2012-2013 学年第二学期第二层次微积分 II 与线性代数期末试卷（A 卷）参考答案 2013.6.26

一、计算下列各题（每小题 6 分，共 42 分）

1. 将直线 L 的一般式方程 $\begin{cases} 2x-y+3z=8, \\ x+5y-z=2, \end{cases}$ 化为直线的标准式方程.

解： L 的方向向量为 $(2,-1,3)\times(1,5,-1)=(-14,5,11)$，令 $y=0$，由 $\begin{cases} 2x+3z=8, \\ x-z=2 \end{cases}$ 解得

$x=14/5, z=4/5$，取直线 L 上的点为 $P_0(\frac{14}{5},0,\frac{4}{5})$，则所求直线的标准式方程为：

$$\frac{x-\frac{14}{5}}{-14}=\frac{y}{5}=\frac{z-\frac{4}{5}}{11}.$$

2. 求二重极限：$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{1-\cos\sqrt{x^2+y^2}}{\ln(1+x^2+y^2)}$.

解： 原式=$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}{x^2+y^2}=\dfrac{1}{2}$.

3. 求曲面 $z=\dfrac{x^2}{2}+y^2$ 平行于平面 $\Pi:2x+2y-z=0$ 的切平面方程.

解： 设曲面的切点为 $M(x_0,y_0,z_0)$，曲面在 M 点的法向量为：$(x_0,2y_0,-1)$，由题意，

$\dfrac{x_0}{2}=\dfrac{2y_0}{2}=\dfrac{-1}{-1}$，所以切点为 $M(2,1,3)$，法向量为：$(2,2,-1)$，由平面的点法式得所求切平面方程为：$2x+2y-z=3$.

4. 求第一类曲线积分 $I_1=\int_C xyds$，其中 C 为在第一象限的圆弧 $x^2+y^2=a^2(a>0)$.

解： C 的参数方程为 $x=a\cos\theta, y=a\sin\theta, \theta:0\to\pi/2$，所以

$$\text{原式}=\int_0^{\pi/2}a^3\sin\theta\cos\theta d\theta=\frac{a^3}{2}.$$

5. 求第二类曲线积分 $I_2=\int_C y^2dx$，其中 C 按逆时针方向绕行的上半圆周：$x^2+y^2=a^2, y\geq 0$.

解： C 的参数方程为 $x=a\cos\theta, y=a\sin\theta, \theta:0\to\pi$，所以

原式 $=\int_0^{\pi} a^2\sin^2\theta(-a\sin\theta)d\theta = a^3\int_0^{\pi}(1-\cos^2\theta)d\cos\theta = -\frac{4}{3}a^3.$

6. 求第一类曲面积分 $I_3=\iint_{\Sigma} zdS$，其中 Σ 是 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 被平面 $z=h\,(0<h<a)$ 截出的顶部.

解： S 的方程为 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2},(x,y)\in D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le a^2-h^2\}$，又

$\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$，所以，原式$=\iint_D adxdy=\pi a(a^2-h^2).$

7. 计算行列式 $D_3=\begin{vmatrix} x^2+1 & xy & xz \\ xy & y^2+1 & yz \\ xz & yz & z^2+1 \end{vmatrix}$.

解： $D_3=xyz\begin{vmatrix} x+\frac{1}{x} & y & z \\ x & y+\frac{1}{y} & z \\ x & y & z+\frac{1}{z} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x^2+1 & y^2 & z^2 \\ x^2 & y^2+1 & z^2 \\ x^2 & y^2 & z^2+1 \end{vmatrix}$

$$=(x^2+y^2+z^2+1)\begin{vmatrix} 1 & y^2 & z^2 \\ 1 & y^2+1 & z^2 \\ 1 & y^2 & z^2+1 \end{vmatrix}=(x^2+y^2+z^2+1)\begin{vmatrix} 1 & y^2 & z^2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=x^2+y^2+z^2+1.$$

二、（10 分）设 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数，且满足 $\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}=1$，又

$g(x,y)=f(xy,\frac{x^2-y^2}{2})$，求 $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$.

解：$\frac{\partial g}{\partial x}=yf_u'+xf_v'$，$\frac{\partial g}{\partial y}=xf_u'-yf_v'$，

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}=y[yf_{uu}''+xf_{uv}'']+f_v'+x[yf_{vu}''+xf_{vv}'']=y^2f_{uu}''+2xyf_{uv}''+x^2f_{vv}''+f_v'\,,$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=x[xf_{uu}''-yf_{uv}'']-f_v'-y[xf_{vu}''-yf_{vv}'']=x^2f_{uu}''-2xyf_{uv}''+y^2f_{vv}''-f_v'\,,$$

$$\therefore \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=x^2+y^2.$$

三、（10 分）利用奥高公式计算第二类曲面积分 $I_4=\iint_{\Sigma}x^3dydz+y^3dzdx+z^3dxdy$，其中$\Sigma$是上半球面 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}\ (a>0)$ 的上侧.

解： Σ不是封闭曲面，为了应用奥高公式，引进辅助平面$\Sigma_1: x^2+y^2\le a^2, z=0$，则$\Sigma$与$\Sigma_1$一起围成一半球体$V$，按奥高公式

$$\iint_{\Sigma上}x^3dydz+y^3dzdx+z^3dxdy+\iint_{\Sigma_1下}x^3dydz+y^3dzdx+z^3dxdy$$

$$=3\iiint_V(x^2+y^2+z^2)dxdydz$$

$$=3\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi/2}\sin\varphi d\varphi\int_0^a r^4dr=\frac{6}{5}\pi a^5.$$

而 $\iint_{\Sigma_1下}x^3dydz+y^3dzdx+z^3dxdy=0$，所以 原式 $=\frac{6}{5}\pi a^5.$

四、（8 分）求行列式 $D_n=\begin{vmatrix}1&2&3&4&\cdots&n\\2&1&2&3&\cdots&n-1\\3&2&1&2&\cdots&n-2\\4&3&2&1&\cdots&n-3\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\n&n-1&n-2&n-3&\cdots&1\end{vmatrix}$.

解： $D_n=(\text{第}n\text{行加到第}1\text{行并提出}n+1)(n+1)\begin{vmatrix}1&1&1&1&\cdots&1\\2&1&2&3&\cdots&n-1\\3&2&1&2&\cdots&n-2\\4&3&2&1&\cdots&n-3\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\n&n-1&n-2&n-3&\cdots&1\end{vmatrix}$

$$=(\mathrm{r}_n-\mathrm{r}_{n-1},\ \mathrm{r}_{n-1}-\mathrm{r}_{n-2},\cdots\mathrm{r}_2-\mathrm{r}_1)(n+1)\begin{vmatrix}1&1&1&1&\cdots&1\\1&0&1&2&\cdots&n-2\\1&1&-1&-1&\cdots&-1\\1&1&1&-1&\cdots&-1\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\1&1&1&1&\cdots&-1\end{vmatrix}$$

$$=(r_n-\mathrm{r}_1,\ \mathrm{r}_{n-1}-\mathrm{r}_1,\cdots\mathrm{r}_2-\mathrm{r}_1)(n+1)\begin{vmatrix}1&1&1&1&\cdots&1\\0&-1&0&1&\cdots&n-3\\0&0&-2&-2&\cdots&-2\\0&0&0&-2&\cdots&-2\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&0&\cdots&-2\end{vmatrix}=(-1)^{n-1}2^{n-2}(n+1).$$

五、（10 分）求线性非齐次方程组$\begin{cases} 2x_1+3x_2+x_3=1, \\ x_1+x_2-2x_3=2, \\ 4x_1+7x_2+7x_3=-1, \\ x_1+3x_2+8x_3=-4, \end{cases}$ 的通解.

解：增广矩阵为：

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \\ 4 & 7 & 7 & -1 \\ 1 & 3 & 8 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 4 & 7 & 7 & -1 \\ 1 & 3 & 8 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & -3 \\ 0 & 3 & 15 & -9 \\ 0 & 2 & 10 & -6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

所以，$x_2=-3-5x_3, x_1=5+7x_3$， $\therefore x=k\begin{pmatrix} 7 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, k\in R$

六、（10 分）

设有向量组$\vec{\alpha}_1=(1,0,0,1)^T$，$\vec{\alpha}_2=(1,1,0,0)^T$，$\vec{\alpha}_3=(0,2,-1,-3)^T$，$\vec{\alpha}_4=(0,0,3,3)^T$ ，求其极大线性无关组，并用其表示其他向量.

解：$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & -3 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

所以得知$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是一个极大线性无关组，且 $\alpha_4=-6\alpha_1+6\alpha_2-3\alpha_3$.

七、（10 分）已知$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ ，试求一个正交阵C，使$C^{-1}AC$ 为对角形，并写出这个对角形阵.

解：由$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda-2 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda-2 \end{vmatrix}=(\lambda+1)(\lambda-2)(\lambda-3)=0$，得特征值为$-1,2,3$.

对于$\lambda_1=-1$解齐次线性方程组$(-E-A)x=\theta$，得一个基础解系：$\alpha_1=(1,2,1)^T$.

对于$\lambda_2=2$解齐次线性方程组$(2E-A)x=\theta$，得一个基础解系：$\alpha_2=(-1,1,-1)^T$.

对于 $\lambda_3=3$ 解齐次线性方程组 $(3E-A)x=\theta$，得一个基础解系：$\alpha_3=(-1,0,1)^T$.

而由定理知，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 彼此正交，因此，只需将其单位化，即取

$\beta_1=\alpha_1/|\alpha_1|=(1/\sqrt{6},2/\sqrt{6},1/\sqrt{6})^T$，$\beta_2=\alpha_2/|\alpha_2|=(-1/\sqrt{3},1/\sqrt{3},-1/\sqrt{3})^T$，

$\beta_3=\alpha_3/|\alpha_3|=(-1/\sqrt{2},0,-1/\sqrt{2})^T$，于是

$$C=\begin{pmatrix}1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2}\\ 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & 0\\ 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2}\end{pmatrix},\quad C^{-1}AC=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}.$$