

## 第七章 曲线几何连续性

### §1. 空间曲线的微分几何

#### (a) 曲线参数表示与弧长

设参数曲线

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k} = (x(t), y(t), z(t))$$

$$\text{曲线弧长 } s(t) = \int_{t_0}^t |\mathbf{r}'(t)| dt$$

若  $|\mathbf{r}'(t)| = 1$ ，则有  $s(t) = t - t_0$ ，此时称参数  $t$  为弧长参数。

**定理：**次数大于 1 的多项式参数曲线不可能具有弧长参数。

(Farouki, CAGD 8(1991):151-157)

#### (b) 曲线论基本公式

设有弧长参数表示曲线： $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$

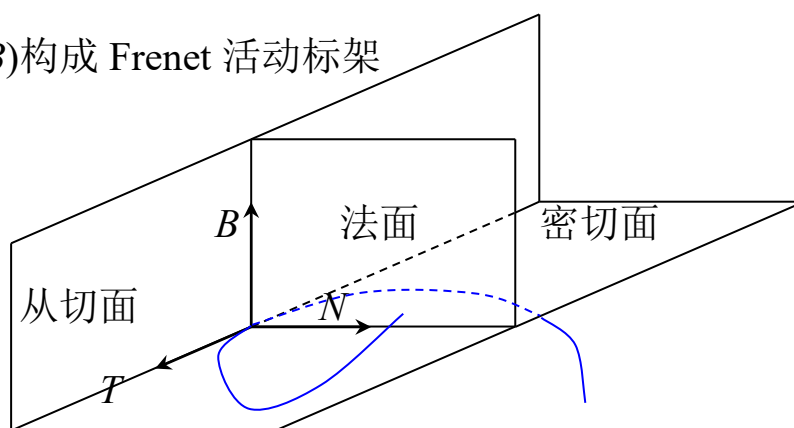
有： $\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \mathbf{r}'(s) = \mathbf{T}(s)$ ，且  $\mathbf{T}(s) \cdot \mathbf{T}(s) = 1$

$$\frac{dT^2(s)}{ds} = 2\mathbf{T}(s) \cdot \frac{d\mathbf{T}(s)}{ds} = 0, \text{ 其中 } \frac{d\mathbf{T}(s)}{ds} = k\mathbf{N}(s)$$

令  $\mathbf{B}(s) = \mathbf{T}(s) \times \mathbf{N}(s)$ ，有  $\mathbf{B}(s) \cdot \mathbf{B}(s) = 1$

$\mathbf{T}$ :切向(tangent),  $\mathbf{N}$ :法向(normal),  $\mathbf{B}$ : 副法向(binormal)

$(\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B})$  构成 Frenet 活动标架



一般参数曲线:  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ , 有

$$T = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}, \quad B = \frac{\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)}{|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)|},$$

$$N = B \times T = \frac{|\mathbf{r}'(t)|^2 \mathbf{r}''(t) - (\mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}''(t)) \mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|^2 \mathbf{r}''(t) - (\mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}''(t)) \mathbf{r}'(t)}}$$

曲率与挠率公式

$$\frac{dT(s)}{ds} = kN(s)$$

$$\text{由 } B \cdot T = 0, \text{ 得 } \frac{dB}{ds} \cdot T + B \cdot \frac{dT}{ds} = 0, \text{ 从而有: } \frac{dB}{ds} \cdot T = 0$$

$$\text{由 } B \cdot B = 1, \text{ 得 } \frac{dB}{ds} \cdot B = 0$$

$$\text{综上条件, 可得 } \frac{dB}{ds} = -\tau N$$

根据  $N = B \times T$ , 有

$$\frac{dN}{ds} = \frac{dB}{ds} \times T + B \times \frac{dT}{ds} = -\tau N \times T + kB \times N = \tau B - kT$$

$$\frac{d}{ds} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}$$

一般参数曲线的曲率与挠率公式:

$$k = \frac{|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|^3}, \quad \tau = \frac{(\mathbf{r}'(t), \mathbf{r}''(t), \mathbf{r}'''(t))}{|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)|^2}$$

## §2. 几何连续性概念

### (a) 曲线连续基本概念

$C^n$  连续: 两条曲线在连接点处有直到  $n$  阶连续导数。

$G^n$  连续: 两条曲线在连接点处关于弧长参数  $C^n$  连续。

$G^1$  连续: 位置连续+切向连续

$G^2$  连续:  $G^1$  连续+曲率向量连续

(b)  $G^2$  连续性条件

● **定理：** 设曲线  $C: P = P(t)$  在  $t = u$  处满足

$P'(u-) \neq 0$ ,  $P'(u+) \neq 0$ ,  $P''(u-)$  与  $P''(u+)$  存在, 则  $C$  在  $P(u)$  处为  $G^2$  连续的充要条件为:

存在  $\alpha = \alpha(u) > 0$ ,  $\beta = \beta(u)$  使得

$$\begin{cases} P(u-) = P(u+) \\ P'(u-) = \alpha(u)P'(u+) \\ P''(u-) = \alpha^2(u)P''(u+) + \beta(u)P'(u+) \end{cases}$$

● 曲线  $G^2$  连续拼接形式:

给定两正则曲线  $C_1: P = P(t)$ ,  $C_2: Q = Q(u)$ , 则它们在  $P(1)$  和  $Q(0)$  处为  $G^2$  连续拼接的充要条件为: 存在  $\alpha > 0$ ,  $\beta$  使得

$$\begin{cases} P(1-) = Q(0+) \\ P'(1-) = \alpha Q'(0+) \neq \vec{0} \\ P''(1-) = \alpha^2 Q''(0+) + \beta Q'(0+) \end{cases}$$

(c) 高阶几何连续

设拼接曲线  $P = P(u)$  在  $u = u_0$  处  $G^n$  连续, 则可对其左边曲线进行重新参数化  $u = u(t)$ , 使得新参数  $(t)$  表示的左侧曲线和老参数  $(u)$  表示的右侧曲线在连接点处有直到  $n$  阶连续导数:

$$\frac{d^i}{dt^i} P_- = \frac{d^i}{du^i} P_+, \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad \text{其中 } P_- = P(u_0 -), \quad P_+ = P(u_0 +)$$

记  $\overset{(i)}{P} = \frac{d^i}{du^i} P$ , 有

$$\dot{P}_+ = \frac{du}{dt} \dot{P}_-, \quad \ddot{P}_+ = \frac{d^2u}{dt^2} \dot{P}_- + \left(\frac{du}{dt}\right)^2 \ddot{P}_-$$

$$\ddot{\ddot{P}}_+ = \frac{d^3u}{dt^3} \dot{P}_- + 3 \frac{du}{dt} \frac{d^2u}{dt^2} \ddot{P}_- + \left(\frac{du}{dt}\right)^3 \ddot{\ddot{P}}_-$$

.....

$$\text{令 } \beta_1 = \frac{du}{dt}, \quad \beta_2 = \frac{d^2u}{dt^2}, \quad \beta_3 = \frac{d^3u}{dt^3}, \quad \dots\dots$$

写成矩阵形式，有

$$\begin{pmatrix} P_+ \\ \dot{P}_+ \\ \ddot{P}_+ \\ \ddot{\ddot{P}}_+ \\ \vdots \\ {}^{(n)}P_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ 0 & \beta_1 & & & \\ 0 & \beta_2 & \beta_1^2 & & \\ 0 & \beta_3 & 3\beta_1\beta_2 & \beta_1^3 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ 0 & \beta_n & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_- \\ \dot{P}_- \\ \ddot{P}_- \\ \ddot{\ddot{P}}_- \\ \vdots \\ {}^{(n)}P_- \end{pmatrix}$$

**定理：** 当且仅当存在实数  $\beta_1 > 0$ ，  $\beta_2$ ，  $\beta_3$ ， .....， 使得两曲线在正则的连接点处左右导矢满足上述约束方程， 则这两条曲线是  $G^n$  连续的。

### §3. $G^2$ 三次样条

#### (a) Bézier 曲线 $G^2$ 连续拼接与样条构造

设三次 Bézier 曲线  $\mathbf{b}(t) = \sum_{i=0}^3 \mathbf{b}_i B_{i,3}(t)$  以及  $\mathbf{c}(t) = \sum_{i=0}^3 \mathbf{c}_i B_{i,3}(t)$ ， 满足：

- 1)  $\mathbf{b}_3 = \mathbf{c}_0$
- 2)  $\mathbf{b}_3 - \mathbf{b}_2 // \mathbf{c}_1 - \mathbf{c}_0$
- 3)  $k_b(1) = k_c(0)$

由曲率公式， 知：

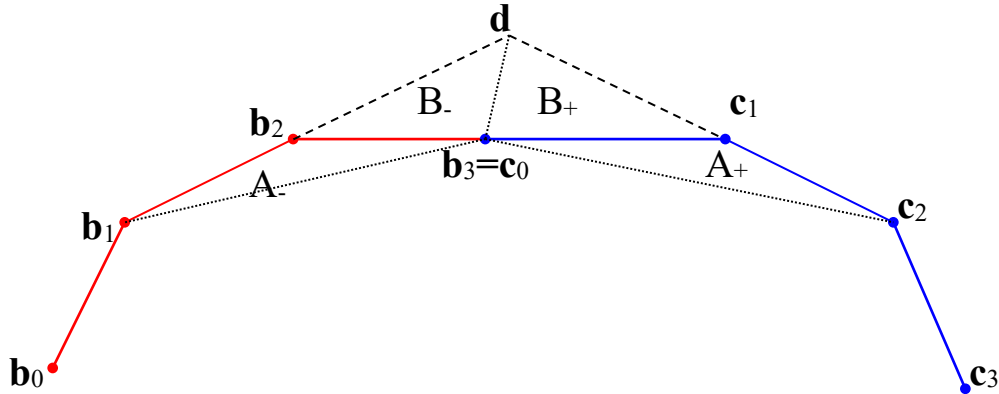
$$k_b(1) = \frac{2 (\mathbf{b}_3 - \mathbf{b}_2) \times (\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2)}{3 |\mathbf{b}_3 - \mathbf{b}_2|^3} = \frac{4}{3} \frac{A_-}{l_-^3}$$

$$k_c(0) = \frac{2 (\mathbf{c}_1 - \mathbf{c}_0) \times (\mathbf{c}_2 - \mathbf{c}_1)}{3 |\mathbf{c}_1 - \mathbf{c}_0|^3} = \frac{4}{3} \frac{A_+}{l_+^3}$$

根据  $k_b(1)=k_c(0)$ ，得  $\frac{A_-}{A_+}=\left(\frac{l_-}{l_+}\right)^3=r^3$

令  $\frac{A_-}{B_-}=r_-$ ， $\frac{B_+}{A_+}=r_+$

又因为  $\frac{B_-}{B_+}=r$ ，可得  $r^2=r_-r_+$



$G^2$  连续条件:  $\frac{|\mathbf{b}_2-\mathbf{b}_1|}{|\mathbf{d}-\mathbf{b}_2|}\frac{|\mathbf{c}_1-\mathbf{d}|}{|\mathbf{c}_2-\mathbf{c}_1|}=\frac{|\mathbf{b}_3-\mathbf{b}_2|^2}{|\mathbf{c}_1-\mathbf{c}_0|^2}$

●  $G^2$  连续三次 Bézier 样条直接构造算法:

1. 输入多边形  $\mathbf{d}_0\mathbf{d}_1\mathbf{d}_2\cdots\mathbf{d}_L$ ;

2. 在边  $\mathbf{d}_i\mathbf{d}_{i+1}$  上取点

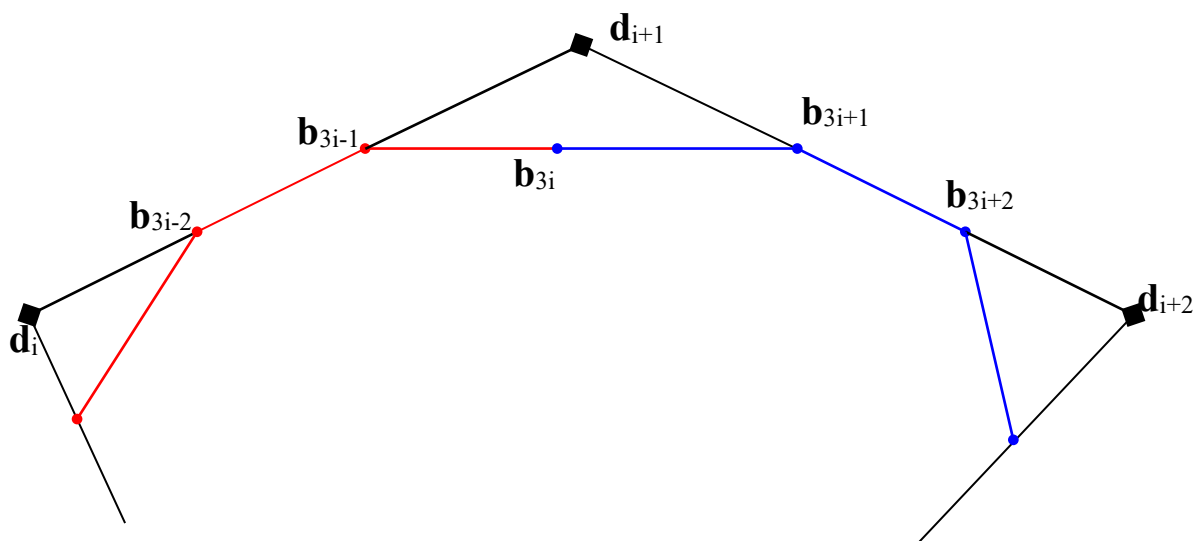
$$\mathbf{b}_{3i-2}=(1-\alpha_i)\mathbf{d}_i+\alpha_i\mathbf{d}_{i+1}, \quad \mathbf{b}_{3i-1}=(1-\omega_i)\mathbf{d}_i+\omega_i\mathbf{d}_{i+1}$$

3. 在边  $\mathbf{d}_{i+1}\mathbf{d}_{i+2}$  上取点

$$\mathbf{b}_{3i+1}=(1-\alpha_{i+1})\mathbf{d}_{i+1}+\alpha_{i+1}\mathbf{d}_{i+2}, \quad \mathbf{b}_{3i+2}=(1-\omega_{i+1})\mathbf{d}_{i+1}+\omega_{i+1}\mathbf{d}_{i+2}$$

4. 在  $\mathbf{b}_{3i-1}$  与  $\mathbf{b}_{3i+1}$  的连线上取点  $\mathbf{b}_{3i}=(1-r_i)\mathbf{b}_{3i-1}+r_i\mathbf{b}_{3i+1}$

5. 第  $i$  段 Bézier 曲线控制多边形  $\mathbf{b}_{3i-3}\mathbf{b}_{3i-2}\mathbf{b}_{3i-1}\mathbf{b}_{3i}$



$r_i$  的计算:

$$\mathbf{b}_{3i-1} = \frac{1-\omega_i}{1-\alpha_i} \mathbf{b}_{3i-2} + \frac{\omega_i-\alpha_i}{1-\alpha_i} \mathbf{d}_{i+1}$$

$$\mathbf{b}_{3i+1} = \frac{\omega_{i+1}-\alpha_{i+1}}{\omega_{i+1}} \mathbf{d}_{i+1} + \frac{\alpha_{i+1}}{\omega_{i+1}} \mathbf{b}_{3i+2}$$

$$\text{令 } \lambda_i = \frac{\omega_i - \alpha_i}{1 - \omega_i}, \quad \rho_i = \frac{\alpha_{i+1}}{\omega_{i+1} - \alpha_{i+1}}$$

$$\text{取 } r_i = \frac{\sqrt{\lambda_i \rho_i}}{1 + \sqrt{\lambda_i \rho_i}} \text{ 和 } \mathbf{b}_{3i} = (1 - r_i) \mathbf{b}_{3i-1} + r_i \mathbf{b}_{3i+1}$$

$$\text{有 } \frac{|\mathbf{b}_{3i} - \mathbf{b}_{3i-1}|}{|\mathbf{b}_{3i+1} - \mathbf{b}_{3i}|} = \sqrt{\lambda_i \rho_i}$$

开多边形中取  $\alpha_0 = 0$  和  $\omega_{L-2} = 1$ , 相应地, 有  $\mathbf{b}_1 = \mathbf{d}_1$  和  $\mathbf{b}_{3L-4} = \mathbf{d}_{L-1}$

### ● $\gamma$ 样条

给定控制多边形, 一组节点和参数  $\gamma_i$

在直接构造法中取

$$\alpha_{i-1} = \frac{\gamma_i \Delta_{i-2}}{\gamma_i \Delta_{i-2} + \Delta_{i-1} + \gamma_{i+1} \Delta_i}$$

$$\omega_{i-1} = \frac{\Delta_{i-1} + \gamma_{i+1} \Delta_i}{\gamma_i \Delta_{i-2} + \Delta_{i-1} + \gamma_{i+1} \Delta_i}$$

特别地，当所有  $\gamma_i \rightarrow 0$  时，曲线将趋向于原控制多边形。

#### §4. v-样条(Nu-样条)

##### (a) Nielson $G^2$ 条件

$$P(u-) = P(u+)$$

$$P'(u-) = P'(u+)$$

$$P''(u+) - P''(u-) = \nu(u)P'(u+)$$

满足上述条件的分段曲线在连接点处  $G^2$  连续。

##### (b) v-样条定义

给定：型值点  $\{P_i\}_{i=0}^n$ ，

参数节点分割  $a = u_0 < u_1 < \dots < u_n = b$

张力参数  $\{\nu_i\}_{i=0}^n$

求分片多项式  $P = P(u)$  满足

1.  $P(u)$  在  $[u_{i-1}, u_i]$  为  $u$  的三次多项式
2.  $P(u)$  关于  $u$  是  $C^1$  的，即  $P(u) \in C^1[a, b]$
3.  $P''(u_i+) - P''(u_i-) = \nu_i P'(u_i)$

设  $P'(u_i) = m_i$ ， $i = 0, 1, \dots, n$

由三次 Hermite 插值可唯一确定  $P = P(u)$

$$P(u) = P_{i-1}h_0(u) + P_i h_1(u) + m_{i-1}H_0(u) + m_i H_1(u)$$

其中

$$h_0(u) = \frac{(u_i - u)^2 [2(u - u_{i-1}) + \Delta u_i]}{\Delta u_i^3}$$

$$h_1(u) = \frac{(u - u_{i-1})^2 [2(u_i - u) + \Delta u_i]}{\Delta u_i^3}$$

$$H_0(u) = \frac{(u_i - u)^2 (u - u_{i-1})}{\Delta u_i^2} \quad H_1(u) = \frac{(u - u_{i-1})^2 (u - u_i)}{\Delta u_i^2}$$

$$\text{由 } P''(u_i +) - P''(u_i -) = v_i P'(u_i), \quad i = 1, \dots, n-1$$

可得:

$$\lambda_i m_{i-1} + (2 + \bar{v}_i) m_i + \mu_i m_{i+1} = 3D_i, \quad i = 1, \dots, n-1$$

其中

$$\lambda_i = \frac{\Delta u_{i+1}}{\Delta u_i + \Delta u_{i+1}}, \quad \mu_i = 1 - \lambda_i, \quad D_i = \lambda_i \frac{P_i - P_{i-1}}{\Delta u_i} + \mu_i \frac{P_{i+1} - P_i}{\Delta u_{i+1}}$$

$$\bar{v}_i = \frac{v_i (\Delta u_i \cdot \Delta u_{i+1})}{2(\Delta u_i + \Delta u_{i+1})}$$

(c) 不同边界条件下的 v-样条

$$(1) \quad v_0 P'(a) - P''(a+) = 0, \quad v_n P'(b) + P''(b-) = 0$$

$$(2) \quad P'(a) = m_0, \quad P'(b) = m_n$$

$$(3) \quad \text{周期边界 } P(a) = P(b), \quad P'(a) = P'(b), \quad P''(a+) - P''(b-) = (v_0 + v_n) P'(a)$$

在第一类边界条件下, 有

$$\begin{bmatrix} 2 + \bar{v}_0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda_1 & 2 + \bar{v}_1 & \mu_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 2 + \bar{v}_2 & \mu_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{n-1} & 2 + \bar{v}_{n-1} & \mu_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 2 + \bar{v}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_0 \\ m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_{n-1} \\ m_n \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} \frac{P_1 - P_0}{\Delta u_1} \\ D_1 \\ D_2 \\ \vdots \\ D_{n-1} \\ \frac{P_n - P_{n-1}}{\Delta u_n} \end{bmatrix}$$

$$\text{其中 } \bar{v}_0 = \frac{\Delta u_1 v_0}{2}, \quad \bar{v}_n = \frac{\Delta u_n v_n}{2}$$

(d) v-样条性质

1. v-样条是  $G^2$  连续的;



2. v-样条有  $2n-2$  个自由度

$$\{u_i\}_{i=0}^n \cup \{v_j\}_{j=1}^{n-1}, \text{ 但 } u_0 = a, \quad u_n = b$$

3. 当  $v_{i-1}, v_i \rightarrow \infty$  时,  $P[u_{i-1}, u_i] \rightarrow \overline{P_{i-1}P_i}$

## §5. $\beta$ -样条(B.A.Barsky)

给定:

型值点  $\{Q_i\}_0^n$

偏参数  $\{\beta_{i,1}\}_1^{n-1}$

张力参数  $\{\beta_{i,2}\}_1^{n-1}$

求三次插值样条曲线(每段参数区间 $[0,1]$ )

记  $Q_{i-1}, Q_i$  之间的曲线段为  $P_i(t)$ ,  $t \in [0,1]$

使得

$$P_{i-1}(1-) = P_i(0+) = Q_{i-1}, \quad i = 2, \dots, n$$

$$P'_{i-1}(1-) = \beta_{i-1,1} P'_i(0+)$$

$$P''_{i-1}(1-) = \beta_{i-1,1}^2 P''_i(0+) + \beta_{i-1,2} P'_i(0+)$$

$$\text{记 } P'_i(0+) = m_i, \quad P'_{i-1}(1-) = \beta_{i-1,1} m_i$$

有:

$$P''_i(0+) = -4m_{i-1} - 2\beta_{i,1}m_i - 6Q_{i-1} + 6Q_i$$

$$P''_i(1-) = 2m_{i-1} + 4\beta_{i,1}m_i + 6Q_{i-1} - 6Q_i$$

根据  $G^2$  连续条件, 有

$$m_{i-2} + \left(2\beta_{i-1,1} - \frac{1}{2}\beta_{i-1,2} + 2\beta_{i-1,1}^2\right)m_{i-1} + \beta_{i,1}^3m_i = 3[-Q_{i-2} + (1 - \beta_{i-1,1}^2)Q_{i-1} + \beta_{i-1,1}^2Q_i]$$

边界条件可与 v-样条类似设定。

思考题：

1. 两曲线在连接点处  $G^3$  连续是否为曲率与挠率连续，反之命题是否成立？
2. 在第二类和第三类边界条件下推导  $v$ -样条方程。