个人技能体系

Personal Technology System

——作者：文雄昌（FooFooDamon@GitHub）

目录

1 微积分

1.1 导数

1.1.1 定义

导数原名叫导函数（derived function），其意义是函数值的变化速率。
对于一个函数 $y = f(x)$，其在某一点 (x, y) 的导数值等于过该点的切线的斜率，数学表达式为：

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{dy}{dx} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \end{aligned}$$

显然，对于以下两个最简单的函数，其导数分别为：
（1） $f(x) = C$（C 为常数） $\rightarrow$ $f'(x) = 0$
（2） $f(x) = x$ $\rightarrow$ $f'(x) = 1$

1.1.2 可导的条件

单调、连续

1.1.3 四则运算的求导法则

<u>和</u>

若有：

$$h(x) = f(x) + g(x)$$

则有：

$$h'(x) = f'(x) + g'(x)$$

推导如下：

$$\begin{aligned} h'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(f(x + \Delta x) + g(x + \Delta x)) - (f(x) + g(x))}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \\ &= f'(x) + g'(x) \end{aligned}$$

<u>差</u>

若有：

$$h(x) = f(x) - g(x)$$

则有：

$$h'(x) = f'(x) - g'(x)$$

推导同上。

积

若有：

$$h(x) = f(x) \cdot g(x)$$

则有：

$$h'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

推导如下：

$$\begin{aligned}
h'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) \cdot g(x+\Delta x) - f(x) \cdot g(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) \cdot g(x+\Delta x) + f(x) \cdot g(x+\Delta x) - f(x) \cdot g(x+\Delta x) - f(x) \cdot g(x)}{\Delta x} \\
&= g(x+\Delta x) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} + f(x) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} \\
&= f'(x)g(x) + f(x)g'(x)
\end{aligned}$$

商

若有：

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

则有：

$$h'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

推导如下：

$$\begin{aligned}
h'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)g(x) - f(x)g(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)g(x)\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)g(x) - f(x)g(x) + f(x)g(x) - f(x)g(x+\Delta x)}{g(x)g(x)\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(f(x+\Delta x) - f(x))g(x) - f(x)(g(x+\Delta x) - g(x))}{g^2(x)\Delta x} \\
&= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}
\end{aligned}$$

1.1.4 反函数的导数

等于原函数导数的倒数（前提是在给定区间内 $f(x)$ 单调可导且 $f'(x) \neq 0$）。推导如下：

记原函数为 $y = f(x)$，其反函数为 $x = f^{-1}(y)$，则：

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \\ (f^{-1}(y))' &= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} \end{aligned}$$

故：

$$(f^{-1}(y))' = \frac{1}{f'(x)}$$

将自变量的表示形式改一下即得：

$$(f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(x)}$$

1.1.5 复合函数的导数

若有 $y = h(x) = f(g(x))$ 并令 $u = g(x)$，则有：

$$h'(x) = f'(u)g'(x)$$

推导如下：

$$\begin{aligned} h'(u) &= \frac{dy}{du} \\ \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} &= \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} \\ \frac{dy}{dx} &= f'(u)g'(x) \\ h'(x) &= f'(u)g'(x) \end{aligned}$$

注意：求出 $f'(u)$ 值后，还要进一步将 u 转成自变量为 x 的表达式，才能得到最终结果！