

Пределы и копределы. Декартово замкнутые категории

6 мая 2017 г.

1. Пусть $\mathbf{J} = \mathbf{1}$, $F : \mathbf{J} \rightarrow \mathbf{C}$ – диаграмма типа \mathbf{J} . Вычислите $\varprojlim D_j$ (предел).
2. Пусть $\mathbf{J} = \mathbf{2}$, где нет нетривиальных стрелок. Пусть $F : \mathbf{J} \rightarrow \mathbf{C}$ – диаграмма типа \mathbf{J} в \mathbf{C} . Вычислите $\varinjlim D_j$ (копредел).
3. Пусть $\mathbf{J} = \mathbf{3}$ с тремя объектами 1, 2, 3 и нетривиальными стрелками $1 \rightarrow 2$, $1 \rightarrow 3$. Пусть $F : \mathbf{J} \rightarrow \mathbf{C}$ – диаграмма типа \mathbf{J} в \mathbf{C} . Вычислите $\varinjlim D_j$ (копредел).
4. Пусть \mathbf{J} – пустая категория. Что будет являться диаграммой типа \mathbf{J} в другой категории \mathbf{C} ? Что будет являться пределом и копределом?
5. Пусть в \mathbf{C} – есть все пределы типа \mathbf{J} . Пусть $F, D : \mathbf{J} \rightarrow \mathbf{C}$ – диаграммы типа \mathbf{J} в \mathbf{C} . Набор стрелок $\sigma_i : F(i) \rightarrow G(i)$, таких, что $\sigma_j \circ F(i \rightarrow j) = G(i \rightarrow j) \circ \sigma_i$, будем считать стрелкой между диаграммами F и D . Докажите, что все такие диаграммы и стрелки между ними образуют категорию диаграмм $\mathbf{Diagrams}(\mathbf{J}, \mathbf{C})$, а взятие предела $\varprojlim D_j$ является функтором из категории диаграмм в категорию \mathbf{C} .
6. Докажите, что в декартово замкнутой категории $(A \times B)^C \simeq A^C \times B^C$.
7. Является ли декартово замкнутой категория моноидов?
8. (Нерешённое с прошлого занятия) Докажите, что расслоенные произведения сохраняют моно. То есть если дано расслоенное произведение:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{p_1} & B \\ p_2 \downarrow & & \downarrow f \\ A_f & \xrightarrow{g} & B_g \end{array}$$

то если g – моно, то и p_1 – моно, если f – моно, то и p_2 – моно.