

# 《计算机辅助几何设计》第九次作业

姓名：殷文良      学号：12435063

2024 年 11 月 25 日

## 思考题 1

1.

---

**Algorithm 1** 双 $n$ 次Bezier曲面的de Casteljau算法

---

**Input:**  $P, n, \quad u, v \in [0, 1]$

**Output:**  $S = \sum_{j=0}^m B_{j,m}(v) \left( \sum_{i=0}^n B_{i,n}(u) P_{i,j} \right)$

```
1: for  $j = 0 : n$  do  
2:    $Q[j] = \text{deCasteljau}(P[j][], n, u);$   
3: end for  
4:  $S = \text{deCasteljau}(Q, n, v);$   
5: return  $S;$ 
```

---

- de Casteljau算法

一共要执行的线性插值次数为

$$\frac{n(n+1)(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2}.$$

对于3维控制顶点，每次插值需要执行 $(2+1) * 3 = 9$ 次浮点运算（包括加法和乘法），因此时间复杂度为

$$\frac{9n(n+1)(n+2)}{2} = O(n^3).$$

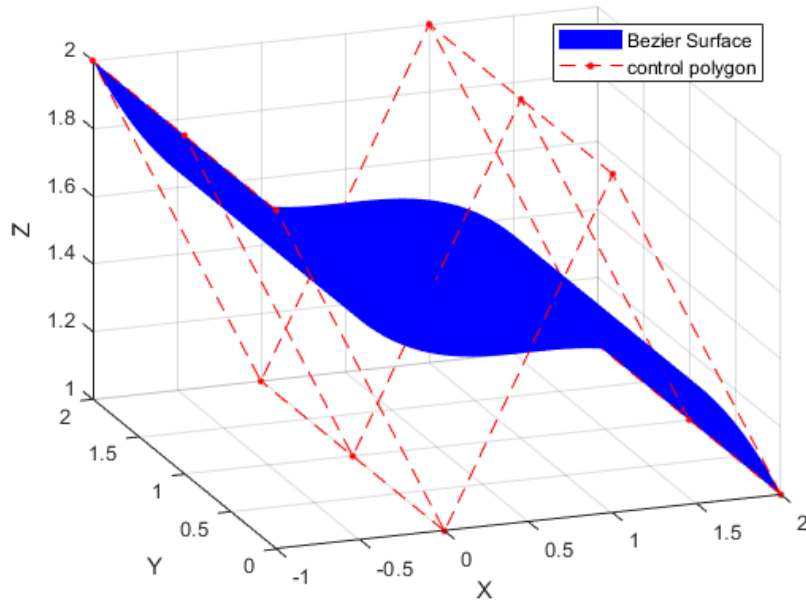


图 1:  $2 \times 3$ 次Bezier曲面: de Casteljau算法

- 控制曲线算法

根据Bernstein基函数递推关系式, 计算某参数处所有 $n$ 次基函数需要执行的浮点运算次数(包括加法和乘法)为

$$n(n+1) + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(3n+1)}{2}.$$

对于3维控制顶点, 计算 $n+1$ 条控制曲线需要执行的运算次数为

$$3 * (2n+1) * (n+1).$$

最后计算 $(u, v)$ 处的点还需执行 $\frac{n(3n+1)}{2} + 3 * (2n+1)$ 次运算。因此, 时间复杂度为

$$\frac{n(3n+1)}{2} * 2 + 3 * (2n+1) * (n+2) = O(n^2).$$

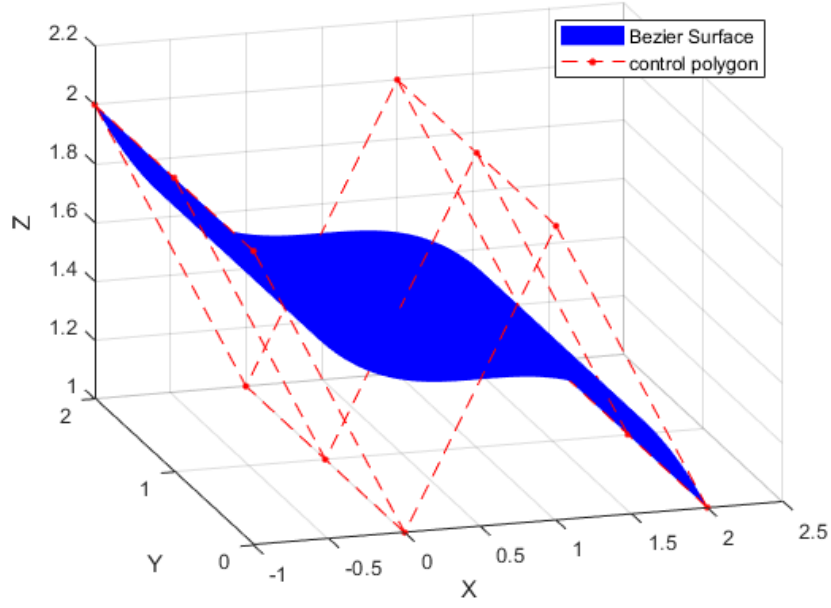


图 2:  $2 \times 3$ 次Bezier曲面: 控制曲线算法

## 2.

证明. 由双线性曲面性质可知,

$$X(u, v) = u(P_{10} - P_{00}) + v(P_{01} - P_{00}) + P_{00}.$$

再由恒等式  $\sum_{i=0}^n i B_{i,n}(t) = nt$  以及Bernstein基函数的权性可得,

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n P_{ij} B_{i,m}(u) B_{j,n}(v) &= \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n X\left(\frac{i}{m}, \frac{j}{n}\right) B_{i,m}(u) B_{j,n}(v) \\ &= \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \left( \frac{i}{m} (P_{10} - P_{00}) + \frac{j}{n} (P_{01} - P_{00}) + P_{00} \right) B_{i,m}(u) B_{j,n}(v) \\ &= \sum_{j=0}^n u (P_{10} - P_{00}) B_{j,n}(v) + \sum_{i=0}^m v (P_{01} - P_{00}) B_{i,m}(u) + \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n P_{00} B_{i,m}(u) B_{j,n}(v) \\ &= u(P_{10} - P_{00}) + v(P_{01} - P_{00}) + P_{00} = X(u, v). \end{aligned}$$

QED

## 3.

证明. 椭球  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  的极坐标参数化为

$$\begin{cases} x &= a \sin \theta \cos \phi \\ y &= b \sin \theta \sin \phi, \quad \theta \in [0, \pi], \phi \in [0, 2\pi). \\ z &= c \cos \theta \end{cases}$$

引入两个新的参数 $u, v$ ，定义如下：

$$\begin{cases} u = \tan \frac{\theta}{2}, & u \in [0, \infty) \\ v = \tan \frac{\phi}{2}, & v \in (-\infty, \infty). \end{cases}$$

于是得到椭球的有理参数化：

$$\begin{cases} x = \frac{2au(1-v^2)}{(1+u^2)(1+v^2)} \\ y = \frac{4buv}{(1+u^2)(1+v^2)} \\ z = \frac{c(1-u^2)}{1+u^2} \end{cases}, \quad u \in [0, \infty), v \in (-\infty, \infty).$$

QED

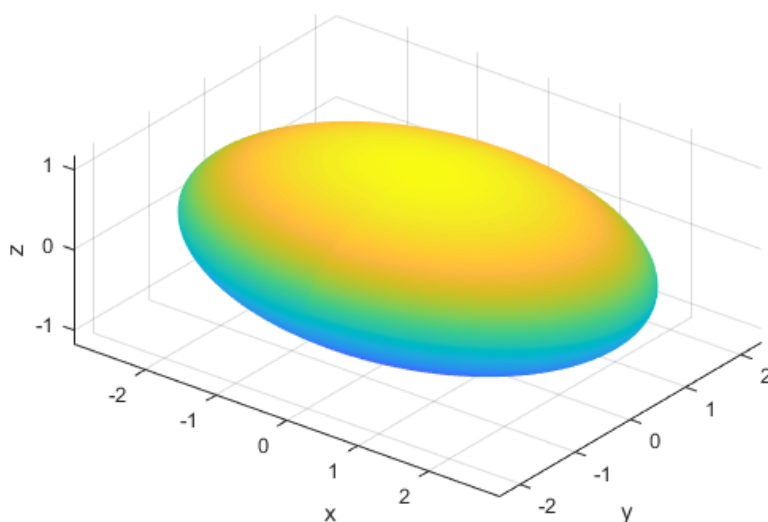


图 3:  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{1} = 1$

## 思考题 2.

1.

3.

- Bezier曲面插值

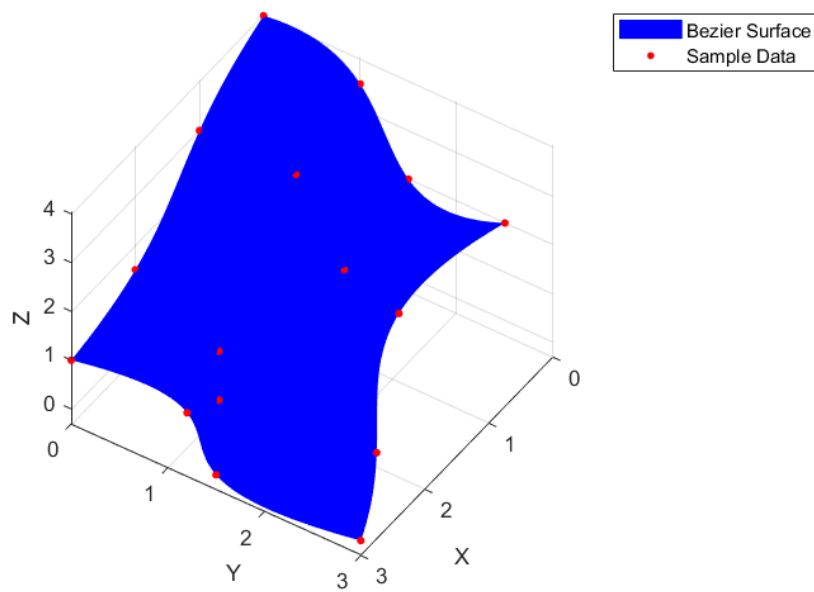


图 4: 双三次Bezier曲面

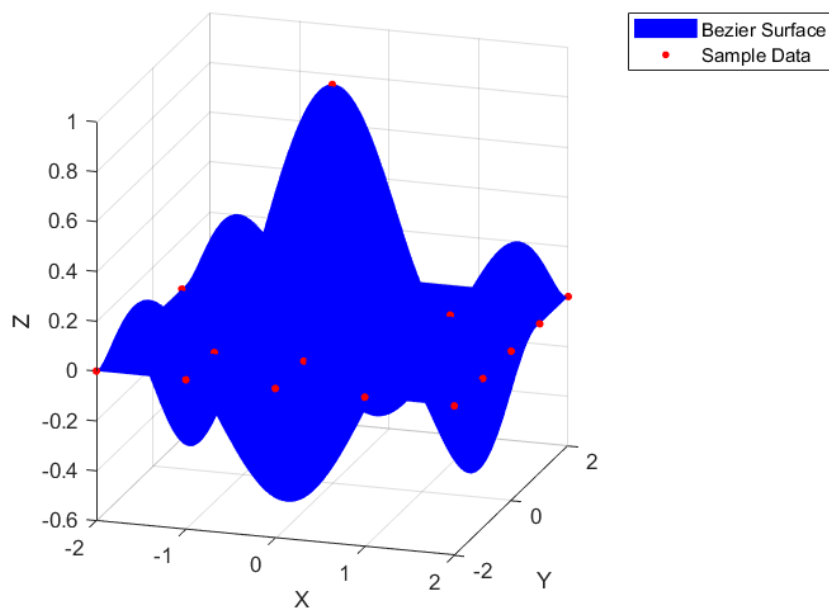


图 5: 全局插值不能很好地处理局部数据点共面的情况

- B样条曲面插值

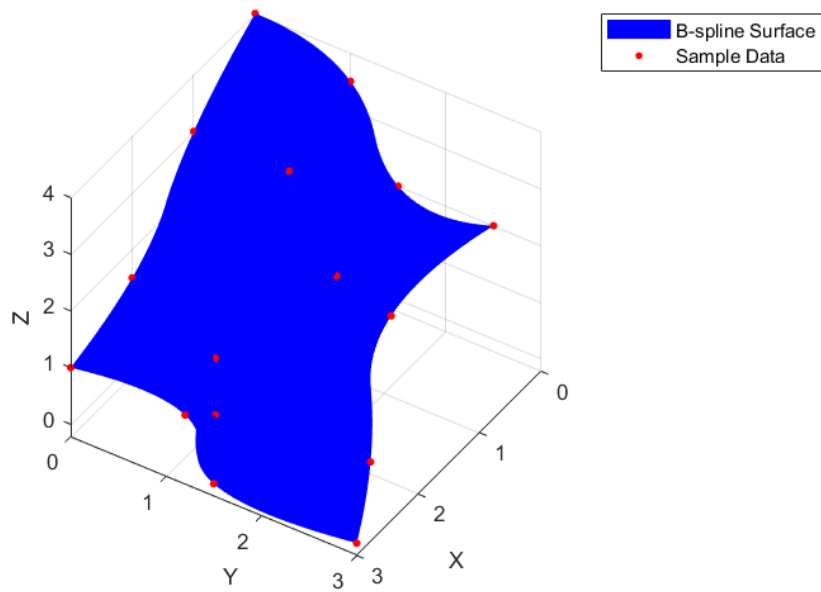


图 6: 双二次B-spline曲面

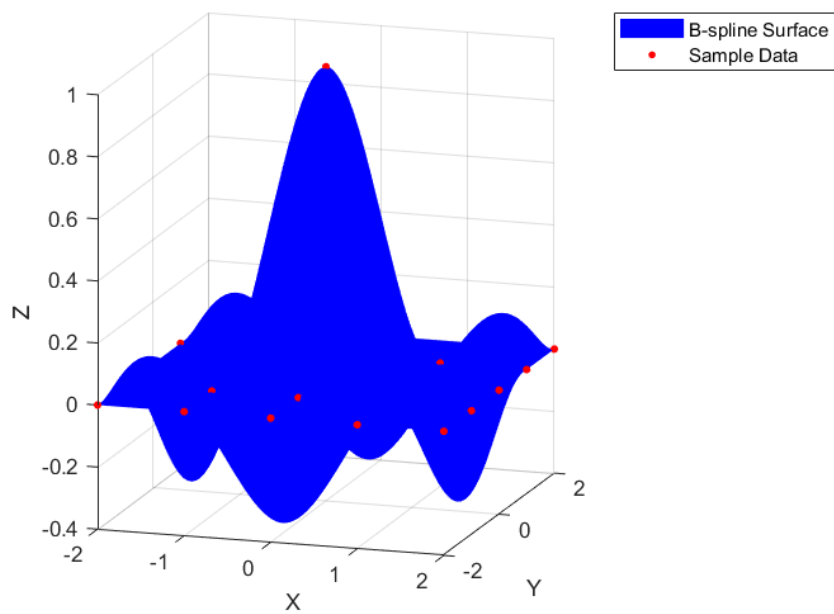


图 7: 双三次B-spline曲面, 全局插值不能很好地处理局部数据点共面的情况