《计算机辅助几何设计》第九次作业

姓名：殷文良　　学号：12435063

2024 年 11 月 16 日

思考题 1

1.

Algorithm 1 双n次Bezier曲面的de Casteljau算法

Input: $P, n, \quad u, v \in [0, 1]$

Output: $S = \sum_{j=0}^{m} B_{j,m}(v) \left(\sum_{i=0}^{n} B_{i,n}(u) P_{i,j} \right)$

```
for j = 0 : n do
    Q[j] = deCasteljau(P[j][], n, u);
end for
S = deCasteljau(Q, n, v);
return S;
```

- **de Casteljau算法**
  一共要执行的线性插值次数为
  $$\frac{n(n+1)(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2}.$$
  对于3维控制顶点，每次插值需要执行$(2+1)*3 = 9$次浮点运算（包括加法和乘法），因此时间复杂度为
  $$\frac{9n(n+1)(n+2)}{2} = O(n^3).$$

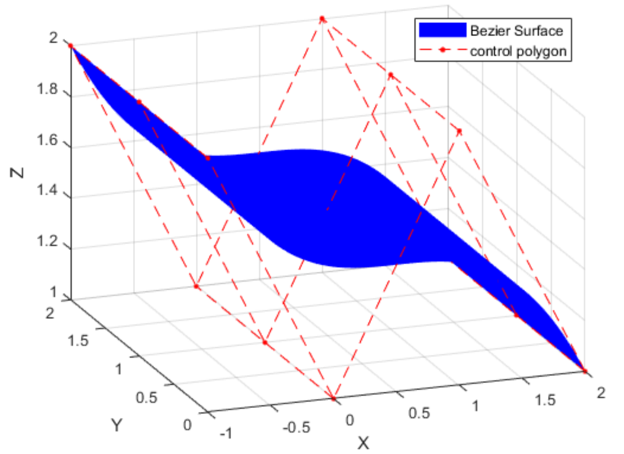

图 1: 2×3次Bezier曲面：de Casteljau算法

- 控制曲线算法

  根据Bernstein基函数递推关系式，计算某参数处所有n次基函数需要执行的浮点运算次数（包括加法和乘法）为

$$n(n+1)+\frac{n(n-1)}{2}=\frac{n(3n+1)}{2}.$$

  对于3维控制顶点，计算$n+1$条控制曲线需要执行的运算次数为

$$3*(2n+1)*(n+1).$$

  最后计算(u,v)处的点还需执行$\frac{n(3n+1)}{2}+3*(2n+1)$次运算。因此，时间复杂度为

$$\frac{n(3n+1)}{2}*2+3*(2n+1)*(n+2)=O(n^2).$$

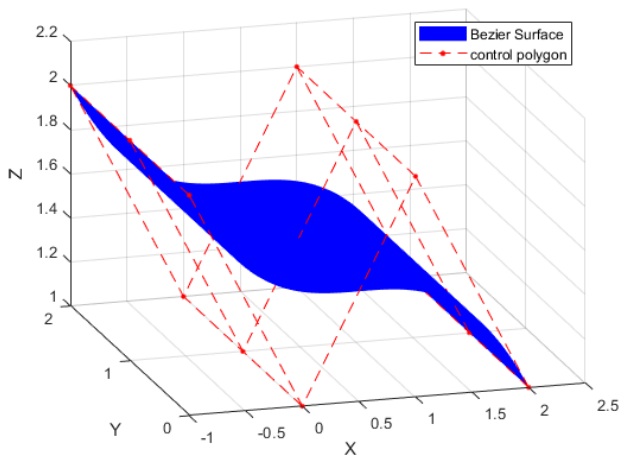

图 2: 2×3次Bezier曲面：控制曲线算法

2.

证明. 由双线性曲面性质可知，

$$X(u,v) = u(P_{10} - P_{00}) + v(P_{01} - P_{00}) + P_{00}.$$

再由恒等式$\sum_{i=0}^{n} iB_{i,n}(t) = nt$以及Bernstein基函数的权性可得，

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} P_{ij}B_{i,m}(u)B_{j,n}(v) &= \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} X(\frac{i}{m},\frac{j}{n})B_{i,m}(u)B_{j,n}(v) \\
&= \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} \left(\frac{i}{m}(P_{10} - P_{00}) + \frac{j}{n}(P_{01} - P_{00}) + P_{00}\right) B_{i,m}(u)B_{j,n}(v) \\
&= \sum_{j=0}^{n} u(P_{10} - P_{00})B_{j,n}(v) + \sum_{i=0}^{m} v(P_{01} - P_{00})B_{i,m}(u) + \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} P_{00}B_{i,m}(u)B_{j,n}(v) \\
&= u(P_{10} - P_{00}) + v(P_{01} - P_{00}) + P_{00} = X(u,v).
\end{aligned}$$

QED