H13-2

(i)

$c_1, c_2, \cdots, c_k \in \mathbb{R}$ に対して, $c_1 a^1 + c_2 a^2 + \cdots + c_k a^k = 0 \implies c_1 = c_2 = \cdots = c_k = 0$

(ii)

$a^1, \cdots, a^k \in S$ が S の基底 $\overset{def}{\iff}$ $a^1, \cdots, a^k$ は線形独立 かつ

$\forall s \in S, \ {}^\exists c_1, \cdots, c_k \in \mathbb{R}, \ s = c_1 a^1 + \cdots + c_k a^k$

S の次元 $\overset{def}{\iff}$ S の基底となるベクトルの本数

(iii)

$\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a^j x_j$ の第 i 成分は、

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{l=1}^{k} b_{il} c_{lj} \right) x_j = \sum_{l=1}^{k} b_{il} \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{n} c_{lj} x_j \right)}_{\parallel}$$

y_l とおく。

従って、

$$\sum_{j=1}^{n} a^j x_j = \sum_{l=1}^{k} b^l y_l$$

従って、$x_1, x_2, \cdots, x_n$ の任意性より、

$$X \subset \left\{ \sum_{l=1}^{k} b^l y_l \ ; \ y_l \in \mathbb{R} \ (l = 1, 2, \cdots, k) \right\}$$

B の基底となりうるベクトルは高々 k 個 なので、X の次元も高々 k であり、A の階数は k 以下となる。