系别________ 姓名：________ 学号：________

装……订……线……内……请……勿……答……题

南京大学2010年大学数学(第二层次)期终试卷(A卷)(2010年6月23日)

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
得分									

得分	评卷人

一、简答题（每小题 **6** 分，共 **24** 分）

1. 设 $\dfrac{x}{z}=e^{y+z}$, 计算 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

2. 求过直线 $\begin{cases}4x-y+3z-1=0\\ x+5y-z+2=0\end{cases}$ 且与平面 $2x-y+5z+2=0$ 垂直的平面方程.

3. 交换积分次序 $I=\displaystyle\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}dx\int_{x^2}^{4-x^2}f(x,y)dy$

4. 将线性无关向量组: $\alpha_1=(1,1,0,1)^T,\alpha_2=(1,0,1,0)^T,\alpha_3=(1,0,0,-1)^T$ 规范正交化.

得分	评卷人

二、求函数 $z = x^2 - xy + y^2 - 2x + y$ 的极值. (10 分)

得分	评卷人

三、计算 $I = \iint\limits_{\Sigma}(x+y)^2 dS$, 其中 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$. (10 分)

得分	评卷人

四、计算三重积分 $I = \iiint\limits_{V}(x^2+y^2)dxdydz$, 其中 V 是由曲面 $x^2+y^2=2z$ 与平面 $z=2$ 所围成的区域. (10 分)

得分	评卷人

五、计算曲线积分 $I = \int_\Gamma (e^x \sin y - 2y)dx + (e^x \cos y - 2)dy$ 其中 Γ 为 $x^2 + y^2 = ax\ (a > 0)$ 的从 $A(a,0)$ 到 $O(0,0)$ 的上半圆周. (10 分)

得分	评卷人

六、计算第二型曲面积分 $I = \iint\limits_\Sigma xdydz + ydzdx + zdxdy$, 其中 Σ 为圆柱面$x^2 + y^2 = a^2$ 介于 $z = -1$ 与 $z = 1$ 之间部分的外侧. (12 分)

得分	评卷人

七、讨论 λ 取何值时,方程组 $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2 \end{cases}$ 无解? 有解? 在有解的情形, 求其解. (12 分)

得分	评卷人

八、(12 分) 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ 与 $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$ 相似;

(1) 求 a, b 的值.
(2) 求正交矩阵 P , 使 $P^{-1}AP = B$.

系别________ 姓 名: ________ 学号: ________

装……订……线……内……请……勿……答……题

南京大学2010年大学数学(第二层次)期终试卷(A卷)参考答案(2010年6月23日)

一、简答题（每小题6分，共 **24** 分）

1. 设$\dfrac{x}{z}=e^{y+z}$, 计算 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

   解.

$$\frac{\partial z}{x}=\frac{z}{x(1+z)},\frac{\partial z}{y}=-\frac{z}{1+z}$$

   故

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=0.$$

2. 求过直线$\begin{cases}4x-y+3z-1=0\\ x+5y-z+2=0\end{cases}$ 且与平面$2x-y+5z+2=0$垂直的平面方程.

   解. 所求平面的方程为: $7x+14y+5=0$.

3. 交换积分次序 $I=\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}dx\int_{x^2}^{4-x^2}f(x,y)dy$

   解. $I=\int_0^2dy\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}f(x,y)dx+\int_2^4dy\int_{-\sqrt{4-y}}^{\sqrt{4-y}}f(x,y)dx$

4. 将线性无关向量组: $\alpha_1=(1,1,0,1)^T,\alpha_2=(1,0,1,0)^T,\alpha_3=(1,0,0,-1)^T$ 规范正交化.

   ~~解.~~ $\cancel{\beta_1=(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},0,0)^T,\beta_2=(\frac{\sqrt{6}}{6},-\frac{\sqrt{6}}{6},\frac{\sqrt{6}}{3},0)^T,\beta_3=(\frac{\sqrt{3}}{6},-\frac{\sqrt{3}}{6},-\frac{\sqrt{3}}{6},-\frac{\sqrt{3}}{2})^T}$

二. 求函数$z=x^2-xy+y^2-2x+y$的极值. (10分)

解. 由

$$\begin{cases}\frac{\partial z}{\partial x}=2x-y-2=0\\ \frac{\partial z}{\partial y}=-x+2y+1=0\end{cases}$$

得$x=1,y=0$.

又因为

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2,\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-1,\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2$

于是$B^2-AC=3<0,A>0$, 故$(1,0)$ 是极小值点.

三. 计算 $I=\iint\limits_{\Sigma}(x+y)^2dS$, 其中$\Sigma$为球面$x^2+y^2+z^2=a^2$. (10分)

解. 由对称性可知: $\iint\limits_{\Sigma}xydS=0$ 并且$\iint\limits_{\Sigma}x^2dS=\iint\limits_{\Sigma}y^2dS=\iint\limits_{\Sigma}z^2dS=\frac{1}{3}\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)dS=\frac{1}{3}\iint\limits_{\Sigma}a^2dS=\frac{4}{3}\pi a^4$, 于是 $I=\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2+2xy)dS=\frac{2}{3}\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)dS=\frac{8}{3}\pi a^4$

四. 计算三重积分$I=\iiint\limits_{V}(x^2+y^2)dxdydz$, 其中$V$是由曲面$x^2+y^2=2z$ 与平面 $z=2$ 所围成的区域. (10分)

解. 设 $x=r\cos\theta,y=r\sin\theta,z=z$, 则

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 r^3 dr \int_{\frac{r^2}{2}}^2 dz \\
&= 2\pi \int_0^2 (2 - \frac{r^2}{2}) r^3 dr \\
&= \frac{16}{3}\pi
\end{aligned}
$$

五、计算曲线积分$I = \int_\Gamma (e^x \sin y - 2y)dx + (e^x \cos y - 2)dy$ 其中 Γ 为$x^2 + y^2 = ax$ 的从$A(a,0)$ 到 $O(0,0)$ 的上半圆周. (10分)

解. 连接OA, 与Γ 一起构成一封闭曲线, 设其所围成的区域为D. 由Green 公式, 可得

$$\int_{\Gamma+OA} (e^x \sin y - 2y)dx + (e^x \cos y - 2)dy = \iint_D 2dxdy = \frac{\pi a^2}{4}$$

又因为

$$\int_{OA} (e^x \sin y - 2y)dx + (e^x \cos y - 2)dy = 0$$

所以

$$I = \frac{\pi a^2}{4} - \int_{OA} (e^x \sin y - 2y)dx + (e^x \cos y - 2)dy = \frac{\pi a^2}{4}.$$

六、计算第二型曲面积分$I = \iint\limits_\Sigma xdydz + ydzdx + zdxdy$, 其中$\Sigma$为圆柱面$x^2 + y^2 = a^2$介于$z = -1$与$z = 1$之间部分的外侧. (12分)

解. 设

$$\Sigma_1 = \{(x,y,z)|x^2 + y^2 \le a^2, z = 1\}$$
$$\Sigma_2 = \{(x,y,z)|x^2 + y^2 \le a^2, z = -1\}$$

则$\Sigma + \Sigma_1 + \Sigma_2$构成一封闭曲面, 取外侧. 并记$\Sigma + \Sigma_1 + \Sigma_2$所围成的立体区域为$\Omega$, 由奥高公式, 得

$$
\begin{aligned}
&\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1+\Sigma_2} xdydz + ydzdx + zdxdy \\
&= \iiint\limits_\Omega 3dxdydz \\
&= 6\pi a^2
\end{aligned}
$$

记

$$D_{xy} = \{(x,y)|x^2 + y^2 \le a^2\}$$

则

$$\iint\limits_{\Sigma_1\text{上侧}} xdydz + ydzdx + zdxdy = \iint\limits_{D_{xy}} dxdy = \pi a^2$$

$$\iint\limits_{\Sigma_2\text{下侧}} xdydz + ydzdx + zdxdy = -\iint\limits_{D_{xy}} -1dxdy = \pi a^2$$

所以

$$I = 6\pi a^2 - \pi a^2 - \pi a^2 = 4\pi a^2$$

七、讨论λ取何值时,方程组$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2 \end{cases}$ 无解？有解？在有解的情形，求其解.(12分)

解. 原方程组的系数矩阵行列式$\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda+2)(\lambda-1)^2$

(1) 当$\lambda \neq -2$ 且 $\lambda \neq 1$ 时, 有唯一解 $x_1 = -\frac{\lambda+1}{\lambda+2}, x_2 = \frac{1}{\lambda+2}, x_3 = \frac{(\lambda+1)^2}{\lambda+2}$

(2) 当$\lambda = 1$时, 原方程组与$x_1 + x_2 + x_3 = 1$同解. 对应的基础解系$\alpha_1 = (-1,0,1)^T, \alpha_2 = (-1,1,0)^T$, 特解$\alpha = (1,0,0)^T$. 故通解为$x = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \alpha$.

(3) 当$\lambda = -2$时, $r(A) = 2$, 增广矩阵的秩=3, 因此原方程组无解.

八、(12分) 已知$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$与$B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$相似

(1) 求a, b的值.

(2) 求正交矩阵P, 使$P^{-1}AP = B$.

解. (1) 由于相似的矩阵有相同的特征值与特征多项式, 故$\lambda = 4$ 为$|\lambda I - A| = 0$ 的根, 代入后, 解得 $a = 2$; 又因为$|A| = |B|$, 解得$b = 1$.

(2) A 的特征值为$\lambda_1 = 4, \lambda_2 = \lambda_3 = 1$.

属于$\lambda_1 = 4$的特征向量为$\alpha_1 = (1,1,1)^T$, 单位化, 得$p_1 = (\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})^T$.

属于$\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ 的特征向量为$\alpha_2 = (-1,1,0)^T, \alpha_3 = (-1,0,1)^T$; 标准化,正交化后,得

$$p_2 = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0)^T, p_3 = (-\frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3})^T$$

令$P = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix}$, 则$P^{-1}AP = B$.