

《计算机辅助几何设计》第十三次作业

姓名：殷文良 学号：12435063

2024 年 12 月 18 日

1. 思考题

证明. • 均匀二次B样条

根据二次B样条细分算法，有

$$\begin{aligned}P_{2i}^{j+1} &= \frac{3}{4}P_i^j + \frac{1}{4}P_{i+1}^j \\P_{2i+1}^{j+1} &= \frac{1}{4}P_i^j + \frac{3}{4}P_{i+1}^j.\end{aligned}$$

对上式取差分，我们有

$$\begin{aligned}(\Delta P^{j+1})_{2i} &= P_{2i+1}^{j+1} - P_{2i}^{j+1} = \frac{1}{4}(-2P_i^j + 2P_{i+1}^j) \\&= \frac{1}{2}(\Delta P^j)_i.\end{aligned}$$

类似地，我们有 $(\Delta P^{j+1})_{2i+1} = \frac{1}{2}(\Delta P^j)_{i+1}$ 。

因此， $\|D\| = \frac{1}{2}$ ，根据细分收敛定理，均匀二次B样条细分曲线收敛。

• 均匀三次B样条

根据三次B样条细分算法，有

$$\begin{aligned}P_{2i}^{j+1} &= \frac{1}{8}(4P_i^j + 4P_{i+1}^j) \\P_{2i+1}^{j+1} &= \frac{1}{8}(P_{i-1}^j + 6P_i^j + P_{i+1}^j).\end{aligned}$$

对上式取差分，我们有

$$\begin{aligned}(\Delta P^{j+1})_{2i} &= P_{2i+1}^{j+1} - P_{2i}^{j+1} = \frac{1}{8}(P_{i-1}^j + 2P_i^j - 3P_{i+1}^j) \\&= \frac{1}{8}(3(P_{i+1}^j - P_i^j) + (P_i^j - P_{i-1}^j)) = \frac{1}{8}(3(\Delta P^j)_i + (\Delta P^j)_{i-1}).\end{aligned}$$

类似地，我们有 $(\Delta P^{j+1})_{2i+1} = \frac{1}{8}(3(\Delta P^j)_i + (\Delta P^j)_{i+1})$ 。

因此， $\|D\| = \frac{1}{2}$ ，根据细分收敛定理，均匀三次B样条细分曲线收敛。

QED