H26 問2

$A = \{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^2) \ ; \ f_{xy} = 0 \}$ $\quad B = \{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^2) \ ; \ f_{xx} - f_{yy} = 0 \}$

(1)

$f \in A$ とすると、

$$f_{xy}(x,y) = 0 \quad ({}^\forall x, y \in \mathbb{R}^2)$$

$$\overset{\shortparallel}{\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)}$$

注 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right) = f_{yx}$

$f \to f_y \to f_{yx}$ の順.

両辺 x で積分すると、C_1 を x に依存しない定数つまり、y に依存する関数が存在して、とすると、

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = C_1(y)$$

同様に、y で積分すると、ある x の関数 C_2 が存在して、

$$f(x,y) = \int C_1(y)\,dy + C_2(x)$$

従って、$a(x) = C_2(x)$, $b(y) = \int C_1(y)\,dy$ であり、

f が C^∞ 級であることから、a, b も C^∞ 級である。 ■

(2)

$x = \dfrac{u+v}{2}$, $y = \dfrac{u-v}{2}$ より、$u = x+y$, $v = x-y$ $\therefore$ $f(x,y) = f\left(\dfrac{u+v}{2}, \dfrac{u-v}{2}\right)$

~~$f_u = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}$~~

$$f_u = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} = f_x \cdot \frac{1}{2} + f_y \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(f_x + f_y)$$

$$f_{uv} = \frac{\partial f_u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f_u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{1}{2}(f_{xx} + f_{yx}) \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(f_{xy} + f_{yy}) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{4}(f_{xx} + f_{yx} - f_{xy} - f_{yy}) = \frac{1}{4}(f_{xx} - f_{yy})$$ ■

(3)

$f \in B$ とすると、

$$f_{xx} - f_{yy} = 0$$

(2) より、(2) の変数変換をすると、

$$f_{uv} = \frac{1}{4}(f_{xx} - f_{yy}) = 0$$

より、$f \in A$

従って、(1) より、${}^\exists a, b \in C^\infty(\mathbb{R})$, $f(u,v) = a(u) + b(v)$

変数変換をもとに戻すと、B の一般形は、

$$f(x+y, x-y) = a(x+y) + b(x-y)$$ ■

↳ 一般形なので、$f(x,y) \triangleq f(x+y, x-y) = a(x+y) + b(x-y)$ と改めて $f(x,y)$ と書くべきか。