

第六章 有理 Bézier 曲线与有理 B 样条曲线

§1. 圆锥曲线的有理表示

(a) 有理参数曲线

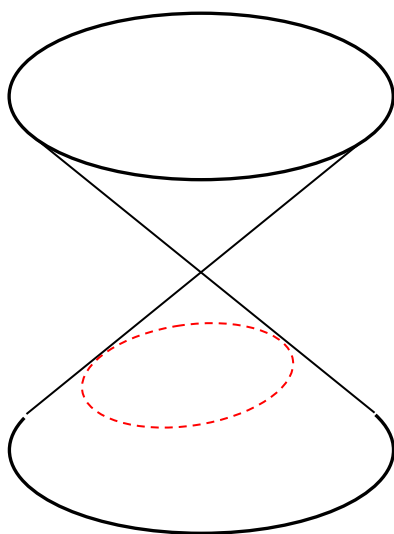
$$\begin{cases} x(t) = \frac{X(t)}{W_x(t)} \\ y(t) = \frac{Y(t)}{W_y(t)} \end{cases}$$

圆弧段不能用多项式曲线精确表示，但可以用有理曲线表示。

(b) 二次曲线及其参数化

- 隐式表示方程

圆锥曲线(conic section)



隐式表示方程: $F(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$

- 圆锥曲线的 Liming 构造法

设 $C_1: F_1(x, y) = 0$, $C_2: F_2(x, y) = 0$ 为两条二次曲线,

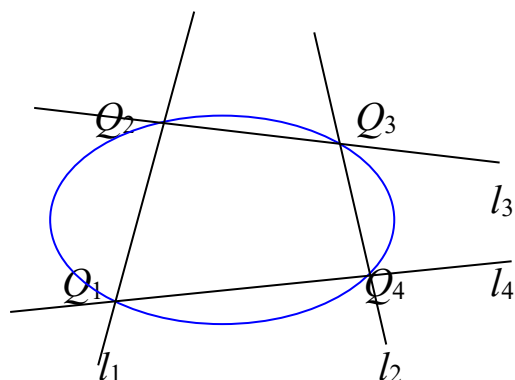
则 $C_\lambda: (1-\lambda)F_1(x, y) + \lambda F_2(x, y) = 0$ 也表示一条二次曲线。

例: 给定平面上 4 点 Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 , 分别过 Q_1Q_2, Q_3Q_4 ,

Q_2Q_3 , Q_1Q_4 作 4 条直线, 记为 l_1, l_2, l_3, l_4 ,

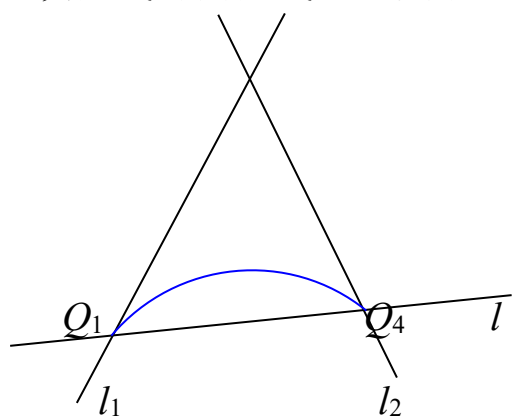
得一族二次曲线 $(1-\lambda)l_1l_2 + \lambda l_3l_4 = 0$,

对任一 λ , 该二次曲线过点 Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 。



若要确定其中一条, 只要让 $(1-\lambda)l_1l_2 + \lambda l_3l_4 = 0$ 经过一固定点, 比如 Q_5 , 解出 λ , 即可。

所以, 二次曲线可由曲线上 5 点唯一确定。



在二次曲线 $(1-\lambda)l_1l_2 + \lambda l_3l_4 = 0$ 中, 令 $Q_2 \rightarrow Q_1, Q_3 \rightarrow Q_4$, 则有

$l_3 \rightarrow l_4$, 不妨设其极限位置 $l_3 = l_4 = l$, 得到二次曲线

$(1-\lambda)l_1l_2 + \lambda l^2 = 0$, 此二次曲线过点 Q_1, Q_4 , 并在端点处与 l_1, l_2 相切。

● 二次曲线的参数化

给定二次曲线 $F(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$

不妨设 $f=0$,

令 $\begin{cases} x=u \\ y=tu \end{cases}$, 代入二次曲线方程中, 有

$$u(a+bt+ct^2)+(d+et)=0,$$

解出 $u=-\frac{d+et}{a+bt+ct^2}$, 从而

$$\begin{cases} x=-\frac{d+et}{a+bt+ct^2} \\ y=-\frac{dt+et^2}{a+bt+ct^2} \end{cases}$$

结论: 圆锥曲线可用二次有理参数曲线精确表示。

(c) 二次有理 Bézier 曲线隐式化

$$\mathbf{r}(t)=\frac{\sum_{i=0}^2 \omega_i P_i B_{i,2}(t)}{\sum_{i=0}^2 \omega_i B_{i,2}(t)}, \text{ 其中 } P_0, P_1, P_2 \text{ 为控制顶点, } \omega_0, \omega_1, \omega_2 \text{ 为权因子,}$$

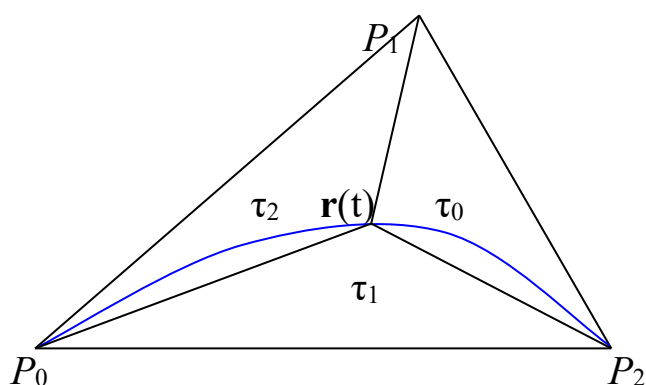
而 $B_{i,2}(t)=C_2^i t^i (1-t)^{2-i}$ 是 Bernstein 基函数。

令

$$\tau_0 = \frac{\omega_0(1-t)^2}{D}, \quad \tau_1 = \frac{2\omega_1 t(1-t)}{D}, \quad \tau_2 = \frac{\omega_2 t^2}{D} \quad (*)$$

其中 $D=\omega_0(1-t)^2+2\omega_1 t(1-t)+\omega_2 t^2$, 则有

$$\mathbf{r}(t)=\tau_0 P_0 + \tau_1 P_1 + \tau_2 P_2 \circ$$



参数 (τ_0, τ_1, τ_2) 构成点 $\mathbf{r}(t)$ 相对于三角形 $\Delta P_0 P_1 P_2$ 的重心坐标。

由方程组(*), 可得 $\tau_1^2 = 4 \frac{\tau_0 \tau_2 \omega_1^2}{\omega_0 \omega_2}$,

写成对称形式: $\frac{\tau_1^2}{\tau_0 \tau_2} = \frac{4\omega_1^2}{\omega_0 \omega_2}$

由重心坐标几何意义, 有

$$\tau_0 = \frac{S_{\Delta \mathbf{r}(t) P_1 P_2}}{S_{\Delta P_0 P_1 P_2}}, \quad \tau_1 = \frac{S_{\Delta \mathbf{r}(t) P_2 P_0}}{S_{\Delta P_0 P_1 P_2}}, \quad \tau_2 = \frac{S_{\Delta \mathbf{r}(t) P_0 P_1}}{S_{\Delta P_0 P_1 P_2}}$$

写成坐标形式:

$$\tau_0 = \frac{\begin{vmatrix} x & P_1^x & P_2^x \\ y & P_1^y & P_2^y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} P_0^x & P_1^x & P_2^x \\ P_0^y & P_1^y & P_2^y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}, \quad \tau_1 = \frac{\begin{vmatrix} P_0^x & x & P_2^x \\ P_0^y & y & P_2^y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} P_0^x & P_1^x & P_2^x \\ P_0^y & P_1^y & P_2^y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}, \quad \tau_2 = \frac{\begin{vmatrix} P_0^x & P_1^x & x \\ P_0^y & P_1^y & y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} P_0^x & P_1^x & P_2^x \\ P_0^y & P_1^y & P_2^y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}$$

将上述三式代入方程 $\frac{\tau_1^2}{\tau_0 \tau_2} = \frac{4\omega_1^2}{\omega_0 \omega_2}$, 化简后可得关于 x 与 y 的二

次方程, 即为二次有理 Bézier 曲线的隐式表示。

结论: 二次有理 Bézier 曲线是圆锥曲线。

(d) 圆锥曲线的标准形式与分类

对 $\mathbf{r}(t) = \frac{\sum_{i=0}^2 \omega_i P_i B_{i,2}(t)}{\sum_{i=0}^2 \omega_i B_{i,2}(t)}$ 作有理线性参数变换

$$t = \frac{s}{\rho(1-s) + s}, \quad 1-t = \frac{\rho(1-s)}{\rho(1-s) + s}$$

可得

$$\mathbf{r}(s) = \frac{\rho^2 \omega_0 P_0 B_{0,2}(s) + \rho \omega_1 P_1 B_{1,2}(s) + \omega_2 P_2 B_{2,2}(s)}{\rho^2 \omega_0 B_{0,2}(s) + \rho \omega_1 B_{1,2}(s) + \omega_2 B_{2,2}(s)},$$

取 $\rho = \sqrt{\frac{\omega_2}{\omega_0}}$ ，则可得

$$\mathbf{r}(s) = \frac{P_0 B_{0,2}(s) + \bar{\omega}_1 P_1 B_{1,2}(s) + P_2 B_{2,2}(s)}{B_{0,2}(s) + \bar{\omega}_1 B_{1,2}(s) + B_{2,2}(s)}, \quad \text{其中 } \bar{\omega}_1 = \sqrt{\frac{\omega_1^2}{\omega_0 \omega_2}}$$

标准二次有理 Bézier 曲线

$$\mathbf{r}(t) = \frac{P_0 B_{0,2}(t) + \omega_1 P_1 B_{1,2}(t) + P_2 B_{2,2}(t)}{B_{0,2}(t) + \omega_1 B_{1,2}(t) + B_{2,2}(t)}$$

导矢:

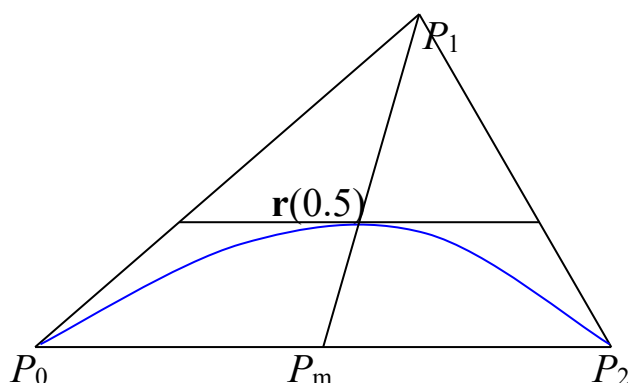
记 $\mathbf{r}(t) = \frac{P(t)}{W(t)}$ ，则有 $P(t) = \mathbf{r}(t)W(t)$ ，两边求导，有

$$P'(t) = \mathbf{r}'(t)W(t) + \mathbf{r}(t)W'(t)$$

$$\text{即: } \mathbf{r}'(t) = \frac{P'(t) - \mathbf{r}(t)W'(t)}{W(t)}$$

特别地， $\mathbf{r}'(0) = 2\omega_1(P_1 - P_0)$ ， $\mathbf{r}'(1) = 2\omega_1(P_2 - P_1)$

肩点(shoulder point): $\mathbf{r}(0.5)$



记 $P_m = \frac{1}{2}(P_0 + P_2)$ ，则点 P_1 ， $\mathbf{r}(0.5)$ 和 P_m 共线，且 $\frac{|P_m - \mathbf{r}(0.5)|}{|\mathbf{r}(0.5) - P_1|} = \omega_1$

肩点处导矢 $\mathbf{r}'(0.5)$ 与矢量 $P_2 - P_0$ 平行

分类(classification):

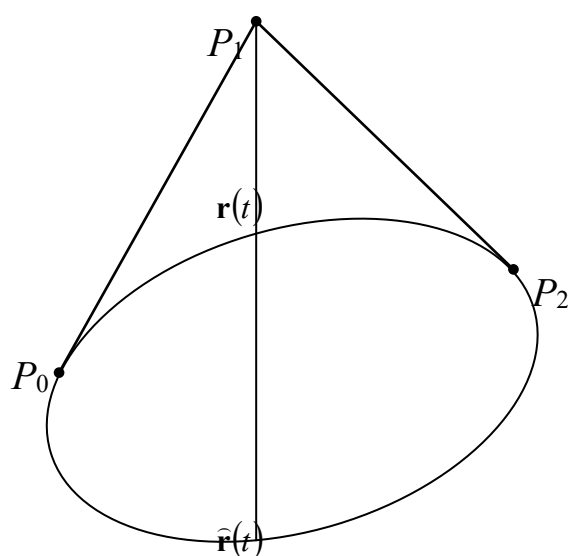
给定二次有理曲线段

$$\mathbf{r}(t) = \frac{P_0 B_{0,2}(t) + \omega_1 P_1 B_{1,2}(t) + P_2 B_{2,2}(t)}{B_{0,2}(t) + \omega_1 B_{1,2}(t) + B_{2,2}(t)}, \quad \omega_1 > 0, \quad t \in [0,1]$$

构造该曲线段补圆锥曲线

$$\bar{\mathbf{r}}(t) = \frac{P_0 B_{0,2}(t) - \omega_1 P_1 B_{1,2}(t) + P_2 B_{2,2}(t)}{B_{0,2}(t) - \omega_1 B_{1,2}(t) + B_{2,2}(t)}, \quad t \in [0,1]$$

曲线 $\mathbf{r}(t)$ 与 $\bar{\mathbf{r}}(t)$ 有相同的隐式表示 $\frac{\tau_1^2}{\tau_0 \tau_2} = \frac{4\omega_1^2}{\omega_0 \omega_2}$



容易验证 P_1 , $\mathbf{r}(t)$ 与 $\bar{\mathbf{r}}(t)$ 三点共线。

依据补曲线 $\bar{\mathbf{r}}(t)$ 是否有奇异点对曲线 $\mathbf{r}(t)$ 进行分类:

若 $\bar{\mathbf{r}}(t)$ 无奇异点, 则 $\mathbf{r}(t)$ 是椭圆线段;

若 $\bar{\mathbf{r}}(t)$ 有一个奇异点, 则 $\mathbf{r}(t)$ 是抛物线段;

若 $\bar{\mathbf{r}}(t)$ 有两个奇异点, 则 $\mathbf{r}(t)$ 是双曲线段。

$\bar{\mathbf{r}}(t)$ 的奇异点由方程 $B_{0,2}(t) - \omega_1 B_{1,2}(t) + B_{2,2}(t) = 0$ 来确定。

设 $\omega_1 > 0$, 求解方程 $B_{0,2}(t) - \omega_1 B_{1,2}(t) + B_{2,2}(t) = 0$, 有

$$t_{1,2} = \frac{1 + \omega_1 \pm \sqrt{\omega_1^2 - 1}}{2 + 2\omega_1}$$

当 $0 < \omega_1 < 1$ 时，方程无实根， $\mathbf{r}(t)$ 是椭圆线段；

当 $\omega_1 = 1$ 时，有唯一实根， $\mathbf{r}(t)$ 是抛物线段；

当 $\omega_1 > 1$ 时，有两个不同实根， $\mathbf{r}(t)$ 是双曲线段。

(e) 圆锥曲线段的构造

- 给定两端点，两端点切向以及曲线上一点

依据二次有理 Bézier 曲线在端点处的导矢公式，可由端点和端切向得到二次有理 Bézier 曲线控制多边形，采样标准表示形式，有

$$\mathbf{r}(t) = \frac{P_0 B_{0,2}(t) + \omega_1 P_1 B_{1,2}(t) + P_2 B_{2,2}(t)}{B_{0,2}(t) + \omega_1 B_{1,2}(t) + B_{2,2}(t)}$$

权因子 ω_1 可根据曲线插值给定点 P 得到

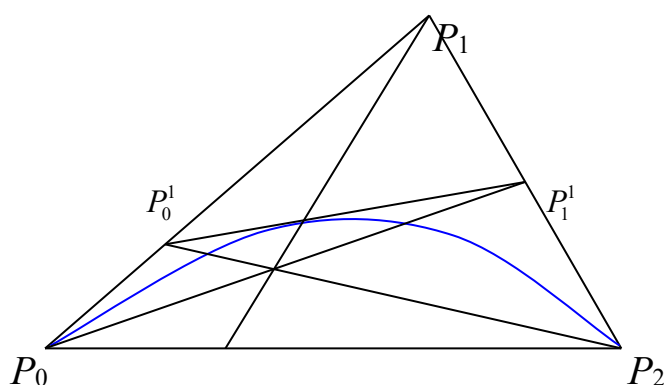
设点 P 在三角形 $\Delta P_0 P_1 P_2$ 的重心坐标为 (τ_0, τ_1, τ_2) ，根据隐式表

示 $\frac{\tau_1^2}{\tau_0 \tau_2} = \frac{4\omega_1^2}{\omega_0 \omega_2}$ 以及 $\omega_0 = \omega_2 = 1$ ，得到

$$\omega_1 = \frac{\tau_1}{2\sqrt{\tau_0 \tau_2}}$$

- 给定两端点，两端点切向以及曲线的一条切线

同上，由边界条件可得到二次有理 Bézier 曲线的控制多边形。



根据有理曲线的 de Casteljau 算法，有

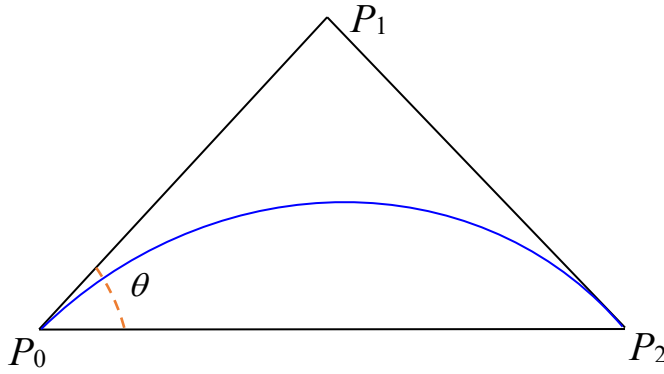
$$P_0^1 = (1-t) \frac{1}{\omega_0^1} P_0 + t \frac{\omega_1}{\omega_0^1} P_1, \text{ 其中 } \omega_0^1 = 1-t+t\omega_1$$

$$P_1^1 = (1-t) \frac{\omega_1}{\omega_1^1} P_1 + t \frac{1}{\omega_1^1} P_2, \text{ 其中 } \omega_1^1 = (1-t)\omega_1+t$$

从上面二式中消去参数 t ，可得

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{|P_0^1 - P_0| |P_2 - P_1^1|}{|P_1 - P_0^1| |P_1^1 - P_1|}}$$

(f) 圆弧段的有理表示



三角形 $\Delta P_0P_1P_2$ 为等腰三角形，即 $\|P_1 - P_0\| = \|P_2 - P_1\|$

记 $\angle P_1P_0P_2 = \theta$ ，并取 $\omega_1 = \cos \theta$ ，则

$$\mathbf{r}(t) = \frac{P_0 B_{0,2}(t) + \omega_1 P_1 B_{1,2}(t) + P_2 B_{2,2}(t)}{B_{0,2}(t) + \omega_1 B_{1,2}(t) + B_{2,2}(t)}$$

表示一段圆弧段 ($\theta < \frac{\pi}{2}$)。

半圆的表示：设 $P_0 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ， $P_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \tan \theta \end{bmatrix}$ ， $P_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ，取 $\omega_1 = \cos \theta$ ，有

$$\mathbf{r}(t) = \frac{(1-t)^2 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \cos \theta 2t(1-t) \begin{bmatrix} 0 \\ \tan \theta \end{bmatrix} + t^2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}{(1-t)^2 + \cos \theta 2t(1-t) + t^2}$$

令 $\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}$, 有

$$\mathbf{r}(t) = \frac{(1-t)^2 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} + 2t(1-t) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t^2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}{(1-t)^2 + t^2}$$

§2. 有理 Bézier 曲线性质与算法

(a) 齐次坐标表示(homogeneous coordinates)

n 次有理 Bézier 曲线

$$\mathbf{r}(t) = \frac{\sum_{i=0}^n \omega_i P_i B_{i,n}(t)}{\sum_{i=0}^n \omega_i B_{i,n}(t)},$$

控制顶点: $P_i, i = 0, 1, \dots, n$

权因子: $\omega_i \geq 0, i = 0, 1, \dots, n$, 不全为 0。

Bernstein 基函数: $B_{i,n}(t) = C_n^i t^i (1-t)^{n-i}, i = 0, 1, \dots, n$

当 $\omega_0 = \omega_1 = \dots = \omega_n = 1$ 时, $\mathbf{r}(t) = \sum_{i=0}^n P_i B_{i,n}(t)$ 。

齐次坐标表示:

设 $P_i = (x_i, y_i, z_i)$, 齐次坐标表示为 $\bar{P}_i = (X_i, Y_i, Z_i, \omega_i)$,

则有: $x_i = \frac{X_i}{\omega_i}, y_i = \frac{Y_i}{\omega_i}, z_i = \frac{Z_i}{\omega_i}$ 。

记 $R_i = (\omega_i P_i, \omega_i), i = 0, 1, \dots, n$, 可得齐次坐标表示的 Bézier 曲线

$$R(t) = \sum_{i=0}^n R_i B_{i,n}(t)$$

(b) 基本性质

1. 凸包性质

$$\mathbf{r}(t) = \frac{\sum_{i=0}^n \omega_i P_i B_{i,n}(t)}{\sum_{i=0}^n \omega_i B_{i,n}(t)} = \sum_{i=0}^n P_i \frac{\omega_i B_{i,n}(t)}{\sum_{j=0}^n \omega_j B_{j,n}(t)}$$

由 $\frac{\omega_i B_{i,n}(t)}{\sum_{j=0}^n \omega_j B_{j,n}(t)} \geq 0$ 和 $\sum_{i=0}^n \frac{\omega_i B_{i,n}(t)}{\sum_{j=0}^n \omega_j B_{j,n}(t)} \equiv 1$ 知凸包性成立。

2. 直线再生性

若控制顶点共线，则有理 Bézier 曲线是一条直线。

3. 仿射不变性

设 A 为仿射变换矩阵，则有

$$A\mathbf{r}(t) = \sum_{i=0}^n AP_i \frac{\omega_i B_{i,n}(t)}{\sum_{j=0}^n \omega_j B_{j,n}(t)}$$

4. 权因子作用

让某一个权因子 $\omega_i \rightarrow \infty$ 而其它权因子不变，则曲线 $\mathbf{r}(t) \rightarrow P_i$ 。

5. 端点性质

设 $\omega_0 \neq 0$, $\omega_n \neq 0$, 则有: $\mathbf{r}(0) = P_0$, $\mathbf{r}(1) = P_n$

端点切向: $\mathbf{r}'(0) = n \frac{\omega_1}{\omega_0} (P_1 - P_0)$, $\mathbf{r}'(1) = n \frac{\omega_{n-1}}{\omega_n} (P_n - P_{n-1})$

6. 平面有理 Bézier 曲线的顶点共面性

不妨设 $\mathbf{r}(t) = \frac{\sum_{i=0}^n \omega_i P_i B_{i,n}(t)}{\sum_{i=0}^n \omega_i B_{i,n}(t)}$ 是 x-y 平面上的有理 Bézier 曲线，则其

所有控制顶点也都位于同一平面上。

证明：由 $z(t) = \frac{\sum_{i=0}^n z_i \omega_i B_{i,n}(t)}{\sum_{j=0}^n \omega_j B_{j,n}(t)} = 0$ 知 $\sum_{i=0}^n z_i \omega_i B_{i,n}(t) \equiv 0$ ，再由 Bernstein 基

函数的线性无关性，知 $z_i \omega_i = 0$ 或 $z_i = 0$ ， $i = 0, 1, \dots, n$ 。

(c) 离散逼近

● 有理 de Castljau 算法

1. 算法

对齐次坐标表示 Bézier 曲线用 de Castljau 算法，可得：

$$P_i^r(t) = \begin{cases} P_i & r=0 \\ \frac{(1-t)\omega_i^{r-1}(t)}{\omega_i^r(t)} P_i^{r-1}(t) + \frac{t\omega_{i+1}^{r-1}(t)}{\omega_i^r(t)} P_{i+1}^{r-1}(t) & i=0,1,\dots,n-r \\ & r=1,2,\dots,n \end{cases}$$

$$\omega_i^r(t) = \begin{cases} \omega_i & r=0 \\ (1-t)\omega_i^{r-1}(t) + t\omega_{i+1}^{r-1}(t) & i=0,1,\dots,n-r \\ & r=1,2,\dots,n \end{cases}$$

2. 命题

$$P_i^r(t) = \frac{\sum_{j=0}^r \omega_{i+j} P_{i+j} B_{j,r}(t)}{\sum_{j=0}^r \omega_{i+j} B_{j,r}(t)} \text{ 是 } r \text{ 阶有理 Bézier 曲线，且 } P_0^n(t) = \mathbf{r}(t)$$

证明：

$$\text{由于 } \omega_i^r(t) = \begin{cases} \omega_i & r=0 \\ (1-t)\omega_i^{r-1}(t) + t\omega_{i+1}^{r-1}(t) & i=0,1,\dots,n-r \\ & r=1,2,\dots,n \end{cases}$$

$$\text{有 } \omega_i^r(t) = [(1-t)I + tE] \omega_i^{r-1}(t)$$

$$= [(1-t)I + tE]^r \omega_i^0(t) = [(1-t)I + tE]^r \omega_i = \sum_{j=0}^r \omega_{i+j} B_{j,r}(t)$$

$$\text{同理 } P_i^r(t) = \frac{1}{\omega_i^r(t)} [(1-t)I + tE]^r (\omega_i^0(t) P_i^0(t))$$

$$= \frac{\sum_{j=0}^r \omega_{i+j} P_{i+j} B_{j,r}(t)}{\sum_{j=0}^r \omega_{i+j} B_{j,r}(t)} \quad \begin{array}{l} i = 0, 1, \dots, n-r \\ r = 1, 2, \dots, n \end{array}$$

$$\text{上式中, 取 } i=0, r=n, \text{ 可得 } P_0^n(t) = \frac{\sum_{j=0}^n \omega_j P_j B_{j,n}(t)}{\sum_{j=0}^n \omega_j B_{j,n}(t)} = \mathbf{r}(t)。$$

● 分割定理与算法

设 $t_0 \in (0,1)$, 有

$$\mathbf{r}(t) = \begin{cases} \frac{\sum_{i=0}^n P_0^i(t_0) \omega_0^i(t_0) B_{i,n}(u)}{\sum_{i=0}^n \omega_0^i(t_0) B_{i,n}(u)} & u = \frac{t}{t_0} \in [0,1] \\ \frac{\sum_{i=0}^n P_{n-i}^i(t_0) \omega_{n-i}^i(t_0) B_{i,n}(v)}{\sum_{i=0}^n \omega_{n-i}^i(t_0) B_{i,n}(v)} & v = \frac{t-t_0}{1-t_0} \in [0,1] \end{cases}$$

● 包络性质

$$\text{定义 } \mathbf{r}_k(\lambda; t) = \frac{\sum_{i=0}^{n-k} P_i^k(\lambda) \omega_i^k(\lambda) B_{i,n-k}(t)}{\sum_{i=0}^{n-k} \omega_i^k(\lambda) B_{i,n-k}(t)}, \quad 0 < k < n$$

定理：曲线 $\mathbf{r}(t)$ 是曲线簇 $\{\mathbf{r}_k(\lambda; t) | \lambda \in [0,1]\}$ 的包络。

● 升阶公式

$$\mathbf{r}(t) = \frac{\sum_{i=0}^n \omega_i P_i B_{i,n}(t)}{\sum_{i=0}^n \omega_i B_{i,n}(t)} = \frac{\sum_{i=0}^{n+k} \omega_{i,k} P_{i,k} B_{i,n+k}(t)}{\sum_{i=0}^{n+k} \omega_{i,k} B_{i,n+k}(t)}$$

其中

$$P_{i,k} = \left[\sum_{j=0}^n P_j \omega_j \binom{n}{j} \binom{k}{i-j} / \binom{n+k}{i} \right] / \omega_{i,k}$$

$$\omega_{i,k} = \sum_{j=0}^n \omega_j \binom{n}{j} \binom{k}{i-j} / \binom{n+k}{i}$$

特别地， $k=1$ 时，有

$$\omega_{i,1} = \frac{i}{n+1} \omega_{i-1} + \frac{n+1-i}{n+1} \omega_i$$

$$P_{i,1} = \left[\frac{i}{n+1} \omega_{i-1} P_{i-1} + \frac{n+1-i}{n+1} \omega_i P_i \right] / \left[\frac{i}{n+1} \omega_{i-1} + \frac{n+1-i}{n+1} \omega_i \right]$$

易知，点 $P_{i,1}$ 位于线段 $P_{i-1}P_i$ 上，且以 $\{P_{i,1}\}$ 为控制顶点的曲线仍是原曲线。

另外，有理 Bézier 曲线中某些权因子可能为 0，则相应的控制顶点对曲线形状不起作用，升阶后可减少或去除 0 权因子现象。

● 几何形状分析

定理：平面有理 Bézier 曲线具有保凸性和变差缩减性。

保凸性可由分割定理和多项式 Bézier 曲线类似方法可证。

证明变差缩减性：

设 $l: ax + by + c = 0$ 是平面上任意一条直线，写成向量形式

$$AP + c = 0, \text{ 其中 } A = (a, b), \quad P = (x, y)^T$$

则直线 l 与有理 Bézier 曲线的交点方程

$$A \sum_{i=0}^n P_i \omega_i B_{i,n}(t) + c \sum_{i=0}^n \omega_i B_{i,n}(t) = 0,$$

$$\text{即: } \sum_{i=0}^n (AP_i + c) \omega_i B_{i,n}(t) = 0$$

由笛卡尔(Cartesian)符号定理，多项式函数正根的个数不大于其系数的变号数，命题得证。

(d) 权因子与参数变换

$$\mathbf{r}(t) = \frac{\sum_{i=0}^n \omega_i P_i B_{i,n}(t)}{\sum_{i=0}^n \omega_i B_{i,n}(t)}, \quad \text{权因子 } \omega_i \geq 0, \quad i=0,1,\dots,n, \quad \text{不全为 } 0.$$

若 $\omega_j = 0$, 则 $\mathbf{r}(t)$ 与 P_j 无关。 ($j \neq 0, n$)

若 $\omega_0 = 0$ 或 $\omega_n = 0$, 则 $\mathbf{r}(t)$ 退化为 $n-1$ 次曲线, 且与 P_0 (或 P_n) 无关。

设 $t = \frac{as}{b(1-s) + as}$, 且 $ab > 0$, 则有 $t'(s) > 0$ 且 $t(0) = 0$, $t(1) = 1$ 。

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t(s)) = \frac{\sum_{i=0}^n a^i b^{n-i} \omega_i P_i B_{i,n}(s)}{\sum_{i=0}^n a^i b^{n-i} \omega_i B_{i,n}(s)} = \frac{\sum_{i=0}^n \bar{\omega}_i P_i B_{i,n}(s)}{\sum_{i=0}^n \bar{\omega}_i B_{i,n}(s)}$$

$$\text{令 } \bar{\omega}_0 = \bar{\omega}_n = 1, \quad \text{解得 } a = \frac{1}{\sqrt[n]{\omega_n}}, \quad b = \frac{1}{\sqrt[n]{\omega_0}}$$

结论: n 次有理 Bézier 曲线权因子自由度 $\leq n-1$ 。

(e) 二次有理参数变换

● 有理参数变换

一次有理参数变换(Moebius 变换): $t \rightarrow \frac{at}{b(1-t) + at}$

二次有理参数变换: $t \rightarrow s(t) = \frac{pt + (1-p)t^2}{1 - 2(1-p)t + 2(1-p)t^2}$

可验证: $s(0) = 0$, $s(1) = 1$, $s(1-t) = 1 - s(t)$, $s'(1-t) = s'(t)$, 且 $s'(0) = s'(1) = p$

该二次有理参数变换有 1 个自由度 p 。

● 圆锥曲线的重新参数化:

设 $\mathbf{r}(t) = \frac{P_0(1-t)^2 + 2P_1\omega t(1-t) + P_2t^2}{(1-t)^2 + 2\omega t(1-t) + t^2}$

重新参数化可得：
$$\mathbf{r}(t) = \frac{\sum_{i=0}^4 \omega_i Q_i B_{i,4}(t)}{\sum_{i=0}^4 \omega_i B_{i,4}(t)},$$

其中：

$$Q_0 = P_0, \quad Q_1 = \frac{P_0 + \omega P_1}{1 + \omega}, \quad Q_2 = \frac{p^2 P_0 + 2\omega(1 + p^2)P_1 + p^2 P_2}{2(p^2 + p^2 \omega + \omega)},$$

$$Q_3 = \frac{\omega P_1 + P_2}{1 + \omega}, \quad Q_4 = P_2$$

$$\omega_0 = 1, \quad \omega_1 = \frac{1 + \omega}{2} p, \quad \omega_2 = \frac{p^2 + p^2 \omega + \omega}{3}, \quad \omega_3 = \omega_1, \quad \omega_4 = \omega_0.$$

(f) 密切插值(osculatory interpolation)

问题：已知三次有理 Bézier 曲线的控制多边形，并给定两端点处的曲率，求曲线权因子使得有理 Bézier 曲线插值给定曲率。

设三次有理 Bézier 曲线

$$\mathbf{r}(t) = \frac{P_0 B_{0,3}(t) + P_1 \omega_1 B_{1,3}(t) + P_2 \omega_2 B_{2,3}(t) + P_3 B_{3,3}(t)}{B_{0,3}(t) + \omega_1 B_{1,3}(t) + \omega_2 B_{2,3}(t) + B_{3,3}(t)}$$

则曲线的曲率

$$k(t) = \frac{|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|^3}$$

特别地，

$$k(0) = \frac{2}{3} \frac{\omega_2}{\omega_1^2} \frac{|(P_1 - P_0) \times (P_2 - P_0)|}{|P_1 - P_0|^3} = \frac{2}{3} \frac{\omega_2}{\omega_1^2} c_0$$

$$k(1) = \frac{2}{3} \frac{\omega_1}{\omega_2^2} \frac{|(P_3 - P_2) \times (P_3 - P_1)|}{|P_3 - P_2|^3} = \frac{2}{3} \frac{\omega_1}{\omega_2^2} c_1$$

若已知 $k(0) = k_0$, $k(1) = k_1$, 则有

$$\omega_1 = \frac{2}{3} \left(\frac{c_0^2 c_1}{k_0^2 k_3} \right)^{\frac{1}{3}}, \quad \omega_2 = \frac{2}{3} \left(\frac{c_0 c_1^2}{k_0 k_3^2} \right)^{\frac{1}{3}}。$$

思考题：

1. 把 $x^2 - y^2 = 1$ 上从 $(1,0)$ 到 $(\sqrt{2},1)$ 之间的一段曲线表示为二次有理 Bézier 曲线。
2. 证明：双曲线和椭圆不能表示成任何次数的整曲线。
3. 将半圆弧表示成三次有理 Bézier 曲线。

§3. 有理 B 样条曲线

(a) 非均匀有理 B 样条

Non-uniform rational B-spline(NURBS)

● 定义

给定：节点分割 $\pi_n^k = \{t_0, t_1, \dots, t_{n+k}\}$ ，

控制顶点 $\{P_i\}_{i=0}^n$ ，

权因子 $\{\omega_i\}_{i=0}^n$

定义 k 阶有理 B 样条曲线

$$P(t) = \frac{\sum_{i=0}^n \omega_i P_i N_{i,k}(t)}{\sum_{i=0}^n \omega_i N_{i,k}(t)}, \quad t \in [t_{k-1}, t_{n+1}]$$

若 $\omega_0 = \omega_1 = \dots = \omega_n$ ，则有理 B 样条曲线退化为 $P(t) = \sum_{i=0}^n P_i N_{i,k}(t)$ 。

● 权因子作用

$$\text{记 } R_{i,k}(t) = \frac{\omega_i N_{i,k}(t)}{\sum_{i=0}^n \omega_i N_{i,k}(t)}, \quad i = 0, 1, \dots, n$$

若 $\omega_i \rightarrow +\infty$ ，而 $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{i-1}, \omega_{i+1}, \dots, \omega_n$ 保持不变，

则有 $R_{i,k}(t) \rightarrow 1$ ， $R_{j,k}(t) \rightarrow 0$ ， $j \neq i$ ， $t \in (t_i, t_{i+k})$

所以，当 $\omega_i \rightarrow +\infty$ ，有 $P(t) \rightarrow P_i$ ， $t \in (t_i, t_{i+k})$ 。

● 齐次坐标表示

$$\text{在 } \mathbf{R}^3 \text{ 中, } P(t) = \frac{\sum_{i=0}^n \omega_i P_i N_{i,k}(t)}{\sum_{i=0}^n \omega_i N_{i,k}(t)} = (x(t), y(t), z(t))$$

记 $\bar{P}_i = (\omega_i P_i, \omega_i) = (\omega_i x_i, \omega_i y_i, \omega_i z_i, \omega_i)$ ， $i = 0, 1, \dots, n$

可得 NURBS 的齐次坐标表示

$$\bar{P}(t) = \sum_{i=0}^n \bar{P}_i N_{i,k}(t) = (X(t), Y(t), Z(t), W(t))$$

利用齐次坐标表示，可以将有理 B 样条的求值，节点插入等运算转化成整(非有理)B 样条形式。

$$x(t) = \frac{X(t)}{W(t)}, \quad y(t) = \frac{Y(t)}{W(t)}, \quad z(t) = \frac{Z(t)}{W(t)}。$$

(b) 三次有理 B 样条曲线

- 三次有理 B 样条曲线可以达到 C^2 连续。
- 三次有理 B 样条曲线插值可以转化成整 B 样条曲线插值。

给定：空间中型值点 Q_0, Q_1, \dots, Q_K ，权因子 $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_K$ 和对应节点

$$\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_K$$

构造：三次有理 B 样条曲线 $P(t) = \frac{\sum_{i=0}^L \bar{\omega}_i P_i N_{i,k}(t)}{\sum_{i=0}^L \bar{\omega}_i N_{i,k}(t)}$ ，其中 $L = K + 2$ ，

使得： $P(\tau_j) = Q_j$ ； $j = 0, 1, \dots, K$

算法：

1. 将型值点和权因子表示成齐次坐标形式 $\{Q_i \omega_i, \omega_i\}_{i=0}^K$ ；
2. 在四维空间中做 B 样条曲线插值；
3. 将齐次坐标曲线投影到三维空间中。