个人技能体系

Personal Technology System

——作者：文雄昌（FooFooDamon@GitHub）

Contents

1　微积分

1.1　导数

1.1.1　定义

导数原名叫导函数（derived function），其意义是函数值的变化速率。
对于一个函数 $y = f(x)$，其在某一点 (x, y) 的导数值等于过该点的切线的斜率，数学表达式为：

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{dy}{dx} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}
\end{aligned}
$$

显然，对于以下两个最简单的函数，其导数分别为：
（1）$f(x) = C$（C 为常数）　$\rightarrow$　$f'(x) = 0$
（2）$f(x) = x$　$\rightarrow$　$f'(x) = 1$

1.1.2　可导的条件

单调、连续

1.1.3　四则运算的求导法则

和　若有：

$$h(x) = f(x) + g(x)$$

则有：

$$h'(x) = f'(x) + g'(x)$$

推导如下：

$$
\begin{aligned}
h'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(f(x+\Delta x) + g(x+\Delta x)) - (f(x) + g(x))}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} \\
&= f'(x) + g'(x)
\end{aligned}
$$

差　若有：

$$h(x) = f(x) - g(x)$$

则有：

$$h'(x) = f'(x) - g'(x)$$

推导同上。

积 若有：

$$h(x) = f(x) \cdot g(x)$$

则有：

$$h'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

推导如下：

$$\begin{aligned}
h'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) \cdot g(x+\Delta x) - f(x) \cdot g(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) \cdot g(x+\Delta x) + f(x) \cdot g(x+\Delta x) - f(x) \cdot g(x+\Delta x) - f(x) \cdot g(x)}{\Delta x} \\
&= g(x+\Delta x) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} + f(x) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} \\
&= f'(x)g(x) + f(x)g'(x)
\end{aligned}$$

商 若有：

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

则有：

$$h'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

推导如下：

$$\begin{aligned}
h'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)g(x) - f(x)g(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)g(x)\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)g(x) - f(x)g(x) + f(x)g(x) - f(x)g(x+\Delta x)}{g(x)g(x)\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(f(x+\Delta x) - f(x))g(x) - f(x)(g(x+\Delta x) - g(x))}{g^2(x)\Delta x} \\
&= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}
\end{aligned}$$

1.1.4 反函数的导数

等于原函数导数的倒数（前提是在给定区间内 $f(x)$ 单调可导且 $f'(x) \neq 0$）。推导如下：

记原函数为 $y = f(x)$，其反函数为 $x = f^{-1}(y)$，则：

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \\
(f^{-1}(y))' &= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y}
\end{aligned}
$$

故：

$$
(f^{-1}(y))' = \frac{1}{f'(x)}
$$

将自变量的表示形式改一下即得：

$$
(f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(x)}
$$

1.1.5 复合函数的导数

若有 $y = h(x) = f(g(x))$ 并令 $u = g(x)$，则有：

$$
h'(x) = f'(u)g'(x)
$$

推导如下：

$$
\begin{aligned}
h'(u) &= \frac{dy}{du} \\
\frac{dy}{du}\frac{du}{dx} &= \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} \\
\frac{dy}{dx} &= f'(u)g'(x) \\
h'(x) &= f'(u)g'(x)
\end{aligned}
$$

注意：求出 $f'(u)$ 值后，还要进一步将 u 转成自变量为 x 的表达式，才能得到最终结果！