H17問1

(1)

$a^1, a^2, \cdots, a^m$ が線形独立 $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $a^1, a^2, \cdots, a^m$ が線形従属でない。

$a^1, a^2, \cdots, a^m$ が線形従属 $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\exists\ C = (c_1, \cdots, c_m) \in \mathbb{R}^m$ s.t. $C \neq \mathbb{O}_m$ かつ $\sum_{i=1}^{m} c_i a^i = \mathbb{O}_n$

$(\mathbb{O}_m \triangleq (0, \cdots, 0) \in \mathbb{R}^m)$

(2)

$a^1, \cdots, a^m$ が線形独立とする。

ある $c_1, \cdots, c_{m-1} \in \mathbb{R}$ を用いて、

$\sum_{i=1}^{m-1} c_i (a^i + a^{i+1}) = 0$ とすると、

$$\sum_{i=1}^{m-1} (c_i a^i + c_i a^{i+1}) = \sum_{i=1}^{m-1} c_i a^i + \sum_{i=1}^{m-1} c_i a^{i+1} = \sum_{i=1}^{m-1} c_i a^i + \sum_{j=2}^{m} c_{j-1} a^j = c_1 a^1 + \sum_{i=2}^{m-1} (c_i + c_{i-1}) a^i + c_{m-1} a^m = 0$$

これは、$a^1, \cdots, a^m$ の線形結合であり、$a^1, \cdots, a^m$ の線形独立性より、

$c_1 = c_{m-1} = 0$

$c_i + c_{i-1} = 0 \quad (i = 2, \cdots, m-1)$ となる。

従って、$c_1 = -c_2 = c_3 = -c_4 = \cdots = c_{m-1} = 0$

$c_i = 0 \quad (i = 1, \cdots, m-1)$ に限られる。

従って、題意は示された。✕ ($a_1 + a_2, a_2 + a_3, \cdots, a_{m-1} + a_m$ が LI を示してしまった) —(※)

(3)

$a^1, \cdots, a^m$ を線形独立，かつ m を奇数とする。

~~(2)~~ (※) より、$a^1 + a^2, a^2 + a^3, \cdots, a^{m-1} + a^m$ は線形独立.　　✕ (※)は活かせない.

(2) $a^1, \cdots, a^m$ が線形独立とする。