

Poblaciones limitadas y capacidad máxima: Análisis desde las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias y la Matemática Numérica

Adrián Estevez Alvarez
Grupo C212

ADRIAN.ESTEVEZ@ESTUDIANTES.MATCOM.UH.CU

Javier Fontes Basabe
Grupo C212

JAVIER.FONTES@ESTUDIANTES.MATCOM.UH.CU

Karla Yisel Ramírez Garcell
Grupo C212

KARLA.YRAMIREZ@ESTUDIANTES.MATCOM.UH.CU

Tutor(es):

MSc. Ania Mesa, *MATCOM*

Dr.C. Damian Valdés Santiago, *MATCOM*

Resumen

Este trabajo constituye el informe escrito del proyecto final conjunto de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias y Matemática Numérica de Segundo Año en la carrera Ciencia de la Computación, Facultad de Matemática y Computación, Universidad de la Habana.

El objetivo del mismo es resolver problemas relacionados con la temática de poblaciones limitadas y capacidad máxima empleando conocimientos adquiridos en dichas materias, entre los que se encuentran resolver el problema representándolo como una ecuación diferencial ordinaria, determinar si el problema está bien planteado, realizar análisis teórico desde el punto de vista de la Matemática Numérica, comparar métodos numéricos para la aproximación de soluciones y analizar los errores producidos y analizar y graficar Plano de Bifurcación y Diagrama de Fase.

Este documento logra resumir los resultados obtenidos durante la investigación respecto a estos aspectos incluyendo gráficas que lo ilustran. Se recomienda visualizar el programa interactivo asociado a este trabajo para mejor comprensión y para interactuar con los métodos computacionales.

Abstract

This work constitutes the written report of the final joint project on Ordinary Differential Equations and Numerical Mathematics for the second year of the Computer Science degree program at the Faculty of Mathematics and Computing, University of Havana.

The objective of this project is to solve problems related to the topics of limited populations and maximum capacity using knowledge acquired in these subjects, including solving the problem by representing it as an ordinary differential equation, determining whether the problem is well posed, performing theoretical analysis from the point of view of Numerical Mathematics, comparing numerical methods for approximating solutions, analyzing the errors produced, and analyzing and graphing the Bifurcation Plane and Phase Diagram.

This document summarizes the results obtained during the research on these aspects, including graphs that illustrate them. It is recommended to view the interactive program associated with this work for a better understanding and to interact with the computational methods.

Palabras Clave: Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Matemática Numérica, Modelos Dinámicos, Poblaciones Limitadas

Tema: Poblaciones Limitadas y Capacidad Máxima, Uso de Modelos Logísticos, Campo de Isoclinas, Plano de Bifurcación y Diagrama de Fase para el análisis de Poblaciones Limitadas y Capacidad Máxima.

1. Poblaciones Limitadas y Capacidad Máxima

La población limitada de manera finita es característica de poblaciones logísticas, como por ejemplo al intentar resolver problemas logísticos de valor inicial como:

$$\frac{dP}{dt} = kP(M - P), \quad P(0) = P_0$$

Cuya solución sería:

$$P(t) = \frac{MP_0}{P_0 + (M - P_0)e^{-kMt}}$$

Las poblaciones reales de animales son valores positivos, dándonos información importante sobre el comportamiento de P_0 y $P(t)$; y conforme $t \rightarrow +\infty$ podemos observar un acercamiento del término $(M - P_0)e^{-kMt}$ a cero de donde podemos concluir que:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} P(t) = \frac{MP_0}{P_0 + 0} = M$$

De esta forma aseguramos que una población que satisface la ecuación logística no crece fuera de límite, sino que se aproxima a una **población límite** finita M conforme $t \rightarrow +\infty$ siendo esta conocida como **capacidad máxima** del medio ambiente.

1.1 Objetivos y Motivaciones

Este trabajo tiene como objetivo desarrollar un proyecto integrador que aplique conceptos de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO) y Matemática Numérica (MN) para resolver problemas modelados mediante EDOs, enfatizando el análisis numérico, la validación de algoritmos y la visualización interactiva de resultados.

1.2 Ejemplo de Problema con Población Limitada

Supóngase que en 1885 la población en cierto país era de 50 millones de habitantes y fue creciendo a una tasa de 750,000 personas por año desde entonces. Considérese también que en 1940 la población era de 100 millones y fue creciendo desde entonces a una tasa de 1 millón de personas por año. Ahora asúmase que esta población satisface la ecuación logística y determínese tanto la población limitante M como la población estimada para el año 2000.

Al sustituir en la ecuación logística los dos pares de datos proporcionados, se encuentra que:

$$0.75 = 50k(M - 50), \quad 1.00 = 100k(M - 100)$$

Lo cual se resuelve simultáneamente para $M = 200$ y para $K = 0.0001$. Así, la población límite del país en cuestión es de 200 millones. Con estos valores de M y k , y con $t = 0$ correspondiente al año 1940 (en el cual $P_0 = 100$), se encuentra que la población en el año 2000 será:

$$P(60) = \frac{100 \cdot 200}{100 + (200 - 100)e^{-(0.0001)(200)(60)}}$$

alrededor de 153.7 millones de personas.

1.3 Presentación de los Problemas Propuestos

Parte A:

Durante el periodo de 1790 a 1930 la población de Estados Unidos $P(t)$ (t en años) creció de 3.9 millones a 123.2 millones.

En este lapso, $P(t)$ permaneció cercana a la solución del problema de valor inicial:

$$\frac{dP}{dt} = 0.03135P - 0.0001489P^2, \quad P(0) = 3.9$$

De donde se puede extraer:

- Ecuación Diferencial:

$$\frac{dP}{dt} = 0.03135P - 0.0001489P^2$$

- Condición Inicial: $P(0) = 3.9$ millones
- Dominio temporal: $t \in [0, 140]$ años (1790-1930)

La Forma Estándar de esta ecuación es:

$$\frac{dP}{dt} = aP - bP^2$$

con tasa de crecimiento intrínseco de $a = 0.03135$ en año⁻¹ (Tasa neta de crecimiento poblacional en ausencia de limitaciones) y coeficiente de competencia intraespecífica de $b = 0.0001489$ en millones⁻¹ · año⁻¹ (Parámetro que cuantifica el efecto limitante del crecimiento poblacional).

De estos parámetros se pueden calcular entonces k y M , de donde su capacidad de carga es:

$$M = \frac{a}{b} = \frac{0.03135}{0.0001489} = 210.61 \text{ millones}$$

con un parámetro de crecimiento logístico de $k = a = 0.03135$ año⁻¹.

También se puede observar un valor inicial de $P_0 = 3.9$ millones (población de EE.UU. en 1790: 1.85 % de la capacidad), con lo cual se obtiene como resultado mediante método de variables separables:

$$P(t) = \frac{210.61}{1 + 53.00e^{-0.03135t}}$$

Este tipo de modelo no considera una migración neta significativa y se encuentra en un ambiente estático (capacidad de carga constante) con recursos distribuidos uniformemente por los que los individuos compiten. Esto indica un crecimiento exponencial inicial fomentado por la reproducción sin limitaciones y solo una mortalidad base no relacionada con la densidad, para luego una regulación densa dependiente ocasionada por la competencia de recursos hasta alcanzar su punto de equilibrio en la capacidad máxima del entorno.

Parte B:

Considere el modelo poblacional reducido

$$\frac{dz}{dt} = \mu z - z^2$$

donde μ es un parámetro ambiental que mide la capacidad de crecimiento.

De donde se puede extraer:

- Ecuación Diferencial:

$$\frac{dz}{dt} = \mu z - z^2$$

- Dominio temporal: $t \in [0, \infty)$

La Forma Factorizada de esta ecuación es:

$$\frac{dz}{dt} = z(\mu - z)$$

siendo μ su parámetro ambiental en tiempo⁻¹ (viabilidad del entorno para la población, donde positivo representa un ambiente favorable, negativo hostil e igual a cero representa un ambiente neutral).

Esta ecuación también presenta puntos de equilibrio en $z = 0$ (equilibrio de extinción) y en $z = \mu$ (equilibrio poblacional no trivial, solo relevante para valores de $\mu > 0$).

La misma se puede resolver de igual forma que en la parte A de donde se obtiene:

$$z(t) = \frac{\mu z_0}{z_0 + (\mu - z_0)e^{-\mu t}}$$

Este tipo de modelo no considera una migración neta significativa y se encuentra en un ambiente estático (capacidad de carga constante) con recursos distribuidos uniformemente por los que los individuos compiten. Esto indica que el comportamiento del modelo depende del estado inicial y del signo de μ . Para valores de μ negativo la población tiende a cero, mientras que para $\mu = 0$ esta se mantiene constante. Para valores de μ positivos, valores iniciales entre 0 y μ presentan un crecimiento exponencial inicial fomentado por la reproducción sin limitaciones y solo una mortalidad base no relacionada con la densidad, para luego una regulación denso dependiente ocasionada por la competencia de recursos hasta alcanzar su punto de equilibrio en la capacidad máxima del entorno (μ), para valores iniciales mayores que μ la población es tan grande que el efecto de la competencia supera al potencial de crecimiento ($\frac{dz}{dt} < 0$) y la población disminuirá hasta estabilizarse en el equilibrio $z = \mu$, mientras que para valores iniciales de 0 y μ la población inicia en un punto de equilibrio y su tamaño no cambiará.

Parte C:

Considere el siguiente sistema lineal numérico que representa dos subpoblaciones que comparten recursos limitados:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 0.02x - 0.01y, \\ \frac{dy}{dt} = 0.01x - 0.03y \end{cases}$$

De donde se puede extraer:

- Sistema Diferencial:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 0.02x - 0.01y, \\ \frac{dy}{dt} = 0.01x - 0.03y \end{cases}$$

- Forma Matricial: $\mathbb{X}' = A\mathbb{X}$

- Matriz $A = \begin{pmatrix} 0.02 & -0.01 \\ 0.01 & -0.03 \end{pmatrix}$

Esta matriz A contiene los parámetros del problema, tanto de crecimiento intrínseco (ocasionados por la propia especie) como de interacción interespecífica (ocasionados por la interacción de una especie sobre otra). Estos parámetros son:

- $a_{11} = 0.02\text{año}^{-1}$ (Tasa neta de crecimiento de x en ausencia de y)
- $a_{22} = -0.03\text{año}^{-1}$ (Tasa neta de crecimiento de y en ausencia de x)
- $a_{12} = -0.01\text{año}^{-1}$ (Efecto de y sobre la tasa de crecimiento de x)
- $a_{21} = 0.01\text{año}^{-1}$ (Efecto de x sobre la tasa de crecimiento de y)

Este sistema se resuelve calculando los valores propios de la matriz y obteniendo los vectores propios asociados siendo su solución aproximada de:

$$\mathbb{X} \approx c_1 e^{0.01791t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0.209 \end{pmatrix} + c_2 e^{-0.02791t} \begin{pmatrix} 1 \\ 4.791 \end{pmatrix}$$

Este modelo describe la dinámica de dos subpoblaciones (x y y) que interactúan en un entorno donde la limitación de recursos no está modelada, las cuales tienden a un crecimiento ilimitado causado por la falta de competencia intraespecífica, por lo que estas crecerán exponencialmente sin cota superior para condiciones iniciales distintas de 0. El signo de los parámetros de interacción interespecífica además muestra las relaciones entre x y y , donde x estimula el crecimiento de y en facilitación mientras y inhibe el crecimiento de x en competencia, probablemente en una relación presa\depredador.

Análisis del Planteamiento de los Problemas:

En los casos de las Partes A y B, se demuestra que si tanto la Ecuación Diferencial como la primera derivada son continuas entonces el problema está bien planteado. En el caso de A $f(t, P) = 0.0315P - 0.0001489P^2$ y $\frac{df}{dP} = 0.03135 - 2 * 0.0001489P$ son ambos polinomios y por tanto continuos, al igual que ocurre en B con $f(z, t) = \mu z - z^2$ y $f'(z) = \mu - 2z$, de donde ambos problemas están bien planteados.

En la parte C podemos garantizar existencia y unicidad de las soluciones mediante el Teorema de Picard-Lindelof gracias a que Ax es una función continua y localmente Lipschitziana respecto a x (La constante de Lipschitz corresponde a la norma de la matriz A). La estabilidad y dependencia continua se demuestra de forma directa utilizando el Lema de Gronwall llegando a que $\|\mathbf{u}(t) - \mathbf{v}(t)\| \leq \|\mathbf{u}_0 - \mathbf{v}_0\| e^{L|t|}$, que unido a lo anterior demuestra que el problema está bien planteado.

1.4 Parte A: Análisis Numérico y Campo de Isoclinas

1. ¿Qué población se predice para 1930?

Para $t = 140$ años:

$$\begin{aligned}
P(140) &= \frac{210.61}{1 + 53.00e^{-0.03135(140)}} \\
&= \frac{210.61}{1.659} \\
&\approx 126.9 \text{ millones}
\end{aligned}$$

2. ¿Qué población límite se pronostica?

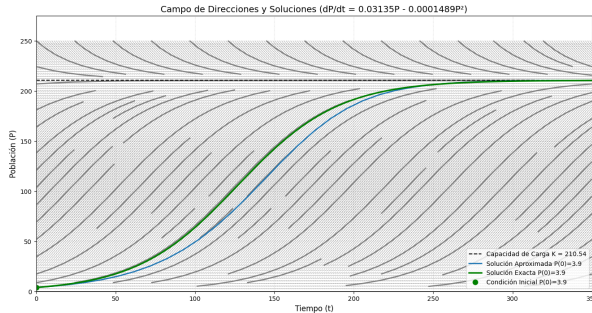
$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(t) = 210.61 \text{ millones}$$

3. ¿Esta ecuación logística ha continuado siendo precisa desde 1930 para modelar a la población de Estados Unidos?

No, la población de EE.UU. actualmente supera los 335 millones, muy por encima del límite predicho de 210.61 millones.

El error relativo observado es de un 3.00 %, significativo para 1930 sin embargo se podría considerar un modelo predictivo exitoso para los primeros 90 años. Esto se debe a factores no contemplados en el modelo como migración masiva, cambios tecnológicos y transición demográfica que alteran significativamente los patrones de crecimiento.

4. Dibuje el campo de isoclinas en el plano (t, P) para esta ecuación y analice cualitativamente la convergencia hacia la capacidad máxima.



La convergencia de este modelo se rige por la Capacidad de Carga (K) observándose un crecimiento sigmoideal (forma de S). Dicho punto de equilibrio se calcula como $K = \frac{a}{b} \approx 210.54$ y al hacer $P = K$ se representa una isoclina cero, por lo que una vez que la población alcanza K el crecimiento se detiene. Este es a su vez el punto de equilibrio estable o atractor donde la población convergerá hacia él independientemente de la condición inicial (si $P_0 > 0$).

Solución Aproximada (Azul) vs. Solución Exacta (Verde): Se observa que la Solución Aproximada (Método de Euler con un Δt grande) subestima sistemáticamente el valor de la población durante la fase de crecimiento más rápido, desviándose de la solución exacta (Verde). Sin embargo, ambas curvas convergen cualitativamente hacia el mismo punto de equilibrio

$$K = 210.54.$$

5. Análisis Numérico

Condicionamiento del Problema

Para considerar nuestro problema como bien condicionado $k(t)$ debe ser pequeño (no mucho mayor que 1), siendo $k(t)$:

$$\begin{aligned}
k(t) &= \left| \frac{\text{cambio relativo en } P(t)}{\text{cambio relativo en } P_0} \right| \\
&= \left| \frac{\frac{\delta P(t) - P(t)}{P(t)}}{\frac{\delta P_0 - P_0}{P_0}} \right| = \left| \frac{P_0}{P(t)} \frac{\delta P(t) - P(t)}{\delta P_0 - P_0} \right| \\
&\approx \left| \frac{P_0}{P(t)} \frac{\partial P(t)}{\partial P_0} \right|
\end{aligned}$$

Tomando una t finita y usando la condición de Lipschitz, y junto al Lema de Gronwal podemos asegurar:

$$k(t) = \left| \frac{P_0}{P(t)} \frac{\delta P(t) - P(t)}{\delta P_0 - P_0} \right| = \left| \frac{P_0}{P(t)} e^{L|t-t_0|} \right|$$

De donde podemos asegurar que $k(t)$ es finito y acotado en función de t .

Respecto al comportamiento de $k(t)$ cuando $t \rightarrow \infty$ dado al comportamiento asintóticamente estable del sistema tenemos que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{P_0}{P(t)} = \frac{3.9}{210.54} \text{ Constante pequeña y finita}$$

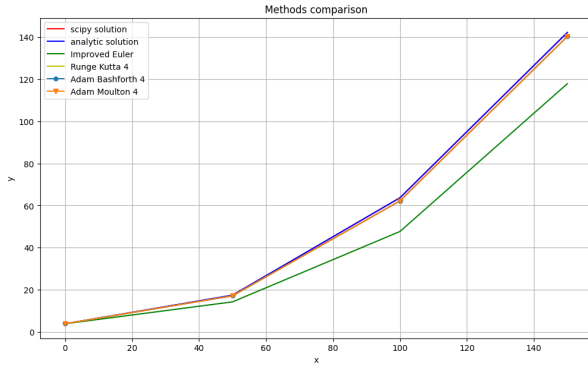
De donde el número de condición se determina por $\lim_{t \rightarrow \infty} k(t) \approx (\text{Constante Finita}) * 0 = 0$.

Concluyendo que $k(t)$ es finito y acotado en intervalos finitos de t y $\lim_{t \rightarrow \infty} k(t)$ es pequeño, por lo que podemos asegurar que el problema está bien condicionado.

Algoritmos Numéricos

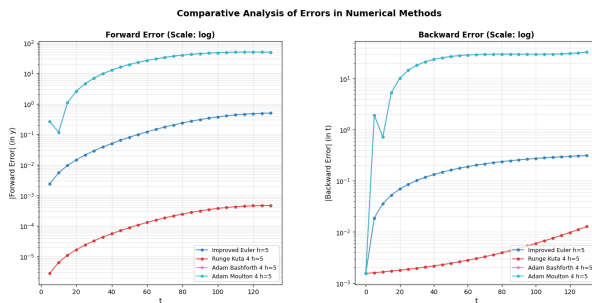
Para el análisis numérico del modelo se emplearon 3 algoritmos principales:

- Método de Euler Mejorado
- Método de Runge-Kutta (Runge-Kutta 4)
- Método de Pasos Múltiples (Método de Adams-Bashforth y Método de Adams-Moulton)



En este gráfico se puede observar el comportamiento de estos métodos respecto a la solución dada por SciPy (Rojo) y por cálculo analítico (Azul). Demostrando la efectividad de métodos de mayor orden de convergencia como Runge Kutta ($O(h^4)$) y Pasos Múltiples ($O(h^4)$ y $O(h^5)$) frente a métodos más sencillos como Euler y Euler Mejorado ($O(h)$ y $O(h^2)$), inclusive siendo todos de complejidad computacional lineal.

Por otro lado, los gráficos de errores (hacia adelante y hacia atrás en la derecha) confirman este planteamiento al presentar un error más pronunciado para el método de Euler Mejorado y menos pronunciado para los otros tres, siendo el más efectivo el método de Adam-Moulton de orden de convergencia $O(h^5)$.



1.5 Parte B: Diagrama de Bifurcación

1. Determine los puntos de equilibrio en función de μ

Factorizando la ecuación $\mu z - z^2 = 0$ se obtiene como resultado $z_1 = 0$ y $z_2 = \mu$, siendo estos los puntos de equilibrio del sistema.

El primer punto, $z_1 = 0$, representa la extinción de la población. El segundo, $z_2 = \mu$, representa una población estable cuyo tamaño depende del parámetro ambiental.

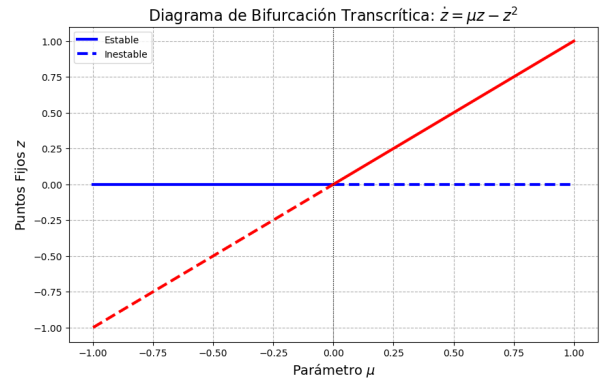
2. Clasificación de estabilidad mediante $z' = \mu - 2z$

Si $f'(z^*) < 0$, el punto de equilibrio z^* es estable mientras que si $f'(z^*) > 0$, el punto de equilibrio z^* es inestable.

Cuando $\mu < 0$, $z^* = 0$ es Estable y $z^* = \mu$ Inestable, representando que el ambiente es hostil, por lo que

cualquier población tiende a la extinción. Mientras que para $\mu > 0$ los papeles se invierten representando que el ambiente es favorable, por lo que la población crece hasta alcanzar la capacidad máxima. El caso de $\mu = 0$ es el punto crítico o umbral, donde los dos puntos de equilibrio se fusionan.

3. Construya el diagrama de bifurcación en el plano (μ, z) e identifique el tipo de bifurcación. Interprete el resultado en el contexto de poblaciones limitadas y capacidad máxima.



La ecuación diferencial $\frac{dz}{dt} = \mu z - z^2$ presenta un Diagrama de Bifurcación Transcrítica (donde dos puntos fijos existen pero intercambian estabilidad en el punto de bifurcación).

En el contexto de las de poblaciones limitadas y capacidad máxima la Bifurcación Transcrítica que ocurre en $\mu_c = 0$ representa el umbral de supervivencia del sistema biológico (punto donde el ambiente pasa de ser fatal a ser sostenible)

1.6 Parte C: Estabilidad y Plano de Fase

1. Calcule los puntos críticos y clasifíquelos (tipo y estabilidad).

Los puntos críticos (v^*) son los puntos donde la tasa de cambio de ambas poblaciones es cero, es decir:

$$\frac{dx}{dt} = 0, \quad \frac{dy}{dt} = 0$$

Resolviendo el sistema llegamos a:

$$v^* = (x^*, y^*) = (0, 0)$$

De donde el único punto de equilibrio (o punto crítico) del sistema es el origen.

La clasificación (y estabilidad) del punto de equilibrio se determina por los valores propios de la matriz A, de donde:

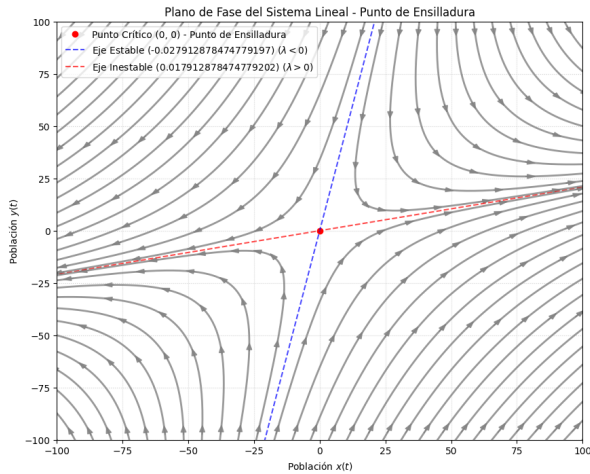
$$1. \lambda_1 = \frac{-0.01 + \sqrt{0.0021}}{2} \approx 0.01791$$

$$2. \lambda_2 = \frac{-0.01 - \sqrt{0.0021}}{2} \approx -0.02791$$

Como los valores propios son reales y de signo opuesto ($\lambda_1 > 0$ y $\lambda_2 < 0$), el punto crítico $(0, 0)$ se clasifica como Punto de Silla (o punto de ensilladura), el cual es un Punto de Equilibrio Inestable.

2. Verifíquelo construyendo el plano de fase y ex-

plique brevemente cómo interpretar las trayectorias en términos de equilibrio poblacional y capacidad máxima compartida.



En este diagrama se puede observar que efectivamente el punto crítico $(0,0)$ es un punto de ensilladura, por lo que presenta un equilibrio inestable, donde casi todas las trayectorias se acercan brevemente al origen antes de ser repelidas a lo largo del Eje Inestable, esto excluye el caso especial en que la condición inicial cae exactamente sobre el eje estable, donde las poblaciones convergían a $(0,0)$.

Al crecer sin límites las poblaciones cuando son repelidas por el origen, se confirma que el sistema no tiene una Capacidad Máxima Compartida, donde el dominio de crecimiento se extiende hacia el infinito haciendo paralelas las trayectorias al Eje Inestable.

2. Conclusiones

A partir del estudio teórico y computacional realizado sobre modelos de poblaciones limitadas, se derivan las siguientes conclusiones:

- **Validez de los Modelos Logísticos:** La aplicación de la ecuación logística a los datos demográficos de Estados Unidos demostró que este modelo es eficaz para describir el crecimiento en entornos con restricciones estáticas. Sin embargo, su capacidad predictiva a largo plazo es limitada cuando no se incorporan variables exógenas dinámicas, como la migración o el desarrollo tecnológico, lo que explica la divergencia observada entre la predicción teórica para 1930 y los datos reales actuales.
- **Eficacia de los Métodos Numéricos:** El análisis comparativo de algoritmos confirmó que los métodos de mayor orden de convergencia (Runge-Kutta de orden 4 y Adams-Moulton) ofrecen una aproximación significativamente superior a la solución exacta en comparación con el método de Euler y Euler Mejorado. El análisis del número de condición permitió validar la estabilidad numérica de las simulaciones, garantizando

que los errores observados son producto de la discretización y no de mal condicionamiento del problema.

- **Análisis Cualitativo y Estabilidad:** El estudio de bifurcaciones en el modelo dependiente del parámetro μ identificó una bifurcación transcítica, definiendo matemáticamente el umbral entre la extinción y la supervivencia de la población. Asimismo, en el sistema de dos especies, la caracterización del punto de equilibrio $(0,0)$ como un punto de silla demostró la inestabilidad del sistema lineal propuesto, descartando la existencia de una capacidad de carga compartida estable bajo las condiciones dadas.
- **Integración Disciplinaria:** Este trabajo valida la necesidad de complementar la resolución analítica de Ecuaciones Diferenciales con herramientas de la Matemática Numérica. Mientras el análisis teórico proporciona la clasificación de estabilidad y el comportamiento asintótico, la implementación numérica permite visualizar la evolución temporal y cuantificar el error, proporcionando una comprensión integral de la dinámica de sistemas poblacionales.