

《计算机辅助几何设计》第九次作业

姓名：殷文良 学号：12435063

2024 年 11 月 18 日

思考题 1

1.

Algorithm 1 双 n 次Bezier曲面的de Casteljau算法

Input: $P, n, \quad u, v \in [0, 1]$

Output: $S = \sum_{j=0}^m B_{j,m}(v) \left(\sum_{i=0}^n B_{i,n}(u) P_{i,j} \right)$

```
1: for  $j = 0 : n$  do  
2:    $Q[j] = \text{deCasteljau}(P[j], n, u);$   
3: end for  
4:  $S = \text{deCasteljau}(Q, n, v);$   
5: return  $S;$ 
```

- de Casteljau算法

一共要执行的线性插值次数为

$$\frac{n(n+1)(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2}.$$

对于3维控制顶点，每次插值需要执行 $(2+1) * 3 = 9$ 次浮点运算（包括加法和乘法），因此时间复杂度为

$$\frac{9n(n+1)(n+2)}{2} = O(n^3).$$

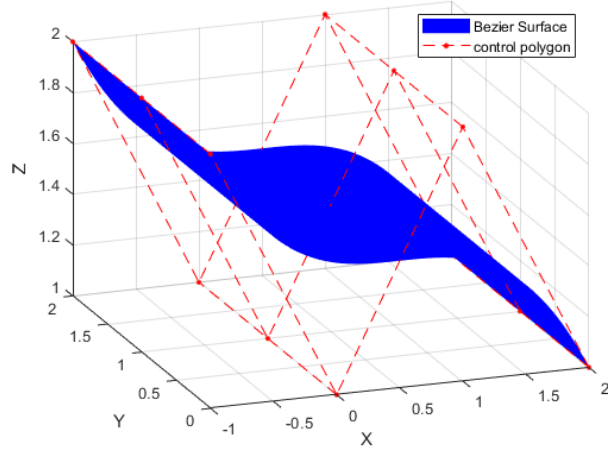


图 1: 2×3 次Bezier曲面: de Casteljau算法

- 控制曲线算法

根据Bernstein基函数递推关系式, 计算某参数处所有 n 次基函数需要执行的浮点运算次数(包括加法和乘法)为

$$n(n+1) + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(3n+1)}{2}.$$

对于3维控制顶点, 计算 $n+1$ 条控制曲线需要执行的运算次数为

$$3 * (2n+1) * (n+1).$$

最后计算 (u, v) 处的点还需执行 $\frac{n(3n+1)}{2} + 3 * (2n+1)$ 次运算。因此, 时间复杂度为

$$\frac{n(3n+1)}{2} * 2 + 3 * (2n+1) * (n+2) = O(n^2).$$

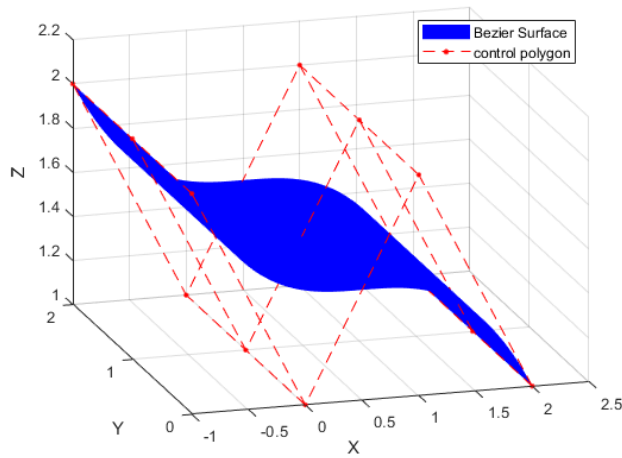


图 2: 2×3 次Bezier曲面: 控制曲线算法

2.

证明. 由双线性曲面性质可知,

$$X(u, v) = u(P_{10} - P_{00}) + v(P_{01} - P_{00}) + P_{00}.$$

再由恒等式 $\sum_{i=0}^n i B_{i,n}(t) = nt$ 以及 Bernstein 基函数的权性可得,

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n P_{ij} B_{i,m}(u) B_{j,n}(v) &= \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n X\left(\frac{i}{m}, \frac{j}{n}\right) B_{i,m}(u) B_{j,n}(v) \\ &= \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \left(\frac{i}{m}(P_{10} - P_{00}) + \frac{j}{n}(P_{01} - P_{00}) + P_{00} \right) B_{i,m}(u) B_{j,n}(v) \\ &= \sum_{j=0}^n u(P_{10} - P_{00}) B_{j,n}(v) + \sum_{i=0}^m v(P_{01} - P_{00}) B_{i,m}(u) + \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n P_{00} B_{i,m}(u) B_{j,n}(v) \\ &= u(P_{10} - P_{00}) + v(P_{01} - P_{00}) + P_{00} = X(u, v). \end{aligned}$$

QED

3.

证明. 椭球 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 的极坐标参数化为

$$\begin{cases} x &= a \sin \theta \cos \phi \\ y &= b \sin \theta \sin \phi, \quad \theta \in [0, \pi], \phi \in [0, 2\pi). \\ z &= c \cos \theta \end{cases}$$

引入两个新的参数 u, v , 定义如下:

$$\begin{cases} u &= \tan \frac{\theta}{2}, \quad u \in [0, \infty) \\ v &= \tan \frac{\phi}{2}, \quad v \in (-\infty, \infty). \end{cases}$$

于是得到椭球的有理参数化:

$$\begin{cases} x &= \frac{2au(1-v^2)}{(1+u^2)(1+v^2)} \\ y &= \frac{4buv}{(1+u^2)(1+v^2)}, \quad u \in [0, \infty), v \in (-\infty, \infty). \\ z &= \frac{c(1-u^2)}{1+u^2} \end{cases}$$

QED

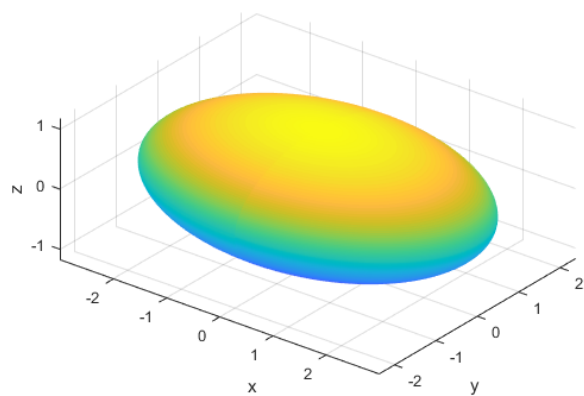


图 3: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{1} = 1$

思考题 2.

1.