H14問6

(1)

$$\hat{u}(\xi,t)=\int_{-\infty}^{\infty}u(x,t)e^{-i\xi x}dx$$

tで微分すると、

$$\hat{u}_t(\xi,t)=\int_{-\infty}^{\infty}u_{xx}e^{-i\xi x}dx \qquad (\because u_t=u_{xx})$$

$$=\left[u_x e^{-i\xi x}\right]_{-\infty}^{\infty}+i\xi\int_{-\infty}^{\infty}u_x e^{-i\xi x}dx$$

$$=i\xi\left[ue^{-i\xi x}\right]_{-\infty}^{\infty}+(i\xi)^2\int_{-\infty}^{\infty}ue^{-i\xi x}dx \qquad (\because {}^{\forall}t>0,\ \underset{(u_x)}{u(t,x)}\xrightarrow{x\to\pm\infty}0 \text{ としてよい})$$

$$=-\xi^2\hat{u}(\xi,t)$$

従って、ξに依存する積分定数$\varphi(\xi)$を用いて、

$$\hat{u}(\xi,t)=\varphi(\xi)e^{-\xi^2 t}$$

$$\hat{u}(\xi,0)=\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\frac{1}{2}(x+i\xi)^2-\frac{\xi^2}{2}\right\}dx=\sqrt{2\pi}e^{-\frac{\xi^2}{2}}=\varphi(\xi)$$

これより、

$$\hat{u}(\xi,t)=\sqrt{2\pi}e^{-\left(\frac{1}{2}+t\right)\xi^2}$$

(2)

フーリエの逆変換をすると、

$$u(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{u}(\xi,t)e^{i\xi x}d\xi$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\left(\frac{1}{2}+t\right)\left(\xi-\frac{ix}{1+2t}\right)^2-\frac{x^2}{2(1+2t)}\right\}d\xi$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+2t}}e^{-\frac{x^2}{2(1+2t)}} \qquad \left(\because \int_{-\infty}^{\infty}e^{-a(x-b)^2}dx=\sqrt{\frac{\pi}{a}}\right)$$

従って、

$$\int_{-\infty}^{\infty}u(x,t)^2dx=\frac{1}{2t+1}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\frac{x^2}{2t+1}\right\}dx$$

$$=\sqrt{\frac{\pi}{2t+1}}$$