H14問1

(1) $x_i = Re_i$とすると、$(i=1,\cdots,n)$

$$
\begin{aligned}
Ax_i &= R\,\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)R^T R e_i \\
&= R\,\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)e_i \quad (\because \text{直交行列の性質}) \\
&= R(\lambda_i e_i) \\
&= \lambda_i R e_i \\
&= \lambda_i x_i
\end{aligned}
$$

従って、$\forall i=1,\cdots,n$に対して、λ_iはAの固有値，Re_iはその固有ベクトルになっている。

(2)

$$
\begin{aligned}
B^2 &= R\,\mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1},\cdots,\sqrt{\lambda_n})R^T R\,\mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1},\cdots,\sqrt{\lambda_n})R^T \\
&= R\,\mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1},\cdots,\sqrt{\lambda_n})\mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1},\cdots,\sqrt{\lambda_n})R^T \quad (\because R^TR=I) \\
&= R\,\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)R^T \\
&= A
\end{aligned}
$$

(3)

$$
\begin{aligned}
AA^-A &= R\,\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)R^T R\,\mathrm{diag}(\lambda_1^-,\cdots,\lambda_n^-)R^T R\,\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)R^T \\
&= R\,\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\mathrm{diag}(\lambda_1^-,\cdots,\lambda_n^-)\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)R^T \quad (\because R^TR=I) \\
&= R\,\mathrm{diag}(\lambda_1\lambda_1^-\lambda_1,\cdots,\lambda_n\lambda_n^-\lambda_n)R^T \quad \text{—}(*)
\end{aligned}
$$

ここで、

$$
\lambda_i\lambda_i^-\lambda_i = \begin{cases} 0 & \text{if } \lambda_i = 0 \\ \lambda_i \cdot \frac{1}{\lambda_i} \cdot \lambda_i & \text{if } \lambda_i \neq 0 \end{cases} = \lambda_i \quad \text{より、}
$$

$$
\begin{aligned}
(*) &= R\,\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)R^T \\
&= A
\end{aligned}
$$

・全てのλ_iが零でないとき、

$$
\begin{aligned}
A^-A &= R\,\mathrm{diag}(\lambda_1^-,\cdots,\lambda_n^-)R^T R\,\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)R^T \\
&= R\,\mathrm{diag}(\lambda_1^-\lambda_1,\cdots,\lambda_n^-\lambda_n)R^T \quad (\because R^TR=I) \\
&= R\,\mathrm{diag}\left(\frac{1}{\lambda_1}\lambda_1,\cdots,\frac{1}{\lambda_n}\lambda_n\right)R^T \\
&= RIR^T \\
&= RR^T \\
&= I
\end{aligned}
$$

$\therefore$ A^-はAの逆行列