

Конструкции на категориях

18 марта 2017 г.

1. Докажите существование контравариантного функтора $F : \mathbf{Rel} \rightarrow \mathbf{Rel}^{op}$, действующего по правилу:

$$F(A) = A, \quad F(R) = R^{op},$$

где A – объект категории \mathbf{Rel} , а R^{op} – отношение на $B \times A$, определённое по правилу:

$$(b, a) \in R^{op} \iff (a, b) \in R.$$

Напомним, что функтор F называется контравариантным, если для него вместо свойства

$$F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$$

выполняется

$$F(f \circ g) = F(g) \circ F(f),$$

а вместо

$$F(f : A \rightarrow B) = F(f) : F(A) \rightarrow F(B)$$

выполняется

$$F(f : A \rightarrow B) = F(f) : F(B) \rightarrow F(A).$$

2. Докажите, что стрелки в категории \mathbf{Mon} (второй пример на лекции) являются функторами между категориями с одним объектом и элементами моноида в качестве стрелок (первый пример на лекции).
3. Постройте произведение конечных категорий $\mathbf{3} \times \mathbf{2}$.
4. Пусть C, D – объекты категории \mathbf{C} . Пусть есть стрелка $g : C \rightarrow D$. Докажите, что существует функтор $F : \mathbf{C}/C \rightarrow \mathbf{C}/D$, переводящий объект f категории \mathbf{C}/C в $g \circ f$. Куда этот функтор переведёт объекты \mathbf{C}/C ?
5. Является ли категория под объектом C (coslice category) двойственной к категории над этим объектом (slice category)?
6. Пусть P – частично упорядоченное множество (на P существует частичный порядок \leq , то есть рефлексивное, транзитивное и антисимметричное отношение). Категорию \mathbf{P} зададим следующим образом: объектами категории будут являться элементы множества P , а стрелками – элементы отношения частичного порядка, то есть пары $(a, b) : a \leq b$. Пусть $p \in \mathbf{P}$. Опишите структуру категории \mathbf{P}/p .
7. Пусть \mathbf{C} – категория, C – её объект. Постройте функтор $U : \mathbf{C}/C \rightarrow \mathbf{C}$, «забывающий» об объекте C и взятии категории над объектом C (можно ещё сказать обратный к построению категории над C (slice category)).
8. Возьмём функтор U из предыдущего задания. Постройте функтор $F : \mathbf{C}/C \rightarrow \mathbf{C}^{\rightarrow}$, такой, что $\text{dom} \circ F = U$.
9. Постройте функторы из категории $\mathbf{3}$ в $\mathbf{2}$ (обозначим его F_1) и функтор из категории $\mathbf{2}$ в $\mathbf{3}$ (обозначим его F_2). Постройте категории запятой:

$$(F_1 \downarrow F_1), (F_2 \downarrow F_2).$$