Задача 1

Найти сумму ряда

$$\sum_{n=9}^{\infty} \frac{18}{n^2 - 13n + 40}$$

Произведем эквивалентные преобразования ряда:

Так как n^2-13n+40 = (n-5)(n-8), то получаем, что исходный ряд мы можем переписать в следующем виде:

$$\sum_{n=9}^{\infty} \frac{18}{2n^2 - 13n + 40} = \sum_{n=9}^{\infty} \frac{18}{(n-5)(n-8)} = \left\{ \frac{1}{n-5} \cdot \frac{1}{n-8} = \right.$$

$$\left. = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{n-8} - \frac{1}{n-5}\right) \right\} = \sum_{n=9}^{\infty} 18 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{n-8} - \frac{1}{n-5}\right) =$$

$$= 6\sum_{n=9}^{\infty} \left(\frac{1}{n-8} - \frac{1}{n-5}\right) = 6\left(\sum_{n=9}^{\infty} \frac{1}{n-8} - \sum_{n=9}^{\infty} \frac{1}{n-5}\right)$$

Рассмотрим ряд $\sum_{n=9}^{\infty} \frac{1}{n-8}$.

Произведем замену {n-8 = k}, тогда суммирование будет производиться от k = n-8 = {n=9}= 9 – 8 =1, а $\frac{1}{n-8} = \frac{1}{k}$.

Подставим полученные значения в ряд $\sum_{n=9}^{\infty} \frac{1}{n-8}$:

$$\sum_{n=9}^{\infty} \frac{1}{n-8} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}.$$

Произведем аналогичные преобразования и с рядом $\sum_{n=9}^{\infty}\frac{1}{n-5}$. Тогда для него замена {n-5=k}:

начальное k = n-5 = {n=9} = 9 – 5 = 4, а $\frac{1}{n-5}=\frac{1}{k}$.

Подставим данные в $\sum_{n=9}^{\infty}\frac{1}{n-5}$:

$$\sum_{n=9}^{\infty}\frac{1}{n-5}=\sum_{k=4}^{\infty}\frac{1}{k}.$$

Итак, мы получили, что исходный ряд равен разности двух рядов:

$$\sum_{n=9}^{\infty}\frac{18}{n^2-13n+40}=6(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}-\sum_{k=4}^{\infty}\frac{1}{k})=$$

$$=6((\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\sum_{k=4}^{\infty}\frac{1}{k})-\sum_{k=4}^{\infty}\frac{1}{k})=6(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3})=11$$

Ответ: $\sum_{n=9}^{\infty}\frac{18}{n^2-13n+40}=11.$

Задача 2

Исследовать ряд на сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}^2 n}{n^3}$$

Обозначим $a_n = \dfrac{\operatorname{arctg}^2 n}{n^3}$.

Так как для всех n $(\frac{\pi}{2})^2 \geq \operatorname{arctg}^2 n \geq 0$, то для всех n верно следующее утверждение:

$$a_n \leq \frac{1}{n^3}\frac{\pi^2}{4}$$

Докажем сходимость ряда $\dfrac{\pi^2}{4}\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^3}$. Тогда из его сходимости будет следовать сходимость исходного ряда, так как тогда он будет ограничен сходящимся рядом сверху и нулем снизу (все члены ряда неотрицательны).

Обозначим $b_n = \dfrac{1}{n^3}$. По признаку сравнения (говорящему, что ряд вида $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^a}$ сходится только при условии, что a строго больше 1, т.е. a>1 и расходится в противном случае, при $a \leq 1$), ряд $\dfrac{\pi^2}{4}\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^3}$ сходится, так как выполняется условие сходимости: 3>1.

Поэтому и исходный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\operatorname{arctg}^2 n}{n^3}$ тоже сходится.

Ответ: ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\operatorname{arctg}^2 n}{n^3}$ сходится.

Задача 3

Исследовать ряд на сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+4} \operatorname{tg} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Обозначим $a_n = \frac{1}{n+4} \operatorname{tg} \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{n+4} \frac{\sin\left(1/\sqrt{n}\right)}{\cos\left(1/\sqrt{n}\right)}$.

При $n \to \infty$ $\sin\frac{1}{\sqrt{n}} \approx \frac{1}{\sqrt{n}}, \cos\frac{1}{\sqrt{n}} \approx 1 - \frac{1}{2n}$, поэтому сходимость исходного ряда эквивалентна сходимости следующего ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1/\sqrt{n}\right)}{(n+4)(1-\frac{1}{2n})} \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1/\sqrt{n}\right)}{n(1-\frac{1}{n})} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}\,(n-1)} \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$$

Докажем сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$. Тогда из его сходимости будет следовать сходимость исходного ряда, так как тогда он будет ограничен сходящимся рядом сверху и нулем снизу (все члены ряда неотрицательны).

Обозначим $b_n = \frac{1}{n^{3/2}}$. По признаку сравнения (говорящему, что ряд вида $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$ сходится только при условии, что a строго больше 1, т.е. a>1 и расходится в противном случае, при $a \le 1$) ,ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$ сходится, так как выполняется условие сходимости: 1,5>1.

Поэтому и исходный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+4} \operatorname{tg} \frac{1}{\sqrt{n}}$ тоже сходится.

Ответ: ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+4} \operatorname{tg} \frac{1}{\sqrt{n}}$ сходится.

Задача 4

Исследовать ряд на сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$$

Обозначим $a_n = \frac{(n!)^2}{2^{n^2}} = (\frac{n!}{2^{n^2/2}})^2 = (\frac{1}{2^{n/2}}\frac{2}{2^{n/2}}\frac{6}{2^{n/2}}\cdots\frac{n}{2^{n/2}})^2$

Так как $2^{n/2}$ растет быстрее чем n^2, начиная хотя бы с номера $n>100$, а $\sum_{n=1}^{100}\frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$ есть конечное число, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$ можно ограничить сверху суммой:

$$\sum_{n-1}^{100}\frac{(n!)^2}{2^{n^2}}+\sum_{n=101}^{\infty}(\frac{1}{n^2}\frac{2}{n^2}\frac{3}{n^2}\cdots\frac{n}{n^2})^2<\sum_{n=1}^{100}\frac{(n!)^2}{2^{n^2}}+$$

$$+\sum_{n=101}^{\infty}(\frac{1}{n}\frac{1}{n}\frac{1}{n}\cdots\frac{1}{n})^2=\sum_{n=1}^{100}\frac{(n!)^2}{2^{n^2}}+\sum_{n=101}^{\infty}\frac{1}{n^{2n}}$$

Докажем сходимость ряда $\sum_{n=101}^{\infty}\frac{1}{n^{2n}}$. Тогда из его сходимости будет следовать сходимость исходного ряда, так как тогда он будет ограничен сходящимся рядом сверху и нулем снизу (все члены ряда неотрицательны).

Обозначим $b_n = n^{-2n}$. По признаку сравнения (говорящему, что ряд вида $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^a}$ сходится только при условии, что a строго больше 1: $a>1$ и расходится в противном случае: $a\leq 1$) ,ряд $\sum_{n=101}^{\infty}\frac{1}{n^{2n}}$ сходится, так как выполняется условие сходимости: $2n>1$ при $n\in[101;\infty)$

Поэтому и исходный ряд тоже сходится.

Ответ: ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$ сходится.

Задача 5

Исследовать ряд на сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^4 \left(\frac{2n}{3n+5} \right)^n$$

Воспользуемся признаком Коши:

Если $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ - сходится.

Если $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ - расходится.

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{n^4} \left(\frac{2n}{3n+5} \right) = \frac{2}{3} < 1$$

Таким образом, по признаку Коши исходный ряд является сходящимся.

Ответ: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^4 \left(\frac{2n}{3n+5} \right)^n$ сходится.

Задача 6

Исследовать ряд на сходимость:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 (2n+1)} = \sum_{n=2}^{\infty} a_n$$

Воспользуемся предельным признаком сходимости.

Если два ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ удовлетворяют условию:

$\lim \frac{a_n}{b_n} = L$, где L – конечное число, не равное 0, то ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся или расходятся одновременно.

Рассмотрим следующий ряд:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(2n+1) \ln^2 (2n+1)} = \sum_{n=2}^{\infty} b_n$$

$\lim \frac{a_n}{b_n} = 2$ — это конечное число, не равное 0

Значит, ряды $\sum a_n$ и $\sum b_n$ сходятся или расходятся одновременно.

Для исследования сходимости второго ряда воспользуемся интегральным признаком сходимости рядов.

Если некоторая функция f(x) удовлетворяет условию $f(n)=b_n$, то если $\int\limits_2^\infty f(x)dx$ сходится, то и ряд $\sum\limits_{n=2}^\infty b_n$ сходится, а если $\int\limits_2^\infty f(x)dx$ расходится, то и ряд $\sum\limits_{n=2}^\infty b_n$ расходится.

Рассмотрим следующую функцию:

$$f(x)=\frac{1}{(2x+1)\ln^2(2x+1)}$$

Если $\int\limits_2^\infty f(x)dx$ сходится, то и ряд $\sum\limits_{n=2}^\infty b_n$ сходится, если интеграл расходится, то и ряд $\sum\limits_{n=2}^\infty b_n$ расходится.

$$\int\limits_2^\infty \frac{dx}{(2x+1)\ln^2(2x+1)}=\frac{1}{2}\int\limits_2^\infty \frac{d\ln(2x+1)}{\ln^2(2x+1)}=-\frac{1}{2}\frac{1}{\ln(2x+1)}\bigg|_2^\infty=\frac{1}{2\ln 5}$$

Интеграл сходится, значит и ряд $\sum\limits_{n=2}^\infty b_n$ сходится. Из сходимости этого ряда следует сходимость исходного.

Ответ: $\sum\limits_{n=2}^\infty \frac{1}{n\ln^2(2n+1)}$ сходится.

Задача 7

Исследовать ряд на сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^{n}$$

Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^{n}$:

Воспользуемся признаком Коши:

Если $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} < 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ - сходится.

Если $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} > 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ - расходится.

Найдем $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1$$

Таким образом, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^{n}$ сходится, а, следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^{n}$ сходится, причем абсолютно.

Ответ: ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^{n}$ сходится.

Задача 8

Вычислить сумму ряда с точностью α:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n!} \quad \alpha = 0{,}01$$

Обозначим n-ный член ряда, как a_n:

$$a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n!}$$

Чтобы вычислить сумму ряда с заданной точностью, следует принять во внимание то, что члены ряда с ростом n монотонно убывают. Тогда нам требуется найти сумму ряда до N-го члена, где N таково, что для любых n>N выполняется неравенство $|an| \leq \alpha$. Найдем N:

$$|a_1| = 1 > \alpha$$

$$|a_2| = 0{,}5 > \alpha$$

$$|a_3| \approx 0{,}017 > \alpha$$

$$|a_4| \approx 0{,}042 > \alpha$$

$$|a_5| \approx 0{,}008 > \alpha \Rightarrow N = 5$$

Найдем сумму ряда до 5-го члена:

$$\sum_{n=1}^{5} a_n \approx 0{,}63$$

Ответ: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n!} = 0{,}63 \pm 0{,}01$

Задача 9

Найти область сходимости ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{\ln(x+1)}}$$

Обозначим $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n^{\ln(x+1)}}$, а искомую область сходимости ряда – X.

Функция ln(x+1) определена на множестве {x+1>0}, следовательно, $X \subseteq \{x > -1\}$.

Произведем замену переменных $\ln(x+1) = t$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^{\ln(x+1)}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^{t}}$$

При {t>1}:

$a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n^{\ln(x+1)}} = \frac{(-1)^{n+1}}{n^{t}} \le \frac{1}{n^{t}}$, следовательно, ряд ограничен сверху сходящимся рядом, а значит, он тоже сходится, причем абсолютно.

При {t∈[0;1]}:

$a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n^{\ln(x+1)}} = \frac{(-1)^{n+1}}{n^{t}}$

Согласно признаку Лейбница, при t∈(0;1] этот знакопеременный ряд сходится, но только условно.

Таким образом, исходный ряд сходится при t∈(0;∞). Перейдем обратно к x:

$$t = \ln(x+1) \Rightarrow x = e^{t} - 1$$

$$t \in (0,\infty) \Rightarrow x \in (0;\infty)$$

Ответ: область сходимости $X = x \in (0;\infty)$.

Задача 10

Найти область сходимости ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)5^n}(x-3)^n$$

Приведем этот ряд к степенному:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)5^n}(x-3)^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-3)^n,$$

где $a_n = \dfrac{(-1)^n}{(n+1)5^n}$.

Используем формулу для нахождения радиуса сходимости, основанную на применении признака Коши:

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{5^n(n+1)}{(-1)^n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|5^n(n+1)\right|} = 5$$

Таким образом, интервал сходимости ряда будет выглядеть следующим образом:

$$-5 < x-3 < 5 \Rightarrow x \in (-2;8)$$

Ответ: область сходимости $X = \{x \in (-2;8]\}$.

Задача 11

Найти область сходимости ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8^n}{n^2}(\sin^3 x)^n$$

Приведем этот ряд к степенному, т.е. к виду: $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, где $a_к$ не зависит от x и является постоянной величиной.

Положим $a_n = \dfrac{8^n}{n^2}$, тогда исходный ряд можно переписать в виде:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8^n}{n^2}(\sin^3 x)^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (\sin^3 x)^n .$$

Теперь нам требуется найти $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|} = L$:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|} = \overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\left|\frac{8^n}{n^2}\right|} = \lim_{n\to\infty}\frac{8}{\sqrt[n]{n^2}} = \frac{8}{\lim\limits_{n\to\infty}^{2}(\sqrt[n]{n})}$$

Воспользуемся следующим равенством:

$\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{ak+b} = 1$, где a и b постоянные числа, a>0.

Тогда:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|} = 8$$

Таким образом, по теореме Коши-Адамара, область сходимости $X = \{|\sin^3 x| < \frac{1}{L} = \frac{1}{8}\}$.

Решим неравенство, чтобы в явном виде записать область сходимости:

$$|\sin^3 x| < \frac{1}{8} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin^3 x < \frac{1}{8}, \\ \sin^3 x > -\frac{1}{8}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x < \frac{1}{2}, \\ \sin x > -\frac{1}{2}; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in (-\frac{\pi}{6} + 2\pi n, +\frac{\pi}{6} + 2\pi n), \\ x \in (\frac{5\pi}{6} + 2\pi n, \frac{7\pi}{6} + 2\pi n), n \in N \end{array} \right.$$

Ответ: область сходимости

$$X = \left[\begin{array}{l} x \in (-\frac{\pi}{6} + 2\pi n, +\frac{\pi}{6} + 2\pi n), \\ x \in (\frac{5\pi}{6} + 2\pi n, \frac{7\pi}{6} + 2\pi n), n \in N \end{array} \right. .$$

Задача 12

Найти сумму ряда:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \left(\frac{5}{x}\right)^{n}.$$

Произведем замену переменной:

$$y = \frac{5}{x}:$$

$$A(y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} y^{k} = \frac{1}{y} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} y^{k+1} = \frac{1}{y} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} y^{k}$$

Найдем сумму ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} y^{k}$:

Рассмотрим производную $\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} y^{k}\right)'$:

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} y^{k}\right)' = \sum_{k=0}^{\infty} y^{k} = \frac{1}{1-y}$$

(Сумма убывающей геометрической прогрессии).

Произведем обратные преобразования для нахождения суммы ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} y^{k}$, то есть возьмем интеграл:

$$\int \frac{1}{(1-y)} dy = -\ln(1-y) + C$$

Чтобы найти константу С, найдем значение ряда в некоторой фиксированной точке у, возьмем $y = 0$, тогда:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} 0^k = 0 = -\ln(1-0) + C \Rightarrow C = 0$$

Таким образом, сумма ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} (\frac{5}{x})^n$ есть $-(\frac{x}{5}) \ln(1-\frac{5}{x})$ при $1-\frac{5}{x} > 0 \Leftrightarrow x > 5$, и не существует при всех остальных x.

Ответ: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} (\frac{5}{x})^n = \begin{cases} -(\frac{x}{5}) \ln(1-\frac{5}{x}) + 1, x > 5 \\ \neg\exists, x \le 5 \end{cases}$

Задача 13

Найти сумму ряда:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+5)(x^2)^n$$

Разложим этот ряд на сумму двух более простых рядов:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+5)(x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty}n(x^2)^n + 5\sum_{n=0}^{\infty}(x^2)^n .$$

Произведем замену переменных $y = x^2$

Найдем $A(y) = \sum_{n=0}^{\infty}ny^n$. Заметим, что $A(y)$ есть производная от функции $B(y) = \sum_{n=1}^{\infty}y^n$, умноженная на y:

$$B'(y) = \sum_{n=1}^{\infty}ny^{n-1}$$

$$A(y) = y \cdot B'(y) .$$

Сумма ряда $B(y)$ есть сумма убывающей геометрической прогрессии и поэтому равна $B(y) = \dfrac{y}{1-y}$, при условии, что $|y|<1$. Тогда производная от $B(x)$ такова:

$$B'(y) = \frac{y'(1-y) - y(1-y)'}{(1-y)^2} = \frac{1-y+y}{(1-y)^2} = \frac{1}{(1-y)^2} .$$

Тогда $A(y) = y \cdot B'(y) = y \cdot \dfrac{1}{(1-y)^2} = \dfrac{y}{(1-y)^2}$ при $|y|<1$ и не существует при $|y| \geq 1$:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+5)(x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty}ny^n + 5\sum_{n=0}^{\infty}y^n = \frac{y}{(1-y)^2} + 5\frac{1}{1-y} =$$

$$= \frac{y+5(1-y)}{(1-y)^2} = \frac{5-4y}{(1-y)^2} = \frac{5-4x^2}{(1-x^2)^2}$$

Ответ: $\sum_{n=0}^{\infty}(n+5)x^{2n} = \begin{cases} \dfrac{5-4x^2}{(1-x^2)^2}, |x|<1 \\ \infty, |x| \geq 1 \end{cases}$

Задача 14

Разложить функцию в ряд Тейлора по степеням x:

$$\frac{x^2}{\sqrt{4-5x}}$$

Чтобы решить эту задачу, следует воспользоваться табличными разложениями в степенные ряды. Приведем функцию к виду, удобному для разложения:

$$\frac{x^2}{\sqrt{4-5x}}=\frac{x^2}{2}(1-\frac{5}{4}x)^{-1/2}$$

Воспользуемся табличным разложением для $(1+y)^m$:

$$\frac{x^2}{2}(1-\frac{5}{4}x)^{-1/2}=\frac{x^2}{2}\left[1+\left(-\frac{5}{4}x\right)\right]^{-1/2}=\frac{x^2}{2}\left[1+\frac{1}{2}\cdot\frac{5x}{4}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{25}{16}x^2+\ldots+\frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)\ldots(-\frac{1}{2}-n+1)}{n!}\left(-\frac{5}{4}x\right)^n+\ldots\right]=$$

$$=\frac{x^2}{2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)\ldots(-\frac{1}{2}-n+1)}{n!}\left(-\frac{5}{4}x\right)^n=$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)\ldots(-\frac{1}{2}-n+1)}{n!}\left(-\frac{5}{4}\right)^n x^{n+2} =$$

$$= \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\prod_{m=0}^{n-1}\frac{(-\frac{1}{2}-m)}{n!}\left(-\frac{5}{4}\right)^n x^{n+2}$$

Ответ: $\frac{x^2}{\sqrt{4-5x}} = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\prod_{m=0}^{n-1}\frac{(-\frac{1}{2}-m)}{n!}\left(-\frac{5}{4}\right)^n x^{n+2}$

Задача 15

Вычислить интеграл с точностью до 0,001:

$$I = \int_0^{0,1} \sin(100x^2)dx$$

Разложим подынтегральное выражение в ряд Тейлора по x:

$$\int_0^{0,1} \sin(100x^2)dx = \int_0^{0,1} \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(100x^2)^{2n+1}}{(2n+1)!} \right] dx$$

Так как интеграл суммы равен сумме интегралов, то возьмем приведенный выше интеграл почленно. Результат будет выглядеть следующим образом:

$$\int_0^{0,1} \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(100x^2)^{2n+1}}{(2n+1)!} \right] dx = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot 100^{2n+1} \cdot \frac{x^{4n+3}}{4n+3} \right] \Bigg|_0^{0,1} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\underbrace{\frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot 100^{2n+1} \cdot \frac{0,1^{4n+3}}{4n+3}}_{a_N} \right]$$

У нас получился знакопеременный ряд. Чтобы вычислить интеграл с заданной точностью, достаточно найти сумму этого ряда до члена, по модулю меньшего, чем 0,001. Таким образом, нам нужно найти N, удовлетворяющее следующему неравенству:

$$\left| \frac{(-1)^N}{(2N+1)!} \cdot 100^{2N+1} \cdot \frac{0,1^{4N+3}}{4N+3} \right| < 0,001$$

Искать N будем следующим образом:

$$|a_1| \approx 0{,}0024 > 0{,}001$$

$$|a_2| = 0{,}000076 < 0{,}001 \Rightarrow N = 2$$

Тогда:

$$I \approx \sum_{n=0}^{2} \left[\frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot 100^{2n+1} \cdot \frac{0{,}1^{4n+3}}{4n+3} \right] \approx 0{,}031$$

Ответ: $I = 0{,}031 \pm 0{,}001$