

## Естественные преобразования

13 мая 2017 г.

1. Рассмотрим функторы  $F, G : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ . Пусть  $\theta$  – естественное преобразование между функторами  $F$  и  $D$ . Докажите, что  $\theta$  – изо в категории функторов  $\mathbf{Fun}(\mathbf{C}, \mathbf{D})$  тогда и только тогда, когда каждый компонент  $\theta$  является изо в категории  $\mathbf{D}$ .
2. Пусть  $F, G$  – функторы из категории **Rings** в категорию **Monoids**,  $F$  каждому кольцу  $R$  сопоставляет мультипликативный моноид обратимых матриц порядка  $n$  над  $R$ , а  $G$  сопоставляет мультипликативный моноид элементов самого кольца (см. последний пример на лекции). Докажите, что определитель является естественным преобразованием между  $F$  и  $G$ . Следом матрицы называется сумма её диагональных элементов. Является ли след матрицы естественным преобразованием между функтором  $F$  и функтором  $G$ ?
3. Рассмотрите предыдущий пример в случае, когда  $F$  переводит кольцо  $R$  в мультипликативный моноид необязательно обратимых матриц над  $R$ .
4. Приведите пример неестественного преобразования.
5. Предъявите естественное преобразование между функтором  $- \times (B \times C) \simeq (- \times B) \times C$ .
6. \* Разберите пример 7.12 в книге Awodey Category Theory. Подумайте, как на основе этого примера построить нетривиальный пример неестественного преобразования.
7. \* Разберите подобный пример для категории **Sets** после примера 7.12. Докажите, что  $\mu$  – действительно естественное преобразование.