

Категория. Функторы

11 марта 2017 г.

1. Объектами **Posets** являются частично упорядоченные множества, а стрелками – монотонные функции между ними. Докажите, что **Posets** – категория.
2. Объектами **Rel** являются множества, а стрелками – отношения на $A \times B$, то есть подмножества этого декартова произведения.
 - 1) Докажите, что **Rel** – категория.
 - 2) Докажите существование функтора $G : \mathbf{Sets} \rightarrow \mathbf{Rel}$, действующего по правилу:

$$G(A) = A, \quad G(f) = \{(a, f(a)) \in A \times B : a \in A\},$$

где A – объект категории **Sets**, а f – стрелка из этой категории.

- 2) Докажите существование функтора $G : \mathbf{Rel} \rightarrow \mathbf{Rel}^{op}$, действующего по правилу:

$$G(A) = A, \quad G(R) = R^{op},$$

где A – объект категории **Rel**, а R^{op} – отношение на $B \times A$, определённое по правилу:

$$(b, a) \in R^{op} \iff (a, b) \in R.$$

3. Пусть на множестве P введён предпорядок. Объектами **Preorder_P** являются элементы множества P , а стрелками – элементы отношения предпорядка. Докажите, что **Preorder_P** – категория.

Пусть есть категории **Preorder_P**, **PreOrder_S**, где P и S – частично упорядоченные множества. Докажите, что монотонные функции из P в S являются функторами из **Preorder_P** в **PreOrder_S**.

4. Пусть X – множество. Объектами **Dis**(X) являются элементы множества X , а стрелками – только стрелки вида $1_x, x \in X$. Докажите, что **Dis**(X) – категория. Покажите, что категория **Dis**(X) – частный случай категории **Posets**.
5. Постройте конечные категории **4**, **5**. Единственен ли вариант построения такой категории? Сколько неединичных стрелок в построенной Вами категории? Можно ли построить вариант категории с большим числом стрелок?

Указание: интересно было бы свести эти вопросы к вопросам теории графов.

6. * («Алгебраическая дребедень») Рассмотрите категории, в которых объектами будут являться группы, кольца, векторные пространства, модули. Что будет стрелками в этих категориях?