18
2

南京大学数学课程试卷(A)评分标准

2008-2009 学年第二学期　考试形式 闭卷　课程名称 大学数学理二（2）

考试时间 2009. 6. 21. 9:00—11:00　　考试成绩＿＿＿＿＿＿

题号	一	二	三	四	五	六	七
得分							

一、计算下列各题（每小题 5 分，共 30 分）

1) 求通过点$(1,2,-3)$与oz轴的平面方程.　　$2x-y=0$

2) f可微，函数$z=f\left(xy,x^2-y^2\right)$，求$y\dfrac{\partial z}{\partial x}+x\dfrac{\partial z}{\partial y}$.　　$\left(x^2+y^2\right)f_1'$

3) 交换二次积分 $\int_0^1 \mathrm{d}x\int_x^{2-x} f(x,y)\,\mathrm{d}y$ 的次序。　　$\int_0^1 \mathrm{d}y\int_0^y f\mathrm{d}x+\int_1^2 \mathrm{d}y\int_0^{2-y} f\mathrm{d}x$

4) 求$\int_\Gamma \mathrm{d}x+2\,\mathrm{d}y+y\,\mathrm{d}z$,其中$\Gamma$：$x=\cos t,y=\sin t,z=t$，$t$从 0 增到$\dfrac{\pi}{2}$.

解　原式$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-\sin t+2\cos x+\sin t)\,\mathrm{d}t=2.$

5) 设$\Sigma: x^2+y^2+z^2=a^2\ (z\ge 0)$，求$\iint_\Sigma z^2\,\mathrm{d}S$.

解　原式$=a\iint_D\sqrt{a^2-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=a\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a\sqrt{a^2-\rho^2}\rho\,\mathrm{d}\rho=\dfrac{2}{3}\pi a^4.$

6) 设$A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$，求$A^{-1},A^*$.　　$A^{-1}=\begin{pmatrix}-1&1&0\\1&0&-1\\0&0&1\end{pmatrix},A^*=\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&0&1\\0&0&-1\end{pmatrix}$。

二、（10 分）$\Omega: x^2+y^2+z^2\le 2z$, 求$\iiint_\Omega\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

解　原式$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2\cos\varphi}r^3\sin\varphi\,\mathrm{d}r$　$\boxed{6}$

$=\dfrac{8}{5}\pi$　$\boxed{4}$

三、(12 分) 设 Γ 为 $y=\sin x$ 上自点 $(0,0)$ 到点 $(\pi,0)$ 的一段弧，求

$$\int_{\Gamma}\left(\frac{x}{1+x^{2}}+y\cos(xy)\right)\mathrm{d}x+x\left(1+\cos(xy)\right)\mathrm{d}y.$$

解 $$\text{原式}=-\iint_{D}\left(Q_x'-P_y'\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_{\overrightarrow{OA}}P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y \quad \boxed{6}$$

$$=-\iint_{D}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_0^{\pi}\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln\left(1+\pi^2\right)-2. \quad \boxed{6}$$

四、(10 分) 求 $\iint_{\Sigma}\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+\sqrt{z}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，其中 $\Sigma: z=x^2+y^2\ (0\le z\le 1)$，取上侧。

解 $$\text{原式}=\iint_{D}\left(-2x+\sqrt{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad \boxed{3}$$

$$=0+\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho\rho\,\mathrm{d}\rho \quad \boxed{4} \quad =\frac{2}{3}\pi. \quad \boxed{3}$$

五、(12 分) 设 $A=\begin{pmatrix}1 & -\lambda & \lambda\\ \lambda & 1 & 0\\ 0 & 2 & -1\end{pmatrix}$，就常数 λ 的不同取值，求 A 的秩。

解 $|A|=\lambda^2-1$，$\boxed{3}$ $\therefore \lambda\neq\pm 1$ 时，$\mathrm{r}(A)=3$； $\boxed{3}$

当 $\lambda=1$ 时，$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 2 & -1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，$\mathrm{r}(A)=2$； $\boxed{3}$

当 $\lambda=-1$ 时，$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & 2 & -1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，$\mathrm{r}(A)=2$. $\boxed{3}$

六、(12 分) 已知 $\begin{cases}(1-a)x_1+2x_2+3x_3+4x_4=-8,\\ x_1+(2-a)x_2+3x_3+4x_4=1,\\ x_1+2x_2+(3-a)x_3+4x_4=2,\\ x_1+2x_2+3x_3+(4-a)x_4=0,\end{cases}$

1) 当 a 为何值时，该方程组有惟一解？ 2) 当 a 为何值时，该方程 组无解？ 3）当 a 为何值时，该方程 组有无穷多解？并求出其通解。

解　$|A|=-a^3(10-a)$，　$\boxed{3}$

$a\neq 0$ 且 $a\neq 10$ 时，方程组有惟一解。　$\boxed{2}$

$a=0$ 时，方程组无解。　$\boxed{2}$

$a=10$ 时，方程组有无穷多解，$\boxed{2}$　通解 为 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.8 \\ -0.1 \\ -0.2 \\ 0 \end{pmatrix}$.　$\boxed{3}$

七、(14 分)　用正交变换将二次型

$$f(x,y,z)=2\left(x^2+y^2+z^2\right)-2\left(yz+zx+xy\right)$$

化为标准型。

解　$|\lambda E-A|=\lambda(\lambda-3)^2=0$，　$\therefore \lambda=3,3,0$，　$\boxed{2}$

$\lambda=3$ 时，$\alpha_1=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_2=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$　$\boxed{2}$，　正交化得 $\beta_1=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \beta_2=\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$　$\boxed{2}$，

单位化得 $\gamma_1=\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \gamma_2=\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$　$\boxed{2}$；　$\lambda=0$ 时，$\alpha_3=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，单位化得 $\gamma_3=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$ $\boxed{2}$

令 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$　$\boxed{2}$，　$f=3x_1^2+3y_1^2$　$\boxed{2}$.