学号:

姓名:

院系:

微积分II与线性代数（第二层次）期中试卷 2016.4.23

一、计算下列各题（每题6分，共48分）

1、四面体以 $A(-1,2,4)$，$B(6,3,2)$，$C(1,4,-1)$ 和 $D(-1,-2,5)$ 四点为顶点，求四面体的体积。

解：

$$(AB,AC,AD)=\begin{vmatrix}7 & 1 & -2\\ 2 & 2 & -5\\ 0 & -4 & 1\end{vmatrix}=-112$$

所以四面体的体积为 56/3。

2、求点 $P(1,2,3)$ 到平面 $\Pi:3x+2y-z+4=0$ 的距离，并判断 P 点与原点在平面 Π 的同侧还是异侧。

解：平面 Π 的法线式方程：$-\frac{3}{\sqrt{14}}x-\frac{2}{\sqrt{14}}y+\frac{1}{\sqrt{14}}z-\frac{4}{\sqrt{14}}=0$，从而 $\lambda=-\frac{3}{\sqrt{14}}-\frac{2}{\sqrt{14}}2+\frac{1}{\sqrt{14}}3-\frac{4}{\sqrt{14}}=\frac{-8}{\sqrt{14}}$，所以点 P 到平面 Π 的距离为 $\frac{8}{\sqrt{14}}$，且与原点在平面的同侧。

3、求直线 $L:\begin{cases}2x-4y+z=0\\ 3x-y-2z-9=0\end{cases}$ 在平面 $\Pi:4x-y+z=1$ 上的投影直线的方程。

解：设过直线 L 的平面束的方程为 $2x-4y+z+\lambda(3x-y-2z-9)=0$，即 $(2+3\lambda)x+(-4-\lambda)y+(1-2\lambda)z-9\lambda=0$。在此平面束中确定一平面与平面 Π 垂直，即 $4(2+3\lambda)+(-1)(-4-\lambda)+1(1-2\lambda)=0$ 得 $\lambda=-13/11$。因此，所求投影直线的方程为 $\begin{cases}17x+31y-37z-117=0\\ 4x-y+z=1\end{cases}$ 。

4、设 $u=\frac{e^{ax}(y-z)}{a^2+1}$，而 $y=a\sin x$，$z=\cos x$，求 $\frac{du}{dx}$。

解：

$$\begin{aligned}\frac{du}{dx}&=\frac{ae^{ax}(y-z)}{a^2+1}+\frac{e^{ax}}{a^2+1}a\cos x+\frac{-e^{ax}}{a^2+1}(-\sin x)\\ &=\frac{e^{ax}}{a^2+1}(a^2\sin x-a\cos x+a\cos x+\sin x)=e^{ax}\sin x\end{aligned}$$

5、设 $\begin{cases}z=x^2+y^2\\ x^2+2y^2+3z^2=10\end{cases}$ 求 $\frac{dy}{dx}$，$\frac{dz}{dx}$。

解：分别在两个方程两段对 x 求导，得

$$\begin{cases}z'_x=2x+2yy'_x\\ 2x+4yy'_x+6zz'_x=0\end{cases}$$

解得：$\frac{dy}{dx}=\frac{-x(6z+1)}{2y(3z+1)}$，　$\frac{dz}{dx}=\frac{x}{3z+1}$。

6、交换积分次序：$\int_0^2 dy\int_{y^2}^{2y}f(x,y)dx$。

解：原式 $=\int_0^4 dx\int_{x/2}^{\sqrt{x}}f(x,y)dy$。

7、$\iint\limits_D\sqrt{x^2+y^2}dxdy$，其中 D 为环形区域 $\{(x,y)\mid a^2\le x^2+y^2\le b^2\}$。

解：$\iint\limits_D\sqrt{x^2+y^2}dxdy=\iint\limits_D\rho\cdot\rho d\rho d\theta=\int_0^{2\pi}d\theta\int_a^b\rho^2d\rho=\frac{2}{3}\pi(b^3-a^3)$。

8、$\oint_L xds$，其中 L 为由直线 $y=x$ 及抛物线 $y=x^2$ 所围成的区域的整个边界。

解：$L=L_1+L_2$，其中 $L_1:y=x,\ x\in[0,1]$，$L_2:y=x^2,\ x\in[0,1]$

$\oint_L xds=\int_0^1 x\sqrt{1+1^2}dx+\int_0^1 x\sqrt{1+(2x)^2}dx=\frac{1}{12}(5\sqrt{5}+6\sqrt{2}-1)$。

二、（10分）求直线 $L:\begin{cases}x+y+z=0\\x+z-1=0\end{cases}$ 关于平面 $\Pi: 3x+y+5z-6=0$ 的对称直线的标准（或对称）方程。

解：直线 L 与平面 Π 的交点为 $P_1(-1,-1,2)$。
在直线 L 上另取一点 $P_2(1,-1,0)$，则过点 P_2，且与平面垂直的直线的参数方程为 $x=1+3t,\ y=-1+t,\ z=5t$，其与平面的交点为 $P_3(47/35,-31/35,4/7)$。由交点 P_3 为 P_2 与其对称点的中点知，点 P_2 的对称点为 $P_4(59/35,-27/35,8/7)$。P_1P_4 为所求对称直线，其对称方程为: $\dfrac{x+1}{47}=\dfrac{y+1}{4}=\dfrac{z-2}{-15}$。

三、（10分）设 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

讨论 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的可偏导性与可微性。

解：$f'_x(0,0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=0$；同理 $f'_y(0,0)=0$。

$$f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)=0\cdot\Delta x+0\cdot\Delta y+\frac{\Delta x\Delta y^2}{\Delta x^2+\Delta y^2}$$

当 $\Delta y=k\Delta x$ 时，$\dfrac{\left|\frac{\Delta x\Delta y^2}{\Delta x^2+\Delta y^2}\right|}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}=\dfrac{k^2}{(1+k^2)^{3/2}}$，极限不存在，即 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 不可微。

四、（10分）求两条异面直线

$$L_1:\begin{cases}x-2y+z-7=0\\2x-y+z-6=0\end{cases}\qquad L_2:\begin{cases}x+y-z+2=0\\x-2y+3z+1=0\end{cases}$$

之间的距离。

解：将 L_1 和 L_2 改写为参数方程：
$L_1:\ x=1-t,\ y=-2+t,\ z=2+3t;$
$L_2:\ x=-2+s,\ y=1-4s,\ z=1-3s.$
记 L_1 上的点 $P(t)$ 与 L_2 上的点 $Q(s)$ 之间的距离的平方为 $F(t,s)$，则 $F(t,s)=(3-t-s)^2+(-3+t+4s)^2+(1+3t+3s)^2$。

令 $F'_t=0$，$F'_s=0$，得 $\begin{cases}-3+11t+14s=0\\-6+7t+13s=0\end{cases}$ 解得 $t=-1$，$s=1$。所以 $d=|P(-1)Q(1)|=\sqrt{10}$。

五、（11分）计算 $\int_L(x^2-y)dx-(x+\sin^2 y)dy$，其中 L 是在圆周 $y=\sqrt{2x-x^2}$ 上由点 $(0,0)$ 到点 $(1,1)$ 的一段圆弧。（提示：可利用格林公式将圆弧 L 上的曲线积分转换为折线 $(0,0)\to(1,0)\to(1,1)$ 上的曲线积分。）

解：$P=x^2-y$，$Q=-(x+\sin^2 y)$ 在 xOy 平面内有一阶连续偏导数，且 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=-1=\dfrac{\partial p}{\partial y}$，故所求积分与路径无关，于是可将上述圆弧 L 上的曲线积分转换为折线 $(0,0)\to(1,0)\to(1,1)$ 上的曲线积分。

$$\begin{aligned}&\int_L(x^2-y)dx-(x+\sin^2 y)dy\\&=\int_{(0,0)\to(1,0)}(x^2-y)dx-(x+\sin^2 y)dy+\int_{(1,0)\to(1,1)}(x^2-y)dx-(x+\sin^2 y)dy\\&=\int_0^1 x^2dx-\int_0^1(1+\sin^2 y)dy\\&=-\frac{7}{6}+\frac{\sin 2}{4}\end{aligned}$$

六、（11分）计算三重积分 $\iiint_V z^2dxdydz$，其中 V 是两个球：$x^2+y^2+z^2\le R^2$ 和 $x^2+y^2+z^2\le 2Rz\ (R>0)$ 的公共部分。

解：由 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=R^2\\x^2+y^2+z^2\le 2Rz\end{cases}$ 解得 $z=R/2$，于是平面：$z=R/2$ 把 V 分成 V_1 和 V_2 上下两部分。

$$\begin{aligned}&\iiint_V z^2dxdydz\\&=\iiint_{V_1}z^2dxdydz+\iiint_{V_2}z^2dxdydz\\&=\int_{R/2}^R z^2dz\iint_{x^2+y^2\le R^2-z^2}dxdy+\int_0^{R/2}z^2dz\iint_{x^2+y^2\le 2Rz-z^2}dxdy\\&=\int_{R/2}^R z^2\pi(R^2-z^2)dz+\int_0^{R/2}z^2\pi(2Rz-z^2)dz\\&=\frac{59}{480}\pi R^5\end{aligned}$$

其中第三个等号用了二重积分的性质。另外，本题也可以用球坐标进行计算。