H21 問6

$\frac{x}{1-2x} = \frac{1-2x}{1-2x}$

(1) $\forall x \in X$ に対して、

$d(T^n(x), T^m(x)) \leq r\{d(T^n(x), T^{n-1}(x)) + d(T^m(x), T^{m-1}(x))\}$

$= r\{d(T^n(x), T^m(x)) + d(T^m(x), T^{n-1}(x))$

$+ d(T^m(x), T^n(x)) + d(T^n(x), T^{m-1}(x))\}$

$= 2r\, d(T^n, T^m) + r\{d(T^m, T^{n-1}) + d(T^n, T^{m-1})\}$

$(1-2r)\, d(T^n, T^m) \leq \frac{r}{1-2r}\{d(T^m, T^{n-1}) + d(T^n, T^{m-1})\}$

$\leq a\, d(T^m, T^{n-1}) + a\, d(T^n, T^{m-1}) \qquad a = \frac{r}{1-2r}$

$0 \leq 2r < 1 \rightarrow -1 < -2r \leq 0$

$0 < 1-2r \leq 1$

$d(T^n, T^m) \leq r\{d(T^n, T^{n-1}) + d(T^m, T^{m-1})\}$

$\leq r\{d(T^n, T^m) + d(T^m, T^{n-1}) + d(T^m, T^{m-1})\}$

$(1-r)\, d(T^n, T^m) \leq r\{d(T^m, T^{n-1}) + d(T^m, T^{m-1})\}$

$d(T^n, T^m) \leq \frac{r}{1-r} d(T^m, T^{n-1}) + \frac{r}{1-r} d(T^m, T^{m-1}) \quad \text{—(*)}$

$n > m$ としても一般性失わない。 $y = T^n(x)$

$f(n,m) \leq a(f(m,n-1) + f(m,m-1))$

$\leq a^3($?