

第十二章 曲面几何连续性

§1. 参数曲面间连续性概念

(a) 背景知识

复杂曲面造型的需要：多片曲面光滑拼接

参数连续性的局限性：依赖于参数化，限制条件过多

几何连续(geometric continuity)：可实现光滑拼接，不依赖于参数化

主要发展时期：20 世纪 80 年代 90 年代

代表性人物：Barsky, deRose, 梁友栋, 刘鼎元, Jörg Peters,

(b) 曲面 C^n 连续

● 定义

C^0 连续：两张曲面具有公共连接线，也称位置连续。

C^n 连续：当且仅当两曲面 $P(s,t)$ 和 $Q(u,v)$ 沿公共连接线 $P(\gamma)=Q(\gamma)$

处处具有直到 n 阶连续偏导矢，即有

$$\frac{\partial^{i+j} P(\gamma)}{\partial s^i \partial t^j} = \frac{\partial^{i+j} Q(\gamma)}{\partial u^i \partial v^j}, \quad i+j=1,2,\dots,n$$

则称曲面 $P(s,t)$ 和 $Q(u,v)$ 是 C^n 连续的。

注：公共连接线 $P(\gamma)=Q(\gamma)$ 可以不是曲面参数线。

● 举例

$$C^1 \text{ 连续: } \frac{\partial P(\gamma)}{\partial s} = \frac{\partial Q(\gamma)}{\partial u}, \quad \frac{\partial P(\gamma)}{\partial t} = \frac{\partial Q(\gamma)}{\partial v}$$

C^2 连续： C^1 连续，

$$\frac{\partial^2 P(\gamma)}{\partial s^2} = \frac{\partial^2 Q(\gamma)}{\partial u^2}, \quad \frac{\partial^2 P(\gamma)}{\partial s \partial t} = \frac{\partial^2 Q(\gamma)}{\partial u \partial v}, \quad \frac{\partial^2 P(\gamma)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 Q(\gamma)}{\partial v^2}$$

组合曲面的连续性：设曲面 $P(u,v)$ 是定义在分割 $\Delta_u \times \Delta_v$ ，其中

$\Delta_u: u_0 < u_1$, $\Delta_v: v_0 < v_1 < v_2$ ，则该曲面在参数线 $v = v_1$ 处 C^n 连续的

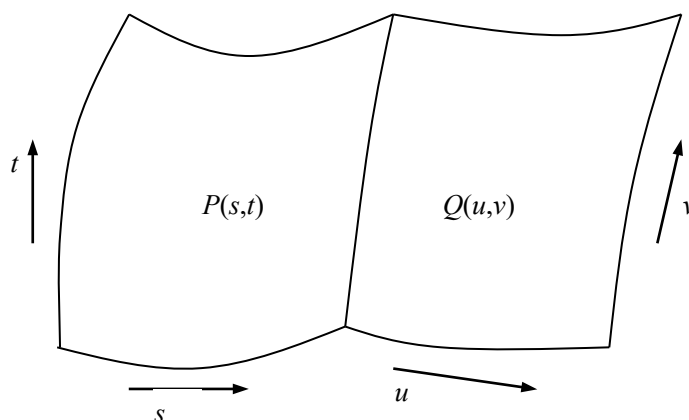
条件： $\frac{\partial^{i+j} P(u, v_1 -)}{\partial u^i \partial v^j} = \frac{\partial^{i+j} P(u, v_1 +)}{\partial u^i \partial v^j}$, $i + j = 1, 2, \dots, n$

例：双三次样条曲面是 C^2 连续的。

(c) 曲面 G^n 连续

G^0 连续：两张曲面位置连续，同 C^0 连续。

G^1 连续：两张曲面沿连接线处处具有公共切平面或公共曲面法线。



设曲面 $P(s,t)$ 和 $Q(u,v)$ 有公共连接线 $P(\gamma) = Q(\gamma)$ ，则这两张曲面

G^1 连续的条件为：

$$(P_s \times P_t) \times (Q_u \times Q_v) = (P_s, P_t, Q_v) Q_u - (P_s, P_t, Q_u) Q_v = 0$$

公共连接线为曲面等参数线 $P(s_0, t) = Q(u_0, v)$, $v = v(t)$,

则 $P_t \parallel Q_v$,

相应地， G^1 连续的条件： $(P_s, P_t, Q_u) = 0$

或： $Q_u = h(s)P_s + g(s)P_t$

G^2 连续：两张曲面沿连接线 G^1 连续，在连接线上任意一点沿任意方向具有相同法曲率。

或在连接线上处处具有相同主曲率与主方向。

G^n 连续：曲面 $P(s,t)$ 和 $Q(u,v)$ 有公共连接线 $P(\gamma)=Q(\gamma)$ ，其中一张曲面被重新参数化 $Q(u,v)=\bar{Q}(\bar{u},\bar{v})$ ，使得 $P(s,t)$ 与 $\bar{Q}(\bar{u},\bar{v})$ 在连接线处是 C^n 连续的。

$$\frac{\partial^{i+j}P(\gamma)}{\partial s^i \partial t^j} = \frac{\partial^{i+j}\bar{Q}(\gamma)}{\partial \bar{u}^i \partial \bar{v}^j}, \quad i+j=1,2,\dots,n$$

G^n 连续等价定义：存在 $n(n+3)$ 个形状函数满足 beta 约束

$$\frac{\partial^{i+j}P(\gamma)}{\partial s^i \partial t^j} = \mathbf{cr}_{i,j} \left(\frac{\partial^{k+l}Q(\gamma)}{\partial u^k \partial v^l}, \frac{\partial^{k+l}u(\gamma)}{\partial \bar{u}^k \partial \bar{v}^l}, \frac{\partial^{k+l}v(\gamma)}{\partial \bar{u}^k \partial \bar{v}^l} \right), \quad k+l=i+j; \quad i+j=1,2,\dots,n$$

例：对于 G^1 连续，存在 4 个形状函数，可由 $Q(u,v)$ 重新参数为 $Q(u,v)=\bar{Q}(u(\bar{u},\bar{v}),v(\bar{u},\bar{v}))$ 分别对 \bar{u} ， \bar{v} 求偏导得到。

§2. 两张参数曲面间 G^1 连续拼接

(a) 张量积 Bézier 曲面 G^1 拼接

设有 Bézier 曲面

$$S_{m \times n}^1: P(s,t) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n P_{ij} B_{i,m}(s) B_{j,n}(t)$$

$$S_{l \times q}^2: Q(u,v) = \sum_{h=0}^l \sum_{k=0}^q Q_{hk} B_{h,l}(u) B_{k,q}(v)$$

● 位置连续： $P(1,t)=Q(0,v(t))$ ，

实用上： $v(t)=t$ ， $P(1,t)=Q(0,t)$

$$\sum_{j=0}^n P_{mj} B_{j,n}(t) = \sum_{k=0}^q Q_{0k} B_{k,q}(t)$$

● 一阶几何连续

设 $P_s \times P_t \neq 0$, $Q_u \times Q_v \neq 0$ 以及 $m=l$, $n=q$

由定义知: 存在 $\alpha(t) > 0$, $\beta(t)$, 使得

$$Q_u(0,t) = \alpha(t)P_s(1,t) + \beta(t)P_t(1,t)$$

● 一个简单条件

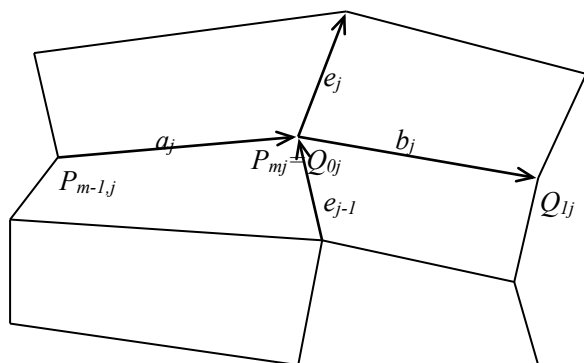
设 $\alpha(t) = \alpha$, $\beta(t) = \beta$ 都是常数, 则有

$$m \sum_{k=0}^n (Q_{1k} - Q_{0k}) B_{k,n}(t) = \alpha m \sum_{j=0}^n (P_{mj} - P_{m-1,j}) B_{j,n}(t) + \beta n \sum_{j=0}^{n-1} (P_{m,j+1} - P_{mj}) B_{j,n-1}(t)$$

记 $\vec{e}_j = P_{m,j+1} - P_{mj}$, $\vec{a}_j = P_{m,j} - P_{m-1,j}$, $\vec{b}_j = Q_{1,j} - Q_{0,j}$

经整理, 上式可写为

$$\sum_{j=0}^n \vec{b}_j B_{j,n}(t) = \sum_{j=0}^n \left\{ \alpha \vec{a}_j + \beta \frac{n}{m} \left[\frac{j}{n} \vec{e}_{j-1} + \left(1 - \frac{j}{n} \right) \vec{e}_j \right] \right\} B_{j,n}(t)$$



命题: 若两张 $m \times n$ 次 Bézier 曲面的控制顶点满足: 存在 $\alpha > 0$, β 使得

$$\begin{cases} P_{mj} = Q_{0j} \\ \vec{b}_j = \alpha \vec{a}_j + \beta \left[\frac{j}{n} \vec{e}_{j-1} + \left(1 - \frac{j}{n} \right) \vec{e}_j \right], \quad j = 0, 1, \dots, n \end{cases}$$

则它们在公共边界处 G^1 拼接。(此仅为充分条件)

● 一般性 G^1 拼接条件

设有两张 $m \times n$ 次 Bézier 曲面 $P = P(u, v)$, $Q = Q(u, v)$

G^1 拼接充要条件:

$$P(1, v) = Q(0, v), \quad Q_u = \alpha(v)P_u + \beta(v)P_v$$

等价条件: $(Q_u, P_u, P_v) = 0$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^n (\vec{a}_i, \vec{e}_j, \vec{b}_k) B_{i,n}(v) B_{j,n-1}(v) B_{k,n}(v) \equiv 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{\lambda=0}^{3n-1} \left[\sum_{\substack{0 \leq i \leq n \\ 0 \leq k \leq n \\ \lambda+1-n \leq i+k \leq \lambda}} (\vec{a}_i, \vec{e}_{\lambda-i-k}, \vec{b}_k) \frac{C_n^i C_{n-1}^{\lambda-i-k} C_n^k}{C_{3n-1}^\lambda} \right] B_{\lambda, 3n-1}(v) \equiv 0$$

定理: 两张 $m \times n$ 次 Bézier 曲面 G^1 拼接充要条件:

$$\begin{cases} P_{mj} = Q_{0j} & j = 0, 1, \dots, n \\ \sum_{\substack{0 \leq i \leq n \\ 0 \leq k \leq n \\ \lambda+1-n \leq i+k \leq \lambda}} (\vec{a}_i, \vec{e}_{\lambda-i-k}, \vec{b}_k) \frac{C_n^i C_{n-1}^{\lambda-i-k} C_n^k}{C_{3n-1}^\lambda} = 0 & \lambda = 0, 1, \dots, 3n-1 \end{cases}$$

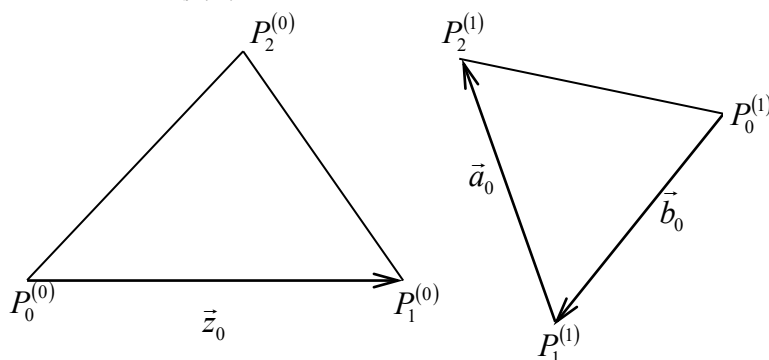
(b) 两张 Bézier 三角片 G^1 拼接

● 问题假设

设有 Bézier 三角片

$$S_0: B_n^{(0)}(P) = \sum_{i+j+k=n} Q_{i,j,k}^{(0)} J_{i,j,k}(P)$$

$$S_1: B_n^{(1)}(\bar{P}) = \sum_{r+s+t=n} Q_{r,s,t}^{(1)} J_{r,s,t}(\bar{P})$$



- 位置连续(G^0 连续)

$$\text{记 } P(t) = P_1^{(0)} + t(P_2^{(0)} - P_1^{(0)}), \quad \bar{P}(t) = P_1^{(1)} + t(P_2^{(1)} - P_1^{(1)})$$

$$\text{有 } B_n^{(0)}(P) \Big|_{P=P(t)} = B_n^{(1)}(\bar{P}) \Big|_{\bar{P}=\bar{P}(t)}$$

$$\Leftrightarrow Q_{0,r,s}^{(0)} = Q_{0,r,s}^{(1)}, \quad \forall r+s=n$$

- G^1 拼接条件

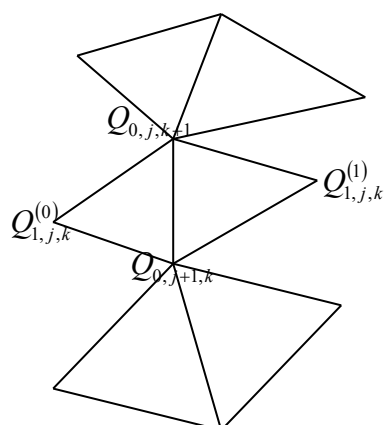
$$\text{记 } \vec{z}_0 = \overrightarrow{P_0^{(0)}P_1^{(0)}}, \quad \vec{a} = \overrightarrow{P_1^{(1)}P_2^{(1)}}, \quad \vec{b} = \overrightarrow{P_0^{(1)}P_1^{(1)}}$$

$$\text{条件: } D_{\vec{z}_0} B_n^{(0)}(P(t)) = \alpha(t) D_{\vec{a}} B_n^{(1)}(\bar{P}(t)) + \beta(t) D_{\vec{b}} B_n^{(1)}(\bar{P}(t)), \quad \text{其中 } \beta(t) < 0$$

$$\text{例: } \alpha(t) = \alpha, \quad \beta(t) = \beta < 0 \text{ 均为常数}$$

则两张 Bézier 三角片 G^1 拼接条件(已知位置连续):

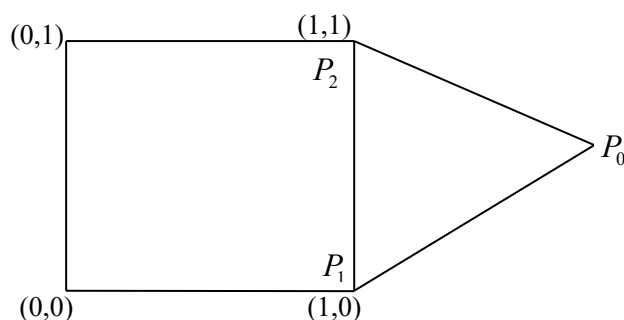
$$Q_{0,j+1,k}^{(0)} - Q_{1,j,k}^{(0)} = \alpha(Q_{0,j,k+1}^{(1)} - Q_{0,j+1,k}^{(1)}) + \beta(Q_{0,j+1,k}^{(1)} - Q_{1,j,k}^{(1)}), \quad j+k=n-1$$



有公共边的相邻三角形共面!

(c) 张量积 Bézier 曲面与 Bézier 三角片 G^1 拼接

- 问题假设



$$S_0: B_n(u, v, w) = \sum_{i+j+k=n} Q_{i,j,k} J_{i,j,k}(u, v, w)$$

$$S_1: P(s, t) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n P_{ij} B_{i,m}(s) B_{j,n}(t)$$

● 位置连续

$$P(1, t) = B_n(0, t, 1-t)$$

$$\Leftrightarrow P_{m,j} = Q_{0,j,n-j}, \quad j = 0, 1, \dots, n$$

● G^1 连续拼接

$$\text{记 } \vec{z}_0 = \overrightarrow{P_0 P_1}, \quad \vec{e} = \overrightarrow{P_1 P_2}$$

$$\text{条件 1: } D_{\vec{z}} B_n(0, t, 1-t) = \bar{\alpha}(t) \frac{\partial P(1, t)}{\partial s} + \bar{\beta}(t) \frac{\partial P(1, t)}{\partial t}, \quad \text{且 } \bar{\alpha}(t) < 0$$

$$\text{条件 2: } \frac{\partial P(1, t)}{\partial s} = \alpha(t) D_{\vec{z}} B_n(0, t, 1-t) + \beta(t) D_{\vec{e}} B_n(0, t, 1-t), \quad \text{且 } \alpha(t) < 0$$

例：设 $\alpha(t) = \alpha < 0$, $\beta(t) = \beta$ 均为常数，则有

$$\begin{aligned} & m \sum_{j=0}^n (P_{m,j} - P_{m-1,j}) B_{j,n}(t) \\ &= n \sum_{j=0}^{n-1} \{ \alpha [Q_{0,j+1,n-j-1} - Q_{1,j,n-j-1}] + \beta [Q_{0,j,n-j} - Q_{0,j+1,n-j-1}] \} B_{j,n-1}(t) \end{aligned}$$

$$\text{记 } E_j = \frac{n}{m} \{ \alpha [Q_{0,j+1,n-j-1} - Q_{1,j,n-j-1}] + \beta [Q_{0,j,n-j} - Q_{0,j+1,n-j-1}] \}$$

则上述等式变换为

$$\sum_{j=0}^n (P_{m,j} - P_{m-1,j}) B_{j,n}(t) = \sum_{j=0}^{n-1} E_j B_{j,n-1}(t)$$

对等式右端升阶，可得

$$P_{m,j} - P_{m-1,j} = \frac{1}{n} [j E_j + (n-j) E_{j+1}], \quad j = 0, 1, \dots, n$$

思考题：

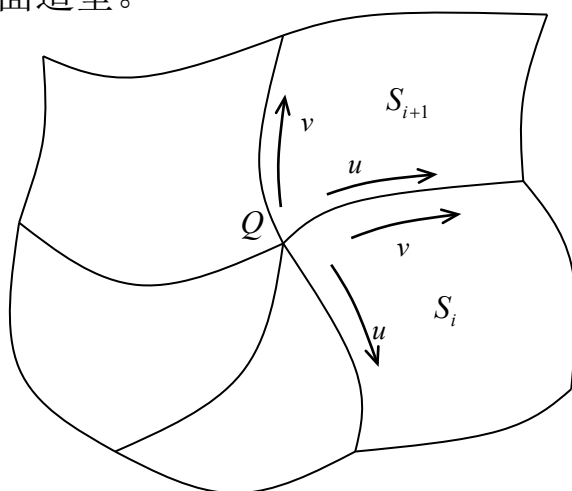
1. 设函数 $\alpha(t)$, $\beta(t)$ 都为线性函数，推导出两张张量积 Bézier 曲面 G^1 拼接控制顶点需要满足的条件。

2. 设函数 $\alpha(t)$, $\beta(t)$ 都为线性函数, 推导出两张 Bézier 三角形 G^1 拼接控制顶点满足的条件。
3. 已知两张双 n 次 Bézier 曲面实物模型, 用测量方法检查两张曲面是否 G^0 连续至少需要测量几个点? 如果检测 G^1 连续呢?

§3. 伞形曲面间 G^1 连续拼接

(a) 问题

将多张参数曲面绕一点进行光滑拼接, 常用于倒角、补洞等曲面造型。



记号: 设 n 张曲面 S_i : $Q_i = Q_i(u, v)$, $(u, v) \in D$, $i = 1, 2, \dots, n$

设相邻曲面以下述方式联接

$$Q_i(0, t) = Q_{i+1}(t, 0), \quad t \in [0, 1]$$

(b) G^1 拼接的基本理论

i) 一般方程

$$(\Delta) \quad \frac{\partial Q_{i+1}(t, 0)}{\partial v} = a_i(t) \frac{\partial Q_i(0, t)}{\partial v} + b_i(t) \frac{\partial Q_i(0, t)}{\partial u},$$

其中 $b_i(t) < 0$

$$i = 1, 2, \dots, n$$

ii) Q 点关系方程

$$(*) \quad \frac{\partial Q_{i+1}(0,0)}{\partial v} = a_i(0) \frac{\partial Q_i(0,0)}{\partial v} + b_i(0) \frac{\partial Q_i(0,0)}{\partial u}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

对(Δ)两边关于 t 求导, 可得

$$(**) \quad Q_{i+1}^{(1,1)}(0,0) = a_i(0) Q_i^{(0,2)}(0,0) + b_i(0) Q_i^{(1,1)}(0,0) \\ + a_i'(0) Q_i^{(0,1)}(0,0) + b_i'(0) Q_i^{(1,0)}(0,0), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$(***) \quad Q_{i+1}^{(1,0)}(0,0) = Q_i^{(0,1)}(0,0)$$

iii) Q 点方程的求解

$$\text{记} \begin{cases} a_i(0) = \alpha_i \\ b_i(0) = \beta_i < 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a_i'(0) = \lambda_i \\ b_i'(0) = \mu_i \end{cases}$$

则有

$$(*) \quad Q_{i+1}^{(0,1)} = \alpha_i Q_i^{(0,1)} + \beta_i Q_i^{(1,0)}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$(**) \quad Q_{i+1}^{(1,1)} = \alpha_i Q_i^{(0,2)} + \beta_i Q_i^{(1,1)} + \lambda_i Q_i^{(0,1)} + \mu_i Q_i^{(1,0)}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

将(*)写成矩阵形式, 有

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & -1 & 0 & \cdots & \beta_1 \\ \beta_2 & \alpha_2 & -1 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ -1 & 0 & \cdots & \beta_n & \alpha_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1^{(0,1)} \\ Q_2^{(0,1)} \\ \vdots \\ \vdots \\ Q_n^{(0,1)} \end{pmatrix} = 0$$

考虑(**), 有

$$Q_{i+1}^{(1,1)} = \left(\prod_{j=1}^i \beta_j \right) Q_1^{(1,1)} + \sum_{j=1}^i \beta_i \cdots \beta_{j+1} [\alpha_j Q_j^{(0,2)} + \lambda_j Q_j^{(0,1)} + \mu_j Q_j^{(1,0)}]$$

相容性方程

$$\left(1 - \prod_{j=1}^n \beta_j \right) Q_1^{(1,1)} = \sum_{j=1}^n \beta_i \cdots \beta_{j+1} [\alpha_j Q_j^{(0,2)} + \lambda_j Q_j^{(0,1)} + \mu_j Q_j^{(1,0)}]$$

(c) 几何分析

i) α_i, β_i 的几何意义

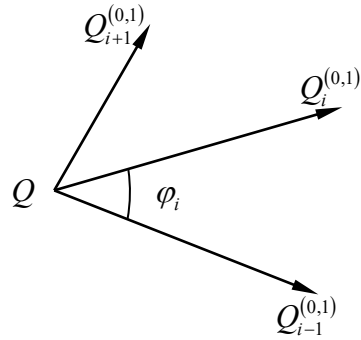
记 $|Q_i^{(0,1)}| = r_i, \quad \varphi_i = \langle Q_{i-1}^{(0,1)}, Q_i^{(0,1)} \rangle$

则(*)式变成

$$\vec{r}_{i+1} = \alpha_i \vec{r}_i + \beta_i \vec{r}_{i-1}$$

从而有

$$\begin{cases} \alpha_i = \frac{r_{i+1}}{r_i} \frac{\sin(\varphi_i + \varphi_{i+1})}{\sin \varphi_i} \\ \beta_i = -\frac{r_{i+1}}{r_i} \frac{\sin \varphi_{i+1}}{\sin \varphi_i} \end{cases} \quad \text{一般可假设 } \varphi_i \neq \pi$$



ii) 扭矢方程的解分析

$$\text{由 } \prod_{i=1}^n \beta_i = (-1)^n$$

相容性方程为

$$[1 - (-1)^n] Q_1^{(1,1)} = \sum_{j=1}^n \beta_n \dots \beta_{j+1} [\alpha_j Q_j^{(0,2)} + \lambda_j Q_j^{(0,1)} + \mu_j Q_j^{(1,0)}]$$

考虑 n 的奇偶性

1. n 为奇数

自由量 $\{Q_i^{(0,1)}, Q_i^{(0,2)}\}_{i=1}^n$

自由量确定后可唯一确定 $\{Q_i^{(1,1)}\}_{i=1}^n$

由相容性方程求出 $Q_1^{(1,1)}$

其它 $Q_i^{(1,1)}$ 可由下面方程求出

$$Q_{i+1}^{(1,1)} = \left(\prod_{j=1}^i \beta_j \right) Q_1^{(1,1)} + \sum_{j=1}^i \beta_i \dots \beta_{j+1} [\alpha_j Q_j^{(0,2)} + \lambda_j Q_j^{(0,1)} + \mu_j Q_j^{(1,0)}]$$

2. n 为偶数

此时相容性方程为

$$0 = \sum_{j=1}^n \beta_n \dots \beta_{j+1} [\alpha_j Q_j^{(0,2)} + \lambda_j Q_j^{(0,1)} + \mu_j Q_j^{(1,0)}]$$

自由量 $\{Q_i^{(0,1)}, Q_j^{(0,2)}, Q_l^{(1,1)}; i=1,2,\dots,n, j=1,2,\dots,n, j \neq l\}$

$Q_l^{(0,2)}$ 由相容性方程求出 (设 $\alpha_l \neq 0$)

不妨取 $l=1$, 此时 $Q_1^{(1,1)}$ 是自由变量

其它扭矢可由下面方程求出

$$Q_{i+1}^{(1,1)} = \left(\prod_{j=1}^i \beta_j \right) Q_1^{(1,1)} + \sum_{j=1}^i \beta_i \dots \beta_{j+1} [\alpha_j Q_j^{(0,2)} + \lambda_j Q_j^{(0,1)} + \mu_j Q_j^{(1,0)}]$$

(d) 张量积 Bézier 与三角 Bézier 曲面的伞形拼接

i) 记号

曲面 S_i : $Q_i = Q_i(u, v), (u, v) \in D, i=1,2,\dots,n$

Bézier 曲面

$$Q_i(u, v) = \sum_{r=0}^n \sum_{s=0}^n Q_{r,s}^{(i)} B_{r,n}(u) B_{s,n}(v)$$

Bézier 三角片

$$Q_i(u, v) = \sum_{r+s+k=n} R_{r,s,k}^{(i)} J_{r,s,k}^n(u, v, 1-u-v)$$

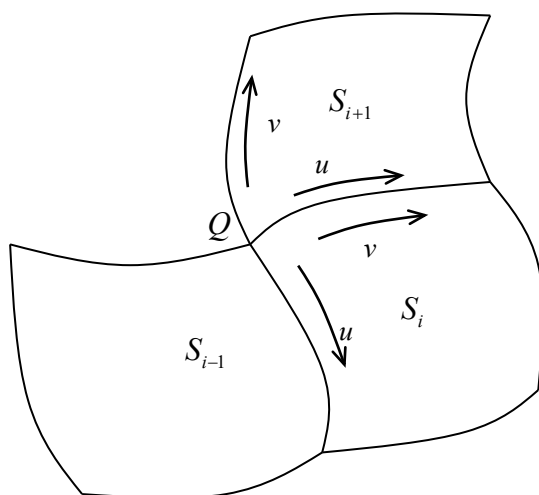
ii) 边界曲线

$$C_i(t) = Q_i(0, t) = Q_{i+1}(t, 0) = \sum_{s=0}^n C_s^{(i)} B_{s,n}(t)$$

$$C_s^{(i)} = \begin{cases} Q_{0,s}^{(i)} & S_i \text{ 为 Bezier 曲面} \\ R_{0,s,n-s}^{(i)} & S_i \text{ 为 Bezier 三角片} \end{cases}$$

或

$$C_s^{(i)} = \begin{cases} Q_{s,0}^{(i+1)} & S_{i+1} \text{ 为 Bezier 曲面} \\ R_{s,0,n-s}^{(i+1)} & S_{i+1} \text{ 为 Bezier 三角片} \end{cases}$$



$$Q_{i+1}^{(1,0)}(0,0) = Q_i^{(0,1)}(0,0) = n(C_1^{(i)} - C_0^{(i)}), \text{ 其中 } C_0^{(i)} = Q$$

$$C_1^{(i)} = \frac{1}{n} Q_i^{(0,1)}(0,0) + Q$$

$$Q_{i+1}^{(2,0)}(0,0) = Q_i^{(0,2)}(0,0) = n(n-1)(C_2^{(i)} - 2C_1^{(i)} + Q)$$

$$Q_i^{(1,1)}(0,0) = n^2 [Q_{1,1}^{(i)} - Q_{1,0}^{(i)} - Q_{0,1}^{(i)} + Q] \quad \text{Bézier 曲面}$$

$$Q_i^{(1,1)}(0,0) = n(n-1) [R_{1,1,n-2}^{(i)} - R_{1,0,n-1}^{(i)} - R_{0,1,n-1}^{(i)} + Q] \quad \text{Bézier 三角片}$$

iii) 算法步骤

考虑 m 片曲面组成的伞形曲面

1. m 为奇数

step 1. 首先确定 $C_i(t)$, $i=1,2,\dots,m$

满足条件 $\{Q, C_1^{(i)}; i=1,2,\dots,m\}$ 共面

step 2. 计算 $\{\alpha_i, \beta_i; i=1,2,\dots,m\}$

step 3. 确定 $a_i(t)$, $b_i(t)$, $i=1,2,\dots,m$

满足条件 $a_i(0) = \alpha_i$, $b_i(0) = \beta_i$

计算 $\lambda_i = a_i'(0)$, $\mu_i = b_i'(0)$, $i=1,2,\dots,m$

step 4. 确定 $Q_{1,1}^{(i)}$ 或 $R_{1,1,n-2}^{(i)}$, $i=1,2,\dots,m$

由相容性条件以及曲面在角点的导矢公式

step 5. 利用 $a_i(t)$, $b_i(t)$ 确定

$$\{Q_{1,s}^{(i)}, Q_{s,1}^{(i)}; \quad s = 2, \dots, n\}, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

或

$$\{R_{1,s,n-s-1}^{(i)}, R_{s,1,n-s-1}^{(i)}; \quad s = 2, \dots, n-1\}, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

step 6. 其余控制顶点由用户确定。

2. m 为偶数

step 1. 首先确定 $C_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, m$

除 $C_2^{(1)}$ 的所有控制顶点

满足条件 $\{Q, C_1^{(i)}; i = 1, 2, \dots, m\}$ 共面

step 2. 计算 $\{\alpha_i, \beta_i; i = 1, 2, \dots, m\}$

step 3. 确定 $a_i(t)$, $b_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, m$

满足条件 $a_i(0) = \alpha_i$, $b_i(0) = \beta_i$

计算 $\lambda_i = a_i'(0)$, $\mu_i = b_i'(0)$, $i = 1, 2, \dots, m$

step 4. 计算 $C_2^{(1)}$

$$\text{根据 } Q_1^{(0,2)} = -\frac{1}{\alpha_1 \beta_m \cdots \beta_2} \left(\sum_{j=2}^m \beta_m \cdots \beta_{j+1} [\alpha_j Q_j^{(0,2)} + \lambda_j Q_j^{(0,1)} + \mu_j Q_j^{(1,0)}] \right. \\ \left. + \beta_m \cdots \beta_2 [\lambda_1 Q_1^{(0,1)} + \mu_1 Q_1^{(1,0)}] \right)$$

以及在 $Q(0,0)$ 处, 有

$$Q_1^{(0,2)}(0,0) = n(n-1)(C_2^{(1)} - 2C_1^{(1)} + Q)$$

step 5. 任意给定 $Q_{1,1}^{(k)}$ 或 $R_{1,1,n-2}^{(k)}$, 其中 k 为某一确定常数

计算 $\{Q_{1,1}^{(i)} \text{ 或 } R_{1,1,n-2}^{(i)}; i = 1, 2, \dots, m, i \neq k\}$

step 6,7. 同奇数情况的 step 5,6。

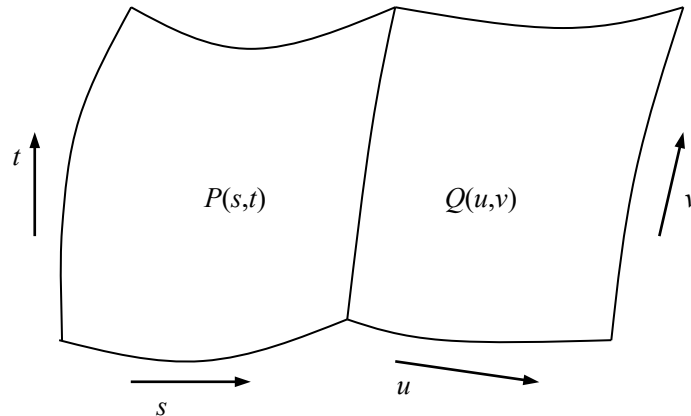
§4. Bézier 曲面 G^2 连续拼接

(a) 一阶光滑条件

设曲面 $P(s,t)$ 和 $Q(u,v)$, $(s,t,u,v \in [0,1])$

两曲面在边界处连接:

$$P(1,t) = Q(0,v), \quad 0 \leq t = v \leq 1$$



两曲面在边界处 G^1 连续条件:

$$(P_s(1,t), P_t(1,t), Q_u(0,t)) = 0$$

或存在函数 $\alpha(t) > 0$, $\beta(t)$ 使得

$$Q_u(0,t) = \alpha(t)P_s(1,t) + \beta(t)P_t(1,t)$$

特别地, $\alpha(t) \equiv 1$, $\beta(t) = 0$, 则曲面为 C^1 连续。

(b) Dupin indicatrix(标型)

考虑参数曲面 $X(u,v)$,

$$\text{曲面法向: } N = \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|}$$

曲面曲线 $X(u(s), v(s))$ 的切向 $T = X_u \dot{u} + X_v \dot{v}$

曲面 $X(u,v)$ 沿 T 方向的法曲率

$$k_n = \frac{L_{11}\dot{u}^2 + 2L_{12}\dot{u}\dot{v} + L_{22}\dot{v}^2}{g_{11}\dot{u}^2 + 2g_{12}\dot{u}\dot{v} + g_{22}\dot{v}^2}$$

其中 $g_{11} = X_u \cdot X_u$, $g_{12} = X_u \cdot X_v$, $g_{22} = X_v \cdot X_v$

$$L_{11} = N \cdot X_{uu}, \quad L_{12} = N \cdot X_{uv}, \quad L_{22} = N \cdot X_{vv}$$

主曲率、主方向: k_1, k_2, T_1, T_2

欧拉公式: $k_n = k_1 \cos^2 \theta + k_2 \sin^2 \theta$, 其中 θ 为 T 与 T_1 夹角。

设 $k_n = \frac{1}{\rho}$, 并令 $y_1 = \sqrt{\rho} \cos \theta$, $y_2 = \sqrt{\rho} \sin \theta$

则欧拉方程可改写为

$$k_1 y_1^2 + k_2 y_2^2 = 1$$

此方程定义的二次曲线称为 Dupin 标型。

渐进方向: $L_{11}\dot{u}^2 + 2L_{12}\dot{u}\dot{v} + L_{22}\dot{v}^2 = 0$

Dupin 标型可由渐进方向再加一第三方向的法曲率唯一确定。

(c) 二阶光滑条件

两相邻曲面在连接线处切平面和 Dupin 标型均一致。

曲面 $P(s, t)$ 和 $Q(u, v)$ 的渐进方向分别由下式得到:

$$L_{11}^P \dot{s}^2 + 2L_{12}^P \dot{s}\dot{t} + L_{22}^P \dot{t}^2 = 0$$

$$L_{11}^Q \dot{u}^2 + 2L_{12}^Q \dot{u}\dot{v} + L_{22}^Q \dot{v}^2 = 0$$

在边界处的渐进方向满足

$$T = P_s \dot{s} + P_t \dot{t} = Q_u \dot{u} + Q_v \dot{v}$$

由 G^1 条件知 $Q_u = \alpha P_s + \beta P_t$, $Q_v = P_t$

解得 $\dot{s} = \alpha \dot{u}$, $\dot{t} = \beta \dot{u} + \dot{v}$

代入到 $L_{11}^P \dot{s}^2 + 2L_{12}^P \dot{s}\dot{t} + L_{22}^P \dot{t}^2 = 0$

并与式 $L_{11}^Q \dot{u}^2 + 2L_{12}^Q \dot{u}\dot{v} + L_{22}^Q \dot{v}^2 = 0$ 比较系数

计算后可得

$$\det[P_s, P_t, Q_{uu} - (\alpha^2 P_{ss} + 2\alpha\beta P_{st} + \beta^2 P_{tt})] = 0$$

上述方程等价于

$$Q_{uu} = \alpha^2 P_{ss} + 2\alpha\beta P_{st} + \beta^2 P_{tt} + pP_s + qP_t$$

特别地，当 $\alpha \equiv 1$ ， $\beta = p = q = 0$ ，曲面 $P(s, t)$ 和 $Q(u, v)$ 在公共边界处 C^2 连续。

(d) Bézier 曲面 G^2 拼接

已知一张 Bézier 曲面 $P(s, t)$ ，设计一个算法给出 $Q(u, v)$ 的构造方法，使得这两张曲面在公共边界处 G^2 连续。

§5. 有理曲线曲面的几何连续拼接

(a) 有理曲线几何连续性条件：

$$\text{设有理曲线 } R(t) = \frac{P(t)}{\omega(t)}, \quad \bar{R}(t) = \frac{\bar{P}(t)}{\bar{\omega}(t)}$$

齐次坐标表示形式：

$$Q(t) = (P(t), \omega(t)), \quad \bar{Q}(t) = (\bar{P}(t), \bar{\omega}(t))$$

曲线在连接点 $R(t_0) = \bar{R}(t_0)$ 处为 G^n 的充要条件：

存在参数变换 $\bar{t} = \bar{t}(t)$ 和数量函数 $e(t)$ ，使得

$$\left. \frac{d^k \bar{Q}(t)}{dt^k} \right|_{t=t_0} = \left. \frac{d^k (e(t)Q(t))}{dt^k} \right|_{t=t_0}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n$$

(b) 有理曲面几何连续性条件：

有理曲面可表示成齐次坐标，采用与有理曲线类似的方法可得连续性条件。