H14-8

(1)

$$P(F^{-1}(U) \le x,\ G^{-1}(U) \le y) = P(U \le F(x),\ U \le G(y)) \quad (\because F, G\text{の単調性})$$

$$= P(U \le \min\{F(x), G(y)\})$$

$$= \min\{F(x), G(y)\} \quad (\because 0 \le \min\{F(x), G(y)\} \le 1)$$

$$= \overline{H}(x, y)$$

同様に、

$$P(F^{-1}(U) \le x,\ G^{-1}(1-U) \le y) = P(U \le F(x),\ 1-U \le G(y))$$

$$= P(U \le F(x),\ 1-G(y) \le U)$$

$$= \begin{cases} F(x) + G(y) - 1 & \text{if } 1-G(y) \le F(x) \\ 0 & \text{if } 1-G(y) \ge F(x) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} F(x) + G(y) - 1 & \text{if } 0 \le F(x) + G(y) - 1 \\ 0 & \text{if } 0 \ge F(x) + G(y) - 1 \end{cases}$$

$$= \max\{F(x) + G(y) - 1,\ 0\}$$

(2) $H(x,y)$に従う確率変数をX, Yとする。

$$H(x,y) - \underline{H}(x,y) = \begin{cases} H(x,y) - F(x) - G(y) + 1 & \text{if } 0 \le F(x) + G(y) - 1 \\ H(x,y) & \text{o.w.} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} P(X \le \infty, Y \le \infty) - P(X \le x) - P(Y \le y) + P(X \le x, Y \le y) \\ \quad〃 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} P(x \le X,\ y \le Y) \\ \quad〃 \end{cases}$$

$$\ge 0$$

$$\overline{H}(x,y) - H(x,y) = \min\{P(X \le x, Y \le \infty) - P(X \le x, Y \le y),\ P(X \le \infty, Y \le y) - P(X \le x, Y \le y)\}$$

$$\ge 0$$

(3) $\mathrm{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$ と $E_{\underline{H}}(X) = E_{\overline{H}}(X) = E_H(X)$ (Yも同様) であるから、

(∵ 周辺分布は一致)

$\mathrm{Cov}_{\underline{H}}(X,Y) \leq \mathrm{Cov}_H(X,Y) \leq \mathrm{Cov}_{\overline{H}}(X,Y) \iff E_{\underline{H}}(XY) \leq E_H(XY) \leq E_{\overline{H}}(XY)$

さらに、

$\iff \underline{H}(x,y) \leq H(x,y) \leq \overline{H}(x,y)$ ($\forall\, 0 \leq x, y$)

(∵) 各3項を $E(XY) = \int_0^\infty \int_0^\infty P(X>x, Y>y)\, dx\, dy$ で展開し、

$P_H(X>x, Y>y) = H(x,y) + 1 - F(x) - G(y)$ ($\underline{H}, \overline{H}$ も同様)

(2)より、この命題は正しいので、もとの命題も成立する。