《计算机辅助几何设计》第十一次作业

姓名：殷文良　　学号：12435063

2024 年 12 月 18 日

1. 思考题

1.

证明. 双线性 Coons 曲面不一定位于其边界曲线的凸包内。
构造一个简单的双线性 Coons 曲面：

1. **角点坐标：**
   $P(0,0)=(0,0,0), P(1,0)=(1,0,0), P(0,1)=(0,1,0), P(1,1,1)=(1,1,-1)$；
2. **边界曲线：**
   $P(0,v)=(0,v,0)$，连接$P(0,0)$和$P(0,1)$；
   $P(1,v)=(1,v,-v)$，连接$P(1,0)$和$P(1,1)$；
   $P(u,0)=(u,0,0)$，连接$P(0,0)$和$P(1,0)$；
   $P(u,1)=(u,1,-u)$，连接$P(0,1)$和$P(1,1)$；

角点$P(0,0), P(1,0), P(0,1), P(1,1)$形成一个带有凹陷的四边形区域，这种设置会生成一个双线性 Coons 曲面，其中心区域由于插值的影响向下凹陷，导致靠近$P(1,1)$的曲面点落在边界曲线凸包的外部。 QED

2.

证明. 设曲面$P(u,v)$处处扭矢为0，则有$\dfrac{\partial^2 P(u,v)}{\partial u \partial v} \equiv 0$，对等式两边积分可得

$$\frac{\partial P(u,v)}{\partial v} = C_0'(v).$$

对上式两边进一步积分，有

$$P(u,v) = C_1(u) + C_0(v) + C,$$

其中，$\dfrac{d}{dv}C_0(v) = C_0'(v)$。不妨设$P(u,0) = C_1(u)$，从而有

$$P(u,v) = C_1(u) + C_0(v) - C_0(0),$$

即这是将曲线$C_1(u)$沿曲线$C_0(V)$平移得到的曲面。 QED

3.

证明. 根据双线性Coons曲面的定义，有

$$
\begin{aligned}
S(u,v) &= Q_1(u,v) + Q_2(u,v) - \Delta(u,v) \\
&= [P(0,v)(1-u) + P(1,v)u] + [P(u,0)(1-v) + P(u,1)v] \\
&\quad - [P(0,0)(1-u)(1-v) + P(1,0)u(1-v) + P(0,1)v(1-u) + P(1,1)uv],
\end{aligned}
$$

其中，$P(0,v), P(1,v), P(u,0), P(u,1)$均为三次曲线。

上式第一项是关于v的三次多项式，关于u的线性多项式；第二项是关于u的三次多项式，关于v的线性多项式;第三项是关于u,v的双线性多项式。因此， $S(u,v)$是关于u,v的双三次多项式，即$S(u,v)$是双三次曲面。 QED