H15問6

(1) $\xi = x + t$, $\eta = x - t$ で変数変換する。

$x = \frac{\xi+\eta}{2}$, $t = \frac{\xi-\eta}{2}$

$u_\xi = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial \xi} = \frac{1}{2}(u_x + u_t)$

$u_{\xi\eta} = \frac{\partial u_\xi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial u_\xi}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial \eta} = \frac{1}{4}(u_{xx} + u_{tx} - u_{xt} - u_{tt}) = 0$

これより、ξの関数hを用いて、

$u_\xi = h(\xi)$

さらにξで積分して、ηの関数ψを用いて、

$$u = \underbrace{\int h(\xi)\,d\xi}_{\varphi(\xi)\text{とおく。}} + \psi(\eta)$$

初期条件より、 $\varphi(x) + \psi(x) = F(x)$, $\varphi'(x) - \psi'(x) = G(x)$

$\varphi(x) - \psi(x) = \int G(x)dx + C$ （C：任意定数）

従って、

$\varphi(x) = \frac{1}{2}\left(F(x) + \int G(x)dx + C\right)$

$\psi(x) = \frac{1}{2}\left(F(x) - \int G(x)dx - C\right)$

$u(t,x) = \varphi(x+t) + \psi(x-t)$

積分の区間を$\int_0^x$としても一般性を失わない。

$$u(t,x) = \frac{1}{2}\left(F(x+t) + F(x-t)\right) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} G(s)\,ds$$

(2) $u(t,x) = e^{-t}U(t,x)$とおく。

$u_t = e^{-t}(-U + U_t)$　　$u_{tt} = e^{-t}(U - 2U_t + U_{tt})$ より、

$u_{tt} + 2u_t + u = e^{-t}U_{xx} = u_{xx}$

$U(0,x) = f(x)$, $U_t(0,x) = f(x) + g(x)$

となっており、Uはこの初期条件で(1)を満たす。

$|f(x)| \le M_1$, $|g(x)| \le M_2$ ($x \in \mathbb{R}$) と有界ならば、

$$|u(t,x)| = \left|\frac{e^{-t}}{2}\left(f(x+t) + f(x-t)\right) + \frac{e^{-t}}{2}\int_{x-t}^{x+t}\left(f(s) + g(s)\right)ds\right|$$

$$\le \frac{e^{-t}}{2}\left(M_1 + M_1 + 2t(M_1 + M_2)\right) \longrightarrow 0 \ (t \to \infty)$$

従って、$u(t,x) \longrightarrow 0$ $(t \to \infty)$