《计算机辅助几何设计》第四次作业

姓名：殷文良　　学号：12435063

2024 年 9 月 21 日

思考题 1

1.

- a.

证明. 由于 $C_n^i = C_{n-1}^i + C_{n-1}^{i-1}$，因此

$$M_{i,n}(t) = C_n^i t^i = (C_{n-1}^i + C_{n-1}^{i-1})t^i = M_{i,n-1}(t) + tM_{i-1,n-1}(t).$$

QED

- b.

Algorithm 1 类 de Casteljau 算法

Input: $c_i, i = 0, 1, \ldots, n, \quad t \in [0, 1]$

Output: c_0^n

for $i = 0, 1, \ldots, n$ **do**
  $c_i^0 = c_i$
end for
for $k = 1, 2, \ldots, n$ **do**
  for $i = 0, 1, \ldots, n-k$ **do**
    $c_i^k = c_i^{k-1} + tc_{i+1}^{k-1}$
  end for
end for
return c_0^n

2.

证明. 令

$$B'_{i,n}(t) = C_n^i (1-t)^{n-i-1} t^{i-1}(i - nt) = 0,$$

可得 $t = \dfrac{i}{n}$，因此 $B_{i,n}(t)$ 在 $t = \dfrac{i}{n}$ 处达到极值，并且该极值是最大值。 QED

3.

证明. 设随机变量 ξ 服从二项分布，即

$$\xi \sim B(n,t).$$

则其分布列为

$$P(\xi = i) = B_{i,n}(t), \quad i = 0, 1, \ldots, n.$$

于是，ξ 的期望为

$$E\xi = \sum_{i=0}^{n} iB_{i,n}(t).$$

根据二项分布对参数 n 的可加性，以及两点分布 η 的期望为 t，可知

$$E\xi = nE\eta = nt.$$

因此，我们有

$$\sum_{i=0}^{n} iB_{i,n}(t) = nt.$$

QED

思考题 2