《计算机辅助几何设计》第九次作业

姓名：殷文良　　学号：12435063

2024 年 11 月 30 日

思考题 1

1.

Algorithm 1 双n次Bezier曲面的de Casteljau算法

Input: $P, n, \quad u, v \in [0, 1]$

Output: $S = \sum_{j=0}^{m} B_{j,m}(v) \left(\sum_{i=0}^{n} B_{i,n}(u) P_{i,j} \right)$

for $j = 0 : n$ **do**
　$Q[j] = \text{deCasteljau}(P[j][], n, u)$;
end for
$S = \text{deCasteljau}(Q, n, v)$;
return S;

- **de Casteljau算法**

  一共要执行的线性插值次数为

  $$\frac{n(n+1)(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2}.$$

  对于3维控制顶点，每次插值需要执行$(2+1) * 3 = 9$次浮点运算（包括加法和乘法），因此时间复杂度为

  $$\frac{9n(n+1)(n+2)}{2} = O(n^3).$$

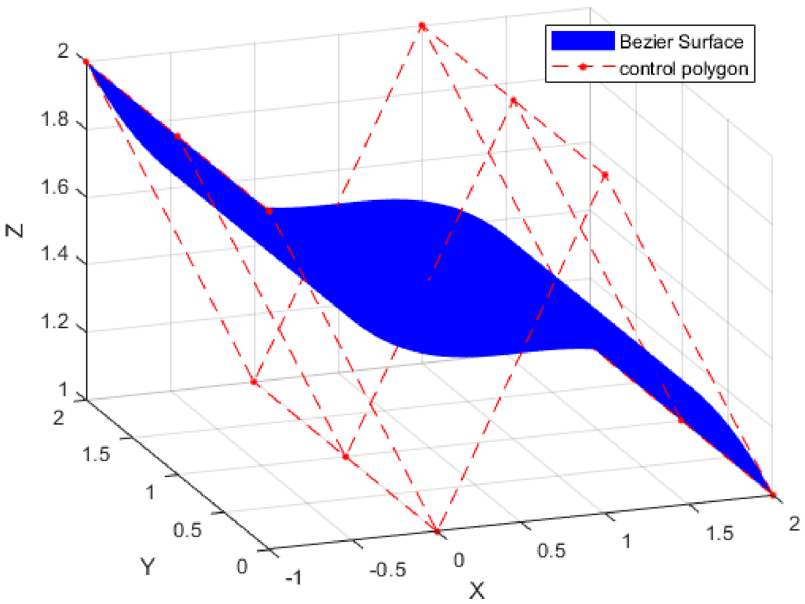

图 1: 2×3次Bezier曲面：de Casteljau算法

- 控制曲线算法

  根据**Bernstein**基函数递推关系式，计算某参数处所有n次基函数需要执行的浮点运算次数（包括加法和乘法）为

$$n(n+1)+\frac{n(n-1)}{2}=\frac{n(3n+1)}{2}.$$

  对于**3**维控制顶点，计算$n+1$条控制曲线需要执行的运算次数为

$$3*(2n+1)*(n+1).$$

  最后计算(u,v)处的点还需执行$\frac{n(3n+1)}{2}+3*(2n+1)$次运算。因此，时间复杂度为

$$\frac{n(3n+1)}{2}*2+3*(2n+1)*(n+2)=O(n^2).$$

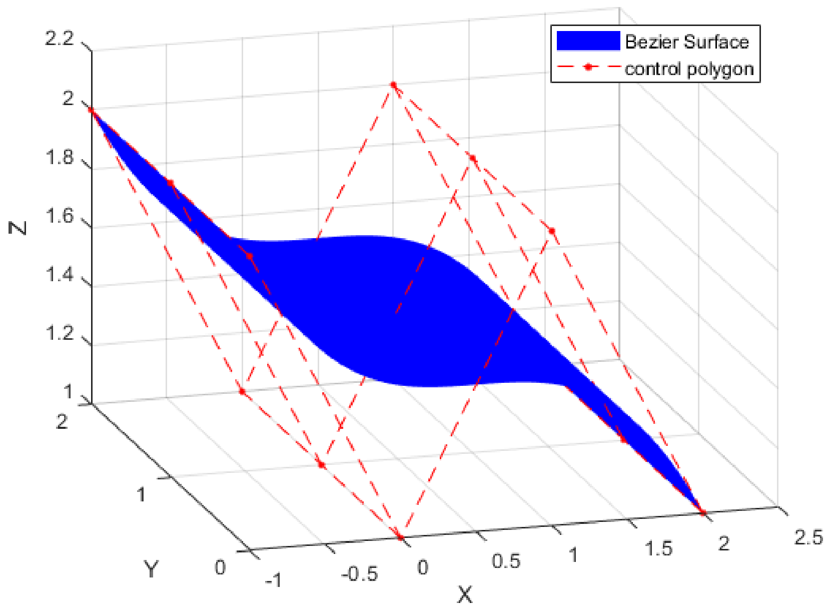

图 2: 2×3次Bezier曲面：控制曲线算法

2.

证明. 由双线性曲面性质可知，

$$X(u,v)=u(P_{10}-P_{00})+v(P_{01}-P_{00})+P_{00}.$$

再由恒等式$\sum_{i=0}^{n} iB_{i,n}(t)=nt$以及Bernstein基函数的权性可得，

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}P_{ij}B_{i,m}(u)B_{j,n}(v)&=\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}X(\frac{i}{m},\frac{j}{n})B_{i,m}(u)B_{j,n}(v)\\&=\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\left(\frac{i}{m}(P_{10}-P_{00})+\frac{j}{n}(P_{01}-P_{00})+P_{00}\right)B_{i,m}(u)B_{j,n}(v)\\&=\sum_{j=0}^{n}u(P_{10}-P_{00})B_{j,n}(v)+\sum_{i=0}^{m}v(P_{01}-P_{00})B_{i,m}(u)+\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}P_{00}B_{i,m}(u)B_{j,n}(v)\\&=u(P_{10}-P_{00})+v(P_{01}-P_{00})+P_{00}=X(u,v).\end{aligned}$$

QED

3.

证明. 椭球$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$的极坐标参数化为

$$\begin{cases}x&=a\sin\theta\cos\phi\\y&=b\sin\theta\sin\phi\quad,\qquad\theta\in[0,\pi],\phi\in[0,2\pi).\\z&=c\cos\theta\end{cases}$$

引入两个新的参数u, v，定义如下：

$$\begin{cases} u &= \tan\dfrac{\theta}{2}, \quad u \in [0, \infty) \\ v &= \tan\dfrac{\phi}{2}, \quad v \in (-\infty, \infty). \end{cases}$$

于是得到椭球的有理参数化：

$$\begin{cases} x &= \dfrac{2au(1-v^2)}{(1+u^2)(1+v^2)} \\ y &= \dfrac{4buv}{(1+u^2)(1+v^2)} \\ z &= \dfrac{c(1-u^2)}{1+u^2} \end{cases}, \quad u \in [0, \infty), v \in (-\infty, \infty).$$

QED

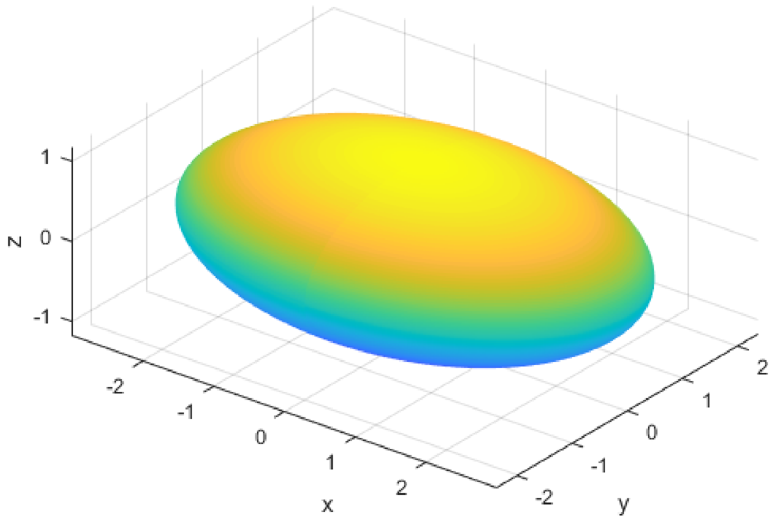

图 3: $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} + \dfrac{z^2}{1} = 1$

思考题 2.

1.

证明. 设xz平面内有一个半径为r，圆心距x, z轴分别为d, R的整圆，表示为

$$c(v) = \frac{\sum_{j=0}^{6} N_{j,3}(v) w_j P_j}{\sum_{j=0}^{6} N_{j,3}(v) w_j},$$

其中，节点向量为

$$V = \{0, 0, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1, 1, 1\},$$

控制顶点和权重分别为

$$\begin{aligned}\{P_j\} = \{&(R+r,0,d),(R+r,0,d+r),(R-r,0,d+r),(R-r,0,d),\\ &(R-r,0,d-r),(R+r,0,d-r),(R+r,0,d)\},\\ \{w_j\} = \{&1,\frac{1}{2},\frac{1}{2},1,\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\}.\end{aligned}$$

将$c(v)$绕z轴旋转得到环面

$$S(u,v) = \frac{\sum_{i=0}^{6}\sum_{j=0}^{6} N_{i,3}(u)N_{j,3}(v)w_{i,j}P_{ij}}{\sum_{i=0}^{6}\sum_{j=0}^{6} N_{i,3}(u)N_{j,3}(v)w_{i,j}},$$

其中，$P_{i,j}$是由$P_{0,j}=P_j$旋转生成圆得到的控制顶点；节点向量$U,V=\{0,0,0,\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{3}{4},1,1,1\}$；而曲面权因子由如下公式计算

$$w_{ij} = \begin{cases} w_{0,j}, & j=0,3,6,\\ \frac{1}{2}w_{0,j}, & j=1,2,4,5 \end{cases}, \quad w_{0,j}=w_j, \quad j=0,1,\ldots,6.$$

QED

2.

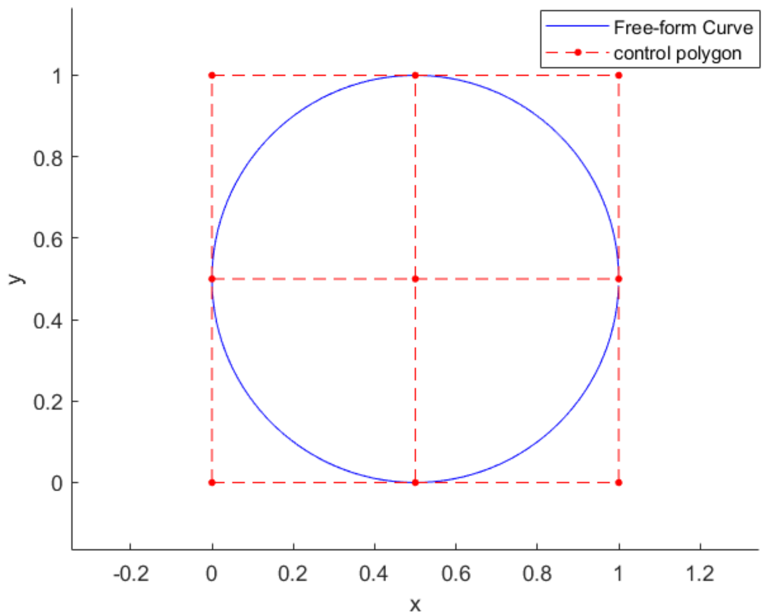

图 4: Bézier 表示具有线性精度

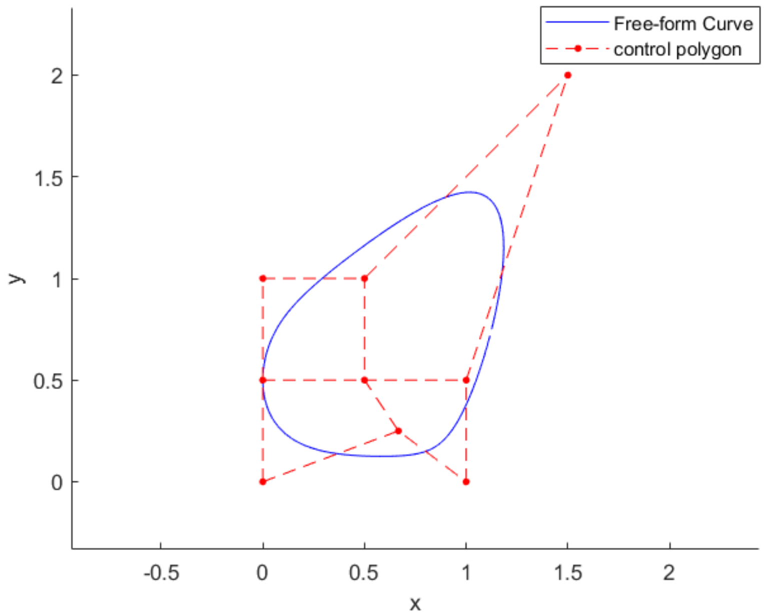

图 5: 变形后：$(\frac{1}{2},0) \to (\frac{2}{3},\frac{1}{4}), \quad (1,1) \to (1.5,2)$

3.

- **Bezier曲面插值**

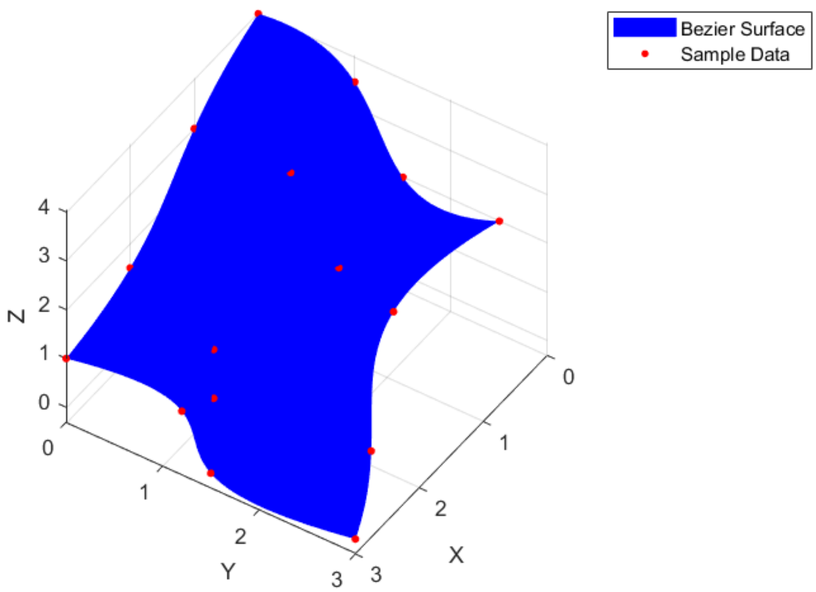

图 6: 双三次Bezier曲面

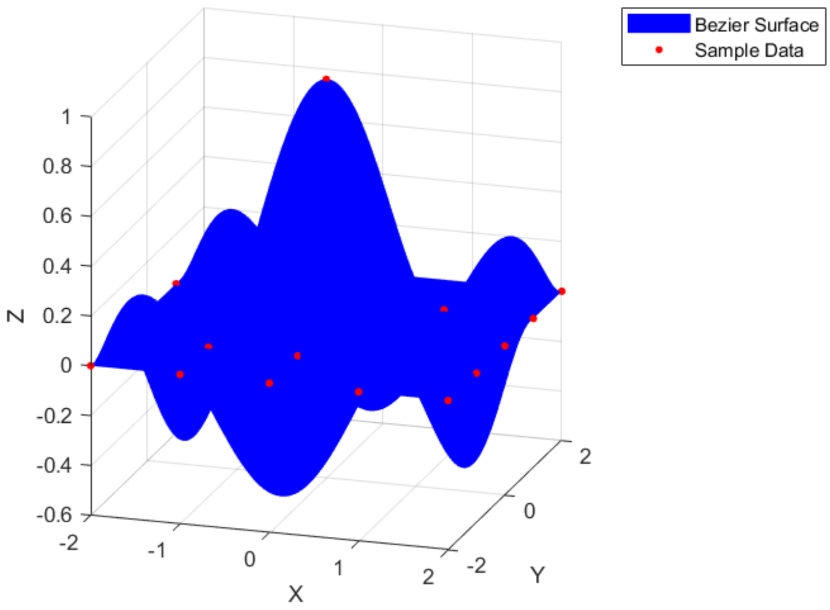

图 7: 全局插值不能很好地处理局部数据点共面的情况

- **B样条曲面插值**

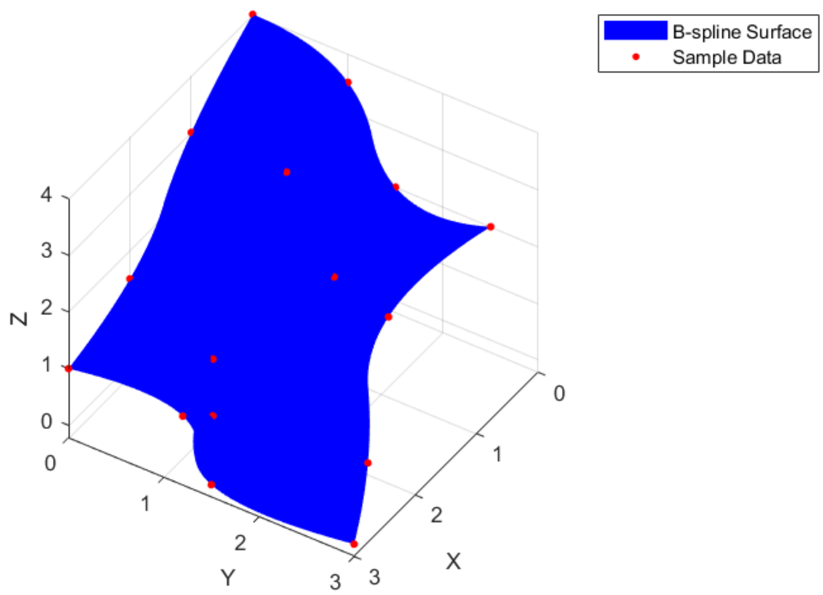

图 8: 双二次B-spline曲面

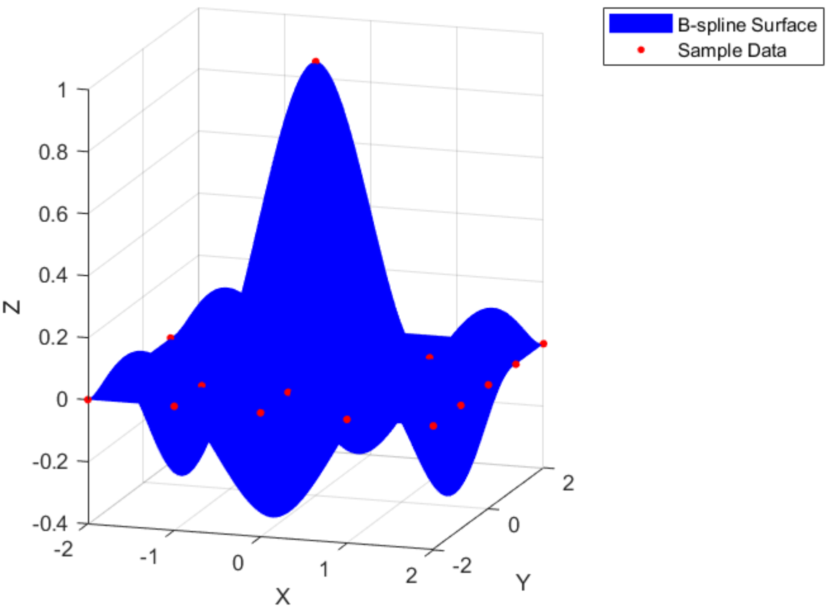

图 9: 双三次B-spline曲面, 全局插值不能很好地处理局部数据点共面的情况