

Элементы и обобщённые элементы. Произведения объектов.

1 апреля 2017 г.

1. Рассмотрим категорию частично упорядоченных множеств **Posets**. Какие из этих пар множеств изоморфны, а какие – нет? Ответ обоснуйте.
  - 1)  $A = \{x_1, x_2, x_3 : x_1 \leq x_2 \leq x_3\}, B = \{y_1, y_2, y_3 : y_1 \leq y_2 \leq y_3\},$
  - 2)  $A = \{x_1, x_2, x_3 : x_1 \leq x_2 \leq x_3\}, B = \{y_1, y_2, y_3 : y_1 \leq y_3 \leq y_2\},$
  - 3)  $A = \{x_1, x_2, x_3, x_4 : x_1 \leq x_2, x_3 \leq x_2 \leq x_4\}, B = \{y_1, y_2, y_3, y_4 : y_1 \leq y_2, y_3 \leq y_2, y_4 \leq y_2\}.$
2. Пусть **C** – категория,  $A$  и  $B$  – её объекты. Рассмотрите категорию  $\mathbf{C}_{A,B}$ , построенную следующим образом: объектами в ней будут тройки  $(X, x_1, x_2) : x_1 : X \rightarrow A, x_2 : X \rightarrow B$ , а стрелками между объектами  $(X, x_1, x_2)$  и  $(Y, y_1, y_2)$  – стрелки  $f : X \rightarrow Y$  из категории **C**, такие, что  $y_1 \circ f = x_1, y_2 \circ f = x_2$ . Покажите, что в этой категории существует терминальный объект, если в **C** существует произведение объектов  $A$  и  $B$ .
3. Докажите коммутативность и ассоциативность произведения объектов.
4. Докажите, что если в категории **C** существует терминальный объект  $1$ , то для любого объекта  $A$ :  $A \times 1 \simeq 1 \times A \simeq A$ .
5. Что будет произведением объектов в категории групп **Group**?
6. Пусть  $C$  – произведение объектов  $A$  и  $B$ , то есть  $C = A \times B$ . Пусть  $C \simeq D$ . Докажите, что  $D = A \times B$ .
7. Пусть  $A, B, C$  – объекты категории **C**. Докажите, что  $(A \times B) \times C \simeq A \times (B \times C)$ .