問6 H28

(1)

$$u_t = \left(-\frac{1}{2}t^{-\frac{3}{2}}\right)V\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) + t^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(-\frac{1}{2}t^{-\frac{3}{2}}x\right)V'\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)$$

$$u_x = \frac{1}{\sqrt{t}}\cdot\frac{1}{\sqrt{t}}V'\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) = t^{-1}V'\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)$$

$$u_{xx} = t^{-1}\cdot\frac{1}{\sqrt{t}}V''\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)$$

$u_{xx} = u_t$ より、$\frac{x}{\sqrt{t}} = y$ より、

$$0 = \frac{1}{2}t^{-\frac{3}{2}}V(y) + \frac{1}{2}t^{-2}xV'(y) + t^{-\frac{3}{2}}V''(y)$$

$t^{-\frac{3}{2}} > 0$ で割って、

$$0 = \frac{1}{2}V(y) + \frac{1}{2}\frac{x}{\sqrt{t}}V'(y) + V''(y) \quad \text{— ①}$$

一方で、

$$\frac{1}{2}(yV(y))' + V''(y) = \frac{1}{2}(V(y) + yV'(y)) + V''(y)$$
$$= \frac{1}{2}V(y) + \frac{1}{2}\frac{x}{\sqrt{t}}V'(y) + V''(y) \quad \text{— ②}$$

①、②より、 ② $= 0$ となる //

(2)

$\frac{1}{2}(yV(y))' + V''(y) = 0$ を両辺積分して、

$$\frac{1}{2}(yV(y)) + V'(y) = C_1 \quad \text{— (*)}$$

ここで、

$$u(0,1) = \frac{1}{\sqrt{1}}V(0) = V(0) = 1 \quad \text{— (条件1)}$$

$$\lim_{|x|\to\infty} xu(x,t) = \lim_{|y|\to\infty} \sqrt{t}\cdot y\cdot\frac{1}{\sqrt{t}}V(y) = \lim_{|y|\to\infty} yV(y) = 0 \quad \text{— (条件2)}$$

$$\lim_{|x|\to\infty} u_x = \lim_{|y|\to\infty} t^{-1}V'(y) = 0 \quad \text{— (条件3)}$$

(条件3) は $\lim_{|y|\to\infty} V'(y) = 0$ — (条件3′) と書き換えると、

(*) で $|y|\to\infty$ とすると、(条件2, 3′) より、

$0 = C_1$ より、 $\frac{1}{2}(yV(y)) + V'(y) = 0$ — (**)

$\frac{1}{2}yV(y) = -V'(y)$, $-\frac{1}{2}y = \frac{V'(y)}{V(y)}$ を両辺積分して、

$$-\frac{1}{4}y^2 = \log|V(y)| + C_2$$

V(0) = 1 より + に限る.

(条件1) より、$0 = \log 1 + C_2 \quad \therefore C_2 = 0$

$$V(y) = \pm \mathrm{Exp}\left(-\frac{1}{4}y^2\right)$$

$$\therefore u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{t}}V\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) = \frac{1}{\sqrt{t}}\exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right) \quad //$$