大学数学（第二层次）期中试卷（2014．04．26）参考答案

一、简答题（每小题 6 分，共 42 分）

1． 设向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 分别为 $\{1,0,2\},\{2,-1,0\}$ 及 $\{-1,-1,1\}$，求：（1）$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的矢积，（2）$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 的混合积。

解： $a\times b=\{2,4,-1\}$。

$[a,b,c]=(a\times b)\cdot c=\{2,4,-1\}\cdot\{-1,-1,1\}=-7$。

2． 平面 Π 的方程为 $3x+2y+6z=12$，求：（1）Π 的法线式方程，（2）点 $P(2,3,2)$ 到平面 Π 的距离。

解： $\sqrt{A^2+B^2+C^2}=\sqrt{9+4+36}=7$，故 Π 的法线式方程为：$\frac{3}{7}x+\frac{2}{7}y+\frac{6}{7}z-\frac{12}{7}=0$。

点 P 至 Π 的距离等于 $\left|\frac{3}{7}\cdot 2+\frac{2}{7}\cdot 3+\frac{6}{7}\cdot 2-\frac{12}{7}\right|=\frac{12}{7}$。

3． 求直线 $L:\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z+3}{2}$ 与平面 $\Pi: x+y+z=1$ 的夹角。

解： 直线的方向向量可取为 $l=\{2,-1,2\}$，平面的法向量可取为 $n=\{1,1,1\}$，设直线与平面夹角为 φ，由 $\cos<l,n>=\frac{l\cdot n}{|l|\cdot|n|}=\frac{2\cdot 1+(-1)\cdot 1+2\cdot 1}{\sqrt{4+1+4}\cdot\sqrt{1+1+1}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，得 $\sin\varphi=\frac{\sqrt{3}}{3}$。故 φ 为 $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{3}$ 或其补角。

4． 求点 $P(1,2,-3)$ 关于平面 $\Pi: x+y+z=3$ 的对称点坐标。

解： 过 P 与 Π 垂直的直线为 $L:\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+3}{1}$，与 Π 交于 $M(2,3,-2)$。此 M 点为 P 与其对称点的中点，故由中点公式得所求点为 $(3,4,-1)$。

5． 设隐函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $x^4+y^2z^2+z^4=108$ 确定，求 z 一阶偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$。

解： $4x^3+2y^2z\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+4z^3\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=0$，$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{4x^3}{2y^2z+4z^3}=-\frac{2x^3}{z(y^2+2z^2)}$。

$2yz^2+2y^2z\cdot\frac{\partial z}{\partial y}+4z^3\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=0$，$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{2yz^2}{2y^2z+4z^3}=-\frac{yz}{y^2+2z^2}$。

6．设三元函数 $f(\bullet,\bullet,\bullet)$ 有二阶连续偏导数，$u(x,y)=f(x,x+y,xy)$，求 u 的二阶混合偏导数 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$。

解： $\dfrac{\partial u}{\partial y}=f_2'+x\cdot f_3'$，

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}(f_2'+x\cdot f_3')=(f_{2,1}''+f_{2,2}''+y\cdot f_{2,3}'')+[f_3'+x\cdot(f_{3,1}''+f_{3,2}''+y\cdot f_{3,3}'')]$$

7．设 Γ 是 xOy 平面上的一条光滑简单闭曲线。考虑以 Γ 为边界且 z_x',z_y' 连续的光滑空间曲面 $z=z(x,y)$，证明其中面积最小的曲面是 Γ 围成的平面区域。

证明： 将曲面面积记为 S，则 $S=\iint\limits_D\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,dxdy$，其中 D 为曲面在 xOy 平面的投影，其边界即为 Γ。若 z_x' 或 z_y' 在 D 中的某点不为零，则由 z_x',z_y' 的连续性，存在一个 D 中的小邻域 E，使得相应偏导数的绝对值在 E 内大于某个正数 m。如此，则

$$S=\iint\limits_D\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,dxdy\ge\iint\limits_{D\setminus E}1dxdy+\iint\limits_E\sqrt{1+m^2}\,dxdy=S(D)+(\sqrt{1+m^2}-1)S(E)。$$

此可见，曲面面积当 z_x',z_y' 在 D 中恒为零时达到最小。因此，边界为 Γ 且 z_x',z_y' 连续的光滑空间曲面中面积最小的曲面是 Γ 围成的平面区域。（**注**：作为简答题，此题不要求证明很严谨，说理清楚即可。）

二、（10 分）设有直线 $L:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{-3}=\dfrac{z+1}{1}$ 与平面 $\Pi:x-y+2z=1$，求过 L 且与 Π 成 60 度夹角的平面。

解： L 可以写成 $L:\begin{cases}3x+y-1=0\\ x-z-2=0\end{cases}$，过 L 的平面束方程为 $(3x+y-1)+\lambda(x-z-2)=0$，

其法线方向为 $\{3+\lambda,1,-\lambda\}$。故有：$\dfrac{\{3+\lambda,1,-\lambda\}\cdot\{1,-1,2\}}{\sqrt{1+1+4}\cdot\sqrt{(3+\lambda)^2+1+\lambda^2}}=\pm\cos\dfrac{\pi}{3}=\pm\dfrac{1}{2}$。

解得 $\lambda=-1,-11/2$，故满足条件的平面有两个，为：

$2x+y+z+1=0$ 及 $-5x+2y+11z+20=0$。（**建议**：少答一个平面扣 2 分）。

三、（10 分）曲面 Σ 的方程为 $\Sigma:\dfrac{1}{2}(x^2+y^2)-2z=3$，定点 P 的坐标为 $P(2,2,-3)$。在曲面 Σ 求一点 $M(x_0,y_0,z_0)$，使得 Σ 在点 M 的切平面与线段 MP 垂直。（提示：如果求解

过程出现一元高次方程，可先寻找有理根或整数根。）

解：曲面Σ在$M(x_0,y_0,z_0)$处有$\{F_x',F_x',F_x'\}=\{x_0,y_0,-2\}$，故切平面方程为：

$x_0x+y_0y-2z-3=0$。MP的向量为$\{2-x_0,2-y_0,-3-z_0\}$，与切平面法线平行，故

有$2-x_0=tx_0,\quad 2-y_0,=ty_0,\quad -3-z_0=-2t$。点$M$在曲面$\Sigma$上，故得

$\left(\dfrac{2}{1+t}\right)^2-2(2t-3)-3=0$，即$4t^3+5t^2-2t-7=0$。（**建议**：到此处得 7 分。）

$(t-1)(4t^2+9t+7)=0$，解得$t=1$，故得 M 点为$(1,1,-1)$。

四、（10 分）求幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}x^n$的和函数，指出其收敛域，并求交错级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n+1}$的值。

解：设$f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}x^n$，则在收敛域内有$f'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}(nx^{n-1})=\sum\limits_{m=0}^{\infty}\ x^m=\dfrac{1}{1-x}$。积分得

$f(x)=-\ln(1-x)$。易知，其收敛域为$[-1,1)$，且$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n+1}=-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}=\ln 2$。

五、（8 分）设$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{(xy)^{5/3}}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$。（1）试求$f(x,y)$在$(0,0)$点的两个一阶偏导数；（2）问：$f(x,y)$在$(0,0)$点是不是可微？

解：（1）依定义计算，两个偏导数都等于 0。（2）可微。

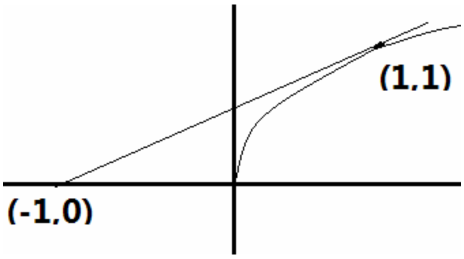
说明：问题（2）仅问是否可微，故“证明”建议占 1 分。

由$\Delta x=\rho\cos\theta,\Delta y=\rho\sin\theta$，则在$(0,0)$点有

$$|\Delta f|=|f(\Delta x,\Delta y)|=|\rho^{4/3}(\cos\theta\sin\theta)^{5/3}|\le\rho^{4/3}$$

是ρ的高阶无穷小，以此法证可微并不难。

六、（10 分）计算二重积分$I=\iint\limits_D\dfrac{y}{x+2}dxdy$，其中 D 是由抛物线$x=y^2$，以及直线$x=2y-1$和$y=0$所围成的区域。

解：

$$I=\int_0^1 dy\int_{2y-1}^{y^2}\frac{y}{x+2}dx=\int_0^1 dy\cdot y[\ln(y^2+2)-\ln(2y+1)]$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1[\ln(y^2+2)-\ln(2y+1)]dy^2$$

$$=\frac{y^2}{2}[\ln(y^2+2)-\ln(2y+1)]\Big|_0^1-\int_0^1 y^2[\frac{y}{y^2+2}-\frac{1}{2y+1}]dy$$

$$=\int_0^1[-y+\frac{2y}{y^2+2}+\frac{1}{2}y-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\frac{1}{2y+1}]dy$$

$$=\left[-\frac{1}{4}y^2-\frac{1}{4}y+\ln(y^2+2)+\frac{1}{8}\ln(2y+1)\right]\Big|_0^1$$

$$=\frac{9}{8}\ln 3-\ln 2-\frac{1}{2}$$

七、（10 分）求由圆柱面 $x^2+y^2=2$ 及双叶双曲面 $-x^2-y^2+z^2=1$ 所围成立体的体积。

解：

据对称性，所求体积 V 等于由 xOy 平面，圆柱面 $x^2+y^2=2$，及 $z=\sqrt{x^2+y^2+1}$ 所围成立体的体积的两倍，即

$$V=2\iint\limits_{x^2+y^2\le 2}\sqrt{x^2+y^2+1}dxdy=2\int_0^{\sqrt{2}}rdr\int_0^{2\pi}\sqrt{r^2+1}d\theta=4\pi\int_0^{\sqrt{2}}r\sqrt{r^2+1}dr$$

$$=2\pi\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{r^2+1}d(r^2+1)=\frac{4\pi}{3}(r^2+1)^{3/2}\Big|_0^{\sqrt{2}}=(4\sqrt{3}-\frac{4}{3})\pi$$