《计算机辅助几何设计》第六次作业

姓名：殷文良　　学号：12435063

2024 年 11 月 3 日

思考题 1

1.

证明. 双曲线$x^2-y^2=1$的有理参数形式为

$$\begin{cases} x(u) &= \dfrac{1+u^2}{1-u^2}, \\ y(u) &= \dfrac{2u}{1-u^2}, \end{cases} \quad -\infty < u < \infty, u \neq \pm 1.$$

由端点插值性和端点相切性可知，$P_0=(1,0), P_1=(1,\sqrt{2}-1), P_2=(\sqrt{2},1)$。根据 $W(u)=1-u^2=\sum_{i=0}^{2} B_{i,2}(u)\omega_i=(1-u)^2\omega_0+2u(1-u)\omega_1+u^2\omega_2$。令 $u=0$，得$\omega_0=1$；令$u=1$，得$\omega_2=0$；令$u=\frac{1}{2}$，得$\frac{3}{4}=\frac{1}{4}\omega_0+\frac{1}{2}\omega_1+\frac{1}{4}\omega_2$，由 $\omega_0=1,\omega_2=0$，得$\omega_1=1$。于是，双曲线的2次有理Bezier曲线表示为

$$C(u)=\frac{(1-u)^2P_0+2u(1-u)P_1}{(1-u)^2+2u(1-u)}.$$

QED

2.

证明. 只证明椭圆情形，双曲线同理可证。

不失一般性，我们证明xy平面上中心在原点的椭圆不能用整曲线表示。采用反证法，不妨设

$$x(u)=a_0+a_1u+\cdots+a_nu^n \quad y(u)=b_0+b_1u+\cdots+b_nu^n$$

由于$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，因此有

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{a^2}(a_0+a_1u+\cdots+a_nu^n)^2+\frac{1}{b^2}(b_0+b_1u+\cdots+b_nu^n)^2-1 \\ &= (\frac{a_0^2}{a^2}+\frac{b_0^2}{b^2}-1)+2(\frac{a_0a_1}{a^2}+\frac{b_0b_n}{b^2})u+(\frac{a_1^2}{a^2}+2\frac{a_0a_2}{a^2}+\frac{b_1^2}{b^2}+2\frac{b_0b_2}{b^2})u^2 \\ &\quad +\cdots+(\frac{a_{n-1}^2}{a^2}+2\frac{a_{n-2}a_n}{a^2}+\frac{b_{n-1}^2}{b^2}+2\frac{b_{n-2}b_n}{b^2})u^{n-2} \\ &\quad +2(\frac{a_na_{n-1}}{a^2}+\frac{b_nb_{n-1}}{b^2})u^{2n-1}+(\frac{a_n^2}{a^2}+\frac{b_n^2}{b^2})u^{2n} \end{aligned}$$

上式应对所有u都成立，即上式右端所有项的系数都为0,。从最高次开始推导，由高到低，经过n步我们可以证明对所有的$i=1,2,\cdots,n$，有：$a_i=0,b_i=0$。最后，我们得到$x(u)=a_0,y(u)=b_0$，显然它不是一个椭圆，这和假设矛盾。 QED

3.

证明. 考虑圆心在原点，半径为r的半圆（见图1）。令$P_0^\omega = (r,0,1), P_1^\omega = (0,r,0), P_2^\omega = (-r,0,1)$。

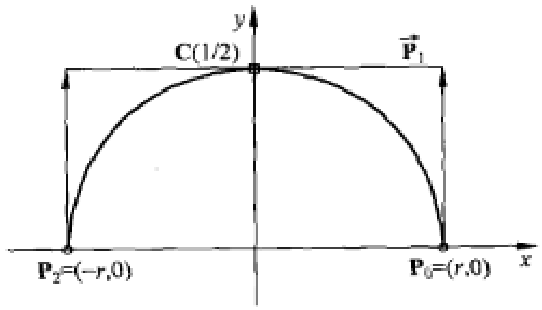

图 1: 使用无穷远点来定义半圆

对半圆进行升阶可得

$$
\begin{aligned}
&Q_0^\omega = P_0^\omega, \quad Q_3^\omega = P_2^\omega \\
&Q_1^\omega = \frac{1}{3}P_0^\omega + \frac{2}{3}P_1^\omega = (\frac{1}{3}r, \frac{2}{3}r, \frac{1}{3}r) \\
&Q_2^\omega = \frac{2}{3}P_1^\omega + \frac{1}{3}P_2^\omega = (-\frac{1}{3}r, \frac{2}{3}r, \frac{1}{3}r)
\end{aligned}
$$

因此（见图2）

$$
\begin{aligned}
&\{\omega_i\} = \{1, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1\}, \\
&\{Q_i\} = (r,0), (r,2r), (-r,2r), (-r,0).
\end{aligned}
$$

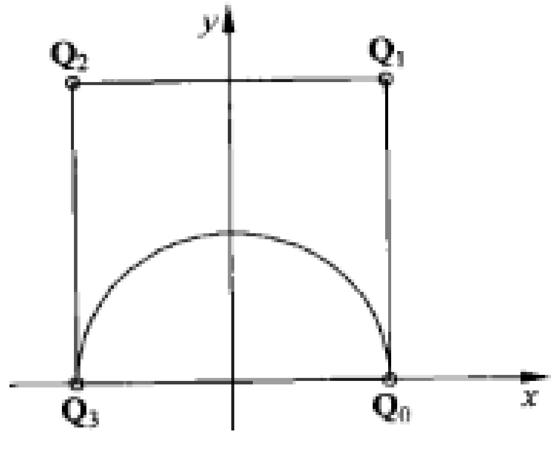

图 2: 半圆的三次有理Bezier表示

QED