Temperaturen til en Kopp med Kakao

1. Introduksjon

Personlig mener jeg at en av de beste drikkene er varm kakao, og det drikker jeg mye av, men kakaoen min blir så fort kald. Derfor er jeg spesielt interessert i hvordan temperaturen til kakaoen forandrer seg over tid. Her ble det altså brukt Newtons avkjølingslov og måledata til å finne en funksjon som sier noe om hvordan temperaturen endres over et visst tidsintervall.

2. Teori

Varm kakao oppfører seg som mye her i verden, og vil avkjøle seg etter Newtons avkjølingslov som er gitt ved[1]:

$$\dot{T}(t) = \alpha(T(t) - T_K) \quad T(0) = T_0 \qquad (2-1)$$

Der $T(t)$ her er temperaturen til kakaoen, og T_K temperaturen til omgivelsene. Etter lang nok tid vil temperaturen til kakaoen derfor bli lik temperaturen til omgivelsene. $T(0) = T_0$ er initial betingelsen som blir bestemt av den første temperatur målingen[1]. Den siste ukjente i differensiallikningen er α, proposjonalitetskonstanten, er bestemt av blant annet varmekapasiteten til kakaoen[1]. For å finne en funksjon for $T(t)$ kan vi løse ligningen i (2 – 1). Først starter vi ut med å omgjøre ligningen slik[1]:

$$\dot{T}(t) - \alpha T(t) = -\alpha T_K \qquad (2-2)$$

Videre ganger vi hele ligningen med $e^{-\alpha t}$, slik at:

$$\left(\dot{T}(t) - \alpha T(t)\right) e^{-\alpha t} = -\alpha T_K e^{-\alpha t} \qquad (2-3)$$

Deretter ser vi at ligningen over kan omskrives til:

$$\frac{d}{dt}\left(T(t)e^{-\alpha t}\right) = -\alpha T_K e^{-\alpha t} \qquad (2-4)$$

Hvis vi så tar det ubestemte integralet på begge sider får vi følgene:

$$T(t)e^{-\alpha t} + C_1 = T_K e^{-\alpha t} + C_2 \qquad (2-5)$$

Siden konstantene kan skrives sammen omgjør vi ligningen slik:

$$T(t)e^{-\alpha t} = T_K e^{-\alpha t} + C \qquad (2-6)$$

Og ganger med $e^{\alpha t}$ slik at:

$$T(t) = T_K + Ce^{\alpha t} \qquad (2-7)$$

Ved å bruke initialbetingelsene, $T(0) = T_0$ kan vi omgjøre slik:

$$T(0) = T_K + Ce^{\alpha \cdot 0} = T_0 \qquad (2-8)$$

Altså:

$$T(0) = T_K + C = T_0 \qquad (2-9)$$

Vi kan bruke dette til å finne et utrykk for C som blir følgene:

$$C = T_0 - T_K \qquad (2-10)$$

Vi kan derfor utrykke ligningen (2 – 7) som følgene[1]:

$$T(t) = (T_0 - T_K)e^{\alpha t} + T_K \qquad (2-11)$$

Denne ligningen kan vi bruke til å fremstille en teoretisk funksjon for temperaturens forandring.

3. Eksperimentelt

For dette forøket ble det brukt en kopp (figur 3 – 1), med kokende vann fra vannkokeren og én pose rett-i-koppen kakao. Temperaturen i rommet ble målt til å være 19.7 ℃. Etter at kakaoen ble helt i koppen, ble temperaturen til kakaoen målt hvert andre minutt med mattermometer frem til temperaturen nærmet seg temperaturen til rommet, noe som tok cirka 180 minutter.

Figur 3-1: Bilde av koppen som ble brukt under eksperimentet.

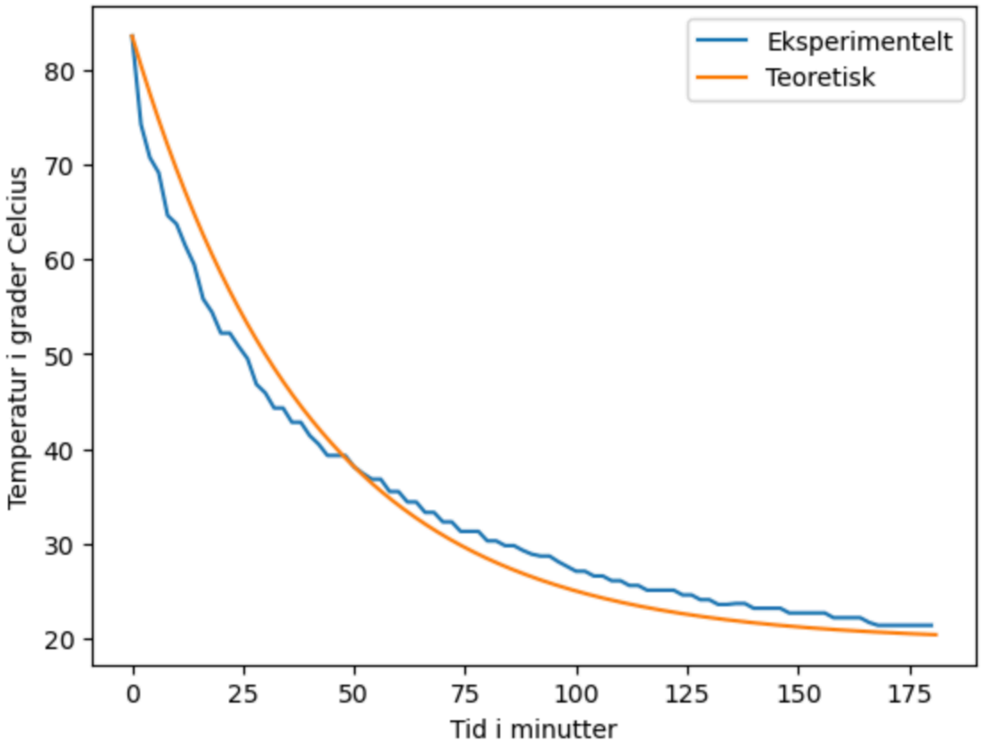
4. Resultater

Resultatene fra eksperimentet ble plottet i python (figur 4 – 1), og visst i figur 4 – 2. Det ble gjort cirka 90 målinger over 3 timer så alle målingene fikk ikke plass på bildet.

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
from math import e

x1_verdier = np.array([0,2,4,6,8,10,12,14,16,18,20,22,24,26,28,30,32,34,36,38,40,42,44,46,48,50,52,54,56,58,60,62,64,66,68,70,72
y1_verdier = np.array([83.5,74.2, 70.7, 69.1, 64.6, 63.7, 61.4, 59.4, 55.8, 54.4, 52.2, 52.2, 50.8, 49.5, 46.8, 45.9, 44.3, 44.3


x_verdier = x1_verdier[1:]
y_verdier = y1_verdier[1:]

START_TEMP = 83.5
ROM_TEMP = 19.7

def find_alfa():
    global AVG_ALFA
    alfa = (np.log((y_verdier-ROM_TEMP)/(START_TEMP-ROM_TEMP))/x_verdier)
    AVG_ALFA = np.mean(alfa)
    return AVG_ALFA

find_alfa()

print(AVG_ALFA)

TID = np.linspace(0,181,1000)

def teoretisk(TID):
    return ((START_TEMP-ROM_TEMP)*e**(AVG_ALFA*TID)) + ROM_TEMP


plt.plot(x1_verdier, y1_verdier)
plt.plot(TID, teoretisk(TID))

plt.xlabel("Tid i minutter")
plt.ylabel("Temperatur i grader Celcius")
plt.legend(["Eksperimentelt", "Teoretisk"])
plt.show()
```

Figur 4-1: Kode for plottet i figur 4 – 2

```
-0.024854036937879725
```



Figur 4 – 2: Plottet fra koden i figur 4-1, og outputen fra beregning av gjennomsnittlig α.

Ved å bruke koden i figur 4-1, ble den gjennomsnittlige, α, funnet til å være $\approx -0{,}0249$, altså er funksjonsutrykket for den teoretiske fremstillingen utrykket:

$$T(t) = (83{,}5 - 19{,}7)e^{-0{,}0249t} + 19{,}7$$

5. Diskusjon

Den gjennomsnittlige α, ble funnet til å være $-0{,}0249$, og funksjonsuttrykket ble derfor:

$$T(t) = (83{,}5 - 19{,}7)e^{-0{,}0249t} + 19{,}7$$

Fra figur 4 – 2 kan man se at det eksperimentelle plottet er veldig likt det teoretiske, og grunn til dette er blant annet fordamping. Ved å la forsøket fortsette lenger ville den eksperimentelle funksjonen ble enda mer lik den teoretiske siden temperaturen ville gått mot 19,7.

6. Litteraturreferanser

1. Nome, *1 – 1 Differensiallikninger – TMA4101,* 2024, Trondheim NTNU