H20-8

(1)

$$P(X \le x) = P(F^{-1}(U) \le x) \underset{\uparrow}{=} P(U \le F(x)) \overset{0 \le F(x) \le 1}{\underset{\downarrow}{=}} F(x)$$

逆関数を持つので全単射

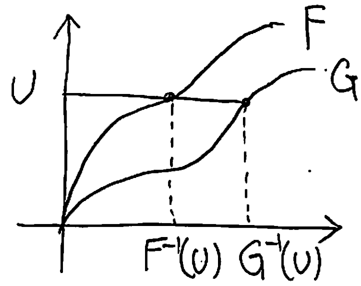
(2)

(A) $\Rightarrow$ (B)

$X = F^{-1}(U)$, $Y = G^{-1}(U)$ とすると、それぞれ F と G に従う確率変数となる。

さらに、

$$P(X \le Y) = P(F^{-1}(U) \le G^{-1}(U))$$
$$= P(\{\omega \in \Omega ; F^{-1}(U(\omega)) \le G^{-1}(U(\omega))\})$$
$$= P(\{\omega \in \Omega ; \text{常に成立}\}) \quad (\because (A))$$
$$= 1$$



(B) $\Rightarrow$ (C)

$X \le Y \Rightarrow f(X) \le f(Y)$ より、 ($\because f$ の仮定)

$P(f(X) \le f(Y)) = 1$ より、 ($\because$ (B))

$f(X) \le f(Y)$ が零集合を除いて成立しているので、積分の単調性より、

$$E(f(X)) \le E(f(Y))$$

(C) $\Rightarrow$ (A)

$f(x) = 1_{\{x > a\}}$ ととると、$f \uparrow$

$$E(f(X)) \le E(f(Y))$$
$$E(1_{\{X > a\}}) \le E(1_{\{Y > a\}})$$
$$P(X > a) \le P(Y > a)$$
$$G(a) \le F(a)$$