

第十章 Bézier 三角曲面片

§1. 基本概念

(1) 问题的提出

- 实际造型需要：体在棱磨光时角的处理
 - 任意多边形可三角化
 - 一元 Bernstein 多项式向二维的推广
- 1) 张量积 Bézier 曲面，保持 Bézier 曲线许多性质，但基函数性质没保持。

$$\text{Span}\{B_{i,n}(t)\} = \pi_n(\mathbb{R}^1)$$

$$\text{Span}\{B_{i,m}(u)B_{j,n}(v)\} \subseteq \pi_{n+m}(\mathbb{R}^2)$$

- 2) $\text{Span}\{J_{i,n}(P)\} = \pi_n(\mathbb{R}^2)$ ，其中 $J_{i,n}(P)$ 为定义在三角域上的 Bernstein 基函数。

(2) 重心坐标(barycentric coordinates)

● 概念

给定一个非奇异三角形 $T = (P_0, P_1, P_2)$ ，规定逆时针方向面积为正，三角形的有向面积记为 $\text{area}(P_0, P_1, P_2)$ 。

$$\text{area}(P_0, P_1, P_2) = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ y_0 & y_1 & y_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

对于任意 $P \in \mathbb{R}^2$ ， $\exists(u, v, w)$ 使得

$$\begin{cases} P = uP_0 + vP_1 + wP_2 \\ u + v + w = 1 \end{cases}$$

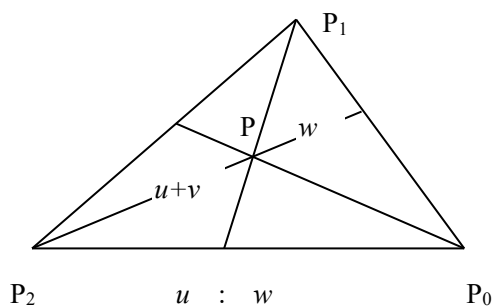
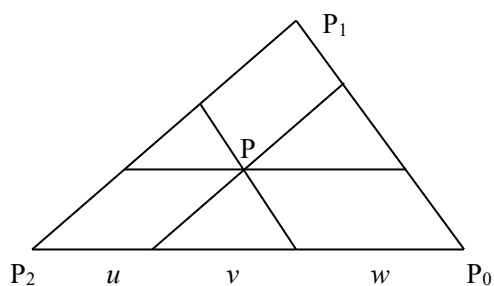
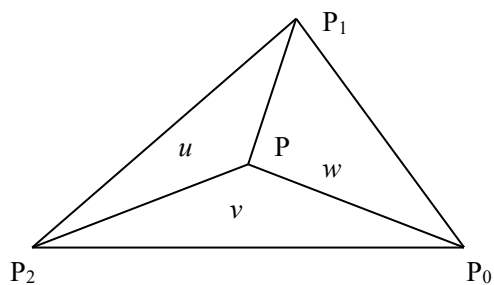
$$u = \frac{\text{area}(P_1, P_2, P)}{\text{area}(P_0, P_1, P_2)}, \quad v = \frac{\text{area}(P_0, P, P_2)}{\text{area}(P_0, P_1, P_2)}, \quad w = \frac{\text{area}(P_0, P_1, P)}{\text{area}(P_0, P_1, P_2)}$$

$$F = F(P) = F(uP_0 + vP_1 + wP_2) = f(u, v, w)$$

● 几何意义

当 $P \in T \Leftrightarrow (u, v, w) \geq 0$

当 $P \notin T$ ，重心坐标可能为负数。



§2. 三角域 Bernstein 基函数

(1) 定义

设 $T = (P_0, P_1, P_2)$ 非奇异， $P = uP_0 + vP_1 + wP_2$

重心坐标满足： $(u + v + w)^n = 1$

展开, 可得:
$$\sum_{\substack{i+j+k=n \\ i,j,k \geq 0}} \frac{n!}{i!j!k!} u^i v^j w^k = 1$$

记 $J_{i,j,k}^n(u,v,w) = \frac{n!}{i!j!k!} u^i v^j w^k$

(2) 多元指标

记 $\mathbf{Z}_+^3 = \{(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2), \alpha_i \text{ 为非负整数}\}$

类似地, 有 $\mathbf{Z}_+^n = \{(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})\}$

对于 $\forall \alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2) \in \mathbf{Z}_+^3$

及 $X = (x_0, x_1, x_2) \in R^3$

定义 $\alpha! = \alpha_0! \alpha_1! \alpha_2!$

$|\alpha| = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2$

$X^\alpha = x_0^{\alpha_0} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}$

对于整数 $d \geq 0$, 定义 $C_d^\alpha = \frac{d!}{\alpha!}$

记 $X(P) = (u, v, w)$, 有 $\sum_{\substack{|\alpha|=n \\ \alpha \in \mathbf{Z}_+^3}} C_n^\alpha X^\alpha(P) = 1$

则 $J_{i,j,k}^n(P)$ 可记为 $J_\alpha^n(P) = C_n^\alpha X^\alpha(P)$

(3) 基函数基本性质

● 正性

$\forall P \in T$, 有 $J_\alpha^n(P) \geq 0$

● 角点性质

$$J_\alpha^n(P_0) = \begin{cases} 1 & \alpha = (n, 0, 0) \\ 0 & \alpha \neq (n, 0, 0) \end{cases}$$

● 权性

$$\sum_{\substack{|\alpha|=n \\ \alpha \in \mathbf{Z}_+^3}} J_\alpha^n(P) \equiv 1$$

- 递推公式

$$J_{i,j,k}^n(u,v,w) = uJ_{i-1,j,k}^{n-1}(u,v,w) + vJ_{i,j-1,k}^{n-1}(u,v,w) + wJ_{i,j,k-1}^{n-1}(u,v,w)$$

- 升阶公式

$$J_{i,j,k}^n(u,v,w) = \frac{i+1}{n+1} J_{i+1,j,k}^{n+1}(u,v,w) + \frac{j+1}{n+1} J_{i,j+1,k}^{n+1}(u,v,w) + \frac{k+1}{n+1} J_{i,j,k+1}^{n+1}(u,v,w)$$

- 线性无关性质与完全基函数

$$\text{记 } B_n = \{J_{i,j,k}^n(u,v,w); i+j+k=n\}$$

则有：

1) B_n 中的函数是线性无关的

$$2) \#B_n = \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \dim\left(\left\{\sum_{i+j \leq n} a_{ij} x^i y^j\right\}\right)$$

§3. Bézier 三角(曲面)片

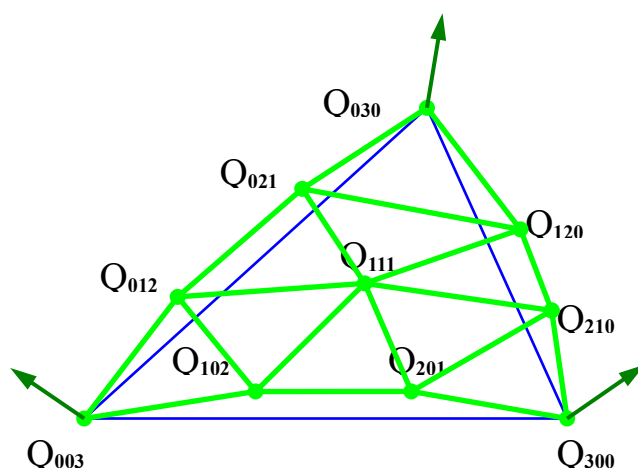
Bézier triangle, triangular Bézier patch

(1) Bézier 三角片定义

设 $\{Q_{i,j,k}; i+j+k=n\}$ 是给定的一组 R^3 中的点，则称

$$B^n(P) = B^n(u,v,w) = \sum_{i+j+k=n} Q_{i,j,k} J_{i,j,k}^n(P)$$

为 T 上的 n 次 Bézier 三角片



特征网格：

由 $Q_{i+1,j,k}, Q_{i,j+1,k}, Q_{i,j,k+1} (i+j+k=n-1)$

及 $Q_{i-1,j,k}, Q_{i,j-1,k}, Q_{i,j,k-1} (i+j+k=n+1)$

联接而成的三角形全体

特征网格又称 **B 网**。

例： $n=1$ 时，三角曲面方程是

$$B^1(P) = B^1(u, v, w) = uQ_{1,0,0} + vQ_{0,1,0} + wQ_{0,0,1}$$

该曲面表示三角形本身。

$n=2$ 时，三角曲面有 6 个控制顶点，其方程可以表示为

$$B^2(P) = (u, v, w) \begin{pmatrix} Q_{2,0,0} & Q_{1,1,0} & Q_{1,0,1} \\ Q_{1,1,0} & Q_{0,2,0} & Q_{0,1,1} \\ Q_{1,0,1} & Q_{0,1,1} & Q_{0,0,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

(2) 基本性质

1) 仿射不变性

2) 凸包性质

3) 角点与边界曲线

角点插值： $B^n(P_0) = Q_{n,0,0}$ ， $B^n(P_1) = Q_{0,n,0}$ ， $B^n(P_2) = Q_{0,0,n}$

边界曲线为 n 次 Bézier 曲线

角点处切平面由角点处两条边张成

(3) 算子表示

定义三个指标移位算子

$$E_0 Q_{i,j,k} = Q_{i+1,j,k}$$

$$E_1 Q_{i,j,k} = Q_{i,j+1,k}$$

$$E_2 Q_{i,j,k} = Q_{i,j,k+1}$$

$$\text{则 } B^n(P) = B^n(u, v, w) = (uE_0 + vE_1 + wE_2)^n Q_{0,0,0}$$

(4) 三角 Bézier 函数曲面

● 定义

给定 $\{f_{i,j,k}; i+j+k=n\} \subset R$

定义 $F^n(P) = \sum_{i+j+k=n} f_{i,j,k} J_{i,j,k}^n(P)$ 为 T 上的 n 次三角 Bézier 函数曲面

● 矢量化

$$B^n(P) = (P, F^n(P)) = \sum_{i+j+k=n} Q_{i,j,k} J_{i,j,k}^n(P)$$

$$\text{其中 } Q_{i,j,k} = (P_{i,j,k}, f_{i,j,k}), \quad P_{i,j,k} = \frac{i}{n}P_0 + \frac{j}{n}P_1 + \frac{k}{n}P_2$$

● 逼近定理

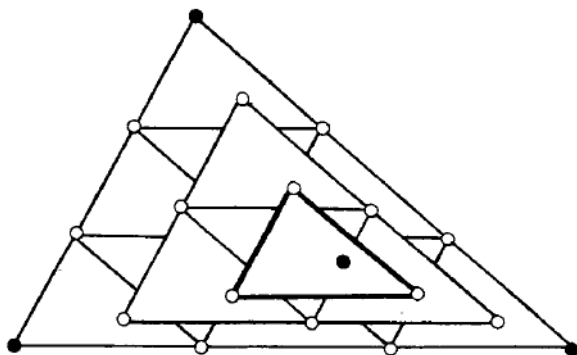
设 $f \in C(\bar{T})$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i+j+k=n} f\left(\frac{i}{n}P_0 + \frac{j}{n}P_1 + \frac{k}{n}P_2\right) J_{i,j,k}^n(P) \stackrel{\text{一致}}{=} f(P)$$

(5) de Casteljau 算法

$$B^n(P) = B^n(u, v, w) = \sum_{i+j+k=n} Q_{i,j,k} J_{i,j,k}^n(P)$$

给定一点 $P \in T$, 计算 $B^n(P)$



算法:

$$1) \quad Q_{i,j,k}^0 = Q_{i,j,k}$$

$$2) \quad Q_{i,j,k}^l = uQ_{i+1,j,k}^{l-1} + vQ_{i,j+1,k}^{l-1} + wQ_{i,j,k+1}^{l-1}, \quad i+j+k=n-l, \quad l=1,2,\dots,n$$

$$3) \quad Q_{0,0,0}^n = B^n(P)$$

(6) 离散逼近及其算法

● 升阶

1) 一次升阶

$$\begin{aligned} B^n(P) &= \sum_{i+j+k=n} Q_{i,j,k} J_{i,j,k}^n(P) \\ &= \sum_{i+j+k=n+1} \left[\frac{i}{n+1} Q_{i-1,j,k} + \frac{j}{n+1} Q_{i,j-1,k} + \frac{k}{n+1} Q_{i,j,k-1} \right] J_{i,j,k}^{n+1}(P) \end{aligned}$$

2) 高次升阶

$$B^n(P) = \sum_{i+j+k=n+m} Q_{i,j,k}^{(m)} J_{i,j,k}^{n+m}(P)$$

$$\text{其中 } Q_{i,j,k}^{(m)} = \sum_{r+s+t=n} Q_{r,s,t} \frac{\binom{i}{r} \binom{j}{s} \binom{k}{t}}{\binom{m+n}{n}}$$

$$\text{若 } \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{i_m}{n+m}, \frac{j_m}{n+m}, \frac{k_m}{n+m} \right) = (u, v, w)$$

则 $\lim_{m \rightarrow \infty} Q_{i,j,k}^{(m)} = B^n(u, v, w)$, 即升阶后控制网格收敛到曲面本身。

● 包络性质

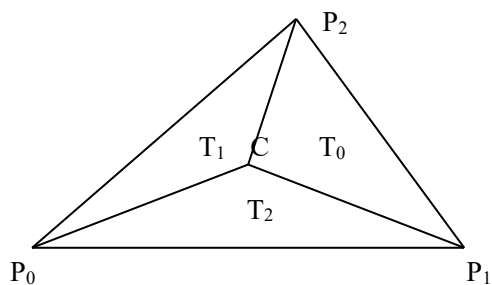
定义：记

$$\begin{aligned} B_n^{(l)}(P; R) &= \sum_{i+j+k=n-l} Q_{i,j,k}^l J_{i,j,k}^{n-l}(P) \\ &= (xE_0 + yE_1 + zE_2) (uE_0 + vE_1 + wE_2)^{n-l} Q_{0,0,0} \end{aligned}$$

定理： $B^n(P)$ 是曲面簇 $\{B_n^{(l)}(P; R); R \in \bar{T}\}$ 的包络。

● 重心分割

将一个三角形分割成子三角形，并将一张 Bézier 三角片分割成几张小 Bézier 三角片。



记子三角形 T_i 上的 Bernstein 基函数为 $\{J_{i,j,k}^{n,T_i}(P)\}$

曲面 $B^n(P) = \sum_{i+j+k=n} Q_{i,j,k} J_{i,j,k}^n(P)$ 可分解为

$$B^n(P) = \begin{cases} \sum_{i+j+k=n} Q_{0,j,k}^i J_{i,j,k}^{n,T_0}(P) & P \in T_0 \\ \sum_{i+j+k=n} Q_{i,0,k}^j J_{i,j,k}^{n,T_1}(P) & P \in T_1 \\ \sum_{i+j+k=n} Q_{i,j,0}^k J_{i,j,k}^{n,T_2}(P) & P \in T_2 \end{cases}$$

其中，若设 C 的重心坐标为 $C(u_c, v_c, w_c)$

$$\text{则 } Q'_{i,j,k} = (u_c E_0 + v_c E_1 + w_c E_2)^j Q_{i,j,k}$$

证明：不失一般性，考虑 T_0

设 P 关于 T 和 T_0 的重心坐标分别为 (u, v, w) 和 (u_0, v_0, w_0)

$$\text{则 } P = u_0 C + v_0 P_1 + w_0 P_2, \quad C = u_c P_0 + v_c P_1 + w_c P_2$$

将 C 代入，可得

$$P = u_0 u_c P_0 + (u_0 v_c + v_0) P_1 + (u_0 w_c + w_0) P_2$$

$$\text{又因为 } P = u P_0 + v P_1 + w P_2$$

$$\text{可得 } (u, v, w) = u_0 (u_c, v_c, w_c) + v_0 (0, 1, 0) + w_0 (0, 0, 1)$$

$$\text{令 } E = \begin{pmatrix} E_0 \\ E_1 \\ E_2 \end{pmatrix}$$

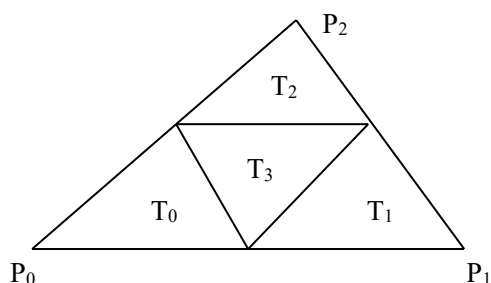
$$\begin{aligned}
B^n(P) &= ((u, v, w)E)^n Q_{0,0,0} \\
&= ((u_c, v_c, w_c)Eu_0 + v_0E_1 + w_0E_2)^n Q_{0,0,0} \\
&= \sum_{i+j+k=n} (u_cE_0 + v_cE_1 + w_cE_2)^i Q_{0,j,k} J_{i,j,k}^{n,T_0}(u_0, v_0, w_0)
\end{aligned}$$

说明：一般 C 取重心，坐标 $C\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$

缺点：三角形剖分存在奇异性，不收敛

● 均匀剖分

如下图，将一个三角形均匀剖分成 4 个子三角形



$$\begin{aligned}
B^n(P) &= \sum_{|\alpha|=n} Q_\alpha J_\alpha^{n,T}(P) \\
&= \sum_{|\beta|=n} Q_\beta^{(l)} J_\beta^{n,T_l}(P) \quad P \in T_l
\end{aligned}$$

则

$$Q_{i,j,k}^{(l)} = \begin{cases} \frac{1}{2^{n-i}} E_0^i (E_0 + E_1)^j (E_0 + E_2)^k Q_{0,0,0} & l=0 \\ \frac{1}{2^{n-j}} (E_1 + E_0)^i E_1^j (E_1 + E_2)^k Q_{0,0,0} & l=1 \\ \frac{1}{2^{n-k}} (E_2 + E_0)^i (E_2 + E_1)^j E_2^k Q_{0,0,0} & l=2 \\ \frac{1}{2^n} (E_1 + E_2)^i (E_2 + E_0)^j (E_0 + E_1)^k Q_{0,0,0} & l=3 \end{cases}$$

特点：

几何上比较均匀；

运算量少，不需要除法；

收敛。

思考题：

1. 证明三角形上定义的 Bernstein 函数线性无关。

2. 设有 $\alpha, \beta, \gamma = n - \alpha - \beta > 0$ ，证明如下等式

$$u^\alpha v^\beta = \frac{\alpha! \beta! \gamma!}{n!} \sum_{i+j+k=n} \binom{i}{\alpha} \binom{j}{\beta} B_{ijk}^n(u, v, w)$$

其中 $w = 1 - u - v$ 。

3. 将二元多项式 $\mathbf{b}(x, y) = \sum_{0 \leq i+j \leq n} \mathbf{a}_{ij} x^i y^j$ ，其中 $0 \leq x \leq 1$ ， $0 \leq y \leq 1$ ，

$0 \leq x + y \leq 1$ ，表示成 Bézier 三角片形式。

4. 由三角形某一顶点出发到其对边一点连一直线，写出 Bézier 三角片中参数定义在该直线上的曲线方程。

(7) 方向导数

a. 定义

设 $\vec{z} = (z_0, z_1)$ 是一个矢量， $F = F(P)$ 是一个二元函数，则 F 关于矢量 \vec{z} 的方向导数定义为

$$D_{\vec{z}} F(P) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(P + t\vec{z}) - F(P)}{t}$$

$$D_{\vec{z}}^r F(P) = D_{\vec{z}} (D_{\vec{z}}^{r-1} F(P))$$

b. 基本性质

$$\text{i)} \quad D_{a\vec{z} + b\vec{w}} F(P) = aD_{\vec{z}} F(P) + bD_{\vec{w}} F(P)$$

$$\text{ii)} \quad D_{\vec{z} + \vec{w}}^r F(P) = \sum_{i=0}^r C_r^i D_{\vec{z}}^i D_{\vec{w}}^{r-i} F(P)$$

$$\text{iii)} \quad \vec{z} = (z_0, z_1), \quad F = F(x, y)$$

$$\begin{aligned}
D_{\vec{z}}^r F(P) &= \left(z_0 \frac{\partial}{\partial x} + z_1 \frac{\partial}{\partial y} \right)^r F(P) \\
&= \sum_{i=0}^r C_r^i z_0^i z_1^{r-i} F_{x^i y^{r-i}}(P) \\
&= \sum_{\substack{|\alpha|=r \\ \alpha=(\alpha_0, \alpha_1)}} C_r^\alpha z^\alpha \partial^\alpha F(P)
\end{aligned}$$

c. 在重心坐标下的方向导数计算

设 $P = uP_0 + vP_1 + wP_2$ 时三角形 T 内一点，

则有： $F = F(P) = F(uP_0 + vP_1 + wP_2) = f(u, v, w)$

零心坐标：

设 $\vec{z} = (z_0, z_1)$ 与 T 所在的平面平行，

则 \vec{z} 关于 T 的零心坐标 (λ, μ, γ) 满足 $\begin{cases} \vec{z} = \lambda P_0 + \mu P_1 + \gamma P_2 \\ \lambda + \mu + \gamma = 0 \end{cases}$

且零心坐标唯一。

导数计算：

$$\begin{aligned}
D_{\vec{z}} F(P) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(P + t\vec{z}) - F(P)}{t} \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(u + t\lambda, v + t\mu, w + t\gamma) - f(u, v, w)}{t} \\
&= \lambda f_u(u, v, w) + \mu f_v(u, v, w) + \gamma f_w(u, v, w)
\end{aligned}$$

记 $Y(\vec{z}) = (\lambda, \mu, \gamma)$ ，则 $D_{\vec{z}} F(P) = \sum_{|\alpha|=1} Y^\alpha(\vec{z}) \partial^\alpha f(u, v, w)$

其中 $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2) \in \mathbf{z}_+^3$ ， $\partial^\alpha f(u, v, w) = \frac{\partial^{|\alpha|} f(u, v, w)}{\partial u^{\alpha_0} \partial v^{\alpha_1} \partial w^{\alpha_2}}$

利用归纳法可证

$$\begin{aligned}
D_{\vec{z}}^r F(P) &= \left(\lambda \frac{\partial}{\partial u} + \mu \frac{\partial}{\partial v} + \gamma \frac{\partial}{\partial w} \right)^r f(u, v, w) \\
&= \sum_{|\alpha|=r} J_\alpha^r(Y(\vec{z})) \partial^\alpha f(u, v, w)
\end{aligned}$$

d. Bézier 三角曲面片的方向导数

设 $J_\alpha^n(u, v, w)$ 为 Bernstein 基函数，并令 $P = (u, v, w)$ ，则有

$$\begin{aligned} D_{\bar{z}}^r J_\alpha^n(u, v, w) &= \sum_{|\beta|=r} J_\beta^r(Y(\bar{z})) \frac{n!}{(\alpha - \beta)!} P^{\alpha - \beta} \\ &= \frac{n!}{(n - r)!} \sum_{|\beta|=r} J_\beta^r(Y(\bar{z})) J_{\alpha - \beta}^{n-r}(P) \end{aligned}$$

设有 Bézier 三角片 $B^n(P) = \sum_{|\alpha|=n} Q_\alpha J_\alpha^n(P)$

则有：

$$\begin{aligned} D_{\bar{z}}^r B^n(P) &= \frac{n!}{(n - r)!} \sum_{|\alpha|=n} Q_\alpha \sum_{|\beta|=r} J_\beta^r(Y(\bar{z})) J_{\alpha - \beta}^{n-r}(P) \\ &= \frac{n!}{(n - r)!} \sum_{|\delta|=n-r} \sum_{|\beta|=r} Q_{\delta + \beta} J_\beta^r(Y(\bar{z})) J_\delta^{n-r}(P), \quad \text{其中 } \delta = \alpha - \beta \end{aligned}$$

记 $E = (E_0, E_1, E_2)$ ，有

$$\sum_{|\beta|=r} Q_{\delta + \beta} J_\beta^r(Y(\bar{z})) = \left[\sum_{|\beta|=r} E^\beta J_\beta^r(Y(\bar{z})) \right] Q_\delta$$

进一步，有

$$\begin{aligned} D_{\bar{z}}^r B^n(P) &= \frac{n!}{(n - r)!} \sum_{|\delta|=n-r} \sum_{|\beta|=r} Q_{\delta + \beta} J_\beta^r(Y(\bar{z})) J_\delta^{n-r}(P) \\ &= \frac{n!}{(n - r)!} (\lambda E_0 + \mu E_1 + \gamma E_2)^r \sum_{|\delta|=n-r} Q_\delta J_\delta^{n-r}(P) \\ &= \frac{n!}{(n - r)!} (\lambda E_0 + \mu E_1 + \gamma E_2)^r (u E_0 + v E_1 + w E_2)^{n-r} Q_{0,0,0} \end{aligned}$$

§4. 函数 Bézier 三角曲面片的凸性

a. 凸性定义

曲面 S: $F = F(P)$ 在定义域 Ω 上凸

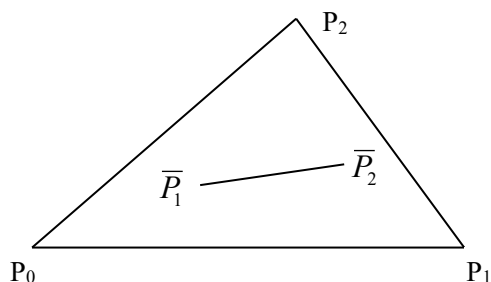
$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} F_{x^2} & F_{xy} \\ F_{yx} & F_{y^2} \end{vmatrix} \geq 0, \quad \forall P \in \Omega$$

函数 Bézier 三角片凸

\Leftrightarrow 对于 $\forall \bar{P}_1, \bar{P}_2 \in \Omega$ 且 $\bar{P}_1(1-t) + \bar{P}_2 t \in \Omega$ 时, 有

$$F(\bar{P}_1(1-t) + \bar{P}_2 t) \leq F(\bar{P}_1)(1-t) + F(\bar{P}_2)t$$

b. 数学准备



$\forall \bar{P}_1, \bar{P}_2 \in T$, 设它们坐标分别为 (u_1, v_1, w_1) 和 (u_2, v_2, w_2) ,

对 $\forall t \in [0, 1]$, 令 $\bar{P} = \bar{P}_1(1-t) + \bar{P}_2 t$

则 \bar{P} 的重心坐标为

$$(u, v, w) = (u_1(1-t) + u_2 t, v_1(1-t) + v_2 t, w_1(1-t) + w_2 t)$$

在直线 L 上

$$F(\bar{P}) = F(\bar{P}_1 + t(\bar{P}_2 - \bar{P}_1)) \text{ 为凸} \Leftrightarrow \frac{d^2 F(\bar{P}(t))}{dt^2} \geq 0$$

设 $F^n(P) = \sum_{i+j+k=n} f_{i,j,k} J_{i,j,k}^n(P)$, 则有

$$0 \leq \frac{d^2 F^n(\bar{P}(t))}{dt^2} = n(n-1) \sum_{i+j+k=n-2} (\lambda E_0 + \mu E_1 + \gamma E_2)^2 f_{i,j,k} J_{i,j,k}^{n-2}(P)$$

所以, 当下面条件成立时

$$\forall \quad i+j+k=n-2$$

$$(\lambda E_0 + \mu E_1 + \gamma E_2)^2 f_{i,j,k} \geq 0 \quad (*)$$

有 $D_{\vec{z}}^2 F(P) \geq 0, \quad \forall P \in T, \quad \vec{z} \parallel \bar{P}_2 - \bar{P}_1$

(*) \Leftrightarrow

$$(\lambda \quad \mu \quad \gamma) \begin{pmatrix} f_{i+2,j,k} & f_{i+1,j+1,k} & f_{i+1,j,k+1} \\ f_{i+1,j+1,k} & f_{i,j+2,k} & f_{i,j+1,k+1} \\ f_{i+1,j,k+1} & f_{i,j+1,k+1} & f_{i,j,k+2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \gamma \end{pmatrix} \geq 0$$

$$\forall \lambda + \mu + \gamma = 0$$

c. 三向凸条件

引理： 设 $H = \begin{pmatrix} A & c & b \\ c & B & a \\ b & a & C \end{pmatrix}$ ， 则 $\forall \lambda + \mu + \gamma = 0$ ， 有

$(\lambda \quad \mu \quad \gamma)H \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \gamma \end{pmatrix} \geq 0$ 的一个充分条件是：

$$\begin{cases} A + a \geq b + c \\ B + b \geq c + a \\ C + c \geq a + b \end{cases}$$

证明： $H = \begin{pmatrix} A + a - b - c & 0 & 0 \\ 0 & B + b - a - c & 0 \\ 0 & 0 & C + c - a - b \end{pmatrix} + \Delta H$

易证 $(\lambda \quad \mu \quad \gamma) \Delta H \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \gamma \end{pmatrix} = 0$ ， 从而命题得证。

d. 三向凸定理(常庚哲&Davis)

定理： 若对 $\forall \quad i + j + k = n - 2$ ， 有

$$(E_0 - E_1)(E_0 - E_2)f_{i,j,k} \geq 0$$

$$(E_1 - E_2)(E_1 - E_0)f_{i,j,k} \geq 0$$

$$(E_2 - E_1)(E_2 - E_0)f_{i,j,k} \geq 0$$

那么 $F^n(P) = \sum_{i+j+k=n} f_{i,j,k} J^n_{i,j,k}(P)$ 在 T 上为凸。

e. 改进的凸性条件

记 $\Delta_a = A + a - b - c$, $\Delta_b = B + b - a - c$, $\Delta_c = C + c - a - b$, 有

$$(\lambda \quad \mu \quad \gamma)H\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \gamma \end{pmatrix} = \Delta_a \lambda^2 + \Delta_b \mu^2 + \Delta_c \gamma^2$$

$$= (\Delta_a + \Delta_c) \lambda^2 + (\Delta_b + \Delta_c) \mu^2 + 2\Delta_c \lambda \mu$$

$$\begin{cases} \Delta_a + \Delta_c \geq 0 \\ \Delta_b + \Delta_c \geq 0 \\ (\Delta_a + \Delta_c)(\Delta_b + \Delta_c) - \Delta_c^2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_a + \Delta_c \geq 0 \\ \Delta_b + \Delta_c \geq 0 \\ \Delta_a + \Delta_b \geq 0 \\ \Delta_a \Delta_b + \Delta_b \Delta_c + \Delta_c \Delta_a \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{下记 } \Delta_{i,j,k}^{(l)} = \prod_{\substack{s=0 \\ s \neq l}}^2 (E_l - E_s) f_{i,j,k}, \quad l=0,1,2$$

定理：若对 $\forall i+j+k=n-2$, 有

$$\Delta_{i,j,k}^{(0)} + \Delta_{i,j,k}^{(1)} \geq 0$$

$$\Delta_{i,j,k}^{(1)} + \Delta_{i,j,k}^{(2)} \geq 0$$

$$\Delta_{i,j,k}^{(2)} + \Delta_{i,j,k}^{(0)} \geq 0$$

$$\Delta_{i,j,k}^{(0)} \Delta_{i,j,k}^{(1)} + \Delta_{i,j,k}^{(1)} \Delta_{i,j,k}^{(2)} + \Delta_{i,j,k}^{(2)} \Delta_{i,j,k}^{(0)} \geq 0$$

则 $F^n(P) = \sum_{i+j+k=n} f_{i,j,k} J_{i,j,k}^n(P)$ 在 T 上为凸。

注：上述定理对 $n=2,3$ 是充要的。

§5. 有理 Bézier 三角曲面片

a. 有理 Bézier 三角片的一般形式

$$\mathbf{b}^n(P) = \frac{\sum_{i+j+k=n} \omega_{i,j,k} Q_{i,j,k} J_{i,j,k}^n(P)}{\sum_{i+j+k=n} \omega_{i,j,k} J_{i,j,k}^n(P)}$$

- 有理 de Casteljau 算法

$$\mathbf{b}_\alpha^r(P) = \frac{u\omega_{\alpha+e_0}^{r-1}\mathbf{b}_{\alpha+e_0}^{r-1}(P) + v\omega_{\alpha+e_1}^{r-1}\mathbf{b}_{\alpha+e_1}^{r-1}(P) + w\omega_{\alpha+e_2}^{r-1}\mathbf{b}_{\alpha+e_2}^{r-1}(P)}{\omega_\alpha^r}$$

$$\text{其中 } \omega_\alpha^r = u\omega_{\alpha+e_0}^{r-1}(P) + v\omega_{\alpha+e_1}^{r-1}(P) + w\omega_{\alpha+e_2}^{r-1}(P)$$

$$r = 1, 2, \dots, n \text{ 和 } |\alpha| = n - r$$

$$\text{特别地, } \mathbf{b}_\alpha^0(P) = \mathbf{b}_\alpha, \quad \omega_\alpha^0 = \omega_\alpha$$

$$\text{曲面点 } \mathbf{b}^n(P) = \mathbf{b}_0^n(P)$$

- 求导

$$\text{令 } U(P) = w(P)\mathbf{b}^n(P) = \sum_{i+j+k=n} \omega_{i,j,k} Q_{i,j,k} J_{i,j,k}^n(P)$$

$$\text{则 } D_{\vec{z}}\mathbf{b}^n(P) = \frac{D_{\vec{z}}U(P) - D_{\vec{z}}w(P)\mathbf{b}^n(P)}{w(P)}$$

b. 二次曲面片

圆锥曲线推广到曲面即为二次曲面，

圆锥曲线段可以用二次有理 Bézier 曲线表示，

但三角二次曲面片不一定能用三角二次有理 Bézier 曲面表示！

三角二次曲面片可以用三角四次有理 Bézier 曲面表示！

八分之一球面(第一卦限)的有理 Bézier 曲面表示：控制顶点

$$[0,0,1]$$

$$[\alpha,0,1] \quad [0,\alpha,1]$$

$$[\beta,0,\beta] \quad [\gamma,\gamma,1] \quad [0,\beta,\beta]$$

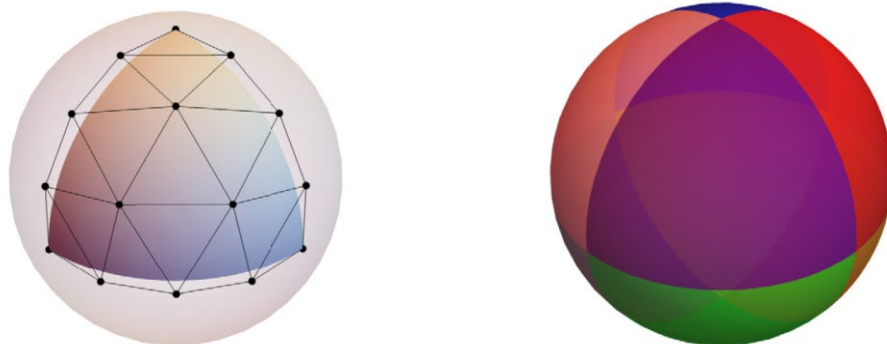
$$[1,0,\alpha] \quad [1,\gamma,\gamma] \quad [\gamma,1,\gamma] \quad [0,1,\alpha]$$

$$[1,0,0] \quad [1,\alpha,0] \quad [\beta,\beta,0] \quad [\alpha,1,0] \quad [0,1,0]$$

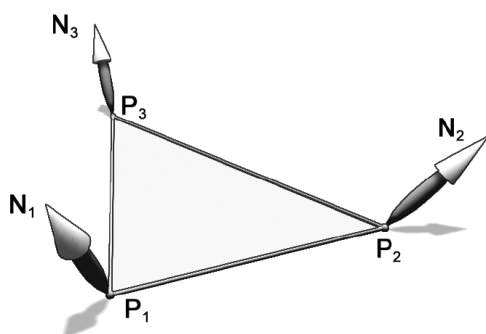
其中 $\alpha = (\sqrt{3} - 1)/\sqrt{3}$, $\beta = (\sqrt{3} + 1)/2\sqrt{3}$, $\gamma = 1 - (5 - \sqrt{2})(7 - \sqrt{3})/46$

权取为: $\omega_{040} = 4\sqrt{3}(\sqrt{3} - 1)$, $\omega_{031} = 3\sqrt{2}$, $\omega_{202} = 4$, $\omega_{121} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}(3 + 2\sqrt{2} - \sqrt{3})$,

其余权由对称性可得。



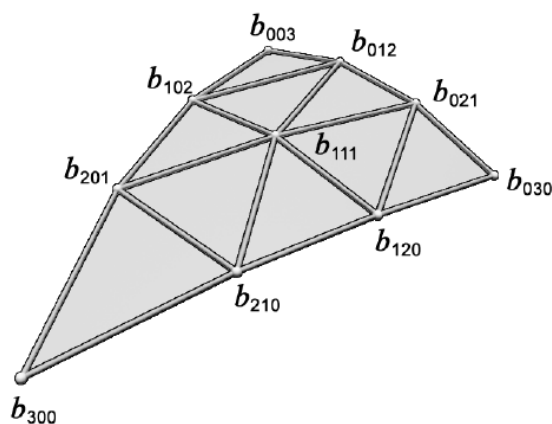
● 三次曲面插值



输入：空间中三点 P_1, P_2, P_3 以及三点处的单位法向 N_1, N_2, N_3

构造一张插值三次 Bézier 三角片

设插值曲面为 $\mathbf{b}(u, v, w) = \sum_{i+j+k=3} \mathbf{b}_{ijk} \frac{3!}{i!j!k!} u^i v^j w^k$

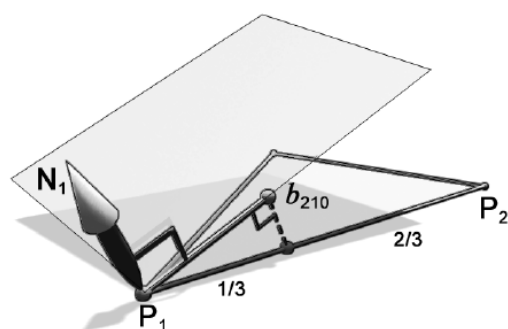


vertex control points: $\mathbf{b}_{300} \mathbf{b}_{030} \mathbf{b}_{003}$

tangent control points: $\mathbf{b}_{210} \mathbf{b}_{120} \mathbf{b}_{201} \mathbf{b}_{102} \mathbf{b}_{012} \mathbf{b}_{021}$

center control point: \mathbf{b}_{111}

角点控制顶点可由插值条件直接得到



切平面控制顶点可依据各边分别计算，由相应边界的三分点投影到顶点处的切平面得到。

中心控制顶点由下式计算得到

$$\mathbf{b}_{111} = E + (E - V)/2$$

其中 $E = (\mathbf{b}_{210} + \mathbf{b}_{120} + \mathbf{b}_{201} + \mathbf{b}_{102} + \mathbf{b}_{012} + \mathbf{b}_{021})/6$

$$V = (\mathbf{b}_{300} + \mathbf{b}_{030} + \mathbf{b}_{003})/3$$

§6. 高维推广与 S 曲面片

a. 体模型

设四面体的四个顶点 P_1, P_2, P_3, P_4

空间中任意一点 P 可表示为

$$P = u_1 P_1 + u_2 P_2 + u_3 P_3 + u_4 P_4$$

其中

$$u_1 = \frac{\det[P, P_2, P_3, P_4]}{\det[P_1, P_2, P_3, P_4]}, \quad u_2 = \frac{\det[P_1, P, P_3, P_4]}{\det[P_1, P_2, P_3, P_4]}, \quad \dots$$

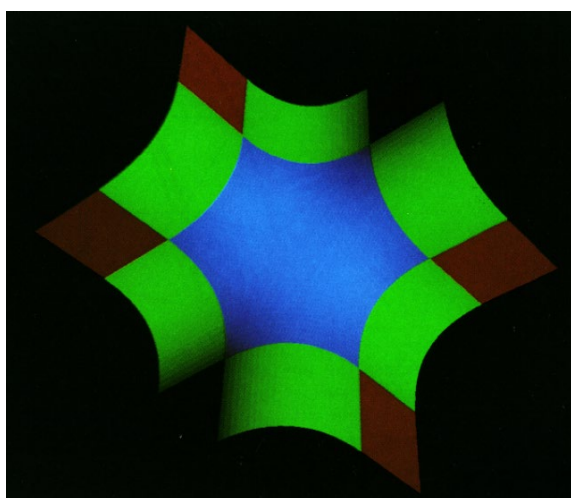
定义 Bernstein 基函数

$$J_{\alpha}^n(P) = \frac{n!}{i_1! i_2! i_3! i_4!} u_1^{i_1} u_2^{i_2} u_3^{i_3} u_4^{i_4}, \text{ 其中 } \alpha = (i_1, i_2, i_3, i_4)$$

$$\mathbf{b}^n(P) = \sum_{|\alpha|=n} Q_{\alpha} J_{\alpha}^n(P)$$

b. S 曲面片

问题：Bézier 三角片是 Bézier 曲线的一种自然推广，能否推广到多边曲面片？



设平面上凸 s 边形 $P_1 P_2 \dots P_s$ ，记 $\Delta_i = \text{area}(P, P_i, P_{i+1}) / \text{area}(P_i, P_{i+1}, P_{i+2})$ ，

定义

$$\pi_i = \Delta_1 \dots \Delta_{i-2} \cdot \Delta_{i+1} \dots \Delta_s$$

归一化，得到广义重心坐标

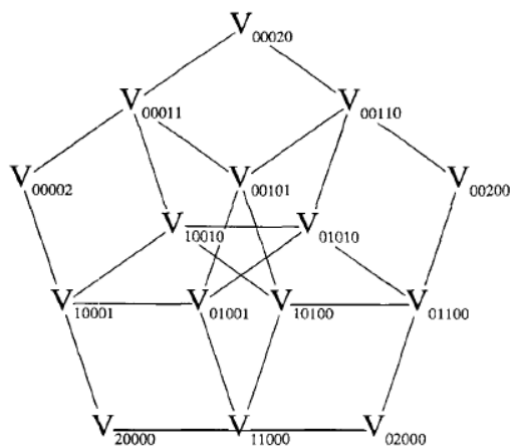
$$u_i = \frac{\pi_i}{\pi_1 + \dots + \pi_s}$$

(当 $s=3$ 时， $u_1 = \pi_1 = \Delta_2$ ， $u_2 = \pi_2 = \Delta_3$ ， $u_3 = \pi_3 = \Delta_1$ ，即为三角形上的重心坐标)

根据重心坐标可以定义 Bernstein 基函数，从而定义 S 曲面片

$$\mathbf{b}^n(P) = \sum_{|\alpha|=n} Q_{\alpha} J_{\alpha}^n(P)$$

其中 $Q_{\alpha} \in E^3$ 。



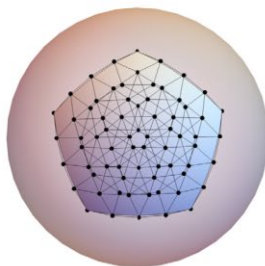
深度为 2 的三边、四边、五边形 S-patches。

J. Grošelj and A. Šadl Praprotnik

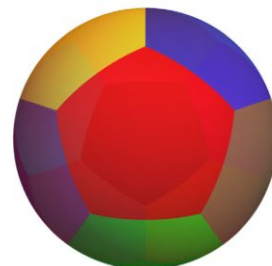
Computer Aided Geometric Design 98 (2022) 102148



(a) The planar S-patch \tilde{S}



(b) The S-patch S on the sphere.



(c) S-patches covering the whole sphere.

思考题：

1. 计算 Bézier 三角片在某一顶点处沿着角平分线方向的法曲率。
2. 给出 Bézier 四面体的升阶算法。
3. C. Loop and T. DeRose, A multisided generalization of Bezier surfaces. ACM Transactions on Graphics, 8(3):204-234, 1989.
4. J. Grošelj and A. Praprotnik, Exact sphere representations over Platonic solids based on rational multisided Bézier patches, Computer Aided Geometric Design 98 (2022) 102148
5. L. García-Puente, F. Sottile, C. G. Zhu, Toric degenerations of Bézier patches, ACM Transactions on Graphics, 30(5), 2011, Article 110.
6. Várady, T., Salvi, P., Karikó, G. A multi-sided Bézier patch with a simple control structure Computer Graphics Forum 35(2), 2016, pp307-317
7. Várady, T., et al. Multi-sided Bézier surfaces over curved, multi-connected domains, Computer Aided Geometric Design 78, 2020.