H20-4

(1)

シュワルツの不等式より

$|\langle x, x_n\rangle| \leq \|x\|\|x_n\| \quad (\forall n\in\mathbb{N})$

両辺下極限をとると、

$$\liminf_{n\to\infty} |\langle x, x_n\rangle| \leq \liminf_{n\to\infty} \|x\|\|x_n\|$$

$x_n \xrightarrow{弱} x$ より、$\lim_{n\to\infty}\langle x_n, x\rangle = \liminf_{n\to\infty}\langle x_n, x\rangle$ は必ず存在し、

$$\begin{aligned}
|\langle x, x\rangle| &\leq \|x\| \liminf_{n\to\infty}\|x_n\| \\
\|x\|^2 &\leq \|x\| \liminf_{n\to\infty}\|x_n\| \\
\|x\| &\leq \liminf_{n\to\infty}\|x_n\| \qquad (\|x\|\neq 0 \text{ のとき})
\end{aligned}$$

$\|x\| = 0$ のときは、ノルムの非負性より明らかに成立。

従って題意は示された。

(2)

$\mathbb{R}^N$ の点列 $\{x_n\}$ が $x_\infty\in\mathbb{R}^N$ に弱収束するとする。このとき、

$$\lim_{n\to\infty}\langle x_n, h\rangle = \langle x_\infty, h\rangle \qquad (\forall h\in\mathbb{R}^N)$$

$h = e_i$ (単位ベクトル) $(i=1,2,\cdots,N)$ と選ぶと、

$$\lim_{n\to\infty} x_{n,i} = x_{\infty,i}$$

従って、$\lim_{n\to\infty} x_n = x_\infty$

強収束ならばノルム収束するので、

$$\underline{\lim}_{n\to\infty}\|x_n\| = \lim_{n\to\infty}\|x_n\| = \|x_\infty\|$$

(3)

$\{\varphi_n\}\subset X$ を正規直交基底とすると、ベッセルの不等式より、

$$\sum_{i=1}^{\infty}|\langle\varphi_n, x\rangle|^2 \leq \|x\|^2 < +\infty \qquad (\forall x\in X)$$

より、$\lim_{n\to\infty}\langle\varphi_n, x\rangle = 0 = \langle\varphi_n, 0\rangle$ より、$\varphi_n \xrightarrow{weak} 0$

しかし、

$$\|0\| = 0 < 1 = \underline{\lim}_{n\to\infty}\|\varphi_n\|$$