《计算机辅助几何设计》第十次作业

姓名：殷文良　　学号：12435063

2024 年 11 月 30 日

思考题 1

1.

证明. 设存在系数a_{ij}使得

$$\sum_{i+j\leq n} a_{ij} J^n_{i,j,k}(u,v,w) = \sum_{i+j\leq n} a_{ij} \frac{n!}{i!j!k!} u^i v^j w^k = 0.$$

上式两端同除以w^n，可得

$$\sum_{i+j\leq n} a_{ij} \frac{n!}{i!j!k!} \frac{u^i v^j}{w^{n-k}} = \sum_{i+j\leq n} a_{ij} \frac{n!}{i!j!k!} \frac{u^i}{w^i} \frac{v^j}{w^j} := \sum_{i+j\leq n} a_{ij} \frac{n!}{i!j!k!} x^i y^j,$$

其中，$x := \dfrac{u}{w}, y := \dfrac{v}{w}$。

由二元幂函数的线性无关性，可知$\forall (i,j,k), a_{ij}\dfrac{n!}{i!j!k!} = 0$，即$a_{ij} = 0$，从而三角形上定义的Bernstein函数是线性无关的。 QED

2.

证明. 由于$\alpha, \beta, \gamma = n - \alpha - \beta > 0$，根据三角域 Bernstein 基函数的权性，可得

$$\sum_{i+j+k=n} \frac{(n-\alpha-\beta)!}{(i-\alpha)!(j-\beta)!k!} u^{i-\alpha} v^{j-\beta} w^k = 1.$$

上式两端同乘以$u^\alpha v^\beta$，可得

$$\begin{aligned}
u^\alpha v^\beta &= \sum_{i+j+k=n} \frac{(n-\alpha-\beta)!}{(i-\alpha)!(j-\beta)!k!} u^i v^j w^k \\
&= \frac{\alpha!\beta!\gamma!}{n!} \sum_{i+j+k=n} \frac{n!}{[(i-\alpha)!\alpha!][(j-\beta)!\beta!]k!} u^i v^j w^k \\
&= \frac{\alpha!\beta!\gamma!}{n!} \sum_{i+j+k=n} \frac{i!j!}{[(i-\alpha)!\alpha!][(j-\beta)!\beta!]} \frac{n!}{i!j!k!} u^i v^j w^k \\
&= \frac{\alpha!\beta!\gamma!}{n!} \sum_{i+j+k=n} \binom{i}{\alpha}\binom{j}{\beta} B^n_{ijk}(u,v,w).
\end{aligned}$$

QED

3.

证明. 由第2题的结论，可得

$$x^i y^j = \frac{i!j!(n-i-j)!}{n!} \sum_{r+s+t=n} \binom{r}{i} \binom{s}{j} B_{rst}^n(x,y,z),$$

其中，$z = 1 - x - y$。因此，二元多项式可转化为如下的Bezier三角片形式

$$\begin{aligned} b(x,y) &= \sum_{0 \le i+j \le n} a_{ij} x^i y^j \\ &= \sum_{0 \le i+j \le n} a_{ij} \frac{i!j!(n-i-j)!}{n!} \sum_{r+s+t=n} \binom{r}{i} \binom{s}{j} B_{rst}^n(x,y,z). \end{aligned}$$

QED

4.

证明. 对于给定的n次Bézier三角片$B^n(P) = \sum_{i+j+k=n} Q_{i,j,k} J_{i,j,k}^n(P)$，
取三角形$T = Q_{i+1,j,k}, Q_{i,j+1,k}, Q_{i,j,k+1} := Q_0, Q_1, Q_2 (i+j+k=n-1)$。
从Q_1处出发向对边Q_0Q_2连一直线交于点Q_3，设$|Q_0Q_3| = s|Q_0Q_2|, 0 \le s \le 1$。则对于$Q_1Q_3$上任意一点$Q$，根据几何性质有

$$Q = (1-s)tQ_0 + (1-t)Q_1 + stQ_2, \quad 0 \le t \le 1.$$

于是，Bézier三角片中参数定义在该直线上的曲线方程为

$$c(t) = B^n(Q) = \sum_{i+j+k=n} Q_{i,j,k} J_{i,j,k}^n(Q) \quad = \sum_{i+j+k=n} Q_{i,j,k} J_{i,j,k}^n((1-s)tQ_0 + (1-t)Q_1 + stQ_2),$$

$$0 \le t \le 1.$$

QED