H27問9

(1) 一般に、$X \sim N(\mu, \Sigma) \Rightarrow AX+b \sim N(A\mu+b, A\Sigma A^T)$ なので、

$\beta X_1 \sim N(0, \beta^2\sigma^2)$

一般に、$X \sim N(\mu_1, \Sigma_1)$, $Y \sim N(\mu_2, \Sigma_2)$ (XとYは独立) $\Longrightarrow X+Y \sim N(\mu_1+\mu_2, \Sigma_1+\Sigma_2)$ なので、

βX_1 とUは独立なので、$X_2 = \beta X_1 + U \sim N(0, \beta^2\sigma^2+1)$

従って、X_1 と X_2 の周辺分布が等しいためには、分散について、

$\sigma^2 = \beta^2\sigma^2+1$, $\sigma^2 = \dfrac{1}{1-\beta^2}$ でなければならない。

(2) 多次元正規分布の性質より、

$$\begin{aligned} X_1 &\sim N(0, \sigma^2) \\ X_2 &\sim N\left(0, \frac{\beta^2}{1-\beta^2}+1\right) = N\left(0, \frac{1}{1-\beta^2}\right) \end{aligned} \Longrightarrow \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \sim N\left(\underset{\mu}{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}, \underset{\Sigma}{\begin{pmatrix} \frac{1}{1-\beta^2} & Cov(X_1,X_2) \\ Cov(X_1,X_2) & \frac{1}{1-\beta^2} \end{pmatrix}}\right)$$

$$\begin{aligned} Cov(X_1, X_2) &= E(X_1X_2) - E(X_1)E(X_2) \\ &= E(\beta X_1^2 + UX_1) - E(X_1)E(\beta X_1 + U) \\ &= \beta E(X_1^2) + E(U)\cancel{E(X_1)} - E(X_1)^2\beta - E(X_1)\cancel{E(U)} \\ &= \beta\sigma^2 = \frac{\beta}{1-\beta^2} \end{aligned}$$

$$\det(\Sigma) = \frac{1}{(1-\beta^2)^2} - \frac{\beta^2}{(1-\beta^2)^2} = \frac{1-\beta^2}{(1-\beta^2)^2} = \frac{1}{1-\beta^2}$$

$$\Sigma^{-1} = \frac{1}{\det|\Sigma|}\begin{pmatrix} & \end{pmatrix} = (1-\beta^2)\begin{pmatrix} \frac{1}{1-\beta^2} & \frac{-\beta}{1-\beta^2} \\ \frac{-\beta}{1-\beta^2} & \frac{1}{1-\beta^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -\beta & 1 \end{pmatrix}$$

$$P(x; 0, \Sigma) = \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{2\pi}\exp\left\{-\frac{1}{2}x^T\begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -\beta & 1 \end{pmatrix}x\right\} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

//

$=1,$

(3)

まだ

$$\ell(\beta)=\frac{1}{2}\log(1-\beta^2)-\log(2\pi)-\frac{1}{2}\cdot\cancel{\frac{\partial}{\partial\beta}}\left\{x^T\begin{pmatrix}1&-\beta\\-\beta&1\end{pmatrix}x\right\}$$

$$\frac{\partial}{\partial\beta}\left\{x^T\begin{pmatrix}1&-\beta\\-\beta&1\end{pmatrix}x\right\}=x^T\begin{pmatrix}0&-1\\-1&0\end{pmatrix}x=x^T\begin{pmatrix}-x_2\\-x_1\end{pmatrix}=-x_1x_2-x_1x_2=-2x_1x_2\ ?$$

$$=\frac{\partial}{\partial\beta}\sum b_{ij}x_ix_j=\frac{\partial}{\partial\beta}(-\beta x_1x_2-\beta x_2x_1)=-2x_1x_2$$

一致.

~~$\ell(\beta)=\frac{1}{2}\log(1-\beta^2)-\log(2\pi)+$~~

$$\ell'(\beta)=\frac{1}{2}\cdot\frac{-2\beta}{1-\beta^2}+x_1x_2=0 \text{ より}$$

$$-\cancel{2}\beta+\cancel{2}(1-\beta^2)x_1x_2=0$$

$$-x_1x_2\beta^2-\beta+x_1x_2=0$$

$$x_1x_2\beta^2+\beta-x_1x_2=0$$

$$\beta=\frac{-1\pm\sqrt{1+4x_1^2x_2^2}}{2x_1x_2}$$

$|\beta|<1$ より

$$\frac{-1-\sqrt{1+4x_1^2x_2^2}}{2x_1x_2}\leq\frac{-1-1}{2}=-1 \text{ より除外.}$$

$$\frac{\sqrt{1+4x_1^2x_2^2}-1}{2}$$

X

$2x_1x_2=a$ とおくと、

$$\beta=\frac{-1\pm\sqrt{1+a^2}}{a}$$

① $\beta=\frac{-1-\sqrt{1+a^2}}{a}$ のとき.

~~$\beta<\frac{-1-\sqrt{0+a^2}}{a}=\frac{-1-|a|}{a}=-\frac{1}{a}-\frac{|a|}{a}$~~

$$|\beta|=\left|\frac{1+\sqrt{1+a^2}}{a}\right|=\left|\frac{1}{a}+\sqrt{\frac{1}{a^2}+1}\right|\geq\left|\frac{1}{|a|}-\sqrt{\frac{1}{a^2}+1}\right|>1$$

② $\beta=\frac{-1+\sqrt{1+a^2}}{a}$ のとき

$$|\beta|=\left|\frac{-1+\sqrt{1+a^2}}{a}\right|\ \cancel{\leq\left|\frac{1}{a}\right|+\left|\frac{\sqrt{1+a^2}}{a}\right|}$$

X