2013-2014 学年第二学期第二层次微积分 II 与线性代数期末试卷（A 卷）参考答案 2014.6.23

一、计算下列各题（每小题 6 分，共 42 分）

1. 设 $\vec{a}\times\vec{b}\cdot\vec{c}=2$，求 $[(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{b}+\vec{c})]\cdot(\vec{c}+\vec{a})$.

解： $[(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{b}+\vec{c})]\cdot(\vec{c}+\vec{a})=2\vec{a}\times\vec{b}\cdot\vec{c}=4.$

2. 函数 $z=f(x,y)$ 由方程 $x^2(y+z)-4\sqrt{x^2+y^2+z^2}=0$ 确定，求 z 在点 $P(-2,2,1)$ 处的全微分 dz .

解： 对方程 $x^2(y+z)-4\sqrt{x^2+y^2+z^2}=0$ 两边微分，得

$$2x(y+z)dx+x^2(dy+dz)-4(xdx+ydy+zdz)/\sqrt{x^2+y^2+z^2}=0,$$

将 P 点代入并整理得：$dz=\dfrac{1}{2}(7dx-dy).$

3. 求函数 $z=x^3-3xy+8y^3$ 的极值.

解： 由方程组 $\begin{cases} f_x'=3x^2-3y=3(x^2-y)=0, \\ f_y'=-3x+24y^2=-3(x-8y^2)=0. \end{cases}$ 解得驻点为：$P_1(0,0),P_2(1/2,1/4).$

$f''_{xx}=6x, f''_{xy}=-3, f''_{yy}=48y,$ 在点 P_1 处，$A=0,B=-3,C=0,B^2-AC=9>0$，所以 P_1 点不是极值点. 在 P_2 处，$A=3,B=-3,C=12,B^2-AC<0,A>0$，所以 P_2 是极小值点，极小值为：$f(P_2)=-1/8.$

4. 求三重积分 $I_1=\iiint_\Omega z^2dV$，其中 Ω 为椭球体 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\le 1$.

解： $I_1=2\int_0^1 z^2dz\iint_{D(z)}dxdy=2\pi\int_0^1 z^2ab(1-z^2/c^2)dz=\dfrac{4\pi}{15}abc^3.$

5. 求第一类曲线积分 $I_2=\int_C y^2ds$，其中 C：$y=e^x\ (0\le x\le 1)$.

解： $I_2=\int_0^1 e^{2x}\sqrt{1+e^{2x}}dx=\dfrac{1}{3}(\sqrt{1+e^{2x}})^3\Big|_0^1=\dfrac{1}{3}(\sqrt{1+e^2})^3-\dfrac{2}{3}\sqrt{2}.$

6. 求第二类曲线积分 $I_3=\int_C xydx$，其中 C 为抛物线：$y^2=x$.从点 $A(1,-1)$ 到点 $B(1,1)$ 的一段弧.

解： $I_3=\int_{-1}^1 y^2y(y^2)'dy=2\int_{-1}^1 y^4dy=4/5.$

7. 计算行列式$D_4=\begin{vmatrix}-1 & 1 & 2 & 0\\ 0 & 3 & 2 & 1\\ 0 & 4 & 1 & 2\\ 3 & 1 & 5 & 7\end{vmatrix}$.

解：$D_4=\begin{vmatrix}-1 & 1 & 2 & 0\\ 0 & 3 & 2 & 1\\ 0 & 4 & 1 & 2\\ 3 & 1 & 5 & 7\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1 & 1 & 2 & 0\\ 0 & 3 & 2 & 1\\ 0 & 4 & 1 & 2\\ 0 & 4 & 11 & 7\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}3 & 2 & 1\\ 4 & 1 & 2\\ 4 & 11 & 7\end{vmatrix}=45.$

二、(10分)计算曲线积分$I=\int_C e^x\cos ydx+(x^2-e^x\sin y)dy$，其中C为半圆弧$y=\sqrt{4-x^2}$从点$A(-2,0)$到点$B(2,0)$.

解：增加线段AB，由C和AB围成的平面区域记为D，则

$$I=\int_{C+AB-AB}e^x\cos ydx+(x^2-e^x\sin y)dy=-\iint_D 2xdxdy-\int_{AB}e^x\cos ydx+(x^2-e^x\sin y)dy$$

$$=-\int_{-2}^{2}e^x dx=e^{-2}-e^2.,$$

三、(10分)计算第二类曲面积分$\iint_S xdydz+ydzdx+zdxdy$，其中$S$是圆柱$x^2+y^2\le 4$被$z=0$及$z=3$所截得的曲面的外侧.

解：Σ不是封闭曲面，为了应用奥高公式，引进辅助平面$S_1:x^2+y^2\le 4,z=0$取下侧与$S_2:x^2+y^2\le 4,z=3$取上侧，则S与S_1、S_2一起围成圆柱体V，按奥高公式

$$\iint_S xdydz+ydzdx+zdxdy=\iint_{S+S_1+S_2-S_1-S_2}xdydz+ydzdx+zdxdy$$
$$=3\iiint_V dxdydz-3\iint_{x^2+y^2\le 4}dxdy=24\pi.$$

四、(8分)求行列式$D_n=\begin{vmatrix}x & y & y & y & \cdots & y\\ y & x & y & y & \cdots & y\\ y & y & x & y & \cdots & y\\ y & y & y & x & \cdots & y\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ y & y & y & y & \cdots & x\end{vmatrix}x,y\neq 0$.

解：$D_n=\begin{vmatrix} x & y & y & y & \cdots & y \\ y & x & y & y & \cdots & y \\ y & y & x & y & \cdots & y \\ y & y & y & x & \cdots & y \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y & y & y & y & \cdots & x \end{vmatrix}=[x+(n-1)y](x-y)^{n-1}$.

五、（10 分）求线性非齐次方程组$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=2, \\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=-2, \\ 5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5=2, \\ x_2+2x_3+2x_4+x_5=3, \end{cases}$ 的通解.

解：增广矩阵为：

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 & -2 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & -8 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & -8 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

所以，$x_1=-1+x_3+x_4, x_2=2-2x_3-2x_4, x_5=1 \therefore \vec{x}=k\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+s\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, k,s\in R.$

六、（10 分）

设有向量组 $\vec{\alpha}_1=(1,4,0,2)^T$，$\vec{\alpha}_2=(2,7,1,3)^T$，$\vec{\alpha}_3=(0,1,-1,a)^T$，$\vec{\alpha}_4=(3,10,b,4)^T$，按 a,b 的不同取值，指出此向量组的一个极大线性无关组及秩 r.

解：$(\overrightarrow{\alpha_1},\overrightarrow{\alpha_2},\overrightarrow{\alpha_3},\overrightarrow{\alpha_4})=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 7 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & b \\ 2 & 3 & a & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b-2 \end{pmatrix}$.

（1）$a\neq 1, b\neq 2$ 时，极大线性无关组为向量组本身，$r=4$.

（2）$a\neq 1, b=2$ 时，一个极大线性无关组为 $\overrightarrow{\alpha_1},\overrightarrow{\alpha_2},\overrightarrow{\alpha_3}$，$r=3$.

$a=1, b\neq 2$ 时，一个极大线性无关组为 $\overrightarrow{\alpha_1},\overrightarrow{\alpha_2},\overrightarrow{\alpha_4}$，$r=3$.

（3）$a=1, b=2$ 时，一个极大线性无关组为 $\overrightarrow{\alpha_1},\overrightarrow{\alpha_2}$，$r=2$.

七、（10分）已知 $A=\begin{pmatrix}1 & -3 & 3\\ 3 & -5 & 3\\ 6 & -6 & 4\end{pmatrix}$，问此矩阵可否对角化，在可对角化的情形下，求出与其相似的对角阵及相应的相似变换矩阵 P.

解： 由 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 3 & -3\\ -3 & \lambda+5 & -3\\ -6 & 6 & \lambda-4\end{vmatrix}=(\lambda+2)^2(\lambda-4)=0$，得特征值为 $-2,-2,4$.

对于 $\lambda_1=-2$ 解齐次线性方程组 $(-2E-A)x=\vec{0}$，得二个基础解系：$\alpha_1=(1,1,0)^T$，$\alpha_2=(0,1,1)^T$．对于 $\lambda_3=4$ 解齐次线性方程组 $(4E-A)x=\theta$，得一个基础解系：$\alpha_3=(1,1,2)^T$．因此矩阵 A 可对角化，且

$P=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$，使得 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}$.