第九章 Bézier 曲面与 B 样条曲面

§1. 张量积曲面概述

- 张量积

两向量的张量积

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_0b_0 & a_0b_1 & a_0b_2 & a_0b_3 \\ a_1b_0 & a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 \\ a_2b_0 & a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 \end{bmatrix}$$

- 张量积函数

定义：设 U 为 m+1 维线性空间，基函数 $f_0(u),\ldots,f_m(u)$

V 为 n+1 维线性空间，基函数 $g_0(v),\ldots,g_n(v)$

则 U 与 V 的张量积空间定义为

$$U\otimes V=span\{f_i(u)g_j(v); i=0,1,\ldots,m, j=0,1,\ldots,n\}$$

- 张量积曲面

$$S(u,v)=\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}P_{ij}f_i(u)g_j(v)$$

- 双三次样条函数

定义：设 $D=[a,b]\times[c,d]$，

并有剖分

Δ_u： $a=u_0<\ldots<u_n=b$

Δ_v： $c=v_0<\ldots<v_m=d$

$\Delta=\Delta_u\times\Delta_v$ 称为 D 的一个剖分，它的每一个小矩形区域为

$$D_{ij}=[u_{i-1},u_i]\times[v_{j-1},v_j]$$

若 D 上一个函数 $f(u,v)$满足

(1) 在每一个D_{ij}上关于 u 和 v 都是三次的。

(2) $\dfrac{\partial^{\alpha+\beta} f(u,v)}{\partial u^{\alpha}\partial v^{\beta}}$ $(\alpha,\beta=0,1,2)$在 D 上连续。

则称$f=f(u,v)$在 D 上关于Δ的双三次样条函数。

定理：记$S(u,v;\Delta)$为双三次插值样条函数的全体，则

$S(u,v;\Delta)=S(u;\Delta_u)\otimes S(v;\Delta_v)$

§2. 张量积 Bézier 曲面

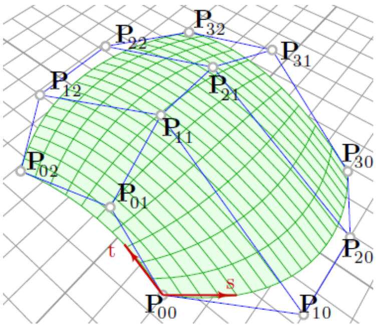
(1) 定义与举例

$$S(u,v)=\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}P_{ij}B_{i,m}(u)B_{j,n}(v) \qquad (u,v)\in[0,1]^2$$

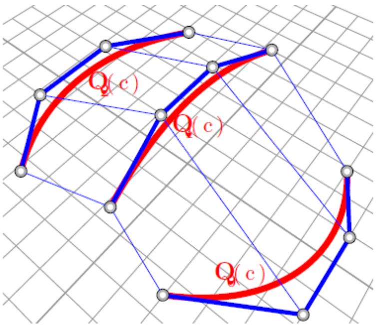
$$\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}P_{ij}B_{i,m}(c)B_{j,n}(v)=\sum_{j=0}^{n}\left[\sum_{i=0}^{m}P_{ij}B_{i,m}(c)\right]B_{j,n}(v)=\sum_{j=0}^{n}Q_j(c)B_{j,n}(v)$$

其中$Q_j(c)$为控制曲线

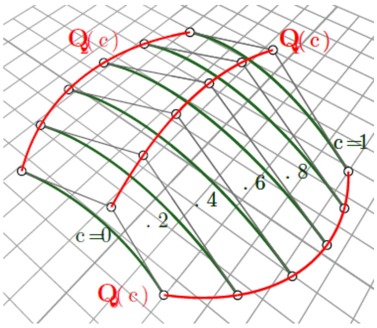
若 c 为常数，则得到曲面上的等参数曲线。



曲面与控制网格



控制曲线



等参数曲线

- 算子表示

$S(u,v)=[(1-u)I+uE_1]^m[(1-v)I+vE_2]^nP_{00}$

若$m=n$，又称为双$n(m)$次曲面。

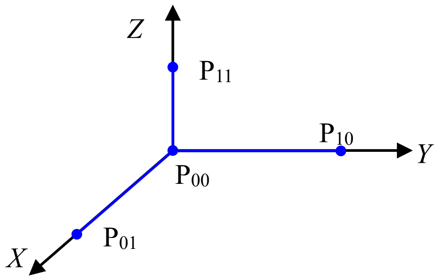
- 双线性 Bézier 曲面

$$S(u,v)=P_{00}(1-u)(1-v)+P_{01}(1-u)v+P_{10}u(1-v)+P_{11}uv$$

易知：角点插值，边界为直线段

若四个控制顶点共面，该 Bézier 曲面为一平面片。

若四点不共面，做仿射变换，分别将控制顶点变换到坐标原点和坐标轴上，从而有

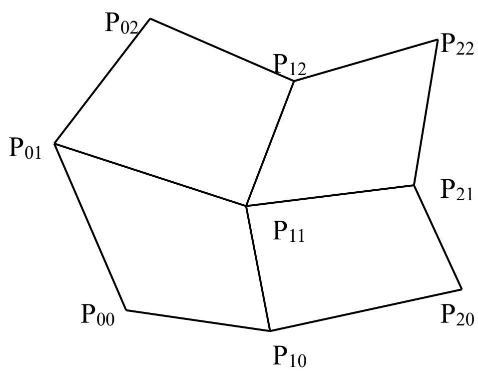


$$\begin{cases} X=v(1-u) \\ Y=u(1-v) \\ Z=uv \end{cases}$$

有 $(X+Z)(Y+Z)=Z$，

此曲面为马鞍面。

- 双二次 Bézier 曲面



$$S(u,v)=\sum_{i=0}^{2}\sum_{j=0}^{2}P_{ij}B_{i,2}(u)B_{j,2}(v)$$

$u=0$ 时，有 $S(0,v)=\sum_{j=0}^{2}P_{0j}B_{j,2}(v)$

控制顶点 P_{11} 不影响边界

角点切平面：由角点及与角点相邻的两个控制顶点所确定的平面。

- 双三次 Bézier 曲面

$$S(u,v)=\sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3}P_{ij}B_{i,3}(u)B_{j,3}(v)$$

记 $U=\begin{pmatrix}1 & u & u^2 & u^3\end{pmatrix}$

$V=\begin{pmatrix}1 & v & v^2 & v^3\end{pmatrix}$

$P=(P_{ij})_{0\le i\le 3;0\le j\le 3}$

$$M=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-3&3&0&0\\3&-6&3&0\\-1&3&-3&1\end{pmatrix}$$

则 $S(u,v)=UMP^TM^TV^T$

(2) 基本性质

- 导数公式

$$S(u,v)=[(1-u)I+uE_1]^m[(1-v)I+vE_2]^n P_{00}$$

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta}S(u,v)}{\partial u^\alpha \partial v^\beta}=\frac{m!(E_1-I)^\alpha}{(m-\alpha)!}\frac{n!(E_2-I)^\beta}{(n-\beta)!}[(1-u)I+uE_1]^{m-\alpha}[(1-v)I+vE_2]^{n-\beta}P_{00}$$

$0\le\alpha\le m$， $0\le\beta\le n$

- 仿射不变性

记 A 为仿射变换，则 $AS(u,v)=\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}AP_{ij}B_{i,m}(u)B_{j,n}(v)$

- 凸包性质

Bézier 曲面位于其控制网格的凸包内。

- 角点及切平面插值

$S(0,0)=P_{00}$， $S(1,0)=P_{m0}$

$S(0,1)=P_{0n}$， $S(1,1)=P_{mn}$

- 边界曲线

$$S(0,v)=\sum_{j=0}^{n}P_{0j}B_{j,n}(v)$$

- 平面再生性

所有控制顶点共面，则 Bézier 曲面为一平面片。

- 扭矢(twist)

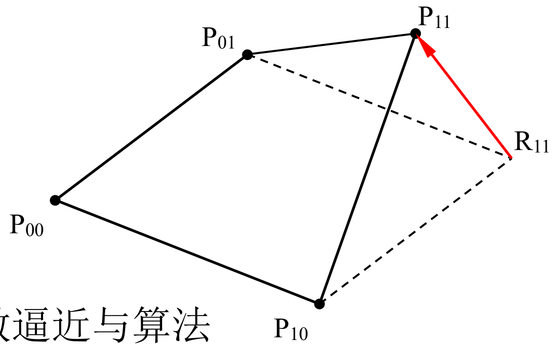
曲面的扭矢是该曲面的二阶混合偏导数，即：$\dfrac{\partial^2 S(u,v)}{\partial u \partial v}$

Bézier 曲面在角点处的扭矢：$\dfrac{\partial^2 S(0,0)}{\partial u \partial v} = mn\Delta^{1,1}P_{00}$

$\Delta^{1,1}P_{00} = (P_{11} - P_{10}) - (P_{01} - P_{00})$

令 $R_{11} = P_{10} + P_{01} - P_{00}$　　(该四点构成平行四边形)

则 $\Delta^{1,1}P_{00} = P_{11} - R_{11}$



(3) 离散逼近与算法

- 升阶公式

设有 (m,n) 阶 Bézier 曲面：$S(u,v) = \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} P_{ij} B_{i,m}(u) B_{j,n}(v)$

可升阶成 $(m+1,n)$，$(m,n+1)$ 或 $(m+1,n+1)$ 阶 Bézier 曲面

$$S^{m+1,n}(u,v) = \sum_{j=0}^{n}\left[\sum_{i=0}^{m+1} P_{ij}^{(1,0)} B_{i,m+1}(u)\right] B_{j,n}(v)$$

其中：$P_{ij}^{(1,0)} = \dfrac{i}{m+1} P_{i-1,j} + \left(1 - \dfrac{i}{m+1}\right) P_{ij}$；　$\begin{cases} i = 0,1,\ldots,m+1 \\ j = 0,1,\ldots,n \end{cases}$

$$S^{m+1,n+1}(u,v) = \sum_{i=0}^{m+1}\sum_{j=0}^{n+1} P_{ij}^{(1,1)} B_{i,m+1}(u) B_{j,n+1}(v)$$

其中：$P_{ij}^{(1,1)} = \begin{bmatrix} \dfrac{i}{m+1} & 1 - \dfrac{i}{m+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{i-1,j-1} & P_{i-1,j} \\ P_{i,j-1} & P_{i,j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{j}{n+1} \\ 1 - \dfrac{j}{n+1} \end{bmatrix}$　　$\begin{cases} i = 0,1,\ldots,m+1 \\ j = 0,1,\ldots,n+1 \end{cases}$

注：升阶后的控制顶点由原网格顶点双线性插值得到。

- de Casteljau 算法

设 $(u_0,v_0)\in[0,1]^2$，求 $S(u_0,v_0)$

$$S(u_0,v_0)=\sum_{j=0}^{n}\left[\sum_{i=0}^{m}P_{ij}B_{i,m}(u_0)\right]B_{j,n}(v_0)$$

对 u 向和 v 向分别用曲线求值算法可求得曲面上点。

即：先求出 $Q_j=\sum_{i=0}^{m}P_{ij}B_{i,m}(u_0)$，　$j=0,1,\ldots,n$

再计算 $\sum_{j=0}^{n}Q_jB_{j,n}(v_0)$，即得 $S(u_0,v_0)$。

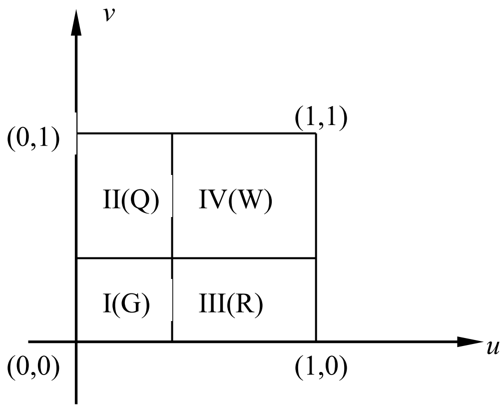
- 分割算法与定理

I. $\{G_{ij}\}_{00}^{mn}=\{P_{ij}^{ij}\}_{00}^{mn}$

II. $\{Q_{ij}\}_{00}^{mn}=\{P_{in}^{i,n-j}\}_{00}^{mn}$

III. $\{R_{ij}\}_{00}^{mn}=\{P_{mj}^{m-i,j}\}_{00}^{mn}$

IV. $\{W_{ij}\}_{00}^{mn}=\{P_{ij}^{m-i,n-j}\}_{00}^{mn}$



分割算法

Procedure SurfaceSplit(P,m,n,G,Q,R,W)

输入：P, m, n

输出：G, Q, R, W

Step 1: 赋初值 W←P

Step 2: (u 向离散)

```
for (j=0 to n)
{
    for (i=0 to m-1)
    {
        Qij=Wij;
        for (r=0 to m-i-1)      Wrj=(Wrj+Wr+1,j)/2;
    }
```

```
        Qmj=W0j;
    }
```
Step 3: (v 向离散)
```
    for (i=0 to m)
    {
        for (j=0 to n-1)
        {
            Gij=Qi0; Rij=Wi0;
            for (r=0 to n-j-1)
            {
                Qir=(Qir+Qi,r+1)/2;
                Wir=(Wir+Wi,r+1)/2;
            }
        }
        Gi,n=Qi,0;     Ri,n=Wi,0;
    }
```

- 保型问题

凸曲面：凸体的边界面

Bézier 曲面控制网格为凸 $\not\Rightarrow$ Bézier 曲面为凸

定理：若 Bézier 曲面控制网格满足

(i) 所有顶点和边都是$\{P_{ij}\}$凸包边界上的点和边；

(ii) 任一拓扑矩形面对应一个几何平行四边形

则相应的 Bézier 曲面为凸。

- 包络性质

构造曲面簇

$$S(u,v,\lambda,\mu)=[(1-\lambda)I+\lambda E_1]^q[(1-\mu)I+\mu E_2]^r \\ [(1-u)I+uE_1]^{m-q}[(1-v)I+vE_2]^{n-r}P_{00}$$

其中$0<q<m$， $0<r<n$

则 Bézier 曲面$S(u,v)=[(1-u)I+uE_1]^m[(1-v)I+vE_2]^n P_{00}$是上述曲面簇的包络面。

(4) 函数型曲面的表示

设函数 $f(x,y)=\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}b_{ij}B_{i,m}(x)B_{j,n}(y)$

表示成参数形式 $X(u,v)=\begin{bmatrix} u \\ v \\ f(u,v) \end{bmatrix}$

取控制顶点 $P_{ij}=\begin{bmatrix} i/m \\ j/n \\ b_{ij} \end{bmatrix}$

则有 $X(u,v)=\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}P_{ij}B_{i,m}(u)B_{j,n}(v)$

(5) 有理 Bézier 曲面

- 定义：已知控制顶点$\{P_{ij}\}$和权因子$\{\omega_{ij}\}$，其中 $\omega_{ij}>0$

$$R(u,v)=\frac{\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}P_{ij}\omega_{ij}B_{i,m}(u)B_{j,n}(v)}{\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\omega_{ij}B_{i,m}(u)B_{j,n}(v)}$$

- 基本性质与算法

\- 同 Bézier 曲面

\- 可以表示二次曲面片

- 齐次坐标表示

记 $R(u,v)=\dfrac{Q(u,v)}{W(u,v)}$

得齐次表示 $\overline{R}(u,v)=(Q(u,v),W(u,v))$

- 二次曲面的有理参数化

$$F(x,y,z)=0 \Longleftrightarrow \begin{cases} x=x(u,v) \\ y=y(u,v) \\ z=z(u,v) \end{cases}$$

$$F(x,y,z)=\sum_{i+j+k=2} a_{i,j,k}x^i y^j z^k+\sum_{i+j+k=1} b_{i,j,k}x^i y^j z^k+c=0$$

设 $c=0$

令 $\begin{cases} x=uw \\ y=vw \\ z=w \end{cases}$，代入上式，有

$$w^2\sum_{i+j+k=2} a_{i,j,k}u^i v^j+w\sum_{i+j+k=1} b_{i,j,k}u^i v^j=0$$

解得： $w=-\dfrac{\sum_{i+j+k=1} b_{i,j,k}u^i v^j}{\sum_{i+j+k=2} a_{i,j,k}u^i v^j}$

思考题：

1. 设计双 n 次 Bézier 曲面求值的金字塔算法，并与基于控制曲线的求值算法比较计算效率。
2. 证明 Bézier 曲面具有双线性精度。设 $X(u,v)$ 是双线性曲面，$P_{ij}=X\left(\frac{i}{m},\frac{j}{n}\right)$，则有 $\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} P_{ij}B_{i,m}(u)B_{j,n}(v)=X(u,v)$。
3. 把 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 表示成有理参数形式。

§3. 张量积 B 样条曲面

(1) 定义

给定节点分割

u 方向：$\{u_i\}_0^{m+p}$，得到基函数 $\{N_{i,p}(u)\}_0^m$

v 方向：$\{v_i\}_0^{n+q}$，得到基函数 $\{N_{i,q}(v)\}_0^n$

$S(u,v)=\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} P_{ij}N_{i,p}(u)N_{j,q}(v)$，其中 $(u,v)\in[u_{p-1},u_{m+1}]\times[v_{q-1},v_{n+1}]$

称为 $p\times q$ 阶 B 样条曲面。

(2) 基本性质

1. 仿射不变性

2. 凸包性质

3. 平面片再生性

4. 局部性质

   某一控制顶点 $P_{ij} \to P_{ij} + \Delta P_{ij}$

   影响参数区域 $\left[u_i, u_{i+p}\right] \times \left[v_j, v_{j+q}\right]$ 上所对应的一片曲面。

   若 $(u,v) \in \left[u_i, u_{i+1}\right] \times \left[v_j, v_{j+1}\right]$，

   则 $S(u,v) = \sum_{s=i-p+1}^{i} \sum_{r=j-q+1}^{j} P_{sr} N_{s,p}(u) N_{r,q}(v)$

5. 光滑性

   假设内部无重节点，则曲面

   在 u 向为 C^{p-2}

   在 v 向为 C^{q-2}

   整体光滑性 $C^{\min(p-2,q-2)}$

6. 尖点、直线段、平面的构造

   利用重节点与光滑性的关系，以及局部性质可以构造尖点、直线段、局部平面等形状。

7. 包络性质

同 B 样条曲线的包络性质。

(3) 求值与求导

$$S(u,v) = \sum_{s=i-p+1}^{i} \sum_{r=j-q+1}^{j} P_{sr} N_{s,p}(u) N_{r,q}(v)$$

利用控制曲线表示

$$S(u,v)=\sum_{r=j-q+1}^{j}Q_r(u)N_{r,q}(v)，\text{其中 }Q_r(u)=\sum_{s=i-p+1}^{i}P_{sr}N_{s,p}(u)$$

将 B 样条曲面的求值与求导转化为多条 B 样条曲线的求值与求导。

(4) B 样条曲面的离散与分割

- 节点加密与控制网格离散

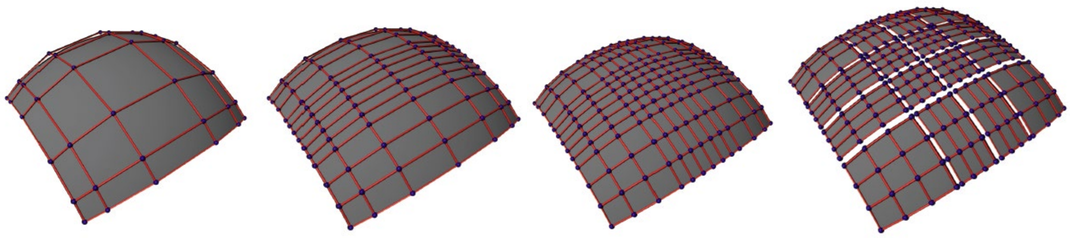
u 向节点加密 $\{\overline{u}_i\}_0^{m+\overline{m}+p}$，基函数 $\{\overline{N}_{i,p}(u)\}_0^{m+\overline{m}}$ 和离散 B 样条 $\{\alpha_{i,p}(r)\}$

v 向节点加密 $\{\overline{v}_j\}_0^{n+\overline{n}+q}$，基函数 $\{\overline{N}_{j,q}(v)\}_0^{n+\overline{n}}$ 和离散 B 样条 $\{\beta_{j,q}(s)\}$

$$\begin{aligned}S(u,v)&=\sum_i\sum_j P_{ij}N_{i,p}(u)N_{j,q}(v)\\&=\sum_r\sum_s\left(\sum_i\sum_j P_{ij}\alpha_{i,p}(r)\beta_{j,q}(s)\right)\overline{N}_{r,p}(u)\overline{N}_{s,q}(v)\end{aligned}$$

- 转化成分片 Bézier 曲面

利用节点加密和重节点技术，可得到分片 Bézier 曲面



- 保型性

定理：若 B 样条曲面控制网格满足

(i) 所有顶点和边都是 $\{P_{ij}\}$ 凸包边界上的点和边；

(ii) 任一拓扑矩形面对应一个几何平行四边形

则相应的 B 样条曲面为凸曲面。

(5) 有理 B 样条曲面

$$S(u,v)=\frac{\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}P_{ij}\omega_{ij}N_{i,p}(u)N_{j,q}(v)}{\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\omega_{ij}N_{i,p}(u)N_{j,q}(v)}$$

- 基本性质：同 B 样条曲面
- 可以有条件地表示二次曲面
- 表示范围远大于 B 样条曲面，且增加灵活性
- 实际应用，双三次有理 B 样条曲面

§4. 张量积曲面造型

(1) Bézier 曲面插值

将 Bézier 曲面 $X(u,v)=\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}P_{ij}B_{i,m}(u)B_{j,n}(v)$表示成矩阵形式

$$X(u,v)=\begin{bmatrix}B_{0,m}(u) & \dots & B_{m,m}(u)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}P_{00} & \dots & P_{0n}\\ \vdots & & \vdots\\ P_{m0} & \dots & P_{mn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}B_{0,n}(v)\\ \vdots\\ B_{n,n}(v)\end{bmatrix}$$

问题：给定数据 $\mathbf{x}_{ij};0\le i\le m,0\le j\le n$， 并给定每点对应参数$(u_i,v_j)$，构造一张插值 Bézier 曲面。

算法一：

根据插值条件，写出一点插值方程

$$\mathbf{x}_{ij}=\begin{bmatrix}B_{0,m}(u_i) & \dots & B_{m,m}(u_i)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}P_{00} & \dots & P_{0n}\\ \vdots & & \vdots\\ P_{m0} & \dots & P_{mn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}B_{0,n}(v_j)\\ \vdots\\ B_{n,n}(v_j)\end{bmatrix}$$

统一写成矩阵形式，有

$X=UPV$

其中

$$X=\begin{bmatrix}\mathbf{x}_{00} & \cdots & \mathbf{x}_{0n}\\ \vdots & & \vdots\\ \mathbf{x}_{m0} & \cdots & \mathbf{x}_{mn}\end{bmatrix}，\quad U=\begin{bmatrix}B_{0,m}(u_0) & \cdots & B_{m,m}(u_0)\\ \vdots & & \vdots\\ B_{0,m}(u_m) & \cdots & B_{m,m}(u_m)\end{bmatrix}$$

$$P=\begin{bmatrix}P_{00} & \cdots & P_{0n}\\ \vdots & & \vdots\\ P_{m0} & \cdots & P_{mn}\end{bmatrix}，\quad V=\begin{bmatrix}B_{0,n}(v_0) & \cdots & B_{0,n}(v_n)\\ \vdots & & \vdots\\ B_{n,n}(v_0) & \cdots & B_{n,n}(v_n)\end{bmatrix}$$

由 Bernstein 基函数线性无关性，知：矩阵 U,V 可逆，从而有

$$P=U^{-1}XV^{-1}$$

算法二：

将插值矩阵写成 $X=DV$ 和 $D=UP$ 的形式，

从 $X=DV$ 解出 D，从 $D=UP$ 中解出 P，

将 X 和 D 表示成行向量形式，$X=DV$ 可转化为一组曲线插值问题。

将 D 和 P 表示成列向量形式，$D=UP$ 也可转化为一组曲线插值问题。

结论：张量积曲面插值问题可转化为曲线插值问题。

(2) 自由变形(Free-form deformation)

利用 Bézier 表示的线性精度性质，将单位正方形区域中的点 (u,v) 表示成

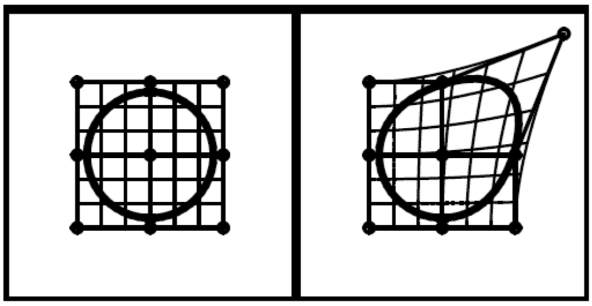
$$(u,v)=\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}P_{ij}B_{i,m}(u)B_{j,n}(v)$$

其中 $P_{ij}=\left(\frac{i}{m},\frac{j}{n}\right)$； $0\le i\le m$， $0\le j\le n$

修改控制顶点 $P_{ij}\Rightarrow\hat{P}_{ij}$

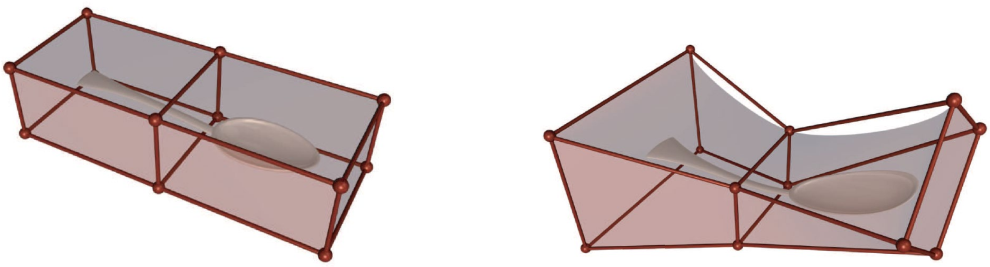
得到变形后点的位置

$$(\hat{u},\hat{v})=\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\hat{P}_{ij}B_{i,m}(u)B_{j,n}(v)$$



空间自由变形

$$(\hat{u},\hat{v},\hat{w})=\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{l}\hat{P}_{ijk}B_{i,m}(u)B_{j,n}(v)B_{k,l}(w)$$

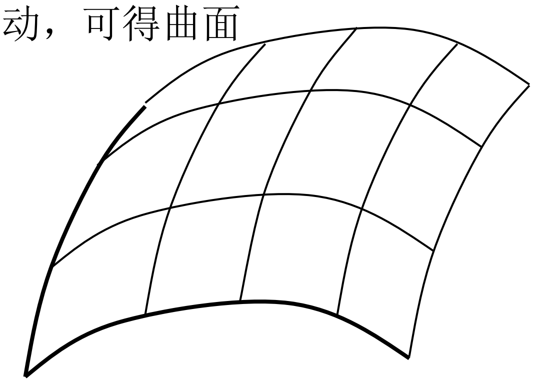


(3) Translational 曲面

假定两条曲线$\mathbf{c}_1(u)$和$\mathbf{c}_2(v)$相交于一点$\mathbf{a}=\mathbf{c}_1(0)=\mathbf{c}_2(0)$，

将一条曲线沿着另一条曲线平行移动，可得曲面

$$\mathbf{t}(u,v)=\mathbf{c}_1(u)+\mathbf{c}_2(v)-\mathbf{a}$$



容易验证：

$$\frac{\partial^2\mathbf{t}(u,v)}{\partial u\partial v}\equiv 0$$

凸组合曲面插值：

已知一张四边形曲面的四条边界曲线，构造一张插值曲面

过四边形四角点分别构造过两条边界线的曲面$\mathbf{t}_{ij}(u,v);i,j\in\{0,1\}$

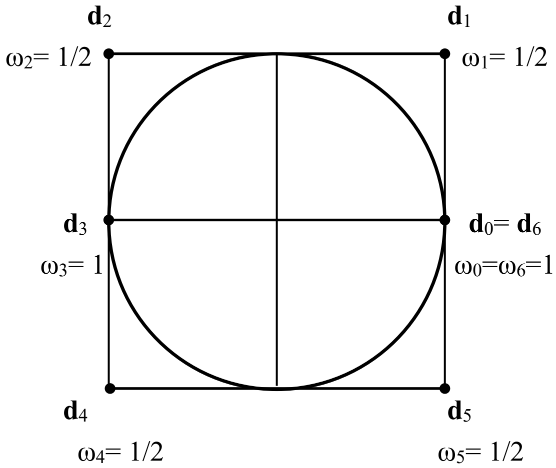
构造插值曲面

$$\mathbf{x}(u,v)=\begin{bmatrix}1-u & u\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{t}_{00}(u,v) & \mathbf{t}_{01}(u,v)\\ \mathbf{t}_{10}(u,v) & \mathbf{t}_{11}(u,v)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1-v\\ v\end{bmatrix}$$

注：这种曲面也称为 Coons 曲面片。

(4) 旋转面

- 整圆的 NURBS 表示



节点向量：

$$U=[0,0,0,0.25,0.5,0.5,0.75,1,1,1]$$

二次 NURBS 表示：

$$\mathbf{d}(u)=\frac{\sum_{i=0}^{6}\omega_i\mathbf{d}_iN_{i,3}(u)}{\sum_{i=0}^{6}\omega_iN_{i,3}(u)}$$

- 旋转面生成

假设在 xz 平面上有一条母线

$$\mathbf{c}(v)=\frac{\sum_{j=0}^{n}\omega_{0,j}\mathbf{d}_{0,j}N_{j,q}(v)}{\sum_{j=0}^{n}\omega_{0,j}N_{j,q}(v)}$$

由 $\mathbf{c}(v)$ 绕 z 轴旋转得到旋转曲面

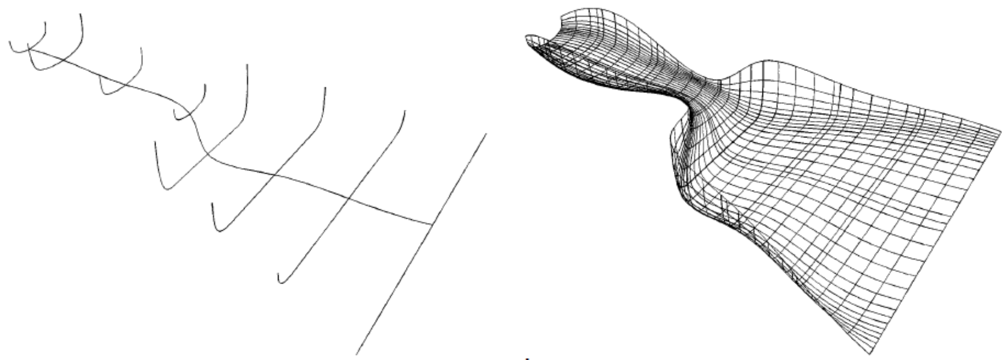
$$X(u,v)=\frac{\sum_{i=0}^{6}\sum_{j=0}^{n}\omega_{ij}\mathbf{d}_{ij}N_{i,3}(u)N_{j,q}(v)}{\sum_{i=0}^{6}\sum_{j=0}^{n}\omega_{ij}N_{i,3}(u)N_{j,q}(v)}$$

其中 $\mathbf{d}_{ij}$ 由初始控制顶点 $\mathbf{d}_{0j}$ 旋转生成圆得到的控制顶点

曲面权因子由如下公式计算

$$\omega_{ij} = \begin{cases} \omega_{0j} & i = 0,3,6 \\ \frac{1}{2}\omega_{0j} & i = 1,2,4,5 \end{cases}$$

(5) Skinning 曲面



a　　　　　　　　　　b

问题：给定一组截面线，构造一张插值曲面。

输入一组截面线：$C_k(v)$;　　$k = 0,1,\ldots,K$

构造一张插值曲面$S(u,v)$，使得$S(u_k,v) = C_k(v)$;　　$k = 0,1,\ldots,K$

设 $S(u,v) = \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} P_{ij} N_{i,p}(u) N_{j,q}(v)$

$$C_k(v) = \sum_{j=0}^{n} Q_{kj} N_{j,q}(v); \quad k = 0,1,\ldots,K$$

根据曲面插值条件，有：

$$\begin{aligned} S(u_k,v) &= \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} P_{ij} N_{i,p}(u_k) N_{j,q}(v) \\ &= \sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{i=0}^{m} P_{ij} N_{i,p}(u_k)\right) N_{j,q}(v) \equiv \sum_{j=0}^{n} Q_{kj} N_{j,q}(v) \end{aligned} \qquad k = 0,1,\ldots,K$$

从而有$\sum_{i=0}^{m} P_{ij} N_{i,p}(u_k) = Q_{kj}$;　　$j = 0,1,\ldots,n$　　$k = 0,1,\ldots,K$

对任意 $j \in \{0,1,\ldots,n\}$，

控制顶点$P_{ij}; 0 \le i \le m$也是一条插值点列$Q_{kj}; k = 0,1,\ldots,K$的 B 样条曲线得控制顶点。

算法：

Step1：调整截面线，使所有截面线定义于相同节点向量

Step2：设定截面线对应参数u_k;　$k=0,1,\ldots,K$

Step3：按列对截面线控制顶点进行插值，得到 B 样条曲面控制顶点。

思考题：

1. 写出环面的 NURBS 表示。
2. 编程实现平面自由变形算法。
3. 编程实现 B 样条曲面插值算法。

§5. 曲线节点 B 样条曲面

(1) 问题的提出

为$p\times q$阶 B 样条曲面的定义：

给定节点向量$\{u_i\}_0^{m+p}$和$\{v_i\}_0^{n+q}$，分别得到基函数$\{N_{i,p}(u)\}_0^m$和$\{N_{j,q}(v)\}_0^n$，定义 B 样条曲面

$$S(u,v)=\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}P_{ij}N_{i,p}(u)N_{j,q}(v),\quad 其中(u,v)\in[u_{p-1},u_{m+1}]\times[v_{q-1},v_{n+1}]$$

若采用重节点技术可在曲面上得到一条沿等参线的特征曲线。

问题：如何在曲面上设计出非等参线的特征线？若曲面的一侧边界线有尖锐特征，而另一侧为光滑曲线，如何实现二者之间的自然过渡？

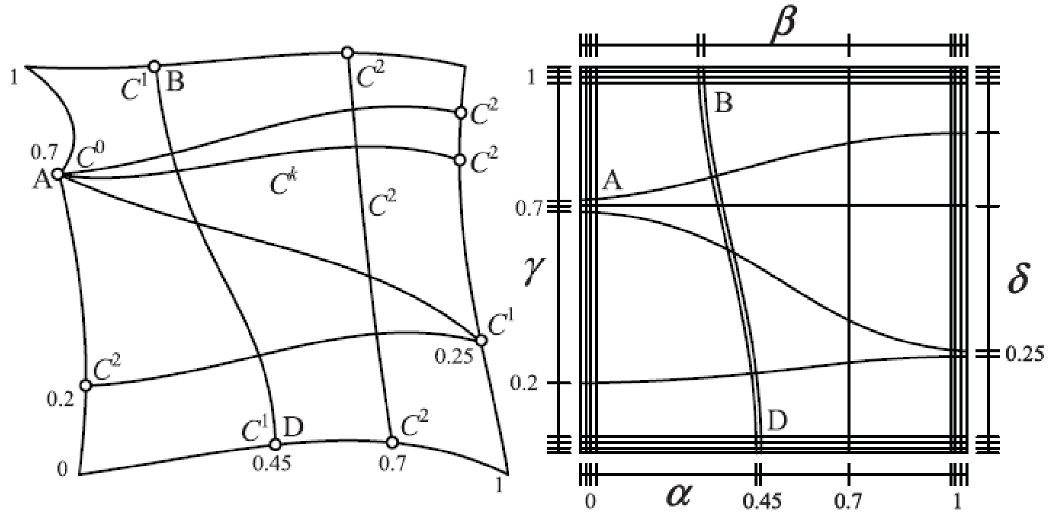
(2) 曲线节点技术

基本想法：在 u 或 v 方向上节点不再是常数而是 v 或 u 的函数，即有

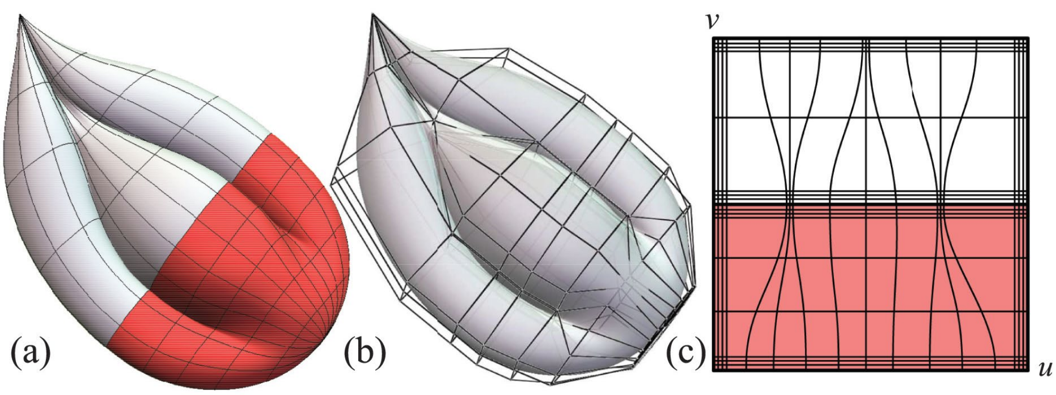
$$u_0 \le u_1(v) \le u_2(v) \le \cdots \le u_{m+p-1}(v) \le u_{m+p}$$

$$v_0 \le v_1(u) \le v_2(u) \le \cdots \le v_{n+q-1}(u) \le v_{n+q}$$

例如：



基于曲线节点向量定义的 B 样条分别记为$\{N_{i,p}^{v}(u)\}_0^m$和$\{N_{j,q}^{u}(v)\}_0^n$，其计算仍采用 deBoor-Cox 公式。



具有曲线节点向量的 B 样条曲面

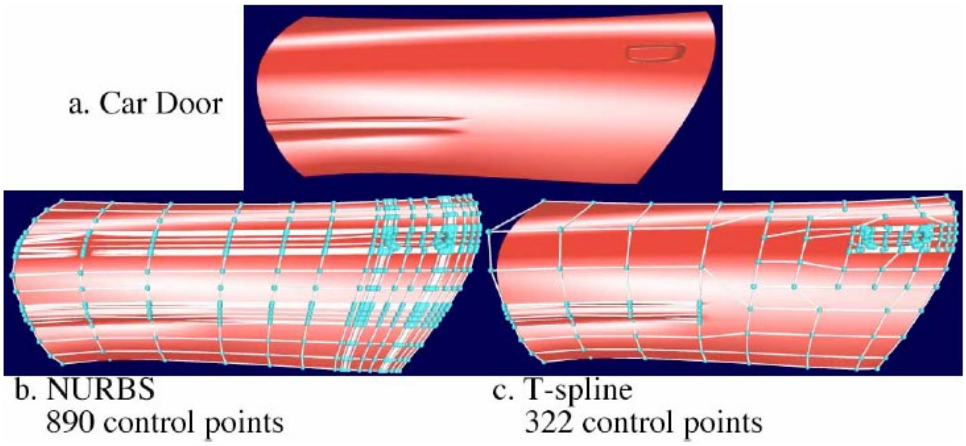
$$S(u,v)=\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}P_{ij}N_{i,p}^{v}(u)N_{j,q}^{u}(v)$$

此曲面可用来生成非参数线特征线并能实现由尖锐点到光滑曲

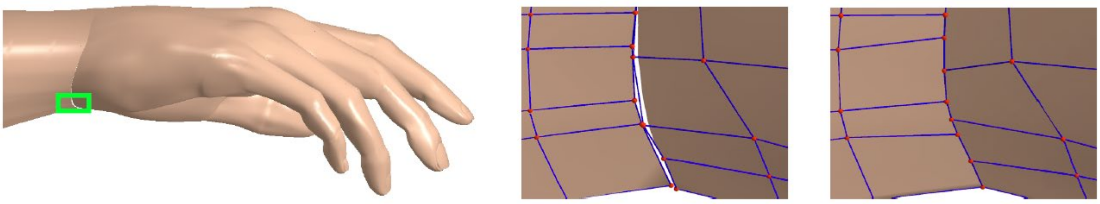
线的自然过渡。

§6. T 样条曲面

(3) 为什么引入 T 样条

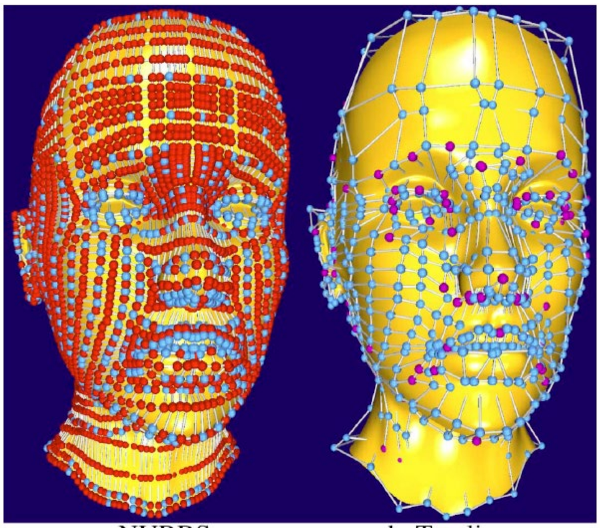


- NURBS 曲面控制网格每个顶点有 4 条边相连，T 样条曲面控制顶点允许 3 条或 2 条连接边。
- 表示曲面时，NURBS 曲面许多控制顶点是多余的，而 T 样条曲面可有效去除多余控制顶点。
- T 样条曲面与 NURBS 曲面兼容，NURBS 曲面属于 T 样条的特例，而 T 样条曲面也可以转化为 NURBS 曲面。



(a) Model of a hand comprised of B-spline surfaces. (b) NURBS surfaces. (c) T-Spline.

T 样条曲面造型举例



a. NURBS　　b. T-spline

NURBS 曲面控制顶点数 4712，其中红点为多余控制顶点

T-spline 曲面控制顶点数 1109，其中紫色点为 T 节点

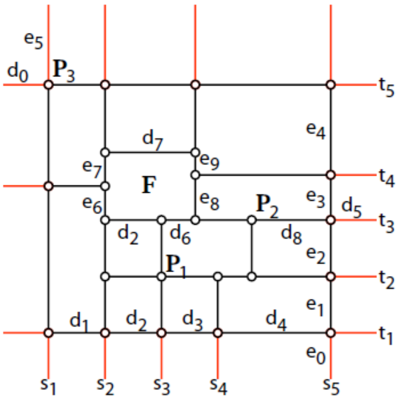
(4) T 样条的定义

- T 网格 pre-image 定义

  T 网格 pre-image 由曲面节点区间定义，由一系列矩形面构成，在拓扑结构上等价于曲面控制网格。

  T 网格 pre-image 满足两条规则：

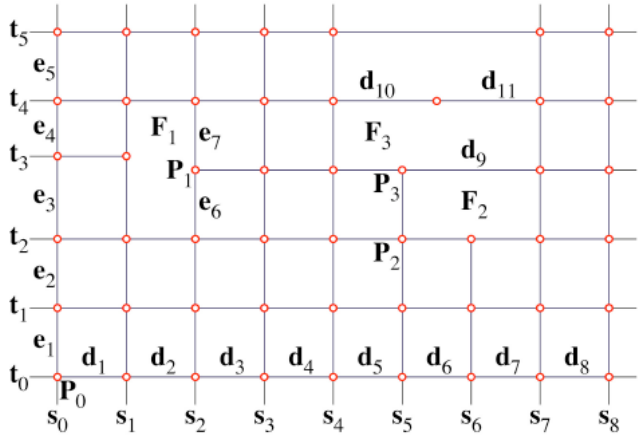
1. 矩形面对边上的节点区间长度之和相等。
2. 矩形面两条对边上的节点参数相同，则这两点连成一条边。



pre-image of a T-mesh

例：在矩形面 F 中，$d_2 + d_6 = d_7$，$e_6 + e_7 = e_8 + e_9$

● T 样条 blending function 定义



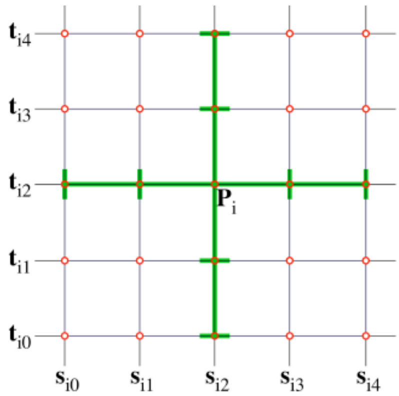
节点坐标系与节点参数：给定 P_0 点节点坐标(0,0)，则其它点节点坐标可由节点区间算出。

例：P_1 点节点坐标$(d_1+d_2, e_1+e_2+e_6)= (s_2, t_2+e_6)$

P_2 点节点坐标(s_5, t_2)

P_3 点节点坐标(s_5, t_2+e_6)

节点处 blending function 的定义



$$B_i(s,t) = N[\mathbf{s}_i](s)N[\mathbf{t}_i](t)$$

其中：$\mathbf{s}_i = [s_{i0}, s_{i1}, s_{i2}, s_{i3}, s_{i4}]$，$\mathbf{t}_i = [t_{i0}, t_{i1}, t_{i2}, t_{i3}, t_{i4}]$

混合函数可由下式计算得到：

$$N[\mathbf{s}_i](s)=\begin{cases}\dfrac{(s-s_{i0})^3}{(s_{i1}-s_{i0})(s_{i3}-s_{i0})(s_{i2}-s_{i0})}, & s_{i0}<s\le s_{i1}\\[2ex] \dfrac{(s-s_{i0})^2(s_{i2}-s)}{(s_{i2}-s_{i1})(s_{i3}-s_{i0})(s_{i2}-s_{i0})}+\dfrac{(s_{i3}-s)(s-s_{i0})(s-s_{i1})}{(s_{i2}-s_{i1})(s_{i3}-s_{i1})(s_{i3}-s_{i0})}+ & \\ \dfrac{(s_{i4}-s)(s-s_{i1})^2}{(s_{i2}-s_{i1})(s_{i4}-s_{i1})(s_{i3}-s_{i1})}, & s_{i1}<s\le s_{i2}\\[2ex] \dfrac{(s-s_{i0})(s_{i3}-s)^2}{(s_{i3}-s_{i2})(s_{i3}-s_{i1})(s_{i3}-s_{i0})}+\dfrac{(s_{i4}-s)(s_{i3}-s)(s-s_{i1})}{(s_{i3}-s_{i2})(s_{i4}-s_{i1})(s_{i3}-s_{i1})}+ & \\ \dfrac{(s_{i4}-s)^2(s-s_{i2})}{(s_{i3}-s_{i2})(s_{i4}-s_{i2})(s_{i4}-s_{i1})}, & s_{i2}<s\le s_{i3}\\[2ex] \dfrac{(s_{i4}-s)^3}{(s_{i4}-s_{i3})(s_{i4}-s_{i2})(s_{i4}-s_{i1})}, & s_{i3}<s\le s_{i4}\\[2ex] 0, & s<s_{i0}\quad or\quad s>s_{i4}\end{cases}$$

节点向量确定原则：

格点 P_i 处节点向量 $\mathbf{s}_i$ 与 $\mathbf{t}_i$ 按如下方法确定

1. s_{i2},t_{i2} 由 P_i 处节点坐标确定；

2. s_{i3},s_{i4} 由直线 $R(\alpha)=(s_{i2}+\alpha,t_{i2})$ 与 s 边相交的前两个交点坐标确定；

3. 其它节点类似确定。

例：P_3 点处 blending function：

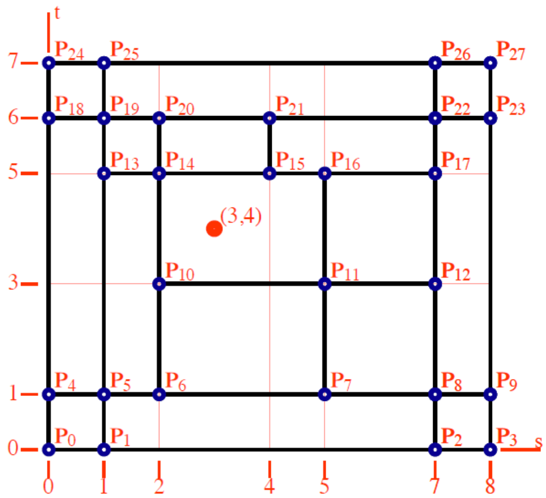
$$B_3(s,t)=N[s_3,s_4,s_5,s_7,s_8](s)N[t_1,t_2,t_2+e_6,t_4,t_5](t)$$

- T 样条曲面定义

$$P(s,t)=\frac{\sum_{i=1}^{n}\omega_i P_i B_i(s,t)}{\sum_{i=1}^{n}\omega_i B_i(s,t)}$$

若 $\sum_{i=1}^{n}\omega_i B_i(s,t)\equiv 1$，称为 standard T 样条曲面。

例：T 样条曲面上点的计算



$$P(s,t)=\frac{\sum_{i=0}^{27}\omega_i P_i B_i(s,t)}{\sum_{i=0}^{27}\omega_i B_i(s,t)}$$

为计算点 $P(3,4)$，需计算

$$B_i(3,4)=N[s_{i0},s_{i1},s_{i2},s_{i3},s_{i4}](3)N[t_{i0},t_{i1},t_{i2},t_{i3},t_{i4}](4)，\quad i=0,1,\ldots,27$$

$$B_{10}(3,4)=N[0,1,2,5,7](3)N[0,1,3,5,6](4)$$

$$B_{15}(3,4)=N[1,2,4,5,7](3)N[1,3,5,6,7](4)$$

$$B_{00}(3,4)=N[s_0,s_1,0,1,2](3)N[t_0,t_1,0,1,6](4)$$

$$B_{27}(3,4)=N[1,7,8,s_2,s_3](3)N[1,6,7,t_2,t_3](4)\ldots\ldots$$

将混合函数值求出后，便可计算曲面上点的坐标。

(5) T 样条节点插入算法

- T 样条节点插入目的与作用：

  1. 增加控制顶点从而增加自由度；

  2. 实现 T 样条曲面向 B 样条或 Bézier 曲面片的转换。

- 混合函数加细(blending function refinement)

  设 $\mathbf{s}=[s_0,s_1,s_2,s_3,s_4]$，$N(s)=N[s_0,s_1,s_2,s_3,s_4](s)$

插入节点参数 k，得到节点向量 $\tilde{\mathbf{s}}$

1. 若 $\tilde{\mathbf{s}} = [s_0, k, s_1, s_2, s_3, s_4]$，则

   $$N(s) = c_0 N[s_0, k, s_1, s_2, s_3](s) + d_0 N[k, s_1, s_2, s_3, s_4](s)$$

   其中 $c_0 = \dfrac{k - s_0}{s_3 - s_0}$，$d_0 = 1$

2. 若 $\tilde{\mathbf{s}} = [s_0, s_1, k, s_2, s_3, s_4]$，则

   $$N(s) = c_1 N[s_0, s_1, k, s_2, s_3](s) + d_1 N[s_1, k, s_2, s_3, s_4](s)$$

   其中 $c_1 = \dfrac{k - s_0}{s_3 - s_0}$，$d_1 = \dfrac{s_4 - k}{s_4 - s_1}$

3. 若 $\tilde{\mathbf{s}} = [s_0, s_1, s_2, k, s_3, s_4]$，则

   $$N(s) = c_2 N[s_0, s_1, s_2, k, s_3](s) + d_2 N[s_1, s_2, k, s_3, s_4](s)$$

   其中 $c_2 = \dfrac{k - s_0}{s_3 - s_0}$，$d_2 = \dfrac{s_4 - k}{s_4 - s_1}$

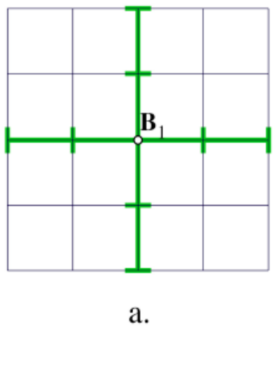
4. 若 $\tilde{\mathbf{s}} = [s_0, s_1, s_2, s_3, k, s_4]$，则

   $$N(s) = c_3 N[s_0, s_1, s_2, s_3, k](s) + d_3 N[s_1, s_2, s_3, k, s_4](s)$$

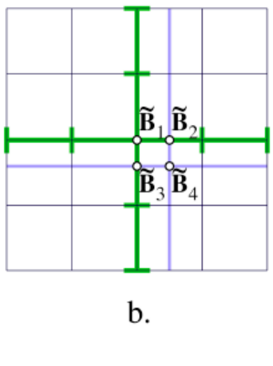
   其中 $c_3 = 1$，$d_3 = \dfrac{s_4 - k}{s_4 - s_1}$

对 t 方向也可做类似加细，得到加细后的混合函数。

例：如下图所示，对 $B_1(s,t)$ 进行加细，



a.



b.

$$B_1(s,t) = N[s_0, s_1, s_2, s_3, s_4](s) N[t_0, t_1, t_2, t_3, t_4](t)$$

插入节点 $\tilde{\mathbf{s}} = [s_0, s_1, s_2, k_s, s_3, s_4]$，得到

$$N[s_0,s_1,s_2,s_3,s_4](s) = c_s N[s_0,s_1,s_2,k_s,s_3](s) + d_s N[s_1,s_2,k_s,s_3,s_4](s)$$

插入节点 $\tilde{\mathbf{t}} = [t_0, t_1, k_t, t_2, t_3, t_4]$，得到

$$N[t_0,t_1,t_2,t_3,t_4](t) = c_t N[t_0,t_1,k_t,t_2,t_3](t) + d_t N[t_1,k_t,t_2,t_3,t_4](t)$$

得到节点加细后的 T 样条基函数

$$B_1(s,t) = c_1^1 \tilde{B}_1(s,t) + c_1^2 \tilde{B}_2(s,t) + c_1^3 \tilde{B}_3(s,t) + c_1^4 \tilde{B}_4(s,t)$$

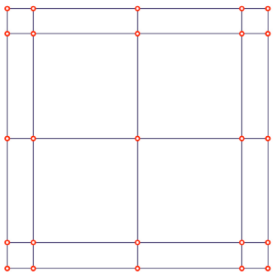
- T 样条空间

定义：在相同拓扑网格，节点区间和节点坐标系下的 T 样条的全体。

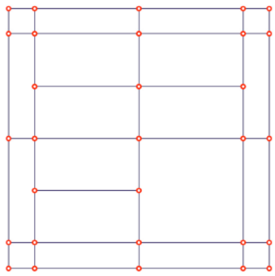
命题：一个 T 样条空间是其加细 T 样条空间的子集。

或者，T 样条空间与其加细 T 样条空间形成嵌套关系。

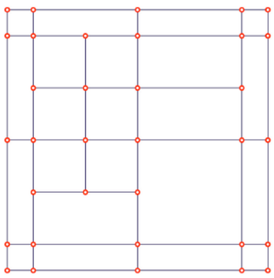
例：下图中 $S_1 \subset S_2 \subset \cdots \subset S_n$



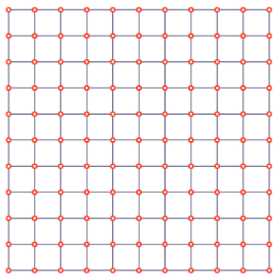
a. S_1



b. S_2



c. S_3



d. S_n

设 $P(s,t)\in S_1$，且 $P(s,t)=\begin{bmatrix}B_1(s,t) & \dots & B_n(s,t)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}P_1\\ \vdots \\ P_n\end{bmatrix}$

在 S_2 中 $P(s,t)=\widetilde{P}(s,t)=\begin{bmatrix}\widetilde{B}_1(s,t) & \dots & \widetilde{B}_m(s,t)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\widetilde{P}_1\\ \vdots \\ \widetilde{P}_m\end{bmatrix}$

由于 $S_1\subset S_2$，有 $B_i(s,t)=\sum_{j=1}^{m}c_i^j\widetilde{B}_j(s,t)$

由 $P(s,t)\equiv\widetilde{P}(s,t)$，易知 $\widetilde{P}_j=\sum_{i=1}^{n}c_i^jP_i$

记 $M_{1,2}=\begin{pmatrix}c_1^1 & c_2^1 & \dots & c_n^1\\ c_1^2 & c_2^2 & \dots & c_n^2\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ c_1^m & c_2^m & \dots & c_n^m\end{pmatrix}$，则有 $\begin{bmatrix}\widetilde{P}_1\\ \vdots \\ \widetilde{P}_m\end{bmatrix}=M_{1,2}\begin{bmatrix}P_1\\ \vdots \\ P_n\end{bmatrix}$

- 局部加细算法

局部加细指对一张 T 样条曲面加入新的控制顶点(及相应节点)。

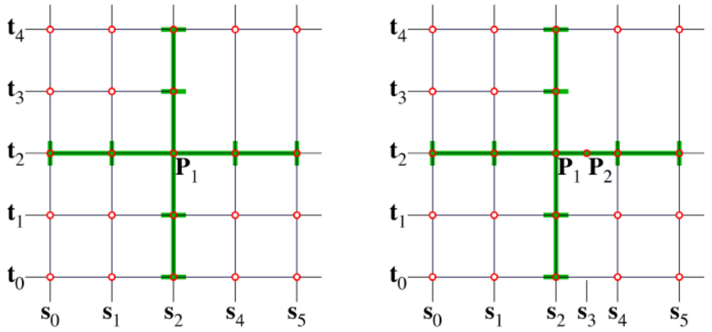
算法包括两部分：

1. 拓扑加细：对 T 网格(拓扑网格)需做节点插入(从而修改 T 网格)；
2. 几何加细：节点插入后，重新计算混合函数。由节点插入前后混合函数之间的转换矩阵，并根据老控制顶点算出新控制顶点。

问题：一次节点插入可引起(多个)混合函数加细，加细混合函数的节点向量在当前 T 网格上根据节点向量确定原则不一定存在。

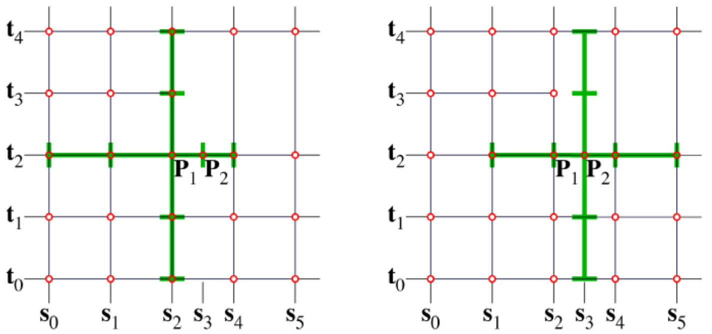
解决策略：对找不到节点向量的混合函数再次插入新的节点，相应地，控制网格也需要加入新控制顶点。

拓扑加细举例：



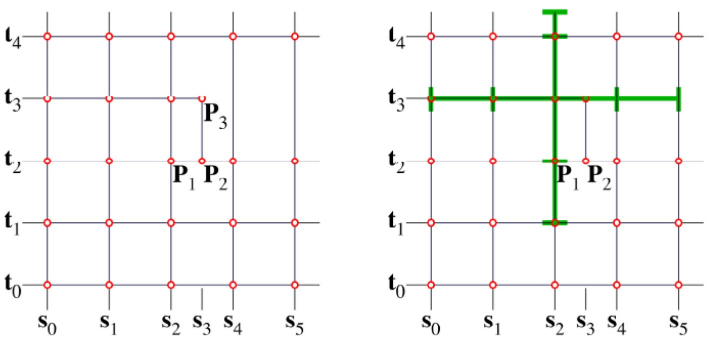
a. b.

插入点 P_2，节点中心在(s_1,t_2)，(s_2,t_2)，(s_4,t_2)，(s_5,t_2)的混合函数需要加细。其中节点中心在(s_1,t_2)，(s_4,t_2)，(s_5,t_2)的混合函数加细后在原 T 网格上可以找到节点向量。



c. d.

节点中心在(s_2,t_2)的混合函数可以分解成节点在 P_1，P_2 处混合函数的组合，而 P_2 处混合函数节点向量在 T 网格上缺少定义。

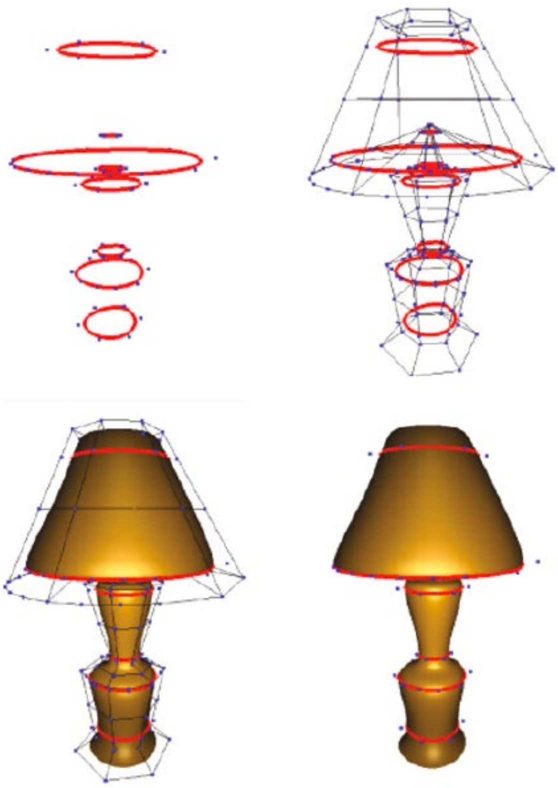


e. f.

T 网格中插入 P_3 点(控制网格对应加入一新点)，调整中心在(s_2,t_3)

的节点向量。

- T 样条曲面蒙皮(skinning)



Nasri, et al.2012

参考文献：

1. Thomas W. Sederberg, Jianmin Zheng, Almaz Bakenov, and Ahmad Nasri. T-Splines and T-NURCCs. ACM Transactions on Graphics, 22(3):477–484, 2003.
2. Thomas W. Sederberg, David L. Cardon, G. Thomas Finnigan, Nicholas S. North, Jianmin Zheng, and Tom Lyche. T-spline simplification and local refinement. ACM Transactions on Graphics, 23(3), 2004.
3. X Yang, and J Zheng. Approximate T-spline surface skinning. CAD 44(12): 1269-1276, 2012.
4. A. Nasri, K. Sinno, J. Zheng, Local T-spline surface skinning, The Visual Computer 28 (2012): 787-797.
5. X Li, et al. On Linear Independence of T-splines. CAGD 29(1): 63-76, 2012.
6. H. Kang, F. Chen and J. Chen, Modified T-splines. CAGD 30: 827-843, 2013.
7. Min-Jae Oh, Myung-Il Roh, Tae-wan Kim. Local T-spline surface skinning with shape preservation. CAD 104(2018) 15-26.
8. Carlotta Giannelli, Bert Jüttler, Hendrik Speleers， THB-splines: The truncated basis for hierarchical splines， Computer Aided Geometric Design 29 (2012) 485–498.