Hola mundo

Marcos Ávila Navas
I.E.S Los Colegiales

Contents

PART

I

Preambulo

Section 1

Sobre este libro

Este libro trata de recoger todos los temas que un estudiante de 2º de bachillerato puede encontrarse en las distintas asignaturas. Las asignaturas tratadas no son exhaustas: solo se recogen **Matemáticas II**, **Física**, **Tecnología**, **Filosofía**, y **Lengua**. Es por tanto dirigido al itinerario tecnológico impartido en muchos centros, pero especialmente al impartido en el I.E.S Los Colegiales.

Subsection 1.1

Cómo leer este libro

Este libro intenta da una explicación profunda tal que el estudiante sea capaz de comprender la intuición que lleva al planteamiento de los problemas, el razonamiento tras los distintos resultados, o las conclusiones del autor en cuestión. Cómo es así, mucho del contenido no es esencial y funciona para profundizar en el tema. Por lo tanto, lo único con valor de estudiar serán las secciones “prácticas” o “resumen”.

Cabe también remarcar que el orden de los temas no es casualidad: de tanto en tanto se utilizarán conceptos ya trabajados en partes anteriores, tal que, por ejemplo, para mejor comprender por qué el potencial gravitatorio tiende a 0 en el infinito, el lector será dirigido a la parte donde se trata tales cuestiones.

PART

II

Matemáticas

SECTION 2

Preludio

Las areas de las matemáticas pertinentes a la selectividad son 4: **análisis real**, **geometría**, **algebra**, **probabilidad y estadísica**.

SUBSECTION 2.1

Lógica proposicional de primer orden

Se dice que las matemáticas son un lenguaje. Como tal, y aunque preferimos el lenguaje natural, y nos limitamos a este para todo lo relevante a la selectividad, es bueno familiarizarse con el lenguaje matemático básico. Aunque existen varios "lenguajes" para las matemáticas, el más fácil, más usado, y el clásico es la "***lógica proposicional de primer orden***".

En esencia, la lógica proposicional trata de construir "*proposiciones*" utilizando un cierto conjunto de símbolos, los "*conectores lógicos*" y los "*cuantificadores*". Sin entrar en demasiado detalle, una proposición es una declaración con un valor de verdad ("*Hoy hace sol*", "*Sócrates es inmortal*", "*Beethoven el perro fue un gran pianista*"...). Estas declaraciones naturalmente forman otras utilizando "*conectores lógicos*". Por ejemplo, "*Mañana lloverá y hoy hace sol*" se puede descomponer en dos otras proposiciones, que si ambas son verdad harán la proposición total verdad. Cada conector lógico tiene asociado un símbolo cómo "$\wedge$" en el caso de "y".

Los conectores mas comunes son: conjunción ("*... y ...*", "$\wedge$"), disyunción ("*... o ...*", "$\vee$"), negación ("*no ...*", "$\neg$") e implicación ("*... por lo tanto ...*", "$\implies$").

Por otra parte, también nos interesa hablar de para que cosas algo es verdad. Por ejemplo, "*Cualquier número natural se puede factorizar en números primos*" tiene un sentido de extensión completamente distinto a "*Existen 3 números enteros tal que la suma de los cuadrados de dos sean igual al cuadrado del tercero*". Hay dos tipos de cuantificadores: universal ("*Cualquier "x", ...*", "$\forall x. \dots$") y existencial ("*Existe "x" tal que, ...*", "$\exists x. \dots$").

Con esto, podemos adentrarnos un poco en la anatomía de la proposición. Una proposición tiene un "sujeto" (*variables que representan de lo que se está hablando*) y un "predicado" (*lo que se postula que las variables satisfacen*). Se dice que una variable es "libre" cuando aparece en el predicado sin haber sido cuantificada. Típicamente nos interesan proposiciones sin variables libres, ya que es imposible deducir el valor de verdad de "*x es mortal*" si no sabemos de donde procede x (es decir, deberíamos añadir "*cualquier humano, llamese x, para el que ...*" o "*existe un humano, llamese x, para el que ...*").

El compendio anterior quizás no es suficiente para alguien no ya algo expuesto al lenguaje matemático. Para comprobar, uno debería de ser capaz de "leer" las siguientes "oraciones". [1]

[1] *La notación $x \in X$ se introducirá en la sección posterior, significa "x pertenece a X"*

1. $$\forall x, y \in X.\ f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$$

2. $$\forall y \in Y.\ \exists x \in X.\ \text{tal que } f(x) = y$$

3.
$$\exists \epsilon \in \mathscr{G}.\ \text{tal que } \forall x \in \mathscr{G}.\ x \cdot \epsilon = \epsilon \cdot x = x$$

4.
$$\forall \epsilon > 0.\ \exists \delta > 0.\ \text{tal que } 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

Subsection 2.2
Conjuntos

En esencia, lo que las matemáticas clásicas [2] son es el estudio de "conjuntos". Un conjunto se puede pensar intuitivamente cómo un saco: una agrupación, desordenada, de elementos únicos (es decir, no permitimos elementos repetidos). La notación básica de un conjunto es separar los elementos por comas y encapsular la enumeración con llaves, por ejemplo: $\{2, 3, abc, \{\star\}\}$.

[2] *Existen otras "matemáticas", por ejemplo la constructiva*

Sobre los conjuntos nos interesa fundamentalmente una cuestión: si algo pertenece a él o no. Esto se representa con un predicado el cuál se representa con la notación $x \in X$ (se puede leer como "x pertenece a X"). Por ejemplo, si $X = \{2, 3, abc, \{\star\}\}$ entonces $2 \in X$, pero no $\star \in X$, lo correcto sería $\{\star\} \in X$.

De aquí derivamos el concepto de función. Decimos que $f : X \to Y$ es una función del conjunto X al conjunto Y a la asociación de cada elemento de X a un único elemento de Y. Por ejemplo, podemos considerar una función $\chi : X \to Y$ de $X = \{2, 3, abc, \{\star\}\}$ a $Y = \{\text{true}, \text{false}\}$ que asocia a los números de X a true y al resto de elementos a false. Otras veces consideramos funciones definidas por alguna fórmula. Si $\mathbb{N}$ es el conjunto de números naturales, siguiente : $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por $\text{siguiente}(n) = n + 1$ es una función.

Sobre las funciones es ineresante sacar 3 conjuntos:

- El **dominio** ($\text{dom} f$): Si $f : X \to Y$ es una función, $\text{dom} f = X$ (es decir, el conjunto sobre el que f se define).
- El **codominio** ($\text{cod} f$): Si $f : X \to Y$ es una función, $\text{cod} f = Y$ (es decir, el conjunto al que f llega).
- La **imagen** ($\text{im} f$): Si $f : X \to Y$ es una función, $\text{im} f = f(X)$ (es decir, el conjunto en Y que f produce).

Section 3
Análisis real

El **análisis real** investiga los números reales, secuencias de estos, y funciones reales (funciones con dominio en $\mathbb{R}$).

Subsection 3.1
Funciones reales

Una función real f es aquella tal que $\mathrm{dom} f = X \subseteq \mathbb{R}$, es decir, cuyo dominio es $\mathbb{R}$ o un subconjunto de este. Gracias a la estructura (*topológica*) [3] de los números reales, podemos considerar la noción de **continuidad**:

[3] *La topología es el estudio de espacios construidos por conjuntos. En topología $\mathbb{R}$ se suele considerar como "el espacio de la recta", "**la recta real**"*

Definition 1 (Continuidad topológica) Decimos que una función real es continua en a si a cada intervalo abierto V que contiene a $f(a)$ se le corresponde un intervalo abierto U que contiene a a tal que $f(U) \subseteq V$.

Esta definición no es la estándar (la utilizada en selectividad será definida en la sección sobre límites). Sin embargo, nos da una buena intuición sobre lo que significa continuidad: si pensamos en un intervalo abierto cómo una zona cercana a algún punto, una función continua, según esta definición, es aquella que zonas cercanas en el codominio se corresponden a zonas cercanas en el dominio. Dicho de otra manera, si x está cercano a y en el dominio, $f(x)$ esta cercano a $f(y)$ en la imagen.

3.1.1 En práctica

En la selectividad no es raro un ejercicio que requiera calcular el dominio de una función. Para este fin, debemos identificar el dominio e imagen de todas las funciones con dominios restringidos involucradas y restringir hasta que la imagen de la función que les sirve cómo argumento caiga en el dominio de estas funciones "problemáticas". A continuación una tabla con reglas de inferencia para los dominios:

$f(x)$	dom f
$f_1(x) + f_2(x)$	$\mathrm{dom} f_1 \cap \mathrm{dom} f_2$
$f_1(x) f_2(x)$	$\mathrm{dom} f_1 \cap \mathrm{dom} f_2$
$f_1(x)/f_2(x)$	$(\mathrm{dom} f_1 \cap \mathrm{dom} f_2) \setminus \{f_2(x) = 0\}$
ax^b	$\mathbb{R}$
$\sqrt[2n]{x}$	$[0, +\infty)$
$\sqrt[2n+1]{x}$	$\mathbb{R}$
a^x	$\mathbb{R}$
$\ln(x)$	$(0, +\infty)$
$\lvert x \rvert$	$\mathbb{R}$

Subsection 3.2
Límites

Los límites son la propiedad característica de los números reales [4]: el salto de los números racionales a los números reales es precisamente requerir que toda secuencia (*Cauchy*) converja.

[4] *Todo "campo completo ordenado" es isomórfico a $\mathbb{R}$.*

Definition 2 (Secuencia) Una secuencia (de números reales) es una función de $\mathbb{N}$ a $\mathbb{R}$. Equivalentemente es una lista ordenada e infinita de números reales.

Definition 3 (Secuencia Cauchy) Se dice que una secuencia es *Cauchy* cuando los números se acercan aribtrariamente. Si $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ es una secuencia Cauchy:

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{R}, \forall m, n \geq N. |f(m) - f(n)| < \epsilon$$

Con esta definición a mano, el límite de una función f cuando tiende a a es simplemente a lo que converja el aplicarle f a una secuencia Cauchy que converja a a:

Definition 4 (Límite de una función) Se dice que $\lim_{x \to a} f(x) = L$ sí:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0. |a - x| < \delta \Rightarrow |L - f(x)| < \epsilon$$

En la práctica, hay veces que nos interesa investigar secuencias Cauchy que siempre sean mayores o menores que el número al que convergen:

Definition 5 (Límites laterales de una función) Se dice que $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$ (convergencia por la derecha) sí:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0. a < x < a + \delta \Rightarrow |L - f(x)| < \epsilon$$

Dualmente, se dice que $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$ (convergencia por la izquierda) sí:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0. a - \delta < x < a \Rightarrow |L - f(x)| < \epsilon$$

Finalmente, cabe replantear la defininción de continuidad utilizando límties, ya que esta es la utilizada en la selectividad:

Definition 6 (Continuidad) Decimos que una función real es continua en a si:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a) = \lim_{x \to a^+} f(x)$$

Subsection 3.3

Derivadas

Subsection 3.4

Integrales

Section 4

Geometría

Section 5

Algebra

Section 6

Estadística y probabilidad

PART III

Física

Section 7

Preludio

Las áreas de la física pertinentes a la selectividad son ...: **Campo gravitatorio y campo eléctrico**, ...

Section 8

Campo gravitatorio

Subsection 8.1

Mecánica clásica

El campo gravitatorio es un campo vectorial en la mecánica clásica [5], y utilizamos los tres *versores* estándar: $\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}$.

[5] *en la teoría de relatividad general es un* ***campo tensorial***

Dentro del campo gravitatorio todas las fuerzas son atractivas y son resultantes de la masa de los objetos, que aproximamos cómo partículas puntuales.

8.1.1 Momento lineal y angular

Definition 7 (Momento Lineal) El momento lineal $\vec{p}$ es una magnitud vectorial que representa la inercia de un cuerpo, su resistencia a cambiar su estado de movimiento.

$$\vec{p} := m\vec{v}$$

Theorem 1 (Variacion del momento lineal) La variacion del momento lineal es precisamente la fuerza responsable del movimiento.

Proof

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} = \vec{F}$$

□

En un movimiento curvilíneo, $\vec{p}$ cambia continuamente, lo cuál lo explicamos con una nueva magnitud:

Definition 8 (Momento Angular) El momento angular $\vec{L}$ caracteriza las propiedades de inercia de un cuerpo que gira respecto a un punto.

$$\vec{L} := \vec{r} \times \vec{p}$$

En un movimiento circular podemos simplificar la definición de la magnitud del momento angular, ya que:

$$L = rp \sin\alpha = rp \sin 90 = rp = rmv$$

Definition 9 (Fuerza central) Fuerza central es aquella cuya direción es siempre a un punto fijo y cuya magnitud solo depende de la distancia a ese punto.

Theorem 2 (Conservación del momento angular) Para un cuerpo sometido a fuerzas centrales la variación del momento se anula.

Proof

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{v} \times m\vec{v} + \vec{r} \times (m\vec{a}) = r \times \vec{F}$$

Si ni $\vec{r} = 0$ ni $\vec{F} = 0$, entonces $\vec{r} \times \vec{F} = 0$ implica que $\vec{r}$ y $\vec{F}$ son paralelos (definición de fuerza central). □

8.1.2 Energía y trabajo

Definition 10 (Trabajo) Capacidad que tiene un cuerpo para realizar trabajo. La energía mecánica es aquella asociada al movimiento:

- **Energía cinética**: Energía que tiene un cuerpo en virtud a su velocidad:

$$E_C = \frac{1}{2}mv^2$$

- **Energía potencial**: Energía que tiene un cuerpo en virtud a su posición respecto a una masa:

$$E_P = G\frac{M}{r}$$

La suma de estas dos anteriores es la **energía mecánica**:

$$E_M = E_C + E_P$$

Definition 11 (Energía y energía mecánica) Capacidad que tiene un cuerpo para realizar trabajo. La energía mecánica es aquella asociada al movimiento:

- **Energía cinética**: Energía que tiene un cuerpo en virtud a su velocidad:

$$E_C = \frac{1}{2}mv^2$$

- **Energía potencial**: Energía que tiene un cuerpo en virtud a su posición respecto a una masa:

$$E_P = G\frac{M}{r}$$

La suma de estas dos anteriores es la **energía mecánica**:

$$E_M = E_C + E_P$$

Subsection 8.2

Campo gravitatorio creado por masas puntuales

Definition 12 (Fuerza gravitacional) Fuerza resultante de las perturbaciones del campo gravitatorio.

$$\vec{F_g} = G\frac{Mm}{r^2}$$

Definition 13 (Intensidad del campo gravitatorio) Fuerza resultante por el campo gravitatorio por unidad de masa.

$$\vec{g} = \frac{\vec{F_g}}{m} = G\frac{M}{r^2}$$

Remark El principio de superposición aplica:

$$\vec{g_T} = \sum_i \vec{g_i} = G\sum_i \frac{M_i}{r_i^2}\hat{u_{ri}}$$

Subsection 8.3

Campo gravitatorio de los cuerpos celestes

El campo gravitatorio tal y cómo lo hemos presentado puede utilizarse para operar con cuerpos celestes (aproximadamente).

Subsection 8.4

Leyes de Kepler

- **Primera ley**: Todos los planetas se mueven alrededor del Sol siguiendo órbitas elípticas, y el Sol está en uno de los focos de la elipse.
- **Segunda ley**: Los cuerpos celestes se mueven con una velocidad areolar constante. Es decir, un mismo tiempo barre una misma área en cualquier punto de la órbita ($\frac{dA}{dt} = cte.$)
- **Tercera ley**: Para todos los cuerpos celestes orbitando alrededor del mismo cuerpo, se cumple que:
$$\frac{T_1^2}{a_1^3} = cte. = \frac{T_2^2}{a_2^3}$$

El punto más alejado de una órbita elíptica es el afelio y el más cercano es el perihelio.

Section 9

Campo Eléctroestático

El campo eléctrico es un campo vectorial al igual que el campo gravitatorio.

Subsection 9.1

Intensidad del campo electroestático

Definition 14 (Fuerza Eléctrica, Ley de Coulomb) La fuerza eléctrica es la resultante de las perturbaciones del campo electroestático.

$$\vec{F_e} = K\frac{Qq}{r^2}\cdot\hat{u_r}$$

Remark Si se fija una dirección, es fácil ver que:

- **Si Q y q tienen mismo signo**: Entonces $Qq > 0$ por lo que $F_e > 0$ (repulsión).
- **Si Q y q tienen distinto signo**: Entonces $Qq < 0$ por lo que $F_e < 0$ (atracción).

Por lo que se justifica la regla "similares se repelen y opuestos se atraen".

Definition 15 (Intensidad eléctrica) Fuerza resultante por el campo eléctroestático por unidad de carga.

$$\vec{E} = \frac{\vec{F_e}}{q} = K\frac{Q}{r^2}$$

Remark Nótese que si $Q > 0$ entonces $\vec{E}$ y $\hat{u_r}$ tendrán el mismo sentido mientras que si $Q < 0$ entonces $\vec{E}$ y $\hat{u_r}$ tendrán sentidos opuestos (demostración trivial).

Remark También es importante remarcar que el principio de superposición aplica:

$$\vec{E_T} = \sum_i \vec{E_i} = K\sum_i \frac{Q_i}{r_i^2} \cdot \hat{u_{ri}}$$

SUBSECTION 9.2

Energía asociada al campo eléctrico

En la situación descrita, podemos llegar a una forma cerrada para el trabajo dentro del campo electroestático:

$$W = \int_i^f \vec{F_e} \cdot d\vec{r} = \int_i^f K\frac{Qq}{r^2}\hat{u_r} \cdot d\vec{r} = \int_i^f K\frac{Qq}{r^2}dr = KQq\left[\frac{-1}{r}\right]_i^f$$

Definition 16 (Energía potencial eléctrica) La energía potencial eléctrica se define en virtud a que el campo electroestático es conservativo:

$$W_c = -\Delta E_P \qquad \text{ó} \qquad E_P = K\frac{Qq}{r}$$

Intuitivamente, la energía potencial eléctrica es comparable a la gravitacional solo que cargas positivas "suben el terreno" mientras que cargas negativas lo bajan. De la misma manera que con los campos gravitatorios, es fructífero considerar energía potencial por unidad de carga (A ser explicado a continuación).

SUBSECTION 9.3

Potencial eléctrico

Definition 17 (Potencial eléctrico) Trabajo necesario para llevar una unidad de carga hasta el infinito a velocidad constante:

$$V = E_{P\infty} - E_P = K\frac{Q}{r}$$

Remark Si se fija una dirección, es fácil ver que si Q y q tienen mismo signo ($Qq > 0$)

- **Si** $r_f > r_i$ (se aleja): Entonces $W = -\Delta E_P = -q\Delta V > 0$ (movimiento espontáneo).

- **Si** $r_f < r_i$ (se aleja): Entonces $W = -\Delta E_P = -q\Delta V < 0$ (se necesita suplir una fuerza).

Mientras que lo contrario es cierto si Q y q tienen distinto signo.

PART IV

Tecnología

Section 10

Preludio

Section 11

Materiales y sus propiedades

Subsection 11.1

Propiedades mecánicas de los materiales

- **Dureza**: Resistencia que ofrece un material a ser deformado o penetrado.
- **Elasticidad**: Propiedad general de los cuerpos sólidos, en virtud de la cual recobran más o menos de su extensión y forma, tan pronto como cesa la acción de la fuerza que las deformaba.
- **Plasticidad**: Propiedad general de lo que puede cambiar de forma y conservar esta de modo permanente si romperse.
  - **Maleabilidad**: Propiedad de adquirir una deformación mediante una compresión sin romperse.
  - **Ductilidad**: Propiedad de adquirir una deformación mediante tracción sin romperse.
- **Resilencia**: Capacidad de absorver energía mecánica y recuperar su forma original despues de una deformación elástica.
  - **A tracción**
  - **A compresión**
  - **A flexión**
  - **A pandeo**
  - **A torsión**
  - **A la fatiga**

Subsection 11.2

Ensayos de propiedades mecánicas

11.2.1 De tracción

Conceptos previos:

- **Tensión**: $\sigma := \frac{F}{S}$
- **Alargamiento unitario**: $\epsilon := \frac{\Delta l}{l_0}$
- **Estricción**: $\epsilon_t := \frac{-\Delta S}{S_0}$

- **Modulo de Poisson**: $\eta := \frac{\epsilon_t}{\epsilon}$
- **Módulo de elasticidad**: $E := \frac{\sigma}{\epsilon}$

En el ensayo de tracción se somete a una probeta de forma y dimensiones normalizadas y del material a ensayar a un esfuerzo de tracción en la dirección de su eje, de manera creciente y hasta romperla.

En un diagrama de tracción, se distinguen dos zonas características:

- **Zona elástica (OE) [0, E]**
  - **Zona de proporcionalidad (OP) [0, P]**: Es válido usar E como factor de conversión.
  - **Zona no proporcional (PE) [P, E]**
- **Zona plástica (ES) [E, S]**
  - **Zona límite de rotura (ER) [E, R]**
  - **Zona rotura efectiva (RS) [R, S]**

Existen puntos entre E y S, cabe destacar:

- **Rotura efectiva (R)**: Tras este punto, es inevitable la rotura.
- **Fluencia (F)**: (Solo para metales) Tras este punto, se produce un alargamiento sin que aumente la tensión aplicada.

El adjetivo "límite" a cualquiera de estos puntos refiere al valor de la tensión correspondiente al punto en la gráfica, se simboliza con $\sigma_{(-)}$.

Otro nombre para σ_E es **tensión de admisión** (σ_{ad}), y se puede aproximar al límite de proporcionalidad.

La **tensión de trabajo** es la tensión máxima a la que podemos someter una pieza respetando las recomendaciones y normas de seguridad, para calcularla, se aplica un coef. de seguridad $N \in [1.2, 4]$.

11.2.2 De dureza

Brinell:

- $D :=$ Diametro de bola.
- $d :=$ Diametro de la huella.
- **Flecha**: $f := \frac{1}{2}(D - \sqrt{D^2 - d^2})$
- $F := KD^2$ donde $K :=$ cte. de ensayo.
- $S := \pi D f$
- **Grado de dureza**: $HB := \frac{F}{S} = \frac{F}{\pi D f} = \frac{2F}{\pi D(D-\sqrt{D^2-d^2})}$

La nomenclatura estandarizada tiene forma: (HB) HB$(S|W)$ (D) (F) (t), (t) solo es necesario si el tiempo no es entre 10 y 15 segundos, y donde $S =$ Steel y $W =$ Wolfram.

Vickers:

- $d :=$ Diagonal de la huella.
- $S := \frac{d^2}{2 \sin 68}$

- **Grado de dureza**: $HV := \frac{F}{S} = \frac{2 \sin 68žF}{d^2}$

  La nomenclatura estandarizada tiene forma: (HV) HV (F) (t), (t).
  Rockwell:

- $HRC := 100 - 500h$
- $HRB := 130 - 500h$

Subsection 11.3
De resilencia

Consiste en medir la energía que absorbe un material al ser impactado. Se utiliza el péndulo Charpy.

Conceptos:

- **Energía absorbida**: $-\Delta E_p := -mg\Delta h$
- **Resilencia**: $\rho := \frac{-\Delta E_p}{S}$, donde $S := S_T - ent$.

Section 12
Máquinas térmicas

Subsection 12.1
Principios fundamentales de termodinámica

La termodinámica es la rama de la física que estudia las relaciones entre el calor, el trabajo, y la transferencia de energía.

Definition 18 Energía térmica (Q)def1 En general,

$$Q := mC_E\Delta T \quad \text{donde } C_E := \text{calor específico}$$

Para gases a volumen constante,

$$Q = mC_V\Delta T \quad \text{donde } C_V := \text{calor específico a volumen constante}$$

Para gases a presión constante,

$$Q = mC_p\Delta T \quad \text{donde } C_p := \text{calor específico a presión constante}$$

Definition 19 Energía interna (U)def2 La energía interna (U) es la que tiene una sustancia en virtud a su temperatura:

$$U := \sum E_c^{\text{partíc.}} \qquad \text{(Def. no utilizada en el temario)}$$

Subsection 12.2
Principios de la termodinámica

1. **Ley de la conservación de la energía**: La energía interna (U) incrementa al añadir energía térmica al sistema, y hacer que el sistema realice trabajo la disminuye, ergo postulamos:
$$\Delta U = Q - W$$

2. **Ley de la entropía**: La cantidad de entropía del universo tiende a incrementarse en el tiempo.

3. **Principio del cero absoluto**: La entropía de un cristal perfecto de cualquier sustancia pura se aproxima a cero cuando la temperatura se aproxima al cero absoluto.

Solo usaremos el primer principio para lo que prosigue.

SUBSECTION 12.3

Transformaciones termodinámicas en los gases

Asumimos la Ley de los gases ideales:

Definition 20 Ley de los gases idealesdef3 Para un gas (ideal), se cumple:

$$pV = nRT \quad \text{donde } R = 0.082\frac{L \cdot atm}{mol \cdot K}$$

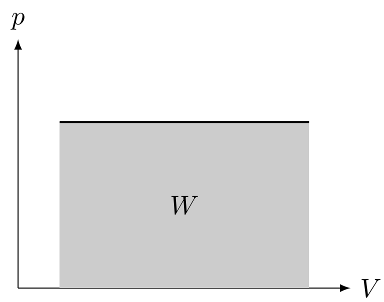
12.3.1 Transformaciones isobáricas (presión constante)

$$pV = nRT;\ \frac{p}{nR} = \frac{V}{T} = cte. \Rightarrow \frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$$

Por la definición de presión ($p := \frac{F}{S}$), tenemos:

$$W := \int_{V_1}^{V_2} F \cdot dx = \int_{V_1}^{V_2} pS \cdot dx = \int_{V_1}^{V_2} p \cdot dV = p\Delta V$$

En cuanto a la gráfica p-V:



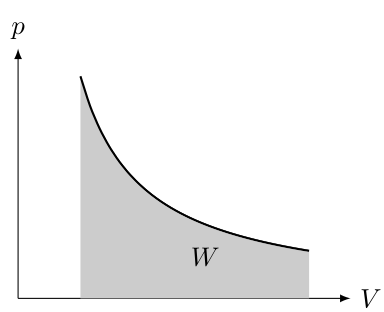
12.3.2 Transformaciones isotérmicas (temperatura constante)

$$pV = nRT = cte. \Rightarrow p_1V_1 = p_2V_2 \quad \text{ó} \quad \frac{p_1}{p_2} = \frac{V_2}{V_1}$$

Dado que, en estas condiciones, $p = \frac{nRT}{V}$

$$W := \int_{V_1}^{V_2} F \cdot dx = \int_{V_1}^{V_2} pS \cdot dx = \int_{V_1}^{V_2} p \cdot dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{nRT}{V} \cdot dV = nRT \ln \frac{V_2}{V_1}$$

En cuanto a la gráfica p-V:



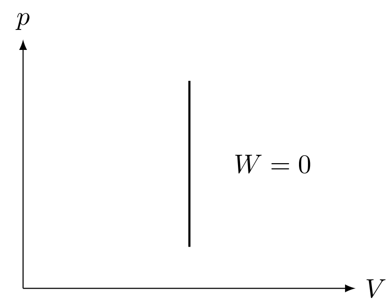
12.3.3 Transformaciones isocóricas (volumen constante)

$$pV = nRT;\ \frac{V}{nR} = \frac{T}{p} = cte. \Rightarrow \frac{T_1}{p_1} = \frac{T_2}{p_2}$$

Es fácil ver que $W = 0$ ya que $\Delta V = 0$.

$$Q = nC_V\Delta T \Rightarrow (p_1 > p_2 \Leftrightarrow Q_1 > Q_2)$$

En cuanto a la gráfica p-V:

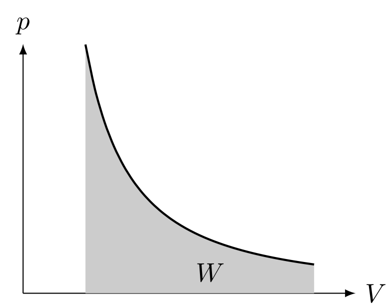


12.3.4 Transformaciones adiabáticas

Sistemas perfectamente aislados o transformaciones instantáneas. Nada es constante.

$$W = \frac{1}{1-\gamma}(p_2V_2 - p_1V_1) \quad \text{donde } \gamma := \frac{C_p}{C_V} = \text{coef. adiabático}$$

Para el aire, $\gamma \approx 1.4$
En cuanto a la gráfica p-V:



Section 13

Procesos reversibles e irreversibles

Llamamos proceso reversible a aquel en el cuál en el proceso de transformación $(p_0, V_0, T_0) \rightarrow (p, V, T)$ todos los estados intermedios son estables. Es decir, la transformación es lenta.

Subsection 13.1

Motores térmicos y máquinas frigoríficas

Una máquina térmica basa su funcionamiento en el flujo de energía calorífica entre dos focos. Si saca calor de un foco caliente, lo vierte en otro frío, y aprovecha el trabajo resultante de la transformación, se llama **motor térmico**. Si por el otro lado saca calor de un foco frío utilizando trabajo y lo vierte en otro caliente, se llama **máquina frigorífica**.

En esta situación,

$$W = Q_c - Q_f$$

$$\eta := \frac{E_u}{E_a} = \frac{W}{Q_c} = 1 - \frac{Q_f}{Q_c}$$

Subsection 13.2
Ciclo ideal de Carnot

Máximo rendimiento que se puede extraer de dos focos. El rendimiento es comúnmente aproximado tal que:

$$\eta \approx 1 - \frac{T_f}{T_c}$$

Asumimos la transmisión calorífica perfecta en las expansiones y el aislamiento perfecto en las compresiones:

1. **Expansión isotérmica**: Se aplica el calor del foco caliente, resultando en una expansión del gas a la misma temperatura que el foco caliente.

2. **Expansión adiabática**: Se retira el foco caliente; el gas sigue expandiéndose debido a la energía cinética residual.

3. **Compresión isotérmica**: Se aplica el calor del foco frío, retirando el calor del gas y dejándolo a la misma temperatura que la del foco frío.

4. **Compresión adiabática**: Se retira el foco frío; el gas sigue comprimiéndose debido a la energía cinética residual.

Section 14
Motores térmicos

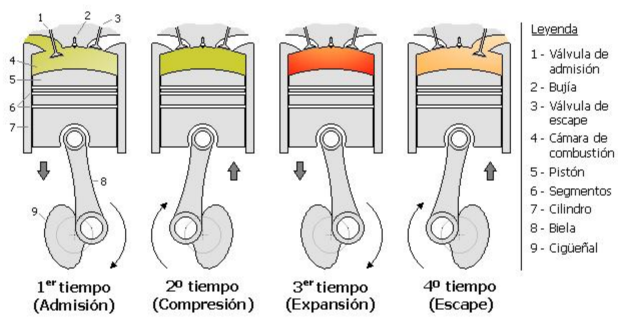
Subsection 14.1
Motores de combustión interna

Siempre nos vamos a encontrar con un pistón y una recámara. Por lo que distinguimos entre tipo de transformación que se produce en la aplicación del foco caliente, y número de movimientos del pistón (tiempos) en el que el ciclo se completa.

14.1.1 Motores de explosión

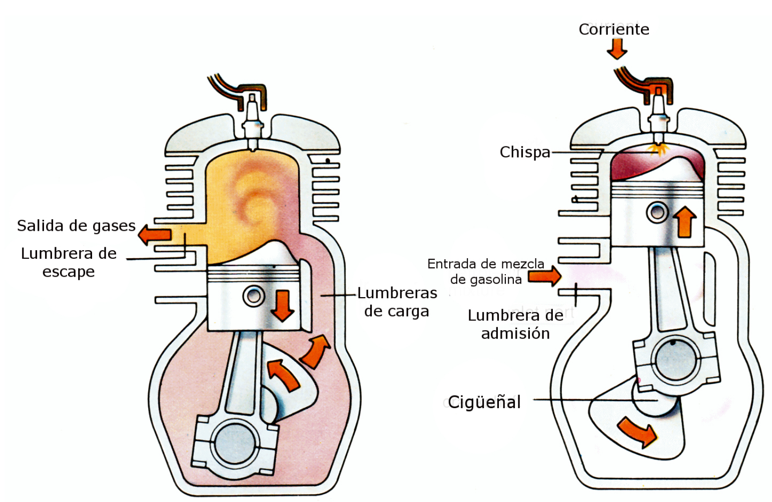
Nos centramos en el ciclo de Otto.

- **De 4 tiempos**:



1. **Fase de admisión**: transformación isobárica.
2. **Fase de compresión**: transformación adiabática; transformación isocórica (explosión, combustión instantánea).
3. **Fase de expansión**: transformación adiabática; transformación isopórica (apertura de la válvula).
4. **Fase de escape**: transformación isobárica.

- **De 2 tiempos**:



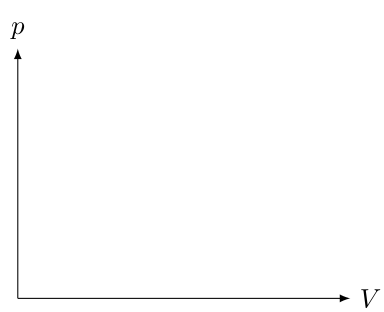
1. **Fase de compresión y aspiración**: transformación adiabática; transformación isobárica.
2. **Fase de explosión y escape**: transformación adiabática; transformación isobárica.

14.1.2 Motores de diesel

Los motores diesel cambian la bujia que produce la explosión del combustible por un inyector (combustión progresiva).

- **De 4 tiempos**:
  1. **Fase de admisión**: transformación isobárica.
  2. **Fase de compresión**: transformación adiabática.
  3. **Fase de expansión**: transformación isobárica (combustión); transformación (adiabática).
  4. **Fase de escape**: transformación isocórica; transformación isobárica.

- **De 2 tiempos**:
  1. **Fase de compresión y aspiración**: transformación adiabática; transformación isocórica.
  2. **Fase de explosión y escape**: transformación adiabática; transformación isocórica.



14.1.3 Parámetros y magnitudes características

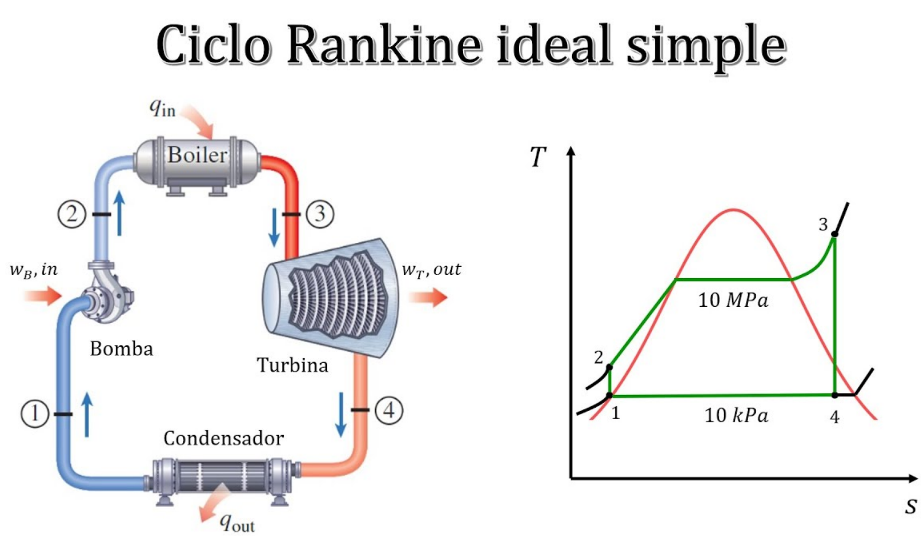
- **Calibre**: $d :=$ diam.
- **PMS**: Punto muerto superior.
- **PMI**: Punto muerto inferior.
- **Carrera**: $h := PMS - PMI$
- **Cilindrada**: $V := \pi \frac{d^2}{4} hn$ donde $n :=$ núm. de cilindros
- V_c: Volumen cámara de compresión.
- **Relación de compresión**: $RC := \frac{V_1 + V_c}{V_c}$
- **Gasto**: $G := \frac{m_c}{t}$
- **Potencia absorbida**: $P_a = GP_c$ donde $P_c =$ poder calorífico
- **Momento de torsión**: $M = Fr$
- **Potencia útil**: $P_u = M\omega$

Subsection 14.2

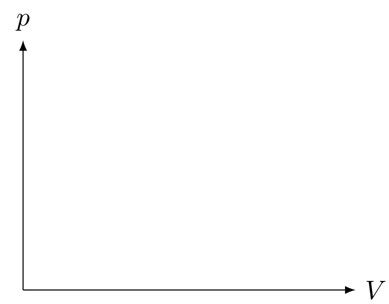
Motores de combustión externa

Su utilidad es la generación eléctrica y de propulsor de aviones.

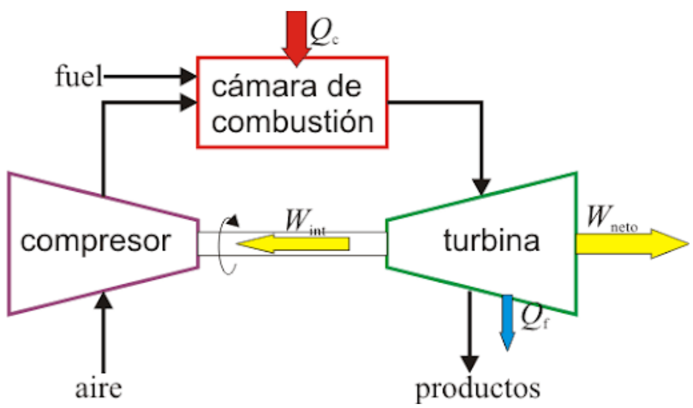
14.2.1 Ciclo de Rankine (Turbina de vapor)



1. **Caldera**: transformación isobárica: Absorción de calor en la caldera, comienza el cambio de fase, se produce vapor sobrecalentado.
2. **Turbina**: transformación adiabática.
3. **Condensación**: transformación isobárica; transformación isotérmica.
4. **Bomba**: transformación isocórica.



14.2.2 Ciclo de Brayton (Turbina de gas)



1. **Compresor**: transformación adiabática.
2. **Quemador**: transformación isobárica.
3. **Turbina**: transformación adiabática.

PART

V

Filosofía

Section 15

Preludio

PART VI

Lengua

Section 16

Preludio