基础物理实验报告

测量金属的杨氏模量

姓　　名:	赵启渊
学　　院:	工学院
学　　号:	2000011153
分　　组:	第 1 组 7 号
日　　期:	2022 年 4 月 27 日
指导教师:	刘春玲 夏颖

实验八

测量金属的杨氏模量

赵启渊 2000011153

1 数据及处理

1.1 CCD 成像系统测定杨氏模量

1.1.1 相关数据的测量

在调试好实验装置之后，称量每个砝码的重量，并测量金属丝受外力拉伸后的伸展变化数据，再测量金属丝长 L 和金属丝直径 d。其中，有 $\delta L = (\bar{r}_{i+5} - \bar{r}_i)$

表 1: CCD 法测量金属丝受外力拉伸后的伸展变化数据表

i	m_i/g	r_i/cm	r_i'/cm	$\bar{r}/cm$	$\delta L/cm$
0	0	0.235	0.235	0.235	
1	199.96	0.235	0.235	0.235	
2	199.53	0.245	0.245	0.245	
3	199.76	0.255	0.255	0.255	
4	200.41	0.265	0.265	0.265	
5	199.93	0.280	0.275	0.278	0.043
6	200.06	0.290	0.290	0.290	0.055
7	199.91	0.300	0.300	0.300	0.055
8	199.97	0.315	0.310	0.312	0.057
9	199.96	0.325	0.325	0.325	0.060

金属丝长 L = 100.00 - 21.10 = 78.90 cm

表 2: 测量金属丝直径数据表

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d'/cm	0.0321	0.0321	0.0322	0.0323	0.0321	0.0325	0.0324	0.0323	0.0322	0.0324

测量得到 $d_0 = 0.0000$ cm, 上面有 $d' = d - d_0$
计算得

$$\bar{d'} = 0.0323cm$$

1.1.2 记录一次测量数据的不确定度

$$e_L = 0.1cm$$

1.1.3 用逐差法和最小二乘法分别处理数据

使用最小二乘法处理 $\bar{r} - m$ 可以得到

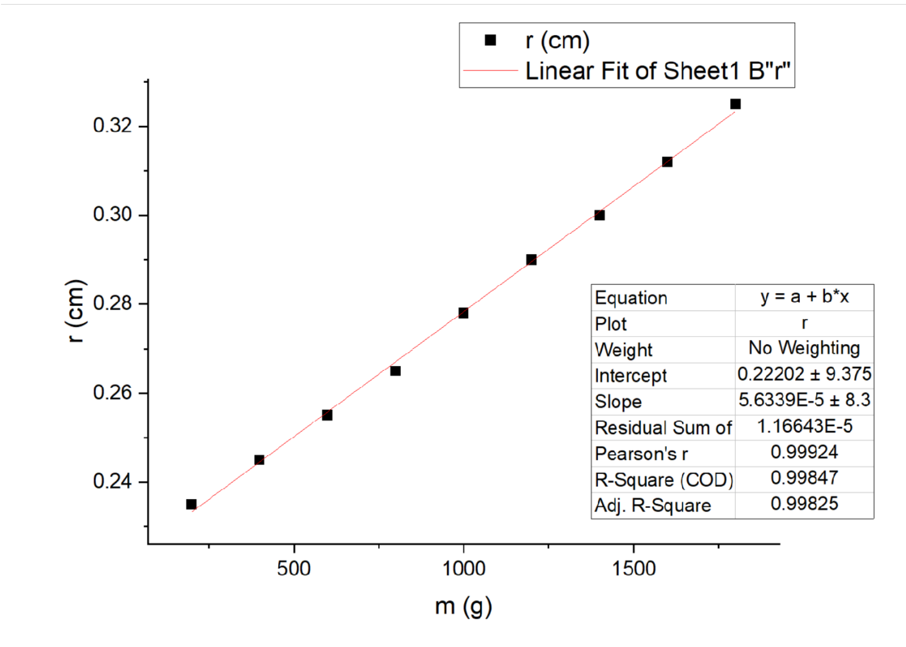

图 1: 测得 $\bar{r} - m$ 关系图

其中可以得到

$$a = 5.63 * 10^{-5}$$

$$b = 0.222$$

$$r = 0.99924$$

使用逐差法处理数据

$$\begin{aligned}\bar{\delta L} &= \frac{(\bar{r_6} - \bar{r_1}) + (\bar{r_7} - \bar{r_2}) + (\bar{r_8} - \bar{r_3}) + (\bar{r_9} - \bar{r_4})}{4} \\ &= \frac{0.055 + 0.055 + 0.057 + 0.060}{4} \\ &= 0.057cm\end{aligned}$$

还有

$$\begin{aligned}\bar{\delta m} &= \frac{(\bar{m_6} - \bar{m_1}) + (\bar{m_7} - \bar{m_2}) + (\bar{m_8} - \bar{m_3}) + (\bar{m_9} - \bar{m_4})}{4} \\ &= \frac{999.69 + 1000.07 + 1000.28 + 999.83}{4} \\ &= 999.97g\end{aligned}$$

1.1.4 计算杨氏模量及其不确定度

在计算时发现，第一组的数据偏离过大，当舍去第一组数据时，计算得到

$$\bar{\delta L} = 0.057cm$$

这里 $g = 9.8012N/kg$

$$\bar{F} = \bar{\delta m} * g = 9.8009N$$

其中有

$$\delta m = m_{i+5} - m_i$$

有杨氏模量的计算公式有

$$\begin{aligned}E &= \frac{F * L}{S * \delta L} \\ &= \frac{F * L * 4}{\pi * d^2 * \delta L} \\ &= 1.66 * 10^{11} N/m^2\end{aligned}$$

1. 计算 $\bar{d}'$ 的不确定度：

其中平均值的标准差计算使用

$$\sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{n}\left(N_j - \bar{N}\right)^2}{n\left(n-1\right)}}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{9} * 10^{-8}} cm$$

$$= 4.71 * 10^{-5} cm$$

考虑仪器允差之后的标准差计算使用

$$\sqrt{\frac{\sum_{j=}^{n}\left(N_j - \bar{N}\right)^2}{n\left(n-1\right)} + \left(\frac{e}{\sqrt{3}}\right)^2}$$

这里 $e_d = 0.004mm$

$$\sigma_d = \sqrt{\frac{2}{9} * 10^{-8} + \frac{0.0004^2}{3}}$$

$$= 2.36 * 10^{-4} cm$$

这里可以得到

$$\bar{d}' \pm \sigma_d = 0.0323 \pm 0.0002 cm$$

2. 计算 $\bar{m}$ 的不确定度：

其中平均值的标准差计算使用

$$\sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{n}\left(N_j - \bar{N}\right)^2}{n\left(n-1\right)}}$$

$$= \sqrt{\frac{0.20410}{4 * 3}} g$$

$$= 0.13042 g$$

考虑仪器允差之后的标准差计算使用

$$\sqrt{\frac{\sum_{j=}^{n}\left(N_j - \bar{N}\right)^2}{n\left(n-1\right)} + \left(\frac{e}{\sqrt{3}}\right)^2}$$

这里 $e_m = 0.02g$

$$\sigma_m = \sqrt{\frac{0.20410}{4 * 3} + \frac{0.02^2}{3}}$$

$$= 0.13093g$$

这里可以得到

$$\bar{m} \pm \sigma_m = 999.97 \pm 0.13g$$

3. 计算 L 的不确定度：

$$e_L = 0.1cm$$

4. 计算 $\bar{\delta L}$ 的不确定度：

其中平均值的标准差计算使用

$$\sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{n}\left(N_j - \bar{N}\right)^2}{n\,(n-1)}}$$

$$= \sqrt{\frac{17}{4*3}} * 10^{-6} cm$$

$$= 1.19 * 10^{-3} cm$$

考虑仪器允差之后的标准差计算使用

$$\sqrt{\frac{\sum_{j=}^{n}\left(N_j - \bar{N}\right)^2}{n\,(n-1)} + \left(\frac{e}{\sqrt{3}}\right)^2}$$

这里 $e_\delta L = 0.005cm$

$$\sigma_\delta L = \sqrt{\frac{17}{4*3} * 10^{-6} + \frac{0.05^2}{3}}$$

$$= 3.12 * 10^{-3} cm$$

这里可以得到

$$\bar{\delta L} \pm \sigma_\delta L = 0.057 \pm 0.003cm$$

根据杨氏模量的公式

$$E = \frac{m * g * L * 4}{\pi * d^2 * \delta L}$$

由求导得到相对不确定度公式

$$\frac{\sigma_E}{E} = \sqrt{\left(\frac{\partial \ln(E)}{\partial \bar{d'}} * \sigma_{\bar{d'}}\right)^2 + \left(\frac{\partial \ln(E)}{\partial \bar{m}} * \sigma_{\bar{m}}\right)^2 + \left(\frac{\partial \ln(E)}{\partial L} * \sigma_L\right)^2 + \left(\frac{\partial \ln(E)}{\partial \bar{\delta L}} * \sigma_{\bar{\delta L}}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{2 * \sigma_{\bar{d'}}}{\bar{d'}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{\bar{m}}}{\bar{m}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_L}{L}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{\bar{\delta L}}}{\bar{\delta L}}\right)^2}$$

总的不确定度

$$\sigma_E = E * 0.0541$$

$$\sigma_E = 0.0898 * 10^{11} Pa$$

这里可以得到

$$E \pm \sigma_E = 1.66 * 10^{11} \pm 0.09 * 10^{11} Pa$$

还可以使用最小二乘法分析不确定度：

$$\delta L = \frac{4 * g * L}{\pi * d^2 * E} * m$$

因此有

$$\bar{r} = \frac{4 * g * L}{\pi * d^2 * E} * m$$

所以根据上面的计算

$$k = \frac{4 * g * L}{\pi * d^2 * E} = a = 5.63 * 10^{-5} cm/g$$

$$r = 0.99924$$

所以有

$$\frac{\sigma_k}{k} = \sqrt{\frac{\frac{1}{r^2} - 1}{n - 2}}$$

$$\frac{\sigma_k}{k} = 0.014744$$

$$\sigma_k = 0.0830 * 10^{-5} cm/g$$

从 k 的值计算 E，可以得到

$$k = \frac{4 * g * L}{\pi * d^2 * E}$$

$$E = 1.68 * 10^{11} Pa$$

又因为

$$E = \frac{4 * g * L}{\pi * d^2 * k}$$

$$\frac{\sigma_E}{E} = \sqrt{(\frac{\partial \ln(E)}{\partial \bar{d'}} * \sigma_{\bar{d'}})^2 + (\frac{\partial \ln(E)}{\partial L} * \sigma_L)^2 + (\frac{\partial \ln(E)}{\partial k} * \sigma_k)^2}$$

$$= \sqrt{(\frac{2 * \sigma_{\bar{d'}}}{\bar{d'}})^2 + (\frac{\sigma_L}{L})^2 + (\frac{\sigma_k}{k})^2}$$

总的不确定度

$$\sigma_E = E * 0.0193$$

$$\sigma_E = 0.0324 * 10^{11} Pa$$

这里可以得到

$$E \pm \sigma_E = 1.68 * 10^{11} \pm 0.03 * 10^{11} Pa$$

1.2 梁的弯曲测定杨氏模量

1.2.1 相关数据的测量

在调试好实验装置之后，称量每个砝码的重量，并测量金属梁中点受外力影响后的挠度变化数据，再测量金属梁长 l 和金属梁厚 h，金属梁宽度 a。其中，有 $\delta L = (\bar{r}_{i+3} - \bar{r}_i)$

表 3: 梁的弯曲法测量金属梁中点受外力拉伸后的挠度变化数据表

i	m_i/g	r_i/cm	r_i'/cm	$\bar{r}/cm$	λ/cm
0	0	4.2819	4.1234	4.2026	
1	199.96	4.1865	4.0181	4.1023	
2	199.53	4.0889	3.9111	4.0000	
3	199.76	3.9882	3.8143	3.9012	0.3012
4	200.41	3.8846	3.7111	3.7978	0.3045
5	199.93	3.7791	3.6119	3.6955	0.3045
6	200.06	3.6344	3.5211	3.5778	0.3234

金属梁长 l = 22.35 cm

表 4: 测量金属梁宽度 a 数据表

i	1	2	3	4	5	6
a'/cm	1.185	1.200	1.200	1.200	1.200	1.190

测量得到 $a_0 = 0.000$ cm, 上面有 $a' = a - a_0$
计算得

$$\bar{a'} = 1.196cm$$

表 5: 测量金属梁宽度 h 数据表

i	1	2	3	4	5	6
h'/cm	0.1360	0.1360	0.1360	0.1356	0.1359	0.1358

测量得到 $h_0 = 0.050$ cm, 上面有 $h' = h - h_0$
计算得

$$\bar{h'} = 0.1359cm$$

1.2.2 记录一次测量数据的不确定度

$$e_l = 0.1cm$$

1.2.3 用逐差法和最小二乘法分别处理数据

使用最小二乘法处理 $\bar{r} - m$ 可以得到

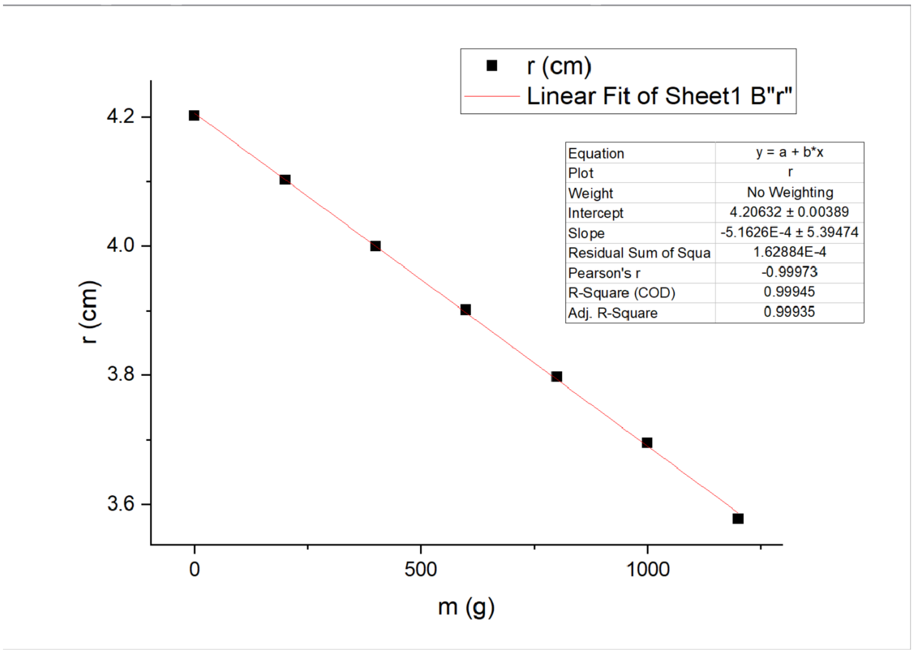

图 2: 测得 $\bar{r} - m$ 关系图

其中可以得到

$$a = -5.1626 * 10^{-4}$$

$$b = 4.2063$$

$$r = -0.99973$$

使用逐差法处理数据

$$\begin{aligned}\bar{\lambda} &= \frac{(\bar{r_6} - \bar{r_3}) + (\bar{r_5} - \bar{r_2}) + (\bar{r_4} - \bar{r_1}) + (\bar{r_3} - \bar{r_0})}{4} \\ &= \frac{0.3234 + 0.3045 + 0.3045 + 0.3014}{4} \\ &= 0.3035cm\end{aligned}$$

还有

$$\begin{aligned}\bar{\delta m} &= \frac{(\bar{m_6} - \bar{m_3}) + (\bar{m_5} - \bar{m_2}) + (\bar{m_4} - \bar{m_1}) + (\bar{m_3} - \bar{m_0})}{4} \\ &= \frac{599.25 + 599.70 + 600.10 + 600.40}{4} \\ &= 599.86g\end{aligned}$$

1.2.4 计算杨氏模量

根据公式计算得到

$$\bar{\lambda} = 0.3035cm$$

这里 $g = 9.8012N/kg$

$$\bar{F} = \bar{\delta m} * g = 5.8793N$$

其中有

$$\delta m = m_{i+3} - m_i$$

有杨氏模量的计算公式有

$$\begin{aligned} E &= \frac{F * L}{S * \delta L} \\ &= \frac{F * l^3}{4 * \lambda * a * h^3} \\ &= 1.801 * 10^{11} N/m^2 \end{aligned}$$

2 分析与讨论

2.1 分析开始加第砝码时 r 的变化量大于正常的变化量

1. 在调试设备时，金属丝上下夹子未夹紧，在开始加第一、二个砝码时金属丝有一定的下滑。

2. 开始加第一、二个砝码时，金属丝有部分弯曲，第一、二个砝码不仅仅会拉长金属丝，还会把它拉直。

2.2 分析开始加第砝码时 r 的变化量小于正常的变化量

1. 开始加第一、二个砝码时，金属丝发生扭转，使金属丝拉长量减少。

2. 在调节设备时，没有调节好，使得开始加第一、二个砝码时，竖直方向有摩擦力的影响，使金属丝拉长量减少。

3 收获与感想

1. 在实验的过程中，要清楚逐差法的内核，笔者在计算 CCD 法测量的数据时，因为疏忽，计算了六个砝码的平均重量，但拉伸是在五个砝码的情况下发生的，因此导致 E 过大，更正错误之后，E 的数值是正常的。注意逐差法在以后的实验中也有重要应用。

2. 在 CCD 法测量的数据时，笔者在放第一个砝码时，金属丝没有发生伸长，发生了上面讨论的错误，以后应该注意。但在出现异常数据之后，将该数据舍去，笔者仍然得到了符合实际的 E 值。在以后的数据处理中，应该注意异常值的舍去。