

# «Теория категорий»

ЮФУ, мехмат, 2016/2017 учебный год, весенний семестр

## Экзаменационное задание

ЗАДАЧА 1. Объектами категории **Pno** являются тройки  $(A, \alpha, a)$ , где  $A$  — множество,  $\alpha : A \rightarrow A$  — функция,  $a \in A$  — выбранный элемент. Если имеются две такие тройки, то стрелкой

$$f : (A, \alpha, a) \rightarrow (B, \beta, b)$$

является функция  $f : A \rightarrow B$ , сохраняющая структуру в том смысле, что  $f \circ \alpha = \beta \circ f$  и  $f(a) = b$ .

1. Проверьте, что **Pno** действительно является категорией.
2. Покажите, что  $(\mathbb{N}, \text{succ}, 0)$  является объектом ( $\text{succ}$  — это функция увеличения на единицу).
3. Покажите, что для каждого объекта  $(A, \alpha, a)$  существует единственная стрелка

$$(\mathbb{N}, \text{succ}, 0) \rightarrow (A, \alpha, a)$$

и опишите поведение соответствующей ей функции.

4. Найдите в категории **Pno** инициальные и терминальные объекты.

ЗАДАЧА 2. Проверьте, является ли категория множеств с выделенной точкой декартово замкнутой. Напомним, что эта категория содержит в качестве объектов пары  $(A, a \in A)$  со стрелками как функциями, сохраняющими выделенную точку. Что можно сказать относительно категории **Pno**?

ЗАДАЧА 3. Докажите, что вложение Ионеды сохраняет пределы.

ЗАДАЧА 4. Предпорядком называется рефлексивное и транзитивное бинарное отношение. Произвольное множество  $S$  можно превратить в предпорядоченное следующими (тривиальными) способами: в дискретных множествах в качестве отношения используется равенство, а во всех остальных считается, что любые два элемента сравнимы между собой. Пусть **Psets** — категория предпорядков. Опишите левый и правый сопряжённые функторы для забывающего функтора **Psets**  $\rightarrow$  **Sets**.