Lorem Ipsum

Marcos Ávila Navas
I.E.S Los Colegiales

Contents

Preambulo

PART

I

SECTION 1

Sobre este libro

Este libro trata de recoger todos los temas que un estudiante de 2º de bachillerato puede encontrarse en las distintas asignaturas. Las asignaturas tratadas no son exhaustas: solo se recogen **Matemáticas II**, **Física**, **Tecnología**, **Filosofía**, y **Lengua**. Es por tanto dirigido al itinerario tecnológico impartido en muchos centros, pero especialmente al impartido en el I.E.S Los Colegiales.

SUBSECTION 1.1

Cómo leer este libro

Este libro intenta da una explicación profunda tal que el estudiante sea capaz de comprender la intuición que lleva al planteamiento de los problemas, el razonamiento tras los distintos resultados, o las conclusiones del autor en cuestión. Cómo es así, mucho del contenido no es esencial y funciona para profundizar en el tema. Por lo tanto, lo único con valor de estudiar serán las secciones “prácticas” o “resumen”.

Cabe también remarcar que el orden de los temas no es casualidad: de tanto en tanto se utilizarán conceptos ya trabajados en partes anteriores, tal que, por ejemplo, para mejor comprender por qué el potencial gravitatorio tiende a 0 en el infinito, el lector será dirigido a la parte donde se trata tales cuestiones.

PART

II

Matemáticas

Section 2

Preludio

Las areas de las matemáticas pertinentes a la selectividad son 4: **análisis real**, **geometría**, **algebra**, **probabilidad y estadísica**.

Subsection 2.1

Lógica proposicional de primer orden

Se dice que las matemáticas son un lenguaje. Como tal, y aunque preferimos el lenguaje natural, y nos limitamos a este para todo lo relevante a la selectividad, es bueno familiarizarse con el lenguaje matemático básico. Aunque existen varios "lenguajes" para las matemáticas, el más fácil, más usado, y el clásico es la "***lógica proposicional de primer orden***".

En esencia, la lógica proposicional trata de construir "*proposiciones*" utilizando un cierto conjunto de símbolos, los "*conectores lógicos*" y los "*cuantificadores*". Sin entrar en demasiado detalle, una proposición es una declaración con un valor de verdad ("*Hoy hace sol*", "*Sócrates es inmortal*", "*Beethoven el perro fue un gran pianista*"...). Estas declaraciones naturalmente forman otras utilizando "*conectores lógicos*". Por ejemplo, "*Mañana lloverá y hoy hace sol*" se puede descomponer en dos otras proposiciones, que si ambas son verdad harán la proposición total verdad. Cada conector lógico tiene asociado un símbolo cómo "$\wedge$" en el caso de "y".

Los conectores mas comunes son: conjunción ("*... y ...*", "$\wedge$"), disyunción ("*... o ...*", "$\vee$"), negación ("*no ...*", "$\neg$") e implicación ("*... por lo tanto ...*", "$\implies$").

Por otra parte, también nos interesa hablar de para que cosas algo es verdad. Por ejemplo, "*<u>Cualquier</u> número natural se puede factorizar en números primos*" tiene un sentido de extensión completamente distinto a "*<u>Existen</u> 3 números enteros tal que la suma de los cuadrados de dos sean igual al cuadrado del tercero*". Hay dos tipos de cuantificadores: universal ("*Cualquier "x", ...*", "$\forall x. \dots$") y existencial ("*Existe "x" tal que, ...*", "$\exists x. \dots$").

Con esto, podemos adentrarnos un poco en la anatomía de la proposición. Una proposición tiene un "sujeto" (*variables que representan de lo que se está hablando*) y un "predicado" (*lo que se postula que las variables satisfacen*). Se dice que una variable es "libre" cuando aparece en el predicado sin haber sido cuantificada. Típicamente nos interesan proposiciones sin variables libres, ya que es imposible deducir el valor de verdad de "*<u>x</u> es mortal*" si no sabemos de donde procede x (es decir, deberíamos añadir "*cualquier humano, llamese x, para el que ...*" o "*existe un humano, llamese x, para el que ...*").

El compendio anterior quizás no es suficiente para alguien no ya algo expuesto al lenguaje matemático. Para comprobar, uno debería de ser capaz de "leer" las siguientes "oraciones". [1]

[1] *La notación $x \in X$ se introducirá en la sección posterior, significa "x pertenece a X"*

1.
$$\forall x, y \in X.\ f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$$

2.
$$\forall y \in Y.\ \exists x \in X.\ \text{tal que } f(x) = y$$

3.

$$\exists \epsilon \in \mathscr{G}.\ \text{tal que } \forall x \in \mathscr{G}.\ x \cdot \epsilon = \epsilon \cdot x = x$$

4.

$$\forall \epsilon > 0.\ \exists \delta > 0.\ \text{tal que } 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

Subsection 2.2
Conjuntos

En esencia, lo que las matemáticas clásicas [2] son es el estudio de “conjuntos”. Un conjunto se puede pensar intuitivamente cómo un saco: una agrupación, desordenada, de elementos únicos (es decir, no permitimos elementos repetidos). La notación básica de un conjunto es separar los elementos por comas y encapsular la enumeración con llaves, por ejemplo: $\{2, 3, abc, \{\star\}\}$.

[2] *Existen otras “matemáticas”, por ejemplo la constructiva*

Sobre los conjuntos nos interesa fundamentalmente una cuestión: si algo pertenece a él o no. Esto se representa con un predicado el cuál se representa con la notación $x \in X$ (se puede leer como “x pertenece a X”). Por ejemplo, si $X = \{2, 3, abc, \{\star\}\}$ entonces $2 \in X$, pero no $\star \in X$, lo correcto sería $\{\star\} \in X$.

De aquí derivamos el concepto de función. Decimos que $f : X \to Y$ es una función del conjunto X al conjunto Y a la asociación de cada elemento de X a un único elemento de Y. Por ejemplo, podemos considerar una función $\chi : X \to Y$ de $X = \{2, 3, abc, \{\star\}\}$ a $Y = \{\text{true}, \text{false}\}$ que asocia a los números de X a true y al resto de elementos a false. Otras veces consideramos funciones definidas por alguna fórmula. Si $\mathbb{N}$ es el conjunto de números naturales, siguiente : $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por $\text{siguiente}(n) = n + 1$ es una función.

Sobre las funciones es ineresante sacar 3 conjuntos:

- El **dominio** ($\text{dom} f$): Si $f : X \to Y$ es una función, $\text{dom} f = X$ (es decir, el conjunto sobre el que f se define).
- El **codominio** ($\text{cod} f$): Si $f : X \to Y$ es una función, $\text{cod} f = Y$ (es decir, el conjunto al que f llega).
- La **imagen** ($\text{im} f$): Si $f : X \to Y$ es una función, $\text{im} f = f(X)$ (es decir, el conjunto en Y que f produce).

Section 3

Análisis real

El **análisis real** investiga los números reales, secuencias de estos, y funciones reales (funciones con dominio en $\mathbb{R}$).

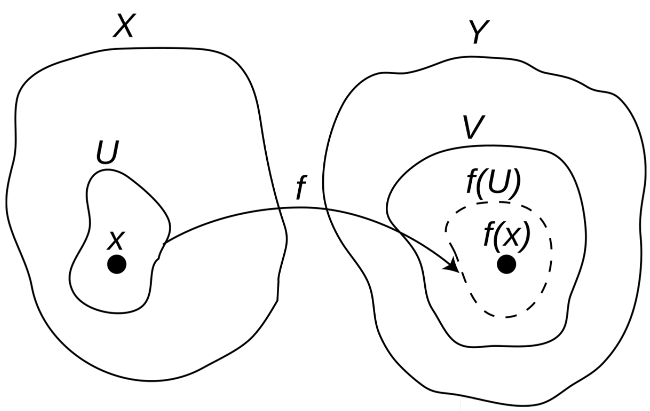
Subsection 3.1

Funciones reales

Una función real f es aquella tal que $\mathrm{dom} f = X \subseteq \mathbb{R}$, es decir, cuyo dominio es $\mathbb{R}$ o un subconjunto de este. Gracias a la estructura (*topológica*) [3] de los números reales, podemos considerar la noción de **continuidad**:

[3] *La topología es el estudio de espacios construidos por conjuntos. En topología $\mathbb{R}$ se suele considerar como "el espacio de la recta", "**la recta real**"*

Definition 1 (Continuidad topológica) Decimos que una función real es continua en a si a cada intervalo abierto V que contiene a $f(a)$ se le corresponde un intervalo abierto U que contiene a a tal que $f(U) \subseteq V$.



Esta definición no es la estándar (la utilizada en selectividad será definida en la sección sobre límites). Sin embargo, nos da una buena intuición sobre lo que significa continuidad: si pensamos en un intervalo abierto cómo una zona cercana a algún punto, una función continua, según esta definición, es aquella que zonas cercanas en el codominio se corresponden a zonas cercanas en el dominio. Dicho de otra manera, si x está cercano a y en el dominio, $f(x)$ esta cercano a $f(y)$ en la imagen.

Por conveniencia, definimos la función $\mathrm{cont} : (X \to \mathbb{R}) \to \mathcal{P}\mathbb{R}$, que a cada función real asocia el subconjunto $\mathrm{cont} f \subseteq X$ en el cuál f es continua.

3.1.1 En práctica

En la selectividad no es raro un ejercicio que requiera calcular el dominio de una función. Para este fin, debemos identificar el dominio e imagen de todas las funciones con dominios restringidos involucradas y restringir hasta que la imagen de la función que les sirve cómo argumento caiga en el dominio de estas funciones "problemáticas". A continuación una tabla con reglas de inferencia para los dominios:

$f(x)$	dom f
$f_1(x) + f_2(x)$	$\text{dom} f_1 \cap \text{dom} f_2$
$f_1(x) f_2(x)$	$\text{dom} f_1 \cap \text{dom} f_2$
$f_1(x)/f_2(x)$	$(\text{dom} f_1 \cap \text{dom} f_2) \backslash \{f_2(x) = 0\}$
ax^b	$\mathbb{R}$
$\sqrt[2n]{x}$	$[0, +\infty)$
$\sqrt[2n+1]{x}$	$\mathbb{R}$
a^x	$\mathbb{R}$
$\ln(x)$	$(0, +\infty)$
$\lvert x\rvert$	$\mathbb{R}$

Subsection 3.2

Límites

Los límites son la propiedad característica de los números reales [4]: el salto de los números racionales a los números reales es precisamente requerir que toda secuencia (*Cauchy*) converja.

[4] *Todo "campo completo ordenado" es isomórfico a $\mathbb{R}$.*

Definition 2 (Secuencia) Una secuencia (de números reales) es una función de $\mathbb{N}$ a $\mathbb{R}$. Equivalentemente es una lista ordenada e infinita de números reales.

Definition 3 (Secuencia Cauchy) Se dice que una secuencia es *Cauchy* cuando los números se acercan aribtrariamente. Si $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ es una secuencia Cauchy:

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}. \exists N \in \mathbb{R}. \forall m, n \geq N.\ |f(m) - f(n)| < \epsilon$$

Con esta definición a mano, el límite de una función f cuando tiende a a es simplemente a lo que converja el aplicarle f a una secuencia Cauchy que converja a a:

Definition 4 (Límite de una función) Se dice que $\lim_{x \to a} f(x) = L$ si:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0.\ |a - x| < \delta \Rightarrow |L - f(x)| < \epsilon$$

En la práctica, hay veces que nos interesa investigar secuencias Cauchy que siempre sean mayores o menores que el número al que convergen:

Definition 5 (Límites laterales de una función) Se dice que $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$ (convergencia por la derecha) si:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0. a < x < a + \delta \Rightarrow |L - f(x)| < \epsilon$$

Dualmente, se dice que $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$ (convergencia por la izquierda) si:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0. a - \delta < x < a \Rightarrow |L - f(x)| < \epsilon$$

También no son pocas las ocasiones donde nos interesa considerar el comportamiento de una función para números "cada vez más grandes":

Definition 6 (Límites al infinito) Se dice que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$ si:

$$\forall \epsilon > 0. \exists N \in \mathbb{R}.\ x > N \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

Dualmente, se dice que $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$ si:

$$\forall \epsilon > 0. \exists N \in \mathbb{R}.\ x < N \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

Todas estas definiciones serán unificadas para la resolución de problemas en lo que podemos llamar *el algebra de los reales extendidos* ($\bar{\mathbb{R}}$).

Finalmente, cabe replantear la defincíón de continuidad utilizando límties, ya que esta es la utilizada en la selectividad:

Definition 7 (Continuidad) Decimos que una función real es continua en a si:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a) = \lim_{x \to a^+} f(x)$$

3.2.1 Algebra de los reales extendidos

Empezamos definiendo el conjunto sobre el cual definiremos las operaciones aptas para el cálculo de límites:

Definition 8 (Los reales extendidos) Llamese $\bar{\mathbb{R}}$ o "reales extendidos" al conjunto:

$$\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty, \text{“Indet.”}, \text{“No existe.”}\}$$

Para describir el álgebra que nos interesa sobre el anterior conjunto, basta con definir cómo particípan los nuevos símbolos, y es que no modificamos las operaciones sobre los números reales. Para este fin, basta con decir que los símbolos de infinito operan cómo uno esperaría ($k + (\pm\infty) = \pm\infty$, $k(\pm\infty) = \pm\infty \ldots$). Los únicos casos donde la anterior intuición falla son en los casos "indeterminados". Dichos casos son: $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$, $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 1^{∞}, 0^0, 0^{∞}. Para lo que la selectividad concierne, solo nos interesan los 4 primeros casos.

Por último, el símbolo "No existe" viene a funcionar cómo un indicador de la divergencia de lo que se está intentando cálcular. Por ejemplo $\cos(+\infty) =$ "No existe".

3.2.2 En la práctica

Falta por explicar cómo pasar del cálculo de un límite a operar en el álgebra anteriormente descrito. Para lo cuál es suficiente decir que si se tiene $\lim x \to \alpha f(x)$, donde α es o un real o un infinito, basta con sustituir α por x en $f(x)$ y operar siguiendo las reglas ya dichas. Si el resultado de operar es otra cosa que no sea "Indet.", hemos terminado. En caso de un "Indet.", debemos trabajar $f(x)$ hasta conseguir una expresión que al sustituir nos de el resultado deseado.

Una técnica que suele funcionar es transformar todos los casos en $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$. Para $0 \cdot \infty$ la transformación es directa ($0 \cdot \infty = \frac{1}{\infty} \cdot \infty = \frac{\infty}{\infty}$). Para $\infty - \infty$ uno suele multiplicar y dividir por el conjugado de la expresión. Una vez en uno de estos dos casos, suele ser posible sacar factor común tanto en el denominador como en el numerador o se puede aplicar *L'Hopital*, a ser explicado en la siguiente sección.

SUBSECTION 3.3

Derivadas

En muchas situaciones nos interesa conocer la tasa de variación de una función en un intervalo, para lo cuál, tenemos la siguiente definición:

Definition 9 (Tasa de Variacion Media, TVM) La *Tasa de Varaición Media* de una función real f

en el intervalo $[a, b]$ se define como:

$$TVM_a^b f := \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Ocurre que, asimismo, es interesante investigar cuando $[a, b]$ "es un punto". Es decir, cuando a y b estén arbitrariamente cerca, que es lo mismo que $b = \lim_{h \to 0} a + h$. Siguiendo esta intuición, llegamos al concepto de *derivada*:

Definition 10 (Derivada en un punto y función derivada) Sea f una función real. La *derivada de f en x* se define por:

$$f'(x) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

Nótese que $f'(x)$ es sólo un símbolo. No obstante es posible definir la *función derivada*, que a cada $x \in \text{cont} f$ asocia a su correspondiente $f'(x)$.

Remark Es posible que f no sea derivable en un punto pero si sea continua (por ejemplo, $f(x) = |x|$ para $x = 0$). En general, por tanto, $x \in \text{der} f \Rightarrow x \in \text{cont} f$, pero la conversa es falsa.

Definimos $\text{der} : (X \to \mathbb{R}) \to \mathcal{P}\mathbb{R}$ de manera similar a cont.

La función derivada f' de otra, al ser una función real, puede asimismo ser derivada indefinidamente. Resultando en lo que llamamos la *n-ésima derivada de f*. [5]

[5] *Una función ∞-derivable se denomina suave.*

Las nociones anteriores también son útiles para el cálculo de límites gracias a la *regla de L'Hopital*:

Theorem 1 (Regla de L'Hopital) Sean f y g funciones reales para las que $\lim_{x \to \alpha} \frac{f(x)}{g(x)}$ sea 0 o ∞. Se cumple que:

$$\lim_{x \to \alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \alpha} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

SUBSECTION 3.4

Análisis de una función

Podemos utilizar los conceptos anteriores como herramientas para investigar el comportamiento de una función *localmente*.

3.4.1 Monotonía

La monotonía concierne a los intervalos de la función donde se tiene un mismo signo de cambio. Es decir, donde crece y decrece la función. Para este fin, por cada tramo continuo de nuestra función, investigamos el signo de $f'(x)$ para x en dicho tramo. Que $f'(x) > 0$ significa que la función tiene tendencia a crecer cerca de x, y lo opuesto es verdad si $f'(x) < 0$. Cuando $f'(x) = 0$ estamos ante un *punto crítico*, punto donde la función cambia de signo de cambio.

3.4.2 Curvatura

La curvatura concierne a los intervalos de la función donde la gráfica de la tangente se encuentra en una misma posición relativa a la gráfica de la función (a saber: por arriba o por debajo). Los mismos principios de monotonía aplican a curvatura, ya que estudiar la curvatura de f es equivalente a estudiar la monotonía de f'.

SUBSECTION 3.5

Integrales

En ciertas circunstancias podemos agregar información local de un espacio en un proceso que llamamos *integración*. Para funciones reales, podemos definir la llamada *integración de Riemann*. Conceptualmente, la integral de Riemann ($\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$) calcula una "media" de los valores de $f(x), x \in [a,b]$.

Ocurre que la integración y la derivación son procesos inversos:

Theorem 2 (Teorema fundamental del cálculo) Sea f una función real y C un número real, llamado "*constante de derivación*". Entonces:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x + C\right) = f(x)$$

De la misma manera que buscar una función inversa a otra no es trivial, buscar una *primitiva* [6], es decir, integrar una función, suele requerir utilizar ciertas técnicas falibles (conque no es un proceso mecánico como la diferenciación).

[6] *una función real F es una antiderivada, o primitiva, de otra f si la derivada de F es f*

3.5.1 Integración por partes

3.5.2 Integración de racionales

Subsection 3.6

Ejercicios selectividad resueltos

1. **Madrid. Ordinaria 2025. Pregunta 2**: Un muro rectangular de la biblioteca pública del barrio se va a pintar con la ayuda de unos grafiteros. La dimensión del muro es de 3 metros de alto y 12 metros de largo. Colocando la esquina inferior izquierda del muro en el origen de coordenadas, se va a utilizar la curva

$$f(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{9}\right) + 2$$

para diferenciar dos regiones del muro que serán pintadas con dos colores distintos. Se sabe que con un bote de spray se pueden pintar 3 metros cuadrados de superficie.

(a) (0.75 puntos) Halle el valor máximo y el valor mínimo de la función $f(x)$ en el intervalo $[0, 12]$. ¿Está la curva en este intervalo $[0, 12]$ contenida completamente en el muro?

(b) (1.25 puntos) Halle el área que tienen que pintar de cada color.

(c) (0.5 puntos) Cuántos botes de spray se tienen que comprar como mínimo para pintar toda el área bajo la curva $f(x)$?

Proof Por el teorema de Weierstrass, basta con estudiar los extremos del dominio y los máximos relativos para determinar los máximos y mínimos. Para este fin, nótese que f se define cómo una composición de funciones derivables, por lo que es derivable (asimismo continua). Por lo cuál, derivamos:

$$\frac{d}{dx}f = \frac{d}{dx}\cos\left(\frac{\pi x}{9}\right) + 2 = -\frac{\pi}{9}\sin\left(\frac{\pi x}{9}\right)$$

A continuación, averiguamos los puntos críticos:

$$f'(x) = 0;\ -\frac{\pi}{9}\sin\left(\frac{\pi x}{9}\right) = 0;\ \frac{\pi x}{9} = n\pi;\ x = 9n \quad \text{donde } n \in \mathbb{Z}$$

En concreto, en nuestro dominio encontramos dos puntos críticos, cuando $n = 0$ y $n = 1$.

Desde este punto, basta con ordenar los valores de los puntos que nos interesan y tomar el mayor y el menor:

$$f(0) = 3 > f(12) = 1.5 > f(9) > 1$$

Por tanto, el valor máximo y mínimo de f es 3 y 1 cuando $x = 0$ y $x = 9$ respectivamente. Ya que $3, 1 \in [0, 3]$ y que f es continua, f es contenida completamente en el muro. □

Proof Para calcular el área de cada color, integramos y utilizamos la geometría rectangular del gráfico para derivar una área de otra:

$$A_1 = \int_0^{12} f(x)dx = \int_0^{12} \cos\left(\frac{\pi x}{9}\right) + 2dx = \left[\frac{9}{\pi}\sin\left(\frac{\pi x}{9}\right) + 2x\right]_0^{12} \approx 21.51m$$

$$A_T = A_1 + A_2;\ A_2 = A_T - A_1 = bh - A_1 \approx 14.48m$$

□

Proof Averiguamos la cantidad de botes utilizando que un bote puede pintar hasta 3 metros cuadrados de superficie:

$$n_{\text{botes}} = \lceil \frac{A_1}{\text{area\textbackslash bote}} \rceil = 8 \text{ botes}$$

□

Section 4

Geometría

Section 5

Algebra

Section 6

Estadística y probabilidad

Física

PART

III

Section 7

Preludio

Las áreas de la física pertinentes a la selectividad son . . . : **Campo gravitatorio, campo eléctrico y campo magnético**, ...

Section 8

Campo

Subsection 8.1

Mecánica clásica

El campo gravitatorio es un campo vectorial en la mecánica clásica [7], y utilizamos los tres *versores* estándar: $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$.

[7] *en la teoría de relatividad general es un* ***campo tensorial***

Dentro del campo gravitatorio todas las fuerzas son atractivas y son resultantes de la masa de los objetos, que aproximamos cómo partículas puntuales.

8.1.1 Momento lineal y angular

Definition 11 (Momento Lineal) El momento lineal $\vec{p}$ es una magnitud vectorial que representa la inercia de un cuerpo, su resistencia a cambiar su estado de movimiento.

$$\vec{p} := m\vec{v}$$

Theorem 3 (Variacion del momento lineal) La variacion del momento lineal es precisamente la fuerza responsable del movimiento.

Proof

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} = \vec{F}$$

□

En un movimiento curvilíneo, $\vec{p}$ cambia continuamente, lo cuál lo explicamos con una nueva magnitud:

Definition 12 (Momento Angular) El momento angular $\vec{L}$ caracteriza las propiedades de inercia de un cuerpo que gira respecto a un punto.

$$\vec{L} := \vec{r} \times \vec{p}$$

En un movimiento circular podemos simplificar la definición de la magnitud del momento angular, ya que:

$$L = rp\sin\alpha = rp\sin 90 = rp = rmv$$

Definition 13 (Fuerza central) Fuerza central es aquella cuya direción es siempre a un punto fijo y cuya magnitud solo depende de la distancia a ese punto.

Theorem 4 (Conservación del momento angular) Para un cuerpo sometido a fuerzas centrales la variación del momento se anula.

Proof

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{v} \times m\vec{v} + \vec{r} \times (m\vec{a}) = r \times \vec{F}$$

Si ni $\vec{r} = 0$ ni $\vec{F} = 0$, entonces $\vec{r} \times \vec{F} = 0$ implica que $\vec{r}$ y $\vec{F}$ son paralelos (definición de fuerza central). □

8.1.2 Energía y trabajo

Definition 14 (Trabajo) El trabajo se define de la siguiente forma:

$$W = \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Definition 15 (Energía y energía mecánica) Capacidad que tiene un cuerpo para realizar trabajo. La energía mecánica es aquella asociada al movimiento:

- **Energía cinética**: Energía que tiene un cuerpo en virtud a su velocidad:

$$W = \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_i^f m\vec{a} \cdot d\vec{r} = \int_i^f m\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{r} = \int_i^f m\vec{v} \cdot d\vec{v} = \frac{1}{2}m\left[v^2\right]_i^f = \Delta E_C$$

$$\implies E_C = \frac{1}{2}mv^2$$

- **Energía potencial**: Energía que tiene un cuerpo en virtud a su posición en un campo conservativo:

$$W = -\Delta E_P$$

La suma de estas dos anteriores es la **energía mecánica**:

$$E_M = E_C + E_P$$

Subsection 8.2

Campo gravitatorio

8.2.1 Campo gravitatorio creado por masas puntuales

Definition 16 (Fuerza gravitacional) Fuerza resultante de las perturbaciones del campo gravitatorio.

$$\vec{F_g} = -G\frac{Mm}{r^2}\hat{u}_r$$

Definition 17 (Intensidad del campo gravitatorio) Fuerza resultante por el campo gravitatorio por unidad de masa.

$$\vec{g} = \frac{\vec{F_g}}{m} = -G\frac{M}{r^2}\hat{u}_r$$

Remark El principio de superposición aplica:

$$\vec{g_T} = \sum_i \vec{g_i} = -G \sum_i \frac{M_i}{r_i^2} \hat{u_{ri}}$$

8.2.2 Energía asociada al campo gravitatorio

El campo gravitatorio es uno conservativo, por tanto:

$$W = \int_i^f \vec{F_g} \cdot d\vec{r} = \int_i^f -G\frac{Mm}{r^2}\hat{u_r} \cdot d\vec{r} = \int_i^f -G\frac{Mm}{r^2} dr = -GMm \left[\frac{-1}{r}\right]_i^f = -\Delta E_P$$

$$\implies E_P = -G\frac{Mm}{r}$$

8.2.3 Potencial gravitatorio

Considerar lo que hace una unidad de masa en el campo, así creando un "espacio de gravedad", nos lleva al concepto de potencial gravitatorio:

Definition 18 (Potencial gravitatorio) Trabajo necesario para llevar una unidad de masa hasta el infinito a velocidad constante:

$$V = E_{P\infty} - E_P = G\frac{M}{r}$$

Es fácil conectar la definción y la intuición considerando la expresión Vm.

8.2.4 Campo gravitatorio de los cuerpos celestes

El campo gravitatorio tal y cómo lo hemos presentado puede utilizarse para operar con cuerpos celestes (aproximadamente).

Para este fin, solemos igualar la fuerza centrípeta y la fuerza gravitatoria y desarrollar hasta tener una expresión en términos de los datos dados.

Remark La velocidad que obtenemos de esta manera es la órbital:

$$\vec{F_C} = \vec{F_G};\ F_C = F_G;\ m\frac{v_o^2}{r} = G\frac{Mm}{r^2};\ v_o = \sqrt{G\frac{M}{r}}$$

El cálculo de la velocidad de escape, por ejemplo, se hace utilizando la ley de la conservación de la energía:

$$\Delta E_M \geq 0;\ \Delta E_C + \Delta E_P \geq 0; \frac{1}{2}mv_e^2 - G\frac{Mm}{r} \geq 0;\ v_e \geq \sqrt{2G\frac{M}{r}}$$

Asimismo podemos proceder de la manera presentada para el cálculo de algún parametro para la transición entre órbitas.

8.2.5 Leyes de Kepler

- **Primera ley**: Todos los planetas se mueven alrededor del Sol siguiendo órbitas elípticas, y el Sol está en uno de los focos de la elipse.

- **Segunda ley**: Los cuerpos celestes se mueven con una velocidad areolar constante. Es decir, un mismo tiempo barre una misma área en cualquier punto de la órbita ($\frac{dA}{dt} = cte.$)

- **Tercera ley**: Para todos los cuerpos celestes orbitando alrededor del mismo cuerpo, se cumple que:
$$\frac{T_1^2}{a_1^3} = cte. = \frac{T_2^2}{a_2^3}$$

  El punto más alejado de una órbita elíptica es el afelio y el más cercano es el perihelio.

SUBSECTION 8.3
Campo eléctrico

El campo magnético ($\vec{E}$) es uno de los dos campos que resultan cuando se fija unas coordenadas espacio-tiempo para el electromagnetismo. [8] A este asociamos dos ecuaciones *de Maxwell*[9]:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \iff \oint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = \frac{q}{\epsilon_0}$$
$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \iff \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{a}$$

El campo eléctrico es un campo vectorial al igual que el campo gravitatorio, que pertine a las interacción resultadas por la propiedad conocida como *carga eléctrica*.

8.3.1 Intensidad del campo electroestático

Definition 19 (Fuerza Eléctrica, Ley de Coulomb) La fuerza eléctrica es la resultante de las perturbaciones del campo electroestático.

$$\vec{F_e} = K\frac{Qq}{r^2} \cdot \hat{u_r}$$

Remark Si se fija una dirección, es fácil ver que:

- **Si Q y q tienen mismo signo**: Entonces $Qq > 0$ por lo que $F_e > 0$ (repulsión).
- **Si Q y q tienen distinto signo**: Entonces $Qq < 0$ por lo que $F_e < 0$ (atracción).

Por lo que se justifica la regla “similares se repelen y opuestos se atraen”.

Definition 20 (Intensidad eléctrica) Fuerza resultante por el campo eléctroestático por unidad de carga.

$$\vec{E} = \frac{\vec{F_e}}{q} = K\frac{Q}{r^2}$$

Remark Nótese que si $Q > 0$ entonces $\vec{E}$ y $\hat{u_r}$ tendrán el mismo sentido mientras que si $Q < 0$ entonces $\vec{E}$ y $\hat{u_r}$ tendrán sentidos opuestos (demostración trivial).

Remark También es importante remarcar que el principio de superposición aplica:

$$\vec{E_T} = \sum_i \vec{E_i} = K\sum_i \frac{Q_i}{r_i^2} \cdot \hat{u_{ri}}$$

8.3.2 Energía asociada al campo eléctrico

En la situación descrita, podemos llegar a una forma cerrada para el trabajo dentro del campo electroestático:

[8] *Más sobre en esto en ncatlab*

[9] *Las ecuaciones de Maxwell son la sintésis de nuestro conocimiento sobre electromagnetismo*

$$W = \int_i^f \vec{F}_e \cdot d\vec{r} = \int_i^f K\frac{Qq}{r^2}\hat{u}_r \cdot d\vec{r} = \int_i^f K\frac{Qq}{r^2}dr = KQq\left[\frac{-1}{r}\right]_i^f$$

Definition 21 (Energía potencial eléctrica) La energía potencial eléctrica se define en virtud a que el campo electroestático es conservativo:

$$W_c = -\Delta E_P \qquad \text{ó} \qquad E_P = K\frac{Qq}{r}$$

Intuitivamente, la energía potencial eléctrica es comparable a la gravitacional solo que cargas positivas "suben el terreno" mientras que cargas negativas lo bajan. De la misma manera que con los campos gravitatorios, es fructífero considerar energía potencial por unidad de carga (A ser explicado a continuación).

8.3.3 Potencial eléctrico

Definition 22 (Potencial eléctrico) Trabajo necesario para llevar una unidad de carga hasta el infinito a velocidad constante:

$$V = E_{P\infty} - E_P = K\frac{Q}{r}$$

Remark Si se fija una dirección, es fácil ver que si Q y q tienen mismo signo ($Qq > 0$)

- **Si** $r_f > r_i$ (se aleja): Entonces $W = -\Delta E_P = -q\Delta V > 0$ (movimiento espontáneo).
- **Si** $r_f < r_i$ (se aleja): Entonces $W = -\Delta E_P = -q\Delta V < 0$ (se necesita suplir una fuerza).

Mientras que lo contrario es cierto si Q y q tienen distinto signo.

Subsection 8.4

Campo magnético

El campo magnético ($\vec{B}$) es uno de los dos campos que resultan cuando se fija unas coordenadas espacio-tiempo para el electromagnetismo. A diferencia que el campo eléctrico, el campo magnético no tiene una *unidad activa*, con lo que debe existir un *polo norte* y un *polo sur* para que dicha interacción tenga lugar. Las cargas eléctricas, las estudiadas en el apartado anterior, también serán influida por el campo magnético, siempre y cuando se encuentren en movimiento. Conversamente, el movimiento de cuerpos cargados eléctricamente produce un campo magnético.

A este campo le corresponden las otras dos ecuaciones de Maxwell:

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \iff \oint \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = 0$$

$$\nabla \times \vec{B} = -\mu_0\vec{J} + \mu_0\epsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \iff \oint \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\mu_0 I + \mu_0\epsilon_0 \int \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

8.4.1 Sobre una carga en movimiento

Experimentalmente se descubrió que cargas en movimiento producen un campo magnético. Puesto que es así, la **Ley de Lorentz** viene a determinar el valor de la fuerza magnética sobre una carga en movimiento:

Theorem 5 (Ley de Lorentz) La fuerza magnética (F_B) es perpendicular al campo magnético y al movimiento. Además depende de la carga del cuerpo, su velocidad, y la intensidad del campo magnético:

$$\vec{F}_B = q\vec{v} \times \vec{B}$$

En caso de coexistir con un campo eléctrico, la Ley de Lorentz además implica:

$$\vec{F}_{EM} = q(\vec{E} + v \times \vec{B})$$

Recordamos que para realizar el producto vectorial es conveniente utilizar la regla de la mano derecha.

Remark La Ley de Lorentz sugiere que esta fuerza siempre será perpendicular al movimiento (dicho de otra manera, siempre será **centrípeta**). Por mecánica, dicha fuerza nunca alterará el módulo de la velocidad, y únicamente afectará a la trayectoria.

La unidad del campo magnético son los *Teslas*:

$$\vec{B} : T = \frac{1N}{1C \cdot 1\frac{m}{s}}$$

Cabe destacar que un tesla raramente se da en la naturaleza (los imánes permanentes están comprendidos entre $0.01T$ y $0.5T$).

8.4.2 Sobre una corriente eléctrica

Una corriente eléctrica no es más que el flujo de cargas. Consecuentemente, se verá afectado por el campo magnético. La expresión que determina dicha interacción es conocida como la *Primera Ley de Laplace*.

Primero observamos que una carga circula a través de su conductor tal que:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{l}}{\mathrm{d}t}$$

A continuación, demostramos que intensidad por diferencial de longiud es lo mismo que velocidad por diferencial de carga:

$$I := \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t};\ I\mathrm{d}\vec{l} = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}\vec{l} = \mathrm{d}q \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

Con todo esto, concluimos la Primera Ley de Laplace:

$$\mathrm{d}\vec{F} = \mathrm{d}q(\vec{v} \times \vec{B}) = (\vec{v}\mathrm{d}q) \times \vec{B} = I\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{B}$$

Para lo que segundo de bachillerato corresponde, tanto B como I serán constantes. Con lo que llegamos a la fórmula aplicable en la selectividad:

$$\mathrm{d}\vec{F} = I\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{B};\ \vec{F} = \int I\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{B} = I\left(\int \mathrm{d}\vec{l}\right) \times \vec{B} = I\vec{l} \times \vec{B}$$

Experimentalmente, Biot y Savart concluyeron que el campo magnético elemental ($\mathrm{d}\vec{B}$) creado por un elemento de corriente ($I\mathrm{d}\vec{l}$) en un punto, cuya posición respecto al elemento de corriente viene dado por $\vec{r}$, es:

$$\mathrm{d}\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}\vec{l} \times \hat{u}_r}{r^2}$$

Donde μ_0 es una constante para el vacío.

El que el conductor sea finito y rectilíneo implica que podemos operar la anterior expresión y llegar a una expresión concisa y aplicable a la selectividad:

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{r}$$

Además podemos utiliza la otra regla de la mano derecha para determinar la orientación del campo magnético en estas circunstancias.

Remark Puede darse el caso donde debamos considerar de dos conductores rectilíneos paralelos el campo que generan uno sobre otro. Para lo cuál con basta aplicar las reglas ya mencionadas en ambos conductores desde el conductor recíproco. Debe cumplirse que el que ambos conductores se atraigan implica que el flujo por ambos conductores tenga el mismo sentido y lo opuesto cuando los conductores se repelan.

Subsection 8.5

Inducción electromagnética

El cambio de un flujo magnético *induce* una fuerza electromotriz sobre la superficie dada. Esto se deduce desde la Ley de Inducción de Faraday:

Llegando a la expresión que utilizaremos para calcular dicha fuerza:

Theorem 6 (Fuerza electromagnetica) La fuerza electromagnética, definida tal que:

$$\mathcal{E} := \oint_C \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

cuando inducida, viene dada por la expresión:

$$\mathcal{E} = -\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t}$$

Proof

$$\begin{aligned}
\mathcal{E} &:= \oint_C \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} \\
&= \int_S (\nabla \times E) \cdot \mathrm{d}\vec{A} && \text{Teorema de Stokes} \\
&= -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\vec{A} && \text{Ley de inducción de Faraday} \\
&=: -\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t} && \text{Definición de flujo magnético}
\end{aligned}$$

□

Remark El signo negativo de la expresión de la fuerza electromagnética es explicado por la *Ley de Lenz*. Dicha ley establece que el sentido del campo magnético inducido se opone a la causa que lo produce.

PART IV

Tecnología

Section 9

Preludio

Section 10

Materiales y sus propiedades

Subsection 10.1

Propiedades mecánicas de los materiales

- **Dureza**: Resistencia que ofrece un material a ser deformado o penetrado.
- **Elasticidad**: Propiedad general de los cuerpos sólidos, en virtud de la cual recobran más o menos de su extensión y forma, tan pronto como cesa la acción de la fuerza que las deformaba.
- **Plasticidad**: Propiedad general de lo que puede cambiar de forma y conservar esta de modo permanente si romperse.
  - **Maleabilidad**: Propiedad de adquirir una deformación mediante una compresión sin romperse.
  - **Ductilidad**: Propiedad de adquirir una deformación mediante tracción sin romperse.
- **Resilencia**: Capacidad de absorver energía mecánica y recuperar su forma original despues de una deformación elástica.
  - **A tracción**
  - **A compresión**
  - **A flexión**
  - **A pandeo**
  - **A torsión**
  - **A la fatiga**

Subsection 10.2

Ensayos de propiedades mecánicas

10.2.1 De tracción

Conceptos previos:

- **Tensión**: $\sigma := \frac{F}{S}$
- **Alargamiento unitario**: $\epsilon := \frac{\Delta l}{l_0}$
- **Estricción**: $\epsilon_t := \frac{-\Delta S}{S_0}$

- **Modulo de Poisson**: $\eta := \frac{\epsilon_t}{\epsilon}$
- **Módulo de elasticidad**: $E := \frac{\sigma}{\epsilon}$

En el ensayo de tracción se somete a una probeta de forma y dimensiones normalizadas y del material a ensayar a un esfuerzo de tracción en la dirección de su eje, de manera creciente y hasta romperla.

En un diagrama de tracción, se distinguen dos zonas características:

- **Zona elástica (OE) [0, E]**
  - **Zona de proporcionalidad (OP) [0, P]**: Es válido usar E como factor de conversión.
  - **Zona no proporcional (PE) [P, E]**
- **Zona plástica (ES) [E, S]**
  - **Zona límite de rotura (ER) [E, R]**
  - **Zona rotura efectiva (RS) [R, S]**

Existen puntos entre E y S, cabe destacar:

- **Rotura efectiva (R)**: Tras este punto, es inevitable la rotura.
- **Fluencia (F)**: (Solo para metales) Tras este punto, se produce un alargamiento sin que aumente la tensión aplicada.

El adjetivo "límite" a cualquiera de estos puntos refiere al valor de la tensión correspondiente al punto en la gráfica, se simboliza con $\sigma_{(-)}$.

Otro nombre para σ_E es **tensión de admisión** (σ_{ad}), y se puede aproximar al límite de proporcionalidad.

La **tensión de trabajo** es la tensión máxima a la que podemos someter una pieza respetando las recomendaciones y normas de seguridad, para calcularla, se aplica un coef. de seguridad $N \in [1.2, 4]$.

10.2.2 De dureza

Brinell:

- $D :=$ Diametro de bola.
- $d :=$ Diametro de la huella.
- **Flecha**: $f := \frac{1}{2}(D - \sqrt{D^2 - d^2})$
- $F := KD^2$ donde $K :=$ cte. de ensayo.
- $S := \pi D f$
- **Grado de dureza**: $HB := \frac{F}{S} = \frac{F}{\pi D f} = \frac{2F}{\pi D(D-\sqrt{D^2-d^2})}$

La nomenclatura estandarizada tiene forma: (HB) HB$(S|W)$ (D) (F) (t), (t) solo es necesario si el tiempo no es entre 10 y 15 segundos, y donde $S =$ Steel y $W =$ Wolfram.

Vickers:

- $d :=$ Diagonal de la huella.
- $S := \frac{d^2}{2 \sin 68}$

- **Grado de dureza**: $HV := \frac{F}{S} = \frac{2 \sin 68žF}{d^2}$

  La nomenclatura estandarizada tiene forma: (HV) HV (F) (t), (t).
  Rockwell:

- $HRC := 100 - 500h$
- $HRB := 130 - 500h$

SUBSECTION 10.3
De resilencia

Consiste en medir la energía que absorbe un material al ser impactado. Se utiliza el péndulo Charpy.
Conceptos:

- **Energía absorbida**: $-\Delta E_p := -mg\Delta h$
- **Resilencia**: $\rho := \frac{-\Delta E_p}{S}$, donde $S := S_T - ent$.

SECTION 11
Máquinas térmicas

SUBSECTION 11.1
Principios fundamentales de termodinámica

La termodinámica es la rama de la física que estudia las relaciones entre el calor, el trabajo, y la transferencia de energía.

Definition 23 Energía térmica (Q)def1 En general,

$$Q := mC_E \Delta T \quad \text{donde } C_E := \text{calor específico}$$

Para gases a volumen constante,

$$Q = mC_V \Delta T \quad \text{donde } C_V := \text{calor específico a volumen constante}$$

Para gases a presión constante,

$$Q = mC_p \Delta T \quad \text{donde } C_p := \text{calor específico a presión constante}$$

Definition 24 Energía interna (U)def2 La energía interna (U) es la que tiene una sustancia en virtud a su temperatura:

$$U := \sum E_c^{\text{partíc.}} \qquad \text{(Def. no utilizada en el temario)}$$

A continuación, enumeramos los 3 principios básicos de la termodinámica:

1. **Ley de la conservación de la energía**: La energía interna (U) incrementa al añadir energía térmica al sistema, y hacer que el sistema realice trabajo la disminuye, ergo postulamos:
$$\Delta U = Q - W$$

2. **Ley de la entropía**: La cantidad de entropía del universo tiende a incrementarse en el tiempo.

3. **Principio del cero absoluto**: La entropía de un cristal perfecto de cualquier sustancia pura se aproxima a cero cuando la temperatura se aproxima al cero absoluto.

Solo usaremos el primer principio para lo que prosigue.

Subsection 11.2

Transformaciones termodinámicas en los gases

Asumimos la Ley de los gases ideales:

Definition 25 Ley de los gases idealesdef3 Para un gas (ideal), se cumple:

$$pV = nRT \quad \text{donde } R = 0.082\frac{L \cdot atm}{mol \cdot K}$$

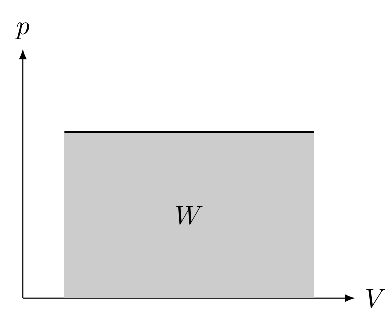
11.2.1 Transformaciones isobáricas (presión constante)

$$pV = nRT;\ \frac{p}{nR} = \frac{V}{T} = cte. \Rightarrow \frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$$

Por la definición de presión ($p := \frac{F}{S}$), tenemos:

$$W := \int_{V_1}^{V_2} F \cdot dx = \int_{V_1}^{V_2} pS \cdot dx = \int_{V_1}^{V_2} p \cdot dV = p\Delta V$$

En cuanto a la gráfica p-V:



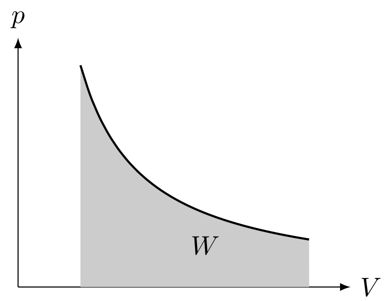
11.2.2 Transformaciones isotérmicas (temperatura constante)

$$pV = nRT = cte. \Rightarrow p_1V_1 = p_2V_2 \quad \text{ó} \quad \frac{p_1}{p_2} = \frac{V_2}{V_1}$$

Dado que, en estas condiciones, $p = \frac{nRT}{V}$

$$W := \int_{V_1}^{V_2} F \cdot dx = \int_{V_1}^{V_2} pS \cdot dx = \int_{V_1}^{V_2} p \cdot dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{nRT}{V} \cdot dV = nRT \ln\frac{V_2}{V_1}$$

En cuanto a la gráfica p-V:



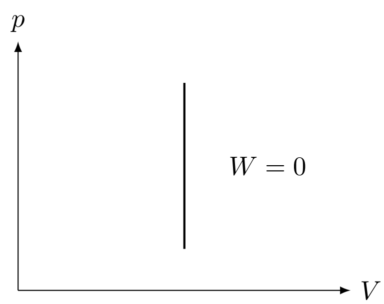
11.2.3 Transformaciones isocóricas (volumen constante)

$$pV = nRT; \; \frac{V}{nR} = \frac{T}{p} = cte. \Rightarrow \frac{T_1}{p_1} = \frac{T_2}{p_2}$$

Es fácil ver que $W = 0$ ya que $\Delta V = 0$.

$$Q = nC_V \Delta T \Rightarrow (p_1 > p_2 \Leftrightarrow Q_1 > Q_2)$$

En cuanto a la gráfica p-V:

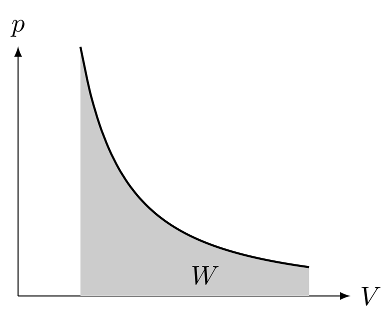


11.2.4 Transformaciones adiabáticas

Sistemas perfectamente aislados o transformaciones instantáneas. Nada es constante.

$$W = \frac{1}{1-\gamma}(p_2V_2 - p_1V_1) \quad \text{donde } \gamma := \frac{C_p}{C_V} = \text{coef. adiabático}$$

Para el aire, $\gamma \approx 1.4$
En cuanto a la gráfica p-V:



SUBSECTION 11.3

Procesos reversibles e irreversibles

Llamamos proceso reversible a aquel en el cuál en el proceso de transformación $(p_0, V_0, T_0) \to (p, V, T)$ todos los estados intermedios son estables. Es decir, la transformación es lenta.

11.3.1 Motores térmicos y máquinas frigoríficas

Una máquina térmica basa su funcionamiento en el flujo de energía calorífica entre dos focos. Si saca calor de un foco caliente, lo vierte en otro frío, y aprovecha el trabajo resultante de la transformación, se llama **motor térmico**. Si por el otro lado saca calor de un foco frío utilizando trabajo y lo vierte en otro caliente, se llama **máquina frigorífica**.

En esta situación,

$$W = Q_c - Q_f$$

$$\eta := \frac{E_u}{E_a} = \frac{W}{Q_c} = 1 - \frac{Q_f}{Q_c}$$

11.3.2 Ciclo ideal de Carnot

Máximo rendimiento que se puede extraer de dos focos. El rendimiento es comúnmente aproximado tal que:

$$\eta \approx 1 - \frac{T_f}{T_c}$$

Asumimos la transmisión calorífica perfecta en las expansiones y el aislamiento perfecto en las compresiones:

1. **Expansión isotérmica**: Se aplica el calor del foco caliente, resultando en una expansión del gas a la misma temperatura que el foco caliente.

2. **Expansión adiabática**: Se retira el foco caliente; el gas sigue expandiéndose debido a la energía cinética residual.

3. **Compresión isotérmica**: Se aplica el calor del foco frío, retirando el calor del gas y dejándolo a la misma temperatura que la del foco frío.

4. **Compresión adiabática**: Se retira el foco frío; el gas sigue comprimiéndose debido a la energía cinética residual.

Subsection 11.4

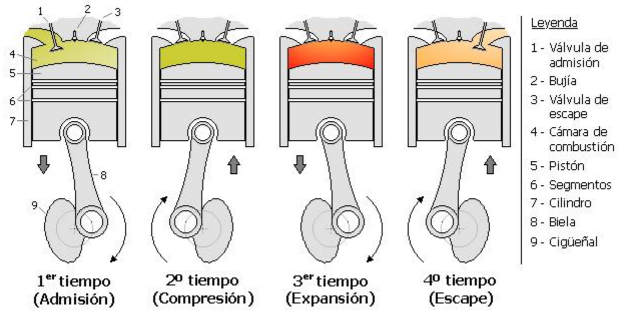
Motores de combustión interna

Siempre nos vamos a encontrar con un pistón y una recámara. Por lo que distinguimos entre tipo de transformación que se produce en la aplicación del foco caliente, y número de movimientos del pistón (tiempos) en el que el ciclo se completa.

11.4.1 Motores de explosión

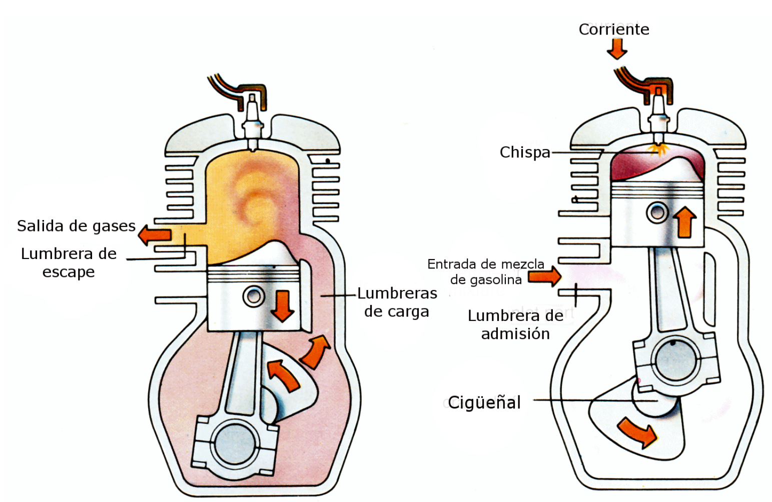
Nos centramos en el ciclo de Otto.

- **De 4 tiempos**:



1. **Fase de admisión**: transformación isobárica.
2. **Fase de compresión**: transformación adiabática; transformación isocórica (explosión, combustión instantánea).
3. **Fase de expansión**: transformación adiabática; transformación isopórica (apertura de la válvula).
4. **Fase de escape**: transformación isobárica.

- **De 2 tiempos**:



1. **Fase de compresión y aspiración**: transformación adiabática; transformación isobárica.
2. **Fase de explosión y escape**: transformación adiabática; transformación isobárica.

11.4.2 Motores de diesel

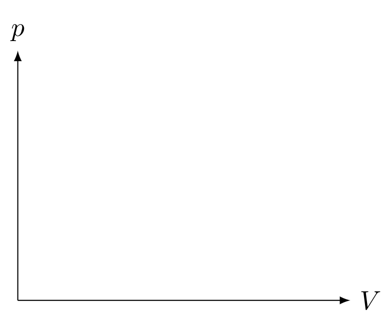
Los motores diesel cambian la bujia que produce la explosión del combustible por un inyector (combustión progresiva).

- **De 4 tiempos**:

  1. **Fase de admisión**: transformación isobárica.
  2. **Fase de compresión**: transformación adiabática.
  3. **Fase de expansión**: transformación isobárica (combustión); transformación (adiabática).
  4. **Fase de escape**: transformación isocórica; transformación isobárica.

- **De 2 tiempos**:

  1. **Fase de compresión y aspiración**: transformación adiabática; transformación isocórica.
  2. **Fase de explosión y escape**: transformación adiabática; transformación isocórica.



11.4.3 Parámetros y magnitudes características

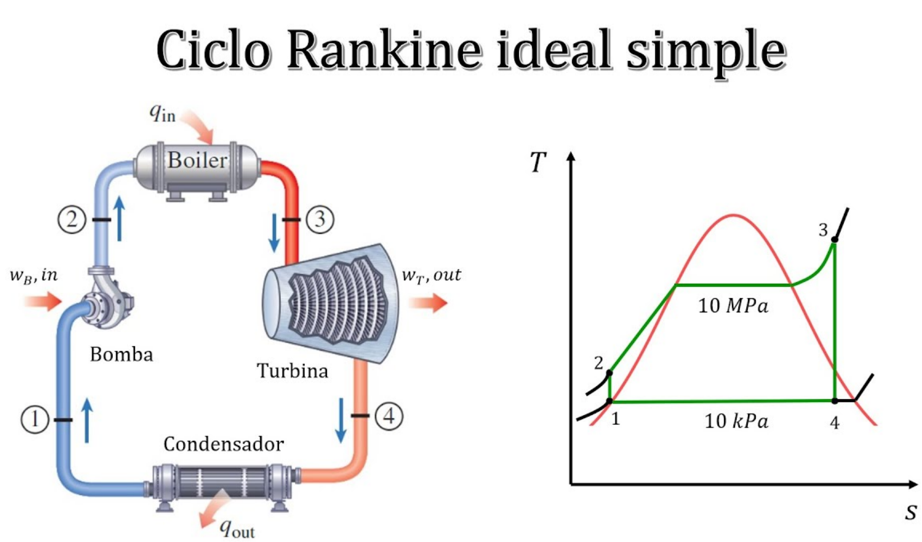
- **Calibre**: $d :=$ diam.
- **PMS**: Punto muerto superior.
- **PMI**: Punto muerto inferior.
- **Carrera**: $h := PMS - PMI$
- **Cilindrada**: $V := \pi \frac{d^2}{4} hn \quad \text{donde } n := \text{núm. de cilindros}$
- V_c: Volumen cámara de compresión.
- **Relación de compresión**: $RC := \frac{V_1+V_c}{V_c}$
- **Gasto**: $G := \frac{m_c}{t}$
- **Potencia absorbida**: $P_a = GP_c \quad \text{donde } P_c = \text{poder calorífico}$
- **Momento de torsión**: $M = Fr$
- **Potencia útil**: $P_u = M\omega$

Subsection 11.5

Motores de combustión externa

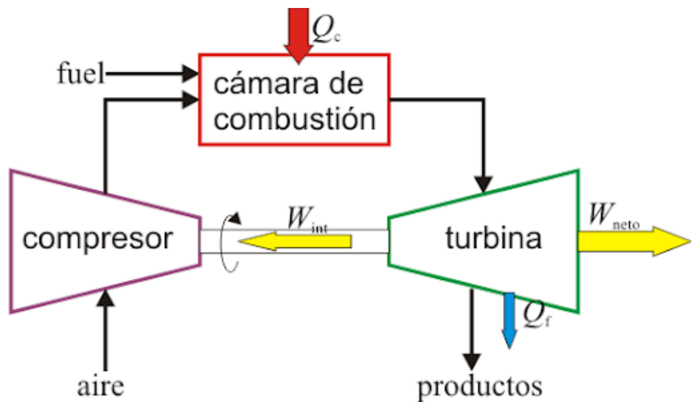
Su utilidad es la generación eléctrica y de propulsor de aviones.

11.5.1 Ciclo de Rankine (Turbina de vapor)



1. **Caldera**: transformación isobárica: Absorción de calor en la caldera, comienza el cambio de fase, se produce vapor sobrecalentado.
2. **Turbina**: transformación adiabática.
3. **Condensación**: transformación isobárica; transformación isotérmica.
4. **Bomba**: transformación isocórica.

11.5.2 Ciclo de Brayton (Turbina de gas)



1. **Compresor**: transformación adiabática.
2. **Quemador**: transformación isobárica.
3. **Turbina**: transformación adiabática.

Subsection 11.6

Bombas de calor

La transmisión de calor de un foco frío a uno caliente no es espontánea. Por lo cual necesitamos realizar trabajo para que esto ocurra. Este trabajo será igual a la diferencia de calor de los focos $W = Q_C - Q_F$.

11.6.1 Ciclo de refrigeración de Carnot

Máxima eficiencia que se puede extraer de dos focos. El rendimiento es comúnmente aproximado tal que:

$$\epsilon = \frac{E_u}{E_a} = \frac{Q_F}{W} = \frac{Q_C}{Q_C - Q_F} \approx \frac{T_C}{T_C - T_F}$$

Asumimos la transmisión calorífica perfecta en las expansiones y el aislamiento perfecto en las compresiones:

1. **Compresión adiabática** Se realiza el trabajo comprimiendo el émbolo. Aumenta la temperatura y presión del gas.

2. **Compresión isotérmica** Se aplica el foco caliente, que toma calor del gas.

3. **Expansión isotérmica** Se retira el foco caliente, causando que el gas se expanda y disminuya su temperatura.

4. **Compresión isotérmica** Se aplica el foco frío, que retira calor del gas.

11.6.2 Ciclo de Rankine inverso

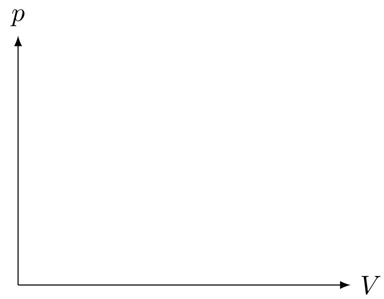
1. **Compresión adiabática**: El vapor saturado procedente del evaporador llega al compresor; aumenta su temperatura hasta alcanzar el punto correspondiente al vapor recalentado. Esta transformación se realiza con la aportación de trabajo externo (W).

2. **Transformación isobárica**: En el condensador, el vapor está a una temperatura mayor que la del ambiente, por tanto cede calor (Q_C), manteniendo constante la presión, mientras se produce, primero, un enfriamiento seguido de una condensación hasta convertirse en líquido saturado. Al pasar de vapor a líquido hay una gran reducción de volumen, con lo cual el fluido pasa a un estado líquido a alta presión.

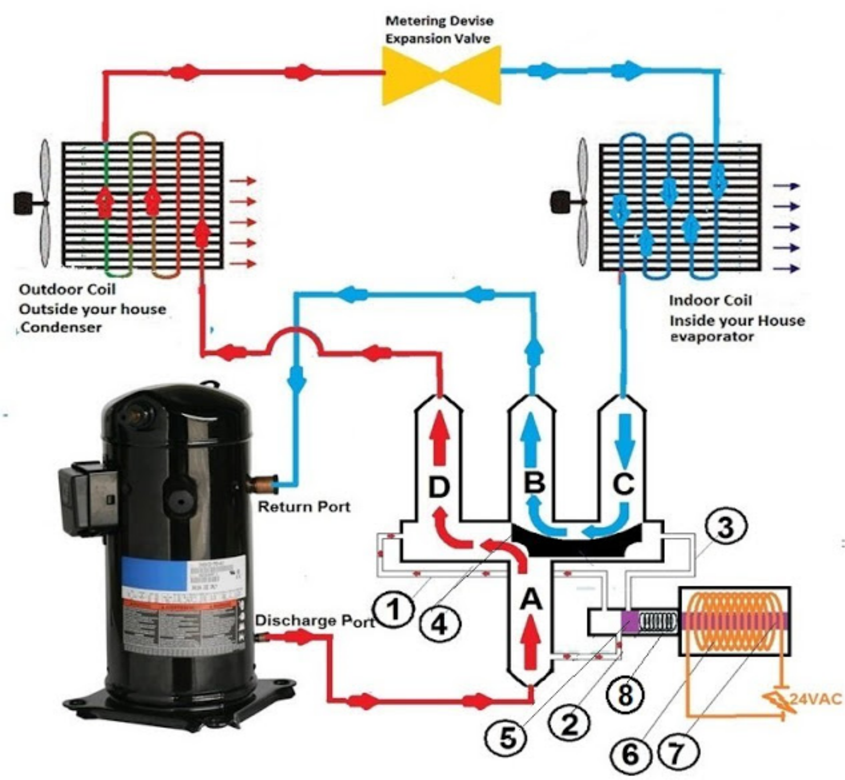
3. **Expansión adiabática**: Se hace pasar el fluido por la válvula de expansión, donde se produce una transformación adiabática con un ligero aumento del volumen y gran disminución de presión y temperatura. Una parte del líquido se vaporiza, y en el punto 4 hay vapor húmedo.

4. **Transformación isobárica** El vapor húmedo, a su paso por el evaporador, que se encuentra en el recinto que queremos refrigerar, absorbe calor del foco frío (Q_F) por encontrarse a menor temperatura que éste. Se completa la vaporización del fluido a medida que aumenta su volumen hasta llegar a la entrada del compresor, donde comienza de nuevo el ciclo.

Este ciclo puede servir tanto para refrescar en verano ($Q_C = exterior$, $Q_F = interior$) como calentar en invierno ($Q_C = interior$, $Q_F = exterior$). Asimismo tanto el evaporador como el condensador pueden intercambiar funciones. Concluimos que solo es necesario alternar el flujo del refrigerante para alternar funciones.



Cabe enumerar los distintos elementos presentes en la refrigeración por vapor. Estos son: compresor (puede ser centrífugo o volumétrico), condensador o evaporador (intercambiadores de calor), válvula de expansión (mantiene la presión constante del refrigerante que se dirige hacia el evaporador).



Section 12

Hidráulica y neumática

Subsection 12.1

Elementos de los circuitos neumáticos

Los circuitos neumáticos utilizan aire para su funcionamiento. Naturalmente, necesitaremos elementos que capten el aire, lo compriman, lo almacenen, regulen su presión, etc. Por otra parte, elementos para dispensar del aire son innecesarios o muy simples.

12.1.1 Compresores

Encontramos dos tipos de compresores:

- **Volumétricos**: Reducen el volumen que ocupa el aire, aumentando la presión, según la ley de Boyle. Podemos distinguir a su vez entre alternativos o de pistón y rotativos.

- **Dinámicos**: Aumentan la energía cinética del aire que, al frenar contra el fluido ya existente en su salida hace que su velocidad se transforme en presión de empuje según la ecuación de Bernoulli. Los tipos que existen son: radiales o centrífugos y axiales.

12.1.2 Acondicionadores del aire

12.1.3 Actuadores neumáticos

Diferenciamos entre actuadores rotativos (motores, usos escasos), y actuadores lineales (cilíndros). Nos centraremos en los lineales, los cuáles se subdividen en 2 tipos:

- **De simple efecto**: El aire solo puede realizar una acción (típicamente la de extensión del pistón). El retorno se realiza por un muelle.

- **De doble efecto**: Tanto el avance como el retroceso viene dado por aire.

Nos suele interesar el cálculo de la fuerza y el consumo de aire.

La fuerza teórica viene dada por:

$$F_t = pS$$

Donde $S = S_e - S_v$ en el retroceso de un pistón de doble efecto y $S = S_e$ de lo contrario.

No obstante, uno debe tener en cuenta tanto la fuerza de rozamiento como el muelle, conque:

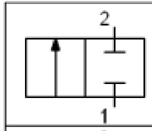
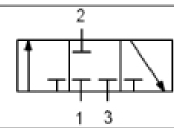
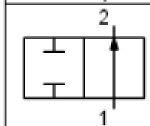
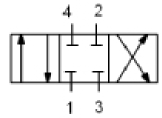
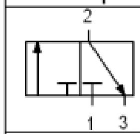
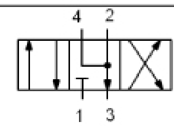
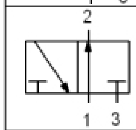
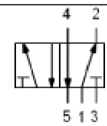
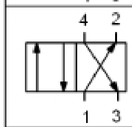
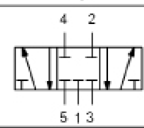
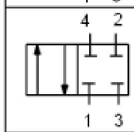
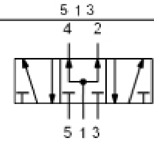
$$F = F_t - F_r - F_m$$

Donde $F_m = K\Delta x$. En otras ocasiones, F se toma de un porcentaje de F_t.

El consumo de aire es precisamente el volumen de aire implicado en la acción del cilíndro, es decir, la carrera l por la superficie S (Con las consideraciones anteriores de que es la superficie).

12.1.4 Válvulas distribuidoras

Sirven para dirigir y regular la dirección del aire comprimido a través de los circuitos. Se nombran según el número de vías u orificios que tengan, el número de estados, y su accionamiento.

Tabla con la representación de válvulas de distribución.			
	**Válvula 2/2 normalmente cerrada**		**Válvula 3/3 con posición neutra normalmente cerrada**
	**Válvula 2/2 normalmente abierta**		**Válvula 4/3 con posición neutra normalmente cerrada**
	**Válvula 3/2 normalmente cerrada**		**Válvula 4/3 con posición neutra a escape**
	**Válvula 3/2 normalmente abierta**		**Válvula 5/2**
	**Válvula 4/2**		**Válvula 5/3 en posición normalmente cerrada**
	**Válvula 4/2 normalmente cerrada**		**Válvula 5/3 en posición normalmente abierta**

12.1.5 Otras válvulas

Subsection 12.2

Circuitos prácticos neumáticos

Subsection 12.3

Circuitos hidráulicos

Son circuitos que emplean el aceite como fluido. Consecuentemente, podremos lograr mayor fuerza y sostener estados intermedios (fluido incompresible), tener mejor control caudal y velocidad, pero necesitaremos tuberías de recogida y habrá peligro de contaminación por fugas.

12.3.1 Cálculo de parámetros en un circuito

El principio de Pascal asevera que la presión ejercida sobre un fluido incompresible se transmite instantáneamente y por igual a todos los puntos de dicho fluido ($p_1 = p_2$ y $V_1 = V_2$). Por lo tanto, el caudal Q se mantiene a lo largo del circuito, conque la potencia hidráulica puede ser calculada tal que $P = Fv = pSv = pQ$.

Según la ley de la conservación de la energía, tenemos:

$$E_P + E_C + E_{Pr} = E'_P + E'_C + E'_{Pr} \Rightarrow mgh + \frac{1}{2}mv^2 + pS = mgh' + \frac{1}{2}mv'^2 + pS'$$

Conque llegamos a la ecuación de Bernoulli:

$$\rho gh + \frac{1}{2}v^2 + p = \rho gh' \frac{1}{2}\rho v'^2 + p'$$

Historia de la Filosofía

PART

V

SECTION 13

Preludio

Los autores filosóficos pertinentes a la selectividad son: **Platón, Descartes, Nietzsche y Ortega** (si se elige el bloque de problemas ontológicos y epistemológicos).

SUBSECTION 13.1

Áreas de la filosofía

Para todos los autores a presentar es ponderable leer sus obras cuando sea factible.

Antes de tratar la Historia de la Filosofía, es encomiable repasar los contenidos de esta. La filosofía ($\phi\iota\lambda o$- "amor", $\sigma o\phi\iota\alpha$- "sabiduría") es el estudio racional de los constituyentes fundamentales de la realidad y del ser humano. Es, en cierto sentido, el conjunto de axiomas que suponemos para el desarrollo de los demás conocimientos.

13.1.1 Metafísica

13.1.2 Epistemología

13.1.3 Ética

13.1.4 Política

Section 14
Platón

Toda la filosofía occidental es una serie de notas a pie de página de Platón
Alfred North Whitehead

La influencia que ha tenido la filosofía de Platón sobre la filosofía y todas sus vertientes y todos los que beben de ellas, que en última instancia es la humanidad completa, escapa de todo remarque. La posición maximalista de dicha proposición afirma que tras Platón, *nihil novum sub sole.*

Algunos Padres de la Iglesia miraron a Platón con gran veneración, y las sublimes verdades que se encierran en sus escritos y formaron tan grandes filósofos, tuvieron bastante fuerza para arrancar de la docta pluma de San Agustín, hablando de éstos, aquella fuerte hipérbole: que en mudando algunas proposiciones y unos pocos términos se convertirían en hombres cristianos.

Cabe destacar que la distribución de contenidos de la presente exposición no sigue la del mismo Platón. No es hasta Aristóteles que se conoce una manera sistemática de la presentación de la filosofía. Platón en particular presentaba sus obras en forma de diáogos (cuyo personaje principal suele ser Sócrates), que con libertad fluían entre distintos temas.

Subsection 14.1
Metafísica

La filosofía platónica propone un esquema a aplicar en distintas áreas del saber, el llamado *dualismo Platónico*, el cuál está expuesto con el símil de la caverna. La etimología de dualismo ya sugiere el fundamento que profesa, a saber: la existencia de dos principios fundamentales que componen un sistema. El dualismo platónico además precisa la esencia de estos dos principios, o *mundos* y la relación entre ellos.

En metafísica, se postula un mundo sensible, inferior, el cuál es contingente, perecedero, imperfecto ... (en definitiva, *Hericlíteo*), que se corresponde al mundo formal, superior, el cuál es inmutable, eterno, perfecto ... (en definitiva, *Parménico*), mediante participación e imitación. Lo cuál quiere decir que el mundo sensible, compuesto de particulares, participa en sus correspondientes universales (exhibiendose como ejemplos del universal) e imita la ideosincrasia de sus universales. Se deduce, además, que ambos mundos son independientes y, en cierto sentido, el mundo formal es anterior.

La aplicación del dualismo platónico a la metafísica resulta en la llamada *Teoría de las ideas*, que es la previamente expuesta. Es por su primacía en las ideas que esta teoría constituye la primera filosofía idealista en la Historia de la Filosofía.

A este nivel cabe destacar además la existencia de una Idea suprema: el Bien. Para Platón esta es la Idea que da sentido al resto. En el simil de la caverna el Bien se identifica con el sol puesto que proporciona la luz por la que podemos dislumbrar el resto de Formas. Resulta esto importante ya que en la genealogía de Dios dicha concepción es primordial. En este símil también cabe la explicación de una característica crucial de esta concepción de Bien. A saber, Platón concibe de un Bien que es inefable, el cuál es exclusivo a la revelación mística.

14.1.1 Ontología

En misma correspondencia con los anteriores mundos, encontramos dos tipos de cosas que “son”: Lo *particular* y lo *universal*. Platón distingue al menos en 4 maneras entre estas dos categorías, a saber: multiplicidad, siendo lo universal único y lo particular múltiple, tal que un único fenómeno pueda presentar distintos ejemplos; mutabilidad, puesto que lo universal es rígido e inmóvil mientras que lo particular es contingente; materialidad, de manera que las Formas transcienden cualquier marco material, opuestamente a la manera en la que lo particular se encuentra ligado a la materia; sensibilidad, tal que el órgano que percibe las Ideas es la mente, el *alma*, y el que percibe los particulares son los sentidos.

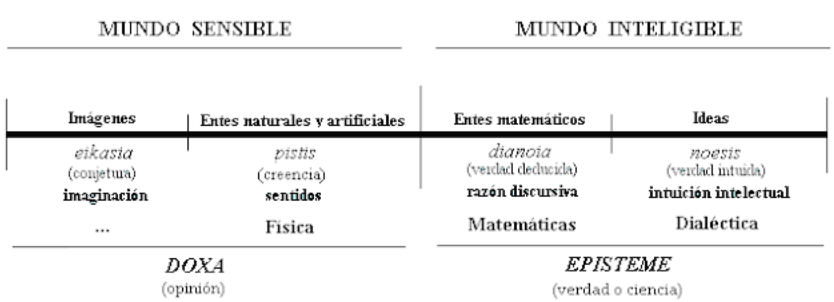
De esta manera, la perfección es una cualidad exclusiva a los universales, puesto que el ejemplo siempre carece de algo respecto a su Idea (cf. ejemplo del triángulo).

Subsection 14.2

Epistemología

Platón distingue rigurosamente entre lo que puede ser objeto de conocimiento auténtico (*epistéme*) y lo que pertenece al campo de la opinión (*doxa*). El conocimiento verdadero no trata de particulares sensibles, cambiantes y engañosos, sino de las Formas o Ideas, entidades inmutables y universales que constituyen la realidad ontológicamente prioritaria. Así, epistemológicamente, conocer equivale a participar intelectualmente en la Forma correspondiente: no basta la percepción sensorial para aprehender la esencia de las cosas.

Dos figuras explicitan este pensamiento: el mito de la caverna y la *línea dividida*. En la línea dividida Platón traza, de menor a mayor grado de verdad, los segmentos de la imaginación y la creencia (los cuales remiten al mundo sensible), y los de la comprensión matemática y la dialéctica (propios del mundo inteligible). La dialéctica, entendida como arte del diálogo y de la refutación sistemática, culmina en la intuición racional de las Formas y, sobre todo, en la contemplación del Bien, que ilumina y legitima todo saber: conocer el Bien es, en última instancia, conocer la condición de posibilidad de la verdad.



Otra tesis epistemológica central es la Teoría de la reminiscencia o *anamnésis*: el alma, al ser inmortal y haber contemplado las Formas antes de su encarnación, recuerda mediante la correcta interrogación y el ejercicio intelectual lo que ya en ella existe latente. La educación, por tanto, no es mera transmisión de información sino recolocación (o evocación) de la verdad que el alma ya posee; la mayéutica socrática es la técnica educativa que facilita esa recolección de la verdad mediante preguntas dirigidas.

Platón jerarquiza también las disciplinas: las matemáticas ocupan un lugar preparatorio, pues habituan la mente a la abstracción, mientras que la dialéctica constituye la forma suprema de conocimiento, puesto que por ella se trasciende el plano hipotético y se alcanza el conocimiento de los principios primeros.

Subsection 14.3

Antropología

La tan reconocida distincción entre cuerpo y mente (*alma*) proviene al instanciar el dualismo platónico al humano. Siendo el alma el mundo superior, se deriva: la imperativa al asceticismo, que el cuerpo sirve como prisión para el alma, el ciclo de reencarnación (metensicosis) .... Es aquí donde es posible trazar una influencia hacia los Pitagóricos y a su vez hacia el orfismo.

14.3.1 Alma

El alma, según Platón, tiene carácter divino y es ontológicamente prioritaria respecto del cuerpo. Es inmortal, preexistente y capaz de contemplar las Formas; su caída al cuerpo es lo que origina el olvido y la necesidad de aprendizaje que, en realidad, es recolocación. Moralmente, el alma es tripartita, conforme a la célebre división de *La República*:

- **La parte racional** (*logistikon*): orientada al conocimiento, ama la verdad y debe gobernar por su capacidad para discernir el Bien.
- **La parte irascible o espirituosa** (*thymoeides*): vinculada al ánimo, al honor y al valor; su función es auxiliar a la razón y sostener la firmeza moral.
- **La parte concupiscible** (*epithymetikon*): relacionada con apetitos y placeres corporales; exige moderación.

Platón relaciona la anterior división con las 4 virtudes griegas *cardinales* (a saber: prudencia, justicia, coraje y templanza) de la siguiente manera:

- Que haya **prudencia** significa que la parte racional sea la autoridad suprema y guie al resto.
- Que haya **coraje** significa que la parte irascible se someta la parte racional. Puesto que son valientes aquellos que, sabiendo lo que es bueno, actuan de manera acorde.
- Que haya **templanza** significa que la parte concupiscible sepa moderar su apetito, así subordinandose a la razón.

Por último, la justicia, en el alma, se define como la armonía y el correcto ordenamiento entre estas partes: cada una desempeña su función sin usurpar la propia de las otras, bajo la dirección de la razón. En el plano antropológico-religioso, Platón postula el ciclo de transmigraciones y la posibilidad de purificación moral del alma (cf. el mito de Er), donde la conducta en la vida determina su suerte posterior.

14.3.2 Cuerpo

Siendo el cuerpo la antítesis del alma, Platón lo presenta como principio mortal, ligado a la generación y la corrupción, y como fuente de pasiones, deseos y errores perceptivos. Los sentidos remiten al mundo cambiante y, por tanto, son instrumentos limitados y frecuentemente engañosos para acceder a la verdad. La presencia del cuerpo impone sobre el alma tentaciones que desordenan su jerarquía, la concupiscencia puede subyugar a la razón si no mediatiza la educación y la disciplina moral; por eso Platón adopta, en sus consecuencias prácticas, una inclinación hacia el ascetismo moderado y la purificación.

No obstante, Platón no reduce el cuerpo a mero estorbo: reconoce su papel en la acción política y social y en la formación del carácter. El proyecto educativo que propone orienta y regula los impulsos corporales mediante gimnasia, música y disciplina, integrándolos de modo que sirvan a la excelencia del alma. La medicina del alma, como metáfora, exige ordenar y domesticar las apetencias para que la polis y la vida individual alcancen la armonía justa.

Subsection 14.4

Política

La misión última de la filosofía política de Platón es la justicia. Su más magna obra expuesta para este fin es *La República*.

Justicia se ha de entender por este nombre lo que en común llamamos virtud, y de otro modo hombría de bien, o concierto y armonía universal de las acciones; es decir, aquel hábito de vivir en un todo conforme al dictamen de la recta razón que constituye al que le posee en la clase de hombre justo. Tomada la justicia en este sentido generalísimo, se identifica con la república concertada y estrechamente unida, de forma que parezca no más de una sola alma; y la verdadera república equivale a la justicia de todos los ciudadanos , por la cual cada uno desempeña su cargo u oficio como es debido. En algo, no obstante, pueden distinguirse, e cuanto a la república es como el argumento y manteria de que se vale, y la justicia es como el fin y término; de modo que Platón toma por objeto una república, con el fin de manifestar en rande, en términos que a nadie se le oculte, la naturaleza de la justicia.

Cinco puntos insinúa Platón en la introducción de su diálogo, que son como otras tantas piedras fundamentales sobre que se sustenta una república; a saber: las solemnidades sagradas, la amistad, la prudencia y consejo de los ancianos, el afecto moderado de las riquezas, y la utilidad de ellas para sostener los derechos de la verdad, compañera inseparable de la justicia. [10]

[10] *En este primer punto, con la oración y la adoración, sacrificios y votos de los asistentes a las solemnidades sagradas, se indican la piedad y religión dos frmes fundamentos del Estado y de la justicia y demás virtudes necesarias a la sociedad; añadiendose a estos como terero la esperanza de los premios y temor de las penas que acaso es el más poderoso de los tres para contener la multitud.*

La estructura política ideal platónica deriva directamente de la antropología tripartita: la ciudad perfecta replica en lo social el orden del alma justa. Así se distinguen tres clases sociales análogas a las partes del alma:

- **Gobernantes (filósofos–reyes)**: corresponden a la parte racional. Solo aquellos que han alcanzado la comprensión de las Formas, y en última instancia del Bien, son aptos para gobernar. La filosofía, convertida en virtud política, legitima el poder.
- **Auxiliares (guardianes guerreros)**: corresponden a la parte irascible. Su función es defender la ciudad y aplicar las decisiones de los gobernantes; deben poseer coraje y lealtad.
- **Proveedores o productores (agricultores, artesanos, comerciantes)**: corresponden a la parte concupiscible. Su tarea es sostener materialmente la polis mediante el trabajo y la producción.

La justicia política, por tanto, consiste en que cada clase realice la función para la cual está naturalmente más capacitada, bajo la guía de la razón gobernante. Para asegurar este orden, Platón propone medidas educativas y institucionales singulares: una educación pública y estricta para los guardianes, la formación filosófica progresiva de los futuros gobernantes, la supresión de la propiedad privada y de la familia entre los guardianes (con el fin de evitar intereses particulares), y la censura rigurosa de la poesía y los mitos que puedan corromper las costumbres. Es notorio el recurso del llamado *mito de las clases* o *mito de las raíces de metales* (el “noble engaño”), mediante el cual se mantiene la cohesión social y la aceptación del orden.

También es relevante la defensa platónica de la igualdad de capacidades: las mujeres aptas para el papel de guardián han de recibir la misma educación que los hombres en la ciudad ideal, quedando subordinada la selección al mérito y no al sexo.

Platón analiza asimismo la dinámica de degeneración política: la ciudad ideal puede decaer en distintos regímenes (timocracia, oligarquía, democracia) hasta culminar en la tiranía, cada uno con su psicología moral y sus vicios correspondientes. La causa última de este declive es el desorden interior del alma colectiva: cuando la razón deja de mandar, los apetitos y los intereses particulares toman el poder, provocando corrupción y violencia.

Finalmente, la figura del filósofo-rey sintetiza la aspiración platónica: un gobernante que no busca el poder por interés personal sino por saber y por amor a la verdad, capaz de orientar la polis hacia el bien común. La política platónica, aunque aristocrática en su designio (gobierno de los mejores en conocimiento), está animada por la idea de que el saber auténtico es condición de la legitimidad y la virtud públicas.

PART

VI

Lengua

Section 15

Preludio