H28.問9

(1) $P(Z_i=1)=\frac{P}{2}$, $P(Z_i=2)=\frac{P}{2}+\frac{1-P}{2}=\frac{1}{2}$, $P(Z_i=3)=\frac{1-P}{2}$

$$P(X_1=n_1, X_2=n_2, X_3=n_3)=\frac{n!}{n_1!n_2!n_3!}\left(\frac{P}{2}\right)^{n_1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n_2}\left(\frac{1-P}{2}\right)^{n_3}$$

(2)

X_1はZ_iが1であるかそうでないかの二項分布になっているので、 $X_1 \sim B(\frac{P}{2}, n)$

同様に、$X_2 \sim B(\frac{1}{2}, n)$, $X_3 \sim B(\frac{1-P}{2}, n)$

従って二項分布の性質から、 $E(X_1)=\frac{nP}{2}$, $E(X_2)=\frac{n}{2}$, $E(X_3)=\frac{(1-P)n}{2}$ //

(3)

$$l(P)=\log\frac{n!}{n_1!n_2!n_3!}+n_1\log\frac{P}{2}+n_2\log\frac{1}{2}+n_3\log\frac{1-P}{2}$$

$$l'(P)=n_1\cdot\frac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{P}{2}\right)}+n_3\cdot\frac{-\frac{1}{2}}{\left(\frac{1-P}{2}\right)}=\frac{n_1}{P}-\frac{n_3}{1-P}$$

$l'(P)=0$のとき、

$n_1-n_1P=n_3P$, $n_1=(n_1+n_3)P$, $\underline{\hat{P}=\frac{n_1}{n_1+n_3}}$ //

(4) × 場合分け.

$$E(\hat{P})=\sum_{n_1+n_2+n_3=n}\frac{n_1}{n_1+n_3}P(X_1=n_1, X_2=n_2, X_3=n_3)=\sum\frac{n_1}{n_1+n_3}\cdot\frac{n!}{n_1!n_2!n_3!}\left(\frac{P}{2}\right)^{n_1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n_2}\left(\frac{1-P}{2}\right)^{n_3}$$

$$=\frac{1}{2^n}\sum\frac{1}{n_1+n_3}\cdot\frac{n!}{(n_1-1)!n_2!n_3!}P^{n_1}(1-P)^{n_3}$$

$\sum_{n_1+n_3=n-n_2}$

$$=\frac{1}{2^n}\cdot\sum_{n_1+n_3=n-n_2}\frac{n_1}{n_1+n_3}\cdot\frac{n!}{n_2!\underset{(n-n_2)!}{(n_1+n_3)!}}\quad\frac{(n_1+n_3)!}{n_1!n_3!}P^{n_1}(1-P)^{n_3}$$

$$=\frac{1}{2^n}\sum_{\underline{n_2=0}}^{n}\binom{n}{n_2}\sum_{\underline{n_1+n_3=n-n_2}}P^1\frac{(n_1+n_3-1)!}{(n_1-1)!n_3!}P^{n_1-1}(1-P)^{n_3}$$

$$=\frac{1}{2^n}\left\{\binom{n}{0}\right.$$