H21-4

(1) $\begin{cases} t = z \\ x = y + cz \end{cases}$ で変数変換する。

連鎖公式より、

$$u_t = \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} = W_z - cW_y$$

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} = W_y$$

$$u_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} = W_{yy}$$

これらを与式に代入すると、

$$\begin{cases} W_t = W_{yy} & -\infty < y < +\infty \quad , t > 0 \\ W(y,0) = \sin y + \cos 2y & -\infty < y < +\infty \end{cases}$$

(2)

$W(y,t)$ を y についてフーリエ変換したものを $\hat{W}(\xi,t)$ とおく。

$$\hat{W}(\xi,t) = \int_{-\infty}^{\infty} W(y,t)e^{i\xi y}dy$$

t で微分し、部分積分をすると、

$$\hat{W}_t(\xi,t) = -\xi^2\hat{W}(\xi,t)$$

従って、ξ の関数 $\varphi(\xi)$ を用いて、

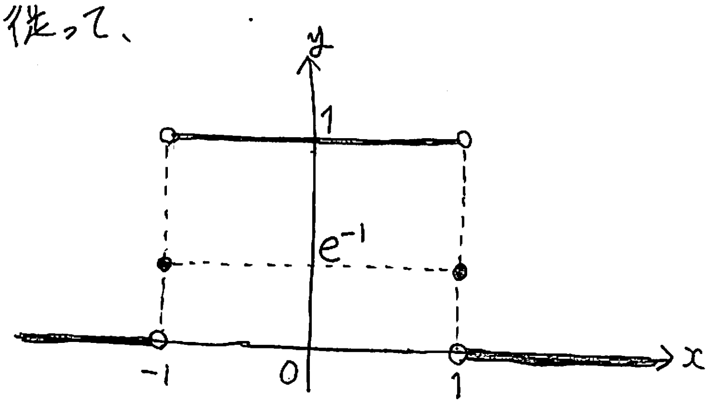
$$\hat{W}(\xi,t) = \varphi(\xi)e^{-\xi^2 t}$$

H14-2

(1) e^xの連続性より、

$$f(x) = \exp\left\{-\lim_{n\to\infty} x^{2n}\right\} = \begin{cases} e^{-0} & \text{if } |x|<1 \\ e^{-1} & \text{if } |x|=1 \\ e^{-\infty} & \text{if } |x|>1 \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{if } |x|<1 \\ e^{-1} & \text{if } |x|=1 \\ 0 & \text{if } |x|>1 \end{cases}$$

従って、



(2)

H31-6

(1)
$$P(X_i \le x_i) = \begin{cases} 0 & x_i \le 0 \\ \frac{x_i}{\theta} & 0 \le x_i \le \theta \\ 1 & \theta \le x_i \end{cases} \qquad f_{X_i}(x) = \frac{1}{\theta} 1\{0 \le x \le \theta\}$$

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i) = \begin{cases} 0 & \text{if } \exists x_k \le 0 \text{ or } \theta \le x_k \\ \frac{1}{\theta^n} & \text{if } {}^\forall 0 \le x_1, \cdots, x_n \le \theta \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{\theta^n} & \text{if } 0 \le \min\{x_1, \cdots, x_n\} \text{ and } \max\{x_1, \cdots, x_n\} \le \theta \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

(2)
$\theta < \max\{x_1, \cdots, x_n\}$のとき $L(\theta) = 0$

$\max\{x_1, \cdots, x_n\} \le \theta$ のとき $L(\theta) \downarrow$ より、 . $T_n = \max\{X_1, \cdots, X_n\} = Z$

(3)
$P(T_n \le t) = \left(\frac{t}{\theta}\right)^n 1\{0 \le t \le \theta\}$ より、 T_nの密度 $f(t) = \frac{n}{\theta^n} t^{n-1}$ $(0 \le t \le \theta)$

$$E(T_n) = \int_0^\theta t f(t)\, dt = \frac{n}{n+2}\theta^2$$

$$E(T_n^2) = \int_0^\theta t^2 f(t)\, dt = \frac{n}{n+2}\theta^2$$

$$V(T_n) = E(T_n^2) - E(T_n)^2 = \frac{n}{(n+2)(n+1)^2}\theta^2$$

(4) $P(0 \le T_n < b) = \left(\frac{b}{\theta}\right)^n$, $P(c < T_n \le \theta) = 1 - \left(\frac{c}{\theta}\right)^n$ より、 $b = \theta\beta^{\frac{1}{n}}$, $c = \theta(1-\gamma)^{\frac{1}{n}}$

(5)

H30-6

(1)

$$\log P(x|a) = -\log a + \frac{1}{a}\log x - \log x$$

$$L(a) = -n\log a + \frac{1}{a}\sum_{i=1}^{n}\log x_i - \sum_{i=1}^{n}\log x_i$$

$$\frac{\partial L}{\partial a} = -\frac{n}{a} - \frac{1}{a^2}\sum_{i=1}^{n}\log x_i = 0 \text{ より、}$$

$$A_n = -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log X_i$$

(2) 部分積分より、

$$\int_0^1 (\log x)^1 x^{b-1}dx = -\frac{1}{b^2}$$

$$\int_0^1 (\log x)^2 x^{b-1}dx = \frac{2}{b^3}$$

(3)

$$E(\log X_i) = \int_0^1 (\log x)P(x|\sqrt{2})dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^1 (\log x)x^{\frac{1}{\sqrt{2}}-1}dx = -\sqrt{2} \quad \text{より、}$$

$$E(A_n) = -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(\log X_i) = \sqrt{2}$$

$$E((\log X_i)^2) = \int_0^1 (\log x)^2 P(x|\sqrt{2})dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^1 (\log x)^2 x^{\frac{1}{\sqrt{2}}-1}dx = 4 \quad \text{より、}$$

$$V(\log X_i) = 4 - (-\sqrt{2})^2 = 2 \text{ より、}$$

$$V(A_n) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}V(\log X_i) = \frac{2}{n}$$

(4)

H25-7

(1)

x_1をAからCへの輸送量
x_2をAからDへ 〃
x_3をAからEへ 〃

とすると、各輸送量は、

	C	D	E	F
A	x_1	x_2	x_3	$14-(x_1+x_2+x_3)$
B	$3-x_1$	$6-x_2$	$10-x_3$	$(x_1+x_2+x_3)-9$

従って、全体の輸送コストは、この輸送量リストと輸送コストリストの内積をとると、

$$168-x_1+3x_2-x_3$$

となる。

また、制約は輸送量の非負性である。

$$
(P)\quad
\begin{aligned}
\text{Minimize}\quad & 168-x_1+3x_2-x_3 \\
\text{s.t.}\quad & x_1 \le 3 \\
& x_2 \le 6 \\
& x_3 \le 10 \\
& x_1+x_2+x_3 \le 14 \\
& -x_1-x_2-x_3 \le -9 \\
& x_1, x_2, x_3 \ge 0
\end{aligned}
$$

(2)

初期辞書

$$
\begin{aligned}
z &= 168-x_1+3x_2-x_3 \\
x_4 &= 3-x_1 \\
x_5 &= 6-x_2 \\
x_6 &= 10-x_3 \\
x_7 &= 14-x_1-x_2-x_3 \\
x_8 &= -9+x_1+x_2+x_3
\end{aligned}
$$

$\longrightarrow$

実行不可能だが $x_3 \longleftrightarrow x_8$ とすると、可能になる。

$$
\begin{aligned}
z &= 159+4x_2-x_8 \\
x_4 &= 3-x_1 \\
x_5 &= 6-x_2 \\
x_6 &= 1+x_1+x_2-x_8 \\
x_7 &= 5-x_8 \\
x_3 &= 9-x_1-x_2+x_8
\end{aligned}
$$

最適辞書

$$
\begin{aligned}
z &= 155+3x_2+x_4+x_6 \\
x_1 &= 3-x_4 \\
x_5 &= 6-x_2 \\
x_8 &= 4+x_2-x_4-x_6 \\
x_7 &= 1-x_2+x_4+x_6 \\
x_3 &= 10-x_6
\end{aligned}
$$

最適値155

最適解 $(x_1^*, x_2^*, x_3^*) = (3, 0, 10)$

H23-7

(1)

$$(D)\quad \begin{aligned} \text{minimize}\quad & \tfrac{3}{2}y_1 + y_2 - y_3 \\ \text{s.t.}\quad & -y_1 + 2y_2 - y_3 \geq 3 \\ & 3y_1 - 3y_2 + y_3 \geq -5 \\ & y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{aligned}$$

(2)

初期辞書(実行不可能)

$$z = \tfrac{3}{2}y_1 + y_2 - y_3$$
$$y_4 = -3 - y_1 + 2y_2 - y_3$$
$$y_5 = 5 + 3y_1 - 3y_2 + y_3$$

$$z = \tfrac{3}{2} + 2y_1 - \tfrac{1}{2}y_3 + \tfrac{1}{2}y_4$$
$$y_2 = \tfrac{3}{2} + \tfrac{1}{2}y_1 + \tfrac{1}{2}y_3 + \tfrac{1}{2}y_4$$
$$y_5 = \tfrac{1}{2} + \tfrac{3}{2}y_1 - \tfrac{1}{2}y_3 - \tfrac{3}{2}y_4$$

$$z = 1 + \tfrac{1}{2}y_1 + 2y_4 + y_5$$
$$y_2 = 2 + 2y_1 - y_4 - y_5$$
$$y_3 = 1 + 3y_1 - 3y_4 - 2y_5$$

従って、最適値 1, $(y_1^*, y_2^*, y_3^*) = (0, 2, 1)$

補助問題

$$\max\ z_a = -y_a$$
$$y_4 = -3 - y_1 + 2y_2 - y_3 + y_a$$
$$y_5 = 5 + 3y_1 - 3y_2 + y_3$$

$y_a \leftrightarrow y_4$

$$z_a = -3 - y_1 + 2y_2 - y_3 - y_4$$
$$y_a = 3 + y_1 - 2y_2 + y_3 + y_4$$
$$y_5 = 5 + 3y_1 - 3y_2 + y_3$$

$$z_a = -y_a$$
$$y_2 = \tfrac{3}{2} + \tfrac{1}{2}y_1 + \tfrac{1}{2}y_3 + \tfrac{1}{2}y_4 - \tfrac{1}{2}y_a$$
$$y_5 = \tfrac{1}{2} + \tfrac{3}{2}y_1 - \tfrac{1}{2}y_3 - \tfrac{3}{2}y_4 + \tfrac{3}{2}y_a$$

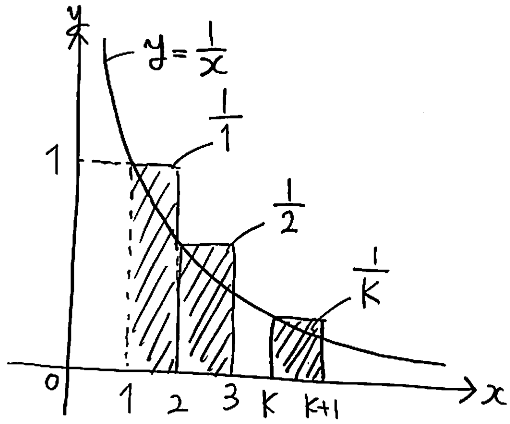
(3)

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 1 \\ -x_1 + x_2 = -1 \end{cases}$$ より $(x_1^*, x_2^*) = (2, 1)$

(4)

H19-2

(1)



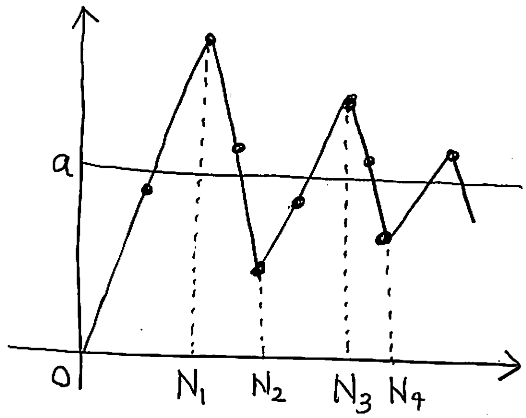
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} > \int_1^{\infty}\frac{1}{x}dx = \infty$$

(2) $\forall a \in \mathbb{R}$をとってくる。

$$S_1 \triangleq 1$$

$$S_{n+1} \triangleq \begin{cases} 1 & \text{if } \sum_{k=1}^{n}\frac{S_k}{k} < a \\ -1 & \text{if } \sum_{k=1}^{n}\frac{S_k}{k} \geq a \end{cases}$$

と定義する。



(1)より、

H22-6

(1)

- $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall x, y \in N$に対して、

  $T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y) = 0$

  $\therefore \alpha x + \beta y \in N$ より、ベクトル空間

- $\{x_n\} \subset N$で、$x_n \to x$ in H なものに対して、

  Tは明らかに連続なので、

  $x_n \to x \implies T(x_n) \to T(x)$

  従って、$T(x) = 0$

  $\therefore x \in N$ より、閉集合

(2)

- $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall y_1, y_2 \in N^\perp$に対して、

  $\langle \alpha y_1 + \beta y_2, x \rangle = \alpha \langle y_1, x \rangle + \beta \langle y_2, x \rangle = 0 \quad (\forall x \in N)$

  $\therefore \alpha y_1 + \beta y_2 \in N^\perp$ よりベクトル空間

- $\{y_n\} \subset N^\perp$で、$y_n \to y$ in H なものに対して、

  内積の連続性より、

  $y_n \to y \implies \langle y_n, x \rangle \to \langle y, x \rangle \quad (\forall x \in H)$

  従って、$\langle y, x \rangle = 0 \quad (\forall x \in N)$

  $\therefore y \in N^\perp$ より、$N^\perp$は閉集合.

(3)

$N^\perp \supsetneq \{0\}$ より、$N^\perp$の次元は0でない。$N^\perp$の次元は2以上でないことを示せばよい。

H19-6

(1) $\xi = x + t$, $\eta = x - t$ で変数変換する。$x = \dfrac{\xi+\eta}{2}$, $t = \dfrac{\xi-\eta}{2}$ である。

連鎖公式より、

$$u_\xi = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial \xi} = \frac{1}{2}(u_x + u_t)$$

$$u_{\xi\eta} = \frac{\partial u_\xi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial u_\xi}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial \eta} = \frac{1}{4}(u_{xx} + u_{tx} - u_{xt} - u_{tt}) = 0$$

これより、ξの関数hを用いて、

$$u_\xi = h(\xi)$$

さらに積分すると、ηの関数gを用いて、

$$u = \underbrace{\int h(\xi)\,d\xi}_{f(\xi)\text{とおく。}} + g(\eta)$$

変数変換を元に戻すと、

$$u(x,t) = f(x+t) + g(x-t)$$

(2)

$$\begin{aligned}
u(x-a, t-b) + u(x+a, t+b) &= f(x-a+t-b) + g(x-a-t+b) \\
&\quad + f(x+a+t+b) + g(x+a-t-b) \\
&= f(x+b+t+a) + g(x+b-t-a) \\
&\quad + f(x-b+t-a) + g(x-b-t+a) \\
&= u(x+b, t+a) + u(x-b, t-a)
\end{aligned}$$

(3)

H28-9

(1)

$$P(Z_i=1)=\frac{P}{2}$$
$$P(Z_i=2)=\frac{1}{2}$$
$$P(Z_i=3)=\frac{1-P}{2}$$

より、 $P(X_1=n_1, X_2=n_2, X_3=n_3)=\frac{n!}{n_1!n_2!n_3!}\left(\frac{P}{2}\right)^{n_1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n_2}\left(\frac{1-P}{2}\right)^{n_3}$

(2)

$$X_1\sim B\left(\frac{P}{2}, n\right)$$
$$X_2\sim B\left(\frac{1}{2}, n\right)$$
$$X_3\sim B\left(\frac{1-P}{2}, n\right)$$

より、

$$E(X_1)=\frac{nP}{2}$$
$$E(X_2)=\frac{n}{2}$$
$$E(X_3)=\frac{n(1-P)}{2}$$

(3)

$\frac{\partial \log P(X_1=n_1, X_2=n_2, X_3=n_3; P)}{\partial P}=0$ より、

$n_1\frac{1}{P}+n_3\frac{-1}{1-P}=0$ より、 $\hat{P}=\frac{n_1}{n_1+n_3}$ $(n_1+n_3\neq 0)$

(4)

H28-5

(1) 位相空間Xの開集合系を$\mathcal{O}_X$で表す。

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & & Y \\ & Q \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

${}^{\forall}U \in \mathcal{O}_Y$に対して、$g \circ \pi = f$より、

$$g^{-1}(U) = \pi \circ f^{-1}(U)$$

fの連続性より$f^{-1}(U) \in \mathcal{O}_X$.

H13問7

(1)

(P) maximize $x_1 + 4x_2 + 3x_3$

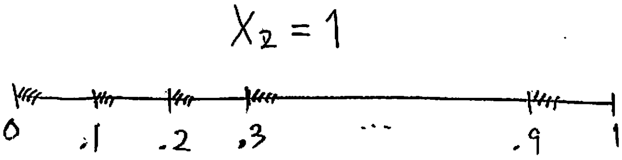
s.t. $2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \leq 8$

H26-8

(1) $k=0, 1, \cdots, 9$ に対して、

$X_n = k$ となる区間の長さは、

長さ 10^{-n} の互いに素な区間が 10^{n-1} 個あるので、$\frac{1}{10}$ である。



X は一様分布に従うので、$P(X_n = k) = \dfrac{10^{-1}}{|[0,1)|} = \dfrac{1}{10}$

(2)

H17問4

(1) 与式を帰納法で示す。

- $n=1$のとき、

$$d(y_1,x_1) \leq d(y_1,f(y_0)) + d(f(y_0),x_1) \leq \varepsilon_1 + d(f(y_0),f(x_0))$$
$$\leq \varepsilon_1 + \frac{1}{2}d(y_0,x_0) = \frac{\varepsilon_1}{2^0}$$ より成立.

- $n=k$のとき、与式が成立すると仮定する。このとき、

$$d(y_{k+1},x_{k+1}) \leq d(y_{k+1},f(y_k)) + d(f(y_k),f(x_k)) \leq \varepsilon_{k+1} + \frac{1}{2}d(y_k,x_k)$$
$$\leq \varepsilon_{k+1} + \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{k-1}\frac{\varepsilon_{k-i}}{2^i} = \frac{\varepsilon_{k+1}}{2^0} + \frac{\varepsilon_k}{2^1} + \frac{\varepsilon_{k-1}}{2^2} + \cdots + \frac{\varepsilon_1}{2^k} = \sum_{i=0}^{(k+1)-1}\frac{\varepsilon_{k+1-i}}{2^i}$$

より、$n=k+1$でも成立する。

(2)

H16-2

(2) $\Longrightarrow$ (1)

背理法による。$f(x)$ の次数を 0 か 1 とすると、$f(x) = ax + b \quad (a, b \in \mathbb{R})$ と表せる。

すると、

$$^{\exists}N = |a| \ , \ ^{\forall}x \in \mathbb{R}, \ |f(x) - f(x+1)| = |a| \leq N$$

より、(2)の否定が成立し、矛盾する。

従って、$f(x)$ の次数は 2 以上。 ▨

(1) $\Longrightarrow$ (2)

H15-5

(1) $(\text{右辺}) = \alpha\|x\|^2 + (1-\alpha)\|y\|^2 - \alpha(1-\alpha)\left(\|x\|^2 - 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2\right)$

$$= \text{〃} + \text{〃} - \alpha\|x\|^2 + \underbrace{\alpha^2\|x\|^2}_{\|\alpha x\|^2} + 2\underbrace{\alpha(1-\alpha)\langle x, y\rangle}_{\langle \alpha x, (1-\alpha)y\rangle} - \alpha(1-\alpha)\|y\|^2$$

消　　まとめる

$$= \|\alpha x\|^2 + 2\langle \alpha x, (1-\alpha)y\rangle + \underbrace{(1-\alpha)^2\|y\|^2}_{\|(1-\alpha)y\|^2}$$

$$= \|(\alpha x) + (1-\alpha)y\|^2$$

$$= (\text{左辺})$$

(2)

① 凸集合であること

$^\forall\alpha \in [0,1]$, $^\forall x, y \in F(T)$ に対して、 $z \triangleq \alpha x + (1-\alpha)y$ とおく。$T(z) = z$ を示せばよい。