大学数学（第二层次）期中试卷（2015．04．25）

姓名__________________ 系别__________________ 学号________________

一	二	三	四	五	六	七	总分

一、简答题（每小题 6 分，共 42 分）

1． 设向量 **a**，**b** 满足 $|a|=4$，$|b|=3$，及 $(\hat{a,b})=\dfrac{\pi}{6}$，求：以向量 ***a+b*** 和 ***a-5b*** 为边的平行四边形的面积。

解：S=$|(a+b)\times(a-5b)|=6|a\times b|=6|a||b|\sin\dfrac{\pi}{6}=36$

2． 求过点 $P(2,1,-2)$ 且通过直线 $L:\dfrac{x-4}{5}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z}{1}$ 的平面方程。

解：直线 L 的平面束方程为 $\dfrac{x-4}{5}-\dfrac{y+3}{2}+\lambda(\dfrac{y+3}{2}-z)=0$，代入点 P，得 $\lambda=\dfrac{3}{5}$。

则平面方程为 $x-y-3z-7=0$。

3． 求平面 $2x+y-2z+3=0$ 与直线 $\begin{cases}x-y+2z=0\\x+y-z=0\end{cases}$ 的夹角。

解：平面的法向量为 $n=\{2,1,-2\}$，直线的方向向量 $s=\begin{vmatrix}i & j & k\\1 & -1 & 2\\1 & 1 & -1\end{vmatrix}=\{-1,3,2\}$

则 $\sin\varphi=\left|\dfrac{n\cdot s}{\sqrt{n}\sqrt{s}}\right|=\left|\dfrac{-2+3-4}{\sqrt{9}\sqrt{14}}\right|=\dfrac{\sqrt{14}}{14}$，夹角为 $\varphi=\arcsin\dfrac{\sqrt{14}}{14}$。

4． 求由方程 $z^2y-xz=2$ 所确定的隐函数 $z=z(x,y)$ 的全微分 dz。

解：两边对 x 求偏导，$2zy\dfrac{\partial z}{\partial x}-z-x\dfrac{\partial z}{\partial x}=0$，故 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{z}{2zy-x}(2zy-x\neq 0)$。

两边对 y 求偏导，$2zy\dfrac{\partial z}{\partial y}+z^2-x\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$，故 $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{-z^2}{2zy-x}(2zy-x\neq 0)$

则 $dz=\dfrac{z}{2zy-x}dx+\dfrac{-z^2}{2zy-x}dy(2zy-x\neq 0)$。

5． 设三元函数 $f(\bullet,\bullet,\bullet)$ 有二阶连续偏导数，$z(x,y)=f(\sin x,\cos y,e^{x+y})$，求 z 的二阶混

合偏导数$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

解：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=f_1'\cos x+f_3'e^{x+y}$，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\cos x(f_{12}''(-\sin y)+f_{13}''e^{x+y})+f_3'e^{x+y}+e^{x+y}(f_{32}''(-\sin y)+f_{33}''e^{x+y})$$

6．求空间曲线Γ：$\begin{cases} y=x^2 \\ z=2x+1 \end{cases}$在点$(0,0,1)$处的切线方程和法平面方程。

解：切向量为$\{1,2x,2\}$，切线方程为$\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{0}=\dfrac{z-1}{2}$。

法平面方程为$x+2z-2=0$。

7．求解二重积分$\iint_D(x^2+y^2-x)d\sigma$，其中$D$由直线$y=2$，$y=x$以及$y=2x$所围成的有界闭区域。

解：$I=\int_0^2 dy\int_{\frac{y}{2}}^{y}(x^2+y^2-x)dx=\int_0^2\left.(\dfrac{x^3}{3}+y^2x-\dfrac{x^2}{2})\right|_{\frac{y}{2}}^{y}dy=\dfrac{13}{6}$。

二、（10分）已知点$P(-1,2,0)$，平面Π的方程为$x+2y-z+1=0$，求：(1) 点$P(-1,2,0)$在平面Π上的投影（2）点$P(-1,2,0)$到平面Π的距离。

解：(1)过$P(-1,2,0)$，$s=\{1,2,-1\}$的直线为$\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z}{-1}$，

直线参数方程$x=t-1,y=2t+2,z=-t$，代入平面得$t=-\dfrac{2}{3}$，

得投影点坐标为$Q(-\dfrac{5}{3},\dfrac{2}{3},\dfrac{2}{3})$。

(2) $d=|PQ|=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$, or $d=\dfrac{|-1+4+1|}{\sqrt{1+4+1}}=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$.

三、（10分）设直线$L:\begin{cases} x+y+b=0 \\ x+ay-z-3=0 \end{cases}$在平面$\Pi$上，而平面$\Pi$与曲面：$z=x^2+y^2$相切于点$(1,-2,5)$，求$a,b$的值。

解：曲面在$(1,-2,5)$处的切平面为$2(x-1)-4(y+2)-(z-5)=0$，

即 $2x-4y-z-5=0$。将直线参数方程 $\begin{cases} y=-(x+b) \\ z=x-a(x+b)-3 \end{cases}$ 代入上式，

即 $2x+4(x+b)-x+a(x+b)+3-5=0$，得 $\begin{cases} a=-5 \\ b=-2 \end{cases}$。

四、（8 分）设 $f(x,y)=\begin{cases} (x^2+y)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$。（1）讨论 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点处是否连续？（2）讨论 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点处两个偏导数是否存在？

解：(1) $\lim\limits_{x\to0,y\to0}(x^2+y)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \overset{\substack{x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta}}{=} \lim\limits_{r\to0} r(r\cos^2\theta+\sin\theta)\sin\dfrac{1}{r}=0=f(0,0)$,连续。

(2) $f_x'(0,0)=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{\Delta x^2\sin\dfrac{1}{|\Delta x|}}{\Delta x}=0$,故存在。

$f_y'(0,0)=\lim\limits_{\Delta y\to0}\dfrac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim\limits_{\Delta y\to0}\dfrac{\Delta y\sin\dfrac{1}{|\Delta y|}}{\Delta y}=\lim\limits_{\Delta y\to0}\sin\dfrac{1}{|\Delta y|}$，故不存在。

五、（10 分）已知空间曲线 Γ 的方程为: $\begin{cases} x^2+y^2=z \\ x+y+z=4 \end{cases}$，使用条件极值求曲线 Γ 上的点到原点的最大值和最小值。

解：设 Γ 上任意一点 $P(x,y,z)$ 到原点的距离函数为 $d(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$。

构造 $L(x,y,z)=x^2+y^2+z^2+\lambda(z-x^2-y^2)+\mu(x+y+z-1)$

则有 $\begin{cases} L_x=2x-2\lambda x+\mu=0 & (1) \\ L_y=2y-2\lambda y+\mu=0 & (2) \\ L_z=2z+\lambda+\mu=0 & (3) \\ L_\lambda=x^2+y^2-z=0 & (4) \\ L_\mu=x+y+z-4=0 & (5) \end{cases}$，有(1)与(2)式得，$\lambda=1$(由(3)式，舍去)or $x=y$。由(4)(5),得 $x=y=1or-2$。故最值点在 $M_1(1,1,2)$，$M_2(-2,-2,8)$。

$d_{\min}(0,M_1)=\sqrt{1+1+4}=\sqrt{6}$，$d_{\max}(0,M_2)=\sqrt{4+4+64}=6\sqrt{2}$。

六、（10 分）计算三重积分 $I=\iiint\limits_{\Omega} xz\,dxdydz$，其中 Ω 是由三坐标平面及平面 $x+y+z=1$ 在第一卦限所围成的闭区域。

解：

$$I=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}dy\int_0^{1-x-y}xzdz=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}\frac{1}{2}xz^2\Big|_0^{1-x-y}dz$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 dx\int_0^{1-x}x(1-x-y)^2dy=\frac{1}{120}$$

七、（10 分）求由曲面 $z=x^2+y^2$ 及曲面 $z=\sqrt{2-x^2-y^2}$ 所围成立体的体积。

解：两曲面的交线 $\begin{cases}x^2+y^2=1\\ z=1\end{cases}$，立体于 xoy 平面的投影区域 D 为 $\{(x,y):x^2+y^2\le 1\}$

$$V=\iint\limits_D\sqrt{2-x^2-y^2}dxdy-\iint\limits_D(x^2+y^2)dxdy$$

$$=\iint\limits_D(\sqrt{2-x^2-y^2}-(x^2+y^2))dxdy$$

$$\overset{\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}}{=}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1(\sqrt{2-r^2}-r^2)rdr$$

$$=\pi\int_0^1(\sqrt{2-r^2}-r^2)dr^2=(\frac{4\sqrt{2}}{3}-\frac{7}{6})\pi$$