（理二）大学数学（II）期末试卷(A) 参考解答 2011.06.22.

一.（4+6=10分）

1. 已知向量$\overrightarrow{a}=-\overrightarrow{i}$，$\overrightarrow{b}=-\overrightarrow{i}+2\overrightarrow{j}-2\overrightarrow{k}$，向量$\overrightarrow{c}$ 在$\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$ 的夹角平分线上，$|\overrightarrow{c}|=\sqrt{6}$，求向量 $\overrightarrow{c}$.

解. $\overrightarrow{c}=-2\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}-\overrightarrow{k}$. $4'$

2. 求点 $(1,2,3)$ 到直线 $\begin{cases} x+y+z=1, \\ 2x-y+z=3 \end{cases}$ 的距离.

解. $(-2,-2.5)$ 是直线上一点，$\{2,1,-3\})$ 是直线的方向，$d=\dfrac{|\{3,4,-2\}\times\{2,1,-3\}|}{|\{2,1,-3\}|}=\sqrt{\dfrac{75}{7}}$. $6'$

二. (10分) 求空间曲线$\begin{cases} 2x-3y+z=0 \\ 2x^2+3y^2+z^2=30 \end{cases}$ 上坐标 z 的最大值和最小值.

解 记 $F=z+\lambda(2x-3y+z)+\mu(2x^2+3y^2+z^2-30)$，令 $2'$

$F'_x=2\lambda+4\mu x=0$，$F'_y=-3\lambda+6\mu y=0$，$F'_z=1+\lambda+2\mu z=0$， 解得 $x=-y=\dfrac{\lambda}{2\mu}$，$z=-\dfrac{1+\lambda}{2\mu}$. $4'$

代入 $2x-3y+z=0$ 得 $\lambda=\dfrac{1}{4}$； 代入 $2x^2+3y^2+z^2=30$ 得 $\mu=\pm\dfrac{1}{8}$. $2'$

可能的极值点为 $(1,-1,-5)$，$(-1,1,5)$，故 $z_{\max}=5$，$z_{\min}=-5$. $2'$

三.（10分）计算 $I=\oint_L(x^2+y^2+z^2)dl$，其中 L 为 $x^2+y^2+z^2=a^2$，$z=x$ 的交线.

解 L 的参数方程为： $x=z=\dfrac{a}{\sqrt{2}}\cos\theta$，$y=a\sin\theta$，$0\le\theta\le 2\pi$， $3'$

$x'(\theta)=z'(\theta)=-\dfrac{a}{\sqrt{2}}\sin\theta$，$y'(\theta)=a\cos\theta$，$\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}=a$. $3'$

$I=\oint_L a^2dl=a^2\int_0^{2\pi}\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}d\theta=a^2\int_0^{2\pi}ad\theta=2\pi a^3$. $4'$

四. (10分) 求曲面积分 $\iint_\Sigma axdydz+bydzdx+czdxdy$. 其中，$\Sigma$：$x^2+y^2+z^2=1\,(z\ge 0)$ 取上侧，a,b,c 为常数.

解. $\displaystyle\iint_\Sigma xdydz=2\iint_{y^2+z^2\le 1(z\ge 0)}\sqrt{1-y^2-z^2}dydz=2\int_0^\pi d\theta\int_0^1\sqrt{1-r^2}rdr=2\pi\Big[-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(1-r^2)^{\frac{3}{2}}\Big]_0^1=\frac{2}{3}\pi$.

$\displaystyle\iint_\Sigma ydzdx=2\iint_{x^2+z^2\le 1(z\ge 0)}\sqrt{1-x^2-z^2}dxdz=\frac{2}{3}\pi$. $\displaystyle\iint_\Sigma zdxdy=\iint_{x^2+y^2\le 1}\sqrt{1-x^2-y^2}dxdy=\frac{2}{3}\pi$.

所以，原式$=\dfrac{2\pi}{3}(a+b+c)$. （注：也可应用高斯公式计算本题） $5'+2'+2'+1'$

五.（8 分）

解得： $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=3$，$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 0 & 4 & -2 & 2 \\ 6 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 6 & 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. 及 $|\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{B}|=0$. $3'+3'+2'$

六.（8 分）

解：设 $A_1=\begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$，则 $A_1^{-1}=\dfrac{1}{|A_1|}A_1^*=\dfrac{-1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$. $4'$

设 $A_2=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，则 $A_2^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. $2'$ 所以，$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{5}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. $2'$

七．（12 分）讨论 λ 为何值时，线性方程组 $\begin{cases} x_1+(\lambda^2+1)x_2+2x_3=\lambda, \\ \lambda x_1+\lambda x_2+(2\lambda+1)x_3=0, \\ x_1+(2\lambda+1)x_2+2x_3=2 \end{cases}$ 有唯一解、无穷多组解或无解？在有解的情况，求出其解．

解: $\begin{pmatrix} 1 & \lambda^2+1 & 2 & \lambda \\ \lambda & \lambda & 2\lambda+1 & 0 \\ 1 & 2\lambda+1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & \lambda^2+1 & 2 & \lambda \\ 0 & \lambda(2-\lambda) & 0 & 2-\lambda \\ 0 & -\lambda^3 & 1 & -\lambda^2 \end{pmatrix}$ $4'$

(1) 当 $\lambda \neq 0.2$ 时，有唯一解 $x_1=-\frac{1}{\lambda}$, $x_2=\frac{1}{\lambda}$, $x_3=0$. (2) 当 $\lambda=0$ 时，无解.

(3) 当 $\lambda=2$ 时，有无穷多组解：$x=k(-\frac{21}{8},\frac{1}{8},1)^T+(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},0)^T$. $3'+2'+3'$

八. (10分) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是线性无关的 3 维列向量组，A 为 3 阶矩阵，$\boldsymbol{A\alpha}_1=2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$, $\boldsymbol{A\alpha}_2=2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$, $\boldsymbol{A\alpha}_3=2\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3$.

1）若 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{B}$, 求矩阵 $\boldsymbol{B}$；2）求 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的特征值.

解. 1）由 $(2\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3,\ 2\alpha_2+\alpha_3,\ 2\alpha_2+3\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)B$, 得 $B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ $4'$

2）$|B-\lambda E|=\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 2 \\ -1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix}=(2-\lambda)(\lambda-4)(\lambda-1)=0$. 得 B 的特征值为 1, 2, 4. $4'$

由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是线性无关，知 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 可逆，于是 A 与 B 相似，从而 A 与 B有相同的特征值，所以 A 的特征值也是为 1, 2, 4. $2'$

九. (22分) 给定实二次型 $f=2x_1^2+2x_2^2+3x_3^2+2x_1x_2$.

(1) 写出该二次型的表示矩阵 A; (2) 求出 A 的特征值和特征向量;

(3) 用一个正交变换将该二次型化为标准形. (4) 指出该二次型是否正定？

解 (1) $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. $3'$

(2) $|A-\lambda E|=-(\lambda-1)(\lambda-3)^2$. 特征值为$\lambda_1=1$, $\lambda_{2,3}=3$ (二重). $4'$

对于 $\lambda_1=1$, $(A-\lambda_1E)=\theta$ 的基础解系为 $\alpha_1=(1,-1,0)^T$.;

对于 $\lambda_2=3$, $(A-\lambda_1E)=\theta$ 的基础解系为 $\alpha_2=(1,1,0)^T$, $\alpha_3=(0,0,1)^T$;

于是所求全部特征向量为 $k_1\alpha_1$ $(k_1\neq 0)$ 及 $k_2\alpha_2+k_3\alpha_3$, $(k_2^2+k_3^2\neq 0)$. $6'$

α_2,α_3 是正交的，分别单位化得 $\gamma_2=(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0)^T$, $\gamma_3=\alpha_3=(0,0,1)^T$. 再单位化 α_1 得 $\gamma_1=(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},0)^T$, $3'$

(3) 取正交矩阵 $P=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)$. 则在正交变换 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=P\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ 下 $f=y_1^2+3y_2^2+3y_3^2$. $3'$

(4) 由于 A 的特征值全为正数，所以该二次型是正定的。 $3'$