H21 問8

プ　1 2 3 … n
人　1 2 3 … n

(1) $P(A_1) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$

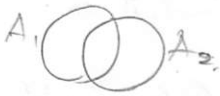
$P(A_1 \cap A_2) = \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)}$

$P(A_1 \cap \cdots \cap A_i) = \frac{(n-i)!}{n!}$

(2)

$P(N=0) = P(\text{全員自分のでないプをもらった}) = P(A_1^c \cap A_2^c \cap \cdots \cap A_n^c)$

$= 1 - P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n)$



$A_1 \cup A_2$ $=$ $A_1 + A_2 - A_1 \cap A_2$

$(A_1 + A_2 + A_3) - (A_1 \cap A_2 + A_2 \cap A_3 + A_1 \cap A_3) + (A_1 \cap A_2 \cap A_3)$

$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = \cancel{\sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i \cap A_j) + \sum P(A}$

$= \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \sum_{i<j<k<l} P(A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_l)$

$+ \cdots + (-1)^{n-1} P(A_1 \cap \cdots \cap A_n)$

A_iの対称性より、

$= nP(A_1) - \binom{n}{2} P(A_1 \cap A_2) + \binom{n}{3} P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) - \cdots + (-1)^{n-1} P(A_1 \cap \cdots \cap A_n)$

$= \sum_{k=2}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} P(A_1 \cap \cdots \cap A_k) + 1$

$P(N > k)$

$\therefore P(N=0) = \sum_{k=2}^{n} (-1)^k \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{(n-k)!}{n!} = \sum_{k=2}^{n} (-1)^k \frac{1}{k!}$ //

(3)

$E(N) = \cancel{\sum_{n=0} nP(N=n)} = \sum_{k=1}^{n} kP(N=k) = \sum_{k=1}^{n}$

$P(N=i) = P(i\text{人自分のをget}) = P(A_1 \cap \cdots \cap A_i \cap A_{i+1}^c \cap \cdots \cap A_n^c) \cdot \binom{n}{i}$

$= \binom{n}{i} (1 - \underbrace{P(A_1^c \cup \cdots \cup A_i^c \cup A_{i+1} \cup \cdots \cup A_n)}_{(*)})$

$(*) = \left(\sum_{k=1}^{i} P(A_k^c) + \sum_{k=i+1}^{n} P(A_k) \right) - \cdots \rightarrow ?$

$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$

$E(N) = \sum_{k=1}^{n} P(N \geq k) = \sum_{k=1}^{n}$

1_{A_1}

$N = \sum_{i=1}^{n} 1_{A_i}$ より、

$E(N) = \sum E(1_{A_i}) = \sum P(A_i) = nP(A_1) = 1$ //

なぜ定義関数でこんなかんたんになるのか!