H30-2

(1) ① $\phi, S^1 \in \mathcal{O}$ は明らか。

② $\forall U, V \in \mathcal{O}$ に対して、

Ⓐ $U, V$ の少なくとも一方が $\phi, S^1$ の時は明らかに $U \cap V \in \mathcal{O}$

Ⓑ $U, V \ (\neq \phi, S^1)$ のとき、

$(U \cap V)^c = U^c \cup V^c$ は有限集合なので、$U \cap V \in \mathcal{O}$

③ $\forall O_\lambda \in \mathcal{O} \ (\lambda \in \Lambda)$ に対して、

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda = \begin{cases} \phi & \text{if } \forall \lambda \in \Lambda, O_\lambda = \phi \\ S^1 & \text{if } \exists \lambda \in \Lambda, O_\lambda = S^1 \\ & \text{otherwise} \end{cases}$$

それ以外の場合は、

$$\exists \Sigma \subset \Lambda, \ \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda = \bigcup_{\lambda \in \Sigma} O_\lambda \ (O_\lambda \neq \phi, \lambda \in \Sigma)$$

すると、$\forall \lambda \in \Sigma$, $(O_\lambda)^c$ は有限集合なので、

$$\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda\right)^c = \bigcap_{\lambda \in \Sigma} O_\lambda^c \text{ も有限集合}$$

従って、全ての場合で、$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \in \mathcal{O}$

(2)

$\forall U, V \in \mathcal{O} (\neq \phi, S^1)$ に対して、

$U \cap V = \phi$ と仮定すると、$U^c \cup V^c = S^1$ となり濃度に関して矛盾.

従って、互いに素な開集合が異なる二元を分離するようにとれないので、ハウスドルフ空間でない。

(3)

互いに素な非空な開集合で $X$ を分離できないので、非連結の定義を満たさないので、連結。

(4)

任意の $S^1$ の被覆 $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda$ に対して、

$\exists \lambda_0 \in \Lambda, (1,0) \in O_{\lambda_0}$ ($O_{\lambda_0} \neq S^1$ としても一般性を失わない)

$\exists x_1, x_2, \cdots x_n \in S^1$ s.t. $x_i \neq (1,0)$ かつ $O_{\lambda_0}^c = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$

$x_1, x_2, \cdots, x_n \in$ 被覆より、$\exists \lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \Lambda$ s.t. $x_1 \in O_{\lambda_1}, \cdots, x_n \in O_{\lambda_n}$

従って、$S^1 = \bigcup_{i=0}^{n} O_{\lambda_i}$ となりコンパクト