

第一章 绪论

1. CAGD 名称的由来

- 计算机辅助几何设计(computer aided geometric design)
- 1974 年 computer aided geometric design 会议在 Utah 大学召开, Barnhill 和 Riesenfeld 命名, 旨在突出 CAD 中的几何问题与数学描述

相关命名:

- Computational geometry – Forrest 1971 形状信息的计算机表示、分析与综合
- 《计算几何》苏步青, 刘鼎元 1981
- Computational geometry: An introduction – Preparata F P and Shamos M I, Springer-Verlay 1985 线性计算几何

2. CAGD 的特点

..., we show modern methods for geometry, so constructed and organized that geometric manipulations can be performed in a way natural to the computer, and can yield results that are natural to man.

---- Steven Anson Coons

- 几何模型的表示、构造与处理
- 适合于计算机存储、计算、显示
- 适合于人的理解、交互

3. CAGD 的发展简史

1963, Boeing 公司, Ferguson, 曲线曲面的参数表示, $r = r(t)$,
 $s = s(u, v)$

1964-1967, MIT, Coons, 构造插值给定边界及导矢的曲面,
 Coons 曲面

1971, Renault 公司, Bézier, 由控制多边形定义的曲线

Citroën, de Casteljau, 独立发展了类似方法

Forrest, 给出 Bézier 曲线的 Bernstein 基表示

1972, 美国 GM, de Boor, 发展了 B 样条递归求值算法(deBoor
 algorithm)

1974, 通用公司, Gordon, Riesenfeld, B 样条曲线曲面表示

1975, Phd Thesis, Versprille, 有理 B 样条

1980~, Piegl, Tiller 等, NURBS

1980 初, Farin, 三角 Bézier 曲面

1974, Chaikin, 提出用割角法生成曲线

1978, Catmull-Clark, Doo-Sabin, 细分曲面 subdivision surfaces

1987, Loop, 将 Box 样条推广到任意三角网格的细分曲面

1990, Dyn, butterfly 插值细分曲面

1996, Kobbelt, 四边形网格插值细分格式

2000, Kobbelt, $\sqrt{3}$ 细分

1990 年代, Tony DeRose 等, 细分曲面在图形和动画中的应用

1990~, Hoppe 等, 曲面重建, 反求工程

2000~, Schröder, Desbrun 等, 离散微分几何

2000~, Pottman, 建筑几何

2003, Sederberg, Zheng, T-spline

2005~, Hughes 等, 等几何分析(isogeometric analysis)

2010~, Kobbelt 等, 四边形/六面体网格生成(mesh generation)

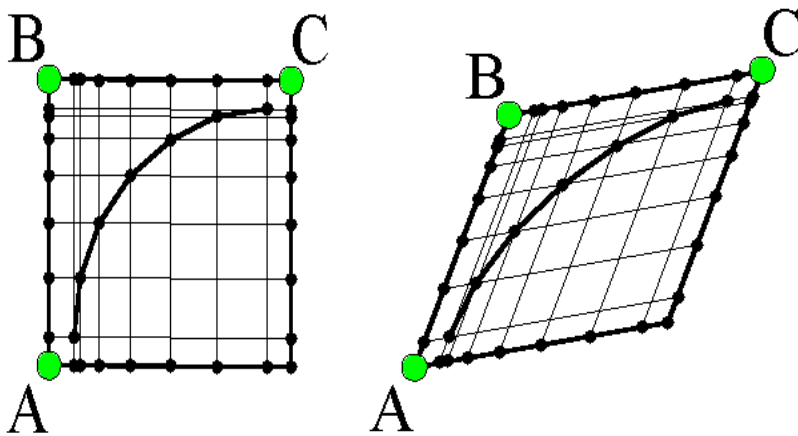
2012~, Giannelli, Jüttler, Speleers, THB-splines

2013~, Dokken 等, LR-spline

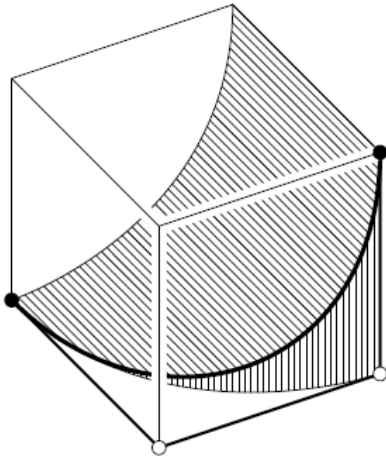
2016~, Yang, Matrix weighted NURBS

4. CAGD 的主要内容

- Bézier 技术



利用控制网+仿射变换进行绘图



Bézier 定义的 Basic curve，该曲线已有控制多边形

建立该曲线的数学表示：Bézier 曲线

控制多边形技术是 Bézier 方法的核心技术

Forrest 给出 Bernstein 基表示

Bézier 团队成员 D. Vernet 也发现 Bezier 曲线的递归求值算法

Remarque 1 - Le point L peut être extérieur à l'arc dans le cas où la construction elle est

Remarque

$$P = \lambda^3 A + 3\lambda^2 \mu B + 3\lambda \mu^2 C + \mu^3 D$$

$$\lambda = 1 - \mu$$

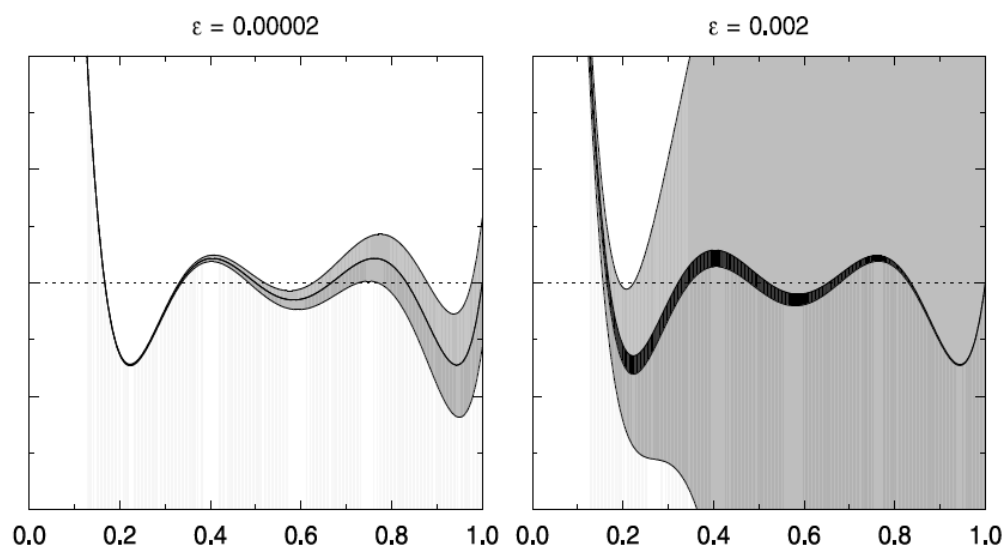
$$P = (1 - 3\mu + 3\mu^2 - \mu^3) A + (3\mu - 6\mu^2 + 3\mu^3) B + (3\mu^2 - 3\mu^3) C + \mu^3 D$$

pour 4th degré: $E = 4C - 6B + 3A$ $F = 4D - 6C + 3B - A$

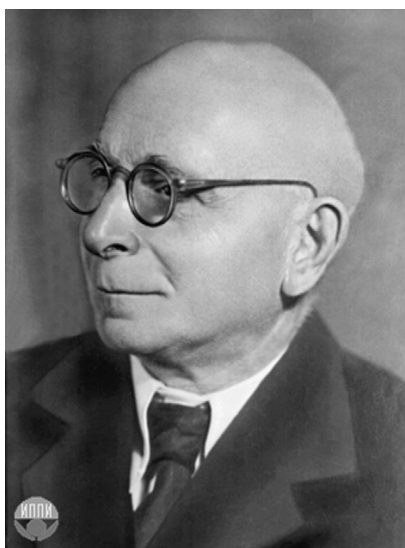
$$P = 3\mu^2 (E - 3\mu F) + 3\mu (F - 3\mu E) + E$$

de Castelliau 独立发现 Bézier 曲线形式(未发表)

给出该曲线求值的递归算法，W. Boehm 将该算法命名为 de Castelliau 算法



对 6 次多项式分别采用 **Bernstein** 基和幂基表示时对系数进行相同幅度扰动后曲线的变化(黑色区域表示 **Bézier** 曲线, 灰色区域代表幂基表示曲线)。

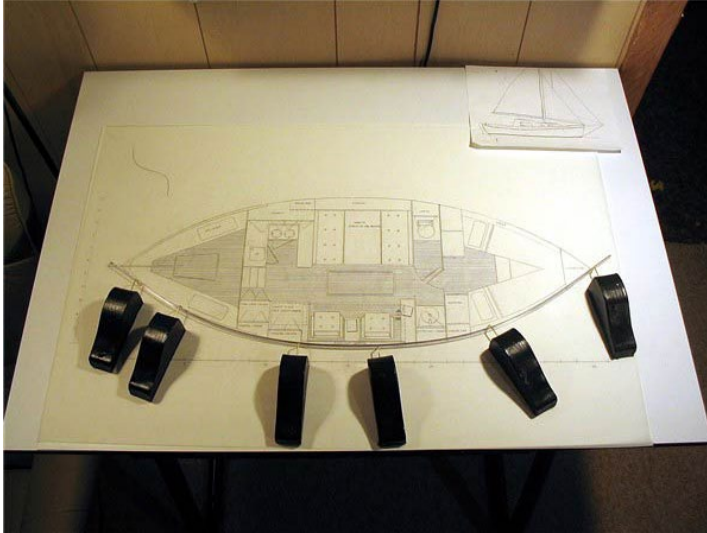


Sergei Natanovich Bernstein (1880-1968).



Pierre Bezier (1910-1999)

- 样条技术



由压铁控制木样条绘制曲线

物理样条的数学模拟：三次样条函数(小扰动)

样条曲线：由分段多项式、有理多项式拼接而成，并在连接点处满足一定连续性的曲线

I. Schoenberg 引入 B-spline 函数 1946

de Boor, L. Mansfeld, and M. Cox 研究B样条(分段多项式)的递归求值公式，解决了B样条计算的稳定性问题

Riesenfeld's PhD thesis: 参数B样条曲线曲面

节点插入算法：

Boehm

the Oslo algorithm by E. Cohen, T. Lyche, and R. Riesenfeld

实现B样条向Bezier的转换与兼容

K. Versprille's PhD thesis: rational B-spline,

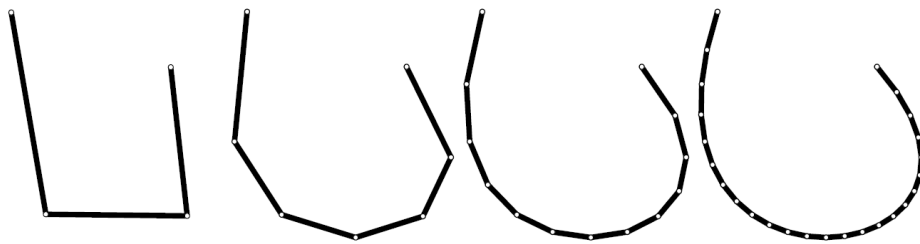
Bézier 和 B 样条技术的主要特点：

- 几何直观，便于几何设计和几何表示
- 数值计算稳定，便于计算机程序实现

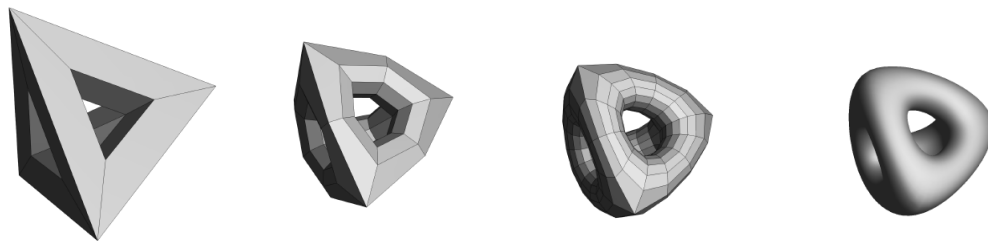
NURBS：有理Bézier和有理B样条的统一表示

CAD标准表示：NURBS(non-uniform rational B-spline)

● 细分曲线曲面



细分曲线



细分曲面

细分曲线曲面通常由样条曲线曲面推广得到，细分曲线曲面可以再生样条曲线曲面，同时比样条更灵活；

采用细分方法可以生产更广泛的函数类(新的函数不一定可用常见的初等函数表示)；

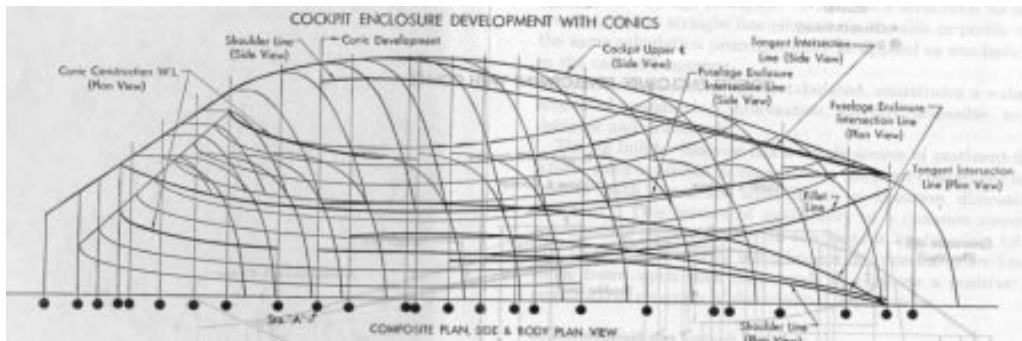
对任意拓扑控制网格进行细分可产生能表示任意拓扑几何物体的细分曲面；

细分生成函数可应用于信号处理，图像压缩等领域；

细分曲面已成功地应用于动画、电影等行业，但由于缺乏显

示表示不方便精确计算在CAD领域的应用还很有限。

● 插值参数曲线曲面



Liming (North American Aviation): conic construction

Ferguson 曲线：分段 Hermite 插值曲线，插值端点、导矢

Coons 曲面：将 Hermite 插值曲线推广到曲面情形（超限插值）

Gordon 曲面：插值曲线网

Gregory 曲面：可插值扭矢不相容的曲线网

● 隐式/代数曲线曲面造型



可表达复杂形状或复杂拓扑结构的物体，但边界不易控制；

判断给定点是否位于曲线曲面上，计算参数曲线与隐式曲线/

曲面的交点相对于参数曲线曲面本身简单；

理论上，参数多项式/有理多项式曲线曲面可转化为隐式曲线

曲面；

在计算机图形、计算机动画和可视化领域有应用。

- 光顺曲线曲面设计与基于物理/力学背景形状设计

汽车、飞机、家电等产品的流线型表面设计，使得设计产品既美观又满足一定物理性能。

等几何分析(isogeometry analysis): 对设计的产品进行力学分析并通过力学分析改进设计。

- 显示与交互



Sutherland's Sketchpad system

未出现绘图系统前，曲线曲面模型只能输出数据，可用于数控加工；有了绘图系统后，支持交互设计，进行图形绘制。

GPU 绘制技术：硬件并行加速，实现快速(实时)计算的目标，应用于动画、游戏软件和复杂场景建模与绘制。

虚拟现实技术：

- 加工与制造技术

数控加工：通过数控机床对原始材料进行切削处理以达到所要物体形状的目的。数控加工能生成高强度/高性能物件(如发动机叶片，模具等)，但加工物体的拓扑结构不能太复杂。



3D 打印：将塑料、金属粉末等材料通过融化合成所设计形状。
其特点是可以构造拓扑结构复杂的物体，但强度一般不够高。



(a) Great Wall



(b) Horse



(c) Kitten



(d) Bunny



(e) Fuleco



(f) Taurus