H13問6.

(1)

$x' = (a+b(t))x$

$\frac{x'}{x} = a+b(t)$

$\log x = \int a+b(t)\,dt + C_1$

$= at + \int b(t)\,dt + C_1$

$x(t) = \exp\{at + \int_0^t b(t)\,dt + C_1\}$ （$\int_0^t$ とおこう）

$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{t\to\infty} e^{at} \cdot \lim \int_0^t b(t)\,dt \cdot \lim C_1$

$\downarrow$ 0 (∵ $a<0$)　$\int_0^t \lim b(t)\,dt$　$= C_1$

$= 0$ (limと∫の交換できる?)

$b(t)\to 0$ で $\sum b(t) < +\infty$ はありえるから $\to 0$ とは限らない?

$= 0$

$\lim_{t\to\infty} \int_0^t b(u)\,du < +\infty$ を示したい。

(ex) $b(t) = \frac{1}{t}$ は、$b(t) \to 0$ $(t\to\infty)$ な連続だが、$\lim \int_0^t \frac{1}{t}\,dt = \lim_{t\to\infty} \log t = +\infty$

↳ e^{at} のおかげ??

$\lim b(t) = 0$ より $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\delta$ $\forall t>\delta$ ~~$\exists N, n \geq N$~~ $\Rightarrow |b_n(t)| \leq \varepsilon$, $\varepsilon = \frac{|a|}{2}$

$\therefore |b_n(t)| < \frac{|a|}{2}$ $(n \geq N)$

$\therefore \int_0^t |b_n(u)|\,du \leq \int_0^t du = t$, $\frac{|a|}{2}(t-\delta)$

$|x(t)| = e^{at} \cdot e^{\int_0^t b(t)dt} \cdot e^{C_1} \leq e^{at} \cdot e^{\int_0^\delta b(t)dt} \cdot e^{\int_\delta^t b(t)dt} \cdot e^{C_1}$, $\int_\delta^t b(t)\,dt \leq \frac{|a|}{2}(t-\delta)$

$= C_2 e^{\cancel{t(a+1)}\, t(a+\frac{|a|}{2})} \longrightarrow 0$ $(t\to\infty)$?　$a+\frac{|a|}{2} < 0$

$b(t)$が連続であることは?

(2) $(a+b(t))x - x' + C(t) = 0$ (1階線形同次) —(*)

↳ 定数係数じゃない

$\lim_{t\to\infty} x(t) \neq 0$ とすると、$\int_0^\infty x(t)\,dt$ は発散する。

$at + \int_0^t b(t)x(t)\,dt - x(t) + \int_0^t C(t)\,dt = C_1$

(1)の自明でない解を $y(t)$ とすると、$\lim y(t) = 0$ で、$y' = (a+b(t))y$ ~~$+C(t)$~~

$z(t) \triangleq y(t)w(t)$ として (*)、

$(a+b(t))z - z' + C(t)$

$= (a+b(t))yw - y'w - yw' + C$

1階線形

$$x' - (a+b(t))x = C(t) \quad \text{—(*)}$$

・定数変化法で、(1)の解 $x(t) = \exp\left(at + \int_0^t b(w)\,dw\right) \cdot D(t)$

(*)へ代入

$(a+b(t))\exp\left(at + \cancel{\int_0^t b(w)\,dw}\right)D(t) + \exp(〃)D'(t)$

$- (a+b)\exp(\cancel{〃)D(t)} = C(t)$

・ $\exp\left(at + \int_0^t b(w)\,dw\right) D'(t) = C(t)$

・ $D'(t) = C(t)\exp\left\{-at - \int_0^t b(w)\,dw\right\}$ $D(t) = \int C(t)\exp(〃)\,dt + C_2$

~~∴ (*)の解は $x(t) = D(t)\exp\left(at + \int_0^t b(w)\,dw\right) =$~~

$x(t) = \exp\left(at + \int_0^t b(w)\,dw\right) \cdot \int_0^t C(t)\exp\left\{-at - \int_0^t b(w)\,dw\right\} dt \cdot C_3$

$$\times \begin{cases} = e^{f(t)} \cdot \int_0^t \frac{C(w)}{e^{f(w)}}\,dw \cdot C_3 & (f(\cdot) \to 0) \\ & (e^{f(\cdot)} \to 1) \\ = & \end{cases}$$

(1)より、$\exp\left\{at+\int_0^t b(t)\,dt+c_1\right\} \longrightarrow 0 \quad (t\to\infty)$

今、

$$|x(t)| = f(t)\cdot\left|\int_0^t \frac{c(w)}{f(w)}\,dw \cdot c_3\right|$$

$$\leqq f(t)\cdot\int_0^t \left|\frac{c(w)}{f(w)}\right| dw \cdot |c_3|$$

$$\leq f(t)\cdot\int_0^t \frac{|c(w)|}{\min\limits_{w\in[0,\infty)}|f(w)|}\,dw\cdot|c_3|$$

$$\leqq \frac{f(t)}{\min\limits_{w\geq 0}|f(w)|}\cdot\int_0^t |c(w)|\,dw\cdot|c_3|$$

$\left(f(t) \triangleq \exp\left\{at+\int_0^t b(t)\,dt\right\}\right)$

$f(t)\longrightarrow 0 \quad (t\to\infty)$

fは連続

$$\frac{\quad}{f(t)>0}$$