Моно, эпи и изо. Инициальные и терминальные объекты.

25 марта 2017 г.

1. Как связана категория под объектом C (coslice category) с категорией над этим объектом (slice category)? Можно ли здесь использовать понятие изоморфности?

2. Докажите, что в **Sets** моно являются инъективными отображения, эпи – сюръективными, а изо – биективными.

3. Пусть **P** – категория частично упорядоченного множества, где стрелки – элементы отношения частичного порядка. Докажите, что все стрелки там являются и моно, и эпи одновременно. Когда они являются изо?

4. 1) Обозначим стрелку, обратную к изоморфизму f, как f^{-1}. Докажите, что f^{-1} – изоморфизм. Чему тогда равна стрелка $(f^{-1})^{-1}$?

   2) Является ли 1_A изоморфизмом? Если да, какая стрелка к ней обратная?

   3) Пусть $f : A \to B, g : B \to C$ – изоморфизмы. Является ли изоморфизмом gf?

5. Опишите моно, эпи и изо в категории моноидов **Mon**.

   Указание: Awodey, example 2.3.

6. Рассмотрим категорию колец. Рассмотрим стрелку $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$, действующую следующим образом: $f(m) = m, m \in \mathbb{Z}$. Докажите, что f – эпи. Сюръективен ли он? Сделайте вывод.

   Указание: напомним, что в категории колец стрелками являются гомоморфизмы колец, то есть отображения, для которых выполняется: $f(ab) = f(a)f(b), f(a + b) = f(a) + f(b)$.

7. Какие объекты будут инициальными и терминальными в категории групп и колец?

8. Найдите терминальный объект в категории над объектом $\mathbf{C}/C$.

9. Проверьте, что введённая на лекции категория булевых алгебр с гомоморфизмами алгебр в качестве композиции действительно является категорией. Напомним, что для гомоморфизма f булевых алгебр должно выполняться:

   $$f(a \vee b) = f(a) \vee f(b), f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b), f(0) = 0, f(1) = 1.$$

   Покажите, что $f(\neg a) = \neg f(a)$.

   Докажите тот факт, что фильтр F – ультрафильтр в алгебре B в том и только том случае, когда для любого элемента a алгебры B или a принадлежит F, или $\neg a$, но не одновременно. На основе этого докажите, что для любой стрелки $p : B \to \mathbf{2}$ прообраз $p^{-1}(1)$ является ультрафильтром.

   Напомним, что фильтром в булевой алгебре B называется собственное подмножество $F \subset B$, такое, что

   $$\forall a, b \in F \ a \wedge b \in F,$$
   $$a \in F,\ a \leqslant b \ \to \ b \in F.$$

   Ультрафильтром называется фильтр F, такой, что при добавлении элемента $s \notin F$ к F замыкание множества $F \cup \{s\}$ по операции конъюнкции совпадёт со всей алгеброй B.

10. ∗ Покажите, как именно доказать эквивалентность аксиомы выбора и утверждения, что каждый эпи расщепляется.

11. ∗ Пусть $\mathbf{Fields}_p$ – категория полей характеристики p с гомоморфизмами полей как колец в качестве стрелок. Каковы инициальный и терминальный объекты этой категории? Есть ли инициальные и терминальные объекты в категории полей характеристики 0?