H21-1

(1)

$\forall i = 1, 2, \cdots, n$ に対して、

$Sa_i = \lambda_i a_i$ より、a_j $(i \neq j)$ と内積をとると、

$(Sa_i)^T a_j = (\lambda_i a_i)^T a_j$

$a_i^T S^T a_j = \lambda_i a_i^T a_j$

$S^T a_j = S a_j = \lambda_j a_j$ より、

$(\lambda_i - \lambda_j) a_i^T a_j = 0$

$a_i^T a_j = 0 \quad (\because \lambda_i \neq \lambda_j)$

(2)

Sは対称行列なので、ある直交行列Pと $D \triangleq diag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$ で、$S = PDP^T$ と書ける。

$\|Sx\|^2 = \|PDP^T x\|^2$

$= x^T P D^T \cancel{P^T P} D P^T x$

$= \|DP^T x\|^2$

$P^T x = y$ で変数変換すると、P^T は全単射かつ $\|P^T x\| = 1$ なので、

$$\max_{\|x\|=1} \|Sx\| = \max_{\|y\|=1} \|Dy\|$$

$$= \max_{\|y\|=1} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 y_i^2}$$

$$= \lambda_1 \quad (y_1 = 1,\ y_2 = y_3 = \cdots = y_n = 0 \text{ のとき})$$

(3)

$\forall x \in \mathbb{R}^n$ で $\|x\| = 1$ かつ $\forall j < i$ で $x^T a_j = 0$ なものに対して、

$\max \|Sx\| = \max \|DP^T x\|$

ここで、$P^T x = \begin{pmatrix} a_1^T x \\ \vdots \\ a_n^T x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a_i^T x \\ \vdots \\ a_n^T x \end{pmatrix}$ より、$P^T x = y$ で変換すると、$y_j = 0$ $(j = 1, 2, \cdots, i-1)$

$$\max \|Sx\| = \max_{\|y\|=1} \sqrt{\sum_{j=i}^{n} \lambda_j y_j} = \lambda_i$$