibles: en el link que sigue podrá descargar una hoja de cálculo de Excel en la que hemos construido las fórmulas necesarias para poder obtener a partir de una ecuación las restantes, para sistemas en 2D y en 3D.

((Insertar Link Interno para descargar el archivo "Modelo Conversión Ecuaciones de la Recta.xlsx"))

Es interesante que pueda darle un doble uso:

- Por un lado, le será de utilidad para corroborar sus cálculos
- Por otra parte, es un buen ejercicio ver cómo están construidas las fórmulas y de ese modo aprender un poco más de esta fabulosa herramienta!

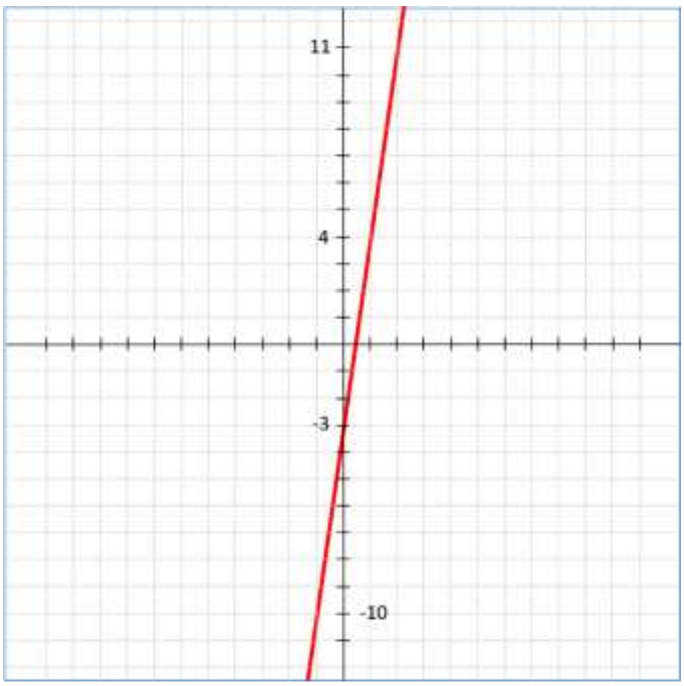
Recurso de video externo: encontrará muchísimos videos en línea relativos a la conversión de una ecuación en otra, de los diferentes modelos que hemos comentado. Recomiendo particularmente el que sigue, ya que está muy claro y práctico:

https://www.youtube.com/watch?v=C6olCbniBgo

AUTOEVALUACIÓN SP5-H4

---

1. Indique cuál o cuáles de las siguientes es una ecuación válida para la recta representada en el siguiente gráfico:



   a. $y = 7x - 3$ ((Respuesta: Sí))

   b. $\begin{cases} x = 0 + 1t \\ y = 3 + 7t \end{cases}$ $\forall\, t \in \mathbb{R}$ ((Respuesta: Sí))

c. $y = 3 - 7x$ ((Respuesta: No))

d. $\begin{cases} x = 1 + 0t \\ y = 7 + 3t \end{cases}$ $\forall \, \mathrm{t} \in \mathbb{R}$ ((Respuesta: No))

e. $7x - y - 3 = 0$ ((Respuesta: Sí))

f. $-7x + y + 3 = 0$ ((Respuesta: Sí))

g. $\frac{x-0}{1} = (\frac{y+3}{7})$ ((Respuesta: Sí))

h. $\frac{x-1}{0} = (\frac{y-7}{-3})$ ((Respuesta: No))

i. $x = \frac{y}{7} + \frac{3}{7}$ ((Respuesta: Sí))

j. $7x = y - 3$ ((Respuesta: Sí))

2. Indique cuál o cuáles de las siguientes es una ecuación equivalente para la recta definida a continuación:

   $\mathrm{R} = (3; -1; -2) + (2; 3; 3)\mathrm{t} \quad \forall \, \mathrm{t} \in \mathbb{R}$

   a. $R = (3 + 2)x + (-1 + 3)y + (-2 + 3)z$ ((Respuesta: No))

   b. $R = (3x + 2) + (-1y + 3) + (-2z + 3)$ ((Respuesta: No))

   c. $\begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 1 - 3t \\ z = 2 - 3t \end{cases}$ $\forall \, \mathrm{t} \in \mathbb{R}$ ((Respuesta: No))

   d. $\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 1 + 3t \\ z = 2 + 3t \end{cases}$ $\forall \, \mathrm{t} \in \mathbb{R}$ ((Respuesta: Sí))

   e. $\frac{x-3}{2} = (\frac{y+1}{3}) = (\frac{z+2}{3})$ ((Respuesta: Sí))

   f. $\frac{x-2}{3} = (\frac{y+3}{1}) = (\frac{z+3}{2})$ ((Respuesta: No))

   g. $\frac{3x-9)}{2} = 3y + 3 = 3z + 6$ ((Respuesta: Sí))

3. Indique cuál o cuáles de las siguientes es una ecuación equivalente para la recta definida a continuación:

$$\begin{cases} x = -4 + 2t \\ y = 5 + 2t \qquad \forall\, \mathrm{t} \in \mathbb{R} \\ z = 1 - 2t \end{cases}$$

a. $\mathrm{R} = (-4; 5; 1)\mathrm{t} + (2; 2; -2) \quad \forall\, \mathrm{t} \in \mathbb{R}$ ((Respuesta: No))

b. $\mathrm{R} = (-4; 5; 1) + (2; 2; -2)\mathrm{t} \quad \forall\, \mathrm{t} \in \mathbb{R}$ ((Respuesta: Sí))

c. $\mathrm{R} = (2; 2; -2) + (-4; 5; 1)\mathrm{t} \quad \forall\, \mathrm{t} \in \mathbb{R}$ ((Respuesta: No))

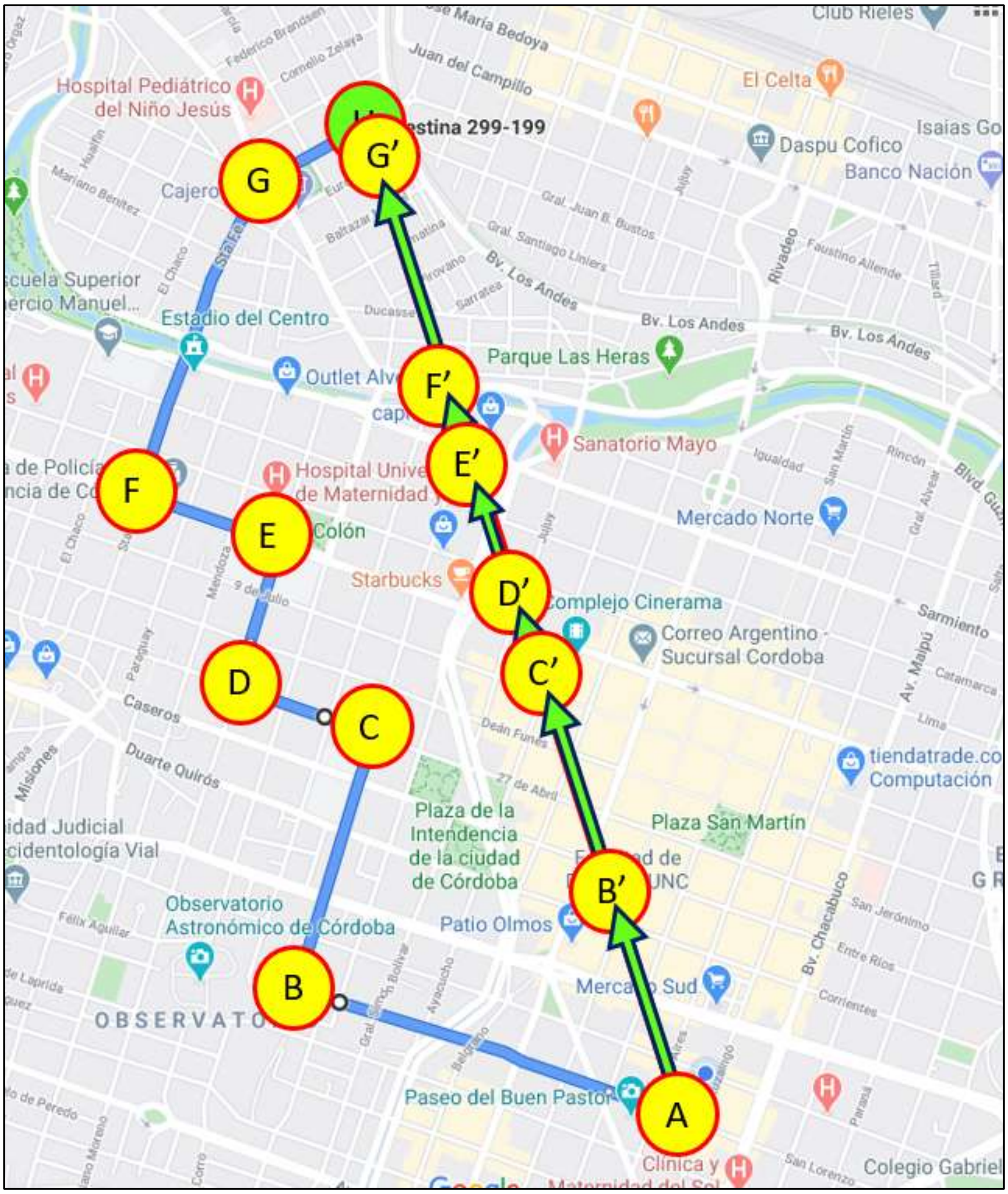
d. $\frac{x+4}{2} = (\frac{y-5}{2}) = (\frac{z-1}{-2})$ ((Respuesta: Sí))

e. $\frac{x+4}{-2} = (\frac{y-5}{-2}) = (\frac{z-1}{2})$ ((Respuesta: No))

f. $\frac{x+2}{4} = (\frac{y+2}{-5}) = (\frac{z-2}{-1})$ ((Respuesta: No))

SITUACIÓN PROFESIONAL RESUELTA

En la situación profesional planteada, se requiere calcular la distancia lineal total entre el primer y el último punto de la ruta trazada por el GPS; y también la distancia lineal parcial que cada tramo representa sobre dicha línea total.



<u>Datos con los que contamos</u>

Según indica el enunciado, para cada tramo tenemos dos datos:

- Su longitud: está expresada en metros lineales, y no representa mayor complejidad.
- Su dirección: está expresada como un ángulo, medido en grados sexagesimales. IMPORTANTE!! Debemos establecer un sistema de referencia, es decir, la dirección 0° a partir de la cual se mide cada ángulo. Sin esto sería imposible encarar el problema… Consideraremos entonces la dirección como una medida angular entre 0° y 360° en sentido antihorario, partiendo de la posición de las 3 en las agujas del reloj. Es decir, la dirección 0° será en la que apunta el eje positivo de la variable **x** para el sistema cartesiano imaginario que contiene el mapa.

Con lo anterior en cuenta, podemos interpretar la siguiente tabla que nos viene dada como “Dato” para este problema:

Origen	Destino	Dirección en 360°	Longitud
A	B	287,10°	843
B	C	15,52°	579
C	D	288,43°	294
D	E	11,31°	316
E	F	288,43°	294
F	G	20,85°	697
G	H	60,26°	250
		Total	**3273**

El problema se resolverá agregando a esta tabla una columna con la "Proyección" de cada uno de estos segmentos sobre el trazado de la distancia lineal entre el punto A y el punto H. Para ello, deberemos reexpresar cada segmento como un vector, y así poder hacer los cálculos!

Por otra parte, la primera parte del problema se resolvería también con el mismo recurso: si cada tramo es "vectorizado", la suma de todos los tramos nos dará como resultado un único vector que apunta desde A hasta H: y qué bueno porque ese es un dato fundamental para poder calcular las "Proyecciones".

Así que: Manos a la Obra! Comencemos a vectorizar!

Sabemos que la relación entre el ángulo que forman dos vectores y sus módulos y componentes está dado por la siguiente ecuación:

$$\cos(\delta) = \frac{\vec{r}.\vec{s}}{|\vec{r}|.|\vec{s}|}$$

También sabemos que el coseno de un ángulo es el cociente entre el cateto adyacente y la hipotenusa de un triángulo rectángulo:

$$\cos(\delta) = \frac{Cateto\ Adyacente\ a\ \delta}{Hipotenusa}$$

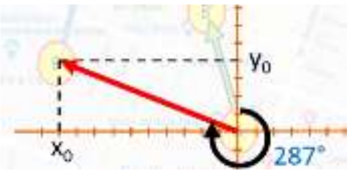
Y no olvidemos a Pitágoras! Nos enseñó que en todo triángulo rectángulo se cumple:

$$h = \sqrt{a^2 + b^2}$$

*(siendo: **h**=hipotenusa; **a**=cateto1; **b**=cateto2)*

Ahora bien, poniendo todas las piezas juntas, podemos considerar cada segmento de la ruta (convertido en un "vector") como la hipotenusa de un triángulo rectángulo, teniendo en las componentes de dicho vector como catetos.

Por ejemplo: Para el segmento AB, tenemos la siguiente interpretación superpuesta sobre el plano dado



Su ángulo es de 287,10°, y su longitud (módulo) es de 843 mts.

Podemos averiguar sus componentes **x_0** e **y_0** para convertir ese segmento en una expresión vectorial:

El vector (o precisamente: su módulo) representa la hipotenusa de un triángulo rectángulo imaginario, donde **x_0** es el cateto adyacente al ángulo, e **y_0** el cateto opuesto. Como conocemos el ángulo y también la hipotenusa, podemos averiguar los valores de los catetos.

Por "SOH CAH TOA" sabemos que

$$cos(\delta) = \frac{Cateto\ Adyacente\ a\ \delta}{Hipotenusa}$$

Es decir que, renombrando para los elementos que tenemos como datos, tenemos que

$$cos(\delta) = \frac{x_0}{|\overrightarrow{AB}|}$$

Siendo AB el nombre que le damos a este vector (un nombre poco ortodoxo, es cierto, pero bastante descriptivo!). Reemplazando por los valores para este primer caso:

$$\cos(162{,}90°) = \frac{x_0}{843\ mts}$$

Despejando…

$$x_0 = \cos(162{,}90°)\,.\,843\ mts$$

Calculando…

$$x_0 = -0{,}955\ .\ 843\ mts = -806\ mts$$

Por su parte, para calcular **y_0** seguimos el mismo razonamiento, pero utilizando el cociente del Seno:

$$sen(\delta) = \frac{Cateto\ Opuesto\ a\ \delta}{Hipotenusa} = \frac{y_0}{|\overrightarrow{AB}|}$$

Con números…

$$\text{sen}(162{,}90°) = \frac{y_0}{843\ mts} \rightarrow \quad y_0 = \text{sen}(162{,}90°)\,.\,843\ mts$$

Finalmente,

$$y_0 = 0{,}294\ .\ 843\ mts = 248\ mts$$

Repitiendo este proceso para cada segmento, podemos volcar los resultados sobre la misma tabla anterior:

Origen	Destino	Dirección en 360°	Longitud	Coseno	x	Seno	y
A	B	162,90	843	-0,956	-806	0,294	248
B	C	74,48	579	0,268	155	0,964	558
C	D	161,57	294	-0,949	-279	0,316	93
D	E	78,69	316	0,196	62	0,981	310
E	F	161,57	294	-0,949	-279	0,316	93
F	G	69,15	697	0,356	248	0,934	651
G	H	29,74	250	0,868	217	0,496	124
		Total	**3273**				

<u>Comprobación</u>: *en este, como en todo caso con cálculos por volumen, tenga presente verificar los resultados y siempre que sea posible realizar algún control cruzado (mediante cálculo alternativo) para obtener el mismo resultado como comprobación.*

En este caso, una vez obtenidas las componentes (x;y) de cada vector, podemos calcular su módulo y ver si coincide con la Longitud que teníamos como dato. Controlemos, por caso, para el segmento FG:

$$\left|\overrightarrow{FG}\right| = \sqrt{248^2 + 651^2} = \sqrt{61504 + 423801} = 697$$

Resolviendo el primer requerimiento

Ahora que tenemos tabulados todos los vectores que constituyen el camino, podemos calcular la distancia lineal total, como la suma de todos los vectores que componen la ruta dada:

$$\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{GH}$$

$$\overrightarrow{AH} = \begin{bmatrix} -806 \\ 248 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 155 \\ 558 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -279 \\ 93 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 62 \\ 310 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -279 \\ 93 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 248 \\ 651 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 217 \\ 124 \end{bmatrix}$$

Para conocer la distancia lineal total, realizamos la suma y luego calculamos su módulo:

$$\left|\overrightarrow{\boldsymbol{AH}}\right| = \begin{vmatrix} -682 \\ 2077 \end{vmatrix} = \sqrt{682^2 + 2077^2} = \sqrt{465124 + 4313929} = \mathbf{2186}\ \boldsymbol{mts}$$

Resolviendo el segundo requerimiento

Ya sabemos la distancia lineal total (obtenida con la suma), y las coordenadas del punto final (H) si asumimos que (A) parte del origen.

Ahora lo que necesitamos es tabular, para cada tramo, cuánto se avanza en términos lineales sobre la recta AH calculada.

Otra vez, por caso, lo haremos para un segmento y luego generalizamos:

El tramo AB tiene una longitud de 843 mts, un ángulo de avance de 162,9° y recién acabamos de averiguar sus coordenadas relativas (-806 ; 248).

Debemos calcular la Proyección Escalar de AB sobre AH.

La fórmula de aplicación nos dice que:

$$Proyección\ Escalar\ de\ \vec{s}\ sobre\ \vec{r} = \frac{\vec{r}.\vec{s}}{|\vec{r}|}$$

Reemplazando por las variables utilizadas en este caso:

$$Proyección\ Escalar\ de\ \overrightarrow{AB}\ sobre\ \overrightarrow{AH} = \frac{\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AH}\right|}$$

Con números…

$$Proyección\ Escalar\ de\ \overrightarrow{AB}\ sobre\ \overrightarrow{AH} = \frac{\begin{bmatrix}-682\\2077\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}-806\\248\end{bmatrix}}{2186}\ mts$$

$$Proyección\ Escalar\ de\ \overrightarrow{AB}\ sobre\ \overrightarrow{AH} = \frac{\begin{bmatrix}-682\\2077\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}-806\\248\end{bmatrix}}{2186}\ mts$$

$$\boldsymbol{Proyección\ Escalar\ de\ \overrightarrow{AB}\ sobre\ \overrightarrow{AH}} = \frac{1064788}{2186}\ mts = \ \boldsymbol{487\ mts}$$

Deberemos repetir este último cálculo para cada uno de los segmentos de la ruta.

Completando en la tabla nos quedará del siguiente modo:

Origen	Destino	Dirección en 360°	Longitud	x	y	Proyección en AH
A	B	162,90	843	-806	248	487
B	C	74,48	579	155	558	482
C	D	161,57	294	-279	93	175
D	E	78,69	316	62	310	275
E	F	161,57	294	-279	93	175
F	G	69,15	697	248	651	541
G	H	29,74	250	217	124	50
		Total	**3273**		**Total**	**2186**

Fantástico!!! *Observe que la suma de los tramos proyectados sobre AH nos da exactamente la longitud que habíamos calculado para dicha trayectoria lineal…!!*

En resumen: Recorrer los 3273 mts por la ruta trazada equivale a una distancia lineal de 2186 mts, y sabemos el impacto de cada tramo en dicha trayectoria.

((Me falta desarrollar esto, ya lo cargaré directamente en el TID))