数值分析笔记

Jiaqi Z.

2023 年 9 月 13 日

目录

Chapter 1

绪论

1.1 误差

1.1.1 误差来源与分类

1. (模型误差): 从实际模型中抽象出数学模型;

   例如, 一个质量为 m 的小球做自由落体运动, 则位置 s 与时间 t 的关系式满足:

   $$m\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = mg$$

   不难想见, 该式仅在不考虑阻力时成立.

2. (观测误差): 通过测量得到模型中参数的值;

3. (方法误差 (或称截断误差)): 求近似解时所引入的误差;

   例 1.1.1. *考虑函数 $f(x)$ 做 Taylor 多项式展开所导致的截断误差.*

   解. 对函数 $f(x)$ 计算 Taylor 多项式, 有

   $$P_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

   由于有限项, 因此多项式有截断误差

   $$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

   其中, $\xi \in (x, 0)$ □

4. (舍入误差): 机器字长有限所引起的误差

其中, 方法误差和舍入误差是数值分析所重点考虑的误差, 同时, 方法误差是可以避免的.

1.1.2 误差概念

绝对误差与绝对误差限

定义 1.1.1 (绝对误差与绝对误差限). 设 x 是准确值, x^* 是 x 的一个近似值, 则称

$$e(x^*) = x^* - x$$

为 x^* 的绝对误差, 简称误差.

同时, 误差的绝对值的上限 $\varepsilon(x^*)$, 即有

$$|e(x^*)| = |x^* - x| \leq \varepsilon(x^*)$$

$\varepsilon(x^*)$ 称为绝对误差限.

注意: 误差有正有负, 而误差限恒为正值.

习惯上, 我们把精确值和测量值的关系表示为

$$x = x^* \pm \varepsilon$$

相对误差与相对误差限

定义 1.1.2 (相对误差与相对误差限). 设 x 为准确值, x^* 为近似值, 称

$$e_r^* = e_r^*(x^*) = \frac{e(x^*)}{x} = \frac{x^* - x}{x}$$

为近似值 x^* 的相对误差.

同时, 其绝对值的上限 ε_r^*, 即有

$$\left|\frac{x - x^*}{x}\right| \leq \varepsilon_r^*$$

ε_r^* 称为相对误差限.

可以证明, 当 e_r^* 较小时, 有

$$e_r^* \approx \frac{x^* - x}{x^*}$$

同时易得

$$\varepsilon_r^* = \frac{\varepsilon^*}{|x^*|}$$

有效数字

定义 1.1.3 (有效数字, 有效位数, 有效数). *若近似值 x^* 误差满足*

$$|x - x^*| \leq \frac{1}{2} \times 10^{-n}$$

则称 x^* 近似表示 x 准确到小数点后第 n 位, 并从第 n 位起一直到最左边非零数字之间的一切数字称为有效数字, 位数为有效位数.

若所有数字均为有效数字, 则称为有效数

例 1.1.2. *考虑圆周率 π, 且有近似值 $\pi_1 = 3.14, \pi_2 = 3.1415, \pi_3 = 3.1416, \pi_4 = 3.14159$. 考虑它们的有效数字, 且判断是否为有效数.*

解. 对于 $\pi_1 = 3.14$, 有 $|\pi - \pi_1| \approx 0.00159 \leq 0.5 \times 10^{-2}$, 即 π_1 精确到小数点后 2 位, 有效数字是 3 位, 是有效数.

同理, 有 $|\pi - \pi_2| \approx 0.0000926 \leq 0.5 \times 10^{-3}$, 即 π_2 精确到小数点后 3 位, 有效数字是 4 位, 不是有效数.

$|\pi - \pi_3| \approx 0.0000073 \leq 0.5 \times 10^{-4}$, 即 π_3 精确到小数点后 4 位, 有效数字是 5 位, 是有效数.

$|\pi - \pi_4| \approx 0.0000026 \leq 0.5 \times 10^{-5}$, 即 π_4 精确到小数点后 5 位, 有效数字是 6 位, 是有效数. □

从上例中不难看出, 有效数通常是采取四舍五入所得到的近似值.

扩展: 我们可以简单给出关于四舍五入的证明.

证明. 设准确值为 x, 其近似值为 x^*, 考虑近似值精确到小数点后 n 位, 即

$$|x - x^*| \leq 5 \times 10^{-(n+1)}$$

若其为有效数, 则 x^* 为小数点后 n 位, 不妨设

$$x^* = a + b \cdot 10^{-n}$$

其中 $b \in [1, 10)$

特别地, 分两种情况讨论.

若 $x > x^*$, 即真实值大于近似值, 此时有

$$x \leq x^* + 5 \times 10^{-(n+1)} = a + b \cdot 10^{-n} + 5 \times 10^{-(n+1)}$$

即当小数点后第 $n+1$ 位小于等于 5 时, 舍去后面的数字可以得到有效数.

若 $x < x^*$, 即真实值小于近似值, 此时有

$$\begin{aligned} x \geq x^* - 5 \times 10^{-(n+1)} &= a + b \cdot 10^{-n} - 5 \times 10^{-(n+1)} \\ &= a + (b-1) \cdot 10^{-n} + 5 \times 10^{-(n+1)} \end{aligned}$$

即当小数点后第 $n+1$ 位大于等于 5 时, 进位可以得到有效数. □

对于 n 位有效数字, 可以写成下面所示标准形式:

$$x^* = \pm 10^m \times \left(a_1 + a_2 \times 10^{-1} + \cdots + a_n \times 10^{-(n-1)}\right) \tag{1.1}$$

其中, a_1 是 1 到 9 之间的一个数字, $a_2, \cdots, a_n$ 是 0 到 9 之间的一个数字, m 为整数, 不难得

$$|x - x^*| \leq \frac{1}{2} \times 10^{m-n+1}$$

关于有效数字和相对误差限之间的关系, 有如下定理.

定理 1.1.1. *对于用式 (1.1) 表示的近似数 x^*, 若 x^* 具有 n 位有效数字, 则其相对误差限为*

$$\varepsilon_r^* \leq \frac{1}{2a_1} \times 10^{-(n-1)}$$

证明. 由式 1.1可得

$$a_1 \times 10^m \leq |x^*| \leq (a_1 + 1) \times 10^m$$

当 x^* 有 n 位有效数字时, 有

$$|x - x^*| = |x^*| \varepsilon_r^* \leq (a_1 + 1) \times 10^m \times \frac{1}{2(a_1 + 1)} \times 10^{-n+1} = 0.5 \times 10^{m-n+1}$$

故 x^* 有 n 位有效数字. □

上述定理表明: 有效位数越多, 相对误差限越小.

例 1.1.3. *令 $\sqrt{20}$ 的近似值相对误差限小于 0.1%, 则需要取多少位有效数字?*

解. 由定理 1.1.1可知

$$\varepsilon_r^* \leq \frac{1}{2a_1} \times 10^{-n+1}$$

由于 $\sqrt{20} \approx 4.4$, 故 $a_1 = 4$, 只需要取 $n = 4$, 有

$$\varepsilon_r^* \leq 0.125 \times 10^{-3} < 10^{-3} = 0.1\%$$

即只需要对 $\sqrt{20}$ 的近似值取 4 位有效数字, 其相对误差限就可以小于 0.1%, 此时有

$$\sqrt{20} \approx 4.472.$$

$\square$