1. Espacios vectoriales

Un espacio vectorial es una estructura algebraica que reune cuatro elementos: $(V, \mathbb{F}, +, \cdot)$, donde V es un conjunto no vacío, que posee dos operaciones $+$ y $\cdot$. La operación $+$ es una operación binaria interna (llamada suma, definida para los elementos del conjunto$V$), la operación $\cdot$ es una operación binaria externa (llamada producto por escalar, definida entre los elementos de un cuerpo numérico $\mathbb{F}$ y el conjunto V). La estructura de espacio vectorial respeta 8 propiedades fundamentales que determinan como es el comportamiento de la suma, como es comportamiento de producto por escalar y como se relacionan la suma y el producto.

A lo largo de nuestro curso el conjunto $\mathbb{F}$ denotará un cuerpo numérico, especialmente $\mathbb{R}$ el cuerpo de números reales o $\mathbb{C}$ el cuerpo de números complejos. Antes de comenzar recordaremos una serie de conjuntos que usaremos a lo largo de este curso, principalmente para fijar notaciones que serán de uso cotidiano.

Fn **Definición 1.1.** Sea n un número natural. El conjunto $\mathbb{R}^n$ se define mediante

$$\mathbb{F}^n = \left\{ u = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} : a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{F} \right\}. \tag{1}$$ eqFn

A menudo por simplicidad a los elementos $u \in \mathbb{F}^n$ los denotamos mediante

$$u = [a_i]_{n \times 1}$$

Comentario 1.1. $\mathbb{F}^n$ es el conjunto de n-tuplas ordenadas de números reales o complejos organizados en forma de columnas.

Ejemplo 1.1. Si $n = 2$, entonces los elementos $\mathbb{R}^2$ son pares ordenados organizados en columnas. Ejemplos de elementos de $\mathbb{R}^2$ son:

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ y } \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ahora bien, si fijamos al elemento de $\mathbb{R}^2$ dado por $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$, entonces

$$a_1 = -2,\ a_2 = 1.$$

Ejemplo 1.2. Si $n = 3$, entonces los elementos $\mathbb{R}^3$ son tripletas organizadas en columnas. Ejemplos de elementos de $\mathbb{R}^3$ son:

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix} \text{ y } \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ahora bien, si fijamos el elemento de $\mathbb{R}^3$ dado mediante $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -4 \end{bmatrix}$, entonces

$$a_1 = 2,\ a_2 = -1,\ a_3 = -4.$$

Ejemplo 1.3. Si $n = 4$, entonces los elementos $\mathbb{C}^4$ son 4-uplas organizadas en columnas. Un elemento de $\mathbb{C}^4$ es:

$$\begin{bmatrix} 2+i \\ 1-i \\ 0 \\ \sqrt{2}i \end{bmatrix}$$

y vale que

$$a_1 = 2+i,\ a_2 = 1-i,\ a_3 = 0,\ a_4 = \sqrt{2}i.$$

Mnxm **Definición 1.2.** Sean m, n números naturales. El conjunto $M_{m\times n}(\mathbb{F})$ de las *matrices sobre el cuerpo* $\mathbb{F}$ *de orden* $m\times n$, se define mediante

$$M_{m\times n}(\mathbb{F}) = \left\{ A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} : a_{ij} \in \mathbb{F} \text{ para } i = 1\dots m,\ j = 1,\dots,n \right\}. \tag{2}$$ eqMnxm

Si $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$, a A le llamamos *matriz de orden* $m\times n$, a cada elemento a_{ij} le llamamos la entrada ij.

Al arreglo

$$\begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \end{bmatrix}$$

le llamamos *fila i-ésima de la matriz A* para cada $i = 1,\dots,m$.

Y al arreglo

$$\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$$

le llamamos *columna j-ésima de la matriz A* para cada $j = 1,\dots,n$. Mas generalmente si $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ solemos escribir de forma simplicada que

$$A = [a_{ij}]_{m\times n}$$

Comentario 1.2. Una matriz resulta ser simplemente un arreglo rectangular bidimensional de números en el cuerpo $\mathbb{F}$. El conjunto $M_{m\times n}(\mathbb{F})$ es el conjunto de todos esos posibles arreglos con números en el cuerpo $\mathbb{F}$ que podemos realizar en m filas y n columnas. Algo muy importante: notemos que las filas están asociadas al contador i y las columnas la contador j.

Ejemplo 1.4. Si $m = 2$ y $n = 3$, entonces la matriz dada mediante

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

es una matriz con entradas reales de orden 2×3, esto es, $A \in M_{2\times 3}(\mathbb{R})$ y podemos deducir que

1. Sus entradas ij para $i = 1, 2$ y $j = 1, 2, 3$ son:

$$a_{11} = 2 \quad a_{12} = -2 \quad a_{13} = 2$$

$$a_{21} = 1 \quad a_{22} = 1 \quad a_{23} = -1.$$

2. La fila 1 de la matriz A es

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

3. La fila 2 de la matriz A es

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

4. La columna 1 de la matriz A es

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

5. La columna 2 de la matriz A es

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

6. La columna 3 de la matriz A es

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Ejemplo 1.5. Si $m = 3$ y $n = 4$ entonces

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 5 & 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

es un elemento de $M_{3\times 4}$, esto es A tiene tres filas y cuatro columnas. Podemos notar que

1. Sus componentes son
$$\begin{array}{llllllll} a_{11} & = 2 & a_{12} & = 1 & a_{13} & = 0 & a_{14} & = -2 \\ a_{21} & = 0 & a_{22} & = 1 & a_{23} & = 0 & a_{24} & = -2 \\ a_{31} & = 5 & a_{32} & = 1 & a_{33} & = 0 & a_{34} & = -2 \end{array}$$

2. Sus filas son
$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

3. Sus columnas son
$$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Pn **Definición 1.3.** Sean n un número natural. El conjunto $P_n(\mathbb{F})$ de los *polinomios de grado menor o igual a n con coeficientes en* $\mathbb{F}$, se define mediante

$$P_n(\mathbb{F}) = \left\{ P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n : a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{F} \right\}. \quad (3)$$ eqPn

Por simplicidad a menudo denotaremos a los elementos $P(x) \in P_n(\mathbb{F})$ mediante

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

Ejemplo 1.6. El polinomio de grado 2 dado mediante

$$P(x) = -1 + x - 3x^2,$$

pertenece al conjunto $P_2(\mathbb{R})$, y vale que

$$a_0 = -1, \ a_1 = 1, \ a_2 = -3$$

Ejemplo 1.7. El polinomio $P(x) = 12 + i + 4x - 5x^3$ pertenece al conjunto $P_3(\mathbb{C})$, y vale que

$$a_0 = 12 + i, \ a_1 = 4, \ a_2 = 0, \ a_3 = -5$$

Comentario 1.3. Si tenemos dos conjuntos no vacíos A y B, el producto cartesiano entre A y B se define mediante

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, \ \text{y } b \in B\}.$$

Es decir $A \times B$ está formado por los pares ordenados (a, b) donde el primer elemento es un elemento del conjunto A y el segundo elemento es un elemento del conjunto B .

Ejemplo 1.8. Sea $A = B = V$ donde V es un conjunto no vacío. Entonces

$$V \times V = \{(u, v) : u, \, v \in V\}.$$

Es decir $V \times V$ está formado por los pares ordenados (u, v) donde ambos elementos u y v son elementos del conjunto V .

Ejemplo 1.9. Sean $A = \mathbb{F}$ y $B = V$ donde V es un conjunto no vacío. Entonces

$$\mathbb{F} \times V = \{(\alpha, u) : \alpha \in \mathbb{F}, \, u \in V\}.$$

Es decir $\mathbb{F} \times V$ está formado por los pares ordenados $((\alpha, u)$ donde el primer elemento es un elemento del conjunto $\mathbb{F}$ y el segundo elemento es un elemento del conjunto V .

Comentario 1.4. Recordemos que una función consiste en una relación que simolizamos mediante

$$f : A \to B, \text{ o bien } \quad A \xrightarrow{f} B\,,$$

que asigna a cada elemento del conjunto A a lo sumo un elemento del conjunto B. El dominio de f (denotado mediante $\mathrm{Dom}(f)$) son los elementos de A que se relacionan con algún elemento de B. La imagen de de f (denotado mediante $\mathrm{Im}(f)$) son los elementos de B para los cuales hay algún elemento en el conjunto A con el cual se relaciona. En términos generales es posible que estemos familiarizados con la suma dentro de distintos sistemas numéricos. La suma es una operación binaria (mas precisamente una función) que toma dos elementos de un conjunto de números y devuelve otro número del mismo conjunto. Además la suma de números cumple ser conmutativa, asociativa, poseer un elemento neutro y poseer inversos aditivos. Esta misma idea la podemos generalizar a cojuntos cuya estructura de los elementos no sea necesariamente números. Presentamos a continuación una definición formal de la suma que nos permitirá, en cierto sentido realizar aritmética en conjuntos mas generales que cuerpos numéricos como $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

`suma` **Definición 1.4.** Dado un conjunto no vacío V, una *suma* definida en V es una función $+ : V \times V \to V$, esto es, que toma dos elementos $u,\ v \in V$, y devuelve nuevamente un elemento de V que denotamos como $u + v$. Además para cualquier tres elementos $u,\ v,\ w \in V$ se cumplen las siguientes propiedades

1. *Conmutatividad*:
$$u + v = v + u \tag{4}$$
`com`

2. *Asociatividad*:
$$(u + v) + w = u + (v + w) \tag{5}$$
`aso`

3. *Elemento neutro*: Existe un elemento $0 \in V$ que llamamos *elemento neutro* y que cumple:
$$u + 0 = 0 + u = u. \tag{6}$$
`neu`

4. *Inverso aditivo*: para cada $u \in V$ existe un elemento $-u \in V$ que llamamos *inverso de* u y que cumple:
$$u + (-u) = (-u) + u = 0 \tag{7}$$
`invad`

Comentario 1.5. Una suma definida en un conjunto V es en esencia una operación binaria, es decir, que toma dos elementos $u,\ v \in V$ y devuelve otro elemento en V, que tiene comportamiento igual al de la adición de la aritmética de los números, tales como los números naturales, enteros, racionales, reales y complejos. Lo que vamos a comenzar a explotar en este curso el el hecho que no solo los conjuntos numéricos son los únicos que poseen la posibilidad de tener suma. Por convención se tiene que $u+(-v) = u - v$ para cada par de elementos de V.

`ejsumaFn` **Ejemplo 1.10.** En el conjunto $\mathbb{F}^n$ podemos definir una suma como sigue: Si $u = [a_i]_{n\times 1}$ y $v = [b_i]_{n\times 1}$, entonces
$$u + v = [a_i]_{n\times 1} + [b_i]_{n\times 1} = [a_i + b_i]_{n\times 1}. \tag{8}$$
`sumaFn`

Es decir, la suma en $\mathbb{F}^n$ consiste en sumar componente a componente. Mas precisamente si

$$u = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \text{ y } v = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

son elementos de $\mathbb{F}^n$, entonces

$$u + v = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{bmatrix}. \tag{9}$$
`sumacompF`

Si queremos demostrar efectivamente que la operación definida en $\mathbb{F}^n$ mediante la expresión de la ecuación (8) es verdaderamente una suma, debemos verificar que cumple todas las condiciones de la Definición 1.4. Para esto tomamos tres elementos arbitrarios en $\mathbb{F}^n$ dados mendiante

$$u = [a_i]_{n\times 1},\ \ v = [b_i]_{n\times 1} \text{ y } w = [c_i]_{n\times 1}.$$

1. Conmutatividad:

$$\begin{aligned}
u+v &= [a_i]_{n\times 1}+[b_i]_{n\times 1} && \text{Reemplazando a } u \text{ y } v\\
&= [a_i+b_i]_{n\times 1} && \text{Por la ecuación (8)}\\
&= [b_i+a_i]_{n\times 1} && \text{La suma de los números (reales complejos) es conmutativa}\\
&= [b_i]_{n\times 1}+[a_i]_{n\times 1} && \text{Usando (8)}\\
&= v+u && \text{Reemplazando } v \text{ y } u
\end{aligned}$$

   Así concluimos que
$$u+v=v+u,$$
   es decir, que se cumple la propiedad conmutativa.

2. Asociatividad:

$$\begin{aligned}
(u+v)+w &= ([a_i]_{n\times 1}+[b_i]_{n\times 1})+[c_i]_{n\times 1} && \text{Reemplazando a } u,\ v \text{ y } w\\
&= [a_i+b_i]_{n\times 1}+[c_i]_{n\times 1} && \text{Por la ecuación (8) aplicada a } u \text{ y } v\\
&= [(a_i+b_i)+c_i]_{n\times 1} && \text{Por la ecuación (8) aplicada a } u+v \text{ y } w\\
&= [a_i+(b_i+c_i)]_{n\times 1} && \text{La suma de los números reales o complejos es asociativa}\\
&= [a_i]_{n\times 1}+[b_i+c_i]_{n\times 1} && \text{Usando (8) aplicada a } u \text{ y } v+w\\
&= [a_i]_{n\times 1}+([b_i]_{n\times 1}+[c_i]_{n\times 1}) && \text{Usando (8) aplicada a } v \text{ y } w\\
&= u+(v+w) && \text{Reemplazando a } u,\ v \text{ y } u
\end{aligned}$$

3. Elemento neutro: Tomamos el elemento $0_n=[0]_{n\times 1}$ la n-tupla cuyas componentes son ceros, y cualquier otro elemento $u=[a_i]_{n\times 1}$. Entonces

$$\begin{aligned}
u+0_n &= [a_i]_{n\times 1}+[b_i]_{n\times 1} && \text{Reemplazando a } u \text{ y } 0\\
&= [a_i+0]_{n\times 1} && \text{Usando (8)}\\
&= [a_i]_{n\times 1} && \text{ya que 0 es el elemento neutro en } \mathbb{R} \text{ o } \mathbb{C}\\
&= u && \text{Reemplazando a } u
\end{aligned}$$

   De otro lado

$$\begin{aligned}
0_n+u &= [0]_{n\times 1}+[a_i]_{n\times 1} && \text{Reemplazando a 0 y } u\\
&= [0+a_i]_{n\times 1} && \text{Usando (8)}\\
&= [a_i]_{n\times 1} && \text{Ya que 0 es el elemento neutro en } \mathbb{R} \text{ o } \mathbb{C}\\
&= u && \text{Reemplazando a } u
\end{aligned}$$

   Por lo tanto podemos ver que existe un elemento $0_n\in V$ que llamamos y que cumple
$$0_n+u=u+0_n=u$$

4. Inverso aditivo: para cada $u=[a_i]_{n\times 1}$ en $\mathbb{F}^n$ proponemos al elemento $-u=[-a_i]_{n\times 1}$ y tenemos que:

$$\begin{aligned}
u+(-u) &= [a_i]_{n\times 1}+[-a_i]_{n\times 1} && \text{Reemplazando a } u \text{ y } -u\\
&= [a_i+(-a_i)]_{n\times 1} && \text{Usando (8)}\\
&= [a_i-a_i]_{n\times 1} && \text{Destruyendo el paréntesis}\\
&= [0]_{n\times 1} && \text{Por el inverso aditivo en } \mathbb{R} \text{ o } \mathbb{C}\\
&= 0 && \text{Reemplazando a } 0
\end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}
(-u)+u &= [-a_i]_{n\times 1}+[a_i]_{n\times 1} && \text{Reemplazando a } -u \text{ y } u\\
&= [-a_i+a_i]_{n\times 1} && \text{Usando (8)}\\
&= [0]_{n\times 1} && \text{Por el inverso aditivo en } \mathbb{R} \text{ o } \mathbb{C}\\
&= 0 && \text{Reemplazando a } 0
\end{aligned}$$

En consecuencia $u+(-u)=(-u)+u=0$.

prodporesc **Definición 1.5.** Sea V unconjunto no vacío en el cual hay definido una suma $+$. Una operación *producto por escalar real* es una función $\cdot : \mathbb{F}\times V \to V$, es decir, que toma un elemento de $\alpha\in\mathbb{F}$ y un elemento u de V, y devuelve un elemento $\alpha u \in V$, tal que para cada α, $\beta\in\mathbb{F}$, y cada u, $v\in V$ vale:

1. Distributividad del producto respecto a la suma vectorial:
$$\alpha(u+v)=\alpha u+\alpha v, \tag{10}$$
2. Distributividad del la suma escalar respecto al producto:
$$(\alpha+\beta)u=\alpha u+\beta u, \tag{11}$$
3. Asociatividad del producto respecto del producto escalar
$$(\alpha\beta)u=\alpha(\beta u), \tag{12}$$
4. Neutro multiplicativo:
$$1u=u. \tag{13}$$

Comentario 1.6. Notar que llamamos escalares a los elementos $\alpha\in\mathbb{F}$. El producto de un escalar α por un elemento $u\in V$ da por resultado otro elemento $\alpha u\in V$.

prodesFn **Ejemplo 1.11.** En el conjunto $\mathbb{F}^n$ podemos definir un *producto por escalar (con escalares en* $\mathbb{F}$*)* como gue: Si $\alpha\in\mathbb{F}$ y $u=[a_i]_{n\times 1}\in\mathbb{F}^n$ entonces

$$\alpha u=\alpha[a_i]_{n\times 1}=[\alpha a_i]_{n\times 1}. \tag{14}$$ eprodesFn

Si queremos verificar efectivamente que la operación definida en $\mathbb{F}^n$ mediante la expresión (14) es verdaderamente un producto por escalar, debemos verificar que cumple todas las condiciones de la Definición 1.5. Para esto tomamos escalares α, $\beta\in\mathbb{F}$ y vectores $u=[a_i]_{n\times 1}$, $v=[b_i]_{n\times 1}$ en $\mathbb{F}^n$.

1. Distributividad del producto respecto a la suma vectorial:

$$\begin{aligned}
\alpha(u+v) &= \alpha\left([a_i]_{n\times 1}+[b_i]_{n\times 1}\right) && \text{Reemplazando a } u \text{ y } v\\
&= [\alpha(a_i+b_i)]_{n\times 1} && \text{Usando (14) con } u+v\\
&= [\alpha a_i+\alpha b_i] && \text{Propiedad distributiva en } \mathbb{F}\\
&= [\alpha a_i]_{n\times 1}+[\alpha b_i]_{n\times 1} && \text{Usando (8)}\\
&= \alpha[a_i]_{n\times 1}+\alpha[a_i]_{n\times 1} && \text{Usando (14)}\\
&= \alpha u+\alpha v && \text{Reemplazando a } u \text{ y } v
\end{aligned}$$

2. Distributividad de la suma escalar respecto al producto:

$$\begin{aligned}
(\alpha+\beta)u &= (\alpha+\beta)[a_i]_{n\times 1} && \text{Reemplazando a } u\\
&= [(\alpha+\beta)a_i]_{n\times 1} && \text{Usando (14)}\\
&= [\alpha a_i+\beta a_i]_{n\times 1} && \text{Propiedad distributiva en } \mathbb{R}\\
&= [\alpha a_i]_{n\times 1}+[\beta a_i]_{n\times 1} && \text{Usando (8)}\\
&= \alpha[a_i]_{n\times 1}+\beta[a_i]_{n\times 1} && \text{Usando (14)}\\
&= \alpha u+\beta u && \text{Reemplazando a } u
\end{aligned}$$

En consecuencia vale la identidad
$$(\alpha+\beta)u=\alpha u+\beta u$$

3. Asociatividad del producto respecto del producto escalar

$$\begin{aligned}
(\alpha\beta)u &= (\alpha\beta)[a_i]_{n\times 1} && \text{Reemplazando a } u\\
&= [(\alpha\beta)a_i]_{n\times 1} && \text{Usando (14)}\\
&= [\alpha(\beta a_i)]_{n\times 1} && \text{Propiedad asociativa del producto en } \mathbb{F}\\
&= \alpha[\beta a_i]_{n\times 1} && \text{Usando (14)}\\
&= \alpha(\beta[a_i]_{n\times 1}) && \text{Usando (14)}\\
&= \alpha(\beta u) && \text{Reemplazando a } u
\end{aligned}$$

En consecuencia vale la identidad:
$$(\alpha\beta)u=\alpha(\beta u).$$

4. Neutro multiplicativo: debemos mostrar que $1u=1$

$$\begin{aligned}
1u &= 1[a_i]_{n\times 1} && \text{Reemplazando a } u\\
&= [1a_i]_{n\times 1} && \text{Usando (14)}\\
&= [a_i]_{n\times 1} && \text{Propiedad del elemento neutro multiplicativo en } \mathbb{F}\\
&= u && \text{Reemplazando a } u
\end{aligned}$$

De donde concluimos que
$$1u=u.$$

Así pues concluímos que efectivamente tenemos un producto por escalar.

espvect **Definición 1.6.** Un subconjunto no vacio V recibe el nombre de *espacio vectorial sobre el cuerpo* $\mathbb{F}$ si en V hay definidas una suma y un producto por escalar con escalares en $\mathbb{F}$. A los elementos de V les llamamos *vectores*. Si $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ diremos que el espacio vectorial es real, y si $\mathbb{F}=\mathbb{C}$ diremos que el espacio vectorial es complejo.

Ejemplo 1.12. $\mathbb{F}^n$ es un espacio vectorial.

1.1. Ejercicios

Ejercicio 1.1. (5 puntos) Sean $u=\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}$, $v=\begin{bmatrix}-3\\0\\3\end{bmatrix}$, y $w=\begin{bmatrix}\sqrt{2}\\1\\-\sqrt{2}\end{bmatrix}$, vectores en $\mathbb{R}^3$. Hallar los vectores

1. $u+v$.
2. $v+u$
3. $(u+v)+w$
4. $u+(v+w)$
5. $-u$
6. $u-v$
7. $v-u$
8. $3u$
9. $-2v$

Ejercicio 1.2. (5 puntos) Sean $u = \begin{bmatrix} i \\ 2+i \end{bmatrix}$, $v = \begin{bmatrix} -i \\ 0 \end{bmatrix}$, y $w = \begin{bmatrix} \sqrt{2}i \\ 1 \end{bmatrix}$, vectores en $\mathbb{C}^2$. Hallar los vectores

1. $u+v$.
2. $v+u$
3. $(u+v)+w$
4. $u+(v+w)$
5. $-u$
6. $u-v$
7. $v-u$
8. $3iu$
9. $(-2+i)v$.

Recuerde justificar paso a paso las operaciones realizadas.

Ejercicio 1.3. (10 puntos) Sean A, $B \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ y $\alpha \in \mathbb{F}$ definimos

$$A + B = [a_{ij}]_{m\times n} + [b_{ij}]_{m\times n} = [a_i + b_i]_{m\times n},$$

y

$$\alpha A = \alpha[a_{ij}]_{m\times n} = [\alpha a_{ij}]_{m\times n}.$$

Demostrar que estas operaciones corresponden a una suma y un producto por escalar real. Concluir que $M_{m\times n}(\mathbb{F})$ un espacio vectorial.

Ejercicio 1.4. (10 puntos) Sean $P(x)$, $Q(x) \in P_n(\mathbb{F})$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ definimos

$$P(x) + Q(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i + \sum_{i=0}^{n} b_i x^i = \sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i) x^i$$

y

$$\alpha P(x) = \alpha \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = \sum_{i=0}^{n} \alpha a_i x^i$$

Demostrar que estas operaciones corresponden a una suma y un producto por escalar real. Concluir que P_n un espacio vectorial.

Ejercicio 1.5. (7 puntos) Sean $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ y $C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ matrices en $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Hallar las matrices

1. $A+B$.
2. $(A+B)+C$

3. $A + (B + C)$
4. $-A$
5. $A - B$
6. $B - A$
7. $-2A$
8. $3B$

Ejercicio 1.6. (7 puntos) Sean $P(x) = 1 + x - x^2$, $Q(x) = 2x - 2x^2$, y $R(x) = 1 + x^3$, polinomios en $P_2(\mathbb{R})$. Hallar los polinomios

1. $P(x) + Q(x)$.
2. $(P(x) + Q(x)) + R(x)$.
3. $P(x) + (Q(x) + R(x)$.
4. $-P(x)$.
5. $-Q(x)$.
6. $P(x) - Q(x)$.
7. $Q(x) - P(x)$.
8. $2P(x)$
9. $-3P(x)$.

2. Subespacio vectorial

Definición 2.1. Sea V un espacio vectorial y W un subjunto no vacío de V. Se dice que W es un *subespacio vectorial* de V si W es un espacio vectorial, junto con las operaciones de suma entre vectores y multiplicación por un escalar definidas para V.

Comentario 2.1. Debemos notar que si deseamos verificar que un subconjunto W de un espacio vectorial real V es un subespacio vectorial de V, debemos probar que se cumplen todas las condiciones de la Definición 1.4 y de la Definición 1.5, lo cual sería una tarea ardua al estilo del Ejemplo 1.10 y del Ejemplo 1.11. Sin embargo el siguiente Teorema ilustra una buena ténica para verificar que W es un subespacio vectorial.

Teorema 2.1. Un subconjunto no vacio W de un espacio vectorial real V, es un *subespacio vectorial* de V si para todo escalar α y todo para u y v elementos de W se tiene que αu y $u+v$ también está en W.

Numatriz **Definición 2.2.** Dada una matriz $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ el *espacio nulo* de A (o *Kernel* de A) mediante

$$\mathrm{Ker}(A) = \{u \in \mathbb{F}^n : \ Au = 0_m\}. \tag{15}$$ eNumatriz

Teorema 2.2. Sea $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$, entonces Ker(A) es un subespacio vectorial de $\mathbb{F}^n$

Ejemplo 2.1. Supongamos que tenemos la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 8 & 6 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix},$$

en $M_{2\times 3}(\mathbb{R})$. Hallemos su kernel.

Escencialmente debemos encontrar todos los vectores

$$u = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

tal que $Au = 0_2$. Esto es

$$\begin{bmatrix} 2 & 8 & 6 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Para esto podemos reducir por filas a la matriz ampliada dada por:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 8 & 6 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 0 \end{array}\right],$$

la cual, con las operaciónes elementales por filas

$$F_2 - \frac{1}{2}F_1 \to F_2 \text{ y } F_1 \to \frac{1}{2}F_1$$

se obtiene

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

y esto equivale a sistema de ecuaciones

$$x + 4y + 3z = 0$$

En consecuencia

$$Ker(A) = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x + 4y + 3z = 0 \right\}$$

Immatriz **Definición 2.3.** Dada una matrix $A \in M_{m\times n}$, se define su *Imagen* como el conjunto de vectores $v \in \mathbb{R}^m$ para los cuales existe $u \in \mathbb{R}^n$ tal que $Au = v$, a la Imagen de A la denotamos como $\mathrm{Im}(A)$.

Teorema 2.3. Sea $A \in M_{m\times n}$, entonces $\mathrm{Im}(A)$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^m$

Ejemplo 2.2. Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 8 & 6 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$, para encontrar su imagen debemos encontrar todos los vectores $v = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ para los cuales existe un vector $u = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ tal que $Au = v$. O equivalentemente tenemos que resolver para que a, $b \in \mathbb{R}$ existen x, y, $z \in \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{bmatrix} 2 & 8 & 6 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

Para esto podemos reducir por filas a la matriz ampliada dada por:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 8 & 6 & a \\ 1 & 4 & 3 & b \end{array}\right],$$

la cual, con la operación elemental por filas $F_2 \to F_2 - \frac{1}{2}F_1$ se obtiene

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 8 & 6 & a \\ 0 & 0 & 0 & b - \frac{1}{2}a \end{array}\right],$$

y para que tal sistema tenga solución debe cumplirse que

$$b - \frac{1}{2}a = 0,$$

o equivalentemente

$$a - 2b = 0.$$

En consecuencia

$$\operatorname{Im}(A) = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 : a - 2b = 0 \right\}$$

cl1R2 **Ejemplo 2.3.** Si tomamos los vectores $u_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ y $u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ en $\mathbb{R}^2$ y los escalares $\alpha_1 = -2$ y $\alpha_2 = 3$, entonces la combinación lineal $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2$ la calculamos como sigue:

$$\begin{aligned} \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 &= (-2)\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} && \text{Reemplazando a } \alpha_1, \alpha_2, u_1, u_2 \\ &= \begin{bmatrix} (-2)2 \\ (-2)(-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (3)1 \\ (3)0 \end{bmatrix} && \text{Usando (\textbf{??})} \\ &= \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} && \text{Simplificando} \\ &= \begin{bmatrix} -4+3 \\ 2+0 \end{bmatrix} && \text{Usando (\textbf{??})} \\ &= \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} && \text{Simplificando} \end{aligned}$$

concluimos entonces que:

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

cl2R2 **Ejemplo 2.4.** Supongamos que $u_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$, $u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $u = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ en $\mathbb{R}^2$. Podemos preguntarnos si existen escalares α_1, α_2 tales que $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 = u$. Para dar respuesta a este problema, podemos suponer que existen tales escalares, entonces

$$\begin{aligned}
\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 &= \alpha_1 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} && \text{Reemplazando a } u_1, \text{ y } u_2 \\
&= \begin{bmatrix} \alpha_1(2) \\ \alpha_1(-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_2(1) \\ \alpha_2(0) \end{bmatrix} && \text{Usando (??)} \\
&= \begin{bmatrix} 2\alpha_1 \\ -\alpha_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_2 \\ 0 \end{bmatrix} && \text{Simplificando} \\
&= \begin{bmatrix} 2\alpha_1 + \alpha_2 \\ -\alpha_1 + 0 \end{bmatrix} && \text{Usando (??)} \\
&= \begin{bmatrix} 2\alpha_1 + \alpha_2 \\ -\alpha_1 \end{bmatrix} && \text{Simplificando}
\end{aligned}$$

y como deseamos resolver $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 = b$, entonces se cumple que

$$\begin{bmatrix} 2\alpha_1 + \alpha_2 \\ -\alpha_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

y en esta igualdad si tomamos componente a componente se tiene el sistema de ecuaciones lineales en variables α_1 y α_2

$$\begin{cases} 2\alpha_1 + \alpha_2 & = -1 \\ \quad\;\; -\alpha_1 & = 1 \end{cases}$$

De donde podemos notar que la solución viene dada mediante

$$\alpha_1 = -1, \ \alpha_2 = 1$$

2.1. Ejercicios

Ejercicio 2.1. (5 puntos.) Dada la matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 4 & 0 & 8 \\ 5 & 10 & 6 & 8 \end{bmatrix}$$

Determinar cuales de los siguientes vectores pertenecen al $\text{Ker}(A)$.

$$\left(\begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ -\frac{4}{3} \\ 1 \end{bmatrix}\right), \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ \frac{-4}{3} \\ 1 \end{bmatrix}\right), \left(\begin{bmatrix} 12 \\ -6 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}\right), \left(\begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$$

Ejercicio 2.2. (5 puntos) Dada la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 & 11 \\ 5 & 7 & 11 & 3 \\ 8 & 12 & 18 & 14 \\ -2 & -2 & -2 & -4 \end{bmatrix}$$

Determinar cuales de los siguientes vectores pertenecen a la $\text{Im}(A)$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 2.3. (7 puntos) Hallar el $\text{Ker}(A)$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 2.4. (10 puntos) Hallar la $\mathrm{Im}(A)$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Bases y dimensión

`comlin` **Definición 3.1.** Dado un conjunto de vectores $S = \{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ de un espacio vectorial V sobre un cuerpo $\mathbb{F}$, una *combinación lineal del conjunto* S es una expresión de la forma

$$u = a_1u_1 + a_2u_2 + \cdots + a_ku_k \tag{16}$$ `ecomlin`

donde $a_1,\ a_2, \dots,\ a_k \in \mathbb{F}$.

`gen` **Definición 3.2.** Sea $S = \{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ un conjunto de vectores de un espacio vectorial V sobre un cuerpo $\mathbb{F}$. Definimos el *espacio generado por* S, denotado por $\text{gen}(S) = \text{gen}\{u_1, \dots, u_k\}$, como el conjunto de todos las combinaciones lineales de los elementos $u_1, \dots, u_k$. Es decir:

$$\text{gen}(S) = \{u \in V : u = a_1u_1 + a_2u_2 + \cdots + a_ku_k \ \text{ donde } \ a_1,\ a_2, \dots,\ a_k \in \mathbb{F}\}. \tag{17}$$ `genec`

`genesp` **Teorema 3.1.** Sea $S = \{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ un conjunto no vacío de vectores de un espacio vectorial V sobre un cuerpo $\mathbb{F}$. Entonces el conjunto $\text{gen}(S)$ es un subespacio vectorial de V.

`Renmatriz` **Definición 3.3.** Dada una matriz $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F}^n)$, se define su *Espacio fila* como el conjunto de vectores de $\mathbb{F}^n$ generado por las filas de A.

Ejemplo 3.1. Dada la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 8 & 6 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix},$$

para encontrar su espacio fila debemos encontrar el conjunto de vectores generado por las filas de A. Esto es equivalente a encontrar es espacio generado por los vectores

$$u_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \\ 6 \end{bmatrix},\ u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Ahora bien, podemos notar que vale la relación

$$u_1 = 2u_2,$$

por lo tanto

$$\alpha u_1 + \beta u_2 = \alpha(2u_2) + \beta u_2 = (2\alpha + \beta)u_2,$$

lo cual dice que cualquier combinación lineal $\alpha u_1 + \beta u_2$ es de la forma $(2\alpha + \beta)u_2$. En otras palabras

$$gen\{u_1, u_2\} = gen\{u_2\}.$$

En conclusión el espacio fila de A es

$$gen\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}\right\}.$$

`Colmatriz` **Definición 3.4.** Dada una matriz $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$, se define su espacio columna (o espacio de las columnas) como el subespacio vectorial de $\mathbb{F}^m$ generado por las columnas de A.

Ejemplo 3.2. Dada la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 8 & 6 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix},$$

para encontrar su espacio columna debemos encontrar el conjunto de vectores generado por las columnas de A. Esto es equivalente a encontrar es espacio generado por los vectores

$$u_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix},\ u_2 = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \end{bmatrix},\ u_3 = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Ahora bien, podemos notar que valen las relaciones

$$u_2 = 4u_1,\ \ u_3 = 3u_1,$$

por lo tanto

$$\alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3 = \alpha u_1 + 4\beta u_1 + 3\gamma u_1 = (\alpha + 4\beta + 3\gamma) u_1.$$

Entonces cualquier combinación lineal $\alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3$ es de la forma $(\alpha + 4\beta + 3\gamma) u_1$, en otras palabras

$$gen\{u_1, u_2, u_3\} = gen\{u_1\}.$$

En conclusión el espacio columna de A es el subespacio vectorial

$$gen \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

li **Definición 3.5.** Dado un conjunto de vectores $S = \{u_1, \dots, u_k\}$ de un espacio vectorial V, este conjunto será llamado *linealmente independiente* si cada vez que

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_k u_k = 0 \tag{18}$$ eqli1

entonces

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0. \tag{19}$$ eqli2

En caso contrario, si alguno de los escalares sea no nulo entonces se dice que S es *linealmente dependiente*.

Ejemplo 3.3. Consideremos el conjunto de vectores en $\mathbb{R}^2$, dado mediante

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Para comprobar si S es un conjunto linealmente, comenzamos por fijar

$$u_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \ u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Para comprobarlo basta suponer que existe escalares $\alpha_1, \ \alpha_2$ tal que $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 = 0$. Esta última igualdad equivale

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 = \begin{bmatrix} 2\alpha_1 + \alpha_2 \\ -\alpha_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

y en esta igualdad si tomamos componente a componente se tiene el sistema de ecuaciones lineales homoéeneos en variables α_1 y α_2

$$\left\{ \begin{array}{rl} 2\alpha_1 + \alpha_2 & = 0 \\ -\alpha_1 & = 0 \end{array} \right. ,$$

cuya única solución

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 0.$$

Por lo tanto u_1 y u_2 son linealmente independientes.

Ejemplo 3.4. El conjunto de vectores en $\mathbb{R}^2$ dado mediante

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\},$$

es linealmente dependiente. Para comprobarlo, comenzamos por fijar la notación:

$$u_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \ u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

y suponemos que existen escalares $\alpha_1, \ \alpha_2 \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 = 0$. Esta condición equivale a:

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 = \begin{bmatrix} 2\alpha_1 + \alpha_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Esta igualdad equivale al sistema de ecuaciones lineales homogéne en variables α_1 y α_2 dado mediante:

$$\left\{ \begin{array}{rl} 2\alpha_1 + \alpha_2 & = 0 \\ 0 & = 0 \end{array} \right. ,$$

y este sistema de ecuaciones lineales posee infinitas soluciones (distintas de la trivial) dadas mediante la relación

$$\alpha_2 = -2\alpha_1.$$

Por lo tanto u_1 y u_2 son linealmente dependientes.

Definición 3.6. Un conjunto de vectores $S = \{u_1, \ldots, u_n\}$ de un espacio vectorial V es llamado *base* de V si es linealmente independiente y el espacio generado por S es V.

Comentario 3.1. Ver :

https://www.youtube.com/watch?v=RqQqFx4xUjk&list=PLIb_io8a5NB2DddFf-PwvZDCOUNT1GZoA&index=3

Comentario 3.2. Para determinar si un conjunto $S = \{u_1, \ldots, u_n\} \subset \mathbb{F}^n$ es una base de $\mathbb{F}^n$ debemos verificar manualmente dos cosas:

1. S es linealmente independiente.
2. Todo vector de $\mathbb{F}^n$ es combinación lineal de los vectores del conjunto S.

Realizar este procedimiento suele tomar bastante tiempo. Sin embargo a continuación presentamos un criterio que ayuda bastante a simplicar los pasos anteriores.

detbase

Teorema 3.2. Sea A una matriz cuadrada de orden n. Entonces $\det(A) \neq 0$ si y solo si las columnas de A son vectores linealmente independientes. Además las columnas de A resultan ser una base de $\mathbb{F}^n$

Definición 3.7. Dado una base $B = \{u_1, \ldots, u_n\}$ de un espacio vectorial V, se define la dimensión de V como n, esto es, la dimensión de V es el número de elementos de la base S y se denota por $\dim(V)$.

Ejemplo 3.5. La dimensión de $\mathbb{R}^n$ es n

Definición 3.8. Además definimos el rango de A la $\dim \mathrm{Im}(A)$ y lo denotamos mediante $\rho(A)$. Definimos la *nulidad* de A como $\dim A$ es llamada la, y la denotamos como: $\nu(A)$

3.1. Ejercicios

Ejercicio 3.1. (5 puntos.) Determinar cuales de los siguientes conjuntos son linealmente independientes y cuales son linealmente dependientes en el espacio vectorial indicado. En caso de ser linealmente independientes, determinar si el conjunto es una base para el espacio.

1. $S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$ en $\mathbb{R}^3$
2. $S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$ en $\mathbb{R}^2$
3. $S = \{1 - x, 1 - x^2\}$ en $P_2(\mathbb{R})$
4. $S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$ de $V = M_{2\times 2}$
5. $S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$ de $V = M_{2\times 3}$

Ejercicio 3.2. (7 puntos). Considere la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 6 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

Determine

1. Una base para el subespacio vectorial de $\mathrm{Ker}(A)$
2. La dimensión del subespacio vectorial de $\mathrm{Ker}(A)$

3. Una base para el subespacio vectorial de $\mathrm{Im}(A)$

4. La dimensión del subespacio vectorial de $\mathrm{Im}(A)$

Ejercicio 3.3. (7 puntos) Calcular bases de los subespacios de $\mathbb{R}^4$ S, T, $S+T$ y $S \cap T$, siendo

$$S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : \; x_1 - x_2 = 0\} \text{ y } T = gen\{(1, 1, 2, 1), \, (2, 3, -1, 1)\}$$

Ejercicio 3.4. (10 puntos). Sea W es conjunto de las matrices en $M_{2\times 2}$ cuya traza es 0, es decir, $A \in W$ si

$$\mathrm{traza}(A) = a_{11} + a_{22} = 0.$$

1. Compruebe que W es un subespacio vectorial de $M_{2\times 2}$.

2. Encuentre una base para W.

3. Determinar la dimensión de W.

Ejercicio 3.5. (10 puntos) Hallar una base para cada uno de los siguientes subespacios vectoriales

1. $U_1 = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; x + y + 2z = 0\big\}$

2. $U_3 = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; x - y = 0\big\}$

3. $U_3 = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; x - y + z = 0, x + y + z = 0\big\}$

4. Matriz cambio de base

[v]_B **Definición 4.1.** Si $B = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ es una base de un espacio vectorial V, entonces cada vector $u \in V$ se puede escribir de forma única como:

$$u = c_1 u_1 + c_2 u_2 + \cdots + c_n u_n, \tag{20}$$ eq[v]_B1

donde $c_i \in \mathbb{R}$ para cada $i = 1, \ldots, n$. Bajo estas condiciones introducimos la siguiente notación

$$[u]_B = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \tag{21}$$ eq[v]_B2

Ejemplo 4.1. Considere los dos conjuntos B_1 y B_2 de vectores en $\mathbb{R}^2$ dados mediante:

$$B_1 = \left\{ u_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix},\ u_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\} \ B_2 = \left\{ v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix},\ v_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Como

$$det \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = 2(3) - (-1)(-1) = 5 \neq 0,$$

entonces por el Teorema 3.2 B_1 resulta ser una base de $\mathbb{R}^2$. También, como

$$det \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = 1(1) - 2(-2) = 5 \neq 0,$$

entonces por el Teorema 3.2, B_2, resulta ser una base de $\mathbb{R}^2$. Ahora bien, cada uno de los vectores de la base B_1 se pueden escribir como combinación lineal de los elementos del conjunto B_2, eso es existen escalares $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}^2$ y escalares $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}^2$ tal que

$$u_1 = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \text{ y } u_2 = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2$$

Esto es equivalente a resolver los sitemas de ecuaciones

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ y } \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

y para no tener que resolver cada uno de los sistemas por separado, los podemos resolver simultaneamente reduciendo la matriz ampliada

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & -1 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \end{array}\right],$$

para la cual seguimos la siguiente linea de operaciones:

$$F_1 \to \frac{1}{2}F_1,\ F_2 \to F_2 - (-1)F_1,\ F_2 \to \frac{5}{2}F_2,\ F_1 \to F_1 - (-\frac{1}{2})F_1$$

se obtiene

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Debemos deternos y pensar bien lo que hemos obtenido, esto lo resumimos a continuación

1. En primer lugar el vector $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ es la solución al sitema $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ que c orrespondía a resolver el problema $u_1 = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$. Ahora bien ya hemos encontrado a α_1 y α_2, por lo tanto a la luz de la Definición 4.1, tenemos que

$$[u_1]_{B_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2. En segundo lugar el vector $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ es la solución al sitema $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ que c orrespondía a resolver el problema $u_2 = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2$. Ahora bien ya hemos encontrado a β_1 y β_2, por lo tanto a la luz de la Definición 4.1, tenemos que

$$[u_2]_{B_2} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Comentario 4.1. La matriz $[[u_1]_{B_2}, [u_2]_{B_2}]$ que aparece en el ejemplo anterior es la mas importante de este capítulo. A continuación le daremos su nombre y mostraremos sus propiedades.

Mdetrans **Definición 4.2.** Dado un espacio vectorial V y dos bases de V dadas mediante:

$$B_1 = \{u_1,\, u_2, \ldots, u_n\} \text{ y } B_2 = \{v_1,\, v_2,\, \ldots,\, v_n\}$$

llamamos *matriz de transición de la base* B_1 *a la base* B_2 a la matriz formada como sigue

$$A = \big[[u_1]_{B_2}\, [u_2]_{B_2}\, \ldots\, [u_n]_{B_2}\big]. \tag{22}$$ eqMdetran

cambase **Teorema 4.1.** Sea B_1 y B_2 bases para un espacio vectorial V. Sea A la matriz de transicion de la base B_1 a la base B_2. Entonces para todo $u \in V$ vale que

$$[u]_{B_2} = A[u]_{B_1}, \tag{23}$$ eqcambas1

además A es inversible y vale

$$[u]_{B_1} = A^{-1}[u]_{B_2}, \tag{24}$$ eqcambas2

Comentario 4.2. Ver :

https://www.youtube.com/watch?v=LYlaRDsi_T8&list=PLIb_io8a5NB2DddFf-PwvZDCOUNT1GZoA&index=13

Ejercicio 4.1. (7 puntos) Hallar la matriz P de cambio de base entre las bases B_1 y B_2 y luego hallar la matriz P de cambio de base entre las bases B_2 y B_1 en $\mathbb{R}^2$. Tome el vector $v = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ y expreselo en cada base B_1 y B_2. Calcule $P[v]_{B_1}$ y $P^{-1}[v]_{B_2}$ e interprete este par de resultados

1. $B_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ $B_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$
2. $B_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$, $B_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$

Ejercicio 4.2. (10 puntos) El conjunto de las matrices cuadradas de dimensión 2 y coeficientes en $\mathbb{R}$, denotado por $M_2(\mathbb{R})$ es un espacio vectorial. Estudiar cuales de los siguientes subconjuntos de $M_2(\mathbb{R})$ son subespacios vectoriales.

1. $H_1 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ -b & c \end{bmatrix} : \, a,\, b,\, c \in \mathbb{R} \right\}$
2. $H_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a & 1+a \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : \, a \in \mathbb{R} \right\}$

5. Transformaciones Lineales

tl **Definición 5.1.** Sean V y W dos espacios vectoriales sobre el cuerpo $\mathbb{F}$. Una transformación lineal de V en W es una función $T : V \to W$, tal que para cada u, $v \in V$ y $\alpha \in \mathbb{F}$ vale

$$T(u+v) = T(u) + T(v) \tag{25}$$ e1tl

y

$$T(\alpha u) = \alpha T(u), \tag{26}$$ e2tl

Ejemplo 5.1. La función $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida mediante

$$T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -y \\ x+y \end{bmatrix},$$

es una transformación lineal. Para comprobar que efectivamente es una transformación lineal fijamos

$$u = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \; v = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

$$\begin{aligned} T(u+v) \quad &= T\left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}\right) \\ &= T\left(\begin{bmatrix} a+c \\ b+d \end{bmatrix}\right) \\ &= \begin{bmatrix} a+c \\ -(b+d) \\ (a+c)+(b+d) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a+c \\ -b-d \\ a+b+c+d \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a \\ -b \\ a+b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c \\ -d \\ c+d \end{bmatrix} \\ & T(u) + T(v) \end{aligned}$$

por otro lado

$$\begin{aligned} T(\alpha u) \quad &= T\left(\alpha \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\right) \\ &= T\left(\begin{bmatrix} \alpha a \\ \alpha b \end{bmatrix}\right) \\ &= \begin{bmatrix} \alpha a \\ -(\alpha b) \\ \alpha a + \alpha b \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \alpha a \\ -\alpha b \\ \alpha(a+b) \end{bmatrix} \\ &= \alpha \begin{bmatrix} a \\ -b \\ a+b \end{bmatrix} \\ &= \alpha T(u) \end{aligned}$$

En consecuencia la función T verifica efectivamente la deficnión de transformación lineal.

`T(0)` **Teorema 5.1.** Sean V y W dos espacios vectoriales reales y $T : V \to W$ una transformación lineal. Entonces

$$T(0) = 0. \tag{27}$$ `eT(0)`

`T(u-v)` **Teorema 5.2.** Sean V y W dos espacios vectoriales reales y $T : V \to W$ una transformación lineal. Entonces

$$T(u - v) = T(u) - T(v) \tag{28}$$ `eT(u-v)`

para todo $u,\ v \in V$.

`T(suma)` **Teorema 5.3.** Sean V y W dos espacios vectoriales reales y $T : V \to W$ una transformación lineal. Entonces

$$T(\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n) = \alpha_1 T(u_1) + \cdots + \alpha_n T(u_n) \tag{29}$$ `eT(suma)`

para todo $u_1, \ldots u_n \in V$ y todo $\alpha_1, \ldots \alpha_n \in \mathbb{R}$.

Teorema 5.4. Sean V un espacio vectorial de dimensión finita con base $B = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$. Sea W un espacio vectorial que contiene los vectores $\{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$. Entonces existe una transformación lineal única $T : V \to W$ tal que

$$Tu_i = w_i \tag{30}$$

para cada $i = 1, 2, \ldots, n$.

Ejercicio 5.1. (5 puntos) Verificar que las siguientes funciones son transformaciones lineales

1. $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida mediante
$$T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x \\ x - y \end{bmatrix},$$
2. $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida mediante
$$T \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - y + z \\ 2x - 3y + 5z \end{bmatrix},$$

Ejercicio 5.2. (7 puntos) Sea $T : P_2 \to P_1$ la función

$$T(p(x)) = p'(x)$$

donde $p'(x)$ indica la derivada del polinomio $p(x)$. Comprobar que T es una tranformación lineal.

Ejercicio 5.3. (7 puntos) Sea $T : P_2 \to P_2$ la función

$$T(p(x)) = xp'(x)$$

donde $p'(x)$ indica la derivada del polinomio $p(x)$. Comprobar que T es una tranformación lineal.

Ejercicio 5.4. (10 puntos) Sea $T : M_{2\times 2} \to M_{2\times 2}$ definida mediante

$$T(A) = A^t,$$

donde A^t denota la matriz transpuesta de A. Verificar que T es una transformación lineal.

6. Matriz de una transformación lineal

matT **Teorema 6.1.** Sean V un espacio vectorial de dimensión n, W un espacio vectorial de dimensión m y $T: V \to W$ una transformación lineal $B_1 = \{u_1, \ldots, u_n\}$ una base para V y sea $B_2 = \{w_1, \ldots, w_m\}$ una base para W. Entonces existe una única matriz $A_{m\times n}$ tal que

$$[Tu]_{B_2} = A[u]_{B_1} \tag{31}$$ ematT

para todo $u \in V$.

Comentario 6.1. A la matriz A del Teorema 6.1, la construímos tomado cada u_j (para $j = 1\ldots, n$ de B_1 y a $T(u_j)$ los expresamos como combinación lineal de los vectores de B_2. Esto es, debemos encontrar los escalares a_{ij} que cumplen la igualdad:

$$T(u_j) = a_{1j}w_1 + a_{2j}w_2 + \cdots + a_{mj}w_m$$

Luego nos armamos el vector columna

$$[Tu_j]_{B_2} = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}.$$

Si realizamos este proceso para todos los vectores de la base B_1 podemos armar la matriz

$$A = [[Tu_1]_{B_2}\, [Tu_2]_{B_2} \ldots [Tu_n]_{B_2}]$$

Ejercicio 6.1. (5 puntos) Hallar las matrices que representan a las son transformaciones lineales en las bases estandar de cada espacio espacio vectorial.

1. $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida mediante
$$T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x \\ x-y \end{bmatrix},$$

2. $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida mediante
$$T\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-y+z \\ 2x-3y+5z \end{bmatrix},$$

Ejercicio 6.2. (7 puntos) Sea $T: P_2 \to P_1$ la función $T(p(x)) = p'(x)$ donde $p'(x)$ indica la derivada del polinomio $p(x)$. Encontrar la matriz de representación de la transformación T en las bases canónicas.

Ejercicio 6.3. (10 puntos) Sea $T: M_{2\times 2} \to M_{2\times 2}$ definida mediante $T(A) = A^t$, donde A^t denota la matriz transpuesta de A. Hallar la matriz de la tranformación lineal T en las bases canónicas.

7. Vectores y valores característicos

.

Sea V un espacio vectorial real de dimensión n y $T : V \to V$ una transformación lineal. Como bien hemos visto podemos encontrar una forma de representar a T mediante una matriz, pero esta representación es caónica en el sentido que depende de la base. Ahora bien, podemos preguntarnos si hay alguna forma de que esta matriz sea diagonal. En esta lectura resolveremos esta cuestión. Este problema por lo general no tiene una respuesta positiva, y el caso general conlleva a uno de los teoremas mas hermosos que tiene que tiene el álgebra lineal que se llama el teorema de diagonalización de Jordan.

Definición 7.1. Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$, definimos el *polinomio característico* de A como

$$P(\lambda) = det(A - \lambda I_n), \tag{32}$$

donde I_n es la matriz identidad de orden n. A la ecuación

$$P(\lambda) = 0 \tag{33}$$

le llamamos *ecuación característica* de A

Teorema 7.1. Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$. Entonces A tiene a lo sumo n valores característicos distintos.

Teorema 7.2. Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$. Entonces 0 es un valor característico de A si y solo si A no es inversible.

Definición 7.2. Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$, diremos que un vector v de $\mathbb{R}^n$ es un *vector característico* de la matriz A si existe un escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ tal para el cual vale que

$$Av = \lambda v. \tag{34}$$

Al valor λ le llamamos *valor característico* del vector v (que usualmente denotado v_λ). El conjunto de todos los vectores característicos asociados un valor característico λ le llamamos espacio característico de λ, y lo denotamos como E_λ

Teorema 7.3. Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$ y λ un valor característico de A. Entonces el espacio característico E_λ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$.

Teorema 7.4. Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$. Entonces los vectores característicos asociados a valores característico distintos son linealmente independientes

Teorema 7.5. Teorema de Hamilton-Kaley. Toda matriz cuadrada satisface su propia ecuación característica. Es decir, si $P(\lambda)$ es el polinomio característico de A, entonces $P(A) = 0$.

8. Aplicación

Sean $0 \leq p, q \leq 1$

1. consideremos la matriz de transición

$$A = \begin{bmatrix} p & q \\ 1-p & 1-q \end{bmatrix}$$

2. su polinomio característico viene dado por

$$P_A(\lambda) = det(A - \lambda I) = \lambda^2 - (1 + p - q)\lambda + p - q \tag{35}$$

polinomio

3. Tal polinomio tiene por factorización

$$P_A(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - (p - q)) \tag{36}$$

polinomio

4. Los autovalores correspondientes son

$$\{1, p - q\}$$

5. Los autovectores correspondientes son

$$\left\{\begin{bmatrix} q \\ 1-p \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right\} \tag{37}$$ $\boxed{\texttt{autovalor}}$

6. La matriz diagonal asociada es

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p-q \end{bmatrix} \tag{38}$$ $\boxed{\texttt{matrix di}}$

7. La matriz de transición P viene dada por

$$P = \begin{bmatrix} q & 1 \\ 1-p & -1 \end{bmatrix} \; P^{-1} = \frac{1}{p-q-1}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ p-1 & q \end{bmatrix} \tag{39}$$ $\boxed{\texttt{matriz d}}$

8. Finalmente

$$A = \frac{1}{p-q-1}\begin{bmatrix} q & 1 \\ 1-p & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p-q \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ p-1 & q \end{bmatrix} \tag{40}$$ $\boxed{\texttt{A diagona}}$

9. Así obtenemos

$$A^n = \frac{1}{p-q-1}\begin{bmatrix} q & 1 \\ 1-p & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (p-q)^n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ p-1 & q \end{bmatrix}$$

$$A^n = \begin{bmatrix} \frac{-q+(p-1)(p-q)^n}{p-q-1} & \frac{-q+q(p-q)^n}{p-q-1} \\ \frac{p-1-p(p-q)^n+(p-q)^n}{p-q-1} & \frac{p-1-q(p-q)^n}{p-q-1} \end{bmatrix}$$

Vale la pena notar que si A es la matriz de transición de un proceso cuyo estado inicial es

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$$

entonces

$$\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-q+(p-1)(p-q)^n}{p-q-1} & \frac{-q+q(p-q)^n}{p-q-1} \\ \frac{p-1-p(p-q)^n+(p-q)^n}{p-q-1} & \frac{p-1-q(p-q)^n}{p-q-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$$

Mas precisamen

$$x_n = \frac{-q+(p-1)(p-q)^n}{p-q-1}x_0 + \frac{-q+q(p-q)^n}{p-q-1}y_0$$

$$y_n = \frac{p-1-p(p-q)^n+(p-q)^n}{p-q-1}x_0 + \frac{p-1-q(p-q)^n}{p-q-1}y_0$$

Siendo $0 \le p \le 1$ y $0 \le p \le 1$ entonces $-1 \le -q \le 0$ y $-1 \le p-q \le 1$ o $|p-q| \le 1$
Ahora bien podemos evaluar los siguientes casos

a) $|p-q| < 1$ en cuyo caso el cuando n tiende a infinito $(p-q)^n$ tiende a cero y en consecuencia

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} A^n &= \tfrac{1}{p-q-1}\begin{bmatrix} q & 1 \\ 1-p & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ p-1 & q \end{bmatrix} \\ &= \tfrac{1}{p-q-1}\begin{bmatrix} -q & -q \\ -1+p & -1+p \end{bmatrix} \end{aligned}$$

b) Si $p-q=1$ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ y $\lim_{n\to\infty} A^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

c) $p-q=-1$, $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \lim_{n\to\infty} A^n$ no existe

Ejercicio 8.1. (5 puntos) Los pueblos villa el alegre y villa la añoranza poseen inicialmente 130000 y 150000 habitantes respectivamente. Supongamos que cada seis meses el 25 % de los habitantes de villa el alegre alegre se mudan a villa la añoranza y el 35 % de los habitantes de villa la añoranza alegre se mudan a villa el alegre. Bajo estas condiciones hallar

1. La matriz A de transición de estados entre las ciudades.
2. Diagonalizar la matriz de transición A, encontrando su polinomio característico, los valores característicos, los espacios característicos, la matriz P y la matriz P^{-1} la matriz diagonal D.
3. Encontrar una fórmula explícita que exprese la cantidad de habitantes en cada pueblo al final del n-ésimo periodo.

Ejercicio 8.2. (7 puntos) Una secuencia de números naturales sigue el siguiente patrón:

$$a_0 = 3,\ a_1 = 5,\ a_{n+1} = a_n + a_{n-1},\ n \geq 1.$$

Mediante el proceso de diagonalización de matrices encontrar una fórmula explícita para cada elemento de la suceción.

Ejercicio 8.3. (10 puntos) Sea $T : M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ definida mediante $T(A) = A^t$, donde A^t denota la matriz transpuesta de A. Decidir si existe alguna base de $\mathbb{R}$ tal que la matriz de representación T resulte ser una matriz diagonal.

9. Formas Bilineales

Definición 9.1. Dado un espacio vectorial real V, una forma bilineal en V es una función $f : V \times V \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(\alpha u + \beta v, w) = \alpha f(u, w) + \beta f(v, w).$$
$$f(w, \alpha u + \beta v) = \alpha f(w, u) + \beta f(w, v).$$

para cada $u, v, w \in V$ y $\alpha \in \mathbb{R}$.

Definición 9.2. Dada una forma bilineal $f : V \times V \to R$, le decimos simétrica si $f(u, v) = f(v, u)$ para todo $u, v \in V$. Antisimétrica si $f(u, v) = -f(v, u)$ para todo$u, v \in V$

Definición 9.3. Dada una forma bilineal $f : V \times V \to \mathbb{R}$ simétrica decimos que es Degenarada si vale que $Kerf \neq 0$ y No degenarada si vale que $Kerf = 0$.

Definición 9.4. Sea $f : V \times V \to \mathbb{R}$ una forma bilineal. Entonces decimos que:
f es definida positiva si $f(u, u) > 0$ para todo$u \neq 0, u \in V$.
f es definida negativa si $f(u, u) < 0$ para todo $u \neq 0, u \in V$
f es semidefinida positiva si $f(u, u) \geq 0$ para todo $u \in V$.
f es semidefinida negativa si $f(u, u) \leq 0$ para todo $u \in V$.
En caso contrario$f$ es no definida.

Si $B = u_1, u_2, \ldots, v_n$ es una base del espacio vectorial real V, $f : V \times V \to \mathbb{R}$ es una forma bilineal, $u, v \in V$ tal que al expresarlos en la base B tienen la forma

$$u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i,\ \ w = \sum_{i=1}^{n} \beta_i u_i$$

entonces vale la igualdad

$$f(u, v) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \beta_j f(u_i, u_j).$$

Ahora podemos formar la matriz la matriz

$$A = [f(u_i, v_j)]_{n\times n}.$$

A la matriz A le llamamos matriz asociada a la forma bilineal f en la base B.

Teorema 9.1. Sea V un espacio vectorial real de dimensión finita y sea B una base de V. Sea $f : V \times V \to \mathbb{R}$ una forma bilineal y A matriz asociada a la forma bilineal$f$. Entonces, para cada$u, v \in V$

$$f(u, v) = [u]_B^t A [v]_B.$$

Teorema 9.2. Sea$V$ un espacio vectorial real de dimensión finita y sean B, B' bases de$V$. Sea $f : V \times V \to \mathbb{R}$ una forma bilineal y A, A' las matrices asociadas a f en las bases B,B' respectivamente, Entonces,

$$A' = P^t AP,$$

siendo$P$ la matriz cambio de base de B a B'

Definición 9.5. Una ecuación cuadrática en dos variables sin términos lineales es una ecuacion de la forma

$$ax^2 + bxy + cy^2 = 0,$$

donde $|a| + |b| + |c| \neq 0$. De otro lado una forma cuadrática en dos variables es una expresión de la forma

$$f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$$

donde $|a| + |b| + |c| \neq 0$.

Teorema 9.3. *Teorema de los ejes principales en* $\mathbb{R}^2$ Sea

$$ax^2 + bxy + cy^2 = d(*)$$

una ecuacion cuadratica en las variables x, y. Entonces existe un número único $\theta \in [0, 2\pi)$ tal que la ecuacion $(*)$ se puede escribir en la forma

$$a'u^2 + c'v^2 = d(*)$$

donde u,v son los ejes obtenidos al rotar los ejes x , y un angulo θ en sentido contrario al de las manecillas del reloj. Mas aún, los números a' y b' son los valores caracteristicos de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{bmatrix}.$$

Los ejes u, v se denominan ejes principales de la grafica de la ecuacion cuadratica (*).

Ejercicio 9.1. (5 puntos) Para cada una de las siguientes formas bilineales $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, determinar si son simétricas o antisimétricas, y en caso de no cumplir alguna de estas propiedades expresarla como suma de dos formas bilineales tales que una sea simétrica y otra antisimétrica.

1. $f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}\right) = 3x_1y_1$
2. $f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}\right) = -3x_1y_2 + 3y_1x_2$
3. $f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}\right) = 3x_1y_1 + 4y_2x_2$

Ejercicio 9.2. (7 puntos) Construir una forma bilineal f sea definida positiva y no sea semidefinida positiva. Construir una forma bilineal f sea semidefinida positiva y no sea definida positiva.