**Pázmány Péter Katolikus Egyetem**

**Információs Technológiai és Bionikai Kar**



**Mérnöki tervezés és elemzés beszámoló**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Név:** Joósz Júlia | **Neptun kód: BA2397** | **Képzés:**  MI-MSc |
| **Dolgozat címe:** Bizonytalan információk reprezentációinak vizsgálata | | |
| **Konzulens(ek) neve:** Karacs Kristóf | | |

A hallgató a kitűzött feladatot megfelelő színvonalon és a kiírásnak megfelelően teljesítette.

Az írásbeli beszámoló javasolt érdemjegye (számmal és betűvel):  **, .**

|  |
| --- |
| Konzulens aláírása |

Budapest, 2014. június 16.

[1. Bevezetés 3](#_Toc419207053)

[2. Szótár 4](#_Toc419207054)

[3. Valószínűségi modellek 5](#_Toc419207055)

[3.1. A Bayes modell 5](#_Toc419207056)

[3.1.1. Fogalmak a klasszikus valószínűségszámításban 5](#_Toc419207057)

[3.1.2. Független és feltételes valószínűségek 6](#_Toc419207058)

[3.1.3. Bayes-tétele és a posterior valószínűség 6](#_Toc419207059)

[3.1.4. A Bayes modell előnyei és hátrányai 7](#_Toc419207060)

[3.2. A Dempster-Shafer modell 8](#_Toc419207061)

[3.2.1. Az univerzális halmaz 8](#_Toc419207062)

[3.2.2. Az alap valószínűség-hozzárendelés 9](#_Toc419207063)

[3.2.3. Meggyőződés és elfogadhatóság 10](#_Toc419207064)

[3.2.4. Megfigyelések egyesítése - Dempster kombinációs szabálya 12](#_Toc419207065)

[3.2.5. Dempster kombinációs szabályának különböző változatai 13](#_Toc419207066)

[3.2.5.1. Yager módosított Dempster szabálya 13](#_Toc419207067)

[3.2.5.2. Inagaki egységes kombinációs szabálya 15](#_Toc419207068)

[4. Dempster-Shafer és Bayes elmélet összehasonlítás 18](#_Toc419207069)

[4.1. Konverzió bayesi valószínűségekre 18](#_Toc419207070)

[4.2. Implementáció 19](#_Toc419207071)

[4.3. Konfliktus és tudatlanság kezelése 20](#_Toc419207072)

[4.3.1. Kicsi konfliktus és kicsi tudatlanság 21](#_Toc419207073)

[4.3.2. Kicsi konfliktus és nagy tudatlanság 22](#_Toc419207074)

[4.3.3. Nagy konfliktus és kicsi tudatlanság 24](#_Toc419207075)

[4.3.4. Relatív nagy konfliktus és relatív nagy tudatlanság 25](#_Toc419207076)

[5. Összefoglalás és továbblépési lehetőségek 27](#_Toc419207077)

[6. Köszönetnyilvánítás 28](#_Toc419207078)

[7. Irodalomjegyzék 28](#_Toc419207079)

[8. Új részek 29](#_Toc419207080)

[8.1. Multiclass modell bevezetése (pl:: objektumfelismerés) 29](#_Toc419207081)

[8.2. Kísérletek 30](#_Toc419207082)

[8.2.2 Bankjegyfelismerés modellezése 30](#_Toc419207083)

[8.2.3. Konkrét DS számítások 30](#_Toc419207084)

[8.2.4. Eredmények értékelése (?) 36](#_Toc419207085)

# 1. Bevezetés

Dolgozatom célja bizonytalan információk reprezentációinak felmérése és az arra használt módszerek összehasonlítása megfigyelés alapján történő osztályozásban.

A gyakorlatban a szenzorok által megfigyelt információk szinte sosem 100%-ig pontosak, sőt néhány esetben egy-egy tulajdonság értéke teljesen hiányos, így bizonytalanság keletkezik a rendszer állapotának leírásában. Amikor a különböző tulajdonságokat figyelő szenzoroktól érkező megfigyeléséket egyesíteni szeretnénk, még nagyobb pontatlanság keletkezik, sok esetben teljesen helytelen adatokat kapunk vissza. Ahhoz, hogy helyes döntést tudjunk hozni a végső osztályozásban, nagyon fontos szerepet játszik, hogy pontosan írjuk le az információ bizonytalanságát is, nem pedig csak a biztos tudásunkat. Dolgozatomban erre a leírásra tanulmányozok egy alternatívát a klasszikus valószínűségszámítási (bayesi) modell helyett, a Dempster-Shafer modellt.

A dolgozat első részében a Bayes elméletről egy rövid áttekintése olvasható, majd utána a Demspter-Shafer elmélet hosszabb leírása következik, amiben a modellen belül használt kombinációs módszerek különböző változatait is felvázolom.

A dolgozat második részében a Bayes és a Demspter-Shafer modell összehasonlítására kerül sor gyakorlati példákon keresztül, leginkább arra fókuszálva, hogy mi történik bizonytalan és/vagy ellentmondásos megfigyelések érkeztekor, valamint az összehasonlítás eredményeiből leszűrt következtetések kerülnek leírásra.

A dolgozat utolsó részében az összefoglalás és a lehetséges továbblépési lehetőségek olvashatók.

# 2. Szótár

Mivel az irodalomkutatás során néhány témában nem lehetett magyar forrást fellelni, ezért ebben a fejezetben a dolgozat témakörének szakirodalmában használt angol kifejezések, azok szinonimái és azok lehetséges magyar megfelelői vannak felsorolva, a könnyebb megértés elősegítése és a félreértelmezések elkerülése végett.

* **Evidence**: megfigyelés, állítás, bizonyíték
* **Belief**: meggyőződés, bizonyosság, hihetőség
* **Nonbelief**: meggyőződés hiánya
* **Disbelief**: kétely
* **Belief function**: belief függvény, bizonyosságfüggvény, meggyőződésfüggvény
* **Plausibility**: elfogadhatóság, plauzibilitás
* **Plausibility function**: plausibility függvény, elfogadhatóság-függvény
* **Basic probability assignment / degree of belief / mass**: alap valószínűség-hozzárendelés, meggyőződés mértéke, tömeg
* **Groud probability assignment/ groud probability mass assignment**: elemi valószínűség-hozzárendelés
* **Conflict**: ellentmondás, konfliktus
* **Ignorance**: tudatlanság, ignorancia, bizonytalanság
* **Focal element**: központi elem, fokális elem
* **Core**: mag
* **Dempster’s rule of combination**: Dempster egyesítési szabálya, Dempster kombinációs szabálya
* **Pignistic transformation method**: pignisztikus transzformációs módszer
* **Plausibility transformation method**: elfogadhatóság transzformációs módszer

# 3. Valószínűségi modellek

Ebben a fejezetben két valószínűségi modell bemutatására kerül sor, hogy a későbbi fejezetekben össze lehessen vetni azok viselkedését a bizonytalanság kezelésében. Először a legismertebb Bayes modell, majd utána a Dempster-Shafer modell leírása következik.

## 3.1. A Bayes modell

A legrégebbi és legjobban kiforrott technika a bizonytalanság kezelésére, a klasszikus valószínűségszámításon alapszik. Ez az elmélet adott alapot számos más valószínűségi modell kidolgozásához. A következő fejezetekben a klasszikus valószínűségszámítás alapjai és a Bayes elmélet kerül röviden bemutatásra.

### 3.1.1. Fogalmak a klasszikus valószínűségszámításban

Ebben az alfejezetben néhány alapvető fogalom definiálása következik a további fejezetek megértésének könnyítéséhez:

* **Eseménytér** (**S**): egy kísérlet minden lehetséges kimenetelének a halmaza. Például, ha a kísérletünk abból áll, hogy két kétoldalú érmét dobunk fel, akkor S = {(fej, fej), (fej, írás), (írás, fej), (írás, írás)}.
* **Esemény** (**E**): S bármely részhalmazát egy eseménynek hívunk. Egy esemény egy olyan halmaz, mely tartalmazza a kísérlet egy lehetséges kimenetelét. Például, ha E = {(fej, fej), (fej, írás)}, akkor E az, az esemény, hogy az első érmén fej lesz a feldobás után. Minden eseménynek van egy komplementere,, ami azon elemek halmaza S-ből, amik nem szerepelnek E-ben.
* **Kölcsönösen kizáró események**: S-beli események egy halmaza E1,E2, … En egymást kölcsönösen kizáró események, ha .

A valószínűségelméletet formálisan a következő három axiómával lehet megadni:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (1) |
|  |  | (2) |
|  |  | (3) |

A (2)-es axióma azt mondja ki, hogy azoknak az eseményeknek az összege, amelyek nincsenek egymásra hatással, az egyenlő 1-gyel. Ennek következményeképpen az axióma a következőképpen is felírható:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (4) |

### 3.1.2. Független és feltételes valószínűségek

Azon események, melyek nincsenek hatással egymásra, független eseményeknek hívjuk és az együttes bekövetkezésüknek a valószínűségük a következő:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (5) |

* **Független események**: S-beli események egy halmaza E1, E2, … En egymástól függetlenek, ha .

Ha két esemény egymást nem kölcsönösen kizáró, akkor az annak a valószínűsége, hogy legalább az egyikük bekövetkezik, azaz az uniójuk valószínűsége a következő:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (6) |

Ezt a szabályt más néven az *összeadási szabálynak* hívják.

Feltételes valószínűségről akkor beszélünk, ha azt vizsgáljuk, hogy mennyi az esélye egy eseménynek, annak a fényében, hogy egy másik esemény már bekövetkezett és P(A|B)-vel jelöljük.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (7) |

A feltételes valószínűség definíciójából következik a következő:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (8) |

amit más néven *szorzási szabálynak* hívunk. Ennek az általános felírása a következő:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (9) |

### 3.1.3. Bayes-tétele és a posterior valószínűség

A feltételes valószínűséget (P(H|E)) egy hipotézis (H) posteriori valószínűségének a kiszámítására használjuk, egy-egy új megfigyelés (E) hatására, de azt sok esetben nem tudjuk kiszámolni információ hiányában, viszont a megfigyelés (E) feltételes valószínűségéhez általában könnyebben jutunk hozzá. A Bayes tétel legegyszerűbb formájában azt állítja, hogy ha ismert a H hipotézis és E megfigyelés valószínűsége, és a P(E|H) feltételes valószínűség, akkor

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (10) |

A tétel általános formája *m* darab hipotézisre és *n* darab megfigyelésre a következő:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (11) |

A (11)-es egyenlet azon a feltételezésen alapul, hogy H1… Hm hipotézisek kölcsönösen kizárják egymást. Ha ezen kívül, ha E1… En megfigyelések feltételesen függetlenek bármely adott H1… Hm hipotézisre, akkor a (11)-es egyenletet a következőképpen is felírhatjuk:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (12) |

* **Feltételesen független események**: E1… En megfigyelések feltételesen függetlenek egy adott H hipotézisre, ha

### 3.1.4. A Bayes modell előnyei és hátrányai

A bayesi módszerek legjelentősebb előnye, hogy a valószínűségszámításban ezeket használják a legtöbbet, ezért ezek a leginkább kiforrottak a bizonytalanság reprezentálására használt módszerek közül.

A Bayes modell hátárnyai:

* Jelentős mennyiségű valószínűségi adatot igénylenek egy tudásbázis összeállításához. Továbbá, az információt szolgáltató szakemberek (például orvosok, pénzügyi tanácsadók) áltálában bizonytalanok a valószínűségekben, amiket adnak.
* Min alapulnak az érintett priori és feltételes valószínűségek? Ha statisztikai alapúak, akkor minták mennyiségének elegendőnek kell lenniük, hogy a belőlük kapott valószínűségek pontosak legyenek. Ha pedig szakemberektől származnak az adatok, akkor elég átfogóak, illetve konzisztensek?
* Gyakran fontos tényező a bizonytalanság kezelésének módszeréhez a hipotézis és a megfigyelés közötti kapcsolat típusa. Ezen asszociációk leképezése egyszerű számokká, releváns információ elvesztéséhez vezet, ami viszont szükséges lehet a bizonytalanság eredményes kezelésére, annak értelmezésére.
* Ennek a leképezésnek hatására, az elveszett információt más feladatokban sem tudjuk felhasználni, mint például egy-egy hipotézishez tartozó bizonyítékok hierarchiájának visszakövetésére.

## 3.2. A Dempster-Shafer modell

Egy véges, diszkrét térben a Dempster-Shafer (DS) elmélet felfogható a valószínűségszámítás egyfajta általánosításaként, ahol az egymást kölcsönösen kizáró események helyett a valószínűségek halmazokhoz vannak rendelve.

A hagyományos valószínűségszámításban, egy megfigyelés egyetlen eseményhez van kötve, míg a DS elméletben egy megfigyelés több eseményhez köthető, például események egy halmazához.

Ennek eredményeképpen a DS elméletben a megfigyelés értelmezhető lehet egy magasabb absztrakciós szinten, anélkül, hogy feltételezéseket kéne tenni az eseményekről a halmazon belül.

Az egyik legfontosabb tulajdonsága a DS elméletnek, hogy a modellt úgy tervezték, hogy az megbirkózzon különböző szintű pontosságokkal az információkat illetően, és ne legyen szükség további feltételezésekre az információ reprezentálásához.

Ezen kívül azt is lehetővé teszi, hogy egyesíthessük a különböző forrásokból származó megfigyeléseket és eljussunk egy bizonyos fokú meggyőződéshez (BF formájában), ami minden rendelkezésre álló megfigyelést figyelembe vesz.

Arthur P. Dempster és Glenn Shafer dolgozta ki először ezt az elméletet.

A DS elmélet tulajdonképpen két ötleten alapul:

* valamely kérdésről egy bizonyos fokú meggyőződés elérése, egy hozzá kapcsolódó kérdés szubjektív valószínűségeiből,
* független megfigyeléseken alapuló meggyőződések értékeinek egyesítése Dempster szabályával.

### 3.2.1. Az univerzális halmaz

Legyen X az univerzális halmaz: az a halmaz, mely a megfigyelés alatt álló rendszer összes lehetséges állapotát tartalmazza,

, ahol N a rendszer összes lehetséges állapota. Ezek kimerítőek a rendszerre nézve és kölcsönösen kizárják egymást.

X minden egyes részhalmaza értelmezhető egy, a rendszer aktuális állapotáról feltett kérdés lehetséges válaszaként, így, X hatványhalmaza Θ miden lehetséges választ reprezentál. Θ 2X elemet tartalmaz. A DS elméletben ezt a hatványhalmazt vesszük alapul.

Például, ha X = {a, b, c}, akkor Θ= {∅, {a}, {b}, {c}, {a,b}, {a,c}, {b,c}, X}.

### 3.2.2. Az alap valószínűség-hozzárendelés

A Bayes elméletben, a posterior valószínűség minden egyes új megfigyelés után változik, hasonlóan, a DS elméletben pedig a meggyőződés (*bel*-lel jelölve) értéke. Az alap valószínűség-hozzárendelés (*m*-mel jelölve) határozza meg a meggyőződésünk mértékét arról, hogy valamely részhalmaz-e a rendszer aktuális állapota és csak az a részhalmaz. Az alap valószínűség-hozzárendelés *m*-mel való jelölése a fizikában használatos tömeg („mass”) mértékből ered.

Az egyik alapvető különbség a DS elmélet és a klasszikus valószínűségszámítás között, a tudatlanság kezelése. Például, ha van nincs semmiféle előzetes tudásunk, akkor a bayesi elméletben azt feltételezzük, hogy minden lehetőség egyenlő valószínűségű és ezek összege 1, azaz

, ahol N a lehetséges kimenetek száma.

A DS elméletben *m* csak azokhoz a részhalmazokhoz van rendelve, amikhez meggyőződést szeretnék rendelni. Minden olyan *m*-et, amit nem rendelünk semmilyen részhalmazhoz, azt a meggyőződés hiányának tekintjük és csak az X univerzális halmazhoz társítjuk. Azt az *m*-et, ami elutasít egy hipotézist, kételynek hívjuk, ami nem egyenlő a meggyőződés hiányával.

Példa: Meg szeretnénk állapítani, hogy egy repülőgép ellenséges-e. Tegyük fel, hogy van egy megfigyelésünk, ami  0.7-es mértékű meggyőződést ad arra, hogy a repülőgép ellenséges.

A maradék *m* az univerzális halmazhoz/környezethez lesz rendelve.

Ezen a példán is látszik az egyik jelentős különbsége DS elméletnek a klasszikus valószínűségszámításhoz képest, mivel a Bayes elmélet szerint

ahol a 0.3-at a bayesi modell „bekényszeríti” annak a feltevésnek a valószínűségeként, hogy a repülőgép nem ellenséges, annak ellenére, hogy nekünk arról semmilyen bizonyítékunk sincsen, míg a DS modellben a 0.3-at, a meggyőződés hiányát, az univerzális halmazban/környezetben való meggyőződésnek tartjuk, azaz a megfigyelésre 0.3 fokig nem ad meggyőződést, se nem kételyt.

A *m-nek* jóval nagyobb szabadsága van a valószínűségekhez képest, ami a következő táblázatban látható összefoglalva:

|  |  |
| --- | --- |
| **Dempster-Shafer elmélet** | **Valószínűségszámítás** |
| m(*X*)*-*nek nem kell 1-nek lennie, se nem -nek, viszont . |  |
| Ha , m(*x*)-nek nem kell kisebbnek lennie m(*y*)-nál. | Ha , akkor . |
| Nincs kötelező kapcsolat m(*x*) és m() között, ahol , az *x* komplementere. |  |

1. táblázat: Az alap valószínűség-hozzárendelés függvény és a valószínűségfüggvény tulajdonságainak összehasonlítása

Az *m* függvény formálisan:

Legyen X az univerzális halmaz/környezet. Az alap valószínűség*-*hozzárendelési függvény, egy számot, *m(x)-*et rendel **minden** x ϵ Θ -hez a következő szabályok szerint:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (13) |
|  |  | (14) |
|  |  | (15) |

Minden olyan x ϵ Θ halmazt, ahol *m(x)* > 0, az *m* függvény fokális elemének hívjuk. A fokális elemek halmazát, m magjának hívjuk és *k(m)-*mel jelöljük.

* **Fokális elem**: .
* ***m* függvény magja**: *.*

### 3.2.3. Meggyőződés és elfogadhatóság

A DS elméletben, egy feltevés valószínűségét, azaz annak az esélyét, hogy egy kérdés válasza az aktuális részhalmaz, egy intervallum reprezentálja, aminek van egy alsó és egy felső korlátja, ami rendben a meggyőződés (*bel*) és az elfogadhatóság (*pl*). Ebben az intervallumban található az aktuális részhalmaz pontos valószínűsége (P).

Egy hipotézis, feltevés *bel*-jét, azon részhalmazok *m-*jeinek az összege alkotja, melyek részhalmazai a hipotézisnek. A *bel* az a mennyiség, ami közvetlenül támogat egy hipotézist legalább részben. 0-tól 1-ig terjed az értéke, ami rendre a hipotézisre bekövetkezésére való bizonyíték hiányára, illetve a hipotézisben való teljes bizonyosságra utal.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (16) |
|  |  | (17) |
|  |  | (18) |

A *pl* 1 mínusz azon részhalmazok *m-*jeinek az összege, melyeknek a hipotézissel való metszete üres. Ez az összeg a felső korlátja annak, hogy az aktuális részhalmaz a valódi állapota a rendszernek, mivel csak ennyi megfigyelés mond ellent (, azaz üres a metszetük) a hipotézisnek. Az értéke szintén 0-tól 1-ig terjed és annak a mértékét méri, hogy az (*x* komplementere) mellett szóló megfigyelések mennyi helyet hagynak *x*-ben való meggyőződésnek.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (19) |
|  |  | (20) |
|  |  | (21) |

A *bel* és a *pl* nem additívak. Ezt úgy lehet értelmezni, hogy nem szükséges a *bel* értékeinek összegének 1-nek lennie, és hasonlóan a *pl* értékeinek összegének sem.

Lehetőség van arra is, hogy kiszámoljuk a *m* értékét *bel*-ből a következő inverz függvénnyel:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (22) |

ahol |x-y|, az x és az y halmaz számosságának az abszolút különbsége.

Ezen kívül a *pl*-t és a *bel*-t egymás értékéből is megkaphatjuk a következő módon:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (23) |

ahol , az *x* klasszikus értelemben vett komplementere. A *pl* e meghatározását abból kapjuk meg, hogy az *m*-k összegeinek 1-nek kellenek lenniük.

A *bel* és a *pl* definíciójából [(16)-os és (19)-es egyenlet] pedig következik, hogy . A (22)-es és a (23)-as egyenlet következményeképpen, ha adott egynek az értéke *m(x), Bel(x)* és *Pl(x)* közül, akkor abból a másik kettőt is ki lehet számítani.

Egy feltevés, hipotézis (x-szel jelölve) valószínűsége akkor határozható meg egyértelműen, ha . Abban az esetben, ha minden -re igaz ez, akkor a modell a klasszikus valószínűségi modellel megegyezik [ Yager, R. (1987a). “On the Dempster-Shafer Framework and New Combination Rules.”Information Sciences 41 (2):93—137]. Minden egyéb esetben, és a pontos valószínűség alsó és felső korlátját adja rendre.

### 3.2.4. Megfigyelések egyesítése - Dempster kombinációs szabálya

Dempster kombinációs szabályával lehet két különböző forrásból jövő megfigyelés egyesíteni egy közös *m* függvény formájában, amely leírja ezen megfigyelések együttes hatását.

Legyen m1 és m2 két alap valószínűség-hozzárendelési függvény az X univerzális halmazon. A közös *m* függvényt a következőképpen kapjuk meg:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (24) |
|  | , | (25) |

ahol K a konfliktus mértéke és (1-K) a normalizációs tényező, ami a két megfigyelés közötti ellentmondást reprezentálja.

Például X={bombázó (b), vadászgép (v), utasszállító (u)} és kétféle forrásból vannak megfigyeléseink, amik alap valószínűség-hozzárendelési függvényei m1 és m2. Az egyesített/közös alap valószínűség-hozzárendelési függvény m3-as jelöléssel szerepel.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | m1 (b) = 0.5 | m1 (b, v) = 0.2 | m1 (X) = 0.3 |
| m2 (b) = 0.3 | (b) = 0.15 | (b) = 0.06 | (b) = 0.09 |
| m2 (u) = 0.4 | K = 0.2 | K = 0.08 | (u) = 0.12 |
| m2 (X) = 0.3 | (b) = 0.15 | (b, v) = 0.06 | (X) = 0.09 |

K = 1- (0.2 + 0.08) = 0.72

m3 (b) = (0.15 + 0.06 + 0.09 + 0.15) / K = 0.625

m3 (u) = 0.12 / K = 0.167

m3 (b,v) = 0.06 / K = 0.083

m3 (X) = 0.09 / K = 0.125

Dempster kombinációs szabálya erőteljesen kiemeli a többféle forrásból jövő megegyezéseket, azaz felerősíti az egyesített *m*-eket és ezen kívül figyelmen kívül hagyja az összes ellentmondó megfigyelést a normalizációs tényezőn keresztül. Ezen tulajdonságok miatt jelentős hibák lehetnek a végeredményben, ha az megfigyelések erőteljesen ellentmondóak. Ezt a következő példán keresztül láthatjuk:

Tegyük föl, hogy két egyenlően megbízható orvos vizsgál egy beteget, hogy annak agydaganat, agyrázkódása vagy agyhártyagyulladása van. Az első orvos azt állapítja meg, hogy vagy agydaganata van 0.99-es valószínűséggel vagy agyhártyagyulladása van 0.01-es valószínűséggel. A második orvos pedig orvos azt állapítja meg, hogy vagy agyrázkódása van 0.99-es valószínűséggel vagy agyhártyagyulladása van 0.01-es valószínűséggel. Ha az együttes *m*-et kiszámoljuk Dempster szabályával, akkor az, az eredmény jön ki, hogy , azaz 100%-os konfidenciával agyhártyagyulladásosnak lett diagnosztizálva a beteg.

Az efféle eredmények ellenkeznek a józanésszel, hiszen mindekét orvos csak nagyon kicsi esélyt adott arra, hogy a betegnek agyhártyagyulladása van. Ez a példa számos kutatásnak adott alapot, amik megpróbálnak ennek a feloldására megoldást keresni.

### 3.2.5. Dempster kombinációs szabályának különböző változatai

Ebben a fejezetben néhány alternatíva kerül bemutatásra a Dempster kombinációsszabályára. Ezen kívül szó fog esni a megfigyelések közötti ellentmondásosság és a kontextus jelentőségéről a szabályok közötti választáskor. Azt fogjuk találni, hogy a Dempster kombinációsszabály használatának szabályszerűségének meghatározásakor nem csak az ellentmondás mértéke lényeges, hanem az ellentmondás *fontossága* is kritikus szerepet játszik.

#### 3.2.5.1. Yager módosított Dempster szabálya

A legígéretesebb alternatíva a módosított kombináció szabályok közül Yager szabálya. Yager felhívja a figyelmet arra, hogy a kombinációs szabályok egy fontos tulajdonsága az asszociativitás, hogy egy új megfigyelés érkeztekor, frissíteni lehet az addig meglévő kombinált struktúrát, anélkül, hogy újra kéne azt számolni. Sajnos a legtöbb kombinációs szabály nem asszociatív, ahogy a Dempster szabály sem. Yager viszont arra is felhívja a figyelmet, hogy ezek közül számos operátor kifejezhető kvázi-asszociatív operátorként. A kvázi-asszociatív operátor az, az operátor, amit le lehet bontani asszociatív részműveletekre. A legismertebb példa erre a számtani közép:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (26) |
|  |  | (27) |

Yager, az alap valószínűség-hozzárendelés mellett bevezeti az elemi valószínűség-hozzárendelést (*q*-val jelölve). A legfontosabb különbség *m* és *q* között, a normalizációs tényező hiánya és az univerzális halmazhoz rendelt érték.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (28) |

Tegyük fel, hogy m1, m2 …, mn n darab alap valószínűség-hozzárendelési függvény. Ekkor ezek kombinációját a következőképpen számoljuk ki:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (29) |

A (29)-es egyenletet felhasználhatjuk bármennyi meglévő és új megfigyelésre, majd a módosított értékekből megkapjuk a frissített *m* értékeket a (31-33)-as egyenleteket felhasználva. Ettől lesz Yager szabálya kvázi-asszociatív.

A feljebb is említett normalizációs tényező elhagyását Yager azzal „kerüli meg”, hogy megengedi, hogy az üres halmaz (∅) elemi valószínűség-hozzárendelése nagyobb legyen, mint 0.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (30) |

q(∅)-et pontosan ugyanúgy számoljuk ki, mint Dempster szabályában a konfliktus mértékét, K-t.

A másik említett különbség Dempster szabályához képest az univerzális halmazhoz rendelt *m* értéke. Yager hozzáadja az üres halmaz elemi valószínűség-hozzárendelését az univerzális halmaz „groud elemi valószínűség-hozzárendeléséhez, majd ezt az összeget társítja az univerzális halmaz alap valószínűség-hozzárendeléséhez, -hez:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (31) |

Vegyük észre, hogy míg Demspter szabálya a konfliktus (K) értékét figyelmen kívül hagyja, azaz „kinormalizálja” a többi érték között, amivel magán a megfigyelésen, bizonyítékon is változtat, Yager a konfliktus (K) értékét az univerzális halmaz alap valószínűség-hozzárendeléséhez társítja, így episztemológiailag pontos leírást ad a megfigyelésről. Az univerzális halmaz *m-*je a tudatlanság, bizonytalanság mértékeként értelmezhető, így Yager szabályával a tudatlansághoz társítjuk a konfliktus értékét.

Yager az üres halmazhoz és az halmazokhoz a következőképpen rendeli az alap valószínűséget:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (32) |
|  |  | (33) |

A megfeleltetések Dempster szabálya és az elemi valószínűség-hozzárendelések között a következőképpen kapjuk meg:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (34) |
|  |  | (35) |
|  |  | (36) |

Ezekkel a megfeleltetésekkel Yager egyben felírta Demspter kombinációs szabályát egy kvázi-asszociatív operátorként.

#### 3.2.5.2. Inagaki egységes kombinációs szabálya

Ezt a kombinációs szabálty Toshiyuki Inagaki mutatta be 1991-ben. A [3.2.4.-](#_3.3.4._Megfigyelések_egyesítése)es és a [3.2.5.1](#_3.3.5.1._Yager_módosított)-es fejezetekből már láthattuk, hogy különböző kombinációs szabályok használata ugyanazokra a megfigyelésekre különböző eredményeket adhatnak. Inagaki, a Yager által bevezetett elemi valószínűség-hozzárendelésekből kiindulva arra törekedett, hogy a kombinációs műveletek egy folyamatosan paraméterezett osztályát határozza meg, ami egyben magában foglalja Demster és Yager szabályát is és minden esetben használható legyen. Ennek a „szüleményeként” hozta létre az egységes kombinációs szabályt.

Inagaki szerint minden kombinációs szabály kifejezhető a következőképpen:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (37) |
|  |  | (38) |
|  |  | (39) |

Inagaki azt megszorítást teszi ezekre a kombinációs szabályokra, hogy az alap valószínűség-hozzárendelésük és az elemi valószínűség-hozzárendelésük aránya legyen állandó:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (40) |

A (37)-es egyenletből ez átírható a következő formára:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (41) |
|  |  | (42) |

A (37)-es egyenletből látszik, az *f* függvény a *q(*∅*)* skálázó függvényeként értelmezhető, ahol a konfliktus (*k*-val jelölve) a következőképpen van meghatározva:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (43) |

Inagaki megkötése [(40)-es egyenlet] mind Dempster és Yager szabályára is teljesül, hiszen

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

és

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Ez az egyenlőség, arány (40-es egyenlet) azt fejezi ki, hogy az ismeretünk csak az elemi valószínűség-hozzárendelésekre terjed ki és nincs semmiféle előzetes tudásunk a megfigyelések, illetve azok forrásárainak hitelességéről és megbízhatóságáról. Ha a megfigyeléseket súlyozzuk valamilyen plusz információ szerint, akkor az egyenlőség már nem lesz igaz.

Az általános (37-es egyenlet) leírásból, a megszorításból (40-es egyenlet) és a konfliktus Inagaki szerinti definíciójából (43-as egyenlet) jutunk el Inagaki egyesített szabályához (*mU*-val jelölve):

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (44) |
|  |  | (45) |
|  |  | (46) |
|  |  | (47) |

A *k* paraméter felel a normalizálásért és értéke közvetlenül befolyásolja az egyesített *m-*ek értékét. Az értékének meghatározása egy fontos lépés ennek a szabálynak az implementációjában, viszont Inagaki szerint ez még egy nyitott kérdés [Inagaki, T. (1991). “Interdependence between Safety-Control Policy and Multiple-Sensor Schemes Via Dempster-Shafer Theory.” IEEE Transactions on Reliability **40**(2):182-188.] . Ha *k* = 0 értéket veszi föl, akkor Yager szabályát kapjuk meg, ha pedig , akkor Dempster szabályát.

Levezetés Yager szabályára:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |

Levezetés Dempster szabályára:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |

A legszélsőségesebb esetben, amikor *k* a felső korlátjának értékét (*kext*-ként jelölve) veszi fel, azt Inagaki extra szabályának nevezzük és ekkor a következő formát veszi fel:

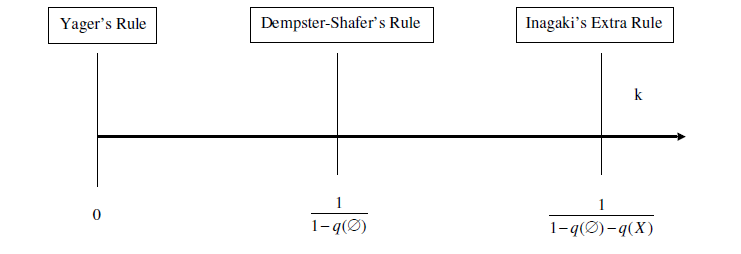
|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (48) |
|  |  | (49) |

Levezetés Inagaki extra szabályára:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |

Ahogyan a (48)-as egyenletből is látszik, Inagaki extra szabályában, minda konfliktus (*q(*∅*)*) és mind a tudatlanság, bizonytalanság (*q(X)*)fel van használva a normalizáláshoz. Ennek eredményeképpen a megfigyelés ugyan meg lesz szűrve (, ahogyan azt Dempster szabályánál is láttuk), viszont a változtatás mértékénél a tudatlanság és a konfliktus relatív értékeit veszi figyelembe.

A következő ábrán láthatjuk *k* különböző értékei melyik szabálynak felelnek meg:



2. ábra: k lehetséges értékei Inagaki egyesített szabályában és az azokhoz tartozó szabályok

Ahogy feljebb is említve van, *k* kiválasztása egy nagyon fontos lépés a szabály implementálásakor, hiszen az értéke határozza meg a konfliktus jelentőségének mértékét és ráadásul minél nagyobb értéket vesz föl, annál nagyobb értékkel lesznek a megfigyelések normalizálva, ami a megfigyelés megszűréséhez, azaz a bizonyíték változatásához vezet.

# 4. Dempster-Shafer és Bayes elmélet általános összehasonlítás

Ahogyan azt a bevezetésben is említettem, a dolgozatom célja, a bizonytalanság reprezentálásainak felmérése a megfigyeléseken alapuló osztályozók körében, a helyes végső döntés eléréséhez. A feladat eredményeit egy nagyobb projekten belül, a bionikus szemüveg felismerőfunkciói között szeretnénk a jövőben alkalmazni, a vizuális megfigyelések által okozott bizonytalanságok kiküszöbölésére. Ennek érdekében ebben a fejezetben néhány gyakorlati példán keresztül fogom összehasonlítani a Bayes és a DS modell viselkedését megfigyelések kombinálásakor, ezen belül is legjobban arra összpontosítva, hogy hogyan viselkednek bizonytalan, hiányos és/vagy ellentmondó megfigyelések érkeztekor.

## 4.1. Konverzió bayesi valószínűségekre

Ahhoz, hogy a két modellt össze lehessen vetni, szükség van egy konverzióra a modellekben használt értékek között. Az irodalomban számos transzformációs módszert említenek, de ezeken belül két módszer a legelterjedtebb: a pignisztikus és az elfogadhatósági transzformációs módszer.

* **Pignisztikus elfogadhatósági transzformációs:** Legyen Pp a pignisztikus valószínűségi függvény X eseménytéren, ami *m-*hez van rendelve, ekkor

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (50) |

* **Elfogadhatósági transzformációs módszer**: Legyen Ppl az a valószínűségi függvény, amit az X eseménytéren értelmezett, *m*-hez rendelt *pl-*ből számolunk, ekkor

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (51) |
|  |  | (52) |

Az összehasonlításhoz az utóbbi módszert választottam, mivel ez a módszer tűnik konzisztensebbnek a [Zadech, L. (1979). *On the validity of Dempster's rule of combination.* Berkeley, USA,: Univ. of California.]-ban leírtak alapján.

## 4.2. Implementáció

Az összehasonlításhoz felhasznált szabályok könnyebb számítása érdekében, MATLAB-ban elkészítettem azok implementációját. Ezeket a (16)-os, (19)-es, (24)-es, (25)-ös ,(28)-as, (31-33)-as, (44-47)-es, (48-49)-es és az (50-51)-es egyenletek írják le és rendre a *belief.m, plausibility.m, m\_DS.m, conflict.m, GPA.m, m\_Y.m, m\_U\_k.m* , *m\_U\_ext.m* és a *P\_pl.m* fájlban találhatóak.

Az alap és az elemi valószínűség-hozzárendeléseket, valamint a meggyőződés- és az elfogadhatóság függvény értékeit a „map” nevű asszociatív tömbben tároltam, ahol a kulcsok értékei az univerzális halmaz összes lehetséges részhalmazának karakterei. Azaz, ha X = {1,2,3}, akkor a kulcsok: {{’0’},{’1’},{’2’},{’3’},{’12’},{’13’},{’23’},{’123’}}. Erre azért volt szükség, hogy könnyebben lehessen a különböző szabályokban használt halmazműveleteket számítani, illetve, hogy konzisztensek maradjanak a halmazokhoz rendelt értékek.

Dempster kombinációs szabályának különböző változatainak implementálásához először az elemi valószínűség-hozzárendelések függvényt implementáltam, majd annak az értékeiből számoltam ki Dempster, Yager és Inagaki extra szabályát különböző normalizációs tényezőkkel. Ezen kívül elkészítettem Inagaki egyesített szabályának az implementációját is, amelyik függvény az elemi valószínűség-hozzárendeléseken kívül a normalizációs tényezőt is bemenetként várja.

A legnagyobb nehézséget a meggyőződés (*bel*) és az elfogadhatóság (*pl*) implementálása okozta, mivel *bel* kiszámításához először azt kellett leimplementálni, hogy megkapjuk egy halmaz összes részhalmazát, valamint *pl* kiszámításához meg kellett keresni egy halmazhoz az összes olyan halmazt, amelyeknél azok metszete nem üres. Ennek a két halmazműveletnek az implementációja rendre az *allSubsetsContainingKey.m* és az *allSubsetsElementsOfKey.m* fájlban találhatóak.

Az elfogadhatósági transzformációs módszer implementálásakor először megkerestem az egykarakterű kulcsokat, mivel azok reprezentálják az egyedi eseményeket, amik a klasszikus valószínűségszámításban használatosak, majd azon kulcsokhoz tartozó *pl*-ekből számoltam ki a valószínűségeket.

Az összehasonlításhoz használt adatok és függvényhívások a *Dempster\_Shafer\_Demo.m* fájlban találhatóak.

## 4.3. Konfliktus és tudatlanság kezelése

Ebben a fejezetben négyféle gyakorlati példán keresztül hasonlítom össze a Bayes modellt és a DS modellt, valamint annak különböző változatait. A példák kiválasztásában kétféle szempontot figyeltem, a konfliktus és a tudatlanság mértékét két megfigyelésben. Ezek függvényében négyféle szituációban mértem fel a modellek viselkedését:

1. *Kicsi a konfliktus és kicsi a tudatlanság*
2. *Kicsi a konfliktus és nagy a tudatlanság*
3. *Nagy a konfliktus és kicsi a tudatlanság*
4. *Relatív nagy a konfliktus és relatív nagy a tudatlanság*

A negyedik esetben a relatív kifejezés azért használatos, mert két megfigyelés között nem lehet egyszerre nagy a konfliktus és a tudatlanság, mivel a tudatlanság arra utal, hogy nem tudjuk eldönteni, hogy a megfigyelt objektum milyen osztályba tartozik, így az univerzális halmazhoz társítjuk, a konfliktus pedig arra, hogy a két megfigyelés más-más osztálynak tulajdonít nagy valószínűséget.

A négyféle szituáció mindegyikében 3 osztályt és két bejövő megfigyelést vettem alapul. A példákhoz felhasznált alap-valószínűséghozzárendelések és a hozzájuk tartozó konvertált valószínűségek a következő két táblázatban vannak felsorolva:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | {{0},{1},{2},{3},{1,2},{1,3},{2,3},{1,2,3}} | |
|  | m1 | m2 |
| 1. | [0, 0.85, 0.05, 0, 0, 0, 0, 0.1] | [0, 0.85, 0.1, 0, 0, 0, 0, 0.05] |
| 2. | [0, 0.2, 0, 0, 0, 0, 0, 0.8] | [0, 0, 0.15, 0, 0, 0, 0, 0.85] |
| 3. | [0, 0.85, 0.05, 0, 0, 0, 0, 0.1] | [0, 0.1, 0, 0.8, 0, 0, 0, 0.1] |
| 4. | [0, 0.55, 0.05, 0, 0, 0, 0, 0.4] | [0, 0, 0, 0.45, 0, 0, 0, 0.55] |

2. táblázat: Tudatlanság és konfliktus kezelésének összehasonlítására használt alap valószínűség-hozzárendelések

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | {{1},{2},{3}} | |
|  | P1 | P2 |
| 1. | [0.7917, 0.1250, 0.0833] | [0.8182, 0.1364, 0.0455] |
| 2. | [0.3846, 0.3077, 0.3077] | [0.3148, 0.3704, 0.3148] |
| 3. | [0.7917, 0.1250, 0.0833] | [0.1667, 0.0833, 0.7500] |
| 4. | [0.5278, 0.2500, 0.2222] | [0.2619, 0.2619, 0.4762] |

3. táblázat: Tudatlanság és konfliktus kezelésének összehasonlítására kiszámolt valószínűségek

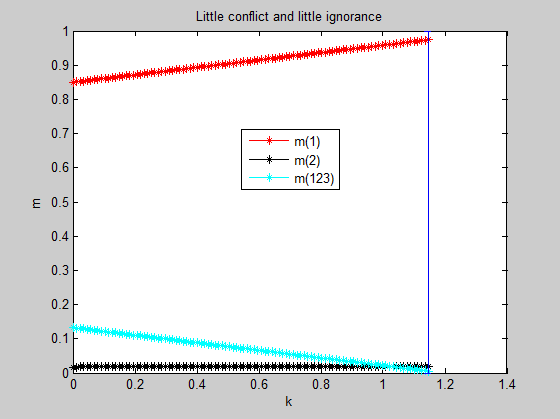
Az összehasonlítás során először Inagaki egyesített kombinációs szabályának viselkedését figyeltem meg a normalizációs tényező, *k* függvényében, mivel Inagaki egyesített szabálya három különböző Dempster kombinációs szabályt is tartalmazza. Ezek eredményei az 1.-4. ábrán láthatóak. A értéknél Yager szabályának, a értéknél Dempster szabályának és a értéknél pedig Inagaki extra szabályának felel meg. Az ábrákon az y tengellyel párhuzamos kék csík jelöli Dempster szabályának értékeit, az x tengely legkisebb értékéhez tartozó y értékek jelölik Yager szabályát, ahol pedig az *k* a legnagyobb értékét veszi föl, az ahhoz tartozó y értékek jelölik Inagaki extra szabályát.

Ezen kívül a Demspter szabály értékeiből kapott *bel*-t és *pl*-t összevetettem a bayesi valószínűségekkel, mivel a DS elmélet szerint egy feltevés pontos valószínűsége ezen értékek között van.

### 4.3.1. Kicsi konfliktus és kicsi tudatlanság

Azokat a megfigyeléseket, melyekben kicsi a tudatlanság, bizonytalanság és kicsi az ellentmondás, pontos és egyetértő megfigyeléseknek nevezzük, amik az osztályozás szempontjából a legjobbak.

A következő ábrán látható Inagaki egyesített kombinációs szabályának viselkedése ezen megfigyelésekre:



1. ábra: Inagaki egyesített szabálya kicsi konfliktussal és kicsi tudatlansággal

Az ábrából látható, hogy az úgymond jó (pontos és egyetértő) megfigyelések érkeztekor nincs nagy különbség a három szabály használatában. Dempster és Inagaki extra szabálya majdnem ugyanazt a végső eredményt hozzák ki. Ez annak köszönhető, hogy kicsi a tudatlanság a két megfigyelésben és így a normalizációs tényezőjük is majdnem egyenlő.

A legnagyobb különbség Yager szabályában van. Az ábráról is látszik, hogy kicsi konfliktus hatására is *viszonylag nagy lesz a tudatlanság* a végső eredményben a többi szabályhoz képest, hiszen Yager a konfliktus értékét a bizonytalanság értékéhez adja hozzá, míg a másik két szabályban a konfliktus értékét normalizálásra használják. Yager szabályában a megfigyelés pontos leírásának ellenében ez a nagy hátránya, hiszen valós osztályozó rendszerekben számos megfigyelés érkezik, amik szinte sosem 100%-ig pontosak. Emiatt, még, ha kicsi is a tudatlanság a megfigyelésekben, ha sokat kombinálunk össze belőlük, a végső eredmény eléggé bizonytalan lesz.

A következő táblázatban a Dempster szabály értékeiből kapott *bel* és *pl* értékei és a bayesi valószínűségek láthatóak:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | {1} | {2} | {3} |
| P | 0.8049 | 0.1307 | 0.0644 |
| Bel | 0.9742 | 0.0201 | 0 |
| Pl | 0.9799 | 0.0258 | 0.0057 |

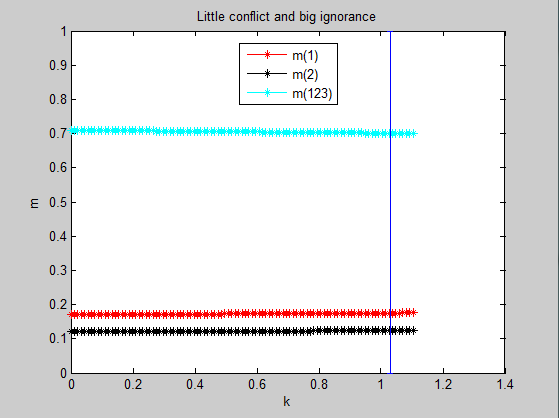
4. táblázat: Meggyőződés, elfogadhatóság és bayesi valószínűségek kicsi konfliktussal és kicsi tudatlansággal

Mivel a megfigyelésekben kicsi a bizonytalanság, ezért várható volt, hogy a bayesi valószínűségek és a *bel* és *pl* értékeivel behatárolt valószínűségek értékei közel vannak egymáshoz, hiszen, ha semmilyen tudatlanság sincs az adatok között, akkor csak elemi események *m*-je nagyobb 0-nál, így minden -re igaz lesz, hogy , amiből a [3.2.3.-as](#_3.2.3._Meggyőződés_és) fejezetben leírtak szerint következik, hogy DS modell leegyszerűsödik a Bayes modellre. Az értékek közötti különbségek a megfigyelések közötti konfliktusnak és a modellekben használt bizonytalan információ reprezentációinak tudhatók be. Mivel ebben az esetben az {1}-es esemény valószínűsége dominál és emellett *bel* és *pl* értékei is majdnem egyenlők, ezért egy viszonylag biztos végső döntést tudunk hozni.

### 4.3.2. Kicsi konfliktus és nagy tudatlanság

Ha két megfigyelés között kicsi a konfliktus és nagy a tudatlanság, az általában annak tudható be, hogy a megfigyelt objektum nem tartozik egyetlen osztályhoz sem vagy, hogy nagyon zajos az adat.

A következő ábrán látható Inagaki egyesített kombinációs szabályának viselkedése ezen megfigyelésekre:



2. ábra: Inagaki egyesített szabálya kicsi konfliktussal és nagy tudatlansággal

Az ábrából látható, hogy ebben az esetben szinte semmilyen különbség sincs a három szabály használatában. Ez a szabályok definíciójából fakad, hiszen, ha nincsen konfliktus a megfigyelések között, akkor Dempster szabálya egyenlő lesz Yager szabályával, ami a (34-36)-os egyenletekből következik. Ezen kívül igaz, hogy Inagaki extra szabálya a tudatlanság értékét is beleveszi a normalizációs tényezőbe, de, ha megnézzük a szabályt [(48)-as egyenlet], akkor abból látszik, hogy az elemi valószínűség-hozzárendeléseket -val normalizálja, ami, ha nagy értéket vesz föl, akkor 1-hez közelít és így szintén Yager szabályához jutunk el.

Ezen kívül, az előző esethez képest, itt nem lett relevánsan nagyobb a bizonytalanság Yager szabályával. Ez a Dempster szabályában leírt konfliktus mértékének definíciójából [(25)-ös egyenlet] és teszthalmaz felállításából ered, mivel az előző esetben , ebben az esetben pedig .

A következő táblázatban a Dempster szabály értékeiből kapott *bel* és *pl* értékei és a bayesi valószínűségek láthatóak erre az esetre:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | {1} | {2} | {3} |
| P | 0.3497 | 0.3390 | 0.3113 |
| Bel | 0.1753 | 0.1237 | 0 |
| Pl | 0.8763 | 0.8247 | 0.7010 |

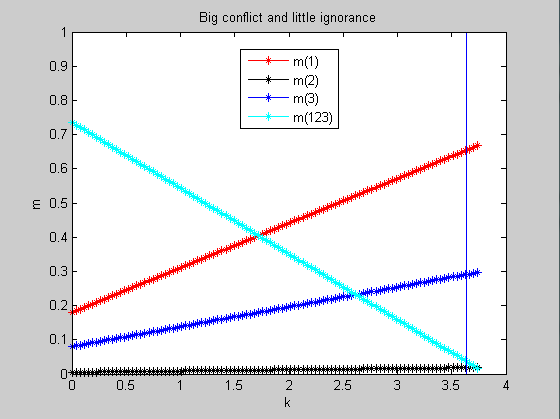
5. táblázat: Meggyőződés, elfogadhatóság és bayesi valószínűségek kicsi konfliktussal és nagy tudatlansággal

A táblázatból látszik, hogy ebben az esetben már elég eloszlóak az értékek *bel* és *pl* között. Ez abból következik, hogy az elemi események *bel-*jeinek számításakor csak azokat az *m* értékeket vesszük figyelembe, melyek részhalmazai nekik, azaz csak az saját *m* értékeiket, amik nagy bizonytalanság esetében elég kicsik. Másfelől ahol ebben az esetben és, mivel *bel* értékei alacsonyak, ezért *pl* értékei magasak lesznek. Abból kifolyólag, hogy *bel* és *pl* értékei ennyire különböznek egy-egy eseményre, nem tudunk egy biztos végső döntést hozni, mivel nagyon nagy az intervallum, amiben a tényleges valószínűség elhelyezkedik. Ez hasonlóan elmondható a bayesi valószínűségekre is, ott viszont abból kifolyólag, hogy az összes esemény valószínűsége közel egyenlő. Ez a Bayes modell felépítése miatt van, mivel nagy bizonytalanság esetén a modell kinormalizálja a tudatlanságot a valószínűségek között. Ebben az esetben látható a legjobban a Bayes modell hiányossága a bizonytalan információ reprezentálásában, hiszen nem a tényleges tudást vagy tudatlanságot ábrázolja, hanem mesterkélt valószínűségeket, a DS modellel ellentétben.

### 4.3.3. Nagy konfliktus és kicsi tudatlanság

Amikor két megfigyelés teljesen ellentétes feltételezéseknek tulajdonít nagy valószínűséget, akkor azokat ellentmondó megfigyeléseknek hívjuk. Ilyen esetekben, ha a megfigyelések erőteljesen ellentmondóak, jogosan feltételezhetjük, hogy az egyik szenzor helytelen adatokat szolgáltat, hibásan működik.

A következő ábrán látható Inagaki egyesített kombinációs szabályának viselkedése ezen megfigyelésekre:



3. ábra: Inagaki egyesített szabálya nagy konfliktussal és kicsi tudatlansággal

Ezen az ábrán már jól kivehető a különbség Dempster és Inagaki extra szabálya, valamint Yager szabálya között, mivel Yager szabályában a konfliktust mértékét az együttes bizonytalansághoz társítjuk, míg a másik két esetben ezt az értéket normalizáláshoz használjuk fel. Ha abból indulunk ki, hogy az egyik megfigyelő hibásan működik, akkor Yager modellje egy pontosabb leírást ad az aktuális állapotról, hiszen, mivel nem tudjuk, hogy melyik a hibás, ezért az ellentmondást a tudatlanság mértékeként fogjuk fel.

A következő táblázatban a Dempster szabály értékeiből kapott *bel* és *pl* értékei és a bayesi valószínűségek láthatóak:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | {1} | {2} | {3} |
| P | 0.4792 | 0.1042 | 0.4167 |
| Bel | 0.6545 | 0.0182 | 0.2909 |
| Pl | 0.6909 | 0.0545 | 0.3273 |

6. táblázat: Meggyőződés, elfogadhatóság és bayesi valószínűségek nagy konfliktussal és kicsi tudatlansággal

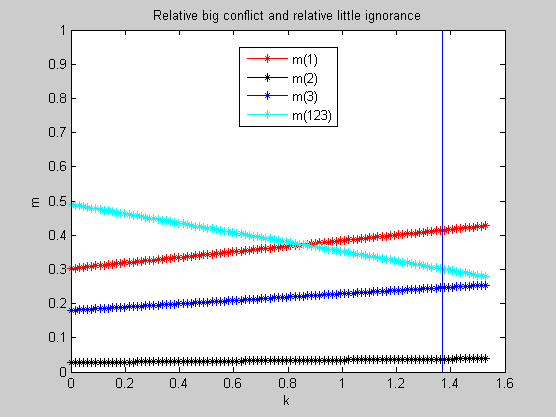
Dempster szabályának hibája ebben a szituációban vehető a legjobban észre, hiszen a végső eredményből azt látjuk, hogy az {1}-es esemény a legvalószínűbb, ráadásul a *bel* és *pl* értékei is közel vannak egymáshoz, de, ha megnézzük az eredeti megfigyeléseket a 2. táblázatban, ahol m1(1) = 0.85, m2(1) = 0.1, m2(3) = 0.8, akkor abból ez az eredmény egyáltalán nem következtethető. Az {1}-es esemény dominálása annak tudható be, hogy az volt az egyetlen olyan elemi esemény, aminek nem volt 0 az *m*-je egyik megfigyelésben sem és emiatt sokkal nagyobb valószínűséget kapott, mint a {3}-as esemény az egyesítés során. Ezen kívül *bel* és *pl* értékei minden esetben közel vannak egymáshoz a konfliktus kinormalizálása miatt, ami arra utal, hogy kicsi a bizonytalanság az egyesített értékekben, pedig valójában nem tudjuk, hogy pontosak-e a megfigyelések. Ennek a reprezentálási problémának feloldásának egyik helyes módja a feljebb is említett Yager szabályának alkalmazása.

A bayesi valószínűségeknél hasonló a helyzet, annyi különbséggel, hogy a megfigyelések valószínűségeinek átlagával arányosak az egyesített értékek, így egyik eseményhez sem társít helytelenül nagy valószínűséget.

### 4.3.4. Relatív nagy konfliktus és relatív nagy tudatlanság

Abban az esetben, ha a megfigyelések egyben bizonytalanok és még ellenmondóak is, akkor nem igazán tudunk még feltételezéseket sem adni a szenzorok működéséről, illetve a megfigyelt objektum mivoltáról, hiszen majdnem minden kombináció szóba jöhet az ideálison kívül, mikor mindkét szenzor jól működik, az adat nem zajos és a megfigyelt objektum beletartozik egy osztályba.

A következő ábrán látható Inagaki egyesített kombinációs szabályának viselkedése ezen megfigyelésekre:



4. ábra: Inagaki egyesített szabálya relatív nagy konfliktussal és relatív nagy tudatlansággal

A 4. ábrából látszik, hogy ebben az esetben a kombinációs szabályok hasonló értékeket produkálnak. A kisebb eltérések a *k* normalizációs tényezőben való eltérés miatt vannak.

A következő táblázatban a Dempster szabály értékeiből kapott *bel* és *pl* értékei és a bayesi valószínűségek láthatóak:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | {1} | {2} | {3} |
| P | 0.3948 | 0.2560 | 0.3492 |
| Bel | 0.4144 | 0.0377 | 0.2466 |
| Pl | 0.7158 | 0.3390 | 0.5479 |

7. táblázat: Meggyőződés, elfogadhatóság és bayesi valószínűségek relatív nagy konfliktussal és relatív nagy tudatlansággal

A táblázat értékei hasonlóak, mint az 5. táblázatban látottak, csak nem annyira szélsőségesek. *bel* és *pl* értékei közötti különbség itt is a megfigyelések bizonytalanságának tudható be, csak itt mérsékeltebbek, hiszen kisebb a tudatlanság. Azt, hogy a dempsteri egyesítés végső értékei arányosak az eredeti megfigyelések értékeihez annak köszönhető, hogy az elemi események *m*-jei közül a két megfigyelésben nem volt közös adat. Ahogyan azt a [4.3.2.-es](#_4.3.2._Kicsi_konfliktus) alfejezetben is említettem, *bel* és *pl* értékeinek különbözése miatt nem tudunk egy biztos végső döntést hozni, mivel nagyon nagy az intervallum, amiben a tényleges valószínűség elhelyezkedik, viszont ez egyben azt is kifejezi, hogy viszonylag nagy a bizonytalanságunk, ami ebben az esetben igaz is. Itt is látható a Bayes modell hiányossága, mivel ugyanúgy kinormalizálja a tudatlanságot a valószínűségek között, mint, mikor két bizonytalan megfigyelés érkezett.

# 5. Összefoglalás és továbblépési lehetőségek

A mérnöki tervezésben a legtöbb időt a téma szakirodalmának felkutatása és megértése vette igénybe, mivel ez egy elég speciális témakör. Az irodalomkutatásban először magának a bizonytalanságnak a fogalmával, annak lehetséges típusaival foglalkoztam, majd a probléma megértése után kezdtem foglalkozni a bizonytalanság reprezentációinak feltárásával. Eleinte három modellt vizsgáltam, a Bayes, a Dempster-Shafer (DS) és a Certainty-Factor (CF) modelleket. Az utóbbi azért nem került bele a dolgozatba, mert vizsgálata során kiderült, hogy nem valószínű, hogy bionikus szemüveg felismerőfunkcióiba beépíthető.

Sajnos a Bayes modell elterjedtsége miatt kevés helyen használják a DS modellt, pedig nagy előnye, hogy le lehet vele írni egy megfigyelés bizonytalanságát, valamint, hogy ezzel tovább lehet számolni és így jóval kevesebb valós adat veszik el.

Dolgozatom céljának részeként összevetettem a Bayes és a DS modellt a megfigyelések bizonytalanságának, tudatlanságának és a megfigyelések közötti ellentmondásosságnak a függvényében és sok esetben pontosabb eredményeket lehet a DS modellel reprodukálni.

Az eredmények fényében úgy gondolom, hogy a bionikus szemüveg felismerőfunkcióiba be lehetne építeni a DS modellt és ezzel javítani azok pontosságán. Persze ehhez még további munkálatok szükségesek. Ezek közül kiemelnék néhány fontosabbat problémát:

* Egy-egy felismerőfunkcióban (pl. bankjegyfelismerés) a különböző „expert”-ektől jövő adatokat (pl. számjegyek vizsgálata) hogyan vetítsük le alap valószínűség-hozzárendelésekre?
* Hogyan mérjük föl és építsük bele a modellbe az időbeliségből jövő korrelációt?
* Milyen esetekben melyik kombinációs szabály használatos?
* Mi szerint és milyen értékkel határozzam meg egy megfigyelés használhatóságának küszöbértékét?
* Milyen megbízhatósági és elfogadhatósági értékeknél fogadjak el egy hipotézist? Melyiknek az értékét választom ki?

Ezek és még sok kérdés nyitott, ahhoz, hogy ténylegesen fel lehessen mérni a DS modell gyakorlatbeli felhasználhatóságát.

# 6. Köszönetnyilvánítás

Köszönetet szeretnék mondani konzulensemnek, Karacs Kristófnak, a dolgozathoz nyújtott segítségért és a témájában való iránymutatásért.

# 7. Irodalomjegyzék

Cobb, B. R., & Prakash, S. P. (2006.04.). On the plausibility transformation method for translating belief function models to probability models. *International Journal of Approximate Reasoning, 41(3)* , 314-330.

Inagaki, T. (1991.). Interdependence between Safety-Control Policy and Multiple-Sensor Schemes Via Dempster-Shafer Theory. *IEEE Transactions on Reliability* , 182-188.

Liu, B. (2006.). *UIC, Department of Computer Science.* Forrás: Bing Liu's homepage: http://www.cs.uic.edu/~liub/teach/cs511-spring-06/cs511-uncertainty.doc

Sentz, K., & Ferson, S. (2002). *Combination of evidence in Dempster-Shafer theory.* Sandia National Laboratories.

Shafer, G., & Pearl, J. (1990). *Readings in Uncertain Reasoning.*

*Wikipedia*. (2003.). Forrás: Wikipedia, Dempster–Shafer theory: http://en.wikipedia.org/wiki/Dempster%E2%80%93Shafer\_theory

Yager, R. R. (1987.03.). On the Dempster-Shafer framework and new combination rules. *Information Sciences* , 93 - 137.

Zadech, L. (1979). *On the validity of Dempster's rule of combination.* Berkeley, USA,: Univ. of California.

# 8. Új részek

## 8.1. Multiclass modell bevezetése (pl:: objektumfelismerés)

Osztályozási feladatoknak hívjuk azokat a problémákat, amelyek bejövő információk, objektumok egy halmazát véges számú osztályokba sorolnak be különböző tulajdonságok alapján. Az osztályozási problémáknál két féle típust különböztetünk meg, a bináris és a multiclass modelleket. Bináris rendszerről akkor beszélünk, ha a kimeneti osztályok száma kettő, multiclassról pedig, ha több.

Az osztályozási feladatoknál az a cél, hogy egy olyan rendszert tervezzünk, ami minden új bejövő objektumot be tud sorolni a neki megfelelő osztályba. Bináris modellek esetén általában a két osztály, egymást kizáró osztályok (például: annak a vizsgálata, hogy egy páciens pozitív vagy sem egy bizonyos betegségre vagy, hogy egy tárgynak meg van-e egy kvalitatív tulajdonsága vagy sem.), viszont a multiclass rendszereknél nehézséget jelent, ha a klasszifikációs szabály, ami besorolja a bejövő objektumokat kimeneti osztályokba, nem fedi le teljes egészében a bejövő objektumok halmazát. Ilyen esetben szokás megkülönböztetni a pozitív osztályok halmazát és a negatív osztályt. Pozitív osztályok alatt azt értjük, amilyen bejövő információkra a rendszer „fel van készítve”, azaz, amilyen típusú objektumokat fel szeretnénk ismerni és a rendszer be tudja sorolni azokat ezen osztályok valamelyikébe, negatív osztály alatt pedig az összes többi bemenő objektum kimeneti osztályát értük, azaz egy olyan összefogó osztályt, aminek a pozitív osztályokkal vett uniója lefedi az összes lehetséges kimeneti osztályok halmazát.

IDE KÉNE MÉG VALAMILYEN DEF A POZ ÉS NEGATÍV OSZTÁLYRÓL, meg jelölések stb..

A legtöbb objektumfelismerő, osztályozó rendszer modellezésében nehézséget jelent különbséget tenni a negatív osztály, illetve a fel nem ismert információ, tudatlanság között, hiszen a rendszernek csak a pozitív osztályokról van információja, negatív osztályba pedig csak az információhiány miatt sorolja be az objektumokat.

Ilyen szempontból 2 különböző negatív osztályt különböztetünk meg:

1. Teljes információhiány a bemeneten.
2. Random minta, ami nem fordulhatna elő a bemeneten, azaz a modell nem ismeri fel.
3. több pozitív + 1 negatív osztály
4. negatív kettébontása: (i) ami akár pozitív is lehetne, (ii) üres, semmi, zaj, egyéb stb.
5. ?

Felmerülő kérdések: bizonytalansággal, a hiányos információval  ill. a negatív osztállyal kapcsolatban

1. 4 különböző negatív osztályt (eddigi értelemben) különböztetünk meg:
   1. Az információhiányt bizonytalansággal kell reprezentálni, nem negatív osztállyal. Végül születhet negatív döntés, ha egyik pozitív osztály konfidenciája sem elég magas.
      1. Kérdés: mit jelent ez Bel és Pla szempontjából?
   2. Random minta (pl. árnyék, szél, kéz stb.): olyan, ami bankjegyen nem fordul elő - ez lényegileg megegyezik az a esettel
   3. Bankjegyen előforduló, de nem diszkriminatív minta (pl. címer): ezt is bizonytalansággal kell reprezentálni, de csak a pozitív osztályok között szétkenve
   4. Felismert negatív: pl. “EURÓ” felirat vagy Eurón szereplő portré: itt kell a negatív osztály mellett dönteni - ez így egy nagy közös kimeneti kalap, de ki lehet belőle emelni később egy-egy esetet és pozitívvá tenni.
      1. Lehetőség (felhasználói preferencia / beállítás): ilyenkor ha mellette pozitív szavazat is van, akkor akarjuk-e, hogy születhessen pozitív döntés. Ha igen, akkor 1-p résznyi bizonytalanságot szétkenhetünk a pozitív osztályok között.

Kicsatolások:

1. Érdemes megkülönböztetni a negatív kimeneteket a szerint, hogy hogyan jött létre: lásd 1. konklúzió + ellentmondásos pozitív szavazatok (experten belül vagy expertek között)

## 8.2. Kísérletek

### 8.2.2 Bankjegyfelismerés modellezése

               konkrét osztályozói, azok által szolgáltatott konfidenciák, mint példa

(3.2-pre Honnan vannak a kísérleti adatok? (generált / ex hasibusz adatok) )

### 8.2.3. Konkrét DS számítások



* 1. eset: Nem teljesen jól felismerhető 500-as főleg számok szempontjából, minta közepesen felismerhető, szín jól felismerhető, de másik 2000-es és 10000-es is szóba jöhet
  + Számfelismerés: Számok számossága nem biztos (5-6) és 5-össel a korreláció sem nagy
    - corr:[0.1, 0, 0.05, 0.4], count: 5, p(compl): 0.8,
  + Mintafelismerés: Rákóczi fej nagyjából felismerhető
    - reldist: 0.6, id:1
  + Színfelismerés: Jól felismerhető, de 2000 és 10000 –sel átfedésben
    - reldist: [0.2, 1, 0.4, 1, 0.5, 1], id: [1, 2, 3, 4, 5, 6]
* Eredmény DS:

Mass

500 1000 2000 5000 10000 20000 Negative Banknote ALL

0.603748 0.000000 0.033113 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.049783 0.002509

Belief and Plausibility

500 1000 2000 5000 10000 20000 Negative

0.603748 0.000000 0.033113 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000

0.935166 0.057766 0.385002 0.069016 0.280799 0.062882 0.002509

* Eredmény extra:

Mass

500 1000 2000 5000 10000 20000 Negative Banknote ALL

0.603844 0.000000 0.033118 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.049791 0.002351

Belief and Plausibility

500 1000 2000 5000 10000 20000 Negative

0.603844 0.000000 0.033118 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000

0.935156 0.057616 0.384904 0.068868 0.280684 0.062733 0.002351

* 2. eset: Nem teljesen jól felismerhető 500-as, minta szempontjából csak a címer látszik, számok jól felismerhetők, szín jól felismerhető, de 10000-es is szóba jöhet
  + Számfelismerés: Számok számossága nem biztos (5-6) és 5-össel a korreláció sem nagy
    - corr:[0.05, 0.05, 0, 0.85], count: 6, p(compl): 1,
  + Mintafelismerés: Rákóczi fej nagyjából felismerhető
    - reldist: 0.2, id:123456
  + Színfelismerés: Jól felismerhető, de 2000 és 10000 –sel átfedésben
    - reldist: [0.15, 1, 1, 1, 0.45, 1], id: [1, 2, 3, 4, 5, 6]
* Eredmény DS

Mass

500 1000 2000 5000 10000 20000 Negative Banknote ALL

0.833682 0.000000 0.000000 0.000000 0.053948 0.000000 0.000000 0.008886 0.000001

Belief and Plausibility

500 1000 2000 5000 10000 20000 Negative

0.833682 0.000000 0.000000 0.000000 0.053948 0.000000 0.000000

0.939096 0.015842 0.012365 0.039966 0.138717 0.012365 0.000001

* Eredmény extra:

Mass

500 1000 2000 5000 10000 20000 Negative Banknote ALL

0.833682 0.000000 0.000000 0.000000 0.053948 0.000000 0.000000 0.008886 0.000001

Belief and Plausibility

500 1000 2000 5000 10000 20000 Negative

0.833682 0.000000 0.000000 0.000000 0.053948 0.000000 0.000000

0.939096 0.015842 0.012365 0.039966 0.138717 0.012365 0.000001



* 3. eset: Rosszul felismerhető 500-as, minta szempontjából szinte semmi sem látszik, számok nagyjából felismerhetők, de 0-val is nagy a korreláció, színre 500-hoz és 2000-hez van viszonylag közel
  + Számfelismerés: Számok számossága biztos 6, de 5-össel és 0-val nagy a korreláció
    - corr:[0.5, 0, 0.05, 0.6], count: 6, p(compl): 0.9,
  + Mintafelismerés: Negatív osztályba sorolja
    - reldist: 1.5, id:1
  + Színfelismerés: messze középponttól 500 és 2000 még beleesik a határba
    - reldist: [0.4, 1.5, 0.4, 1.5, 1.5, 1.5], id: [1, 2, 3, 4, 5, 6]
* Eredmény DS

Mass

500 1000 2000 5000 10000 20000 Negative Banknote ALL

0.011178 0.000000 0.006858 0.000611 0.000000 0.000279 0.963477 0.003404 0.000639

Belief and Plausibility

500 1000 2000 5000 10000 20000 Negative

0.011178 0.000000 0.006858 0.000611 0.000000 0.000279 0.963477

0.024164 0.008191 0.021521 0.011554 0.008191 0.008934 0.964298

* Eredmény extra:

Mass

500 1000 2000 5000 10000 20000 Negative Banknote ALL

0.010314 0.000000 0.006883 0.000410 0.000000 0.000280 0.968425 0.002609 0.000014

Belief and Plausibility

500 1000 2000 5000 10000 20000 Negative

0.010314 0.000000 0.006883 0.000410 0.000000 0.000280 0.968425

0.021004 0.005404 0.018698 0.007658 0.005404 0.005902 0.968468

* 4. eset: Nem felismerhető 500-as, minta szempontjából semmi sem látszik, számok sem felismerhetők, színre valamennyire felismeri
  + Számfelismerés: Semmi nem tudunk számok alapján
    - corr:[0, 0, 0, 0], count: 0, p(compl): 1,
  + Mintafelismerés: Negatív osztályba sorolja
    - reldist: 1.5, id:1
  + Színfelismerés: színre valamennyire felismeri
    - reldist: [0.8, 1.5, 1.5, 1.5, 1.5, 1.5], id: [1, 2, 3, 4, 5, 6]
* Eredmény DS:

Mass

500 1000 2000 5000 10000 20000 Negative Banknote ALL

0.000152 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.998865 0.000132 0.000851

Belief and Plausibility

500 1000 2000 5000 10000 20000 Negative

0.000152 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.998865

0.001135 0.000983 0.000983 0.000983 0.000983 0.000983 0.999716

* Eredmény extra:

Mass

500 1000 2000 5000 10000 20000 Negative Banknote ALL

0.000152 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.999078 0.000132 0.000639

Belief and Plausibility

500 1000 2000 5000 10000 20000 Negative

0.000152 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.999078

0.000922 0.000770 0.000770 0.000770 0.000770 0.000770 0.999716

* 5. eset: Nem felismerhető 2000-es, minta szempontjából semmi sem látszik, számoknál 0-val kezdődő, de 5-6 félszámjegyű, színre valamennyire felismeri, de 500-as is lehetne
  + Számfelismerés: 0-val kezdődő, de 4-5 félszámjegyű
    - corr:[0.95, 0, 0, 0], count: 5, p(compl): 0.5,
  + Mintafelismerés: Negatív osztályba sorolja
    - reldist: 1.5, id:1
  + Színfelismerés: színre valamennyire felismeri
    - reldist: [0.6, 1.5, 0.3, 1.5, 1.5, 1.5], id: [1, 2, 3, 4, 5, 6]
* Eredmény DS:

Mass

500 1000 2000 5000 10000 20000 Negative Banknote ALL

0.000000 0.000000 0.546184 0.000000 0.000000 0.000000 0.245775 0.016798 0.000209

Belief and Plausibility

500 1000 2000 5000 10000 20000 Negative

0.000000 0.000000 0.546184 0.000000 0.000000 0.000000 0.245775

0.039294 0.185756 0.754225 0.185756 0.185756 0.185756 0.245984

* Eredmény extra:

Mass

500 1000 2000 5000 10000 20000 Negative Banknote ALL

0.000000 0.000000 0.570696 0.000000 0.000000 0.000000 0.256805 0.013650 0.000000

Belief and Plausibility

500 1000 2000 5000 10000 20000 Negative

0.000000 0.000000 0.570696 0.000000 0.000000 0.000000 0.256805

0.036936 0.149212 0.743195 0.149212 0.149212 0.149212 0.256805



* 6. eset: Egyértelmű 2000-es, minta szempontjából közel van, számoknál egyértelmű a számosság, nagyon korrelál 2-sel, de picit 0-val is, színre nagyon közel van 2000-hez
  + Számfelismerés: nagyon korrelál 2-sel, de picit 0-val is, egyértelmű a számosság
    - corr:[0.2, 0, 1, 0], count: 8, p(compl): 1,
  + Mintafelismerés: minta szempontjából közel van
    - reldist: 0.1, id:3
  + Színfelismerés: nagyon közel van 2000-hez
    - reldist: [1, 1.5, 0.05, 1.5, 1.5, 1.5], id: [1, 2, 3, 4, 5, 6]
* Eredmény DS:

Mass

500 1000 2000 5000 10000 20000 Negative Banknote ALL

0.000000 0.000000 0.999847 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000

Belief and Plausibility

500 1000 2000 5000 10000 20000 Negative

0.000000 0.000000 0.999847 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000

0.000000 0.000000 0.999968 0.000000 0.000032 0.000153 0.000000

* Eredmény extra:

Mass

500 1000 2000 5000 10000 20000 Negative Banknote ALL

0.000000 0.000000 0.999847 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000

Belief and Plausibility

500 1000 2000 5000 10000 20000 Negative

0.000000 0.000000 0.999847 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000

0.000000 0.000000 0.999968 0.000000 0.000032 0.000153 0.000000



* 7. eset: Nem látunk semmit
  + Számfelismerés: nem látunk semmit
    - corr:[0, 0, 0, 0], count: 0, p(compl): 1,
  + Mintafelismerés: A legközelebbi is kiesik a poz tartományból
    - reldist: 1.9, id:1
  + Színfelismerés: Mindegyik kiesik a poz tartományból
    - reldist: [1.5, 1.5, 1.5, 1.5, 1.5, 1.5], id: [1, 2, 3, 4, 5, 6]
* Eredmény DS:

Mass

500 1000 2000 5000 10000 20000 Negative Banknote ALL

0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 1.000000 0.000000 0.000000

Belief and Plausibility

500 1000 2000 5000 10000 20000 Negative

0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 1.000000

0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 1.000000

* Eredmény extra:

Mass

500 1000 2000 5000 10000 20000 Negative Banknote ALL

0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 1.000000 0.000000 0.000000

Belief and Plausibility

500 1000 2000 5000 10000 20000 Negative

0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 1.000000

0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 1.000000

### 8.2.4. Eredmények értékelése (?)