

Контрольная работа 2

20 мая 2017 г.

1. Рассмотрим функтор $Point_X : \mathbf{1} \rightarrow \mathbf{C}$, переводящий единственный объект категории $\mathbf{1}$ в объект X из \mathbf{C} и единственную единичную стрелку в стрелку 1_X . Пусть в \mathbf{C} есть стрелка $f : A \rightarrow B$, где A и B – объекты категории \mathbf{C} . Докажите, что все компоненты естественного преобразования между функторами $Point_A$ и $Point_B$ совпадают со стрелкой f .
2. Докажите, что расслоенная сумма (pushout) сохраняет эпи.
3. Рассмотрим функторы в категории множеств: $(- \times A), (- \times B)$, где A, B – некоторые множества. Пусть есть стрелка $f : A \rightarrow B$.
 - 1) Заметим, что для любых множеств X, Y при условии существования стрелки $g : X \rightarrow Y$ существует стрелка из $X \times A$ в $Y \times A$ и стрелка из $X \times B$ в $Y \times B$. Постройте эти стрелки. Указание: используйте универсальное свойство для произведений объектов.
 - 2) Докажите, что стрелка $\nu_X : X \times A \rightarrow X \times B$, $\nu(x, a) = (x, f(a))$ задаёт компоненту естественного преобразования между функторами $(- \times A)$ и $(- \times B)$.
4. Чем отличается конус от коконуса и предел от копредела?
5. Пусть $F : \mathbf{2} \rightarrow \mathbf{Sets}$ – функтор, где $\mathbf{2}$ – дискретная категория, то есть не содержащая нетривиальных стрелок. Что будет пределом и копределом типа 2 для функтора F .
6. Что такое экспоненциал? Какая категория называется декартово замкнутой? Докажите, что категория малых категорий \mathbf{Cat} является декартово замкнутой – для этого вы должны предъявить терминальный объект, произведения и экспоненциалы.
7. Есть ли категория, которую Вы всегда мысленно представляли себе, когда слушали лекции, и на примере которой Вы пытались понимать вводимые в курсе понятия? Если да, то опишите её – что в ней является объектами, что стрелками, есть ли там моно, эпи, изо, категорные произведения и суммы и т.д. Почему, как Вы считаете, Вы мыслили именно в рамках этой категории? Если такой категории нет, то попытайтесь ответить на те же вопросы относительно просто самой близкой для Вас с точки зрения понимания категории.