2014~2015 学年第二学期《微积分 II 与线性代数（第二层次）》试卷参考答案（A 卷）2015.6.22

一、 简答题（每小题 6 分，共 4 题，计 24 分）

1．设 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 均为单位向量，且 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$，求 $\vec{a}\bullet\vec{b}+\vec{b}\bullet\vec{c}+\vec{c}\bullet\vec{a}$ ．

解： 原式= $\frac{1}{2}[\vec{a}\bullet\vec{b}+\vec{a}\bullet\vec{c}+\vec{b}\bullet\vec{a}+\vec{b}\bullet\vec{c}+\vec{c}\bullet\vec{b}+\vec{c}\bullet\vec{a}]$

$$=\frac{1}{2}[\vec{a}\bullet(\vec{b}+\vec{c})+\vec{b}\bullet(\vec{a}+\vec{c})+\vec{c}\bullet(\vec{b}+\vec{a})]=\frac{1}{2}[\vec{a}\bullet(-\vec{a})+\vec{b}\bullet(-\vec{b})+\vec{c}\bullet(-\vec{c})]=-\frac{3}{2}.$$

2.求与两个平面 $x+5y-3z-5=0$，$x+5y-3z-7=0$ 等距的平面方程.

解： 由题意，$\frac{|x+5y-3z-5|}{\sqrt{1^2+5^2+(-3)^2}}=\frac{|x+5y-3z-7|}{\sqrt{1^2+5^2+(-3)^2}}$，

所以所求平面方程为：$x+5y-3z-6=0$.

3． 设 $z=e^x\arctan y$，求 $dz|_{(0,1)}$ ．

解： $dz=e^x[\arctan y dx+\frac{1}{1+y^2}dy]$，所以 $dz|_{(0,1)}=\frac{\pi}{4}dx+\frac{1}{2}dy.$

4. 求空间曲线 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=6,\\ x+y+z=0.\end{cases}$ 在点 $P_0(1,-2,1)$ 处的切线和法平面的方程.

解： $x^2+y^2+z^2=6$ 在 $P_0(1,-2,1)$ 处的法向量为 $\vec{n}_1=(1,-2,1)$，平面 $x+y+z=0$ 的法向量为 $\vec{n}_2=(1,1,1)$，$\vec{n}_1\times\vec{n}_2=(-3,0,3)$，取切向量为 $\vec{s}=(1,0,-1)$，则所求切线方程为：

$\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{0}=\frac{z-1}{-1}$，法平面方程为：$x-z=0$.

二、（本题 8 分） 求由曲面 $z=x^2+y^2,z=2-\sqrt{x^2+y^2}$ 所围立体的体积.

解： $V=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}(2-\sqrt{x^2+y^2}-(x^2+y^2))dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1(2-r-r^2)dr=\frac{5\pi}{6}.$

三、（本题 10 分）求 $I=\int_L(e^x\sin y-b(x+y))dx+(e^x\cos y-ax)dy$，其中 a,b 为正常数，L 为从点 $A(2a,0)$ 沿曲线 $y=\sqrt{2ax-x^2}$ 到点 $O(0,0)$ 的弧 ．

解： 添加从点 $O(0,0)$ 沿 x 轴到点 $A(2a,0)$ 的有向线段 L_1，则 $I=\oint_{L\cup L_1}-\int_{L_1}=I_1-I_2$

据格林公式

$$I=\oint_{L\cup L_1}(e^x\sin y-b(x+y))dx+(e^x\cos y-ax)dy=\iint_D(b-a)d\sigma=\frac{\pi}{2}a^2(b-a).$$

其中D为$L\cup L_1$所围成的半圆域. 而

$$I_2=\int_{L_1}(e^x\sin y-b(x+y))dx+(e^x\cos y-ax)dy=\int_0^{2a}(-bx)dx=-2a^2b.$$

故 $I=I_1-I_2=\frac{\pi}{2}a^2(b-a)+2a^2b=(\frac{\pi}{2}+2)a^2b-\frac{\pi}{2}a^3$.

四、（本题 10 分）计算 $I=\iint\limits_{\Sigma}(x^3+az^2)dydz+(y^3+ax^2)dzdx+(z^3+ay^2)dxdy$，其中$\Sigma$为上半球面$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$的上侧 .

解：记S为平面 $z=0(x^2+y^2\le a^2)$的下侧，Ω为Σ与S所围成的空间区域. 则

$$I=\oiint\limits_{\Sigma+S}-\iint\limits_{S}(x^3+az^2)dydz+(y^3+ax^2)dzdx+(z^3+ay^2)dxdy$$
$$=3\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)dxdyxz+\iint\limits_{x^2+y^2\le a^2}ay^2dxdy$$
$$=3\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi d\varphi\int_0^a r^4dr+a\int_0^{2\pi}\sin^2\theta d\theta\int_0^a r^3dr=\frac{6}{5}\pi a^5+\frac{1}{4}\pi a^5=\frac{29}{20}\pi a^5.$$

五、（本题 12 分）设$|A|=\begin{vmatrix}2&1&-3&5\\1&1&1&2\\4&2&3&1\\2&5&8&7\end{vmatrix}$，求 $A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}$.

解：将$|A|$中第 4 行改为(1111)，则

$$A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}=\begin{vmatrix}2&1&-3&5\\1&1&1&2\\4&2&3&1\\1&1&1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&1&-3&5\\1&1&1&2\\4&2&3&1\\0&0&0&-1\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}2&1&-3\\1&1&1\\4&2&3\end{vmatrix}=-9.$$

六、（本题 12 分）判断 3 阶矩阵$A=\begin{pmatrix}2&2&3\\1&-1&0\\-1&2&1\end{pmatrix}$是否可逆. 若可逆，求其逆矩阵.

解：因为$|A|=-1\ne 0$.所以矩阵A可逆. 用伴随矩阵求其逆.

其伴随矩阵为：$A^*=\begin{bmatrix}-1&4&3\\-1&5&3\\1&-6&-4\end{bmatrix}$，所以其逆矩阵为：$A^{-1}=\begin{bmatrix}1&-4&-3\\1&-5&-3\\-1&6&4\end{bmatrix}$.

七、（本题 12 分）设 3 阶矩阵 $A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 2\\ 2 & -1 & -2\\ 2 & -2 & -1\end{pmatrix}$,（1）求 A 的特征值；（2）利用（1）的结果求 $I+A^{-1}$ 的特征值.

解：（1）$\left|\lambda E-A\right|=\begin{vmatrix}\lambda+1 & -2 & -2\\ -2 & \lambda+1 & 2\\ -2 & 2 & \lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+5)=0.$

所以矩阵 A 的特征值为：$\lambda_1,\lambda_2=1,\lambda_3=-5.$

（2）由 $A\vec{x}=\lambda\vec{x}\Rightarrow A^{-1}\vec{x}=\dfrac{1}{\lambda}\vec{x}\Rightarrow[I+A^{-1}]\vec{x}=(1+\dfrac{1}{\lambda})\vec{x}$，

故 $I+A^{-1}$ 的特征值为：$1+\dfrac{1}{\lambda}$，即为 $2,2,\dfrac{4}{5}$.

八、（本题 12 分）已知 $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$，试求一个正交矩阵 C，使得 $C^{-1}AC$ 为对角形，并写出这个对角形矩阵.

解：$\left|\lambda I-A\right|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & -1 & -1\\ -1 & \lambda-2 & -1\\ -1 & -1 & \lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-4)$，故其特征值为 $1,1,4$.

当 $\lambda=1$ 时，特征向量为：$\alpha_1=\begin{bmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{bmatrix}$；$\alpha_2=\begin{bmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$，当 $\lambda=4$ 时，特征向量为：$\alpha_3=\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 1\end{bmatrix}$.

将 $[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]$ 进行施密特正交化得：$C=\begin{bmatrix}-\dfrac{\sqrt{2}}{2} & -\dfrac{\sqrt{6}}{6} & \dfrac{\sqrt{3}}{3}\\ \dfrac{\sqrt{2}}{2} & -\dfrac{\sqrt{6}}{6} & \dfrac{\sqrt{3}}{3}\\ 0 & \dfrac{\sqrt{6}}{3} & \dfrac{\sqrt{3}}{3}\end{bmatrix}$，

所以，$C^{-1}AC=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{bmatrix}$.