H15問2

$$I_n(t)=\int_0^\infty e^{-tx}\sin(nx)\,dx$$

(1)

$$I_n(t)=\int_0^\infty\left(-\frac{1}{t}e^{-tx}\right)'\sin(nx)\,dx=\left[-\frac{1}{t}e^{-tx}\sin(nx)\right]_0^\infty-\int_0^\infty\left(-\frac{1}{t}e^{-tx}\right)\cdot n\cdot\cos(nx)\,dx$$

$$=0-0+\frac{n}{t}\int_0^\infty e^{-tx}\cos(nx)\,dx=\frac{n}{t}\int_0^\infty\left(-\frac{1}{t}e^{-tx}\right)'\cos(nx)\,dx$$

$$=\frac{n}{t}\left[-\frac{1}{t}e^{-tx}\cos(nx)\right]_0^\infty-\frac{n}{t}\int_0^\infty\left(-\frac{1}{t}e^{-tx}\right)\cdot(-n)\sin(nx)\,dx$$

$$=0-\frac{n}{t}\left(-\frac{1}{t}\cdot e^0\cdot\cos(0)\right)-\left(\frac{n}{t}\right)^2\int_0^\infty e^{-tx}\sin(nx)\,dx$$

$$=\frac{n}{t^2}-\left(\frac{n}{t}\right)^2 I_n(t)$$

$\cdot\ I_n(t)\left\{1+\left(\frac{n}{t}\right)^2\right\}=\frac{n}{t^2}$, $I_n(t)\{t^2+n^2\}=n$, $\underline{I_n(t)=\dfrac{n}{t^2+n^2}}$ //

(2)

$I_n(t)\to 0\ (n\to\infty)$ と各点収束。

一様収束するとしたら、0へ収束する。

$$\sup_{t>0}|I_n(t)-0|=\sup\left(\frac{n}{t^2+n^2}\right)\leqq\frac{n}{n^2}\to 0\quad(n\to\infty)$$

従って $I_n(t)\xrightarrow{\text{uniform}}0\quad(n\to\infty)$