H18問2

(1)

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin(|x|^\alpha)}{|x|^\beta} & (x\neq 0)\\ 0 & (x=0)\end{cases} \qquad \alpha,\beta>0$$

$\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$

$$\lim_{x\to+0} f(x)=\lim_{x\to+0}\frac{\sin(x^\alpha)}{x^\beta}=\lim_{x\to+0}\frac{\sin x^\alpha}{x^\alpha\cdot x^{\beta-\alpha}}=\lim_{x\to+0}\frac{\sin x^\alpha}{x^\alpha}\cdot x^{\alpha-\beta}$$

$\frac{\sin x}{x}\to 1\ (x\to 0)$ より、$\frac{\sin x^\alpha}{x^\alpha}\to 1$ $(\alpha>0)$ 従って、$\lim_{x\to+0} f(x)=0 \iff \alpha-\beta>0$

~~$\lim_{x\to-0} f(x)=\lim_{x\to-0}\frac{\sin(-x)^\alpha}{(-x)^\beta}=\lim_{x\to-0}\frac{}{x^\beta}$~~

$f(-x)=f(x)$ より fは偶関数なので、$\lim_{x\to-0} f(x)=0 \iff \lim_{x\to+0} f(x)=0$

$\therefore\ \alpha>\beta$

(2)

$f(x)$が$x=0$で微分可能 $\iff \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$ が存在. —(※)

(h>0としても一般性を失わない) ×

$$\lim_{h\to +0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left\{\frac{\sin x^\alpha}{h^\beta}-0\right\}=\lim_{h\to 0}\frac{\sin h^\alpha}{h^{\beta+1}}=\lim_{h\to 0}\frac{\sin h^\alpha}{h^\alpha}\cdot h^{\alpha-\beta-1}$$

が存在 $\iff \lim_{h\to 0} h^{\alpha-\beta-1}$ が存在. $\iff \alpha-\beta-1\geq 0$ //

・$h<0$のとき、

$$\lim_{h\to-0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to-0}\frac{1}{h}\left\{\frac{\sin(-h)^\alpha}{(-h)^\beta}-0\right\}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot\frac{(-1)^\alpha\sin h^\alpha}{(-1)^\beta\cdot h^\beta}$$

$$=\lim_{h\to 0}(-1)^{\alpha-\beta}\frac{\sin h^\alpha}{h^{\beta+1}}=\lim_{h\to-0}(-1)^{\alpha-\beta}\frac{\sin h^\alpha}{h^\alpha}\cdot h^{\alpha-\beta-1}$$ が存在 $\iff \alpha-\beta-1\geq 0$

・$\alpha-\beta-1>0$のとき、$\lim_{h\to+0}$ 〃 $=\lim_{h\to-0}$ 〃 $=0$ より可。

・$\alpha-\beta-1=0$のとき、$\lim_{h\to+0}$ 〃 $=1$

$\lim_{h\to-0}$ 〃 $=(-1)^{\alpha-\beta}=(-1)^1=-1$

~~$\therefore\ 1\neq(-1)^{\alpha-\beta}$~~ より不可

$\therefore\ \alpha-\beta-1>0$ ■