H15問1 $A=\begin{pmatrix}4&2\\1&5\end{pmatrix}$

(a)

$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}4-\lambda&2\\1&5-\lambda\end{vmatrix}=(4-\lambda)(5-\lambda)-2=\lambda^2-9\lambda+18=(\lambda-3)(\lambda-6)=0$

$\lambda=3、6$

① $\lambda=3$の時、

$(A-\lambda I)x=\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=0 \Rightarrow x_1+2x_2=0 \quad x_2=c$

$x_1=-2x_2=-2c \quad \begin{pmatrix}-2c\\c\end{pmatrix}$

② $\lambda=6$の時

$(A-\lambda I)x=\begin{pmatrix}-2&2\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=0 \Rightarrow x_1-x_2=0 \quad \begin{pmatrix}c\\c\end{pmatrix}$

$\therefore 3\leftrightarrow c\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix},\ 6\leftrightarrow c\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \quad (c\in\mathbb{R}) \quad c\neq 0.$

(b) $e^A=I+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}A^n$

・$A=PDP^T \quad D\triangleq diag(3,6),\ P\triangleq\begin{pmatrix}-2&1\\1&1\end{pmatrix}$ より、$A^n=PD^nP^T$

・$e^A=I+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}PD^nP^T=I+\sum_{n=1}^{\infty}P\left(\frac{1}{n!}D^n\right)P^T=I+P\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}D^n\right)P^T$ （$\sum_{n=1}^{k}$で$k\to\infty$とすれば明らかな変換）

$=I+P\begin{pmatrix}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n!}&0\\0&\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6^n}{n!}\end{pmatrix}P^T \cancel{=} I+P\,diag(e^3,e^6)P^T$

$=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^3&0\\0&e^6\end{pmatrix}P^T, \quad P^T=P^{-1}=\frac{1}{-3}\begin{pmatrix}1&-1\\-1&-2\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1&1\\1&2\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2e^3&e^6\\e^3&e^6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&1\\1&2\end{pmatrix}\frac{1}{3}$

$=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2e^3+e^6&-2e^3+2e^6\\-e^3+e^6&e^3+2e^6\end{pmatrix}$

×

$e^A=PIP^T+P\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}D^n\right)P^T=P\left(I+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}D^n\right)P^T=P\begin{pmatrix}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{n!}&0\\0&\sum_{n=0}^{\infty}\frac{6^n}{n!}\end{pmatrix}P^T=P\,diag(e^3,e^6)P^T$

$e^AP=P\,diag(e^3,e^6),\ e^A(P_1\ P_2)=(P_1 P_2)\begin{pmatrix}e_3&0\\0&e^6\end{pmatrix}=(e_3P_1\ \ e_6P_2)$ $\begin{cases}e^AP_1=e^3P_1\\e^AP_2=e^6P_2\end{cases}$

$e^A\in\mathbb{R}^{2\times2}$より固有値の数は高々2個なので、これらが全ての固有値である。

$\therefore e^3\leftrightarrow c\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix},\ e^6\leftrightarrow c\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

(c)

$$A^n = PD^nP^T = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & 6^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\frac{1}{3}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2\cdot 3^n & 6^n \\ 3^n & 6^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2\cdot 3^n + 6^n & -2\cdot 3^n + 2\cdot 6^n \\ -3^n + 6^n & 3^n + 2\cdot 6^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 3^{n-1} + 2\cdot 6^{n-1} & -2\cdot 3^{n-1} + 4\cdot 6^{n-1} \\ -3^{n-1} + 2\cdot 6^{n-1} & 3^{n-1} + 4\cdot 6^{n-1} \end{pmatrix}$$

(d)

$$e^A = P\,\mathrm{diag}(e^3, e^6)P^T = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^3 & 0 \\ 0 & e^6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\frac{1}{3} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2\cdot e^3 + e^6 & -2e^3 + 2e^6 \\ -e^3 + e^6 & e^3 + 2e^6 \end{pmatrix} \;//$$