H29 問B.

※ $y=x^2$ などは cont.

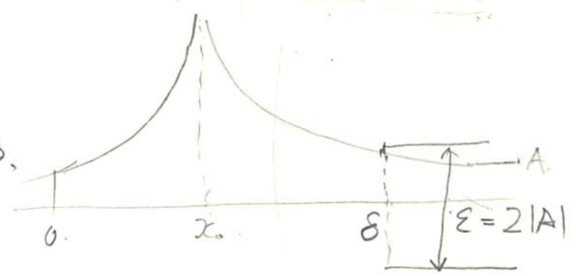
(1)

$\lim_{x\to\infty} f(x) = A \iff \forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0,\ x>\delta,\ \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon$ —(*)

・もし、$\exists x_0\in[0,\infty)$, $|f(x_0)|>M$ ($\forall M$) とすると、

$\lim_{x\to x_0} f(x)$ が存在しないので、f は x_0 で連続であることに反する。

∴ $\forall x\in[0,\infty)$, $\exists M$; $|f(x_0)|\le M$,



(*)で $\varepsilon=2|A|$ とすると、$[0,\delta]$ は有界閉より、$\sup_{[0,\delta]}|f(x)|<+\infty$

一方、$[\delta,+\infty)$ は、$|f(x)| < \frac{|A|+\varepsilon}{x}$ より、有界

∴ $[0,+\infty)$ で有界。

better

(2) $\left|\int_0^a f(x)\,dx\right| \le \underbrace{\left|\int_0^\delta f(x)\,dx\right|}_{M} + \left|\int_\delta^a f(x)\,dx\right|$

$\le M + \int_\delta^a |f(x)|\,dx$

$\varepsilon=1$ $|f(x)-A|<\varepsilon$

$\le M + \int_\delta^a \cancel{\varepsilon}\,(|A|+1) = O(a)$

$-\varepsilon < f(x)-A < \varepsilon$

$A-\varepsilon < f(x) < A+\varepsilon$

$= M + a - \delta = O(a)$

より、$\frac{1}{a^2}\int_0^a f(x)\,dx \longrightarrow 0$

(3) $\left|\int_0^a f(x)\,dx\right| \le \int_0^a |f(x)|\,dx = \int_0^\delta |f(x)|\,dx + \int_\delta^a |f(x)|\,dx$

$M \triangleq \max_{[0,\delta]}|f(x)|$, $|A-\varepsilon|(a-\delta) \le \int_\delta^a |f(x)|\,dx \le |A+\varepsilon|(a-\delta)$

$M + |A-\varepsilon|(a-\delta) \le \left|\int_0^a f\,dx\right| \le M + |A+\varepsilon|(a-\delta)$

$A-\varepsilon \longleftarrow \le \frac{1}{a}\left|\ 〃\ \right| \le \longrightarrow 0 + A + \varepsilon$

εの任意性が効く。//