問6H15

(1) 無限区間の波動方程式

$$u_{tt} = u_{xx} \quad (t>0,\ x\in\mathbb{R}) \quad —\ (W1)$$

$$u(0,x) = F(x),\ u_t(0,x) = G(x) \quad (x\in\mathbb{R}) \quad —\ (W2)$$

と番号をつける。

$y = x+t$, $z = x-t$ で変数変換する。$x = \frac{y+z}{2}$, $t = \frac{y-z}{2}$ になっている

$$u_y = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial y} = u_x\cdot\frac{1}{2} + u_t\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}(u_x+u_t) \quad (\because \text{chain rule})$$

$$\cancel{u_{yx} = \frac{\partial u_y}{\partial x} = \frac{\partial u_y}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial y} = \frac{1}{2}(u_{xx}+u_{tx})\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}(u_{xt}+u_{tt})\cdot\frac{1}{2}}$$

$$u_{yz} = \frac{\partial u_y}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial u_y}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial z} = \frac{1}{2}(u_{xx}+u_{tx})\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}(u_{xt}+u_{tt})\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{4}(u_{xx}+u_{tx}-u_{xt}-u_{tt})$$

$$= 0 \quad (\because (W1),\ C^2\text{級})$$

より、これを z で積分すると、

zに依存しない積分定数 $=y$の関数となる。

同時に

$$\int u_{yz}\,dz = \int 0\,dz \longrightarrow u_y = \underline{\varphi(y)}$$

$h(y)$のほうがよい。

次に、これを y で積分すると、

$$\underset{\substack{\parallel\\ u}}{\int u_y\,dy} = \underbrace{\int \varphi(y)\,dy}_{\parallel} + \psi(z)$$

改めてこれを $\varphi(y)$ とおく。

$\therefore\ u = \varphi(y) + \psi(z)$ つまり、$u\left(\frac{y-z}{2}, \frac{y+z}{2}\right) = \varphi(y) + \psi(z)$ or $u(t,x) = \varphi(x+t) + \psi(x-t)$ などとかける。

ここから初期条件を使って、φ, ψ を具体的に求める。

$$u(0,x) = \varphi(x) + \psi(x) = F(x) \quad (\because (W2))$$

$$u_t(0,x) = (x+t)'\varphi'(x+t) + (x-t)'\psi'(x-t)\Big|_{t=0}$$

$$= \varphi'(x) - \psi'(x) = G(x) \quad (\because W2)$$

後者を x で積分して (tでビブンしてxで積分?)

$$\varphi(x) - \psi(x) = \int G(x)\,dx + C_1$$

$$\therefore\ \varphi(x) = \frac{1}{2}\left(F(x) + \int G(x)\,dx\right) + \frac{1}{2}C_1$$

$$\psi(x) = \frac{1}{2}\left(F(x) - \int G(x)\,dx\right) - \frac{1}{2}C_1$$

と φ と ψ の関数の形がきまった。

よって、

$$u(t,x) = \varphi(x+t) + \psi(x-t)$$

$$= \frac{1}{2}\left(F(x+t)+F(x-t)\right) + \frac{1}{2}\left(\int G(x+t)\,dx - \int G(x-t)\,dx\right) + \left(\frac{1}{2}c_1 - \frac{1}{2}c_1\right)$$

無関係なので、

$\underbrace{\int G(w)\,dw}_{H(w)}$ とおくと、

共通で ≠

不定積分の変数に代入か、被積分関数の変数に代入かの大きな違い。

$$= \frac{1}{2}\left(F(x+t)+F(x-t)\right) + \frac{1}{2}\left(H(x+t) - H(x-t)\right)$$

不定積分のはんいを $\int_0^w$ とすると、（不定積分＝定数 a から変数 x までの積分で与えられる関数）

$\hat{H}$ の

$$= \frac{1}{2}\left(F(x+t)+F(x-t)\right) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} G(w)\,dw$$ //」

(2) $u(t,x) = e^{-t}U(t,x)$ とおく。

$$u_t = -e^{-t}U + e^{-t}U_t = e^{-t}(-U + U_t)$$

$$u_{tt} = -e^{-t}(-U+U_t) + e^{-t}(-U_t + U_{tt}) = e^{-t}(U - 2U_t + U_{tt})$$

$$u_{tt} + 2u_t + u = e^{-t}\{\cancel{U} - \cancel{2U_t} + U_{tt} - \cancel{2U} + \cancel{2U_t} + \cancel{U}\}$$

$$= e^{-t}U_{tt}$$

一方、$u_{xx} = e^{-t}U_{xx}$ だから、(1)の U に対して、$e^{-t}U$ が(2)の u の等式を満たした。

また、

$u(0,x) = f(x) = U(0,x)$, $u_t(0,x) = g(x) = -U(0,x) + U_t(0,x) = -f(x) + U_t(0,x)$

より、$U_t(0,x) = f(x) + g(x)$

従って、(1)の U に対して、(W2)を $F=f$, $G=f+g$ としたときの、$e^{-t}U$ が(2)の解である。

$$u(t,x) = \frac{e^{-t}}{2}\left\{f(x+t) + f(x-t) + \int_{x-t}^{x+t} f(w)+g(w)\,dw\right\}$$ //

さらに、f と g が有界とする。~~$u \in C^2$ 級より、f, g は連続。有界な連続関数の最大最小は必ずあるので、~~

・~~$f(x+t) \leq M_1$ ($\forall$~~

・~~エネルギー：$E(t) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} (U_t^2 + U_x^2)\,dx$~~

・$|f(x)| \leq M_1$, $|g(x)| \leq M_2$ ($\forall x \in \mathbb{R}$) となる。

$$|u(t,x)| \leq \frac{e^{-t}}{2}\left\{M_1 + M_2 + \underbrace{\int_{x-t}^{x+t} |M_1+M_2|\,dw}_{|M_1+M_2|\cdot 2t}\right\} \longrightarrow 0 \quad (t \to \infty)$$

//