《计算机辅助几何设计》第三次作业

姓名：殷文良　　学号：12435063

2024 年 11 月 2 日

思考题 1

1.

证明. 定义函数$q(t) = (x-t)^n$，其中x是自由参数。由于$q(t) \in \mathbb{P}_n$，根据插值多项式的唯一性以及Cauchy余项定理，我们有$p_n(q;t) \equiv q(t)$。在$t_0, \ldots, t_n$处对$q(x)$进行Lagrange插值，则有

$$(x-t)^n \equiv \sum_{k=0}^{n} L_k^n(t|t_0, \ldots, t_n)(x-t_k)^n.$$

QED

2.

采用不同的参数化方法实现Lagrange曲线插值，分别为均匀参数化、累积弦长参数化和切比雪夫累积弦长参数化[1]，并比较插值效果。

- 2维：$p_0 = (-1,0)', p_1 = (0,1)', p_2 = (3,3)', p_3 = (1,0)', p_4 = (0,-1)'$.

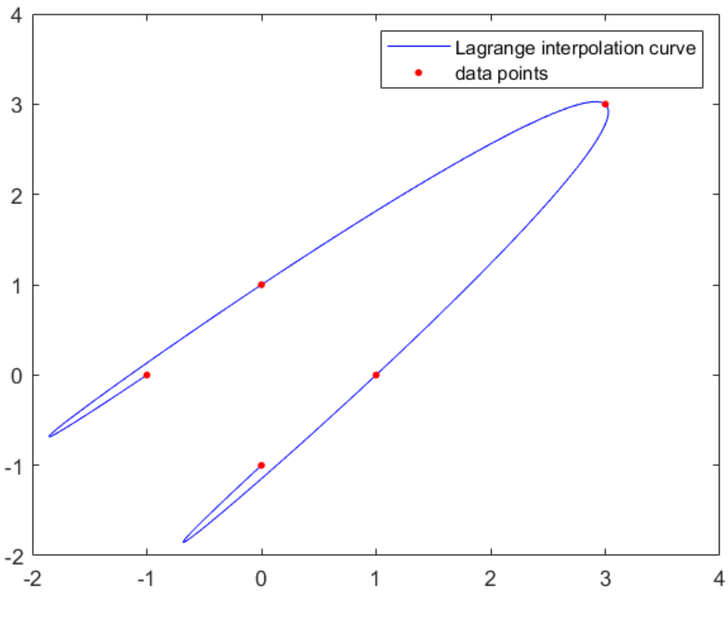

图 1: 均匀参数化

[1]参考《数据插值中的参数化新方法》

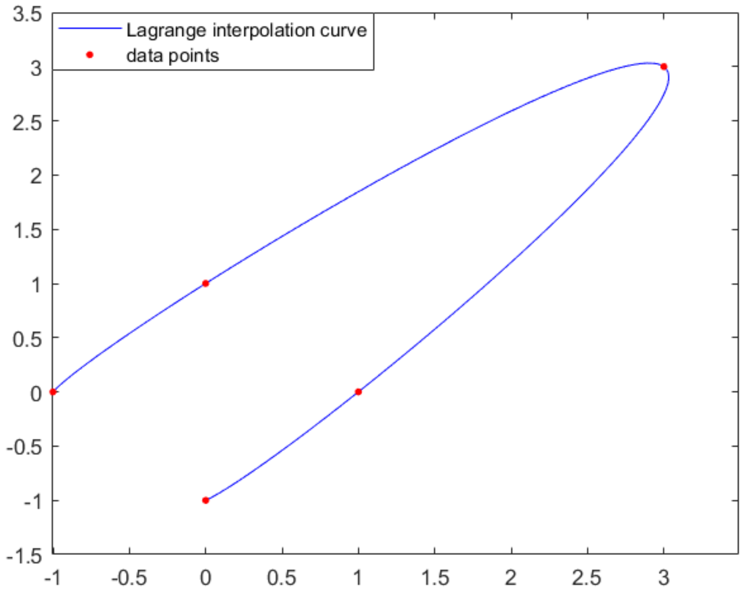

图 2: 累积弦长参数化

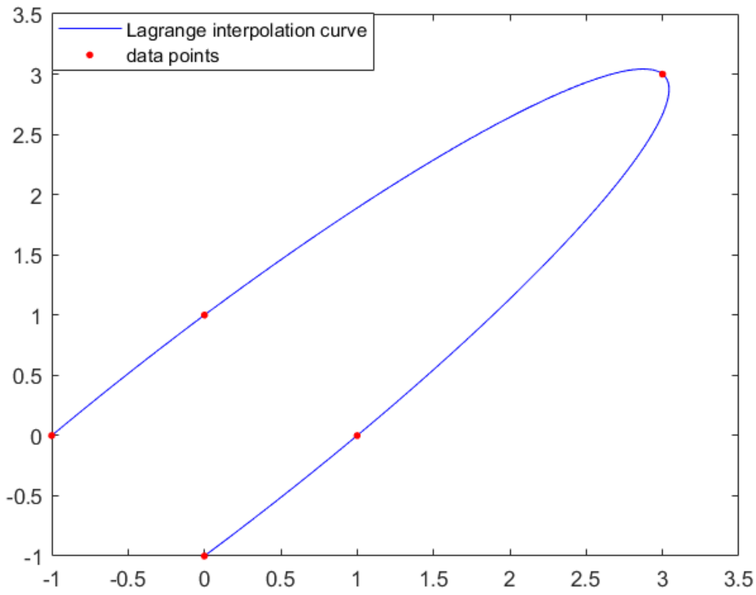

图 3: 切比雪夫累积弦长参数化

- 3维：$p_0 = (-1, 0, 0)', p_1 = (0, 2, 1)', p_2 = (3, 3, 3)', p_3 = (1, 0, 2)', p_4 = (0, -1, 0)'$.

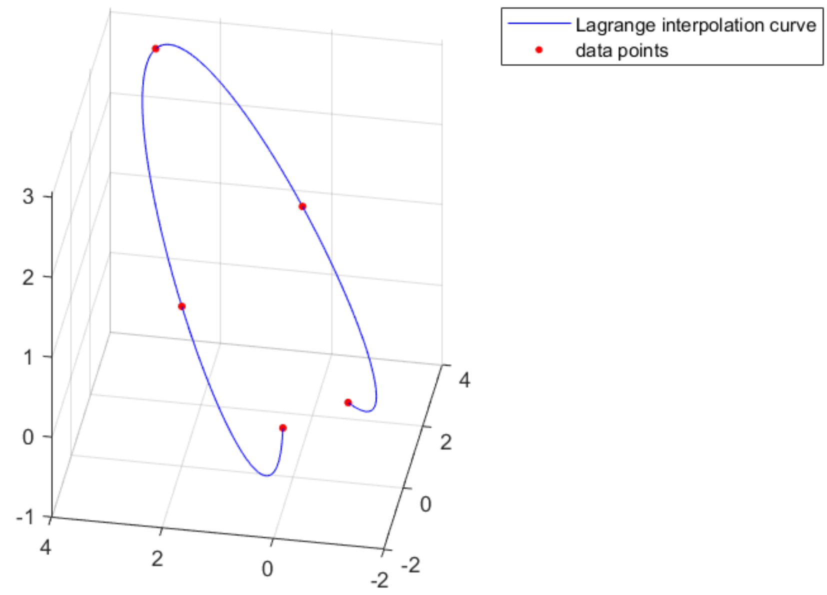

图 4: 均匀参数化

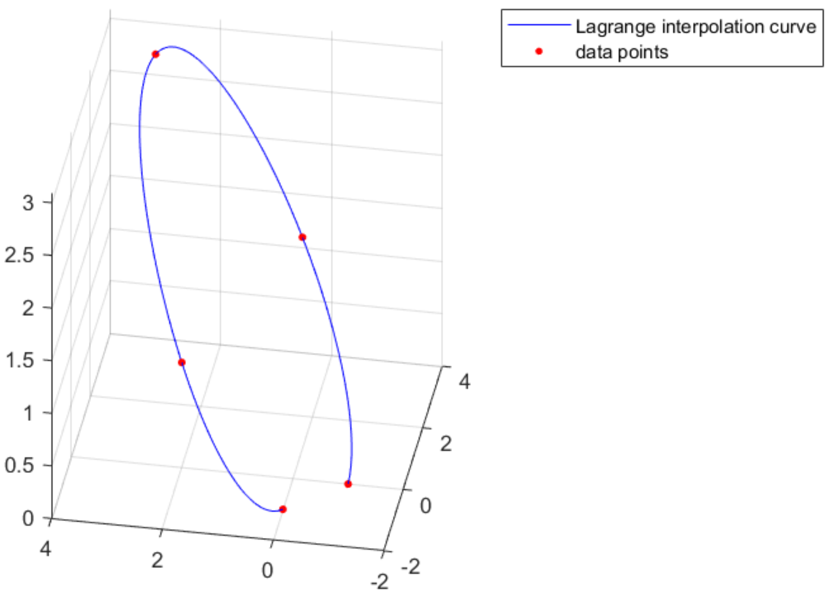

图 5: 累积弦长参数化

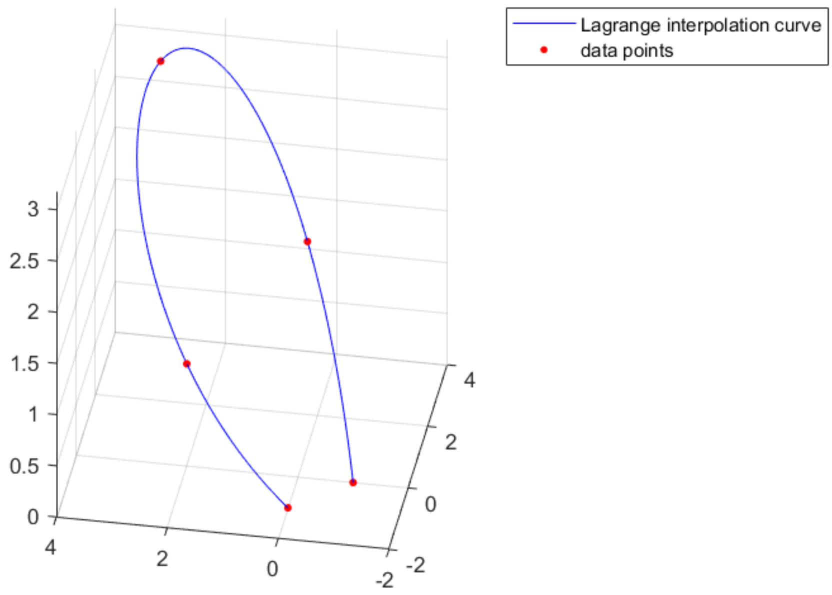

图 6: 切比雪夫累积弦长参数化

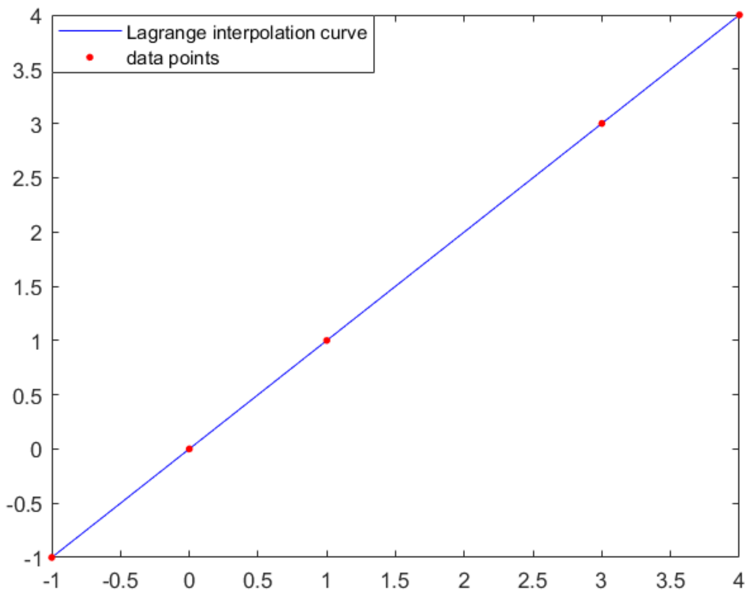

图 7: 型值点共线时得到的插值曲线是直线

思考题 2

1.

证明. $n = 0$时显然成立，现在考虑$n > 0$的情形。
令$f(t) = \dfrac{1}{x-t}, g(t) = x - t$，其中$x$是参数。于是，$(fg)[t_0, \ldots, t_n] = (1)[t_0, \ldots, t_n] = 0$。另

一方面，根据Leibniz公式以及差商的性质，我们有

$$\begin{aligned}(fg)[t_0,\ldots,t_n] &= \sum_{k=0}^{n} f[t_0,\ldots,t_k]\cdot g[t_k\ldots,t_n]\\ &= \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{x-t}[t_0,\ldots,t_k]\cdot(x-t)[t_k,\ldots,t_n]\\ &= \frac{1}{x-t}[t_0,\ldots,t_{n-1}]\cdot(x-t)[t_{n-1},t_n]+\frac{1}{x-t}[t_0,\ldots,t_n]\cdot(x-t)[t_n]\\ &= -\frac{1}{x-t}[t_0,\ldots,t_{n-1}]+\frac{1}{x-t}[t_0,\ldots,t_n]\cdot(x-t_n).\end{aligned}$$

记$F(n)=\dfrac{1}{x-t}[t_0,\ldots,t_n]$，于是$F(n)=\dfrac{1}{x-t_n}F(n-1)$。又因为$F(0)=\dfrac{1}{x-x_0}$，可得

$$\frac{1}{x-t}[t_0,\ldots,t_n]=F(n)=\frac{1}{(x-t_0)\cdots(x-t_n)}.$$

QED

2.

证明. 只需证明$P(t)$是单项式时结论成立，从而根据差商的线性性质可得$P(t)$是多项式时的情形成立。
设$P(t) = t^m(m > n)(m \le n$的情形是显然的)，通过差商的定义和数学归纳法容易证明$P(t)$是关于$t_0,\ldots,t_n$的完全对称多项式。 QED

思考题 3

1.

证明. 记$f_i=f(t_i)$，先证明

$$\Delta^n f_i=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}f_{i+k}.$$

对于$n=1$，$\Delta f_i=f_{i+1}-f_i$，显然成立。假设结论成立，根据归纳步骤，我们有

$$\begin{aligned}\Delta^{n+1}f_i=\Delta\Delta^n f_i &= \Delta\left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}f_{i+k}\right)\\ &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}f_{i+k+1}-\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}f_{i+k}\\ &= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{n+1-k}\binom{n}{k-1}f_{i+k}+f_{i+n+1}\\ &\quad+\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k+1}\binom{n}{k}f_{i+k}+(-1)^{n+1}f_i\\ &= \sum_{k=0}^{n+1}(-1)^{n+1-k}\binom{n+1}{k}f_{i+k}.\end{aligned}$$

于是当$i=0$时，便有$\Delta^n F(t_0)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n+1-k}\binom{n}{k}F(t_k)$成立。 QED

2.

证明. 记$l_n(t) = \prod_{i=0}^{n}(t-t_i)$，则$l'_m(t_k) = \prod_{i=0,i\neq k}^{n}(t_k-t_i)$。于是，由$t_k - t_i = (k-i)\Delta t$可得，

$$l'_n(t_k) = \prod_{i=0,i\neq k}^{n}(k-i)\Delta t = (\Delta t)^n k!(n-k)!(-1)^{n-k}.$$

因此，我们有

$$F[t_0,\ldots,t_n] = \sum_{k=0}^{n}\frac{F(t_k)}{l'_n(t_k)} = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{n-k}F(t_k)}{k!(n-k)!(\Delta t)^n} = \frac{1}{n!(\Delta t)^n}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}F(t_k) = \frac{\Delta^n F(t_0)}{n!(\Delta t)^n}.$$

QED