Apuntes

Marcos Ávila Navas

I.E.S Los Colegiales

Contents

PART

I

Preambulo

Section 1

Sobre este libro

Este libro trata de recoger todos los temas que un estudiante de 2º de bachillerato puede encontrarse en las distintas asignaturas. Las asignaturas tratadas no son exhaustas: solo se recogen **Matemáticas II**, **Física**, **Tecnología**, **Filosofía**, y **Lengua**. Es por tanto dirigido al itinerario tecnológico impartido en muchos centros, pero especialmente al impartido en el I.E.S Los Colegiales.

Subsection 1.1

Cómo leer este libro

Este libro intenta da una explicación profunda tal que el estudiante sea capaz de comprender la intuición que lleva al planteamiento de los problemas, el razonamiento tras los distintos resultados, o las conclusiones del autor en cuestión.

Cabe remarcar que el orden de los temas no es casualidad: de tanto en tanto se utilizarán conceptos ya trabajados en partes anteriores, tal que, por ejemplo, para mejor comprender por qué el potencial gravitatorio tiende a 0 en el infinito, el lector será dirigido a la parte donde se trata tales cuestiones.

PART
II

Matemáticas

SECTION 2

Preludio

Las areas de las matemáticas pertinentes a la selectividad son 4: **análisis real**, **geometría**, **álgebra**, **probabilidad y estadísica**.

SUBSECTION 2.1

Lógica proposicional de primer orden

Se dice que las matemáticas son un lenguaje. Como tal, y aunque preferimos el lenguaje natural, y nos limitamos a este para todo lo relevante a la selectividad, es bueno familiarizarse con el lenguaje matemático básico. Aunque existen varios "lenguajes" para las matemáticas, el más fácil, más usado, y el clásico es la "***lógica proposicional de primer orden***".

En esencia, la lógica proposicional trata de construir "*proposiciones*" utilizando un cierto conjunto de símbolos, los "*conectores lógicos*" y los "*cuantificadores*". Sin entrar en demasiado detalle, una proposición es una declaración con un valor de verdad ("*Hoy hace sol*", "*Sócrates es inmortal*", "*Beethoven el perro fue un gran pianista*"...). Estas declaraciones naturalmente forman otras utilizando "*conectores lógicos*". Por ejemplo, "*Mañana lloverá y hoy hace sol*" se puede descomponer en dos otras proposiciones, que si ambas son verdad harán la proposición total verdad. Cada conector lógico tiene asociado un símbolo cómo "$\wedge$" en el caso de "y".

Los conectores mas comunes son: conjunción ("*... y ...*", "$\wedge$"), disyunción ("*... o ...*", "$\vee$"), negación ("*no ...*", "$\neg$") e implicación ("*... por lo tanto ...*", "$\implies$").

Por otra parte, también nos interesa hablar de para que cosas algo es verdad. Por ejemplo, "*Cualquier número natural se puede factorizar en números primos*" tiene un sentido de extensión completamente distinto a "*Existen 3 números enteros tal que la suma de los cuadrados de dos sean igual al cuadrado del tercero*". Hay dos tipos de cuantificadores: universal ("*Cualquier "x", ...*", "$\forall x. \ldots$") y existencial ("*Existe "x" tal que, ...*", "$\exists x. \ldots$").

Con esto, podemos adentrarnos un poco en la anatomía de la proposición. Una proposición tiene un "sujeto" (*variables que representan de lo que se está hablando*) y un "predicado" (*lo que se postula que las variables satisfacen*). Se dice que una variable es "libre" cuando aparece en el predicado sin haber sido cuantificada. Típicamente nos interesan proposiciones sin variables libres, ya que es imposible deducir el valor de verdad de "*$\underline{x}$ es mortal*" si no sabemos de donde procede x (es decir, deberíamos añadir "*cualquier humano, llamese x, para el que ...*" o "*existe un humano, llamese x, para el que ...*").

SUBSECTION 2.2

Conjuntos

En esencia, lo que las matemáticas clásicas [1] son es el estudio de "conjuntos". Un conjunto se puede pensar intuitivamente cómo un saco: una agrupación, desordenada, de elementos únicos (es decir, no permitimos elementos repetidos). La notación básica

[1] *Existen otras "matemáticas", por ejemplo la constructiva*

de un conjunto es separar los elementos por comas y encapsular la enumeración con llaves, por ejemplo: $\{2, 3, abc, \{\star\}\}$.

Formalmente, tenemos los axiomas Zermelo–Frankel:

Definition 1 (ZFC) Llamamos ZFC a los siguientes axiomas:

- **Extensionalidad**: dos conjuntos son iguales si (y solo si) tienen los mismos elementos.
$$X = Y \iff \forall x.\ (x \in X \iff x \in Y)$$
- **Conjunto vacío**: existe un conjunto sin elementos, denotado $\emptyset$.
$$\exists \emptyset.\ \forall x.\ x \notin \emptyset$$
- **Par**: dados x, y existe $\{x, y\}$.
$$\forall X, Y.\ \exists \{X, Y\}.\ \forall x.\ (x \in \{X, Y\} \iff x = X \vee x = Y))$$
- **Unión**: dado X existe $\bigcup X$.
$$\forall X.\ \exists \bigcup X.\ \forall u.\ (u \in \bigcup X \iff \exists x.\ (u \in x \wedge x \in X))$$
- **Comprensión restringida**: se pueden formar subconjuntos definidos por predicados.
- **Reemplazo**: imágenes de funciones definibles son conjuntos.
- **Infinito**: existe un conjunto infinito.
- **Conjunto potencia**: la clase de todos los subconjuntos de un conjunto es un conjunto.
- **Elección**: toda familia de conjuntos no vacíos tiene una función de elección.

No obstante, raramente nos preocupan los específicos de los axiomas. La excepción a esto es el axioma de elección, ya que es equivalente a muchos teoremas cruciales para muchas áreas de las matemáticas (y sin embargo es el axioma más controversial).

Sobre los conjuntos nos interesa fundamentalmente una cuestión: si algo pertenece a él o no. Esto se representa con un predicado el cuál se representa con la notación $x \in X$ (se puede leer como "x pertenece a X"). Por ejemplo, si $X = \{2, 3, abc, \{\star\}\}$ entonces $2 \in X$, pero no $\star \in X$, lo correcto sería $\{\star\} \in X$. Uno además puede preguntar si todos los elementos de un conjunto pertenecen a otro, con la notación $X \subseteq Y$, definida tal que:

$$X \subseteq Y \iff \forall x \in X,\ x \in Y$$

Remark Aunque por convenio utilizamos mayúsculas para denotar conjuntos y minúsculas para elementos, en realidad, las matemáticas clásicas solo consideran conjuntos. Conque elementos de conjuntos son, a su vez, conjuntos, patrón que se repite hasta terminar con el conjunto vacío cuya existencia es postulada axiomáticamente.

SUBSECTION 2.3

Relaciones

Ocurre que en muchos contextos nos gustaría tener un sentido de igualdad un tanto diferente al que hemos postulado en los axiomas ZFC (por ejemplo, identificar un triángulo $\widehat{ABC}$ a “otro” $\widehat{BAC}$). Toda noción de igualdad debe complir:

- **Reflexividad**: $x = x$.
- **Simetría**: si $x = y$ entonces $y = x$.
- **Transitividad**: si $x = y$ e $y = z$ entonces $x = z$.

Estas propiedades definen lo que se conoce como una **relación de equivalencia**.

Definition 2 Sea X un conjunto. Una **relación** en X es un subconjunto $R \subseteq X \times X$. Decimos que R es una **relación de equivalencia** si satisface reflexividad, simetría y transitividad.

Dada una relación de equivalencia $\sim$ sobre X y un elemento $x \in X$, definimos la **clase de equivalencia** de x como:

$$[x] := \{y \in X \mid y \sim x\}$$

Example Al calcular una *integral* realmente calculamos una clase de equivalencia:

$$\int f(x) \cdot \mathrm{d}x = \{F \in \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F = f\}$$

Dada por la relación de equivalencia:

$$f \sim g \iff \exists C \in \mathbb{R}.\ f(x) + C = g(x)$$

Theorem 1 Las clases de equivalencia de una relación de equivalencia $\sim$ sobre X forman una partición de X.

Proof La reflexividad implica que todo elemento pertenece a su propia clase, luego la unión de todas las clases es X. La simetría y transitividad implican que dos clases o bien son disjuntas o bien coinciden. □

El conjunto de todas las clases de equivalencia se denota por $X/\sim$ y se llama el **conjunto cociente**. Este proceso es ubicuo en matemáticas: construcción de los números racionales, reales, espacios topológicos, grupos cociente, etc.

Subsection 2.4

Producto cartesiano

Dados dos conjuntos X e Y, definimos su **producto cartesiano** como:

$$X \times Y := \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$$

Remark Formalmente, un par ordenado (x, y) se puede definir como el conjunto $\{\{x\}, \{x, y\}\}$ (per Kuratowski). Esto garantiza que $(x, y) = (x', y')$ si y solo si $x = x'$ e $y = y'$.

Los productos cartesianos vienen determinados por su **propiedad universal**. Utilizando conceptos de la siguiente sección, escribimos $\pi_1 : X \times Y \to X$ para la función que descarta su segundo componente y $\pi_2 : X \times Y \to Y$ para la función que descarta su primer componente. Conque tenemos el diagrama:

$$\begin{tikzcd} & X \times Y \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_2"] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$$

La propiedad universal del producto cartesiano es la siguiente: para cualquier diagrama de la forma:

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[ddl, "p_1"'] \arrow[ddr, "p_2"] & \\ & X \times Y \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_2"] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$$

Existe una función $\theta : C \to X \times Y$ que hace el siguiente diagrama conmutar (es decir, $p_1 = \pi_1 \circ \theta$ y $p_2 = \pi_2 \circ \theta$):

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[ddl, "p_1"'] \arrow[ddr, "p_2"] \arrow[d, dashed, "\theta"] & \\ & X \times Y \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_2"] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$$

SUBSECTION 2.5

Funciones

Con todo esto, derivamos el concepto de función. Decimos que $f : X \to Y$ es una función del conjunto X al conjunto Y a la asociación de cada elemento de X a un único elemento de Y. Formalmente:

Definition 3 (Función) Una función $f : X \to Y$ se define via el conjunto $G_f \subseteq X \times Y$ tal que:

$$\forall x \in X.\ \exists! f(x) \in Y.\ (x, f(x)) \in G_f$$

Nótese que $f(x)$ es solo un símbolo, aunque es trivial de aquí derivar el concepto intuitivo de función que teníamos.

Example Por ejemplo, podemos considerar una función $\chi : X \to Y$ de $X = \{2, 3, abc, \{\star\}\}$ a $Y = \{0, 1\}$ que asocia a los números de X a 1 y al resto de elementos a 0. Si "*tiramos hacia atrás*" por la función $\mathrm{true} : \{\star\} \to Y$ que manda $\star \mapsto 1$ obtendremos el subconjunto de X de los elementos que son números.

La idea tras el anterior ejemplo no será utilizada a este nivel. No obstante, Tanto el mecanismo general (*límites en el sentido de teoría de categorías*) como el ejemplo en sí (*clasificador de subobjetos en el sentido de teoría de topos*) son de extremada importancia para las matemáticas modernas.

De las funciones nos interesa sacar 3 conjuntos:

Definition 4

- El **dominio** ($\mathrm{dom}\, f$): Si $f : X \to Y$ es una función, $\mathrm{dom}\, f = X$ (es decir, el conjunto sobre el que f se define).
- El **codominio** ($\mathrm{cod}\, f$): Si $f : X \to Y$ es una función, $\mathrm{cod}\, f = Y$ (es decir, el

conjunto al que f llega).

- La **imagen** (im f): Si $f : X \to Y$ es una función, $\operatorname{im} f = f(X)$ (es decir, el conjunto en Y que f produce).

Además, podemos categorizar las funciones en 3 tipos:

Definition 5 Decimos que:

- f es **inyectiva** si $\forall x, y \in X.\ f(x) = f(y) \implies x = y$.
- f es **sobreyectiva** si $\forall y \in Y,\ \exists x \in X.\ f(x) = y$.
- f es **biyectiva** si es inyectiva y sobreyectiva.

Theorem 2 Una función $f : X \to Y$ es biyectiva si y solo si existe una función $f^{-1} : Y \to X$ tal que:

$$f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_X \quad \text{y} \quad f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_Y$$

Llamamos a f^{-1} la **inversa** de f.

PROOF Si f es biyectiva, definimos $g(y)$ como el único x tal que $f(x) = y$. La unicidad viene de la inyectividad y la existencia de la sobreyectividad.
El otro sentido es inmediato. $\square$

En este caso decimos que X e Y son **isomorfos como conjuntos** y escribimos $X \cong Y$.

SUBSECTION 2.6

Construcción de los números naturales

El axioma del infinito postula precisamente la existencia del conjunto de números naturales. Dicho axioma utiliza la construcción von Neumann para su representación como conjuntos:

$$0 := \emptyset, \quad n + 1 := n \cup \{n\}$$

Así:

$$0 = \emptyset, \quad 1 = \{0\}, \quad 2 = \{0, 1\}, \quad 3 = \{0, 1, 2\}, \ldots$$

Theorem 3 (Inducción) Sea $P(n)$ una propiedad sobre $\mathbb{N}$. Si:

- $P(0)$ es cierta,
- $\forall n, P(n) \implies P(n + 1)$,

entonces $P(n)$ es cierta para todo $n \in \mathbb{N}$.

Section 3
Análisis real

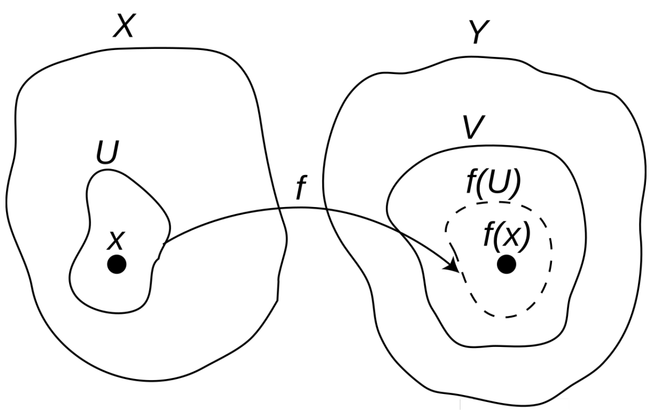
El **análisis real** investiga los números reales, secuencias de estos, y funciones reales (funciones con dominio en $\mathbb{R}$).

Subsection 3.1
Funciones reales

Una función real f es aquella tal que $\mathrm{dom}\, f = X \subseteq \mathbb{R}$, es decir, cuyo dominio es $\mathbb{R}$ o un subconjunto de este. Gracias a la estructura (*topológica*) [2] de los números reales, podemos considerar la noción de **continuidad**:

[2] *La topología es el estudio de espacios construidos por conjuntos. En topología $\mathbb{R}$ se suele considerar como "el espacio de la recta", "**la recta real**"*

Definition 6 (Continuidad topológica) Decimos que una función real es continua en a si a cada intervalo abierto V que contiene a $f(a)$ se le corresponde un intervalo abierto U que contiene a a tal que $f(U) \subseteq V$.



Esta definición no es la estándar (la utilizada en selectividad será definida en la sección sobre límites). Sin embargo, nos da una buena intuición sobre lo que significa continuidad: si pensamos en un intervalo abierto cómo una zona cercana a algún punto, una función continua, según esta definición, es aquella en la que zonas cercanas en el codominio se corresponden a zonas cercanas en el dominio. Dicho de otra manera, si x está cercano a y en el dominio, $f(x)$ esta cercano a $f(y)$ en la imagen.

Por conveniencia, definimos la función $\mathrm{cont} : (X \to \mathbb{R}) \to \mathcal{P}\mathbb{R}$, que a cada función real asocia el subconjunto $\mathrm{cont} f \subseteq X$ en el cuál f es continua.

Además de estas propiedad *topológica*, nos suelen interesar otras propiedades más *algebraicas*, a saber: *simetría* y *periodicidad*.

Definition 7 (Simetría) Sea $a \in \mathbb{R}$ y f una función real, la línea descrita por $x = a$ en el plano cartesiano se llama *eje de simetría par* del gráfico de una función f si:

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(a + x) = f(a - x)$$

Y se llama *eje de simetría impar* si:

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(a + x) = -f(a - x)$$

El caso más común y el que asumimos si no se nos da un eje de simetría es para cuando $a = 0$.

Definition 8 (Periodicidad) Sea $T \in \mathbb{R}$ y f una función real, se dice que f tiene periodo T si:

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x+T) = f(x)$$

Conque, por inducción, para función con periodo T:

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x+nT) = f(x)$$

Remark Si f es periódica de periodo T, entonces basta estudiar su comportamiento en cualquier intervalo de longitud T, por ejemplo $[0, T]$.

3.1.1 En práctica

En la selectividad no es raro un ejercicio que requiera calcular el dominio de una función. Para este fin, debemos identificar el dominio e imagen de todas las funciones con dominios restringidos involucradas y restringir hasta que la imagen de la función que les sirve cómo argumento caiga en el dominio de estas funciones "problemáticas". A continuación una tabla con reglas de inferencia para los dominios:

$f(x)$	dom f
$f_1(x) + f_2(x)$	dom $f_1 \cap$ dom f_2
$f_1(x)f_2(x)$	dom $f_1 \cap$ dom f_2
$f_1(x)/f_2(x)$	(dom $f_1 \cap$ dom f_2)$\setminus\{f_2(x) = 0\}$
ax^b	$\mathbb{R}$
$\sqrt[2n]{x}$	$[0, +\infty)$
$\sqrt[2n+1]{x}$	$\mathbb{R}$
a^x	$\mathbb{R}$
$\ln(x)$	$(0, +\infty)$
$\lvert x\rvert$	$\mathbb{R}$

SUBSECTION 3.2

Límites

Los límites son la propiedad característica de los números reales [3]: el salto de los números racionales a los números reales es precisamente requerir que toda secuencia (*Cauchy*) converja. [4]

[3] *Todo "campo completo ordenado" es isomórfico a* $\mathbb{R}$.

[4] *Estos son los llamados los reales Cauchy, también existen los reales Dedekind. En matemáticas constructivas los reales Dedekind contienen "más números".*

Definition 9 (Secuencia) Una secuencia (de números reales) es una función de $\mathbb{N}$ a $\mathbb{R}$. Equivalentemente es una lista ordenada e infinita de números reales.

Definition 10 (Secuencia Cauchy) Se dice que una secuencia es *Cauchy* cuando los números se acercan aribtrariamente. Si $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ es una secuencia Cauchy:

$$\forall \epsilon > 0. \exists N \in \mathbb{R}. \forall m, n \geq N.\ |f(m) - f(n)| < \epsilon$$

Con esta definición a mano, el límite de una función f cuando tiende a a es simplemente a lo que converja el aplicarle f a una secuencia Cauchy que converja a a:

Definition 11 (Límite de una función) Se dice que $\lim_{x\to a} f(x) = L$ si:

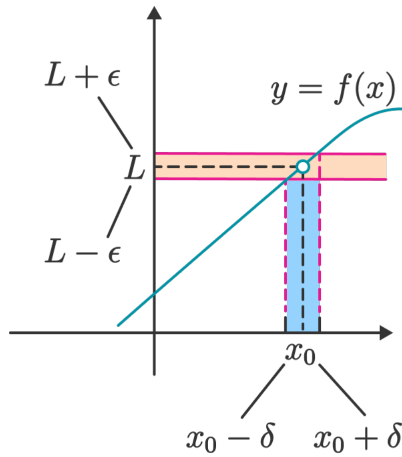
$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0.\ |a - x| < \delta \to |L - f(x)| < \epsilon$$

Theorem 4 (Unicidad del límite) Si $\lim_{x\to a} f(x) = L$ y $\lim_{x\to a} f(x) = M$, entonces $L = M$.

Proof | Supóngase $L \neq M$. Tomando $\epsilon = |L - M|/2$ se obtiene una contradicción. $\square$

Theorem 5 (Caracterización secuencial) $\lim_{x\to a} f(x) = L$ si y solo si para toda sucesión (x_n) con $x_n \to a$ y $x_n \neq a$, se tiene $f(x_n) \to L$.

Remark Esta equivalencia es específica de espacios métricos de primer numerable como $\mathbb{R}$.



En la práctica, hay veces que nos interesa investigar secuencias Cauchy que siempre sean mayores o menores que el número al que convergen:

Definition 12 (Límites laterales de una función) Se dice que $\lim_{x\to a^+} f(x) = L$ (convergencia por la derecha) si:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0. a < x < a + \delta \to |L - f(x)| < \epsilon$$

Dualmente, se dice que $\lim_{x\to a^-} f(x) = L$ (convergencia por la izquierda) si:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0. a - \delta < x < a \to |L - f(x)| < \epsilon$$

También no son pocas las ocasiones donde nos interesa considerar el comportamiento de una función para números “cada vez más grandes”:

Definition 13 (Límites al infinito) Se dice que $\lim_{x\to +\infty} f(x) = L$ si:

$$\forall \epsilon > 0. \exists N \in \mathbb{R}.\ x > N \to |f(x) - L| < \epsilon$$

Dualmente, se dice que $\lim_{x\to -\infty} f(x) = L$ si:

$$\forall \epsilon > 0. \exists N \in \mathbb{R}.\ x < N \to |f(x) - L| < \epsilon$$

Todas estas definiciones serán unificadas para la resolución de problemas en lo que podemos llamar *el álgebra de los reales extendidos* ($\bar{\mathbb{R}}$).

Finalmente, cabe replantear la definción de continuidad utilizando límties, ya que esta es la utilizada en la selectividad:

Definition 14 (Continuidad) Decimos que una función real es continua en a si:

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = f(a) = \lim_{x\to a^+} f(x)$$

Theorem 6 Si $f : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua en a en el sentido ϵ–δ, entonces es continua en a en el sentido topológico, y viceversa.

Proof En $\mathbb{R}$ los abiertos son uniones de intervalos abiertos. Traducir un entorno abierto en una condición ϵ–δ es trivial. □

3.2.1 Álgebra de los reales extendidos

Empezamos definiendo el conjunto sobre el cual definiremos las operaciones aptas para el cálculo de límites:

Definition 15 (Los reales extendidos) Llamese $\bar{\mathbb{R}}$ o "reales extendidos" al conjunto:

$$\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty, \text{“Indet.”}, \text{“No existe.”}\}$$

Estos dos últimos valores no vienen en la construcción clásica de los reales extendidos, son valores que añadimos ya que nuestra construcción de $\bar{\mathbb{R}}$ va orientada al cálculo de límites.

Para describir el álgebra que nos interesa sobre el anterior conjunto, basta con definir cómo partícipan los nuevos símbolos, y es que no modificamos las operaciones sobre los números reales. Para este fin, basta con decir que los símbolos de infinito operan cómo uno esperaría ($k + (\pm\infty) = \pm\infty$, $k(\pm\infty) = \pm\infty \ldots$). Los únicos casos donde la anterior intuición falla son en los casos "indeterminados". Dichos casos son: $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$, $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 1^{∞}, 0^0, 0^{∞}. Para lo que la selectividad concierne, solo nos interesan los 4 primeros casos.

Por último, el símbolo "No existe" viene a funcionar cómo un indicador de la divergencia de lo que se está intentando cálcular. Por ejemplo $\cos(+\infty) =$ "No existe".

3.2.2 En la práctica

Falta por explicar cómo pasar del cálculo de un límite a operar en el álgebra anteriormente descrito. Para lo cuál es suficiente decir que si se tiene $\lim x \to \alpha f(x)$, donde α es o un real o un infinito, basta con sustituir α por x en $f(x)$ y operar siguiendo las reglas ya dichas. Si el resultado de operar es otra cosa que no sea "Indet.", hemos terminado. En caso de un "Indet.", debemos trabajar $f(x)$ hasta conseguir una expresión que al sustituir nos de el resultado deseado.

Una técnica que suele funcionar es transformar todos los casos en $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$. Para $0 \cdot \infty$ la transformación es directa ($0 \cdot \infty = \frac{1}{\infty} \cdot \infty = \frac{\infty}{\infty}$). Para $\infty - \infty$ uno suele multiplicar y dividir por el conjugado de la expresión. Una vez en uno de estos dos casos, suele ser posible sacar factor común tanto en el denominador como en el numerador o se puede aplicar *L'Hopital*, a ser explicado en la siguiente sección.

Subsection 3.3

Derivadas

En muchas situaciones nos interesa conocer la tasa de variación de una función en un intervalo, para lo cuál, tenemos la siguiente definición:

Definition 16 (Tasa de Variacion Media, TVM) La *Tasa de Varaición Media* de una función real f en el intervalo $[a, b]$ se define como:

$$TVM_a^b f := \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Ocurre que, asimismo, es interesante investigar cuando $[a, b]$ "es un punto". Es decir, cuando a y b estén arbitrariamente cerca, que es lo mismo que $b = \lim_{h\to 0} a + h$. Siguiendo esta intuición, llegamos al concepto de *derivada*:

Definition 17 (Derivada en un punto y función derivada) Sea f una función real. La *derivada de f en x* se define por:

$$f'(x) := \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Nótese que $f'(x)$ es sólo un símbolo. No obstante es posible definir la *función derivada*, que a cada $x \in \mathrm{cont} f$ asocia a su correspondiente $f'(x)$.

Definimos $\mathrm{der} : (X \to \mathbb{R}) \to \mathcal{P}\mathbb{R}$ de manera similar a cont.

Remark Es posible que f no sea derivable en un punto pero si sea continua (por ejemplo, $f(x) = |x|$ para $x = 0$). En general, por tanto, $x \in \mathrm{der} f \to x \in \mathrm{cont} f$, pero la conversa es falsa.

En general:

Theorem 7 Si f es derivable en a, entonces es continua en a.

Proof Escribimos:

$$f(x) = f(a) + (x-a)\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

y tomamos límite cuando $x \to a$. □

La función derivada f' de otra, al ser una función real, puede asimismo ser derivada indefinidamente. Resultando en lo que llamamos la *n-ésima derivada de f*. [5]

[5] *Una función ∞-derivable se denomina suave.*

Las nociones anteriores también son útiles para el cálculo de límites gracias a la *regla de L'Hopital*:

Theorem 8 (Regla de L'Hopital) Sean f y g funciones reales para las que $\lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{g(x)}$ sea 0 o ∞. Se cumple que:

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\alpha} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Subsection 3.4

Análisis de una función

Podemos utilizar los conceptos anteriores como herramientas para investigar el comportamiento de una función *localmente*.

3.4.1 Monotonía

La monotonía concierne a los intervalos de la función donde se tiene un mismo signo de cambio. Es decir, donde crece y decrece la función. Para este fin, por cada tramo continuo de nuestra función, investigamos el signo de $f'(x)$ para x en dicho tramo. Que $f'(x) > 0$ significa que la función tiene tendencia a crecer cerca de x, y lo opuesto es verdad si $f'(x) < 0$. Cuando $f'(x) = 0$ estamos ante un *punto crítico*, punto donde la función cambia de signo de cambio.

En resumen:

Theorem 9 Sea f continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b).

- Si $f'(x) \geq 0$ en (a, b), entonces f es creciente.

- Si $f'(x) \leq 0$ en (a, b), entonces f es decreciente.

3.4.2 Curvatura

La curvatura concierne a los intervalos de la función donde la gráfica de la tangente se encuentra en una misma posición relativa a la gráfica de la función (a saber: por arriba o por debajo).

Definition 18 Decimos que f es cóncava hacia arriba en un intervalo si $f''(x) > 0$, y cóncava hacia abajo si $f''(x) < 0$. Un punto donde $f''(x) = 0$ y cambia de signo se llama punto de inflexión.

Los mismos principios de monotonía aplican a curvatura, ya que estudiar la curvatura de f es equivalente a estudiar la monotonía de f'.

SUBSECTION 3.5

Integrales

En ciertas circunstancias podemos agregar información local de un espacio en un proceso que llamamos *integración*. Para funciones reales, podemos definir la llamada *integración de Riemann*. Conceptualmente, la integral de Riemann ($\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$) calcula una "media" de los valores de $f(x), x \in [a, b]$.

Ocurre que la integración y la derivación son procesos inversos:

Theorem 10 (Teorema fundamental del cálculo) Sea f una función real y C un número real, llamado "*constante de derivación*". Entonces:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int f(x)\mathrm{d}x + C\right) = f(x)$$

De la misma manera que buscar una función inversa a otra no es trivial, buscar una *primitiva* [6], es decir, integrar una función, suele requerir utilizar ciertas técnicas falibles (conque no es un proceso mecánico como la diferenciación).

[6] *una función real F es una antiderivada, o primitiva, de otra f si la derivada de F es f*

El teorema anterior es una instancia del teorema más general de Stokes.

Theorem 11 (Teorema de Stokes) Sea X una *variedad diferencial*, $\omega : X$ una *forma diferencial*, y σ un *símplice suave*. Entonces:

$$\int_{\partial\sigma} \omega = \int_{\sigma} \mathrm{d}\omega$$

Tomando $X = [a, b]$ y el canónico 1-símplice suave $\sigma : \Delta^1 \to [a, b]$ recuperamos el teorema fundamental del cálculo.

3.5.1 Integración por cambio de variable

Theorem 12 (Cambio de variable) Sea $t = \Phi(x)$ una substitución y f una función real integrable. Para una integral en términos de x, entonces:

$$\int f(x) \cdot \mathrm{d}x = \int f(\Phi^{-1}(t)) \cdot \frac{\mathrm{d}t}{\Phi'(\Phi^{-1}(t))}$$

3.5.2 Integración por partes

Theorem 13 (Por partes) Sea f una función real integrable tal ue $f(x) = u(x)v'(x)$. Se cumple que:

$$\int f(x) \cdot \mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)\mathrm{d}x$$

Remark Podemos recordar el anterior resultado con la expresión $\int u\mathrm{d}v = uv - \int v\mathrm{d}u$ a la cuál le asociamos la regla memotécnica: "*Un dia vi una vaca sin rabo vestida de uniforme*".

3.5.3 Integración por fracciones simples

Theorem 14 (Fracciones simples) Sea f una función racional para la cuál el grado del denominador n sea mayor a la del numerador y sean $r_1 \dots r_n$ las raíces del denominador, podemos descomponer f tal que:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1} \frac{A_i}{(x - r_i)^\alpha}$$

Donde $A_1 \dots A_n$ son coeficientes reales y α es la multiplicidad de la raíz r_i.

Conque podemos integrar funciones racionales como aquella desomposición.

Subsection 3.6

Ejercicios selectividad resueltos

1. **Madrid. Ordinaria 2025. Pregunta 2**: Un muro rectangular de la biblioteca pública del barrio se va a pintar con la ayuda de unos grafiteros. La dimensión del muro es de 3 metros de alto y 12 metros de largo. Colocando la esquina inferior izquierda del muro en el origen de coordenadas, se va a utilizar la curva

$$f(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{9}\right) + 2$$

para diferenciar dos regiones del muro que serán pintadas con dos colores distintos. Se sabe que con un bote de spray se pueden pintar 3 metros cuadrados de superficie.

   (a) (0.75 puntos) Halle el valor máximo y el valor mínimo de la función $f(x)$ en el intervalo $[0, 12]$. ¿Está la curva en este intervalo $[0, 12]$ contenida completamente en el muro?

   (b) (1.25 puntos) Halle el área que tienen que pintar de cada color.

   (c) (0.5 puntos) Cuántos botes de spray se tienen que comprar como mínimo para pintar toda el área bajo la curva $f(x)$?

Proof Por el teorema de Weierstrass, basta con estudiar los extremos del dominio y los máximos relativos para determinar los máximos y mínimos. Para este fin, nótese que f se define cómo una composición de funciones derivables, por lo que es derivable (asimismo continua). Por lo cuál, derivamos:

$$\frac{d}{dx}f = \frac{d}{dx}\cos\left(\frac{\pi x}{9}\right) + 2 = -\frac{\pi}{9}\sin\left(\frac{\pi x}{9}\right)$$

A continuación, averiguamos los puntos críticos:

$$f'(x) = 0;\ -\frac{\pi}{9}\sin\left(\frac{\pi x}{9}\right) = 0;\ \frac{\pi x}{9} = n\pi;\ x = 9n \quad \text{donde } n \in \mathbb{Z}$$

En concreto, en nuestro dominio encontramos dos puntos críticos, cuando $n = 0$ y $n = 1$.
Desde este punto, basta con ordenar los valores de los puntos que nos interesan y tomar el mayor y el menor:

$$f(0) = 3 > f(12) = 1.5 > f(9) > 1$$

Por tanto, el valor máximo y mínimo de f es 3 y 1 cuando $x = 0$ y $x = 9$ respectivamente. Ya que $3, 1 \in [0, 3]$ y que f es continua, f es contenida completamente en el muro. $\square$

Proof Para calcular el área de cada color, integramos y utilizamos la geometría rectangular del gráfico para derivar una área de otra:

$$A_1 = \int_0^{12} f(x)dx = \int_0^{12} \cos\left(\frac{\pi x}{9}\right) + 2dx = \left[\frac{9}{\pi}\sin\left(\frac{\pi x}{9}\right) + 2x\right]_0^{12} \approx 21.51m$$

$$A_T = A_1 + A_2;\ A_2 = A_T - A_1 = bh - A_1 \approx 14.48m$$

$\square$

Proof Averiguamos la cantidad de botes utilizando que un bote puede pintar hasta 3 metros cuadrados de superficie:

$$n_{\text{botes}} = \lceil \frac{A_1}{\text{area}\backslash\text{bote}} \rceil = 8 \text{ botes}$$

$\square$

Section 4

Álgebra

Subsection 4.1

De monoide a espacio vectorial

El álgebra, en definitiva, es la manipulación de símbolos de manera sintética y abstracta. En álgebra equipamos a conjuntos con ciertas operaciones que cumplen ciertas propiedades. La estructura más simple que se le puede dar a un conjunto es un **magma**, no obstante dicha estructura no aparece tanto como los monoides:

Definition 19 (Monoide) Sea $\mathcal{M}$ un conjunto. Un *monoide* es un triple $(\mathcal{M}, \cdot, \epsilon)$ donde $\cdot : \mathcal{M} \times \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ es una función y $\epsilon \in \mathcal{M}$ es el *elemento neutro*, es decir:

$$\forall a \in \mathcal{M},\ a \cdot \epsilon = \epsilon \cdot a = a$$

Example (Monoides) Monoides ya encontramos muchos naturalmente en matemáticas:

- $(\mathbb{N}, +, 0)$: los números naturales con la suma.
- $(\mathbb{Z}_{\geq 0}, \times, 1)$: números naturales incluyendo el 0 con la multiplicación.
- $(\text{End}(X), \circ, 1_X)$: el conjunto de endomorfismos de un conjunto X con composición de funciones.
- $(\mathcal{P}(X), \cup, \emptyset)$: el conjunto de subconjuntos de X con unión.

Definition 20 (Grupos) Sea $\mathcal{G}$ un conjunto. Un *grupo* es un monoide para el que:

$$\forall x \in \mathcal{G},\ \exists x^{-1} \in \mathcal{G}.\ x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = \epsilon$$

Llamamos a dicho x^{-1} la inversa de x.
Si es verdad que $\forall x, y \in \mathcal{G}.\ x \cdot y = y \cdot x$ llamamos al grupo *abeliano*.

Example (Grupos) Los grupos son otro objeto matemático estudiado extensamente. Ejempos de grupos:

- $(\mathbb{Z}, +, 0)$: enteros con suma, grupo abeliano.
- $(\mathbb{R}^*, \times, 1)$: reales distintos de cero con multiplicación.
- S_n con composición: el grupo simétrico de permutaciones de n elementos.
- $(\mathbb{C}, +, 0)$: números complejos con suma.

Definition 21 (Anillos) Sea $\mathfrak{R}$ un conjunto. Un anillo es un grupo abeliano $(\mathcal{G}, +, 0)$ junto con un monoide $(\mathcal{G}, \cdot, 1)$ tal que la *suma sea distributiva sobre la multiplicación*:

$$\forall a, b, c \in \mathfrak{R},\ \ a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

y

$$\forall a, b, c \in \mathfrak{R},\ \ (b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$$

Técnicamente, lo anterior es un *anillo unitario*. Cuando ocurre que el monoide de la multiplicación es, además, un grupo, entonces tenemos un *cuerpo*.

Example (Anillos) El ejemplo de anillo canónico es el conjunto de funciones sobre algún espacio a algún otro anillo. Ejemplos de anillos:

- $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$: enteros con suma y multiplicación.
- $(\mathbb{R}[x], +, \cdot)$: polinomios reales.
- $(\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R}), +, \cdot)$: matrices cuadradas con suma y multiplicación usual.

Example (Cuerpos) Ejemplos de cuerpos:

- $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$: números racionales.
- $(\mathbb{R}, +, \cdot)$: números reales.
- $(\mathbb{C}, +, \cdot)$: números complejos.
- $\mathbb{F}_p$ con p primo: cuerpo finito con operaciones módulo p.

Definition 22 (Modulo sobre un anillo) Un modulo V sobre un anillo $\mathfrak{R}$ es un monoide abeliano equipado con una acción $\cdot : \mathfrak{R} \times V \to V$ compatible con la estructura de anillo de $\mathfrak{R}$:

$$\forall r, s \in \mathfrak{R},\ \forall v \in V,\ \ (r + s) \cdot v = r \cdot v + s \cdot v$$

$$\forall r \in \mathfrak{R},\ \forall v, w \in V,\ \ r \cdot (v + w) = r \cdot v + r \cdot w$$

$$\forall r, s \in \mathfrak{R},\ \forall v \in V,\ \ (r \cdot s) \cdot v = r \cdot (v \cdot s)$$

$$\forall v \in V,\ 1 \cdot v = v$$

Cuando $\mathfrak{R}$ es además un cuerpo, V es un *espacio vectorial*.

Example (Módulos) Ejemplos de módulos:

- $\mathbb{Z}^n$ como módulo sobre $\mathbb{Z}$.
- $\mathbb{R}^n$ como espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.
- $\mathbb{C}^n$ como espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$.
- El conjunto de polinomios $\mathbb{R}[x]$ como módulo sobre $\mathbb{R}$.

Subsection 4.2

Espacios vectoriales

4.2.1 Bases

Una base es un subconjunto del espacio vectorial que genera al resto de elementos. Asumiendo el axioma de la elección [7] todo espacio vectorial tiene una base. Antes de definir formalmente una base, debemos ser precisos con que significa que "generen" el espacio vectorial:

[7] https://ncatlab.org/nlab/show/axiom+of+choice

Definition 23 (Combinación lineal) Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo k y $U \subseteq V$ un subconjunto. Definimos el conjunto $\operatorname{span} U \subseteq V$ como:

$$\operatorname{span} U := \left\{ \sum_{a_i \in k,\, \vec{v_i} \in U} a_i \vec{v_i} \right\}$$

Decimos que un elemento de $\operatorname{span} U$ es una combinación lineal de U.

Asimismo, una base $B \subseteq V$ debería de ser un subconjunto mínimo con la propiedad de que $\operatorname{span} B = V$:

Definition 24 (Independencia lineal) Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo k y $U \subseteq V$ un subconjunto finito. Decimos que U es linealmente independiente si:

$$\sum_{a_i \in k,\, \vec{v_i} \in U} a_i \vec{v_i} = 0 \Rightarrow a_i = 0$$

En total:

Definition 25 (Base) Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo k y $B \subseteq V$ un subconjunto (posiblemente infinito). Decimos que B es una base para V si $\operatorname{span} B = V$ y si cualquier subconjunto finito de B es linealmente independiente.

Es un teorema que cualquier base para un mismo espacio vectorial tiene una misma cardinalidad. Así, si aceptamos que todo espacio vectorial tiene una base, podemos definir una noción de dimensión del espacio de manera sencilla:

Definition 26 (Dimensión) La cardinalidad κ de una base es la dimensión de un espacio vectorial.

4.2.2 Transformaciones lineales

Una transformación lineal es un k-homomorfismo entre espacios vectoriales, esto es:

Definition 27 (Transformación lineal) Sea V, W espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo k. Una función $T : V \to W$ es una transformación lineal si:

1. $$\forall a \in k,\ \forall \vec{v} \in V,\ T(a\vec{v}) = aT(\vec{v})$$

2. $$\forall \vec{v,w} \in V,\ T(\vec{v} + \vec{w}) = T(\vec{v}) + T(\vec{w})$$

equivalentemente,

$$\forall a \in k,\ \forall \vec{v,w} \in V,\ T(a\vec{v} + \vec{w}) = aT(\vec{v}) + T(\vec{w})$$

4.2.3 Matrices

Toda transformación lineal es equivalentemente una *matríz*:

Definition 28 (Matríz $n \times m$) Una matríz (real, compleja...) $n \times m$ donde n, m son cardinales (típicamente finitos) es una función $n \times m \to \mathbb{R}\,(\mathbb{C}, \mathbb{Q} \ldots)$. No obstante, "matríz" implica que debemos representar dicha función como una tabla de n filas y m columnas cuyas entradas son valores en el objeto algebraico apropiado (los reales, por ejemplo):

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nm} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n\times m}$$

La correspondencia entre matríz y transformación lineal viene dada por el hecho de que una transformación lineal sea esencialmente determinada por su acción en una alguna base de su dominio. Así, cada columna de la matríz es el resultado de aplicar la transformación a un elemento de la base. Dicho lo cuál, es fácil derivar los cálculos asociados a aplicar una transformación a un elemento utilizando matrices (*multiplicación matríz–vector*) y otras operaciones como composición de matrices (*multiplicación matríz–matríz*).

Estudiar transformaciones lineales por medio de matrices hace más claro y computacional lo que prosigue. Además, el concepto de matríz escapa el de transformación lineal, siendo una manera útil de representar distintos fenómenos.

4.2.4 Tipos de matrices

Definition 29 (Matriz cuadrada) Una matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ tiene igual número de filas y columnas.

Definition 30 (Matriz diagonal) Una matriz cuadrada $A = (a_{ij})$ es diagonal si $a_{ij} = 0$ para todo $i \neq j$.

Definition 31 (Matriz identidad) La matriz identidad I_n es diagonal con todos los elementos de la diagonal iguales a 1.

Definition 32 (Matriz nula) Una matriz A es nula si $a_{ij} = 0$ para todo i, j.

Definition 33 (Matriz triangular)
- A es triangular superior si $a_{ij} = 0$ para todo $i > j$.
- A es triangular inferior si $a_{ij} = 0$ para todo $i < j$.

Definition 34 (Matriz simétrica y antisimétrica)
- A es simétrica si $A^T = A$.
- A es antisimétrica si $A^T = -A$.

Definition 35 (Matriz invertible) Una matriz A es invertible si existe B tal que $AB = BA = I_n$.

4.2.5 Resultados sobre matrices

Theorem 15 (Determinante de matriz triangular) Sea A triangular (superior o inferior). Entonces:

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Theorem 16 (Invertibilidad y determinante) Una matriz cuadrada A es invertible si y sólo si $\det(A) \neq 0$.

Theorem 17 (Producto de matrices) Sean $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}$. Entonces:

$$\det(AB) = \det(A)\det(B) \quad \text{y} \quad (AB)^T = B^T A^T$$

Theorem 18 (Regla de Cramer) Sea $Ax = b$ un sistema lineal con A invertible. Entonces, para cada i:

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$$

donde A_i es A reemplazando la columna i por b.

Theorem 19 (Teorema espectral para matrices simétricas) Sea A simétrica real. Entonces A es diagonalizable por una matriz ortogonal P:

$$P^T A P = D$$

donde D es diagonal con los valores propios de A.

Section 5

Geometría

Subsection 5.1

Espacios con producto interno

Un espacio con producto interno es un espacio vectorial con una noción de “geometría”. El producto interno es una operación que nos permite medir la longitud de vectores y ángulos entre vectores.

Definition 36 (Espacio con producto interno) Un espacio con producto interno V sobre k es un espacio vectorial equipado con un producto interno $\langle -, - \rangle : V \times V \to k$:

1. $$\forall \vec{v}, \vec{w} \in V,\ \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$$

2. $$\forall a, b \in k,\ \forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{w} \in V,\ \langle a\vec{x} + b\vec{y}, \vec{w} \rangle = a\langle \vec{x}, \vec{w} \rangle + b\langle \vec{y}, \vec{w} \rangle$$

3. $$\forall \vec{v} \in V,\ \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle \geq 0$$

4. $$\forall \vec{v} \in V,\ \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = 0 \iff \vec{v} = \vec{0}$$

5.1.1 Métrica

El producto interno induce de manera natural una noción de longitud.

Definition 37 (Norma inducida) Sea V un espacio con producto interno. Definimos la *norma* $\| - \| : V \to k^+$ de un vector $\vec{v} \in V$ como:

$$\|\vec{v}\| := \sqrt{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle}$$

Theorem 20 La norma satisface:

1. $$\forall \vec{v} \in V.\ \|\vec{v}\| = 0 \iff \vec{v} = \vec{0}$$

2. $$\forall a \in k.\ \forall \vec{v} \in V.\ \|a\vec{v}\| = |a|\|\vec{v}\|$$

3. $$\forall \vec{v}, \vec{w} \in V.\ \|\vec{v} + \vec{w}\| \leq \|\vec{v}\| + \|\vec{w}\|$$

.

Proof Las dos primeras proposiciones son mero cómputo.
La tercera propiedad se deduce de la desigualdad de Cauchy–Schwarz. □

Theorem 21 (Desigualdad de Cauchy–Schwarz) Para todo $\vec{v}, \vec{w} \in V$:

$$|\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle| \leq \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\|$$

Proof Se considera $\langle \vec{v} - t\vec{w}, \vec{v} - t\vec{w} \rangle \geq 0$ y se estudia como polinomio en t. □

A partir de la norma se define una noción de distancia.

Definition 38 (Distancia) Definimos la distancia entre dos vectores como:

$$d(\vec{v}, \vec{w}) := \|\vec{v} - \vec{w}\|$$

Finalmente, podemos definir ángulos entre vectores tal que:

Definition 39 (Ángulo entre vectores) Para $\vec{v}, \vec{w} \neq \vec{0}$ definimos el ángulo θ entre ellos por:

$$\theta = \arccos\left(\frac{\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle}{\|\vec{v}\| \|\vec{w}\|}\right)$$

Subsection 5.2

Ortogonalidad y proyecciones

Definition 40 (Ortogonalidad) Dos vectores $\vec{v}, \vec{w}$ son *ortogonales* si:

$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = 0$$

Example En $\mathbb{R}^2$ con el producto escalar usual,

$$\vec{v} = (1, 0), \quad \vec{w} = (0, 1)$$

son ortogonales.

Definition 41 (Proyección ortogonal) Sea $\vec{u} \neq \vec{0}$. La proyección ortogonal de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$ es:

$$\operatorname{proj}_{\vec{u}}(\vec{v}) := \frac{\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle}{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle} \vec{u}$$

Remark Esta operación es fundamental en mínimos cuadrados y aparece implícitamente en el análisis de errores experimentales.

Subsection 5.3

Bases ortonormales

Definition 42 (Base ortonormal) Una base $B = \{\vec{e}_i\}$ es *ortonormal* si:

$$\langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

Theorem 22 (Proceso de Gram–Schmidt) Sea $(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n)$ una familia linealmente independiente. Entonces existe una base ortonormal $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ que genera el mismo subespacio.

Proof Se define inductivamente:

$$\vec{u}_k := \vec{v}_k - \sum_{i=1}^{k-1} \operatorname{proj}_{\vec{e}_i}(\vec{v}_k), \quad \vec{e}_k := \frac{\vec{u}_k}{\|\vec{u}_k\|}$$

□

Subsection 5.4

Geometría analítica

En $\mathbb{R}^n$, la geometría se puede describir mediante ecuaciones que “esculpen” subespacios dentro de $\mathbb{R}^n$.

5.4.1 Rectas

Definition 43 (Recta vectorial) Una recta que pasa por $\vec{p}$ con dirección $\vec{v} \neq 0$ es:

$$r(t) = \vec{p} + t\vec{v}$$

Theorem 23 Dos rectas son paralelas si y solo si sus vectores directores son linealmente dependientes.

5.4.2 Planos

Definition 44 (Plano) Un plano en $\mathbb{R}^3$ puede describirse como:

$$\langle \vec{n}, \vec{x} - \vec{p} \rangle = 0$$

donde $\vec{n}$ es un vector normal.

Theorem 24 La distancia de un punto $\vec{x}$ a un plano es:

$$d = \frac{|\langle \vec{n}, \vec{x} - \vec{p} \rangle|}{\|\vec{n}\|}$$

Subsection 5.5

Isometrías

Definition 45 (Isometría) Una transformación lineal $T : V \to V$ es una isometría si:

$$\langle T(\vec{v}), T(\vec{w}) \rangle = \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$$

Example Rotaciones y reflexiones en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$.

Theorem 25 Una matriz representa una isometría si y solo si es ortogonal:

$$A^T A = I$$

Remark El conjunto de matrices ortogonales forma un grupo de especial importancia para la física, $O(n)$.

Section 6

Estadística y probabilidad

La **estadística y probabilidad** estudia modelos matemáticos que exhiben una falta de información o *aleatoriedad*.

Definition 46 (σ-álgebra) Dado un conjunto Ω, una σ-algebra es una colección de subconjuntos de Ω cerrada ante complementación, y unión e intersección de familias contables.

Conque un elemento de una σ-álgebra $\mathcal{F}$ podría ser visto como un *suceso*: Si pasan sucesos $A, B \in \mathcal{F}$, siempre podremos preguntar cuando pasa A y B ($A \cap B$), A o B ($A \cup B$), y cuando no pasa A ($\bar{A}$).

Definition 47 (Espacio de probabilidad) Un espacio de probabilidad es un triple $(\Omega, \mathcal{F}, p)$ donde $\mathcal{F}$ es una σ-álgebra sobre Ω y $p : \mathcal{F} \to [0, 1]$ es la función de probabilidad, que satisface los *axiomas de Kolmogorov*:

1. $$p(\Omega) = 1$$
2. $$\forall (A_1 \dots A_n \in \mathcal{F},\ A_i \cup A_j = \emptyset \implies i = j).\ p(\bigcup_i^n A_i) = \sum_i^n p(A_i)$$

Subsection 6.1

Consecuencias básicas de los axiomas

A partir de los axiomas de Kolmogorov se deducen inmediatamente propiedades fundamentales.

Theorem 26 Sea $(\Omega, \mathcal{F}, p)$ un espacio de probabilidad. Entonces:

1. $p(\emptyset) = 0$,
2. si $A \subseteq B$, entonces $p(A) \leq p(B)$,
3. $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$,
4. $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$.

Proof Todas se deducen usando la aditividad finita y las leyes de De Morgan. □

Subsection 6.2

Probabilidad condicionada e independencia

Definition 48 (Probabilidad condicionada) Sea $A, B \in \mathcal{F}$ con $p(B) > 0$. Definimos la probabilidad de A condicionada a B como:

$$p(A \mid B) := \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$$

Remark Intuitivamente, estamos restringiendo el espacio muestral a B y *renormalizando*.

Alternativamente, $p(B)p(A \mid B) = p(A \cap B)$ es una especie de *modus ponens*.

Definition 49 (Independencia) Dos sucesos $A, B \in \mathcal{F}$ son independientes si:

$$p(A \cap B) = p(A)p(B)$$

Example En el lanzamiento de dos monedas justas, el suceso "cara en la primera" es independiente del suceso "cara en la segunda".
No obstante, dada una serie de resultados, no podemos deducir la independencia de dos sucesos por este tipo de razonamiento externo en general.

Theorem 27 (Fórmula de Bayes) Si $p(B) > 0$, entonces:

$$p(A \mid B) = \frac{p(B \mid A)p(A)}{p(B)}$$

Subsection 6.3

Variables aleatorias

Ha resultado conveniente estudiar funciones sobre el espacio de probabilidad a algún cuerpo ordenado como $\mathbb{R}$.

Definition 50 (Variable aleatoria) Una variable aleatoria es una función medible:

$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$

6.3.1 Distribución

Definition 51 (Distribución de una variable aleatoria) La distribución de X es la medida inducida:

$$p_X(A) := p(X^{-1}(A))$$

Subsection 6.4

Esperanza y varianza

Definition 52 (Esperanza matemática) Sea X una variable aleatoria discreta. Definimos su esperanza como:

$$\mathbb{E}[X] := \sum_x x\, p(X = x)$$

Definition 53 (Varianza) La varianza de X se define como:

$$\mathrm{Var}(X) := \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X])^2\right]$$

Theorem 28

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2$$

Remark La esperanza es lineal:

$$\mathbb{E}[aX + bY] = a\mathbb{E}[X] + b\mathbb{E}[Y]$$

Subsection 6.5

Distribuciones clásicas

6.5.1 Distribución binomial

Definition 54 (Distribución binomial) Una variable aleatoria X sigue una distribución binomial $B(n, p)$ si:

$$p(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

Example Número de caras al lanzar n monedas justas.

6.5.2 Distribución normal

Definition 55 (Distribución normal) Una variable aleatoria continua X sigue una distribución normal si tiene densidad:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Remark Dicha distribución aparece como límite universal en muchos procesos aleatorios.

Subsection 6.6

Teoremas fundamentales

Theorem 29 (Ley de los grandes números) Sea (X_n) una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con esperanza finita. Entonces:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{n\to\infty} \mathbb{E}[X_1]$$

Theorem 30 (Teorema central del límite) Bajo las mismas hipótesis, la suma normalizada:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}$$

converge en distribución a una normal estándar.

Remark Este resultado explica la omnipresencia de la distribución normal en la naturaleza.

Subsection 6.7

Estadística descriptiva

Dada una muestra $(x_1, \ldots, x_n)$, definimos:

Definition 56 (Media muestral)

$$\bar{x} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Definition 57 (Varianza muestral)

$$s^2 := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$$

Remark Estos son estimadores de la esperanza y la varianza poblacionales.

PART

III

Física

Section 7

Preludio

Las áreas de la física pertinentes a la selectividad son ...: **Campo gravitatorio, campo eléctrico y campo magnético**, ...

Subsection 7.1

Mecánica clásica

El campo gravitatorio es un campo vectorial en la mecánica clásica [8], y utilizamos los tres *versores* estándar: $\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}$.

Dentro del campo gravitatorio todas las fuerzas son atractivas y son resultantes de la masa de los objetos, que aproximamos cómo partículas puntuales.

[8] *en la teoría de relatividad general es un* ***campo tensorial***

7.1.1 Momento lineal y angular

Definition 58 (Momento Lineal) El momento lineal $\vec{p}$ es una magnitud vectorial que representa la inercia de un cuerpo, su resistencia a cambiar su estado de movimiento.

$$\vec{p} := m\vec{v}$$

Theorem 31 (Variacion del momento lineal) La variacion del momento lineal es precisamente la fuerza responsable del movimiento.

Proof

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} = \vec{F}$$

□

En un movimiento curvilíneo, $\vec{p}$ cambia continuamente, lo cuál lo explicamos con una nueva magnitud:

Definition 59 (Momento Angular) El momento angular $\vec{L}$ caracteriza las propiedades de inercia de un cuerpo que gira respecto a un punto.

$$\vec{L} := \vec{r} \times \vec{p}$$

En un movimiento circular podemos simplificar la definición de la magnitud del momento angular, ya que:

$$L = rp\sin\alpha = rp\sin 90 = rp = rmv$$

Definition 60 (Fuerza central) Fuerza central es aquella cuya direción es siempre a un punto fijo y cuya magnitud solo depende de la distancia a ese punto.

Theorem 32 (Conservación del momento angular) Para un cuerpo sometido a fuerzas centrales la variación del momento se anula.

Proof

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{v} \times m\vec{v} + \vec{r} \times (m\vec{a}) = r \times \vec{F}$$

Si ni $\vec{r} = 0$ ni $\vec{F} = 0$, entonces $\vec{r} \times \vec{F} = 0$ implica que $\vec{r}$ y $\vec{F}$ son paralelos (definición de fuerza central). □

7.1.2 Energía y trabajo

Definition 61 (Trabajo) El trabajo se define de la siguiente forma:

$$W = \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Definition 62 (Energía y energía mecánica) Capacidad que tiene un cuerpo para realizar trabajo. La energía mecánica es aquella asociada al movimiento:

- **Energía cinética**: Energía que tiene un cuerpo en virtud a su velocidad:

$$W = \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_i^f m\vec{a} \cdot d\vec{r} = \int_i^f m\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{r} = \int_i^f m\vec{v} \cdot d\vec{v} = \frac{1}{2}m\left[v^2\right]_i^f = \Delta E_C$$

$$\implies E_C = \frac{1}{2}mv^2$$

- **Energía potencial**: Energía que tiene un cuerpo en virtud a su posición en un campo conservativo:

$$W = -\Delta E_P$$

La suma de estas dos anteriores es la **energía mecánica**:

$$E_M = E_C + E_P$$

Section 8

Campo gravitatorio

Subsection 8.1

Creado por masas puntuales

Definition 63 (Fuerza gravitacional) Fuerza resultante de las perturbaciones del campo gravitatorio.

$$\vec{F_g} = -G\frac{Mm}{r^2}\hat{u}_r$$

Definition 64 (Intensidad del campo gravitatorio) Fuerza resultante por el campo gravitatorio por unidad de masa.

$$\vec{g} = \frac{\vec{F_g}}{m} = -G\frac{M}{r^2}\hat{u}_r$$

Remark El principio de superposición aplica:

$$\vec{g_T} = \sum_i \vec{g_i} = -G \sum_i \frac{M_i}{r_i^2} \hat{u_{ri}}$$

Subsection 8.2

Energía asociada al campo gravitatorio

El campo gravitatorio es uno conservativo, por tanto:

$$W = \int_i^f \vec{F_g} \cdot d\vec{r} = \int_i^f -G\frac{Mm}{r^2}\hat{u_r} \cdot d\vec{r} = \int_i^f -G\frac{Mm}{r^2}dr = -GMm\left[\frac{-1}{r}\right]_i^f = -\Delta E_P$$

$$\implies E_P = -G\frac{Mm}{r}$$

8.2.1 Potencial gravitatorio

Considerar lo que hace una unidad de masa en el campo, así creando un "espacio de gravedad", nos lleva al concepto de potencial gravitatorio:

Definition 65 (Potencial gravitatorio) Trabajo necesario para llevar una unidad de masa hasta el infinito a velocidad constante:

$$V = E_{P\infty} - E_P = G\frac{M}{r}$$

Es fácil conectar la definción y la intuición considerando la expresión Vm.

Subsection 8.3

Campo gravitatorio de los cuerpos celestes

El campo gravitatorio tal y cómo lo hemos presentado puede utilizarse para operar con cuerpos celestes (aproximadamente).

Para este fin, solemos igualar la fuerza centrípeta y la fuerza gravitatoria y desarrollar hasta tener una expresión en términos de los datos dados.

Remark La velocidad que obtenemos de esta manera es la órbital:

$$\vec{F_C} = \vec{F_G};\ F_C = F_G;\ m\frac{v_o^2}{r} = G\frac{Mm}{r^2};\ v_o = \sqrt{G\frac{M}{r}}$$

El cálculo de la velocidad de escape, por ejemplo, se hace utilizando la ley de la conservación de la energía:

$$\Delta E_M \geq 0;\ \Delta E_C + \Delta E_P \geq 0; \frac{1}{2}mv_e^2 - G\frac{Mm}{r} \geq 0;\ v_e \geq \sqrt{2G\frac{M}{r}}$$

Asimismo podemos proceder de la manera presentada para el cálculo de algún parametro para la transición entre órbitas.

8.3.1 Leyes de Kepler

- **Primera ley**: Todos los planetas se mueven alrededor del Sol siguiendo órbitas elípticas, y el Sol está en uno de los focos de la elipse.

- **Segunda ley**: Los cuerpos celestes se mueven con una velocidad areolar constante. Es decir, un mismo tiempo barre una misma área en cualquier punto de la órbita ($\frac{dA}{dt} = cte.$)
- **Tercera ley**: Para todos los cuerpos celestes orbitando alrededor del mismo cuerpo, se cumple que:
$$\frac{T_1^2}{a_1^3} = cte. = \frac{T_2^2}{a_2^3}$$

El punto más alejado de una órbita elíptica es el afelio y el más cercano es el perihelio.

Section 9

Campo elécrico

El campo eléctrico ($\vec{E}$) es uno de los dos campos que resultan cuando se fija unas coordenadas espacio-tiempo para el electromagnetismo. [9] A este asociamos dos ecuaciones *de Maxwell*[10]:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \iff \oint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \iff \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{a}$$

El campo eléctrico es un campo vectorial al igual que el campo gravitatorio, que pertine a las interacción resultadas por la propiedad conocida como *carga eléctrica*.

Subsection 9.1

Creado por cargas puntuales

Definition 66 (Fuerza Eléctrica, Ley de Coulomb) La fuerza eléctrica es la resultante de las perturbaciones del campo electroestático.

$$\vec{F_e} = K\frac{Qq}{r^2} \cdot \hat{u_r}$$

Remark Si se fija una dirección, es fácil ver que:

- **Si Q y q tienen mismo signo**: Entonces $Qq > 0$ por lo que $F_e > 0$ (repulsión).
- **Si Q y q tienen distinto signo**: Entonces $Qq < 0$ por lo que $F_e < 0$ (atracción).

Por lo que se justifica la regla “similares se repelen y opuestos se atraen”.

Definition 67 (Intensidad eléctrica) Fuerza resultante por el campo eléctroestático por unidad de carga.

$$\vec{E} = \frac{\vec{F_e}}{q} = K\frac{Q}{r^2}$$

Remark Nótese que si $Q > 0$ entonces $\vec{E}$ y $\hat{u_r}$ tendrán el mismo sentido mientras que si $Q < 0$ entonces $\vec{E}$ y $\hat{u_r}$ tendrán sentidos opuestos (demostración trivial).

Remark También es importante remarcar que el principio de superposición aplica:

$$\vec{E_T} = \sum_i \vec{E_i} = K\sum_i \frac{Q_i}{r_i^2} \cdot \hat{u_{ri}}$$

[9] *Más sobre en esto en ncatlab*

[10] *Las ecuaciones de Maxwell son la sintésis de nuestro conocimiento sobre electromagnetismo*

Subsection 9.2

Energía asociada al campo eléctrico

En la situación descrita, podemos llegar a una forma cerrada para el trabajo dentro del campo electroestático:

$$W = \int_i^f \vec{F}_e \cdot d\vec{r} = \int_i^f K\frac{Qq}{r^2}\hat{u}_r \cdot d\vec{r} = \int_i^f K\frac{Qq}{r^2}dr = KQq\left[\frac{-1}{r}\right]_i^f$$

Definition 68 (Energía potencial eléctrica) La energía potencial eléctrica se define en virtud a que el campo electroestático es conservativo:

$$W_c = -\Delta E_P \qquad \text{ó} \qquad E_P = K\frac{Qq}{r}$$

Intuitivamente, la energía potencial eléctrica es comparable a la gravitacional solo que cargas positivas "suben el terreno" mientras que cargas negativas lo bajan. De la misma manera que con los campos gravitatorios, es fructífero considerar energía potencial por unidad de carga (A ser explicado a continuación).

9.2.1 Potencial eléctrico

Definition 69 (Potencial eléctrico) Trabajo necesario para llevar una unidad de carga hasta el infinito a velocidad constante:

$$V = E_{P\infty} - E_P = K\frac{Q}{r}$$

Remark Si se fija una dirección, es fácil ver que si Q y q tienen mismo signo ($Qq > 0$)

- **Si** $r_f > r_i$ (se aleja): Entonces $W = -\Delta E_P = -q\Delta V > 0$ (movimiento espontáneo).
- **Si** $r_f < r_i$ (se aleja): Entonces $W = -\Delta E_P = -q\Delta V < 0$ (se necesita suplir una fuerza).

Mientras que lo contrario es cierto si Q y q tienen distinto signo.

Subsection 9.3

Flujo eléctrico

Cuando uno considera una cierta superficie y considera la cantidad de campo eléctrico que fluye através de dicha superficie, uno esta pensando en el flujo eléctrico Φ_E. Este concepto nos permite formular una ley equivalente a la de Coulomb un tanto más útil en ciertas circunstancias, la *ley de Gauss*.

El flujo eléctrico en una parte infinitesímal de una superficie debe ser el producto del componente perpendicular del campo eléctrico (la parte que sale o entra) con el vector superficie. Es decir:

$$\mathrm{d}\Phi_E = \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = BS\cos\theta$$

Lo cuál implica la definición de flujo eléctrico:

Definition 70 (Flujo eléctrico) Para una superficie $\vec{S}$ y un campo eléctrico $\vec{E}$, el flujo eléctrico se define tal que:

$$\Phi_E := \int \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

Section 10

Campo magnético

El campo magnético ($\vec{B}$) es uno de los dos campos que resultan cuando se fija unas coordenadas espacio-tiempo para el electromagnetismo. A diferencia que el campo eléctrico, el campo magnético no tiene una *unidad activa*, con lo que debe existir un *polo norte* y un *polo sur* para que dicha interacción tenga lugar. Las cargas eléctricas, las estudiadas en el apartado anterior, también serán influida por el campo magnético, siempre y cuando se encuentren en movimiento. Conversamente, el movimiento de cuerpos cargados eléctricamente produce un campo magnético.

A este campo le corresponden las otras dos ecuaciones de Maxwell:

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \iff \oint \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = 0$$

$$\nabla \times \vec{B} = -\mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \iff \oint \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \int \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Subsection 10.1

Sobre una carga en movimiento

Experimentalmente se descubrió que cargas en movimiento producen un campo magnético. Puesto que es así, la **Ley de Lorentz** viene a determinar el valor de la fuerza magnética sobre una carga en movimiento:

Theorem 33 (Ley de Lorentz) La fuerza magnética (F_B) es perpendicular al campo magnético y al movimiento. Además depende de la carga del cuerpo, su velocidad, y la intensidad del campo magnético:

$$\vec{F}_B = q\vec{v} \times \vec{B}$$

En caso de coexistir con un campo eléctrico, la Ley de Lorentz además implica:

$$\vec{F}_{EM} = q(\vec{E} + v \times \vec{B})$$

Recordamos que para realizar el producto vectorial es conveniente utilizar la regla de la mano derecha.

Remark La Ley de Lorentz sugiere que esta fuerza siempre será perpendicular al movimiento (dicho de otra manera, siempre será **centrípeta**). Por mecánica, dicha fuerza nunca alterará el módulo de la velocidad, y únicamente afectará a la trayectoria.

La unidad del campo magnético son los *Teslas*:

$$\vec{B} : T = \frac{1N}{1C \cdot 1\frac{m}{s}}$$

Cabe destacar que un tesla raramente se da en la naturaleza (los imánes permanentes están comprendidos entre $0.01T$ y $0.5T$).

Subsection 10.2

Sobre una corriente eléctrica

Una corriente eléctrica no es más que el flujo de cargas. Consecuentemente, se verá afectado por el campo magnético. La expresión que determina dicha interacción es conocida como la *Primera Ley de Laplace*.

Primero observamos que una carga circula a través de su conductor tal que:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{l}}{\mathrm{d}t}$$

A continuación, demostramos que intensidad por diferencial de longiud es lo mismo que velocidad por diferencial de carga:

$$I := \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t};\ I\mathrm{d}\vec{l} = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}\vec{l} = \mathrm{d}q \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

Con todo esto, concluimos la Primera Ley de Laplace:

$$\mathrm{d}\vec{F} = \mathrm{d}q(\vec{v} \times \vec{B}) = (\vec{v}\mathrm{d}q) \times \vec{B} = I\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{B}$$

Para lo que segundo de bachillerato corresponde, tanto B como I serán constantes. Con lo que llegamos a la fórmula aplicable en la selectividad:

$$\mathrm{d}\vec{F} = I\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{B};\ \vec{F} = \int I\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{B} = I\left(\int \mathrm{d}\vec{l}\right) \times \vec{B} = I\vec{l} \times \vec{B}$$

Subsection 10.3

Creado por una corriente eléctrica

Experimentalmente, Biot y Savart concluyeron que el campo magnético elemental ($\mathrm{d}\vec{B}$) creado por un elemento de corriente ($I\mathrm{d}\vec{l}$) en un punto, cuya posición respecto al elemento de corriente viene dado por $\vec{r}$, es:

$$\mathrm{d}\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}\vec{l} \times \hat{u}_r}{r^2}$$

Donde μ_0 es una constante para el vacío.

El que el conductor sea finito y rectilíneo implica que podemos operar la anterior expresión y llegar a una expresión concisa y aplicable a la selectividad:

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{r}$$

Además podemos utiliza la otra regla de la mano derecha para determinar la orientación del campo magnético en estas circunstancias.

Remark Puede darse el caso donde debamos considerar de dos conductores rectilíneos paralelos el campo que generan uno sobre otro. Para lo cuál con basta aplicar las reglas ya mencionadas en ambos conductores desde el conductor recíproco. Debe cumplirse que el que ambos conductores se atraigan implica que el flujo por ambos conductores tenga el mismo sentido y lo opuesto cuando los conductores se repelan.

Subsection 10.4

Flujo magnético

El flujo magnético Φ_B se define de la misma manera que el flujo eléctrico, es decir:

Definition 71 (Flujo magnético) Para una superficie $\vec{S}$ y un campo magnético $\vec{B}$, el flujo magnético se define tal que:
$\Phi_B := \int \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$

SECTION 11

Inducción electromagnética

El cambio de un flujo magnético *induce* una fuerza electromotriz sobre la superficie dada. Esto se deduce desde la Ley de Inducción de Faraday:

Theorem 34 (Fuerza electromagnetica) La fuerza electromotriz, definida tal que:

$$\mathcal{E} := \oint_C \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

puede ser expresada equivalentemente con la expresión:

$$\mathcal{E} = -\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t}$$

PROOF

$$\begin{aligned}
\mathcal{E} &:= \oint_C \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} \\
&= \int_S (\nabla \times E) \cdot \mathrm{d}\vec{A} && \text{Teorema de Stokes} \\
&= -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\vec{A} && \text{Ley de inducción de Faraday} \\
&=: -\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t} && \text{Definición de flujo magnético}
\end{aligned}$$

□

Remark El signo negativo de la expresión de la fuerza electromagnética es explicado por la *Ley de Lenz*. Dicha ley establece que el sentido del campo magnético inducido se opone a la causa que lo produce.

SECTION 12

Ondas

Una onda, intuitivamente, es la alteración armónica de alguna propiedad a lo largo del espacio o del tiempo.

SUBSECTION 12.1

Movimiento armónico simple

El ejemplo más sencillo de onda es el movimiento armónico simple (MAS).

Definition 72 (Movimiento armónico simple) Un Movimiento Armónico Simple es un movimiento periódico en el que la fuerza (o aceleración) es directamente proporcional al desplazamiento respecto a la posición de equilibrio y de sentido contrario:

1. $$F(x) = -kx$$
2. $$a(x) = -\omega^2 x$$

Remark Es fácil demostrar que, para una amplitud A, una velocidad angular ω, y un desfase ϕ:

- La **posición** en un MAS en un tiempo t es:
$$x(t) = A\sin(\omega t + \phi)$$
- La **velocidad**:
$$v(t) = A\omega\cos(\omega t + \phi)$$
- La **aceleración**:
$$x(t) = -A\omega^2\sin(\omega t + \phi)$$

Un movimiento armónico simple se define por las siguientes magnitudes:

- **Amplitud** A: valor máximo del desplazamiento respecto a la posición de equilibrio.
- **Periodo** T: tiempo necesario para completar una oscilación.
- **Frecuencia** f: número de oscilaciones por unidad de tiempo, relacionada con el periodo mediante
$$f = \frac{1}{T}$$
- **Frecuencia angular** ω, definida como
$$\omega = 2\pi f$$

Example (Sistemas que realizan MAS) Son ejemplos clásicos de movimiento armónico simple:

1. Un sistema masa–muelle, cuya frecuencia angular viene dada por:
$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$
siendo k la constante elástica del muelle y m la masa.
2. Un péndulo simple para pequeñas oscilaciones, con:
$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$$
donde ℓ es la longitud del péndulo y g la aceleración de la gravedad.

SUBSECTION 12.2

Movimiento ondulatorio

Definition 73 (Onda) Una onda es la propagación de una perturbación que transporta energía a través del espacio sin transporte neto de materia.

Dada una onda armónica, se definen:

- **Longitud de onda** λ: distancia mínima entre dos puntos que oscilan en fase.
- **Periodo** T y **frecuencia** f, con la relación $f = 1/T$.
- **Velocidad de propagación** v, que satisface:

$$v = \lambda f$$

Definition 74 (Ecuación de una onda armónica) La expresión matemática de una onda armónica que se propaga en el sentido positivo del eje x es:

$$y(x,t) = A\sin(\omega t - kx + \phi)$$

donde el número de onda k viene dado por:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Subsection 12.3

Ondas sonoras

Definition 75 (Onda sonora) El sonido es una onda mecánica longitudinal producida por variaciones de presión que se propaga únicamente en medios materiales.

Remark La velocidad de propagación del sonido depende del medio. En el aire, a temperatura ambiente, su valor aproximado es:

$$v \approx 343\,\mathrm{m\,s^{-1}}$$

Definition 76 (Efecto Doppler) El efecto Doppler es la variación aparente de la frecuencia de una onda percibida por un observador cuando existe movimiento relativo entre la fuente emisora y el observador.

Theorem 35 (Efecto Doppler para ondas sonoras) Si v es la velocidad de propagación del sonido, v_o la velocidad del observador y v_s la de la fuente, la frecuencia observada viene dada por:

$$f' = f\frac{v \pm v_o}{v \mp v_s}$$

donde los signos se eligen según si el movimiento es de acercamiento o alejamiento.

Section 13

Óptica

La óptica es la rama de la física que estudia el comportamiento y las propiedades de la luz, así como su interacción con la materia.

Subsection 13.1

Naturaleza y propagación de la luz

Definition 77 (Luz) La luz es una radiación electromagnética capaz de propagarse tanto en el vacío como en medios materiales, caracterizada por una velocidad finita y constante en el vacío.

Remark En el vacío, la velocidad de la luz tiene el valor

$$c = 3{,}00 \times 10^{8}\,\mathrm{m\,s^{-1}}$$

.

Definition 78 (Índice de refracción) El índice de refracción n de un medio se define como el cociente entre la velocidad de la luz en el vacío y su velocidad en dicho medio:

$$n = \frac{c}{v}$$

.

Subsection 13.2

Óptica geométrica

Cuando las dimensiones características de los obstáculos son mucho mayores que la longitud de onda de la luz, esta puede describirse mediante rayos, dando lugar a la óptica geométrica.

Definition 79 (Principios de la óptica geométrica) La óptica geométrica se fundamenta en los siguientes principios:

1. La luz se propaga en línea recta en medios homogéneos.
2. Los rayos luminosos son independientes entre sí.
3. El camino seguido por la luz es reversible.

Subsection 13.3

Reflexión de la luz

Definition 80 (Reflexión) La reflexión es el fenómeno por el cual la luz, al incidir sobre una superficie, regresa al medio del que procede.

Theorem 36 (Leyes de la reflexión) En un fenómeno de reflexión se verifican las siguientes leyes:

1. El rayo incidente, el rayo reflejado y la normal a la superficie pertenecen al mismo plano.
2. El ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión:

$$\theta_i = \theta_r$$

Subsection 13.4

Refracción de la luz

Definition 81 (Refracción) La refracción es el cambio de dirección y velocidad que experimenta la luz al pasar de un medio a otro con distinto índice de refracción.

Theorem 37 (Ley de Snell) Si un rayo de luz pasa de un medio de índice n_1 a otro de índice n_2, los ángulos de incidencia y refracción verifican:

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$$

Definition 82 (Ángulo límite) Se denomina ángulo límite θ_L al ángulo de incidencia para el cual el ángulo de refracción es 90°, cumpliéndose:

$$\sin\theta_L = \frac{n_2}{n_1}, \qquad n_1 > n_2$$

Remark Para ángulos de incidencia mayores que el ángulo límite se produce el fenómeno de reflexión total.

Subsection 13.5

Sistemas ópticos

13.5.1 Espejos

Definition 83 (Espejos esféricos) Un espejo esférico es una superficie reflectante que forma parte de una esfera. Puede ser cóncavo o convexo según la orientación de su superficie reflectante.

Theorem 38 (Ecuación fundamental de los espejos) Para un espejo esférico se cumple la relación:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s'}$$

donde f es la distancia focal, s la distancia del objeto y s' la distancia de la imagen.

13.5.2 Lentes

Definition 84 (Lentes delgadas) Una lente delgada es un sistema óptico transparente limitado por dos superficies, capaz de desviar los rayos luminosos por refracción.

Theorem 39 (Ecuación de las lentes delgadas) En una lente delgada se verifica la ecuación:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s'}$$

Definition 85 (Aumento lateral) El aumento lateral A de una lente o espejo se define como el cociente entre el tamaño de la imagen y el del objeto:

$$A = \frac{y'}{y} = -\frac{s'}{s}$$

Section 14

Física moderna

La física moderna surge a comienzos del siglo XX para dar explicación a fenómenos que no podían ser descritos adecuadamente por la física clásica, introduciendo una nueva concepción de la energía, la radiación y la materia.

Subsection 14.1

Crisis de la física clásica

Remark A finales del siglo XIX se pusieron de manifiesto diversas discrepancias entre los resultados experimentales y las predicciones de la física clásica, especialmente en el estudio de la radiación electromagnética y de la estructura de la materia.

Subsection 14.2

Cuantización de la energía

Definition 86 (Hipótesis de Planck) La energía intercambiada entre la radiación electromagnética y la materia no puede tomar cualquier valor continuo, sino que se emite o absorbe en cantidades discretas llamadas cuantos.

Theorem 40 (Relación de Planck) La energía asociada a un cuanto de radiación de frecuencia f viene dada por:

$$E = hf$$

donde h es la constante de Planck.

Subsection 14.3

Efecto fotoeléctrico

Definition 87 (Efecto fotoeléctrico) El efecto fotoeléctrico consiste en la emisión de electrones por la superficie de un metal cuando sobre él incide radiación electromagnética de frecuencia suficientemente elevada.

Theorem 41 (Ecuación del efecto fotoeléctrico) La energía del fotón incidente se reparte entre el trabajo de extracción del metal y la energía cinética máxima de los electrones emitidos, de acuerdo con la expresión:

$$hf = W_0 + E_c$$

donde W_0 es el trabajo de extracción.

Remark Del estudio experimental del efecto fotoeléctrico se deducen las siguientes conclusiones:

- Existe una frecuencia umbral por debajo de la cual no se produce emisión de electrones.
- La energía cinética de los electrones depende de la frecuencia, no de la intensidad de la radiación.
- La emisión es prácticamente instantánea.

Subsection 14.4

Naturaleza corpuscular de la luz

Definition 88 (Fotón) El fotón es el cuanto de energía asociado a la radiación electromagnética, caracterizado por carecer de masa en reposo y propagarse a la velocidad de la luz en el vacío.

Remark El fotón posee cantidad de movimiento, cuyo valor viene dado por:

$$p = \frac{E}{c} = \frac{hf}{c}$$

Subsection 14.5

Dualidad onda–partícula

Definition 89 (Hipótesis de De Broglie) A toda partícula material de cantidad de movimiento p se le puede asociar una onda cuya longitud de onda viene dada por:

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

Remark La hipótesis de De Broglie extiende la dualidad onda–partícula, inicialmente atribuida a la luz, a toda la materia.

Subsection 14.6

Principio de incertidumbre

Theorem 42 (Principio de incertidumbre de Heisenberg) No es posible determinar simultáneamente con precisión arbitraria la posición y la cantidad de movimiento de una partícula. Es decir,

$$\Delta x \, \Delta p \geq \frac{h}{4\pi}$$

Remark Este principio no se debe a limitaciones experimentales, sino que es una consecuencia fundamental de la naturaleza ondulatoria de la materia.

Section 15

Física nuclear

Subsection 15.1

Estructura del núcleo atómico

Los átomos están formados por tres partículas: *protones*, *neutrones* y *electrones*. Estas dos primeras partículas constituyen los “*nucleones*”. Distintos tipos de nucleones son llamados “*núclidos*”.

La masa del átomo se concentra en el núcleo. Esta se mide en unidades de masa atómica (u), que se define cómo la doceava parte del átomo de carbono-12.

Se define el número másico (A) como el número de nucleones en una partícula, y se define el número atómico (Z) como el número de protones que posee un átomo (este número caracteriza a un elemento).

Dos núclidos pueden ser:

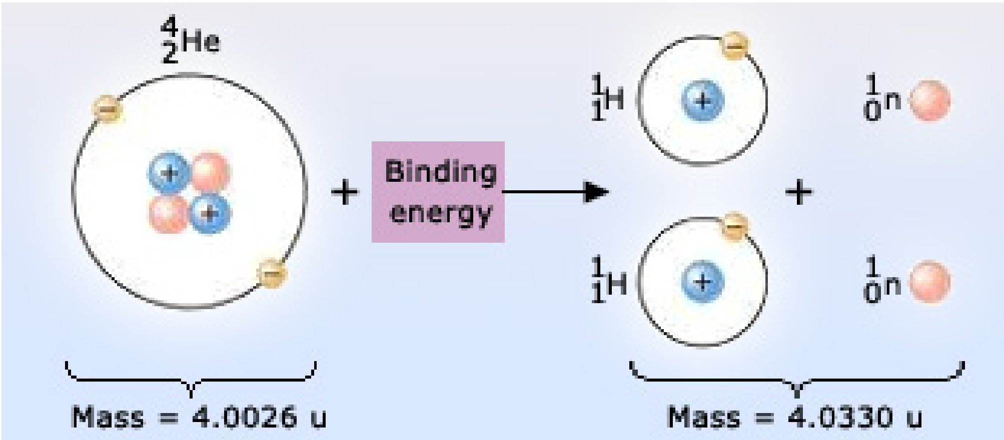


Figure 1. Defecto de masa al constituir un núclido

1. **Isótopos**: Si se diferencian en el número de neutrones.
2. **Isóbaros**: Si se diferencian en el número de protones.
3. **Isótonos**: Si tienen el mismo número de neutrones.
4. **Isómeros**: Si solo se diferencian en el estado energético.

Subsection 15.2
Estabilidad del Núcleo

Utilizamos la **interacción nuclear fuerte** para explicar la estabilidad del núcleo pese a la aparente repulsión por las cargas de los protones que desintegrarían el núcleo.

La masa de los núclidos es menor que la suma de las masas de los nucleones que los componen. Este **defecto de masa** (Δm) se calcula así:

$$\Delta m = \sum m_{nucleon.} - m_{nuclid.} = [Z \cdot m_{prot.} + (A - Z) \cdot m_{neut.}] - m_{nuclid.}$$

Cuando se forma el núcleo a partir de los nucleones, su mayor estabilidad implica que se libere energía. Es decir, la energía del núcleo es menor que la de los nucleones por separado. La energía liberada se llama **energía de enlace**:

$$E_{enl.} = \Delta E = \Delta m \cdot c^2 = (\sum m_{nucleon.} - m_{nuclid.}) \cdot c^2$$

Se llama **energía de enlace por nucleón** al cociente entre la energía de enlace y el número másico y nos informa de la estabilidad de ese núclido:

$$\frac{E_{enlace}}{nucleon} = \frac{E_{enlace}}{A}$$

Subsection 15.3
Radiactividad Natural

15.3.1 Núcleos inestables

Los núcleos requieren de neutrones para ser estables. Esto se debe a que la fuerza electroestática entre los protones desintegraría el núcleo. Por tanto, para mantenerse

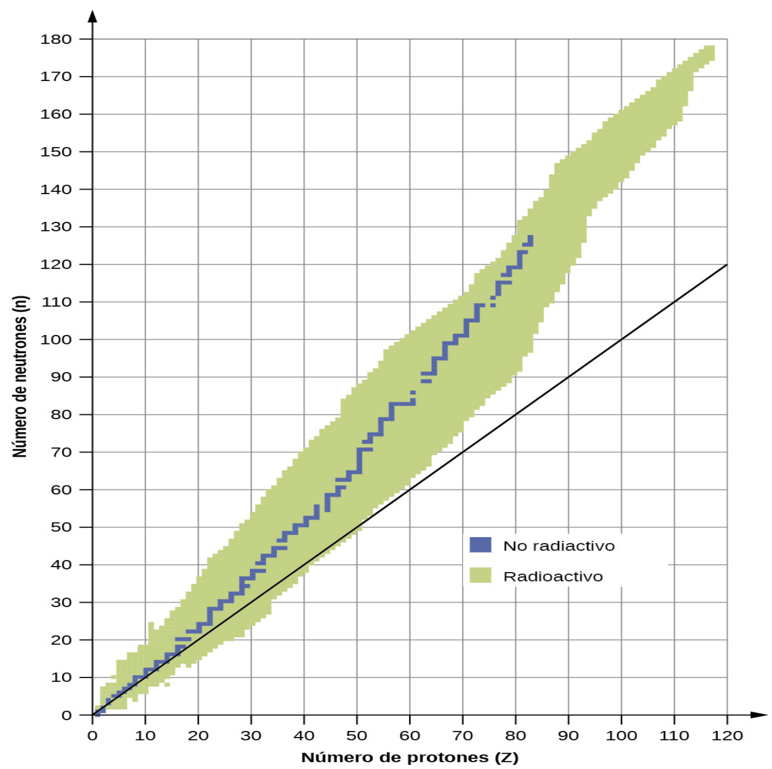


Figure 2. Gráfica energía de enlace por nucleón

estables, se necesita de una partícula capaz de aportar las interacciones nucleares fuertes sin añadir más carga, precisamente neutrones.

Ya que los neutrones son inestables si no coexisten con protones, si el núcleo es muy grande no hay los suficientes protones para garantizar la estabilización de todos los neutrones.

15.3.2 Concepto y tipos de radiactividad natural

Podemos identificar 3 tipos de radiación:

1. **Rayos** α: Son núcleos de helio ^4_2He, tienen carga positiva, se mueven a $16000 km/s$, y tienen muy poco poder de penetración.

2. **Rayos** β: Son electrones beta $^{0}_{-1}\beta$, tienen carga negativa, se mueven a $260000 km/s$, y tienen un mayor poder de penetración.

3. **Rayos** γ: Son radiaciones electromagnéticas, no tienen carga, van a $c = vel.luz$, y tienen gran poder de penetración.

Cuando un núclido se transforma en otro de otro elemento diferente se dice que ha **transmutado**.

15.3.3 Leyes del desplazamiento radiactivo

Nos permiten computar los efectos de la radiación en átomos:

1. **Primera ley**: Dado X, Y un átomos, A y Z números másicos y atómicos respectivamente: $^A_ZX \xrightarrow{\alpha} {}^{A-4}_{Z-2}Y$ (donde $\xrightarrow{\alpha}$ significa que también se ha producido una partícula α).

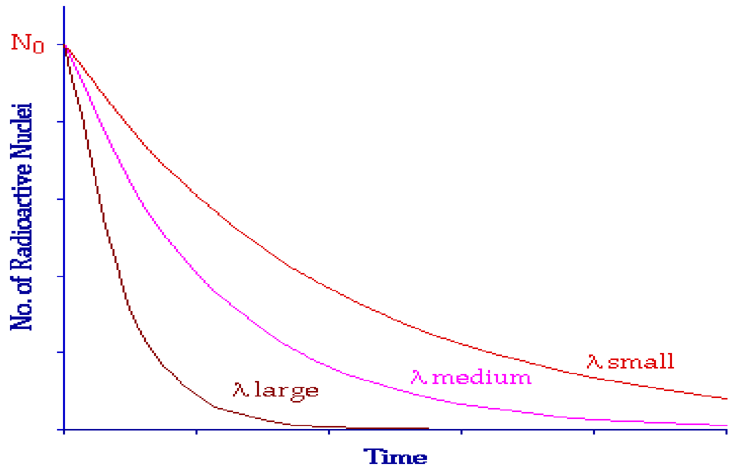


Figure 3. Gráfica energía de enlace por nucleón

2. **Segunda ley**: Dado X, Y átomos, A y Z números másicos y atómicos respectivamente: ${}^{A}_{Z}X \xrightarrow{{}^{0}_{-1}\beta} {}^{A}_{Z+1}Y$, por lo que X e Y son isóbaros. También es posible, de manera artificial, conseguir una desintegración beta positiva: ${}^{A}_{Z}X \xrightarrow{{}^{0}_{+1}\beta} {}^{A}_{Z-1}Y$.

3. **Tercera ley**: Dado X un átomo, A y Z su número másico y atómico respectivamente: ${}^{A}_{Z}X \xrightarrow{\gamma} {}^{A}_{Z}X^{*}$. Donde X^{*} indica un cambio de estado energético en X.

15.3.4 Series o familias radiactivas

Los núcleos, antes de alcanzar la estabilidad, se desintegran en diferentes núcleos intermedios. Esto lo hacen formando una serie o cadena reactiva.

Subsection 15.4

Cinética de la Desintegración Radiactiva

15.4.1 Actividad radiactiva

Llamamos actividad radiactiva (A) al número de núclidos que se desintegran por unidad de tiempo:

$$A = -\frac{dN}{dt} = \lambda \cdot N$$

Donde λ es la constante de desintegración: la probabilidad de desintegración de un núclido por unidad de tiempo (en s^{-1} en el SI).

La actividad radiactiva se mide en **Becquerelio (Bq)**. Donde $1Bq = 1des./s$.

15.4.2 Núclidos en función del tiempo

Si inicialmente hay N_0 núclidos, luego de un tiempo t habrá:

$$N = N_0 \cdot e^{-\lambda t} \qquad A = A_0 \cdot e^{-\lambda t}$$

15.4.3 Periodo de semidesintegración

Llamamos **periodo de semidesintegración** ($T_{1/2}$) al tiempo que tarda en desintegrarse la mitad de los núcleos que había en la muestra.

Es fácil ver que:

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}$$

15.4.4 Vida media

Llamamos **vida media** (τ) al promedio de vida de un núcleo o partícula subatómica libre antes de desintegrarse:

$$\tau = \frac{1}{\lambda} = \frac{T_{1/2}}{\ln 2}$$

Subsection 15.5

Radiactividad artificial

Se denomina **radiactividad artificial** a la que resulta de núclidos radiactivos que se obtienen en el laboratorio al bombardear núclidos estables con partículas α, β, neutrones, etc.

Este proceso de irradiar núclidos estables puede llegar a producir elementos químicos que no existen en la naturaleza (*sintéticos*).

En las reacciones nucleares se conserva:

1. La carga eléctrica
2. El número de nucleones
3. El momento lineal
4. El conjunto mas energía: $\Delta E = \Delta m \cdot c^2$

15.5.1 Mecanismo de la Fisión Nuclear

La **fisión nuclear** es un proceso en el que un núclido se rompe en dos fracciones más pequeñas.

Un núcleo a punto de fisionarse, porque ha absorbido un neutrón, se encuentra excitado y deformado. Cuando las fuerzas de atracción son menores que las de repulsión, el núcleo se fisiona, emitiendo con cierta velocidad, más los núcleos resultantes, neutrones.

Estos neutrones luego son capaces de provocar la misma fisión en otros núcleos, ocurriendo una **reacción en cadena**.

15.5.2 La Energía de la Fisión Nuclear

La resultante de la fisión nuclear es ligeramente inferior a la masa de las sustancias que reaccionan. Este defecto de masa se libera en forma de energía. Las reacciones nucleares son las más exoenergéticas, sirviendo como gran fuente de energía. Esto también implica que se deba utilizar mecanismos para controlar la fisión.

15.5.3 Mecanismo de la Fusión Nuclear

La fusión nuclear es un proceso en el que dos núclidos de masa baja se unen dando un núclido de masa más alta.

La masa de los productos es ligeramente inferior a la masa de los reactivos, siendo esta perdida convertida en energía.

15.5.4 Energía de la Fusión Nuclear

La fusión nuclear que tiene lugar en estas estrellas transcurre en estado de plasma: gas ionizado a millones de grado centígrados. Como resultado, se genera una gran cantidad de energía.

PART IV

Tecnología

Section 16

Preludio

Section 17

Materiales y sus propiedades

Subsection 17.1

Propiedades mecánicas de los materiales

- **Dureza**: Resistencia que ofrece un material a ser deformado o penetrado.
- **Elasticidad**: Propiedad general de los cuerpos sólidos, en virtud de la cual recobran más o menos de su extensión y forma, tan pronto como cesa la acción de la fuerza que las deformaba.
- **Plasticidad**: Propiedad general de lo que puede cambiar de forma y conservar esta de modo permanente si romperse.
  - **Maleabilidad**: Propiedad de adquirir una deformación mediante una compresión sin romperse.
  - **Ductilidad**: Propiedad de adquirir una deformación mediante tracción sin romperse.
- **Resilencia**: Capacidad de absorver energía mecánica y recuperar su forma original despues de una deformación elástica.
  - **A tracción**
  - **A compresión**
  - **A flexión**
  - **A pandeo**
  - **A torsión**
  - **A la fatiga**

Subsection 17.2

Ensayos de propiedades mecánicas

17.2.1 De tracción

Conceptos previos:

- **Tensión**: $\sigma := \frac{F}{S}$
- **Alargamiento unitario**: $\epsilon := \frac{\Delta l}{l_0}$
- **Estricción**: $\epsilon_t := \frac{-\Delta S}{S_0}$

- **Modulo de Poisson**: $\eta := \frac{\epsilon_t}{\epsilon}$
- **Módulo de elasticidad**: $E := \frac{\sigma}{\epsilon}$

En el ensayo de tracción se somete a una probeta de forma y dimensiones normalizadas y del material a ensayar a un esfuerzo de tracción en la dirección de su eje, de manera creciente y hasta romperla.

En un diagrama de tracción, se distinguen dos zonas características:

- **Zona elástica (OE) [0, E]**
  - **Zona de proporcionalidad (OP) [0, P]**: Es válido usar E como factor de conversión.
  - **Zona no proporcional (PE) [P, E]**
- **Zona plástica (ES) [E, S]**
  - **Zona límite de rotura (ER) [E, R]**
  - **Zona rotura efectiva (RS) [R, S]**

Existen puntos entre E y S, cabe destacar:

- **Rotura efectiva (R)**: Tras este punto, es inevitable la rotura.
- **Fluencia (F)**: (Solo para metales) Tras este punto, se produce un alargamiento sin que aumente la tensión aplicada.

El adjetivo "límite" a cualquiera de estos puntos refiere al valor de la tensión correspondiente al punto en la gráfica, se simboliza con $\sigma_{(-)}$.

Otro nombre para σ_E es **tensión de admisión** (σ_{ad}), y se puede aproximar al límite de proporcionalidad.

La **tensión de trabajo** es la tensión máxima a la que podemos someter una pieza respetando las recomendaciones y normas de seguridad, para calcularla, se aplica un coef. de seguridad $N \in [1.2, 4]$.

17.2.2 De dureza

Brinell:

- $D :=$ Diametro de bola.
- $d :=$ Diametro de la huella.
- **Flecha**: $f := \frac{1}{2}(D - \sqrt{D^2 - d^2})$
- $F := KD^2$ donde $K :=$ cte. de ensayo.
- $S := \pi D f$
- **Grado de dureza**: $HB := \frac{F}{S} = \frac{F}{\pi D f} = \frac{2F}{\pi D(D - \sqrt{D^2 - d^2})}$

La nomenclatura estandarizada tiene forma: (HB) HB$(S|W)$ (D) (F) (t), (t) solo es necesario si el tiempo no es entre 10 y 15 segundos, y donde $S =$ Steel y $W =$ Wolfram.

Vickers:

- $d :=$ Diagonal de la huella.
- $S := \frac{d^2}{2 \sin 68}$

- **Grado de dureza**: $HV := \frac{F}{S} = \frac{2 \sin 68žF}{d^2}$

La nomenclatura estandarizada tiene forma: (HV) HV (F) (t), (t).
Rockwell:

- $HRC := 100 - 500h$
- $HRB := 130 - 500h$

Subsection 17.3
De resilencia

Consiste en medir la energía que absorbe un material al ser impactado. Se utiliza el péndulo Charpy.

Conceptos:

- **Energía absorbida**: $-\Delta E_p := -mg\Delta h$
- **Resilencia**: $\rho := \frac{-\Delta E_p}{S}$, donde $S := S_T - ent$.

Section 18
Máquinas térmicas

Subsection 18.1
Principios fundamentales de termodinámica

La termodinámica es la rama de la física que estudia las relaciones entre el calor, el trabajo, y la transferencia de energía.

Definition 90 Energía térmica (Q)def1 En general,

$$Q := mC_E\Delta T \quad \text{donde } C_E := \text{calor específico}$$

Para gases a volumen constante,

$$Q = mC_V\Delta T \quad \text{donde } C_V := \text{calor específico a volumen constante}$$

Para gases a presión constante,

$$Q = mC_p\Delta T \quad \text{donde } C_p := \text{calor específico a presión constante}$$

Definition 91 Energía interna (U)def2 La energía interna (U) es la que tiene una sustancia en virtud a su temperatura:

$$U := \sum E_c^{\text{partíc.}} \qquad \text{(Def. no utilizada en el temario)}$$

A continuación, enumeramos los 3 principios básicos de la termodinámica:

1. **Ley de la conservación de la energía**: La energía interna (U) incrementa al añadir energía térmica al sistema, y hacer que el sistema realice trabajo la disminuye, ergo postulamos:
$$\Delta U = Q - W$$

2. **Ley de la entropía**: La cantidad de entropía del universo tiende a incrementarse en el tiempo.

3. **Principio del cero absoluto**: La entropía de un cristal perfecto de cualquier sustancia pura se aproxima a cero cuando la temperatura se aproxima al cero absoluto.

Solo usaremos el primer principio para lo que prosigue.

SUBSECTION 18.2

Transformaciones termodinámicas en los gases

Asumimos la Ley de los gases ideales:

Definition 92 Ley de los gases idealesdef3 Para un gas (ideal), se cumple:

$$pV = nRT \quad \text{donde } R = 0.082\frac{L \cdot atm}{mol \cdot K}$$

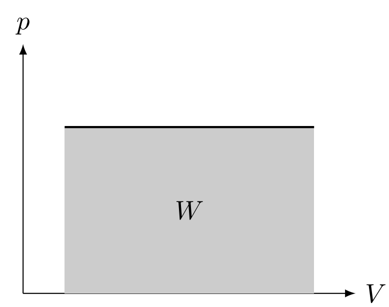
18.2.1 Transformaciones isobáricas (presión constante)

$$pV = nRT; \; \frac{p}{nR} = \frac{V}{T} = cte. \rightarrow \frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$$

Por la definición de presión ($p := \frac{F}{S}$), tenemos:

$$W := \int_{V_1}^{V_2} F \cdot dx = \int_{V_1}^{V_2} pS \cdot dx = \int_{V_1}^{V_2} p \cdot dV = p\Delta V$$

En cuanto a la gráfica p-V:



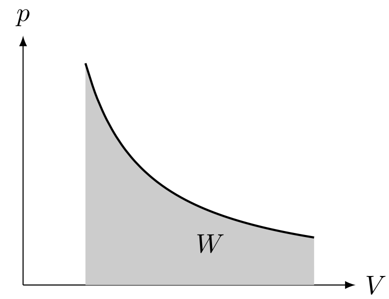
18.2.2 Transformaciones isotérmicas (temperatura constante)

$$pV = nRT = cte. \rightarrow p_1V_1 = p_2V_2 \quad \text{ó} \quad \frac{p_1}{p_2} = \frac{V_2}{V_1}$$

Dado que, en estas condiciones, $p = \frac{nRT}{V}$

$$W := \int_{V_1}^{V_2} F \cdot dx = \int_{V_1}^{V_2} pS \cdot dx = \int_{V_1}^{V_2} p \cdot dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{nRT}{V} \cdot dV = nRT \ln \frac{V_2}{V_1}$$

En cuanto a la gráfica p-V:



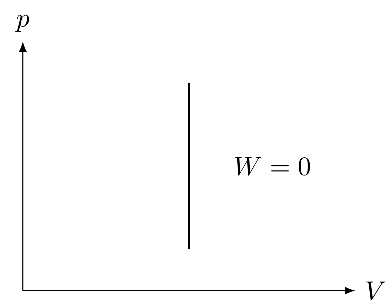
18.2.3 Transformaciones isocóricas (volumen constante)

$$pV = nRT; \ \frac{V}{nR} = \frac{T}{p} = cte. \rightarrow \frac{T_1}{p_1} = \frac{T_2}{p_2}$$

Es fácil ver que $W = 0$ ya que $\Delta V = 0$.

$$Q = nC_V \Delta T \rightarrow (p_1 > p_2 \Leftarrow Q_1 > Q_2)$$

En cuanto a la gráfica p-V:



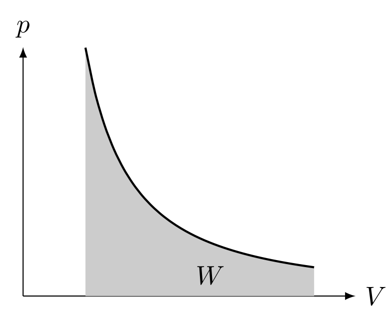
18.2.4 Transformaciones adiabáticas

Sistemas perfectamente aislados o transformaciones instantáneas. Nada es constante.

$$W = \frac{1}{1-\gamma}(p_2V_2 - p_1V_1) \quad \text{donde } \gamma := \frac{C_p}{C_V} = \text{coef. adiabático}$$

Para el aire, $\gamma \approx 1.4$

En cuanto a la gráfica p-V:



SUBSECTION 18.3

Procesos reversibles e irreversibles

Llamamos proceso reversible a aquel en el cuál en el proceso de transformación $(p_0, V_0, T_0) \rightarrow (p, V, T)$ todos los estados intermedios son estables. Es decir, la transformación es lenta.

18.3.1 Motores térmicos y máquinas frigoríficas

Una máquina térmica basa su funcionamiento en el flujo de energía calorífica entre dos focos. Si saca calor de un foco caliente, lo vierte en otro frío, y aprovecha el trabajo resultante de la transformación, se llama **motor térmico**. Si por el otro lado saca calor de un foco frío utilizando trabajo y lo vierte en otro caliente, se llama **máquina frigorífica**.

En esta situación,

$$W = Q_c - Q_f$$

$$\eta := \frac{E_u}{E_a} = \frac{W}{Q_c} = 1 - \frac{Q_f}{Q_c}$$

18.3.2 Ciclo ideal de Carnot

Máximo rendimiento que se puede extraer de dos focos. El rendimiento es comúnmente aproximado tal que:

$$\eta \approx 1 - \frac{T_f}{T_c}$$

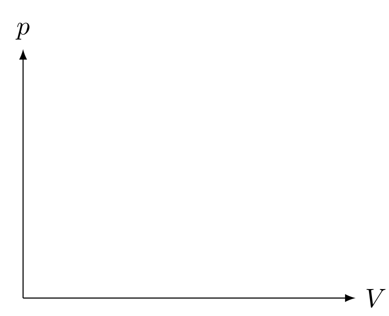
Asumimos la transmisión calorífica perfecta en las expansiones y el aislamiento perfecto en las compresiones:

1. **Expansión isotérmica**: Se aplica el calor del foco caliente, resultando en una expansión del gas a la misma temperatura que el foco caliente.

2. **Expansión adiabática**: Se retira el foco caliente; el gas sigue expandiéndose debido a la energía cinética residual.

3. **Compresión isotérmica**: Se aplica el calor del foco frío, retirando el calor del gas y dejándolo a la misma temperatura que la del foco frío.

4. **Compresión adiabática**: Se retira el foco frío; el gas sigue comprimiéndose debido a la energía cinética residual.



Subsection 18.4

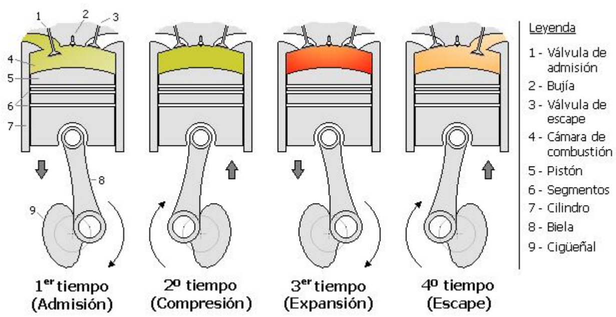
Motores de combustión interna

Siempre nos vamos a encontrar con un pistón y una recámara. Por lo que distinguimos entre tipo de transformación que se produce en la aplicación del foco caliente, y número de movimientos del pistón (tiempos) en el que el ciclo se completa.

18.4.1 Motores de explosión

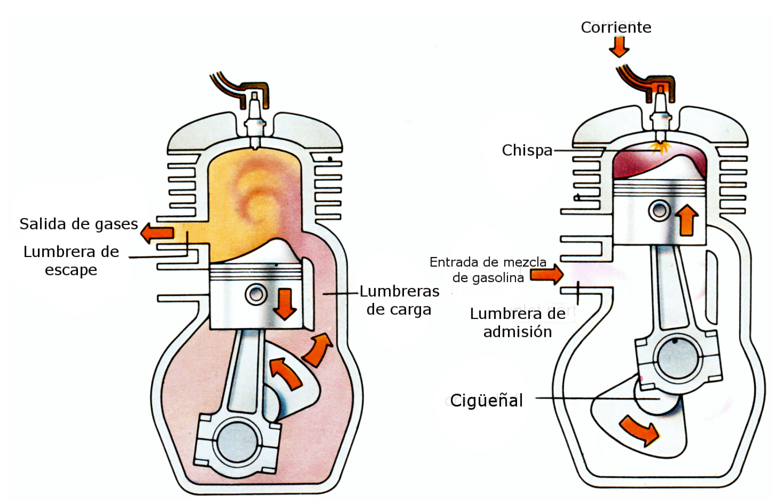
Nos centramos en el ciclo de Otto.

- **De 4 tiempos**:



1. **Fase de admisión**: transformación isobárica.
2. **Fase de compresión**: transformación adiabática; transformación isocórica (explosión, combustión instantánea).
3. **Fase de expansión**: transformación adiabática; transformación isopórica (apertura de la válvula).
4. **Fase de escape**: transformación isobárica.

- **De 2 tiempos**:



1. **Fase de compresión y aspiración**: transformación adiabática; transformación isobárica.
2. **Fase de explosión y escape**: transformación adiabática; transformación isobárica.

18.4.2 Motores de diesel

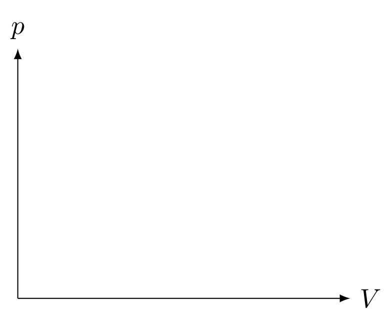
Los motores diesel cambian la bujia que produce la explosión del combustible por un inyector (combustión progresiva).

- **De 4 tiempos**:

  1. **Fase de admisión**: transformación isobárica.
  2. **Fase de compresión**: transformación adiabática.
  3. **Fase de expansión**: transformación isobárica (combustión); transformación (adiabática).
  4. **Fase de escape**: transformación isocórica; transformación isobárica.

- **De 2 tiempos**:

  1. **Fase de compresión y aspiración**: transformación adiabática; transformación isocórica.
  2. **Fase de explosión y escape**: transformación adiabática; transformación isocórica.



18.4.3 Parámetros y magnitudes características

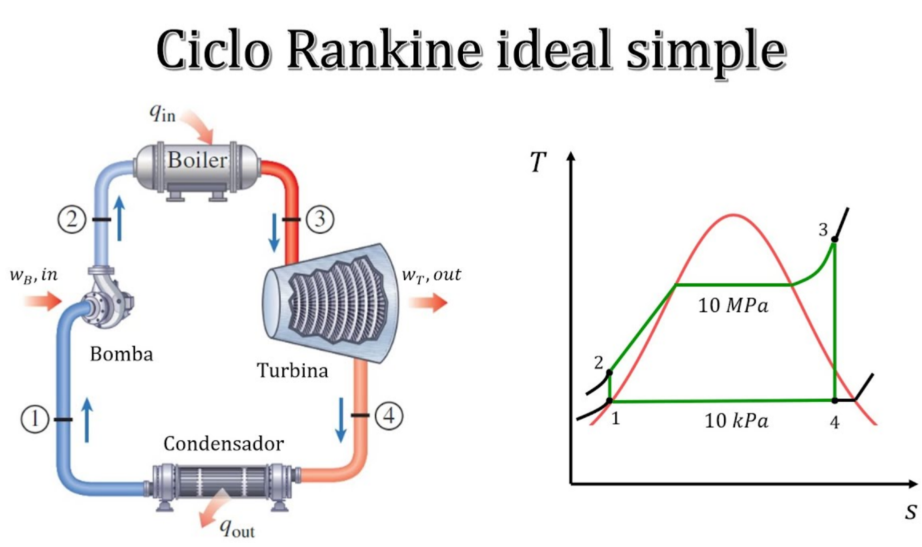
- **Calibre**: $d :=$ diam.
- **PMS**: Punto muerto superior.
- **PMI**: Punto muerto inferior.
- **Carrera**: $h := PMS - PMI$
- **Cilindrada**: $V := \pi \frac{d^2}{4} hn \quad$ donde $n :=$ núm. de cilindros
- V_c: Volumen cámara de compresión.
- **Relación de compresión**: $RC := \frac{V_1 + V_c}{V_c}$
- **Gasto**: $G := \frac{m_c}{t}$
- **Potencia absorbida**: $P_a = GP_c \quad$ donde $P_c =$ poder calorífico
- **Momento de torsión**: $M = Fr$
- **Potencia útil**: $P_u = M\omega$

SUBSECTION 18.5

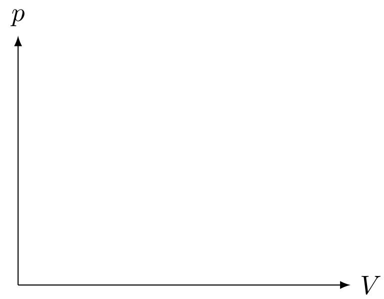
Motores de combustión externa

Su utilidad es la generación eléctrica y de propulsor de aviones.

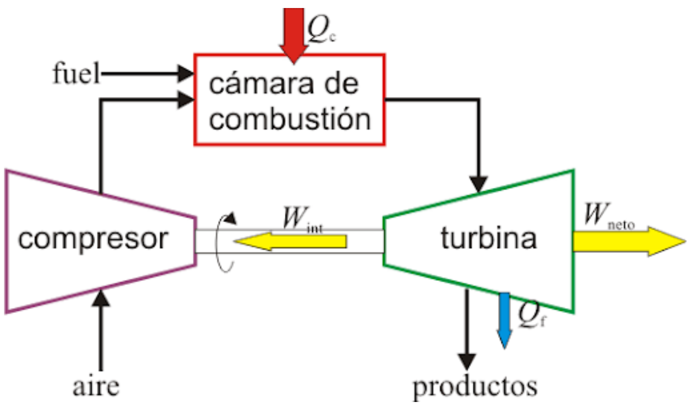
18.5.1 Ciclo de Rankine (Turbina de vapor)



1. **Caldera**: transformación isobárica: Absorción de calor en la caldera, comienza el cambio de fase, se produce vapor sobrecalentado.
2. **Turbina**: transformación adiabática.
3. **Condensación**: transformación isobárica; transformación isotérmica.
4. **Bomba**: transformación isocórica.



18.5.2 Ciclo de Brayton (Turbina de gas)



1. **Compresor**: transformación adiabática.
2. **Quemador**: transformación isobárica.
3. **Turbina**: transformación adiabática.

SUBSECTION 18.6

Bombas de calor

La transmisión de calor de un foco frío a uno caliente no es espontánea. Por lo cual necesitamos realizar trabajo para que esto ocurra. Este trabajo será igual a la diferencia de calor de los focos $W = Q_C - Q_F$.

18.6.1 Ciclo de refrigeración de Carnot

Máxima eficiencia que se puede extraer de dos focos. El rendimiento es comúnmente aproximado tal que:

$$\epsilon = \frac{E_u}{E_a} = \frac{Q_F}{W} = \frac{Q_C}{Q_C - Q_F} \approx \frac{T_C}{T_C - T_F}$$

Asumimos la transmisión calorífica perfecta en las expansiones y el aislamiento perfecto en las compresiones:

1. **Compresión adiabática** Se realiza el trabajo comprimiendo el émbolo. Aumenta la temperatura y presión del gas.

2. **Compresión isotérmica** Se aplica el foco caliente, que toma calor del gas.

3. **Expansión isotérmica** Se retira el foco caliente, causando que el gas se expanda y disminuya su temperatura.

4. **Compresión isotérmica** Se aplica el foco frío, que retira calor del gas.

18.6.2 Ciclo de Rankine inverso

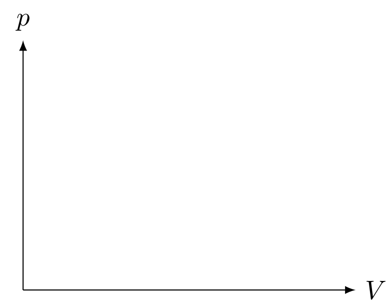
1. **Compresión adiabática**: El vapor saturado procedente del evaporador llega al compresor; aumenta su temperatura hasta alcanzar el punto correspondiente al vapor recalentado. Esta transformación se realiza con la aportación de trabajo externo (W).

2. **Transformación isobárica**: En el condensador, el vapor está a una temperatura mayor que la del ambiente, por tanto cede calor (Q_C), manteniendo constante la presión, mientras se produce, primero, un enfriamiento seguido de una condensación hasta convertirse en líquido saturado. Al pasar de vapor a líquido hay una gran reducción de volumen, con lo cual el fluido pasa a un estado líquido a alta presión.

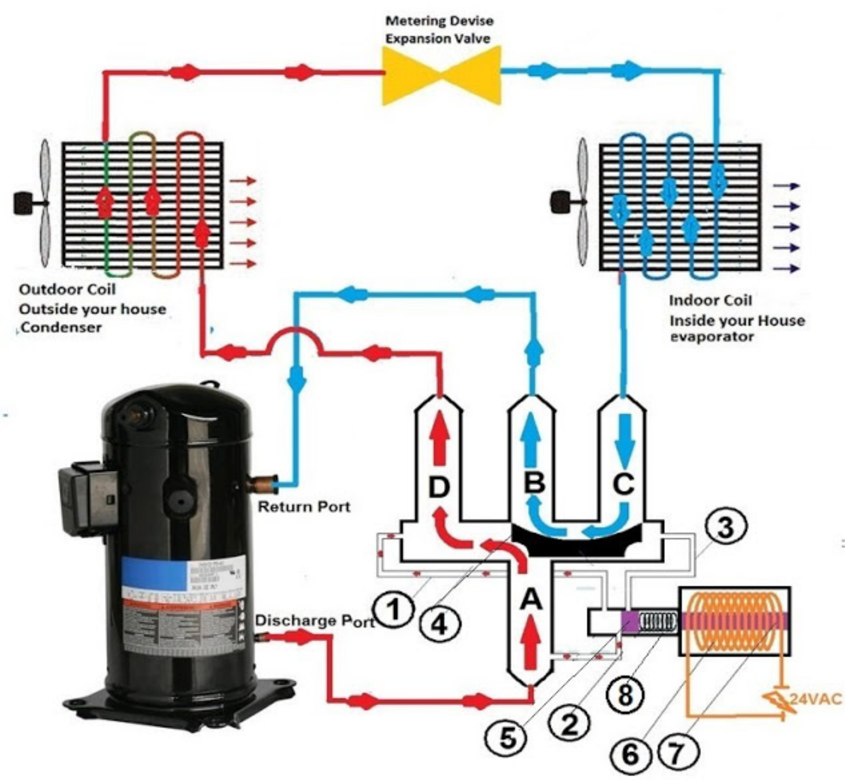
3. **Expansión adiabática**: Se hace pasar el fluido por la válvula de expansión, donde se produce una transformación adiabática con un ligero aumento del volumen y gran disminución de presión y temperatura. Una parte del líquido se vaporiza, y en el punto 4 hay vapor húmedo.

4. **Transformación isobárica** El vapor húmedo, a su paso por el evaporador, que se encuentra en el recinto que queremos refrigerar, absorbe calor del foco frío (Q_F) por encontrarse a menor temperatura que éste. Se completa la vaporización del fluido a medida que aumenta su volumen hasta llegar a la entrada del compresor, donde comienza de nuevo el ciclo.

Este ciclo puede servir tanto para refrescar en verano ($Q_C = \textit{exterior}$, $Q_F = \textit{interior}$) como calentar en invierno ($Q_C = \textit{interior}$, $Q_F = \textit{exterior}$). Asimismo tanto el evaporador como el condensador pueden intercambiar funciones. Concluimos que solo es necesario alternar el flujo del refrigerante para alternar funciones.



Cabe enumerar los distintos elementos presentes en la refrigeración por vapor. Estos son: compresor (puede ser centrífugo o volumétrico), condensador o evaporador (intercambiadores de calor), válvula de expansión (mantiene la presión constante del refrigerante que se dirige hacia el evaporador).



Section 19

Hidráulica y neumática

Subsection 19.1

Elementos de los circuitos neumáticos

Los circuitos neumáticos utilizan aire para su funcionamiento. Naturalmente, necesitaremos elementos que capten el aire, lo compriman, lo almacenen, regulen su presión, etc. Por otra parte, elementos para dispensar del aire son innecesarios o muy simples.

19.1.1 Compresores

Encontramos dos tipos de compresores:

- **Volumétricos**: Reducen el volumen que ocupa el aire, aumentando la presión, según la ley de Boyle. Podemos distinguir a su vez entre alternativos o de pistón y rotativos.
- **Dinámicos**: Aumentan la energía cinética del aire que, al frenar contra el fluido ya existente en su salida hace que su velocidad se transforme en presión de empuje según la ecuación de Bernoulli. Los tipos que existen son: radiales o centrífugos y axiales.

Los compresores suelen guardar el aire comprimido en un depósito.

19.1.2 Acondicionadores del aire

Con tal de no desgastar los elementos involucrados en el circuito, el aire pasa por un proceso de acondicionado:

1. **Secador**: reduce el contenido de vapor de agua en el aire.
2. **Filtro**: retiene las impurezas arrastradas por el aire.
3. **Regulador de presión**: mantiene el valor de la presión constante.
4. **Lubricador**: pulveriza una pequeña cantidad de aceite en el aire. Evita la corrosión y el desgaste interno de las piezas.

La combinación de las tres últimas unidades dan lugar a la **unidad de mantenimiento**. Y la combinación de todos los elementos, junto con el compresor, dan la **toma de aire a presión**.

19.1.3 Actuadores neumáticos

Diferenciamos entre actuadores rotativos (motores, usos escasos), y actuadores lineales (cilíndros). Nos centraremos en los lineales, los cuáles se subdividen en 2 tipos:

- **De simple efecto**: El aire solo puede realizar una acción (típicamente la de extensión del pistón). El retorno se realiza por un muelle.
- **De doble efecto**: Tanto el avance como el retroceso viene dado por aire.

Nos suele interesar el cálculo de la fuerza y el consumo de aire.
La fuerza teórica viene dada por:

$$F_t = pS$$

Donde $S = S_e - S_v$ en el retroceso de un pistón de doble efecto y $S = S_e$ de lo contrario.

No obstante, uno debe tener en cuenta tanto la fuerza de rozamiento como el muelle, conque:

$$F = F_t - F_r - F_m$$

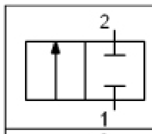
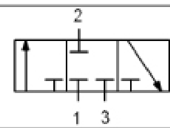
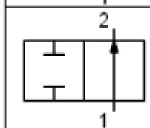
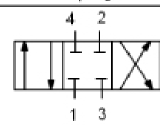
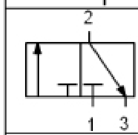
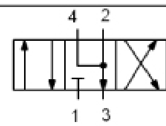
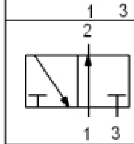
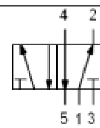
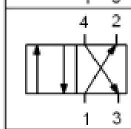
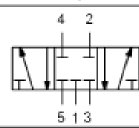
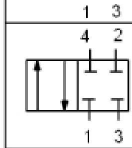
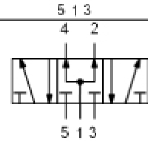
Donde $F_m = K\Delta x$. En otras ocasiones, F se toma de un porcentaje de F_t.

El consumo de aire es precisamente el volumen de aire implicado en la acción del cilíndro, es decir, la carrera l por la superficie S (Con las consideraciones anteriores de que es la superficie).

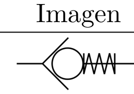
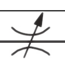
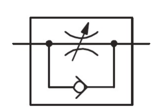
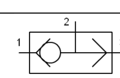
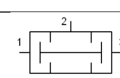
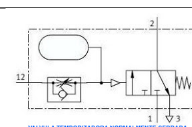
19.1.4 Válvulas distribuidoras

Sirven para dirigir y regular la dirección del aire comprimido a través de los circuitos. Se nombran según el número de vías u orificios que tengan, el número de estados, y su accionamiento.

Tabla con la representación de válvulas de distribución.

	**Válvula 2/2 normalmente cerrada**		**Válvula 3/3 con posición neutra normalmente cerrada**
	**Válvula 2/2 normalmente abierta**		**Válvula 4/3 con posición neutra normalmente cerrada**
	**Válvula 3/2 normalmente cerrada**		**Válvula 4/3 con posición neutra a escape**
	**Válvula 3/2 normalmente abierta**		**Válvula 5/2**
	**Válvula 4/2**		**Válvula 5/3 en posición normalmente cerrada**
	**Válvula 4/2 normalmente cerrada**		**Válvula 5/3 en posición normalmente abierta**

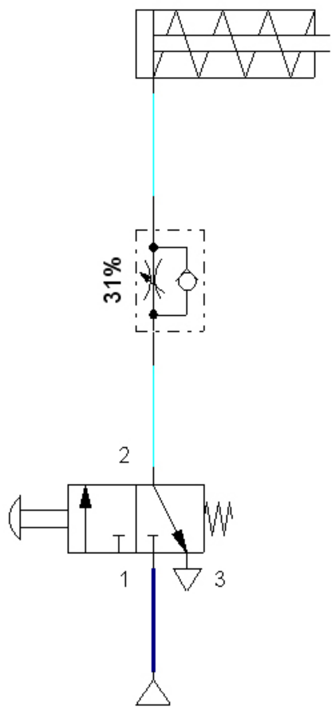
19.1.5 Otras válvulas

Nombre	Uso	Imagen
Válvula antirretorno	Deja pasar el aire en un solo sentido	
Válvula reguladora bidireccional	Regula el caudal del aire	
Válvula reguladora unidireccional	Regula el caudal del aire en un solo sentido	
Válvula selectora de circuitos	Tiene una función lógica de OR	
Válvula de simultaneidad	Tiene una función lógica de AND	
Válvula temporizadora	Aplica un retardo en el pase del aire	

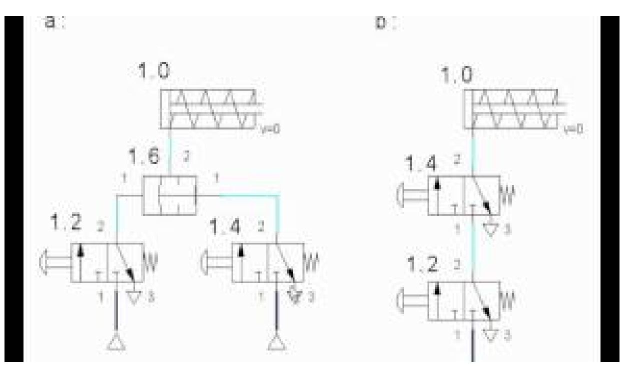
Subsection 19.2

Circuitos prácticos neumáticos

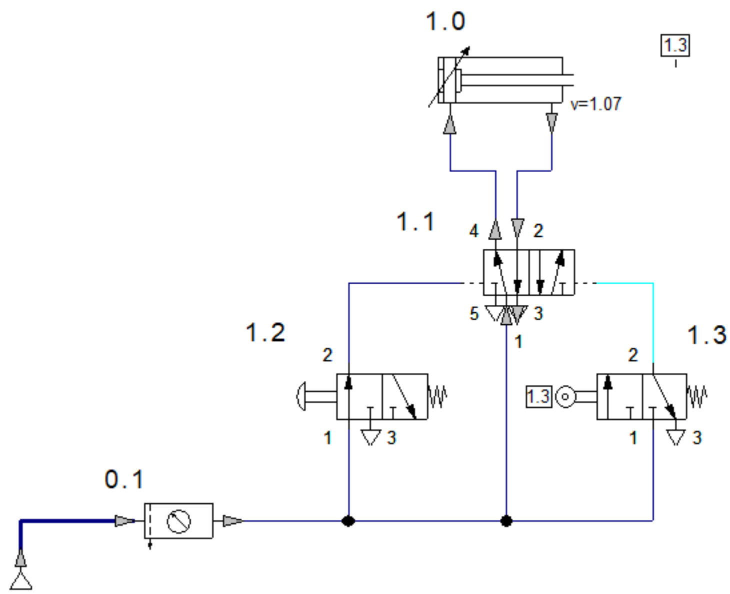
- **Mando de un cilindro de simple efecto con regulación de velocidad en el vástago**



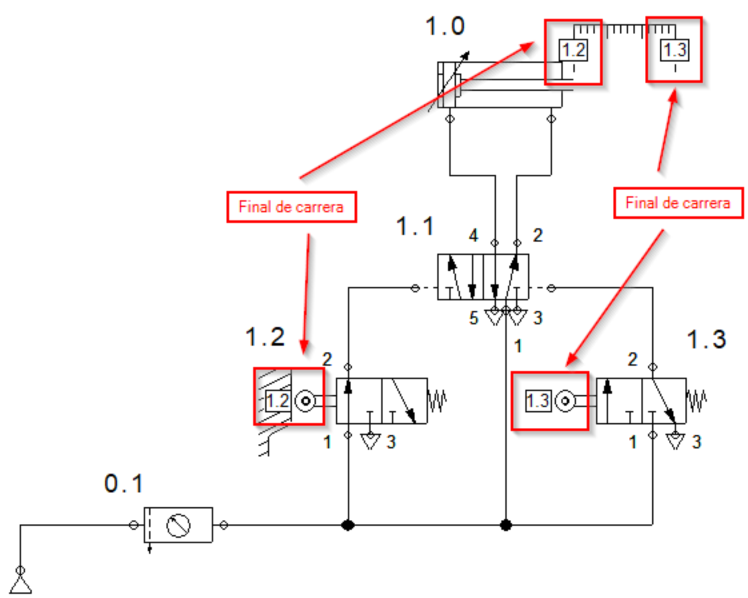
- **Mando condicional de simple efecto**



- **Mando semiautomático de un cilindro de doble efecto**



- **Mando automático de un cilindro de doble efecto**



Subsection 19.3

Circuitos hidráulicos

Son circuitos que emplean el aceite como fluido. Consecuentemente, podremos lograr mayor fuerza y sostener estados intermedios (fluido incompresible), tener mejor control caudal y velocidad, pero necesitaremos tuberías de recogida y habrá peligro de contaminación por fugas.

19.3.1 Cálculo de parámetros en un circuito

El principio de Pascal asevera que la presión ejercida sobre un fluido incompresible se transmite instantáneamente y por igual a todos los puntos de dicho fluido ($p_1 = p_2$ y $V_1 = V_2$). Por lo tanto, el caudal Q se mantiene a lo largo del circuito, conque la potencia hidráulica puede ser calculada tal que $P = Fv = pSv = pQ$.

Según la ley de la conservación de la energía, tenemos:

$$E_P + E_C + E_{Pr} = E'_P + E'_C + E'_{Pr} \rightarrow mgh + \frac{1}{2}mv^2 + pS = mgh' + \frac{1}{2}mv'^2 + pS'$$

Conque, diviendo entre V, llegamos a la ecuación de Bernoulli:

$$\rho gh + \frac{1}{2}\rho v^2 + p = \rho gh' \frac{1}{2}\rho v'^2 + p'$$

PART V

Historia de la Filosofía

Section 20

Preludio

Los autores filosóficos pertinentes a la selectividad son: **Platón, Descartes, Nietzsche y Ortega** (si se elige el bloque de problemas ontológicos y epistemológicos).

Subsection 20.1

Áreas de la filosofía

Para todos los autores a presentar es ponderable leer sus obras cuando sea factible.

Antes de tratar la Historia de la Filosofía, es encomiable repasar los contenidos de esta. La filosofía ($\phi\iota\lambda o$- "amor", $\sigma o\phi\iota\alpha$- "sabiduría") es el estudio racional de los constituyentes fundamentales de la realidad y del ser humano. Es, en cierto sentido, el conjunto de axiomas que suponemos para el desarrollo de los demás conocimientos.

20.1.1 Metafísica

20.1.2 Epistemología

20.1.3 Ética

20.1.4 Política

Section 21
Platón

Toda la filosofía occidental es una serie de notas a pie de página de Platón
Alfred North Whitehead

La influencia que ha tenido la filosofía de Platón sobre la filosofía y todas sus vertientes y todos los que beben de ellas, que en última instancia es la humanidad completa, escapa de todo remarque. La posición maximalista de dicha proposición afirma que tras Platón, *nihil novum sub sole*.

Algunos Padres de la Iglesia miraron a Platón con gran veneración, y las sublimes verdades que se encierran en sus escritos y formaron tan grandes filósofos, tuvieron bastante fuerza para arrancar de la docta pluma de San Agustín, hablando de éstos, aquella fuerte hipérbole: que en mudando algunas proposiciones y unos pocos términos se convertirían en hombres cristianos.

Cabe destacar que la distribución de contenidos de la presente exposición no sigue la del mismo Platón. No es hasta Aristóteles que se conoce una manera sistemática de la presentación de la filosofía. Platón en particular presentaba sus obras en forma de diálogos (cuyo personaje principal suele ser Sócrates), que con libertad fluían entre distintos temas. Su pensamiento se forja en un **contexto sociopolítico** marcado por la guerra del Peloponeso, la corrupción de los Treinta Tiranos (entre los que figuraron parientes suyos) y, de manera decisiva, la condena a muerte de Sócrates, hecho que lo alejó de la política activa y lo entregó al cultivo de la filosofía.

Subsection 21.1
Metafísica

La filosofía platónica propone un esquema a aplicar en distintas áreas del saber, el llamado *dualismo Platónico*, el cuál está expuesto con el símil de la caverna. La etimología de dualismo ya sugiere el fundamento que profesa, a saber: la existencia de dos principios fundamentales que componen un sistema. El dualismo platónico además precisa la esencia de estos dos principios, o *mundos* y la relación entre ellos.

En metafísica, se postula un mundo sensible, inferior, el cuál es contingente, perecedero, imperfecto . . . (en definitiva, *Heraclíteo*), que se corresponde al mundo inteligible (o formal), superior, el cuál es inmutable, eterno, perfecto . . . (en definitiva, *Parménico*).

La relación entre ambos se da mediante participación (*methexis*) e imitación (*mimesis*). Lo cuál quiere decir que el mundo sensible, compuesto de particulares, participa en sus correspondientes universales (exhibiéndose como ejemplos del universal) e imita la idiosincrasia de sus universales. Se deduce, además, que ambos mundos son independientes y, en cierto sentido, el mundo formal es anterior.

La aplicación del dualismo platónico a la metafísica resulta en la llamada *Teoría de las ideas*. Las Ideas o Formas son esencias inmateriales, únicas, eternas e inmutables, que existen separadas de las cosas particulares y constituyen el auténtico objeto del pensamiento. Es por su primacía de las ideas que esta teoría constituye la primera filosofía idealista en la Historia de la Filosofía. El mundo inteligible está jerarquizado: en la cúspide se halla la Idea del Bien; le siguen ideas generales (Ser, Quietud, Movimiento); luego las de las virtudes; después las de seres vivos y objetos naturales; y finalmente, los entes matemáticos.

A este nivel cabe destacar además la existencia de una Idea suprema: el Bien. Para Platón esta es la Idea que da sentido al resto. En el símil de la caverna el Bien se identifica con el sol puesto que proporciona la luz por la que podemos vislumbrar el resto de Formas. Resulta esto importante ya que en la genealogía de Dios dicha concepción es primordial. En este símil también cabe la explicación de una característica crucial de esta concepción de Bien. A saber, Platón concibe un Bien que es inefable, el cuál es exclusivo a la revelación mística. En sus diálogos, la idea suprema no es unívoca: en la *República* es el Bien; en el *Banquete*, la Belleza; en el *Parménides*, el Uno; en el *Sofista*, el Ser, lo que indica una evolución y cierta indecisión en su pensamiento.

21.1.1 Ontología

En misma correspondencia con los anteriores mundos, encontramos dos tipos de cosas que "son": Lo *particular* y lo *universal*. Platón distingue al menos en 4 maneras entre estas dos categorías, a saber: multiplicidad, siendo lo universal único y lo particular múltiple, tal que un único fenómeno pueda presentar distintos ejemplos; mutabilidad, puesto que lo universal es rígido e inmóvil mientras que lo particular es contingente; materialidad, de manera que las Formas trascienden cualquier marco material, opuestamente a la manera en la que lo particular se encuentra ligado a la materia; sensibilidad, tal que el órgano que percibe las Ideas es la mente, el *alma*, y el que percibe los particulares son los sentidos.

De esta manera, la perfección es una cualidad exclusiva a los universales, puesto que el ejemplo siempre carece de algo respecto a su Idea (cf. ejemplo del triángulo). El propio Platón sometió su teoría a una revisión crítica, planteándose problemas como la existencia de ideas de objetos sin valor (pelo, barro) y las dificultades lógicas de los conceptos de participación e imitación, que podrían llevar a una regresión infinita. No obstante, mantuvo la necesidad de las ideas como fundamento del conocimiento racional.

21.1.2 Cosmología

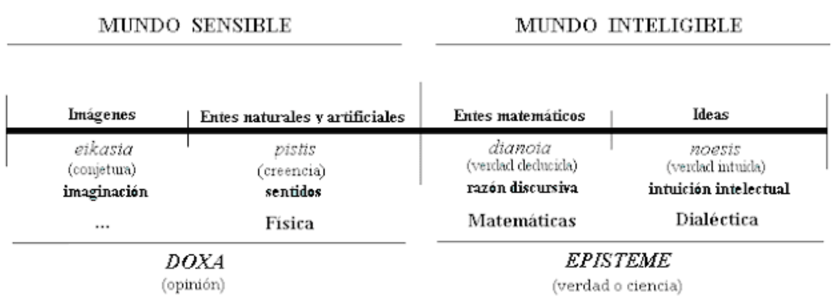
Platón expone su cosmología principalmente en el diálogo *Timeo*. El cosmos tiene un origen teleológico, fruto de la acción de un Demiurgo (artífice divino) que, movido por la bondad, ordena una materia originaria caótica y preexistente dentro de un espacio vacío (receptáculo), tomando como modelo las Ideas eternas. El Demiurgo no es un creador *ex nihilo*, sino un ordenador. El cosmos resultante es un ser vivo dotado de alma, de forma esférica, con la Tierra en el centro y esferas concéntricas para los astros. Su cuerpo está compuesto de los cuatro elementos (fuego, tierra, agua, aire; influencia de Empédocles), a los que Platón asocia los sólidos platónicos o poliedros regulares (tetraedro, hexaedro, octaedro, icosaedro), estableciendo así una identificación entre cuerpo físico y estructura matemática (influencia pitagórica). El alma del cosmos, creada también por el Demiurgo, gobierna sus movimientos mediante armonías musicales y proporciones numéricas.

Subsection 21.2

Epistemología

Platón distingue rigurosamente entre lo que puede ser objeto de conocimiento auténtico (*epistéme*) y lo que pertenece al campo de la opinión (*doxa*). El conocimiento verdadero no trata de particulares sensibles, cambiantes y engañosos, sino de las Formas o Ideas, entidades inmutables y universales que constituyen la realidad ontológicamente prioritaria. Así, epistemológicamente, conocer equivale a participar intelectualmente en la Forma correspondiente: no basta la percepción sensorial para aprehender la esencia de las cosas.

Dos figuras explicitan este pensamiento: el mito de la caverna y la *línea dividida*. En la línea dividida Platón traza, de menor a mayor grado de verdad, los segmentos de la imaginación (*eikasia*) y la creencia (*pistis*) (los cuales remiten al mundo sensible), y los de la comprensión matemática o conocimiento discursivo (*dianoia*) y la dialéctica (*noesis*) (propios del mundo inteligible). La dialéctica, entendida inicialmente como el método socrático de preguntas y respuestas, evoluciona en Platón hasta convertirse en el arte supremo que, sin recurrir a imágenes ni hipótesis, asciende hasta los principios no hipotéticos (las Ideas) y, tras contemplar la Idea del Bien, desciende deductivamente encadenando todo el saber. La dialéctica culmina en la intuición racional de las Formas y, sobre todo, en la contemplación del Bien, que ilumina y legitima todo saber: conocer el Bien es, en última instancia, conocer la condición de posibilidad de la verdad.



Otra tesis epistemológica central es la Teoría de la reminiscencia o *anamnésis*: el alma, al ser inmortal y haber contemplado las Formas antes de su encarnación (preexistencia del alma), recuerda mediante la correcta interrogación y el ejercicio intelectual lo que ya en ella existe latente. La educación, por tanto, no es mera transmisión de información sino recolocación (o evocación) de la verdad que el alma ya posee; la mayéutica socrática es la técnica educativa que facilita esa recolección de la verdad mediante preguntas dirigidas.

Platón jerarquiza también las disciplinas: las matemáticas ocupan un lugar preparatorio, pues habituan la mente a la abstracción, mientras que la dialéctica constituye la forma suprema de conocimiento, puesto que por ella se trasciende el plano hipotético y se alcanza el conocimiento de los principios primeros.

Finalmente, en el *Banquete*, Platón presenta a Eros (el Amor) como un demon intermedio entre lo humano y lo divino, hijo de la Pobreza (*Penia*) y la Abundancia (*Poros*). Eros simboliza la filosofía misma: el anhelo y la fuerza motriz que impulsa al alma desde el amor a la belleza sensible, ascendiendo gradualmente (amor a los cuerpos, a las almas, a las instituciones, a las ciencias) hasta el amor y conocimiento de la Belleza en sí, la Idea eterna y perfecta. El amor platónico es, así, amor a la perfección de lo ideal.

Subsection 21.3

Antropología

La tan reconocida distinción entre cuerpo y mente (*alma*) proviene al instanciar el dualismo platónico al humano. Siendo el alma el mundo superior, se deriva: la imperativa al ascetismo, que el cuerpo sirve como prisión para el alma, el ciclo de reencarnación (metempsicosis o transmigración) .... Es aquí donde es posible trazar una influencia hacia los Pitagóricos y a su vez hacia el orfismo.

21.3.1 Alma

El alma, según Platón, tiene carácter divino y es ontológicamente prioritaria respecto del cuerpo. Es inmortal, preexistente y capaz de contemplar las Formas; su caída al cuerpo es lo que origina el olvido y la necesidad de aprendizaje que, en realidad, es recolocación. Moralmente, el alma es tripartita, conforme a la célebre división de *La República* y al mito del carro alado del *Fedro*:

- **La parte racional** (*logistikon*): orientada al conocimiento, ama la verdad y debe gobernar por su capacidad para discernir el Bien. Es inmortal, de naturaleza divina y se sitúa en el cerebro.
- **La parte irascible o espirituosa** (*thymoeides*): vinculada al ánimo, al honor y al valor; su función es auxiliar a la razón y sostener la firmeza moral. Es mortal, fuente de pasiones nobles, inseparable del cuerpo y se sitúa en el tórax.
- **La parte concupiscible** (*epithymetikon*): relacionada con apetitos y placeres corporales; exige moderación. Es mortal, fuente de pasiones innobles, inseparable del cuerpo y se sitúa en el abdomen.

Platón relaciona la anterior división con las 4 virtudes griegas *cardinales* (a saber: prudencia, justicia, coraje y templanza) de la siguiente manera:

- Que haya **prudencia** (*phronesis*) significa que la parte racional sea la autoridad suprema y guíe al resto.
- Que haya **coraje** o **fortaleza** (*andreia*) significa que la parte irascible se someta a la parte racional. Puesto que son valientes aquellos que, sabiendo lo que es bueno, actúan de manera acorde.
- Que haya **templanza** o **moderación** (*sophrosyne*) significa que la parte concupiscible sepa moderar su apetito, así subordinándose a la razón.

Por último, la justicia (*dikaiosyne*), en el alma, se define como la armonía y el correcto ordenamiento entre estas partes: cada una desempeña su función sin usurpar la propia de las otras, bajo la dirección de la razón. La tarea del alma unida al cuerpo es la purificación (*katharsis*), un alejamiento de lo sensible y un acercamiento a lo inteligible. En el plano antropológico-religioso, Platón postula el ciclo de transmigraciones (influencia pitagórica) y la posibilidad de purificación moral del alma (cf. el mito de Er en la *República*), donde la conducta en la vida determina su suerte posterior y la posibilidad de liberarse definitivamente del ciclo para contemplar las Ideas.

21.3.2 Cuerpo

Siendo el cuerpo la antítesis del alma, Platón lo presenta como principio mortal, ligado a la generación y la corrupción, y como fuente de pasiones, deseos y errores perceptivos. Los sentidos remiten al mundo cambiante y, por tanto, son instrumentos limitados y frecuentemente engañosos para acceder a la verdad. La presencia del cuerpo impone sobre el alma tentaciones que desordenan su jerarquía; la concupiscencia puede subyugar a la razón si no media la educación y la disciplina moral; por eso Platón adopta, en sus consecuencias prácticas, una inclinación hacia el ascetismo moderado y la purificación.

No obstante, Platón no reduce el cuerpo a mero estorbo: reconoce su papel en la acción política y social y en la formación del carácter. El proyecto educativo que propone orienta y regula los impulsos corporales mediante gimnasia, música y disciplina, integrándolos de modo que sirvan a la excelencia del alma. La medicina del alma, como metáfora, exige ordenar y domesticar las apetencias para que la polis y la vida individual alcancen la armonía justa.

Subsection 21.4

Política

La misión última de la filosofía política de Platón es la justicia. Su más magna obra expuesta para este fin es *La República*.

Justicia se ha de entender por este nombre lo que en común llamamos virtud, y de otro modo hombría de bien, o concierto y armonía universal de las acciones; es decir, aquel hábito de vivir en un todo conforme al dictamen de la recta razón que constituye al que le posee en la clase de hombre justo. Tomada la justicia en este sentido generalísimo, se identifica con la república concertada y estrechamente unida, de forma que parezca no más de una sola alma; y la verdadera república equivale a la justicia de todos los ciudadanos, por la cual cada uno desempeña su cargo u oficio como es debido. En algo, no obstante, pueden distinguirse, en cuanto a la república es como el argumento y materia de que se vale, y la justicia es como el fin y término; de modo que Platón toma por objeto una república, con el fin de manifestar en grande, en términos que a nadie se le oculte, la naturaleza de la justicia.

Cinco puntos insinúa Platón en la introducción de su diálogo, que son como otras tantas piedras fundamentales sobre que se sustenta una república; a saber: las solemnidades sagradas, la amistad, la prudencia y consejo de los ancianos, el afecto moderado de las riquezas, y la utilidad de ellas para sostener los derechos de la verdad, compañera inseparable de la justicia. [11]

[11] *En este primer punto, con la oración y la adoración, sacrificios y votos de los asistentes a las solemnidades sagradas, se indican la piedad y religión, dos firmes fundamentos del Estado y de la justicia y demás virtudes necesarias a la sociedad; añadiéndose a estos como tercero la esperanza de los premios y temor de las penas que acaso es el más poderoso de los tres para contener la multitud.*

La estructura política ideal platónica deriva directamente de la antropología tripartita: la ciudad perfecta replica en lo social el orden del alma justa, estableciendo una correlación entre el alma y el Estado. Así se distinguen tres clases sociales análogas a las partes del alma, regidas por el principio de especialización funcional (cada uno debe realizar la función para la que está naturalmente mejor dotado):

- **Gobernantes (filósofos–reyes)**: corresponden a la parte racional. Solo aquellos que han alcanzado la comprensión de las Formas, y en última instancia del Bien, son aptos para gobernar. La filosofía, convertida en virtud política, legitima el poder. Deben ser célibes y carecer de propiedad privada para evitar intereses particulares.
- **Auxiliares o Guardianes (guerreros y policías)**: corresponden a la parte irascible. Su función es defender la ciudad y aplicar las decisiones de los gobernantes; deben poseer coraje y lealtad. También viven en régimen comunitario, sin propiedad privada ni familia.
- **Proveedores o Productores (agricultores, artesanos, comerciantes)**: corresponden a la parte concupiscible. Su tarea es sostener materialmente la polis mediante el trabajo y la producción. A ellos se les permite la propiedad privada y la familia.

La justicia política, por tanto, consiste en que cada clase realice la función para la cual está naturalmente más capacitada, bajo la guía de la razón gobernante. Un Estado justo es aquel con gobernantes prudentes, guardianes fuertes y productores moderados.

Para asegurar este orden, Platón diseña un riguroso sistema educativo público en dos etapas: una primera (hasta los 20 años) de gimnasia y música para todos los futuros guardianes; y una segunda (de los 20 a los 35) de formación matemática y filosófica para los seleccionados como futuros gobernantes. La educación tiene como objetivo desarrollar las capacidades naturales y asegurar la estabilidad del orden social. Platón, además, defiende la igualdad de capacidades entre hombres y mujeres: las mujeres aptas deben recibir la misma educación y acceder a las funciones de guardián o gobernante.

Para mantener la cohesión social, Platón recurre al «mito de las razas» o «mito de los metales» (oro, plata, bronce/hierro), un «noble engaño» que justifica la estructura jerárquica como de origen divino. Asimismo, propone la comunidad de mujeres e hijos entre guardianes y gobernantes, aboliendo la familia tradicional para que su lealtad sea exclusiva al Estado.

El sistema de gobierno propuesto es una monarquía o aristocracia absoluta de los más sabios. Platón desconfía de las leyes fijas, pues podrían obstaculizar el juicio sapiente del filósofo-rey, aunque en su último diálogo, *Las Leyes*, matiza esta posición.

Platón analiza asimismo la dinámica de degeneración política: la ciudad ideal (aristocracia) puede decaer en timocracia (gobierno de los ambiciosos), luego en oligarquía (gobierno de los ricos), después en democracia (gobierno de la multitud) y finalmente en tiranía (gobierno del déspota). Cada régimen tiene su psicología moral y sus vicios correspondientes. La causa última de este declive es el desorden interior del alma colectiva: cuando la razón deja de mandar, los apetitos y los intereses particulares toman el poder, provocando corrupción y violencia.

Finalmente, la figura del filósofo-rey sintetiza la aspiración platónica: un gobernante que no busca el poder por interés personal sino por saber y por amor a la verdad, capaz de orientar la polis hacia el bien común. La política platónica, aunque aristocrática en su designio (gobierno de los mejores en conocimiento), está animada por la idea de que el saber auténtico es condición de la legitimidad y la virtud públicas. Su propuesta inaugura el género de la utopía política, un modelo ideal que sirve de crítica a la realidad existente.