H26問1

(1)

(⊂)

$^\forall x \in \mathrm{range}(P) \cap \ker(P)$ に対して、

$x \in \mathrm{range}(P)$ より、$^\exists y \in \mathbb{R}^n,\ x = Py$ —— ①

$x \in \ker(P)$ より、$Px = 0$ —— ②

①で左からPをかけて、$Px = P^2 y = Py$

②より、$Py = 0$

$\therefore x = 0 \in \{0\}$

(⊃)

$x \in \{0\}$ とすると、$x = 0$ であり、

$P0 = 0$ より、$0 \in \mathrm{range}(P)$ かつ $0 \in \ker(P)$ ■

(2)

(⊂)

$x \in \ker(P)$ とすると、

$Px = 0$

$(I-P)x = x - Px = x$ より、x自身がI−Pによりxに写るので、$x \in \mathrm{range}(I-P)$

(⊃)

$x \in \mathrm{range}(I-P)$ とすると、

$^\exists y \in \mathbb{R}^n,\ (I-P)y = x$

左からPをかけて、$Py - P^2 y = Py - Py = \underline{0 = Px}$

$\therefore x \in \ker(P)$

(3)

$^\forall x \in \mathrm{range}(P),\ y \in \mathrm{range}(I-P)$ に対して、

$^\exists z \in \mathbb{R}^n,\ x = Pz$, $^\exists w \in \mathbb{R}^n,\ y = (I-P)w$

~~$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} P_{ij} z_j\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\right.$~~

$\langle x, y\rangle = \langle Pz, (I-P)w\rangle = (Pz)^T(I-P)w = z^T P^T (I-P)w = z^T(P^T - P^T P)w$

$= z^T(P - P^2)w = z^T(P-P)w = zOw = 0$ ■

(4)

$^\forall x \in \mathrm{range}(P),\ y \in \mathrm{range}(I-P)$, $\langle x, y\rangle = 0$ とする。

$^\exists z \in \mathbb{R}^n,\ x = Pz$, $^\exists w \in \mathbb{R}^n,\ y = (I-P)w$

$\langle x, y\rangle = z^T(P^T - P^T P)w$

ここで、x, y として、

$P=(P_1\ P_2 \cdots P_n)$, $e_i = \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix} < i$ とし、 $1_n = \begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$

$x = P_1+\cdots+P_n$
$y=(e_1-P_1)+\cdots+(e_n-P_n)$ ととると、

$x = P1_n$, $y=(I-P)1_n$ で、 $z=w=1_n$ ととれ、

一般に $x^TAy = \sum_i\sum_j a_{ij}x_iy_j$ なので、 $A = P^T - P^TP$ とおくと、

$\langle x,y\rangle = z^T(P^T-P^TP)w = z^TAw = \sum_{i,j} a_{ij}z_iw_j = \sum_{i,j}a_{ij}=0$ (x, y がよくない)

$a_{ij}=0$ となってほしかった。

X

$\forall i',j' \in\{1,\cdots,n\}$ に対して、

$x = P_{i'} = Pe_{i'}$, $y = P_{j'} = Pe_{j'}$ より、$z=e_{i'}$, $w=e_{j'}$ ととれるので、

$\langle x,y\rangle = \sum_{i,j}a_{ij}z_iw_j = \sum_i z_i\sum_j a_{ij}w_j = \sum_i z_i\cdot a_{ij'} = a_{i'j'} = 0$

∴ $P^T - P^TP = O$

$P^T = P^TP$.

両辺転置をとると、$P=(P^TP)^T = P^T(P^T)^T = P^TP$

∴ $P=P^T$ となり Pは対称行列 ■