本科生毕业论文

题目： **Lubin-Tate 理论与零点定理**

Lubin-Tate Theory and Nullstellensatz Theorem

姓　　名： 李振鹏

学　　号： 2000012950

院　　系： 数学科学学院

专　　业： 数学与应用数学

导师姓名： 阳恩林

二〇二四年　6月

版权声明

摘要

本文基于 Jacob Lurie 椭圆上同调理论的相关构造，复原了球形 Witt 向量、Lubin-Tate 理论等等，并且额外论证了其自由性与余自由性。最终通过 Quillen 小对象定理证明了代数闭域诱导的 Lubin-Tate 理论的零点定理以及每一个 T(n)-局部交换环谱上的点的存在性。从而完成了红移猜想的最后一半不等式。

关键词：交换环谱，球形 Witt 向量，Lubin-Tate 理论，色展零点定理，红移猜想

ABSTRACT

Based on Lurie's construction of Elliptic Cohomology, I recover people's work on spherical Witt vectors and Lubin-Tate theories. Furthermore, I complete the discussion on the freeness and cofreeness hidden behind them. One direct corollary is that only the Lubin-Tate theories of algebraic closed fields can satisfy Nullstellensatz theorem, and that every T(n)-local commutative ring spectrum admits a point of this form. This is quite nontrivial because we could thus show the other direction of the inequality predicted by redshift conjecture.

KEY WORDS: Commutative ring spectra, spherical Witt vectors, Lubin-Tate theory, chromatic Nullstellensatz theorem, and redshift conjecture

目　录

第一章 引言

Lubin-Tate 理论一直是色展同伦论中最为重要的谱之一。早期通过 Landweber 定理构造的谱仅仅只是稳定同伦范畴中的交换代数对象，这对现如今代数拓扑的理论是致命的缺憾。但是上个世纪 Goerss-Hopkins-Miller 利用精细定义的障碍类理论，成功把 Lubin-Tate 谱的同伦交换提升到了同伦凝聚的意义上，亦即 $\mathbb{E}_\infty$-环谱。这使得人们可以更加范畴化地去考虑色展同伦论。随后，Lurie 系统性的无穷范畴与导出代数几何工作，让人们更加深刻地意识到了代数拓扑与代数几何的联系。——环给出仿射概形，粘合得到一般概形，取特殊的格罗滕迪克拓扑可以得到各类代数空间。那么，利用函子的观点，$\mathbb{E}_\infty$-环谱显然也可以作为这一套流程的输入。于是他本人便在椭圆上同调系列论文中详尽发展了相关的对象，例如阿贝尔簇、p 可除群等等。而在 [10] 中，他成功地使用万有的形变分类环的某一局部化，复原了 p 可除群上的 Lubin-Tate 理论。由于无穷范畴的语言本身就与同伦凝聚的性质兼容，这样的构造毫无疑问是这是 $\mathbb{E}_\infty$ 的。而大量代数几何概念的出现也是传统代数拓扑学家始料未及的。自从之后，深入研究这些理论与色展同伦论给出的 $K(n)$、$T(n)$ 谱关系的工作方兴未艾。本文也是这么一篇介绍 22 年左右若干工作的综述。

传统 Lubin-Tate 理论除了是形式群形变的万有对象（经典定义与 Lurie 构造均与此有关）外，也可以理解成 Witt 向量的一个基变换。为了把 Lubin-Tate 理论提升到无穷范畴层面，我们可以先构造无穷范畴版本的 Witt 向量，亦即球形 Witt 向量。随后再利用基变换得到推广的 Lubin-Tate 理论。注意到（球形）Witt 向量与倾斜构成了一个经典的伴随对。我们也可以证明这一伴随在无穷范畴中成立，并且给出了余完备化/自由性。那么复合后，便是 Lubin-Tate 理论的自由性。这就是 [1, Section 2] 的主定理，也是本文定理3.7。

另一方面，[7] 中证明了 Witt 向量具有内蕴的 δ-结构，遗忘与 Witt 向量构成另一对伴随，并且是完备化/余自由性。那么我们当然试图将之推广到 Lubin-Tate 理论上。但限于技术条件，我们只能在同伦群上构造，并且此时信息已经十分复杂。具体陈述可参考3.8。

即便如此，大量出现的伴随对与自然态射使得原先遥不可及的对象产生了联系。这促成了我们以代数几何的视角去理解 $T(n)$-局部的 $\mathbb{E}_\infty$-环谱。我们知道，代数闭域上有希尔伯特零点定理。类似地，我们希望代数闭域的

Lubin-Tate 理论也能满足范畴化的零点定理。假如一切顺利，我们便可以思考环谱的“点”。而本文最终就要解释如下的两个结论。

定理 A (希尔伯特零点定理，定理4.4). $T(n)$-局部的 $\mathbb{E}_\infty$-谱满足节4的零点定理，当且仅当它来自某个代数闭域的 Lubin-Tate 理论 $E(L)$。

定理 B (闭点的存在性，定理4.1). 对于非零的 $T(n)$-局部的 $\mathbb{E}_\infty$-谱 R，总存在 $R \to E(L)$ 的环态射，其中后者是某个代数闭域的 Lubin-Tate 理论。

尽管从代数几何的角度来看，这两个结论与后续分析概形性质等等毫无关系，但他们已经可以辅助约化大量的困难定理。本文最后就要由此补完红移猜想（定理5.4）的最后一块拼图。

本文的思路如下：第二节发展全文的核心输入，球形 Witt 向量的性质；第三节应用它来解释 Lubin-Tate 理论的自由性，随后简要摘录有关余自由性的命题；第四节开始证明零点定理与点的存在性；最后验证红移猜想。实际上点的存在性是第四节中最难的定理，他涉及到了超限地去调整一个可能非常糟糕的谱。而这对应的范畴论引理便是 Quillen 的小对象定理。为了利用小对象定理，我们需要合适的测试映射，其中一个关键映射，便来自余自由性给出的自然态射。

以下是我们行文的概念与记号约定：

- 我们全文都固定一个高度 n 与素数 p。高度 $n > 0$ 时，所有的域都考虑特征 p 的完美域；高度 0 时，考虑特征 0 的域。
- 我们一般简称无穷范畴为范畴。
- 代数、环谱、$\mathbb{E}_\infty$-环谱，都指的是谱这一无穷范畴中的交换代数对象。用 $\mathrm{CAlg}(-)$ 记之。作为对比，CRing 指代所有离散的（也称为经典的）环。
- 对于任意 $R \in \mathrm{CAlg}_R(\mathrm{Sp}_{T(n)})$，$R$-代数的范畴也记作 $\mathrm{CAlg}_R^\wedge$。
- 对于环谱 R，$R\{z^i\}$ 指（局部化后的）在 π_i 上有自由变量 z^i 的自由代数。
- Sp_p 指 p-完备的谱范畴。
- 对于稳定无穷范畴 $\mathcal{C}$，其上的态射空间可以自然地提升到 Sp 上，记为 $\mathrm{Map}_{\mathcal{C}}^{\mathrm{Sp}}(-,-)$。

- Perf 指代特征 p 的完美代数，Perf_k 指代完美的 k-代数。
- $\mathrm{Perf} \subset \mathrm{CRing}$ 有左伴随余极限完美化（记为 $(-)^\sharp$）与右伴随极限完美化（称为倾斜（tilt），记为 $(-)^\flat$）。

第二章 球形 Witt 向量

在早期应用 Landweber 定理构造一系列复定向推广上同调理论时，Witt 向量就因为与形变理论的联系而大受青睐。例如，[9, Lecture 21] 中

命题 2.1. *k 是特征 p 完美域，其上有高度 n 的形式群 f。对任一 k 的无穷小加细，记 $\mathrm{Der}(A)$ 为 f 在 A 上的形变。则 Witt 向量的形式幂级数环上有一个万有形变，使得如下自然同构存在：*

$$\mathrm{Hom}_{/k}(W(k)[[v_1, v_2, \cdots, v_{n-1}]], A) \cong \mathrm{Der}(A).$$

因为显然的正则序列 $p, v_1, v_2, \cdots, v_{n-1}$，这一万有形变就会诱导一个复定向上同调理论，统称为 Lubin-Tate 理论，在一定意义上描摹了高度小于等于 n 的 p-局部的形式群叠这一开集的性质。色展同伦论的重要结论，色展收敛定理，就可以看作是这一观察的产物。

然而，如前所述，这样的构造远远不能提供 $\mathbb{E}_\infty$ 的信息。除却 [3] 的障碍类理论与 [10] 的定向形变环，此处我们将介绍利用球形 Witt 向量实现 Lubin-Tate 理论的过程。球形 Witt 向量也是 Lurie 在 [10] 中发展出的对象，可以看作是经典 Witt 向量的提升。我们需要强调，Lurie 的球形 Witt 向量，Lubin-Tate 理论可以对任意 k-完美代数构造，因而我们也理应去思考背后的函子性等等。本节的主定理之一即为如下的伴随对，其中右伴随 $(-)^\flat$ 即为数论中倾斜（tilt）的无穷范畴版本。

定理 2.2. *记 Perf 为特征 p 完美代数的范畴。则存在如下伴随对，其中左伴随也称为球形 Witt 向量。*

$$\mathbb{W}(-) : \mathrm{Perf} \rightleftharpoons \mathrm{CAlg}(\mathrm{Sp}_p) : (-)^\flat.$$

其中 Perf 通过此伴随成为后者的余完备化，右伴随可以由对 π_0/p 上的 Frobenius 映射取逆向极限得到。余完备化的本质像，亦即那些连合（connective）的且使得 $\mathbb{F}_p$ 张量自身后离散完美的环谱。

我们将首先介绍环谱间的加细，给出基本性质例如存在性唯一性定理，随后构造球形 Witt 向量并分析伴随对的性质。

2.1 加细

定义 2.3. A 为一连合 $\mathbb{E}_\infty$-环谱，I 为 $\pi_0(A)$ 上的有限生成理想。记 $A_0 = \pi_0(A)/I$。对于经典环的同态 $f_0 : A_0 \to B_0$，称如下 $\mathbb{E}_\infty$-环间的交换图

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d] & B \arrow[d] \\ A_0 \arrow[r, "f_0"] & B_0 \end{tikzcd}$$

诱导了 f 作为 f_0 的 A-加细，当且仅当

- B 是 I-完备的。
- 典范态射 $\pi_0(B)/I\pi_0(B) \to B_0$ 是同构。
- B 具有如下万有性：对于任意 I-完备的连合 A-$\mathbb{E}_\infty$-代数 R，典范态射

  $$\mathrm{Map}_{\mathrm{CAlg}_A}(B,R) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{CRing}_{A_0}}(B_0, \pi_0(R)/I\pi_0(R))$$

  是等价。

评注 2.4 (唯一性)**.** 由定义立得，加细中定义中的态射 f，包括整个图表，都是在等价意义下唯一的。

评注 2.5 (函子性)**.** 假设有如下 $\mathbb{E}_\infty$-环间图表。

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[d] \\ A' \arrow[r] \arrow[d] & B' \arrow[d] \\ A_0 \arrow[r] & B_0 \end{tikzcd}$$

其中 $A_0 \to B_0$ 是经典环间态射，而 $\pi_0(A) \to \pi_0(A') \to A_0$ 的复合是满的，Ker 记为 I。若 $A \to B$ 已经是加细，而上侧方块使 B' 成为 $A` \otimes_A B$ 的 I-完备化，则 $A' \to B'$ 亦为加细。

本节的主定理即为充足条件下的加细存在定理。

定理 2.6. *A 为一连合 $\mathbb{E}_\infty$-环谱，I 为 $\pi_0(A)$ 上的有限生成理想。记 $A_0 = \pi_0(A)/I$，是 $\mathbb{F}_p$ 代数，且是几乎完美的 A-模，同时使得 Frobnius 映射 φ 平坦。若经典环间的态射 $f_0 : A_0 \to B_0$ 满足如下的相对完美条件，即:*

$$\begin{tikzcd}
A_0 \arrow[r, "f_0"] \arrow[d, "\varphi"] & B_0 \arrow[d, "\varphi"] \\
A_0 \arrow[r, "f_0"] & B_0
\end{tikzcd}$$

是推出图。则相对于 $A_0 \to B_0$ 的加细 $A \to B$ 必定存在。

例 2.7. 取 A 为 $\mathbb{Z}$，$A_0 = \mathbb{F}_p$，B_0 是完美 $\mathbb{F}_p$ 代数。我们便恢复了经典的 Witt 向量。

引理 2.8. *在定理2.6条件下，相对余切复形 L_{B_0/A_0} 退化。*

证明. 如 Lurie 在 [10, Lemma 5.2.8] 所述，平坦性保证了如下基变换是合理的，其中 $A_0^{1/p}$ 等表示的是 Frobnius 诱导的环结构。

$$B_0^{1/p} \otimes_{B_0} L_{B_0/A_0} \cong L_{B_0^{1/p}/A_0^{1/p}}$$

因而，只需证明这一映射本身也是零伦即可。余切复形的定义（作为某一多项式代数分解的 Kähler 微分层的几何实现）表明，我们可以约化到证明

$$B_0^{1/p} \otimes_P L_{P/A_0} \to B_0^{1/p} \otimes_{P^{1/p}} L_{P^{1/p}/A_0^{1/p}}$$

零伦。亦即 $\Omega_{P/A_0} \to \Omega_{P^{1/p}/A_0^{1/p}}$ 的基变换零伦。而变换前的态射必然零伦，这是因为显然的莱布尼茨法则 $d(x^p) = px^{p-1}dx = 0$。 $\square$

定理2.6的证明. 考虑 [11, Definition 18.2.1.1] 中 $\mathrm{Spec}(B_0) \to \mathrm{Spec}(A)$ 的相对 de Rham 空间 $X : \mathrm{CAlg}^{\mathrm{cn}} \to \mathcal{S}$：

$$X(R) := \lim_J \mathrm{Map}_{\mathrm{CAlg}}(A, R) \times_{\mathrm{Map}_{\mathrm{CAlg}}(A, \pi_0(R)/J)} \mathrm{Map}_{\mathrm{CAlg}}(B_0, \pi_0(R)/J)$$

其中 $J \subseteq \pi_0(R)$ 跑遍幂零理想。

断言 2.9. *X 幂零完备，无穷小凝聚，绝对余切复形由 $L_A|_X$ 给出。并且，下图是拉回图。*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Spec}(B_0) \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d] \\
\mathrm{Spec}(A_0) \arrow[r] & \mathrm{Spec}(A)
\end{tikzcd}$$

于是由 [11, Theorem 18.2.3.2] 的可表性定理，存在某个连合 $\mathbb{E}_\infty$-环 B 使得 $X \cong \mathrm{Spf}(B)$，其中 $\pi_0(B) \to B_0$ 满，B 相对于这一 Ker（记为 I'）完备。所以 B_0 也就是 I'-完备化后的 $B \otimes_A A_0$。但是，由于断言中声明的几乎完美这一有限性结论，此张量积本身业已 I'-完备。所以下图是 $\mathbb{E}_\infty$ 中的推出图，进而 $I' = I\pi_0(B)$。

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ A_0 & \longrightarrow & B_0 \end{array}$$

下面证明，这样构造出来的 B 即为期望的加细。前两个条件已经满足，最后只需要验证万有性，即对于任意 I-完备的连合 A-$\mathbb{E}_\infty$-代数 R，典范态射

$$\mathrm{Map}_{\mathrm{CAlg}_A}(B, R) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{CRing}_{A_0}}(B_0, \pi_0(R)/I\pi_0(R))$$

是同构。根据 [11, Lemma 8.1.2.2]，我们可以用一连串 I'-幂零的 B'-代数以极限来逼近 R。故不妨设 R 是 I-幂零的。此时，我们有：

$$\mathrm{Map}_{\mathrm{CAlg}_A}(B, R) \cong \mathrm{fib}(X(R) \to \mathrm{Map}_{\mathrm{CAlg}}(A, R)) \cong \lim_J \mathrm{Map}_{\mathrm{CAlg_A}}(B_0, \pi_0(R)/J).$$

因为幂零假设，J 只需跑遍包含 I 的那些。又由于 B_0 的相对完美，这一极限恰为 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{CRing}_{A_0}}(B_0, \pi_0(R)/I\pi_0(R))$。 □

断言 2.9的证明. 首先是拉回图性质。我们证明更强的结论，对于任意幂零理想 J，下式是等价

$$\mathrm{Map}_{\mathrm{CAlg}}(B_0, R) \to \mathrm{Map}_{\mathrm{CAlg}}(A, R) \times_{\mathrm{Map}_{\mathrm{CAlg}}(A, \pi_0(R)/J)} \mathrm{Map}_{\mathrm{CAlg}}(B_0, \pi_0(R)/J).$$

利用类似于证明中的技巧，我们可以假设 R 是某一 R' 的平方零扩张，并且用 R' 来代替 $\pi_0(R)/J$。此时结论显然，因为引理2.8表明余切复形 L_{B_0/A_0} 退化。

由于条件中的有限性，$L_{A_0/A}$ 是几乎完美的，也是 1-连合的（因为 A_0 来源于 $\pi_0(A)$ 的商）。所以纤维序列

$$B_0 \otimes_{A_0} L_{A_0/A} \to L_{B_0/A} \to L_{B_0/A_0}$$

与引理2.8表明 $L_{B_0/A}$ 几乎完美且 1-连合。于是其余结论源自 [11, Proposition 18.2.1.11]。 □

评注 2.10. 回顾定理2.6的证明过程，我们发现在定理条件下，给定下图

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[d] \\ A_0 \arrow[r] & B_0 \end{tikzcd}$$

B 是加细当且仅当

- B 是 I-完备的。
- 上图为推出图。

2.2 球形 Witt 向量及倾斜

构造 2.11. 给定完美 $\mathbb{F}_p$ 代数 A。对 $\mathbb{S}_p \to \mathbb{F}_p \to A$ 应用定理2.6，得到一个 p-完备的谱作为加细。由上一小节性质，这个构造诱导了如下函子，称为球形 Witt 向量：

$$\mathbb{W}(-) : \mathrm{Perf} \to \mathrm{CAlg}(\mathrm{Sp}_p).$$

易见，$\mathbb{W}(A) \otimes \mathbb{F}_p \cong A$，并且给出了一个全忠实函子。

定理2.2的证明. 由构造过程，$(\pi_0(\mathbb{W}(A))/p)^\flat \cong \pi_0(\mathbb{W}(A))/p \cong A$。在本定理记号下，即 $(\mathbb{W}(A))^\flat \cong A$。我们断言这诱导了伴随对，因为

$$\begin{aligned} &\mathrm{Map}_{\mathrm{CAlg}(Sp_p)}(\mathbb{W}(A), S) \to \mathrm{Map}_{\mathrm{CAlg}(Sp_p)}(\pi_0\mathbb{W}(A)/p, \pi_0(S)/p) \\ &\qquad \to \mathrm{Map}_{\mathrm{Perf}}((\pi_0\mathbb{W}(A)/p)^\flat, (\pi_0(S)/p)^\flat) \to \mathrm{Map}_{\mathrm{Perf}}(A, (\pi_0(S)/p)^\flat) \end{aligned}$$

中每一个态射都是等价。第一个源于加细的定义，第二个源于完美性，第三个是即为前述等价。余完备化是抽象的范畴论机制，跳过不表。本质像的刻画来自评注2.10。 □

例 2.12. 对于任意的离散交换幺半群 M，若乘 p 作用可逆，则 $\mathbb{F}_p \otimes \mathbb{S}_p[M] \cong \mathbb{F}_p[M]$ 是离散完美环。因而 $\mathbb{W}(\mathbb{F}_p[M]) \cong \mathbb{S}_p[M]$。特别地，$\mathbb{W}(\mathbb{F}_p[t^{1/p^\infty}]) \cong \mathbb{S}_p[t^{1/p^\infty}]$。

由于倾斜函子的目标范畴是离散环的范畴，所以我们很大意义上只需要理解集合层面的变形即可。为此我们有，

命题 2.13. *作为集合，$(-)^\flat$ 由 $\mathbb{S}_p[t^{1/p^\infty}]$ 余表示。*

证明. 因为对偶地，$\mathbb{F}_p[t^{1/p^\infty}]$ 余表示了任一个完美环。 $\square$

推论 2.14. 若 $R \to B$ 是 $\mathrm{CAlg}(\mathrm{Sp}_p)$ 中的平方零扩张，则诱导出的映射 $R^\flat \to B^\flat$ 是同构。

证明. 由于 $\mathbb{S}_p[t^{1/p^\infty}]$ 是形式平展的，则平方和扩张表明

$$\mathrm{Map}_{\mathrm{CAlg}(\mathrm{Sp}_p)}(\mathbb{S}_p[t^{1/p^\infty}], R) \to \mathrm{Map}_{\mathrm{CAlg}(\mathrm{Sp}_p)}(\mathbb{S}_p[t^{1/p^\infty}], B)$$

是等价。于是取 π_0 道尽一切。 $\square$

定理 2.15. 对于任意 $\mathbb{E}_\infty$-p-完备环谱 R, 倾斜函子 $(-)^\flat$ 把 $\pi_0(R) \leftarrow \tau_{\geq 0}R \to R$ 映为同构。换言之，计算环谱的倾斜只需研究其 π_0 结构。

证明. 第二个同构源于 $\mathbb{S}_p[t^{1/p^\infty}]$ 连合。而第一个同构是因为我们可以用一系列平方零扩张来实现，进而上一个结论表明倾斜后一致。 $\square$

第三章 自由性与余自由性

通过球形 Witt 向量，我们可以给出一个别有风趣的思考 Lubin-Tate 理论的方式。同时定理2.2中的伴随，会给我们带来 Lubin-Tate 理论的自由性结果。而关于余自由性，则显得相对漫长。在 [7] 中，作者研究得到了 Witt 向量的 δ-环结构并且证明了遗忘 δ-环结构与（考虑了 δ-环结构的）Witt 向量函子构成一对左右伴随。这揭示了标题中提到的余自由性。至于应用球形 Witt 向量得到的 Lubin-Tate 理论，我们相信也可以有一对无穷范畴间的伴随对表明余自由性，但目前我们还只能在 π_0 上做到这一点。即使只是离散环上的额外结构，它的复杂度也已经非同寻常，即幂算子。

本节前半部分将仔细论证自由性，而后半部分将通过 Rezk 的 [13] 与 Burklund-Schlank-Yuan 的 [1] 的部分工作来方便地解释余自由性的概念。

3.1 Lubin-Tate 理论与自由性

Lurie 在 [10] 中构造了有关 p-可除群形变的一类 $\mathbb{E}_\infty$-环谱，涵盖了完美代数上形式群的情形。而我们利用球形 Witt 向量构造 Lubin-Tate 理论时，原则上需要引入完美域的 Lubin-Tate 理论。特此摘录 Lurie 的基本定理:

定理 3.1 ([10, Theorems 5.0.2, 5.1.5 and 5.4.1])**.** *存在函子*

$$E(-;-) : \int_{\mathrm{Perf}} \mathcal{M}^n_{\mathrm{FG}} \to \mathrm{CAlg}(\mathrm{Sp}_{T(n)}),$$

把完美代数及其一个高度 n 的形式群变成 $\mathbb{E}_\infty$-谱，且具有如下性质：

- *此函子全忠实。*
- *$E(-;-)$ 也是 $K(n)$-局部的，并且偶周期。*
- *$\pi_0 E(A;G)$ 商去 Landweber 理想后即为 A，并且他的 Quillen 形式群（无论是离散意义的还是 $\mathbb{E}_\infty$ 意义的）恰为 G 的万有形变。于是这的确给出了经典 Lubin-Tate 理论的提升。*

此后，我们固定一个特征 p 完美域 k 以及它上面的一个高度 n 的形式群 G。不妨记 $E(k;G)$ 为 $E(k)$。并且定义函子

$$\begin{aligned} E(-) : \mathrm{Perf}_k &\to \mathrm{CAlg}(\mathrm{Mod}(\mathrm{Sp}_{T(n)}, E(k))) =: \mathrm{CAlg}^{\wedge}_{E(k)} \\ (k \to A) &\mapsto E(A; G_A). \end{aligned}$$

根据 [10, Corollary 5.4.2]，这一类环谱的同伦群也是直接的

$$\pi_* E(A) \cong W(A)[[v_1, \cdots, v_{n-1}]][u^{\pm 1}].$$

有了这些准备工作，下面就开始我们的构造。

构造 3.2. 因为 Sp_p 是刻画 p-完备，稳定，可表的范式（Mode)，所以存在天然函子 $\iota : \mathrm{Sp}_p \to \mathrm{Mod}(\mathrm{Sp}_{T(n)}, E(k))$ 在 $\mathrm{CAlg}(\mathrm{Pr}^{\mathrm{L}})$ 中。于是系数的扩张与限制这对伴随给出了如下伴随对：

$$\iota^* : \mathrm{CAlg}(\mathrm{Sp}_p) \rightleftharpoons \mathrm{CAlg}^{\wedge}_{E(k)} : \iota_*.$$

再与定理2.2中的伴随对复合，我们就得到了如下伴随：

$$\mathbb{W}_{E(k)} : \mathrm{Perf}_k \rightleftharpoons \mathrm{CAlg}^{\wedge}_{E(k)} : (-)^{\flat}_{E(k)}.$$

引理 3.3. *$(-)^{\flat}_{E(k)}$ 对平方零延拓不变。此外有自然同构，$(R)^{\flat}_{E(k)} \cong \pi_0(R)^{\flat}$。于是我们不妨记 $(-)^{\flat}_{E(k)}$ 单纯为 $(-)^{\flat}$。*

证明. 由于系数限制这一函子对平方零延拓不变,第一个断言故源自推论2.14。第二个结论直接源于定理2.15。 □

引理 3.4. *对于任意 $R \in \mathrm{CAlg}^{\wedge}_{E(k)}$ 我们有*

$$R^{\flat} \cong (\pi_0 R)^{\flat} \cong (\pi_0 R/m)^{\flat},$$

其中 m 指 Landweber 理想。

证明. 第一个同构即为上一个引理。第二个同构源于每次商去 Hasse 不变量 v_i 时，因为 v_i-完备性（可参考 [6, Proposition 7.10]），我们总会得到一连串的平方零延拓塔。 □

引理 3.5. *对于任意 k-完美代数 A，有自然同构 $(E(A))^{\flat} \cong A$。*

证明. 如下同构道尽一切，

$$(E(A))^{\flat} \cong (\pi_0 E(A)/m)^{\flat} \cong (W(A)[[v_1, \cdots, v_{n-1}]]/m)^{\flat} \cong A^{\flat} \cong A.$$

其中第一个同构即为上一个引理结论。 □

命题 3.6. *存在函子等价 $\mathbb{W}_{E(k)} \to E(-)$。*

证明. 利用 $(E(A))^\flat \cong A$ 与伴随关系，我们有 $\mathbb{W}_{E(k)} \to E(-)$。欲证其为等价，可以使用导出版本的 Nakayama 引理，考虑模去 Landweber 理想后的情况。此时结论源于我们对两侧同伦群的计算。

$$\pi_* E(A) \cong W(A)[[v_1, \cdots, v_{n-1}]][u^{\pm 1}],$$
$$\pi_* \mathbb{W}_{E(k)}(A) \cong \pi_*(\mathbb{W}(A) \otimes_{\mathbb{W}(k)} E(k)).$$

□

于是下列自由性定理就是定理2.2的直接推论。

定理 3.7. 存在伴随对

$$E(-) : \mathrm{Perf}_k \rightleftharpoons \mathrm{CAlg}^{\wedge}_{E(k)} : (-)^\flat$$

使得如下性质成立：

- 左伴随 $E(-)$ 是余局部化，特别地全忠实。
- 右伴随倾斜函子可以用 π_0 或者 π_0/m 的倾斜计算。
- $\pi_* E(A) \cong W(A)[[v_1, \cdots, v_{n-1}]][u^{\pm 1}]$ 恢复了古典 *Landweber* 理论给出的一切结果。
- 本质像由那些偶周期且 $\pi_0(R)/m$ 完美的环谱张成。

3.2 余自由性

本小节将阐释依此法炮制的 Lubin-Tate 理论内涵的幂算子结构。这种内蕴结构在代数拓扑、代数数论中是常见的。比如，上同调总是 Steenrod 代数的模，比如棱镜总是要考虑 δ-结构。通常的内蕴结构总是 δ-算子，或者说，Frobinius 提升。（参考 [12, Chapter 4, Theorem IV.1.15]）但是此处我们却迫不得已需要更加范畴论的刻画——单子（Monad）。我们的主定理如下所示。

定理 3.8 ([1, Theorem 3.4])**.** k 是特征 p 的完美域，记 E 为 $E(k)$，E_0 为 $\pi_0 E(k)$。则存在 CRing_{E_0} 上的单子 $\mathbb{T}$，使得函子 $\pi_0 : \mathrm{CAlg}^{\wedge}_E \to \mathrm{CRing}_{E_0}$ 提升到 $\mathrm{Alg}_{\mathbb{T}}$。并且如下揭示余自由性的伴随对成立：

$$(U_{\mathbb{T}}(-)/m)^\sharp : \mathrm{Alg}_{\mathbb{T}} \rightleftharpoons \mathrm{Perf}_k : \pi_0 E(-).$$

其中 $(-)^\sharp$ 是余极限给出的完美化，特别地，右伴随是全忠实的。

这一提升与余自由性将在最后证明零点定理的时候发挥关键作用。虽然我们的证明手法非常的简洁、抽象，但是更加直接的过程可以理解为：我们不断地（超限地）对环谱做调整。而每一步调整，我们都希望能记录高阶结构，以保证一部分性质（幂零保持性）得以满足。我们将在第4节中详细解释。

出于定理的复杂程度以及证明中涉及的组合计数，我们此处仅简要概述余自由性证明。如下引理我们权且承认。

引理 3.9 ([1, Corollary 3.31])**.** *设单子 $\mathbb{T}$ 对应的自由化是 $W_{\mathbb{T}}$。欲证自然态射 $\pi_0 E(A) \to W_{\mathbb{T}}(A)$，只须考查 $A = k$ 的情况。*

引理 3.10 ([1, Proposition 3.45])**.** *对于任意 $y \in E_0$，上述单子 $\mathbb{T}$ 总能给出一个变换 $\widetilde{Q}$ 使得 $\widetilde{Q}$ 模去 m 后非零。*

引理 3.11 ([1, Subsection 3.2])**.** *$\mathbb{T}(E_0)$ 是万有的，即 $W_{\mathbb{T}}(A) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{CRing}_{E_0}}(\mathbb{T}(E_0), A)$。并且，$W_{\mathbb{T}}(k)$ 上存在所谓的 Witt 滤链 $\left\{W_{\mathbb{T}}^{\le r}(k)\right\}$ 使得滤链的分次商自由，第 r 项秩满足*

$$\bar{d}(r) = \prod_{j=1}^{n-1} \frac{p^{r+j} - 1}{p^j - 1}.$$

引理 3.12 ([1, Theorem 3.47 and Corollary 3.49])**.** *存在另一类兼容的子商族，由置换群诱导的算子给出（即 $E^0(B\Sigma_r)$ 模去算子加性代表的理想），有着同样的秩 $\bar{d}(r)$。同时保证了自然态射 $E_0 \to W_{\mathbb{T}}(k) \to W_{\mathbb{T}}^{\le r}(k)$ 的像 $\left\{E_{\mathbb{T}}^{\le r}(k)\right\}$ 的长度大于等于各个 $\bar{d}(r)$ 的和。*

定理3.8的证明. 考虑如下的图表。

$$\mathrm{Alg}_{\mathbb{T}} \underset{W_{\mathbb{T}}}{\overset{U_{\mathbb{T}}}{\rightleftarrows}} \mathrm{CRing}_{E_0} \xrightarrow{-\otimes_{E_0} k} \mathrm{CRing}_k \underset{(-)^{\flat}}{\overset{(-)^{\sharp}}{\rightleftarrows}} \mathrm{Perf}_k\,.$$

易见，由引理3.9与基本范畴论，我们只需证明 $\pi_0 E(k) \to W_{\mathbb{T}}(k)$ 是同构。结合万有性与引理3.10，我们知道映射必定单。由滤链的交换代数和计数可知满，于是结论得证。 □

评注 3.13. 为了分析单性，我们必须采用归纳的方式来一步步 Landweber 理想的元素。这涉及到了所谓的色迁映射。

第四章 色展零点定理

在本节，我们将证明如下结论，这可以看作是经典交换代数中，“极大理想”、“代数闭包”的存在性以及希尔伯特零点定理的推广。

定理 4.1 (Lubin-Tate 覆盖)**.** *对于任意 $R \in \mathrm{CAlg}(\mathrm{Sp}_{T(n)})$，存在一个完美代数 A，其 Krull 维数为 0，与态射 $R \to E(A)$。*

推论 4.2 (“点”的存在性)**.** *对于任意 $0 \neq R \in \mathrm{CAlg}(\mathrm{Sp}_{T(n)})$，存在代数闭域 L 与态射 $R \to E(L)$。*

证明. 由定理显然。 $\square$

定义 4.3. 对于任意范畴 $\mathcal{C}$，称对象 $A \in \mathcal{C}$ 满足零点定理，若 $\mathcal{C}_{A/}$ 上每个不是终对象的紧对象都有到初对象 A 的态射。例如代数闭域 k 的代数范畴中，希尔伯特零点定理表明 k 满足上述定义。

定理 4.4 (环谱上的希尔伯特零点定理)**.** *对于任意 $0 \neq R \in \mathrm{CAlg}(\mathrm{Sp}_{T(n)})$，$R$ 满足零点定理，当且仅当存在 L 代数闭域使得，$R \simeq E(L)$。*

本节将证明这两个定理。对于第一个定理，我们的手法是研究三类（高度大于等于 1 时，高度 0 的退化情况留给读者自证）特殊的测试态射，考察提升问题解的存在性。对测试态射的提升性即为定理所期望的性质。而存在性则可以由 Quillen 小对象定理完成。而第二个定理则是第一个定理与一些交换代数的推论。

4.1 Lubin-Tate 覆盖与测试映射

若欲证明定理4.1，张量积的手法让我们不妨设 R 是 $E(k)$ 代数。我们首先希望能有一个判断标准使得 R 来自于一个完美的 Krull 维数 0 的环的 Lubin-Tate 理论，或者至少 $E(R^\flat) \cong R$。为此我们证明如下引理。

引理 4.5. *对 $R \in \mathrm{CAlg}^{\wedge}_{E(k)}$，如下三类条件成立，等价于 R 来自于一个完美的 Krull 维数 0 的环的 Lubin-Tate 理论。其中第一点条件保证了 $E(R^\flat) \to R$ 在 π_0 上单。*

- *$R^\flat$ 的 Krull 维数为 0。*
- *$E(R^\flat) \to R$ 在 π_0 上满。*

- $\pi_1(R)$ 退化。

证明. 欲由第一点证明单性，我们首先断言模去 Landweber 理想后仍单。也就是 $R^\flat \cong (\pi_0 R/m)^\flat \to \pi_0 R/m$ 单。这是一个交换代数问题，根本原因在于 Krull 维数为 0。细节留给读者自证或查阅 [1, Corollary 4.43]。

下面我们注意到余自由性给出的交换图表

$$\begin{array}{ccccc} \pi_0 E(R^\flat) & \longrightarrow & W_{\mathbb{T}}(\pi_0 E(R^\flat)) & \longrightarrow & W_{\mathbb{T}}(\pi_0 E(R^\flat)/m) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ R & \longrightarrow & W_{\mathbb{T}}(R) & \longrightarrow & W_{\mathbb{T}}(R/m) \end{array}$$

中，顶部的复合是余自由性的同构；由模去 m 的单性和 $W_{\mathbb{T}}$ 可被 $\mathbb{T}(E_0)$ 表出我们知道右侧竖直映射是单的。这保证了欲证明的左侧竖直态射单。

等价关系是几乎显然的：必要性由具体计算可见，充分性来自于前两点保证偶数阶同伦群一致，第三点保证奇数阶同伦群退化。 $\square$

构造 4.6 (测试映射). 我们定义如下三类态射并且希望证明：

- 环的自然映射诱导的 $f : E(k[t^{1/p^\infty}]) \to E(k[t^{\pm 1/p^\infty}]) \times E(k)$。$f \perp R$ 等价于引理4.5中第一点成立。

- 引理4.9给出的 $g : E(k)\{z^0\} \to E(k\{z^0\}^\sharp)$。$g \perp R$ 等价于同一引理中第二点条件成立。

- $h : E(k)\{z^1\} \xrightarrow{z^1 \mapsto 0} E(k)$。$h \perp R$ 等价于引理第三点成立。这是显然的。

假定上述构造存在且具有这些性质，那么如下版本的 Quillen 小对象定理与探测幂零映射的弱饱和性便能直接证明定理4.1。

定理 4.7 ([8, Proposition A.1.2.5, Small Object Argument]). *$\mathcal{C}$ 可表无穷范畴，S 是一个弱饱和的态射类，$S_0 \subset S$ 是小集合，对于任意 $A \in \mathcal{C}$，存在态射 $A \to B$ 使得*

- *$A \to B$ 落在 S 中。*

- *对于任意 $f \in S_0$，$f \perp B$。*

定理4.1的证明. 在定理4.7中取 S 为 $\{f, g, h\}$ 生成的弱饱和类，S_0 为 $\{f, g, h\}$。引理4.5与4.6表明，对于任意环谱 R，存在态射 $R \to B$，且 $B \cong E(B^\flat)$ 使得 $B^\flat$ 完美且 Krull 维数为 0。 $\square$

4.1.1 f 的性质

f 中不断出现的开 p 次方，正与完美性兼容。欲证明 $f \perp R$ 等价于 $R^\flat$ 完美 Krull 维数 0，利用球形 Witt 向量等伴随对，只需验证交换代数下 $\mathbb{F}_p[t^{1/p^\infty}] \to \mathbb{F}_p[t^{\pm 1/p^\infty}] \times \mathbb{F}_p$ 具有类似性质。因为余极限完美化与嵌入的伴随对，只需验证：

引理 4.8. *交换环 A 是约化环且 Krull 维数为 0，当且仅当 $(\mathbb{Z}[t] \to \mathbb{Z}[t^{\pm 1}] \times \mathbb{Z}) \perp A$。*

证明. 读者自证不难，或参考 [1, Proposition 4.41] 列出的参考文献。 □

4.1.2 g 的构造及性质

引理 4.9. *设 $k\{z^0\} = \pi_0(E(k)\{z^0\})/m$。则对于 A 完美 k-代数，函子*

$$(\pi_0(-)/m)^\sharp : \mathrm{CAlg}^\wedge_{E(k)} \to \mathrm{Perf}_k$$

诱导了同构

$$\pi_0\left(\mathrm{Map}_{\mathrm{CAlg}^\wedge_{E(k)}}(E(k)\{z^0\}, E(A))\right) \to \mathrm{Map}_{\mathrm{Perf}_k}(k\{z^0\}, A).$$

于是，取 $A = E(k)\{z^0\}^\sharp$，右侧的恒同映射诱导了态射 g。

证明. 我们断言如下复合中，每一步都是同构。

$$\begin{aligned}\pi_0\left(\mathrm{Map}_{\mathrm{CAlg}^\wedge_{E(k)}}(E(k)\{z^0\}, E(A))\right) &\xrightarrow{\pi_0} \mathrm{Map}_{\mathbb{T}}(\pi_0(E(k)\{z^0\}), \pi_0 E(A)) \\ &\xrightarrow{((-)/m)^\sharp} \mathrm{Map}_{\mathrm{Perf}_k}(k\{z^0\}, A).\end{aligned}$$

其中第二个映射即为余自由性的伴随同构。而对于第一个映射，我们考察如下图表，

$$\begin{tikzcd}
\pi_0\left(\mathrm{Map}_{\mathrm{CAlg}^\wedge_{E(k)}}(E(k)\{z^0\}, E(A))\right) \arrow[d, "\pi_0"] \arrow[drr, "\sim"] & & \\
\mathrm{Map}_{\mathbb{T}}(\pi_0(E(k)\{z^0\}), \pi_0 E(A)) \arrow[r] & \mathrm{Map}_{\mathbb{T}}(\mathbb{T}(\pi_0 E(k)), \pi_0 E(A)) \arrow[r, "\sim"'] & \pi_0 E(A)
\end{tikzcd}$$

其中左下侧水平态射由万有态射 $\mathbb{T}(\pi_0 E(k)) \to \pi_0(E(k)\{z^0\})$ 诱导。斜上方态射是同构是因为 z^0 的自由性，右侧水平态射是同构是因为 $\mathbb{T}$ 的自由性。而左侧水平态射是同构是因为 $\pi_0 E(A)$ 是 Landweber 完备的，而万有态射因 [13, Proposition 4.17] 是一个完备化。 □

引理 4.10. $g \perp R$ 等价于 $E(R^\flat) \to R$ 在 π_0 上满。

证明. 如下列式道尽一切:

$$\begin{aligned}
\pi_0 \operatorname{Map}_{\mathrm{CAlg}^\wedge_{E(k)}}(E(k\{z^0\}^\sharp), R) &\cong \pi_0 \operatorname{Map}_{\mathrm{CAlg}^\wedge_{E(k)}}(E(k\{z^0\}^\sharp), E(R^\flat)) \\
&\cong \pi_0 \operatorname{Map}_{\mathrm{Perf}_k}(k\{z^0\}^\sharp, R^\flat) \\
&\cong \pi_0 \operatorname{Map}_{\mathrm{CAlg}^\wedge_{E(k)}}(E(k)\{z^0\}, E(R^\flat)) \\
&\cong \pi_0 E(R^\flat).
\end{aligned}$$

其中前两个同构是自由化的结果（注意完美性），第三个同构是上一个引理的结论，第四个同构显然。 □

评注 4.11. 事实上 [1] 证明的 Lubin-Tate 覆盖具有更强的意义，他们要求构造出的 $R \to E(A)$ 是如下阐释的探测幂零的。对于到仿射概形上，也就是说拓扑空间上诱导的映射是满射。一个 Krull 维数 0 的完美代数，在相当意义上可以看成是点的无交并，那么我们依此法构造出的 A 便是对环谱 R 的所有“素理想”的提取（但是不能恢复茎（stalk）上的信息）。他们借助这个想法，定义了环谱的可构造（constructible）谱空间，并且试图推广到一般意义的导出概形。本文证明这一结论构造的 f, g, h 实际上已经足够了，只需要额外证明他们探测幂零，便可以得出类似结论。在此，我们简要陈述一下相关概念和思路。

定义 4.12. 记 $\mathrm{Pr}^{\mathrm{rig}}$ 为所有紧生成对称幺半稳定使得所有紧对象可对偶的无穷范畴构成的无穷范畴，其间态射是保持紧对象的函子。固定 $\mathcal{C} \in \mathrm{Pr}^{\mathrm{rig}}$，称一对象 $T \in \mathcal{C}$ 可以探测幂零性，若对于 $\mathcal{C}$ 上任意的紧对象 c 与任意的态射 $f : c \to a$，f 幂零当且仅当对充分大的 m，$f^{\otimes m} \otimes T$ 幂零。类似地称环态射 $A \to B \in \mathcal{C}$ 探测幂零，若 B 在 $\mathrm{Mod}(\mathcal{C}, A)$ 中具有上述性质。

命题 4.13. 对于任意 $\mathcal{C} \in \mathrm{Pr}^{\mathrm{rig}}$，全体探测幂零的态射是弱饱和的。

证明. 只需证明三点：对基变换封闭，对收缩（retract）封闭，对超限复合封闭。对基变换封闭显然，或可参考 [1, Proposition 4.24] 的追图。

对于收缩，考虑下图：

$$\begin{array}{ccccc}
A & \longrightarrow & C & \longrightarrow & A \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
B & \longrightarrow & D & \longrightarrow & B
\end{array}$$

其中 $C \to D$ 探测幂零，若有 f 是满足定义条件的 A-模态射，使得 $f \otimes_A B$ 幂零。迁移到 D 上仍幂零。由探测幂零性 $f \otimes_A C$ 幂零，因而再基变换 $f \otimes_A C \otimes_C A$ 幂零。由收缩图此即 f 幂零。

对于超限复合，只需考虑极限序数的情况，注意到测试对象的紧性，最终可以归纳到取余极限过程的某一对象上，进而使用该对象处的探测幂零性即可。 □

评注 4.14. 关于 f 探测幂零，我们知道在交换代数中 $x \in A$，则 $A \to A/x \times A_x$ 可以理解成 $D(x) \coprod V(x) \to \mathrm{Spec}(A)$，而幂零性又是一个局部性质。这启示我们 $E(k[t]) \to E(k[t^{\pm 1}]) \times E(k)$ 理应探测幂零。事实上也正如 [1, Theorem 4.40] 所示（基本仿照交换代数的证明）。因而取余极限，f 探测幂零。

关于 g，因为 $E(k\{z^0\}^\sharp)$ 是一个忠实平坦模，自然探测幂零。

关于 h，请参考 [1, Subsection 5.4]。

4.2 零点定理的证明

我们首先证明在我们的背景下，“代数闭域”上的多项式会自动分解成一次多项式的乘积；亦即，有一个零点。

引理 4.15. 设 $\mathcal{C}$ 可表对称幺半稳定无穷范畴，$R \in \mathrm{CAlg}(\mathcal{C})$ 满足零点定理。对于任意紧 R-模 W，任意 $T \in \mathrm{CAlg}_R(\mathcal{C})$，约定 $0 : R\{W\} \to T$ 是由模上的 0 态射诱导的环态射。那么对任意紧 R-模 W_1, W_2，与 $P : R\{W_1\} \to R\{W_2\}$，下列命题等价：

- 存在非零 $T \in \mathrm{CAlg}_R(\mathcal{C})$ 使得下图虚线在 $\mathrm{CAlg}_R(\mathcal{C})$ 有解：

$$\begin{tikzcd} R\{W_1\} \arrow[r, "P"] \arrow[dr, "0"'] & R\{W_2\} \arrow[d, dashed] \\ & T \end{tikzcd}$$

- 上图中 T 换为 R 也成立。

在普通的交换代数中，我们的图一般是 $R[x] \xrightarrow{x \mapsto P} R[y] \to R[y]/P$，把 $R[y]/P$ 换为 R 后，新的态射意味着一个根。

证明. 只需证必要性，而下图道尽一切，其中张量积 Q 的紧性易证，进而可以验证 Q 满足零点定理的条件。于是有收缩图 $R \to Q \xrightarrow{\iota} R$。复合 $R \to Q \to T$ 即为图右下角的 $R \to T$，于是穿过 0 是显然的。

$$\begin{tikzcd}
R\{W_1\} \arrow[r, "P"] \arrow[d, "0"] & R\{W_2\} \arrow[d] \arrow[rrd] & & \\
R \arrow[r] & Q = R \otimes_{R\{W_1\}} R\{W_2\} \arrow[r, "\iota"] & R \arrow[r] & T
\end{tikzcd}$$

□

推论 4.16. 设 $\mathcal{C}$ 可表对称幺半稳定无穷范畴，$R \in \mathrm{CAlg}(\mathcal{C})$ 满足零点定理。则对于任意 $0 \neq T \in \mathrm{CAlg}_R(\mathcal{C})$，任意紧 R-模 W，

$$\mathrm{Map}^{\mathrm{Sp}}_{\mathcal{C}}(W, R) \to \mathrm{Map}^{\mathrm{Sp}}_{\mathcal{C}}(W, T)$$

诱导同伦群的单射。

证明. 取 $x \in \mathrm{Ker}(\pi_k)$，则我们有复合 $R[\Sigma^k W] \xrightarrow{x} R \to T$ 为 0。于是由引理，存在 $R[\Sigma^k W] \xrightarrow{x} R \to R$ 复合为 0。但是环范畴中 $R \to R$ 只能是恒同，于是 $x = 0$。 □

推论 4.17. $0 \neq R \in \mathrm{CAlg}(\mathrm{Sp}_{T(n)})$ 满足零点定理，则 R 的奇数阶同伦群退化，因而复定向。商去 *Landweber* 理想后 $K := R//m$（是一个 $\mathbb{E}_1$-R-代数，构造及性质参见 [5]）是偶周期的，且 π_0 为代数闭域。特别地，比较定理*3.7*中的本质像，我们知道 $R \cong E(\pi_0 K)$ 来自代数闭域的 *Lubin-Tate* 理论。

证明. 由定理4.1，存在态射 $R \to E(L)$，其中 L 是代数闭域。因为类型 n 的谱 V_n 总是紧的，对其对偶（同样为紧对象）使用上一个推论，我们有

$$V_n \otimes R \to V_n \otimes E(L)$$

诱导同伦群的单射。注意到后者是偶的，因而前者也是偶的。由 [1, Lemma 2.29] 知 R 是偶的。

由于 K 是一连串关于 R 的有限余极限，可以知 K 是紧 R-模。对其对偶使用上一个推论，我们有

$$K \to K \otimes_R E(L) \cong E(L)//m$$

诱导同伦群的单射。后者同伦群恰为 $L[u^{\pm 1}]$，这至少表明 K 是偶的，且 π_0 含于代数闭域 L 中。我们断言如下事实成立：

断言 4.18. 假设 $t_1, \cdots, t_l$ 是次数为 $2d_1, \cdots, 2d_l$ 的自由变量。$f \in \pi_*(K)[t_1, \cdots, t_l]$ 的非常数齐次多项式。则存在 $\pi_*(K)$ 中次数为 $2d_i$ 的一串元素 x_i 是 f 的零点。

若断言成立，如下三类多项式便可以表明 K 偶周期且 π_0 是代数闭域。

- $f = t_1t_2 - 1$。其中 t_1 次数 2，t_2 次数 -2。这表明偶周期。
- $f = at - 1$。其中 $0 \neq a \in \pi_0(K)$，t 次数 0。这表明 $\pi_0(K)$ 是域。
- f 为 $\pi_0(K)$ 系数的任意非常值多项式，这显然验证了代数闭域的性质。

断言的证明如下：由于偶周期、代数闭，易见断言性质必定对 $L[u^{\pm 1}]$ 成立。同时，任取 $\widetilde{f}$ 作为多项式 f 的非交换提升，利用基变换，我们可以得到如下群之间的自然同态：

$$\widetilde{f} : \prod_{i=1}^{l} \pi_{2d_i}(- \otimes_R K) \to \pi_{2d}(- \otimes_R K),$$

其中 $d = \Sigma_{i=1}^{l} d_i$。这自然可以由自由代数间的态射余表示：

$$P_f : R\{\Sigma^{2d} K^\vee\} \to R\{\bigoplus_{i=1}^{l} \Sigma^{2d_i} K^\vee\}.$$

那么 $L[u^{\pm 1}]$ 的分析表明，上式右侧到 $E(L)$ 有解，那么引理4.15表明对 R 有解。模去 Landweber 理想后，断言得证。 □

定理4.4的证明. 于是只需证明对代数闭域 L，$E(L)$ 满足零点定理。对于非零紧 $E(L)$-$\mathbb{E}_\infty$-代数 B，由定理4.1，存在 F 是代数闭域与 $B \to E(F)$。考虑 F 中所有的有限子集的偏序集 P 与函子

$$G : I \mapsto \mathrm{Im}(L[I] \to F)^\sharp.$$

易见

$$\operatorname*{colim}_{I \in P} E(G(I)) \cong E(F).$$

于是由紧性，$B \to E(F)$ 穿过了某个 $B \to E(G(I))$。断言 $L \to \mathrm{Im}(L[I] \to F)$ 有一个收缩。这是因为这一态射亦即某个 $L \to L[I]/J$，由零点定理，收缩存在，于是完美化后，收缩也存在。因而有 $B \to E(G(I)) \to E(L)$。 □

评注 4.19. [1] 还加强了一些集合论的条件，本质上是交换代数中有关势数的零点定理。此处不表。

第五章 红移猜想

色展同伦论的一个易理解的指标也就是色展支撑集：对于 p-局部的环谱 R，

$$\mathrm{supp}(R) := \{n \in \mathbb{N} \mid T(n) \otimes R \neq 0\}.$$

但是这一构造对于不足够交换的谱，表现得非常糟糕。例如，[1, Example 9.2] 的例子可以支撑在任意自然数的子集上。当有 $\mathbb{E}_\infty$ 条件时，我们有极好的结论：

定理 5.1 ([4, Main Theorem])**.** *若 $\mathbb{E}_\infty$-环谱 R 是 $T(n)$-循环的，则也是 $T(n+1)$-循环的。（这也涵盖了 May 的幂零性猜想。）*

于是我们可以有如下高度的概念：

$$\mathrm{height}(R) := \max\{n \geq -1 \mid T(n) \otimes R \neq 0\}.$$

每一个 $\mathbb{E}_\infty$-环谱的支撑集都是从 0 到高度的自然数。关于这一概念，Ausoni 与 Rognes 比较了代数 K 理论对高度的影响，提出了著名的猜想，红移猜想。它声称代数 K 理论将提升高度 1。近些年关于这一猜想已有一些初步结果，例如：

定理 5.2 ([2])**.** *R 是非零 $\mathbb{E}_\infty$-环谱，则*

$$\mathrm{height}(K(R)) \leq \mathrm{height}(R) + 1.$$

定理 5.3 ([14, Theorem A] 与 [1, Proposition 9.12])**.** *高度大于等于 0 时，代数闭域 L 满足*

$$\mathrm{height}(K(E(L))) = \mathrm{height}(E(L)) + 1.$$

于是，结合 Lubin-Tate 覆盖，特别是点的存在性，红移猜想就是显然的了。

定理 5.4 (红移猜想)**.** *R 是高度大于等于 0 的非零 $\mathbb{E}_\infty$-环谱。则*

$$\mathrm{height}(K(R)) = \mathrm{height}(R) + 1.$$

证明. 只需证明大于等于符号，亦即 $T(n+1) \otimes K(R) = 0$ 能推出 $T(n) \otimes R = 0$。若不然，基变换到某一 $R \to E(L)$ 上，环同态的要求保证了 $T(n) \otimes E(L) \neq 0$。$E(L)$ 的红移猜想保证了 $T(n+1) \otimes K(E(L)) \neq 0$。但是不存在从零环打到非零环的态射，故与 $T(n+1) \otimes K(R) = 0$ 矛盾。 □

参考文献

[1] Robert Burklund, Tomer M Schlank, and Allen Yuan. The chromatic nullstellensatz. 2022. arXiv:2207.09929.

[2] Dustin Clausen, Akhil Mathew, Niko Naumann, and Justin Noel. Descent and vanishing in chromatic algebraic K-theory via group actions. 2020. arXiv:2011.08233.

[3] Paul Goerss and Michael Hopkins. Moduli spaces of commutative ring spectra. *London Mathematical Society Lecture Note Series*, 315:151–200, 2005.

[4] Jeremy Hahn. On the bousfield classes of H_∞-ring spectra. 2016. arXiv:1612.04386.

[5] Jeremy Hahn and Dylan Wilson. Quotients of even rings. 2018. arXiv:1809.04723.

[6] Mark Hovey and Neil P Strickland. *Morava K-theories and localisation*, volume 666. American Mathematical Soc., 1999.

[7] André Joyal. δ-anneaux et vecteurs de witt. *C.R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada*, 7(3):177–182, 1985.

[8] Jacob Lurie. *Higher topos theory*, volume 170 of Annals of Mathematics Studies. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2009.

[9] Jacob Lurie. Chromatic homotopy theory, 2010. Lecture notes. Available online.

[10] Jacob Lurie. Elliptic cohomology II: Orientations, 2018. Available online.

[11] Jacob Lurie. Spectral algebraic geometry, 2018. Unfinished manuscript. Available online.

[12] Thomas Nikolaus and Peter Scholze. On topological cyclic homology. *Acta Math*, 221(2):203–409, 2018.

[13] Charles Rezk. The congruence criterion for power operations in Morava E-theory. *Homology, Homotopy and Applications*, 11(2):327–379, 2009.

[14] Allen Yuan. Examples of chromatic redshift in algebraic K-theory. 2021. arXiv:2111.10837.

致谢

感谢我的导师阳恩林教授，是他为我打开了几何分歧的大门，启迪了我数学研究的原初兴趣。在我学习代数几何、无穷范畴等复杂理论的过程中始终给予我丰富的指引与激励。每一次与他交流研究进展，都是一次深刻且充实的思想碰撞。

感谢我的父亲李惠民，母亲缪国华，祖父李尔周，祖母曹年生，在我的成长过程中给予了我充分的爱、信任和支持。他们对我无微不至的关心，使我能一直心无旁骛地投入研究。

感谢我的同学与终生挚友熊茳楠。在本科期间，我们保持着频繁的交流讨论。所谓如切如磋，如琢如磨，四年来我们举办了许多饶有意义的讨论班，同时也交流了无数人生历程中无声处见惊雷的生命之光。

感谢我的同学屈祺苒，马雨茉，陈航，冯雪妍，覃旦妮，郑植，方星竹，马成龙，丘瑞岑，温家睿，乔若宇等同学，我们对各自领域数学问题的交流，丰富了彼此的眼界。

最后，我希望把诚挚的感谢致以北京大学李谷川教授，芝加哥大学博士 Alicia Lima 与北京大学博士周佳茗。正是他们以精彩绝伦的演讲把我领入了色展同伦论的天地，也因此有了这一篇论文。

北京大学学位论文原创性声明和使用授权说明

原创性声明

本人郑重声明：所呈交的学位论文，是本人在导师的指导下，独立进行研究工作所取得的成果。除文中已经注明引用的内容外，本论文不含任何其他个人或集体已经发表或撰写过的作品或成果。对本文的研究做出重要贡献的个人和集体，均已在文中以明确方式标明。本声明的法律结果由本人承担。

论文作者签名：李振鹏

日期：2024年 5 月 21 日

学位论文使用授权说明

本人完全了解北京大学关于收集、保存、使用学位论文的规定，即：

- 按照学校要求提交学位论文的印刷本和电子版本；
- 学校有权保存学位论文的印刷本和电子版，并提供目录检索与阅览服务，在校园网上提供服务；
- 学校可以采用影印、缩印、数字化或其它复制手段保存论文；

论文作者签名：李振鹏 导师签名：阳思林

日期：2024年 5 月 21 日