

## §1. 圆弧样条插值

### (a) 背景

圆弧样条曲线：由分段圆弧光滑( $G^1$ )拼接得到的曲线。

应用背景：数控加工，机器人轨迹

分类：单圆弧样条，双圆弧样条

单圆弧自由度:  $(C_x, C_y, r, \theta_0, \theta_1)$

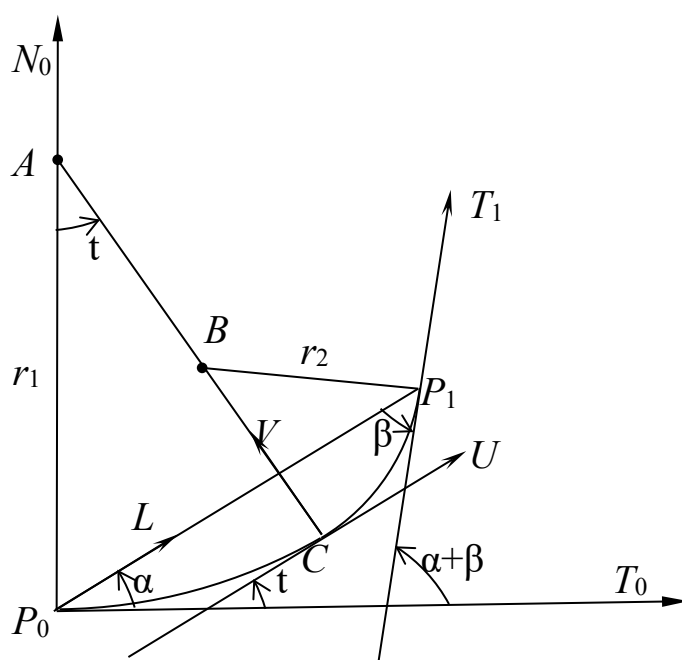
单圆弧的确定：端点  $P_0, P_1$  与某一端点处切向  $T_0$

双圆弧：给定端点  $P_0$ ,  $P_1$  与端点处切向  $T_0$ ,  $T_1$ , 构造两段切向连续的圆弧段插值给定端点和端切向。

### (b) 双圆弧曲线

## 1. 局部坐标系

以  $P_0T_0N_0$  建立局部坐标系



## 2. 参数间的关系和公切点

$$L = P_1 - P_0 = l\{\cos \alpha, \sin \alpha\}, \quad \text{其中 } l = |P_1 - P_0|$$

$$T^1 = \{\cos(\alpha + \beta), \sin(\alpha + \beta)\}$$

$$U = \{\cos t, \sin t\}$$

$$V = \hat{U} = \{-\sin t, \cos t\}$$

$$C = r_1\{\sin t, 1 - \cos t\} = 2r_1 \sin \frac{t}{2} \left\{ \cos \frac{t}{2}, \sin \frac{t}{2} \right\}$$

$$G = U - T^1 = \{\cos t - \cos(\alpha + \beta), \sin t - \sin(\alpha + \beta)\}$$

$$\text{由 } (P_1 - C) \cdot U = (P_1 - C) \cdot T^1 \text{ 知 } (P_1 - C) \cdot G = 0, \quad \text{即 } P_1 \cdot G = C \cdot G$$

坐标代入后, 得

$$\begin{aligned} & l\{\cos \alpha [\cos t - \cos(\alpha + \beta)] + \sin \alpha [\sin t - \sin(\alpha + \beta)]\} \\ &= 2r_1 \sin \frac{t}{2} \left\{ \cos \frac{t}{2} [\cos t - \cos(\alpha + \beta)] + \sin \frac{t}{2} [\sin t - \sin(\alpha + \beta)] \right\} \\ &\rightarrow l[\cos(\alpha - t) - \cos \beta] = 2r_1 \sin \frac{t}{2} \left[ \cos\left(\alpha + \beta - \frac{t}{2}\right) - \cos \frac{t}{2} \right] \end{aligned}$$

$$\text{若 } \alpha + \beta = 0, \quad \text{有 } t = 2\alpha, \quad \text{此时连接点 } C = \frac{1}{2}(P_0 + P_1)$$

若  $\alpha + \beta \neq 0$ , 可得:

$$r_1 = \frac{l}{2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2}} \frac{\sin \frac{\beta - \alpha + t}{2}}{\sin \frac{t}{2}}$$

由对称性,

$$r_2 = \frac{l}{2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2}} \frac{\sin\left(\alpha - \frac{t}{2}\right)}{\sin \frac{\alpha + \beta - t}{2}}$$

记公切点  $C = \{c_1, c_2\}$ , 则

$$\begin{aligned}
c_1 &= 2r_1 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2} = \frac{l}{2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2}} \sin \frac{\beta - \alpha + t}{2} \cos \frac{t}{2} \\
&= \frac{l}{2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2}} \left[ \sin \frac{\beta - \alpha}{2} + \sin \left( \frac{\beta - \alpha}{2} + t \right) \right] \\
c_2 &= 2r_1 \sin^2 \frac{t}{2} = \frac{l}{2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2}} \sin \frac{\beta - \alpha + t}{2} \sin \frac{t}{2} \\
&= \frac{l}{2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2}} \left[ \cos \frac{\beta - \alpha}{2} - \cos \left( \frac{\beta - \alpha}{2} + t \right) \right]
\end{aligned}$$

显然， $C = \{c_1, c_2\}$  的轨迹在一圆上。

### 3. 实际算法(金 1981)

由  $[P_1 - P_0] - r_1 N_0 = [P_1 - C] - r_1 V$  两边点乘  $G$ ,

$$[P_1 - P_0 + r_1 V] \cdot G = [P_1 - C + r_1 N_0] \cdot G$$

$$L \cdot G + r_1 V \cdot G = r_1 N_0 \cdot G$$

$$r_1 (N_0 - V) \cdot G = L \cdot G$$

记  $W = N_0 - V$ ，则

$$\begin{cases} r_1 = \frac{L \cdot G}{W \cdot G} \\ C = P_0 + r_1 W \\ A = P_0 + r_1 N_0 \end{cases}$$

令  $Q = P_1 - C$ ，有

$$\begin{cases} r_2 = \frac{Q^2}{2Q \cdot V} \\ B = C + r_2 V \end{cases}$$

### 4. 关于参数 t 的讨论

● t 与保凸性(不妨设  $\alpha > 0$ )

$r_1$ ，t 与  $\alpha$  同号  $\rightarrow 0 < \beta - \alpha + t$

$$0 < \beta < \alpha \rightarrow 1 - \frac{\beta}{\alpha} < \frac{t}{\alpha}$$

双圆弧保凸，须  $r_1 r_2 > 0$ ， $r_2 > 0$ ，有

$$\begin{cases} \alpha - \frac{t}{2} > 0 \\ \alpha + \beta - t > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{t}{\alpha} < 2 \\ \frac{t}{\alpha} < 1 + \frac{\beta}{\alpha} \end{cases} \rightarrow \frac{t}{\alpha} < 1 + \frac{\beta}{\alpha}$$

或

$$\begin{cases} \alpha - \frac{t}{2} < 0 \\ \alpha + \beta - t < 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{t}{\alpha} > 2 \\ \frac{t}{\alpha} > 1 + \frac{\beta}{\alpha} \end{cases} \rightarrow \frac{t}{\alpha} > 2$$

| $\alpha \neq 0$            | 取值范围                                      | 保凸范围   | 实际范围，特点  |
|----------------------------|---|--|--|
| $\beta = 0$                | $\frac{t}{\alpha} > 1$                    | $\frac{t}{\alpha} > 2$   | $1 < \frac{t}{\alpha} < 2$ 变凹  |
| $\frac{\beta}{\alpha} < 0$ | $\left  \frac{\beta}{\alpha} \right  > 1$ | $\frac{t}{\alpha} > 2$   | $1 + \left  \frac{\beta}{\alpha} \right  < \frac{t}{\alpha} < 2$ 变凹        |
|                            | $\left  \frac{\beta}{\alpha} \right  < 1$ | $0 < \frac{t}{\alpha} < 2$   | $2 < \frac{t}{\alpha} < 1 + \left  \frac{\beta}{\alpha} \right $ 变凹        |
| $\frac{\beta}{\alpha} > 0$ | $\left  \frac{\beta}{\alpha} \right  < 1$ | $\frac{t}{\alpha} > 2$   | $2 < \frac{t}{\alpha} < 1 + \left  \frac{\beta}{\alpha} \right $ 变凹        |
|                            |   | $1 - \frac{\beta}{\alpha} < \frac{t}{\alpha} < 1 + \frac{\beta}{\alpha}$ | $1 - \frac{\beta}{\alpha} < \frac{t}{\alpha} < 1 + \frac{\beta}{\alpha}$ 凸 |
|                            | $\left  \frac{\beta}{\alpha} \right  > 1$ | $0 < \frac{t}{\alpha}$   | $0 < \frac{t}{\alpha} < 2$ 凸   |

## 5. 公切点的选取

$$\|r_1\| - \|r_2\| = \min \quad t = \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$C \text{ 在 } P_0 P_1 \text{ 中垂线上} \quad t = \frac{3\alpha - \beta}{2}$$

$$\frac{1}{\|r_1\|} + \frac{1}{\|r_2\|} = \min \quad \begin{cases} t = \alpha - \beta & 0 < \beta < \alpha \\ t = 2\alpha & 0 < \alpha < \beta \\ t = (3\alpha - \beta)/2 & \beta < 0 \end{cases}$$

$$\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} = \min \quad \begin{cases} t=0 & 0 < \alpha < \beta \\ t=\alpha+\beta & 0 < \beta < \alpha \end{cases}$$

考虑“胖”“瘦”情形

双圆弧上的点到弦的距离

$$d(\lambda; t) = \begin{cases} r_1(t)[\cos(\alpha - \lambda) - \cos \alpha] = d_1 & (0 \leq \lambda \leq t) \\ r_2(t)[\cos(\alpha - \lambda) - \cos \beta] = d_2 & (t \leq \lambda \leq \alpha + \beta) \end{cases}$$

$$\max d(\lambda; t) = d(\alpha; t) = \begin{cases} r_2(t)(1 - \cos \beta) & (t \leq \alpha) \\ r_1(t)(1 - \cos \alpha) & (t \geq \alpha) \end{cases}$$

$$d'(\alpha; t) = a(t) \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \quad \text{其中 } a(t) > 0$$

若  $0 < \beta < \alpha$        $t = \alpha - \beta$  最瘦

$t = \alpha + \beta$  最胖

若  $0 < \alpha < \beta$        $t = 0$       最胖

$t = 2\alpha$       最瘦

实际取法:  $t = \alpha$

### (c) 双圆弧样条插值

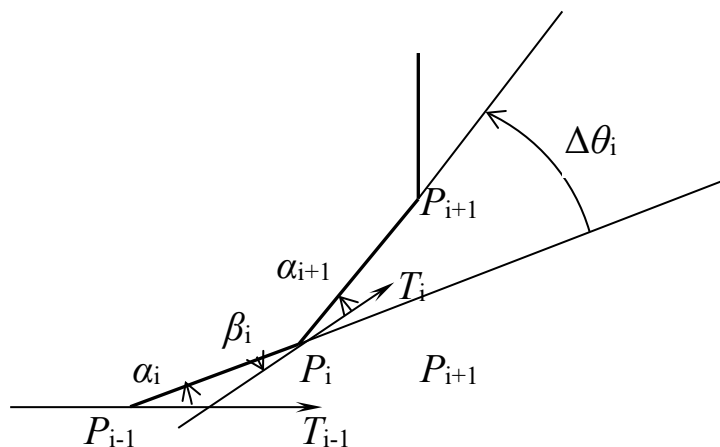
给定平面点列  $P_0, P_1, \dots, P_n$  及端点处的切向  $T_0, T_n$ , 计算节点处的切向  $T_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n-1$

由  $T_0, T_n$  已知

$\rightarrow \alpha_1, \beta_n$  已知

欲求  $T_i$ ,

须求  $\alpha_i, \beta_i$



## ● 切向算法 1(金 1981)

基本原则：每段双圆弧尽量接近一个圆

$$\sum_{i=1}^n (\alpha_i - \beta_i)^2 = \min$$

$$\beta_i + \alpha_{i+1} = \Delta\theta_i, \quad i=1,2,\dots,n-1$$

构造

$$U = \sum_{i=1}^{n-1} (\alpha_i + \alpha_{i+1} - \Delta\theta_i)^2 + (\alpha_n - \beta_n)^2$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial U}{\partial \alpha_j} = \alpha_{j-1} + \alpha_j - \Delta\theta_{j-1} + \alpha_j + \alpha_{j+1} - \Delta\theta_j = 0$$

化简，可得

$$\alpha_{j-1} + 2\alpha_j + \alpha_{j+1} = \Delta\theta_{j-1} + \Delta\theta_j, \quad j=2,3,\dots,n-1$$

$$\alpha_{n-1} + 2\alpha_n = \Delta\theta_{n-1} + \beta_n$$

写成矩阵形式

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & & & \\ 1 & 2 & 1 & & & \\ & 1 & 2 & 1 & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 1 & 2 & 1 \\ & & & & & 1 & 2 & 1 \\ & & & & & & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta\theta_1 + \Delta\theta_2 - \alpha_1 \\ \Delta\theta_2 + \Delta\theta_3 \\ \vdots \\ \Delta\theta_{n-2} + \Delta\theta_{n-1} \\ \Delta\theta_{n-1} + \beta_n \end{pmatrix}$$

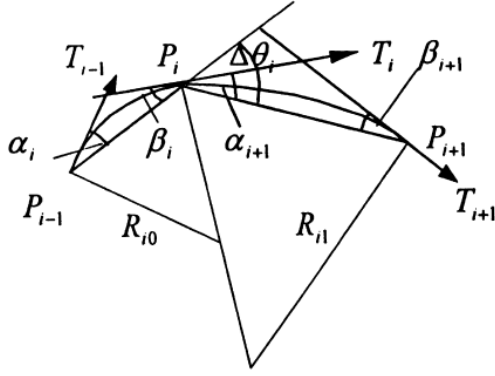
## ● 切向算法 2

基本原理：插值曲线能量最小，即  $\int k^2 ds = \min$

困难：圆弧样条能量与型值点切向之间存在非线性关系，不易直接求解。

解决方法：两点间的双圆弧样条能量用插值大圆弧能量代替，

对角度做线性化处理，得到二次能量方程。



记号同双圆弧样条插值一节。

过每一点  $P_i$  和该点切向  $T_i$  分别构造圆弧  $C_{i0}$ ， $C_{i1}$  插值点  $P_{i-1}$ ， $P_{i+1}$

则圆弧  $C_{i0}$ ， $C_{i1}$  的能量和为  $E_i = \frac{2\beta_i}{R_{i0}} + \frac{2\alpha_{i+1}}{R_{i1}}$

又由于  $R_{i0} = \frac{\|P_i - P_{i-1}\|}{2\sin\beta_i}$ ， $R_{i1} = \frac{\|P_{i+1} - P_i\|}{2\sin\alpha_{i+1}}$

得到  $E_i = 4 \left( \frac{\beta_i \sin \beta_i}{\|P_i - P_{i-1}\|} + \frac{\alpha_{i+1} \sin \alpha_{i+1}}{\|P_{i+1} - P_i\|} \right)$

圆弧段总能量  $E_{arc} = \sum_{i=1}^{n-1} E_i$

插值圆弧的曲率变化  $E_{crv} = \sum_{i=1}^n \frac{(\sin \alpha_i - \sin \beta_i)^2}{\|P_i - P_{i-1}\|}$

圆弧样条总能量最小：  $E = E_{arc} + \lambda E_{crv} = \min$

其中  $\lambda$  为经验参数。

目标函数简化后，可得：

$$U = \sum_{i=1}^{n-1} \left( \frac{\beta_i^2}{l_i} + \frac{\alpha_{i+1}^2}{l_{i+1}} \right) + \lambda \sum_{i=1}^n \frac{(\alpha_i - \beta_i)^2}{l_i}$$

由  $\beta_i = \Delta\theta_i - \alpha_{i+1}$ ，并由  $\frac{\partial U}{\partial \alpha_i} = 0$ ，可得

$$\frac{\lambda}{l_{i-1}} \alpha_{i-1} + \left( \frac{\lambda+1}{l_{i-1}} + \frac{\lambda+1}{l_i} \right) \alpha_i + \frac{\lambda}{l_i} \alpha_{i+1} = \frac{\lambda+1}{l_{i-1}} \Delta\theta_{i-1} + \frac{\lambda}{l_i} \Delta\theta_i, \quad i = 2, \dots, n-1$$

$$\frac{\lambda}{l_{n-1}}\alpha_{n-1} + \left(\frac{\lambda+1}{l_{n-1}} + \frac{\lambda+1}{l_n}\right)\alpha_n = \frac{\lambda+1}{l_{n-1}}\Delta\theta_{n-1} + \frac{\lambda}{l_n}\beta_n, \quad i=n$$

解线性方程组，可得型值点处切向。

## §2. 圆锥样条曲线

### 1. 相关概念

圆弧样条  $G^1$  连续

局部凸圆锥样条  $G^2$  连续

圆锥样条表示：分段二次有理 Bézier 曲线

$$\mathbf{r}(t) = \frac{P_0(1-t)^2 + 2P_1\omega t(1-t) + P_2t^2}{(1-t)^2 + 2\omega t(1-t) + t^2}$$

$$k(0) = \frac{1}{2} \frac{\|(P_1 - P_0) \times (P_2 - P_1)\|}{\omega^2 \|P_1 - P_0\|^3} = \frac{A}{\omega^2 l_0^3}$$

$$k(1) = \frac{1}{2} \frac{\|(P_1 - P_0) \times (P_2 - P_1)\|}{\omega^2 \|P_2 - P_1\|^3} = \frac{A}{\omega^2 l_1^3}$$

$$\frac{k(0)}{k(1)} = \frac{\|P_2 - P_1\|^3}{\|P_1 - P_0\|^3} = \frac{l_1^3}{l_0^3}$$

### 2. $G^2$ 连续圆锥样条插值

已知两点  $P_0, P_4$  及该两点处的切向，两切向交点  $d$ ， $P_0$  与  $P_4$

处的曲率  $k_0, k_2$ ，另一切线  $T$

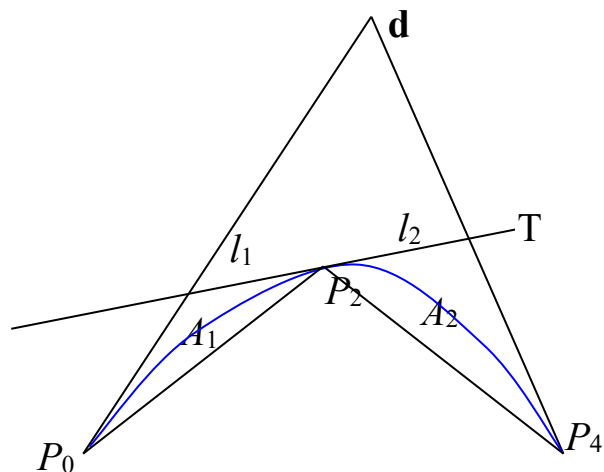
构造  $G^2$  连续圆锥样条

$$\mathbf{r}_1(t) = \frac{P_0(1-t)^2 + 2P_1\omega_1 t(1-t) + P_2t^2}{(1-t)^2 + 2\omega_1 t(1-t) + t^2}$$

$$\mathbf{r}_2(t) = \frac{P_2(1-t)^2 + 2P_3\omega_2 t(1-t) + P_4t^2}{(1-t)^2 + 2\omega_2 t(1-t) + t^2}$$

即：求出  $P_2, \omega_1$  与  $\omega_2$





连接点处曲率连续:  $\frac{A_1}{\omega_1^2 l_1^3} = \frac{A_2}{\omega_2^2 l_2^3}$

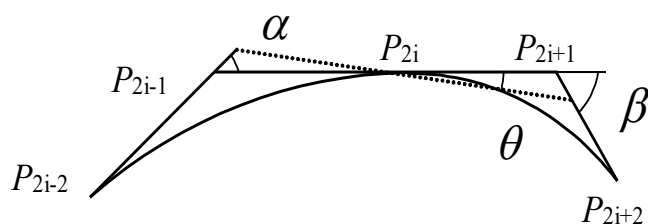
求连接点:  $\frac{l_0^3}{l_3^3} \frac{k_0}{k_2} = \frac{l_1^3}{l_2^3}$ , 由  $l_1:l_2$  可求连接点

求权因子:  $k_0 = \frac{A_1}{\omega_1^2 l_0^3}$ ,  $k_2 = \frac{A_2}{\omega_2^2 l_3^3}$

### 3. 由 $G^1$ 圆锥样条构造 $G^2$ 连续圆锥样条

$G^1$  圆锥样条包括: 圆弧样条, 二次 Bézier 样条, 等

$G^1$  圆锥样条特点: 容易构造



将  $G^1$  圆锥样条表示成二次有理 Bézier 样条, 连接点为型值点调整二次有理 Bézier 曲线中间控制顶点和权因子, 可达到  $G^2$  连续并保持插值性质

记两段  $G^1$  连续二次有理 Bézier 曲线为

$$R_i(t) = \frac{P_{2i-2}B_{0,2}(t) + P_{2i-1}w_{2i-1}B_{1,2}(t) + P_{2i}B_{2,2}(t)}{B_{0,2}(t) + w_{2i-1}B_{1,2}(t) + B_{2,2}(t)}$$

$$R_{i+1}(t) = \frac{P_{2i}B_{0,2}(t) + P_{2i+1}w_{2i+1}B_{1,2}(t) + P_{2i+2}B_{2,2}(t)}{B_{0,2}(t) + w_{2i+1}B_{1,2}(t) + B_{2,2}(t)}$$

将连线  $P_{2i-1}P_{2i+1}$  绕点  $P_{2i}$  旋转角度  $\theta$ ,

在边  $P_{2i-2}P_{2i-1}$  或其延长线上得到新控制顶点  $\bar{P}_{2i-1}$ ,

在边  $P_{2i+1}P_{2i+2}$  或其延长线上得到新控制顶点  $\bar{P}_{2i+1}$

令

$$\bar{P}_{2i-1} - P_{2i-2} = \lambda(P_{2i-1} - P_{2i-2})$$

$$P_{2i+2} - \bar{P}_{2i+1} = \mu(P_{2i+2} - P_{2i+1})$$

由三角形  $\Delta P_{2i-1}P_{2i}\bar{P}_{2i-1}$ , 可得

$$\frac{\|P_{2i-1} - P_{2i-2}\|(\lambda - 1)}{\sin \theta} = \frac{\|P_{2i} - P_{2i-1}\|}{\sin(\alpha + \theta)}$$

由三角形  $\Delta P_{2i}\bar{P}_{2i+1}P_{2i+1}$ , 可得

$$\frac{\|P_{2i+1} - P_{2i}\|}{\sin(\beta - \theta)} = \frac{\|P_{2i+2} - P_{2i+1}\|(\mu - 1)}{\sin \theta}$$

从上述二式中解出

$$\lambda = 1 + \frac{\|P_{2i} - P_{2i-1}\|}{\|P_{2i-1} - P_{2i-2}\|} \frac{\sin \theta}{\sin(\theta + \alpha)}$$

$$\mu = 1 - \frac{\|P_{2i+1} - P_{2i}\|}{\|P_{2i+2} - P_{2i+1}\|} \frac{\sin \theta}{\sin(\beta - \theta)}$$

改变控制顶点后, 曲线  $R_i(t)$  在两端点的曲率发生改变

$$\bar{k}_i(0) = \frac{1}{\lambda^2} k_i(0); \quad \bar{k}_i(1) = \frac{\lambda \sin^3(\alpha + \theta)}{\sin^3 \alpha} k_i(1)$$

修改权因子  $w_{2i-1}$  使得  $R_i(t)$  左端曲率等于指定值

$$\frac{1}{\lambda^2} k_i(0) \frac{w_{2i-1}^2}{\bar{w}_{2i-1}^2} = k_{i-1}(1)$$

$$\text{求出 } \bar{w}_{2i-1} = \sqrt{\frac{k_i(0)}{k_{i-1}(1)} \frac{w_{2i-1}}{\lambda}},$$

$$R_i(t) \text{ 右端曲率更新为 } \frac{\lambda \sin^3(\alpha + \theta)}{\sin^3 \alpha} k_i(1) \frac{w_{2i-1}^2}{\bar{w}_{2i-1}^2}$$

$$\text{同理, 修改权因子 } \bar{w}_{2i+1} = \frac{w_{2i+1}}{\mu}$$

$$\text{使得 } R_{i+1}(t) \text{ 两端曲率分别等于 } \frac{\mu^3 \sin^3(\beta - \theta)}{\sin^3 \beta} k_{i+1}(0) \text{ 和 } k_{i+1}(1)$$

为使曲线在连接点处曲率连续, 需满足

$$\frac{\lambda \sin^3(\alpha + \theta)}{\sin^3 \alpha} k_i(1) \frac{w_{2i-1}^2}{\bar{w}_{2i-1}^2} = \frac{\mu^3 \sin^3(\beta - \theta)}{\sin^3 \beta} k_{i+1}(0)$$

$$\text{将 } \frac{1}{\lambda^2} k_i(0) \frac{w_{2i-1}^2}{\bar{w}_{2i-1}^2} = k_{i-1}(1) \text{ 代入, 可得}$$

$$\lambda \sin(\alpha + \theta) = \mu \sin(\beta - \theta) \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \left( \frac{k_{i+1}(0) k_i(0)}{k_{i-1}(1) k_i(1)} \right)^{\frac{1}{3}}$$

进一步化简, 得到

$$\sin(\alpha + \theta) - s_2 \sin(\beta - \theta) + (s_0 + s_1 s_2) \sin \theta = 0$$

$$\text{其中 } s_0 = \frac{\|P_{2i} - P_{2i-1}\|}{\|P_{2i-1} - P_{2i-2}\|}, \quad s_1 = \frac{\|P_{2i+1} - P_{2i}\|}{\|P_{2i+2} - P_{2i+1}\|}, \quad s_2 = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \left( \frac{k_{i+1}(0) k_i(0)}{k_{i-1}(1) k_i(1)} \right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\text{令 } A = \cos \alpha + s_2 \cos \beta + s_0 + s_1 s_2, \quad B = \sin \alpha - s_2 \sin \beta$$

$$\text{得到简化方程 } A \sin \theta + B \cos \theta = 0, \quad \text{从而有 } \theta = \arctan \frac{-A}{B}。$$

### §3. 平面螺线样条插值

#### 1. 基本概念

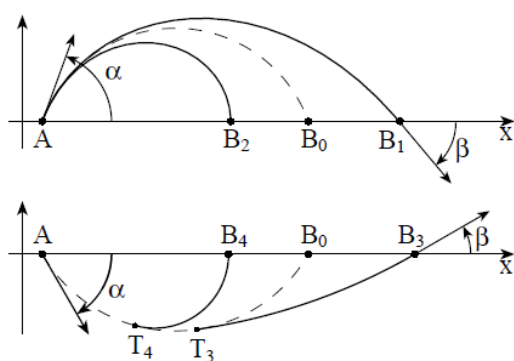
**螺线(spiral):** 曲率单调曲线。

短程螺线(short spiral): 连接 A,B 的螺线上任意一点切向与向量 AB 的夹角小于  $\pi$ 。

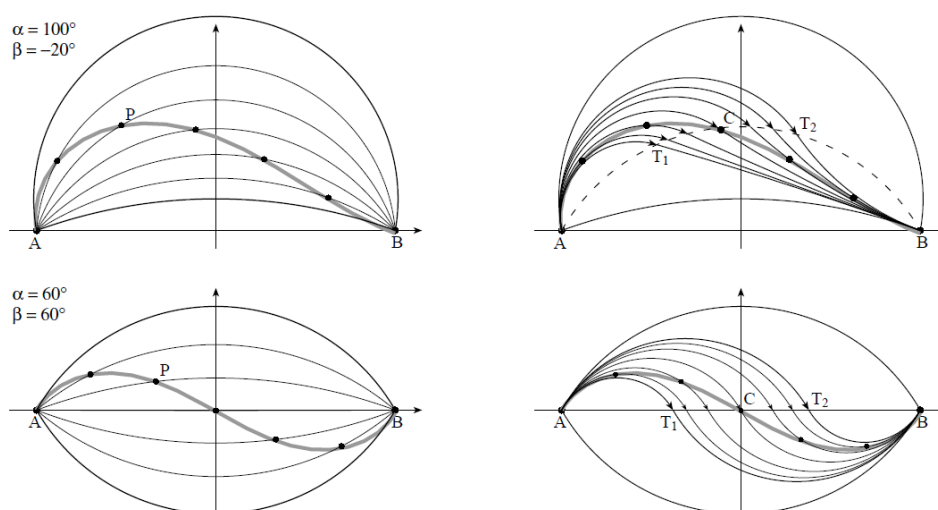
## 2. Vogt 定理

**Vogt 定理:** 设 A,B 是一段螺线的两个端点, 螺线曲率由 A 到 B 单调增。记螺线 A 点切向与弦 AB 的夹角为  $\alpha$ , 螺线 B 点切向与弦 AB 的夹角为  $\beta$ , 则有:

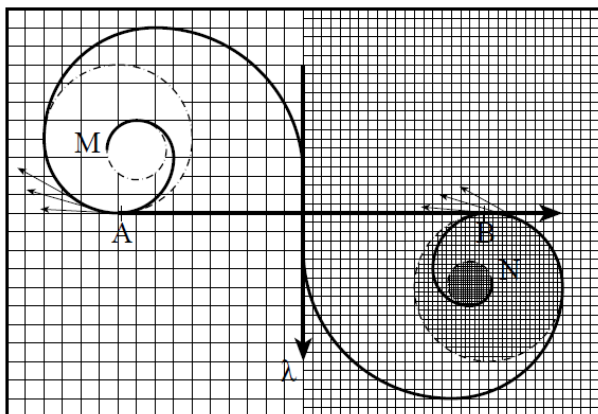
$$\text{sign}(\alpha + \beta) = \text{sign}(k_2 - k_1)。$$



**定理:** 短程螺线位于由插值两端点和任一端切向的圆弧构成的区域中。



**定理:** 若螺线两点处曲率同号且  $|k(s_1)| < |k(s_2)|$ , 则  $s_2$  处曲率圆包含在  $s_1$  处曲率圆之内。



### 3. Euler 螺线插值

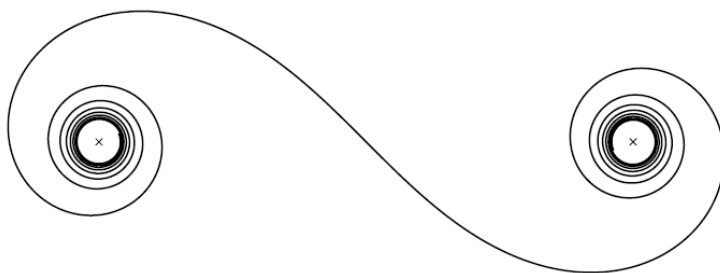
#### ● Euler 螺线的方程

Euler 螺线=Cornu 螺线=clothoid

给定端点  $(x_0, y_0, \theta_0)$  和  $(x_2, y_2, \theta_2)$ ，找一段曲率变化均匀曲线插值端点和端切向，使得

$$E[k] = \int_0^L k_s^2 ds = \min$$

得到 Euler-Lagrange 方程：  $k_{ss} = 0$ ，从而  $k(s) = a_0 s + b_0$ 。



Euler 螺线

#### ● Euler 螺线的表示

设  $k(s) = \frac{1}{a^2} s$ ，其中  $a$  为常数， $s$  表示弧长参数

积分可得切向角：  $\theta(s) = \frac{s^2}{2a^2}$

曲线的复数表示：  $\int_0^s e^{i\theta(\xi)} d\xi = \int_0^s e^{\frac{i\xi^2}{2a^2}} d\xi$

Fresnel 积分表示： 设  $F(s) = C(s) + iS(s)$ ，其中

$$C(s) = \int_0^s \cos\left(\frac{\pi}{2}\xi^2\right)d\xi, \quad S(s) = \int_0^s \sin\left(\frac{\pi}{2}\xi^2\right)d\xi$$

级数展开：

$$C(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n}}{(2n)!(4n+1)} s^{4n+1}, \quad S(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n+1}}{(2n+1)!(4n+3)} s^{4n+3}$$

### ● Euler 螺线插值

**命题 1:** 插值起始点  $F_0 = x_0 + iy_0$ , 初始切向角  $\theta_0$ , 初始曲率  $k_0$ ,

曲率导数为  $\gamma$  的 Euler 螺线可表示为：

(a) 当  $\gamma = 0$ ,  $k_0 = 0$

$$F(s) = F_0 + e^{i\theta_0}s$$

(b) 当  $\gamma = 0$ ,  $k_0 \neq 0$

$$F(s) = F_0 + \frac{e^{i\theta_0}}{k_0} (\sin k_0 s + i(1 - \cos k_0 s))$$

(c) 当  $\gamma \neq 0$

$$F(s) = F_0 + \sqrt{\frac{\pi}{\gamma}} e^{i\left(\theta_0 + \frac{k_0^2}{2\gamma}\right)} \times \left[ \text{sign}(\gamma) \left( C\left(\frac{k_0 + \gamma s}{\sqrt{\pi|\gamma|}}\right) - C\left(\frac{k_0}{\sqrt{\pi|\gamma|}}\right) \right) + i \left( S\left(\frac{k_0 + \gamma s}{\sqrt{\pi|\gamma|}}\right) - S\left(\frac{k_0}{\sqrt{\pi|\gamma|}}\right) \right) \right]$$

证明见 International Journal of Computer Vision 54(1/2/3), 159–182, 2003。

**命题 2:** 插值端点  $F_0 = x_0 + iy_0$ ,  $F_2 = x_2 + iy_2$  初始切向角  $\theta_0$ ,  $\theta_2$  的

Euler 螺线段可由参数  $(x_0, y_0, \theta_0, k_0, \gamma, L)$  确定。设  $F_2 - F_0 = L_0 e^{i\psi}$ ,

若  $\psi = \frac{\theta_0 + \theta_2}{2}$ , 则插值螺线是一段圆弧, 此时有  $\gamma = 0$ ,

$$k_0 = k_2 = \frac{2}{L_0} \sin\left(\frac{\theta_0 - \theta_2}{2}\right), \quad L = \frac{L_0(\theta_0 + \theta_2)}{4 \sin\left(\frac{\theta_0 + \theta_2}{2}\right)}。$$

若  $\psi \neq \frac{\theta_0 + \theta_2}{2}$ , 有  $\gamma = \frac{k_2^2 - k_0^2}{2(\theta_2 - \theta_0)}$ ,  $L = \frac{2(\theta_2 - \theta_0)}{k_2 + k_0}$ 。数值迭代求解参数。

**命题 3:** Euler 曲线插值具有可延展性。若  $F_0 = x_0 + iy_0$ ,  $F_1 = x_1 + iy_1$  和  $F_2 = x_2 + iy_2$  是某 Euler 螺线上的点, 且  $\theta_0, \theta_1, \theta_2$  分别是三点处的切向角, 则 Euler 螺线插值可分段进行。

### ● Euler 圆弧样条插值

参考文献: Euler arc splines for curve completion, [Computers & Graphics](#) 36 (2012) 642–650

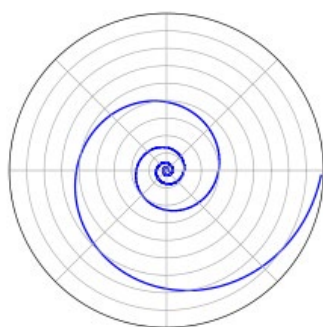
## 4. 对数螺线插值



### ● 极坐标表示

$$r(t) = r_0 e^{\lambda t}, \quad \lambda = \cot \varphi$$

其中  $\varphi$  是连接坐标原点到对数螺线上点的连线与曲线在该点切向的夹角, 该夹角为一常数。



- 参数曲线表示

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = r_0 e^{\lambda t} \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

- 微分方程

$$X'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

- 离散对数螺线

由对数螺线的曲率公式/曲率半径公式

$$k(t) = \frac{1}{r_0 \sqrt{1 + \lambda^2} e^{\lambda t}} \text{ 或 } R(t) = \frac{1}{k(t)} = r_0 \sqrt{1 + \lambda^2} e^{\lambda t}$$

取参数步长  $\Delta t$ ，得到离散曲率半径

$$R_i = R_0 e^{\lambda i \Delta t}$$

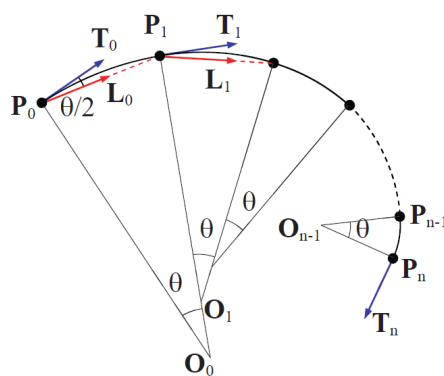
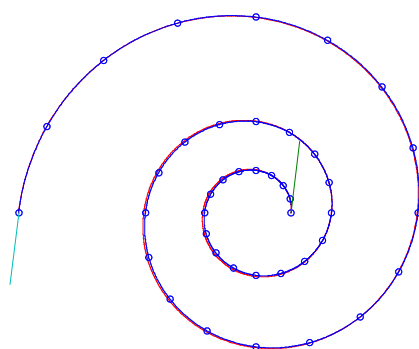
由上式可得

$$\frac{R_{i+1}}{R_i} = e^{\lambda \Delta t} = \rho$$

若已知参数  $\rho$ ，则可得

$$\lambda = \frac{\ln \rho}{\Delta t}$$

对数圆弧样条：由角度为  $\theta$ ，半径为  $R_i$  且满足  $R_{i+1} = \rho R_i$  的圆弧段光滑拼接而成。





● 对数螺线  $G^1$  插值

$$\begin{aligned} P_i &= P_0 + l_0 L_0 + l_1 L_1 + \cdots + l_{i-1} L_{i-1} \\ &= P_0 + (l_0 I + \rho l_0 M_\theta + \cdots + \rho^{i-1} l_0 M_\theta^{i-1}) L_0 \\ &= P_0 + l_0 (I - \rho M_\theta)^{-1} (I - \rho^i M_\theta^i) L_0 \end{aligned}$$

$$\text{其中 } M_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

若要求离散对数螺线插值两端点  $P_A$ ,  $P_B$  及端点切向量  $T_A$ ,  $T_B$ , 计算一条插值螺线的切向转角  $\phi$ , 给定对数圆弧样条的圆弧段数  $n$  可计算得到每段圆弧的圆心角  $\theta = \phi/n$ , 得到如下插值方程

$$\mathbf{P}_B - \mathbf{P}_A = l_0 (I - \rho M_\theta)^{-1} (I - \rho^n M_\theta^n) \mathbf{L}_0$$

$$\text{其中 } l_0 = \|P_1 - P_0\|, \quad \rho = \frac{r_{i+1}}{r_i}。$$

以上向量方程可转化成如下代数方程

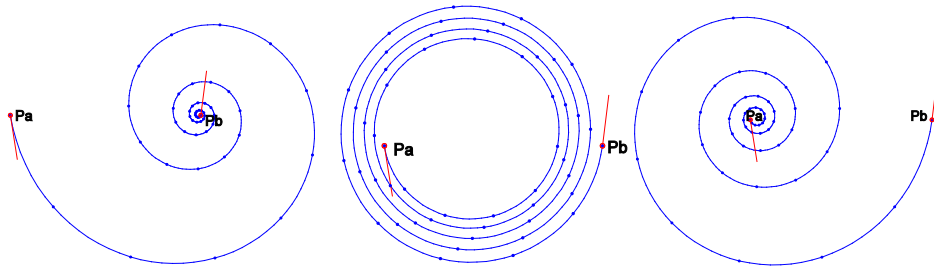
$$f(\rho) = a\rho^{n+1} + b\rho^n + c\rho + d = 0$$

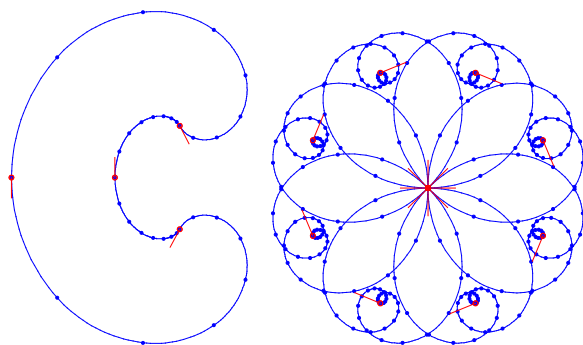
$$l_0 = \frac{P_L \wedge (M_\theta P_L)}{(I - \rho^n M_\theta^n) L_0 \wedge (M_\theta P_L)}$$

$$\text{其中 } a = (M_\phi L_0) \wedge (M_\theta P_L), \quad b = -(M_\phi L_0) \wedge P_L, \quad c = -L_0 \wedge (M_\theta P_L),$$

$$d = L_0 \wedge P_L$$

代数方程可以通过数值方法求解。





参考文献: X. Yang, [Geometric Hermite interpolation by logarithmic arc splines](#), CAGD, 2014.

#### §4. 平面点列光顺

##### 1. 最优双圆弧样条插值

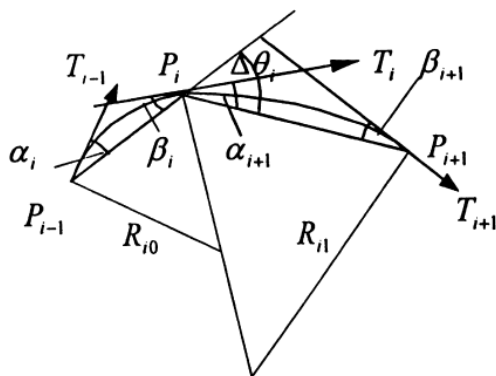
**问题:** 给定平面点列  $P_0, P_1, \dots, P_n$ , 以及两端点处的切向量  $T_0, T_n$ ,

求其余各点处的切向量  $T_i, i = 1, 2, \dots, n-1$ 。

**基本原理:** 插值曲线能量最小, 即  $\int_s k^2 ds = \min$

**困难:** 圆弧样条能量与型值点切向之间存在非线性关系, 不易直接求解。

**解决方法:** 两点间的双圆弧样条能量用插值大圆弧能量代替, 对角度做线性化处理, 得到二次能量方程。



记号同双圆弧样条插值一节。

过每一点  $P_i$  和该点切向  $T_i$  分别构造圆弧  $C_{i0}, C_{i1}$  插值点  $P_{i-1}, P_{i+1}$

则圆弧  $C_{i0}$ ,  $C_{i1}$  的能量  $E_i = 4 \left( \frac{\beta_i \sin \beta_i}{\|P_i - P_{i-1}\|} + \frac{\alpha_{i+1} \sin \alpha_{i+1}}{\|P_{i+1} - P_i\|} \right)$

圆弧段总能量  $E_{arc} = \sum_{i=1}^{n-1} E_i$

插值圆弧的曲率变化  $E_{crv} = \sum_{i=1}^n \frac{(\sin \alpha_i - \sin \beta_i)^2}{\|P_i - P_{i-1}\|}$

圆弧样条总能量最小:  $E = E_{arc} + \lambda E_{crv} = \min$

其中  $\lambda$  为经验参数。

目标函数简化后, 可得:

$$U = \sum_{i=1}^{n-1} \left( \frac{\beta_i^2}{l_i} + \frac{\alpha_{i+1}^2}{l_{i+1}} \right) + \lambda \sum_{i=1}^n \frac{(\alpha_i - \beta_i)^2}{l_i}$$

由  $\beta_i = \Delta\theta_i - \alpha_{i+1}$ , 并由  $\frac{\partial U}{\partial \alpha_i} = 0$ , 可得

$$\frac{\lambda}{l_{i-1}} \alpha_{i-1} + \left( \frac{\lambda+1}{l_{i-1}} + \frac{\lambda+1}{l_i} \right) \alpha_i + \frac{\lambda}{l_i} \alpha_{i+1} = \frac{\lambda+1}{l_{i-1}} \Delta\theta_{i-1} + \frac{\lambda}{l_i} \Delta\theta_i, \quad i = 2, \dots, n-1$$

$$\frac{\lambda}{l_{n-1}} \alpha_{n-1} + \left( \frac{\lambda+1}{l_{n-1}} + \frac{\lambda+1}{l_n} \right) \alpha_n = \frac{\lambda+1}{l_{n-1}} \Delta\theta_{n-1} + \frac{\lambda}{l_n} \beta_n, \quad i = n$$

解线性方程组, 可得型值点处切向。

## 2. 平面点列光顺算法

离散曲率低通滤波:  $k'_i = k_i + \mu \Delta k_i$

其中  $\Delta k_i = \frac{1}{2}(k_{i-1} + k_{i+1} - 2k_i)$ ,  $0 < \mu \leq 0.5$

离散曲率估计:

$$k_i = \frac{(\alpha_{i+1} + \beta_{i+1})\alpha_{i+1}}{l_{i+1}\beta_{i+1}} \quad \text{局部凸}$$

$$k_i = \frac{2\alpha_{i+1}}{l_{i+1}} \quad \text{其它}$$

令

$$\omega_{i0} = \frac{(\alpha_{i-1} + \beta_{i-1})\beta_i}{(\alpha_i + \beta_i)\beta_{i-1}}, \quad \omega_{i1} = \frac{(\alpha_{i+1} + \beta_{i+1})\beta_i}{(\alpha_i + \beta_i)\beta_{i+1}} \quad \text{局部凸}$$

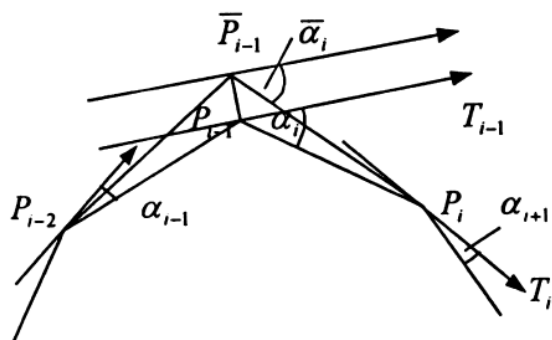
$$\omega_{i0} = \frac{l_i}{l_{i-1}}, \quad \omega_{i1} = \frac{l_i}{l_{i+1}} \quad \text{其它}$$

弦切角滤波:

$$\bar{\alpha}_i = \alpha_i + (\omega_{i0}\alpha_{i-1} + \omega_{i1}\alpha_{i+1} - 2\alpha_i) \frac{\mu}{2}$$

假定切向  $T_i$  不动, 反求  $P_i$  新位置

$$dH_0 = -l_0(\cos \alpha_i \tan \bar{\alpha}_i - \sin \alpha_i)$$



容差约束:

$$(A + dH \cdot V)^2 \leq \tau^2, \quad \text{其中 } A = P_{i-1}^{(m-1)} - P_{i-1}^{(0)}$$

$$dH_{1,2} = -A \cdot V \mp \sqrt{(A \cdot V)^2 - A^2 + \tau^2}$$

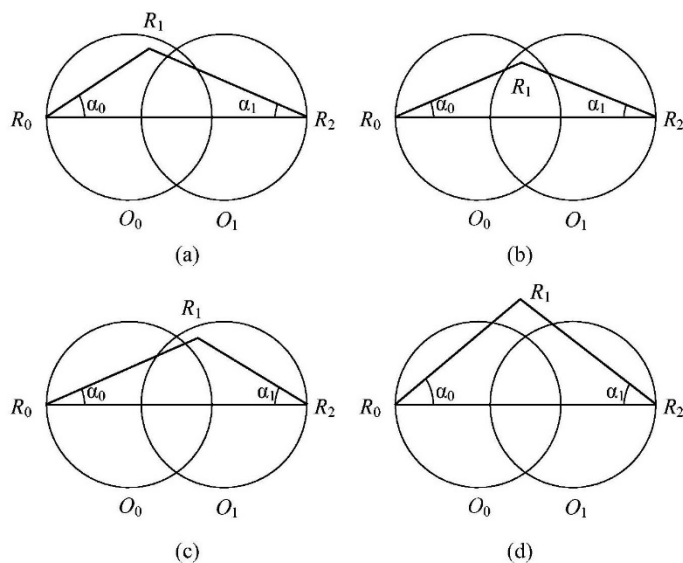
$$dH = \begin{cases} dH_1 & \text{if } (dH_0 < dH_1) \\ dH_2 & \text{if } (dH_0 > dH_2) \\ dH_0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\text{位置调整: } P_{i-1}^{(m)} = P_{i-1}^{(m-1)} + dH \cdot V$$

## §5. 圆锥线段的光顺性

### 1. 圆锥曲线段的曲率单调性

$$R(t) = \frac{R_0 B_{0,2}(t) + R_1 w B_{1,2}(t) + R_2 B_{2,2}(t)}{B_{0,2}(t) + w B_{1,2}(t) + B_{2,2}(t)}, \quad t \in [0,1]$$



定理： 设  $r = \frac{\|R_2 - R_0\|}{4w^2}$ ，  $U = \frac{R_2 - R_0}{\|R_2 - R_0\|}$ ， 分别以  $O_0 = R_0 + rU$  和

$O_1 = R_2 - rU$  为圆心， 以  $r$  为半径作圆， 则有：

当  $R_1$  落在两圆的外面时， 曲线曲率有一个极大值。

当  $R_1$  同时落在两圆里面时， 曲线曲率有一个极小值。

当  $R_1$  位于一个圆内但位于另一圆外， 又  $w^2 \geq 1/2$ ， 则曲线曲率单调。

当  $R_1$  位于一个圆内但位于另一圆外， 又  $w^2 < 1/2$ ， 则曲线曲率存在极大值和极小值。

证明见 CAGD 2000;17(6):457–483.

圆锥样条光顺算法见 CAD 36 (2004) 461–472。

思考题： 试给出 Bézier 曲线曲率单调的充分和必要条件。

参考： Computer Aided Geometric Design 15 (1998) 879-891,

Computer Aided Geometric Design 23 (2006) 573–581.

k-Curves: Interpolation at Local Maximum Curvature, siggraph 2017.

## §6. 样条曲线光顺

### (a) 基于基样条插值的曲线光顺

给定原始型值点  $P_i(x_i, y_i)$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, n$  和边界条件  $y'_0, y'_n$

按照基样条方法构造插值函数

$$S(x) = \sum_{i=0}^n y_i \varphi_i(x) + y'_0 \varphi_{n+1}(x) + y'_n \varphi_{n+2}(x)$$

计算  $S(x)$  在每个节点处的二阶导数  $M_i = S''(x_i)$ , 由  $M_i$  得符号变化情况挑选和修正型值点位置。

挑选坏点的另一种方法: 圆率法, 由相邻三点作圆饼通过圆曲率符号的变化挑选待修正点。

### (b) 三次样条光顺的回弹法[董光昌]

手工放样“两借借, 自然放”的数学模拟。通过新老两组型值点交替固定和回弹, 以达到光顺的目的。

对于给定的分割

$$\Delta: a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

及型值点  $P_i(x_i, y_i)$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, n$ , 作插值三次样条函数  $S(x)$ ;

取相邻两个节点的中点

$$\xi_i = \frac{1}{2}(x_i + x_{i+1}), \quad i = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

记  $\xi_{-1} = a$ ,  $\xi_n = b$ , 取  $S(\xi_i)$

对于分割

$$\Delta^*: \quad a = \xi_{-1} < \xi_0 < \cdots < \xi_n = b$$

及型值点  $Q_i(x_i, S(\xi_i))$ ,  $i = -1, 0, 1, \dots, n$

作插值样条  $S^*(x)$ , 此为一次回弹结果

重复上述步骤, 直到前后曲线在节点处函数值之差小于给定阈值。

### (c) 迭代磨光法[齐东旭 等 1975]

**问题:** 给定初始型值点列  $P_i(x_i, y_i)$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, n$

构造逼近已知点列的光顺曲线。

**动机:** 插值曲线具有较高的逼近阶, 例如: 三次插值样条逼近阶为  $O(h^4)$

逼近样条, 如 B 样条曲线, 具有变差缩减性质, 但不插值型值点

结合二种样条的特点构造具有较好光顺性并具有较好逼近效果的曲线。

**算法:**

1. 以初始型值点为控制顶点构造均匀 B 样条曲线  $S(x)$
2. 计算  $\Delta y_i = y_i - S(x_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n-1$
3. 修改 B 样条曲线控制顶点坐标  $y_i \leftarrow y_i + \Delta y_i$
4. 迭代以上步骤

### (d) B 样条曲线光顺

**B 样条曲线光顺准则:** 一条 B 样条曲线是光顺的通常指该曲线曲率连续, 曲率变号次数少, 含有较少曲率极值。

B 样条曲线的光顺可以通过提高节点处的连续阶达到。

对于 B 样条曲线  $P(t) = \sum_{i=0}^n P_i N_{i,k}(t)$

计算曲线曲率在节点  $t_j$  处的左右导数  $k'(t_j -)$  和  $k'(t_j +)$

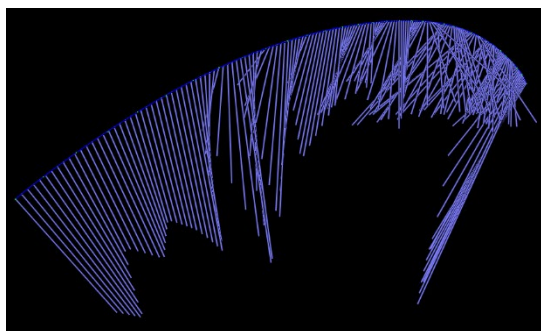
如果  $|k'(t_j +) - k'(t_j -)| > \eta$ ，去除原 B 样条曲线节点  $t_j$  并得到相应

控制多边形，最后再次对去节点后的 B 样条曲线进行节点插

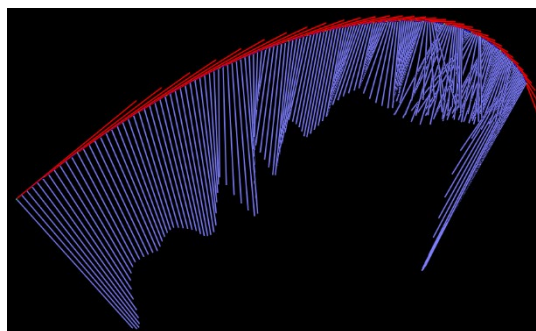
入，得到与初始曲线具有一致节点向量的光顺 B 样条曲线。

(e) 矩阵权 NURBS 曲线光顺

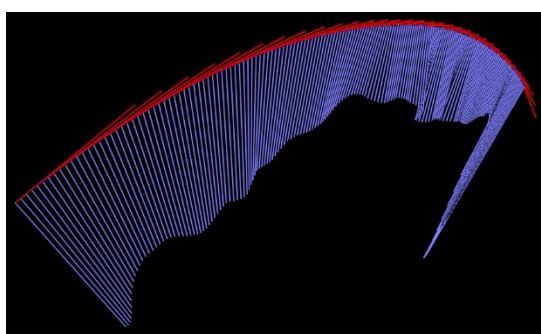
Yang, X.(2018) [Fitting and fairing Hermite data by matrix weighted NURBS curves](#). *Computer-Aided Design*, 102: 22-32.



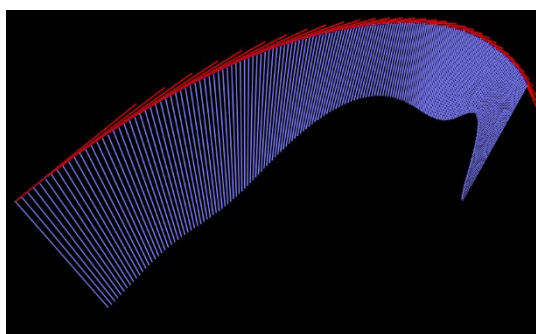
3 次 B 样条拟合



初始矩阵权 NURBS 曲线



迭代 2 次结果



迭代 20 次结果