院系:______ 姓名:______ 学号:______

微积分 II 与线性代数（第二层次）期中试卷 2017.4.22

一、计算下列各题（每题6分，共48分）

1、将函数 $\ln(1-2x)$ 展开成 x 的幂级数，并指出其收敛区间。

解：由 $\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$，$-1<x\le 1$ 可知

$\ln(1-2x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(-2x)^n}{n}$，$-1<-2x\le 1$，即

$\ln(1-2x)=\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{(2x)^n}{n}$，$-1/2\le x<1/2$

2、已知 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=2$，求 $\left[(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\right]\cdot(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a})$。

解：由分配律

$$\begin{aligned}&\left[(a+b)\times(b+c)\right]\cdot(c+a)\\&=(a,b,c)+(b,b,c)+(a,c,c)+(b,c,c)\\&\quad+(a,b,a)+(b,b,a)+(a,c,a)+(b,c,a)\\&=4\end{aligned}$$

3、设一平面经过原点及点 $(6,-3,2)$，且与平面 $4x-y+2z=8$ 垂直，求该平面的方程。

解：由平面过原点，设平面的方程为 $Ax+By+Cz=0$。
由平面过 $(6,-3,2)$ 得 $6A-3B+2C=0$；
又由所求平面与平面 $4x-y+2z=8$ 垂直得 $4A-B+2C=0$。
解得：$A=B$，$3A+2C=0$，从而平面的方程为：$2x+2y-3z=0$

4、求直线 $\begin{cases}x-2y+3=0\\2y+z-7=0\end{cases}$ 与平面 $3x+4y+5z=6$ 之间的距离。

解：直线的对称方程为 $\frac{x-1}{-2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-3}{2}$。
由 $\{-2,-1,2\}\cdot\{3,4,5\}=0$ 可知直线与平面平行，直线与平面之间的距离可化为直线上任意一点到平面的距离。
所以，$d=\frac{3+8+15-6}{\sqrt{9+16+25}}=2\sqrt{2}$

5、设函数 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数，$z=f(xy,x^2-y^2)$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

解：$\frac{\partial z}{\partial y}=xf'_u-2yf'_v$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}&=f'_u+xyf''_{uu}+2x^2f''_{uv}-2y^2f''_{vu}-4xyf''_{vv}\\&=f'_u+xyf''_{uu}+(2x^2-2y^2)f''_{uv}-4xyf''_{vv}\end{aligned}$$

6、求椭圆抛物面 $x^2+y^2=z$ 在点 $(1,1,2)$ 的切平面。

解：$F(x,y,z)=x^2+y^2-z=0$，则 $F'_x=2x$，$F'_y=2y$，$F'_z=-1$，
从而 $F'_x(1,1,2)=2$，$F'_y(1,1,2)=2$，$F'_z(1,1,2)=-1$，
故切平面的方程为 $2(x-1)+2(y-1)-(z-2)=0$

7、交换积分次序：$\int_0^1 dy\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y}f(x,y)dx$。

解：原式 $=\int_{-1}^0 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)dy+\int_0^1 dx\int_0^{1-x}f(x,y)dy$

8、求平面 $6x+3y+2z-6=0$ 被三个坐标平面所割出的部分的面积。

解：平面 $6x+3y+2z-6=0$ 被三个坐标平面所割出的部分在 xoy 平面的投影为 $D_{xy}=\{(x,y)\mid x\ge 0,\ y\ge 0, 2x+y\le 2\}$。
平面的方程可改写为 $z=-3x-3/2y+3$，则 $\frac{\partial z}{\partial x}=-3$，$\frac{\partial z}{\partial y}=-3/2$。
所以 $S=\iint_{D_{xy}}\sqrt{(-3)^2+(-3/2)^2+1}dxdy=7/2$。

二、（10分）求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^n$ 的收敛域，并求其和函数。

解：$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+3}{2n+1}=1\Longrightarrow R=1$，收敛域为 $(-1,1)$。

$$\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^n=2x\sum_{n=0}^{\infty}nx^{n-1}+\sum_{n=0}^{\infty}x^n=2x\Big(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\Big)'+\sum_{n=0}^{\infty}x^n$$
$$=2x\Big(\frac{1}{1-x}\Big)'+\frac{1}{1-x}=\frac{1+x}{(1-x)^2}$$

三、（10分）函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续，且极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{f(x,y)}{x^2+y^2}$ 存在，求证：$f(0,0)=0$，$f'_x(0,0)=f'_y(0,0)=0$，并讨论 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处的可微性。

证明：由极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{f(x,y)}{x^2+y^2}$ 存在得 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)=0$；

又由 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续可知 $f(0,0)=0$。

$f'_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(\Delta x,0)}{\Delta x^2+0^2}\cdot\Delta x=0$，同理 $f'_y(0,0)=0$。于是，

$$\lim_{\substack{\Delta x\to0\\\Delta y\to0}}\frac{f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)-[f'_x(0,0)\Delta x+f'_y(0,0)\Delta y]}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}$$
$$=\lim_{\substack{\Delta x\to0\\\Delta y\to0}}\frac{f(\Delta x,\Delta y)}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}=\lim_{\substack{\Delta x\to0\\\Delta y\to0}}\frac{f(\Delta x,\Delta y)}{\Delta x^2+\Delta y^2}\cdot\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}=0$$

得证 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微。

四、（12分）求函数 $f(x,y)=x^4+y^4-x^2-2xy-y^2$ 的全部极值。

解：由方程组

$$\begin{cases}f'_x=4x^3-2x-2y=0\\f'_y=4y^3-2x-2y=0\end{cases}$$

得 $x^3=y^3$，由此得驻点 $P_1(0,0)$，$P_2(1,1)$，$P_3(-1,-1)$。

Hessian 矩阵

$$H=\begin{bmatrix}12x^2-2&-2\\-2&12y^2-2\end{bmatrix}$$

对于驻点 $P_2(1,1)$ 和 $P_3(-1,-1)$，$H=\begin{bmatrix}10&-2\\-2&10\end{bmatrix}$ 为正定矩阵，所以 $P_2(1,1)$ 和 $P_3(-1,-1)$ 都是极小值点，对应的极小值均为 -2。

对于驻点 $P_1(0,0)$，$H=\begin{bmatrix}-2&-2\\-2&-2\end{bmatrix}$，行列式值为 0。但对于一切 $t\in(0,1)$，$f(t,t)=2t^4-4t^2=2t^2(t^2-2)<0$，$f(t,-t)=2t^4>0$，即 $P_1(0,0)$ 不是极值点。

五、（10分）计算二重积分 $\iint_D|x^2+y^2-1|dxdy$，其中$D=\big\{(x,y)\mid 0\le x\le1,\ 0\le y\le1\big\}$。

解：记 $D_1=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le1,\ (x,y)\in D\}$
$D_2=\{(x,y)\mid x^2+y^2>1,\ (x,y)\in D\}$

$$\begin{aligned}&\iint_D|x^2+y^2-1|dxdy\\&=\iint_{D_1}-(x^2+y^2-1)dxdy+\iint_{D_2}(x^2+y^2-1)dxdy\\&=\iint_{D_1}-(x^2+y^2-1)dxdy+\iint_{D}(x^2+y^2-1)dxdy-\iint_{D_1}(x^2+y^2-1)dxdy\\&=-2\iint_{D_1}(x^2+y^2-1)dxdy+\iint_{D}(x^2+y^2-1)dxdy\\&=-2\iint(r^2-1)rdrd\theta+\iint_{D}(x^2+y^2-1)dxdy\\&=-2\int_0^{\pi/2}d\theta\int_0^1(r^2-1)rdr+\int_0^1dy\int_0^1(x^2+y^2-1)dx\\&=\pi/4-1/3\end{aligned}$$

六、（10分）计算三重积分 $I=\iiint_V(x^2+y^2+z)dxdydz$，其中 V 是由曲线 $\begin{cases}y^2=2z\\x=0\end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周而成的曲面与平面 $z=4$ 所围成的立体。

解：旋转曲面的方程：$x^2+y^2=2z$，利用圆柱坐标系计算得

$$\begin{aligned}I&=\iiint_V(x^2+y^2+z)dxdydz\\&=\iiint_V(r^2+z)rdrd\theta dz\\&=\int_0^4dz\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2z}}(r^2+z)rdr\\&=2\pi\int_0^4 2z^2dz\\&=256\pi/3\end{aligned}$$