南京大学11~12学年第二学期《大学数学（第二层次）》试卷参考答案（A卷）

一、计算下列各题（每小题6分，共6题，共36分）

1. 设$\vec{a},\vec{b}$为非零向量，且$(7\vec{a}-5\vec{b})\perp(\vec{a}+3\vec{b}),(\vec{a}-4\vec{b})\perp(7\vec{a}-2\vec{b})$，求$|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2$.

解：由题意：$(7\vec{a}-5\vec{b})\cdot(\vec{a}+3\vec{b})=0$，即$7\vec{a}^2-15\vec{b}^2+16\vec{a}\cdot\vec{b}=0 \quad (1)$

$$(\vec{a}-4\vec{b})\cdot(7\vec{a}-2\vec{b})=0,\ 即7\vec{a}^2+8\vec{b}^2-30\vec{a}\cdot\vec{b}=0. \quad (2)$$

联立(1),(2)两式解得：$|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2=0.$

2. 求点$P(1,-1,-1)$处曲面$xyz=1$的切平面方程和法线方程 .

解：所求切向量为：$\vec{n}=(1,-1,-1)$，所以所求切平面方程为：$x-y-z=3$，

法线方程为：$1-x=y+1=z+1$.

3. 计算曲线积分$\int_L xds$，其中 L 是抛物线 $y=x^2$上点 $O(0,0)$ 与点 $A(1,1)$ 之间的一段弧 .

解：$\int_L xds=\int_0^1 x\sqrt{1+(2x)^2}dx=\int_0^1 x\sqrt{1+4x^2}dx=\frac{1}{12}(5\sqrt{5}-1)$.

4. 计算曲面积分$\iint\limits_{\Sigma} zdS$，其中$\Sigma$ 是球面$x^2+y^2+z^2=a^2$被$z=h\,(0<h<a)$截出的顶部 ..

解：Σ的方程为 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$, $(x,y)\in D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le a^2-h^2\}$,

$$\iint\limits_{\Sigma} zdS=\iint_D\sqrt{a^2-x^2-y^2}\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy=a\iint_D dxdy=\pi a(a^2-h^2).$$

5. 计算n阶行列式的值：$D_n=\begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$.

解：

求线性非齐次方程组

$$D_n=[a+(n-1)b]\cdot\begin{vmatrix}1&b&b&\cdots&b\\1&a&b&\cdots&b\\1&b&a&\cdots&b\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\1&b&b&\cdots&a\end{vmatrix}=[a+(n-1)b]\cdot\begin{vmatrix}1&b&b&\cdots&b\\0&a-b&0&\cdots&0\\0&0&a-b&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&\cdots&a-b\end{vmatrix}$$

$$=[a+(n-1)b](a-b)^{n-1}.$$

6. 设矩阵为 $A=\begin{pmatrix}5&0&0\\0&2&3\\0&2&2\end{pmatrix}$，计算其逆矩阵 A^{-1}.

解：$A^{-1}=\begin{pmatrix}5^{-1}&0\\0&\begin{pmatrix}2&3\\2&2\end{pmatrix}^{-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/5&0&0\\0&-1&3/2\\0&1&-1\end{pmatrix}$.

二、(本题 10 分) 求 $f(x)=\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{1+x}{1-x}+\dfrac{1}{2}\arctan x-x$ 的幂级数展式．

解：$f'=\dfrac{1}{1-x^4}-1=\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^{4n}\ |x|<1,\ \because f(0)=0,\ \therefore f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{4n+1}}{4n+1}\ |x|<1.$

三、(本题 10 分) 应用格林公式计算曲线积分：$\oint_L(xy^2+y^3)dy-(x^3+x^2y)dx$，其中 L 为圆周 $x^2+y^2=a^2$，取逆时针方向.

解：原式 $=\iint\limits_{x^2+y^2\le a^2}(x^2+y^2)dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a r^3dr=\dfrac{1}{2}\pi a^4$.

四、(本题 10 分) 求 $I=\oiint\limits_{\Sigma}x^4dydz+y^4dzdx+(z^4+z)dxdy$，其中 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 的外侧．

解：记球面所包围的区域为 Ω，由高斯公式，得

$$I=\iiint\limits_{\Omega}(4x^3+4y^3+4z^3+1)dxdydz=\iiint\limits_{\Omega}dxdydz=\frac{4}{3}\pi R^3.$$

五、(本题 10 分)

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=2,\\3x_1+3x_2+2x_3+x_4=5,\\x_3+2x_4+3x_5=1,\\2x_1+2x_2+x_3-x_5=3.\end{cases}$$ 的通解．

解：对该方程组的增广矩阵施行行初等变换，有

$$B=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&2\\3&3&2&1&0&5\\0&0&1&2&3&1\\2&2&1&0&-1&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0&-1&-2&1\\0&0&1&2&3&1\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}=D$$

与 D 对应的方程组为 $\begin{cases}x_1+x_2-x_4-2x_5=1,\\ \quad x_3+2x_4+3x_5=1.\end{cases}$

其导出组为 $\begin{cases}x_1+x_2-x_4-2x_5=0,\\ \quad x_3+2x_4+3x_5=0.\end{cases}$

取 x_1,x_3 为未知量，x_2,x_4,x_5 为自由未知量，得基础解系为，$\vec{\alpha}_1=(-1,1,0,0,0)^T$，

$\vec{\alpha}_2=(1,0,-2,1,0)^T,\vec{\alpha}_3=(2,0,-3,0,1)^T$，特解为：$\vec{\gamma}=(1,0,1,0,0)^T$，所求通解为：

$\vec{x}=k_1\vec{\alpha}_1+k_2\vec{\alpha}_2+k_3\vec{\alpha}_3+\vec{\gamma}$，其中 $\vec{x}=(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)^T,k_1,k_2,k_3$ 为任意常数.

六、（本题 10 分）已知 3 阶矩阵 $A=\begin{pmatrix}3&2&2\\2&3&2\\2&2&3\end{pmatrix}$ 的特征值为 1，~~3~~ 1，~~5~~ 7. 求 A^* 的特征值以及 $|A^*|$.

解：可以求得 $|A|$ =~~15~~ 7，设 A 的特征值和特征向量分别为 $\lambda,\vec{\alpha}$，则有

$$A\vec{\alpha}=\lambda\vec{\alpha}\Rightarrow A^{-1}\vec{\alpha}=\frac{1}{\lambda}\vec{\alpha}(\lambda\neq 0)\Rightarrow|A|A^{-1}\vec{\alpha}=\frac{|A|}{\lambda}\vec{\alpha}\Rightarrow A^*\vec{\alpha}=\frac{|A|}{\lambda}\vec{\alpha}$$

所以可得 A^* 的特征值分别为 ~~15~~ 7，~~3~~ 7，~~5~~ 1. 而 $|A^*|$=~~225~~ 49.

七、（本题 14 分）设 3 阶矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\1&2&-1\\1&0&1\end{pmatrix}$，求 A^k（$k\geq 2$ 为正整数）.

解：矩阵 A 的特征多项式为：$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&0&0\\-1&\lambda-2&1\\-1&0&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-2)^2$；

特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2,\lambda_3=2$.

对于 $\lambda_1=1$，对应的特征向量为 $\alpha_1=(0,1,1)^{\mathrm{T}}$；

对于 $\lambda_2,\lambda_3=2$，对应的特征向量为 $\alpha_2=(0，1，0)^{\mathrm{T}},\alpha_3=(1，0，1)^{\mathrm{T}}$.

所以相似矩阵为 $P=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$，$P^{-1}=\begin{pmatrix}-1&0&1\\1&1&-1\\1&0&0\end{pmatrix}$ 所以 $A^k=P\begin{pmatrix}1&&\\&2^k&\\&&2^k\end{pmatrix}P^{-1}$

$$=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&&\\&2^k&\\&&2^k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0&1\\1&1&-1\\1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0&1\\2^k&2^k&-2^k\\2^k&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^k&0&0\\2^k-1&2^k&1-2^k\\2^k-1&0&1\end{pmatrix}$$