H23-8

(1) $\begin{cases} W = X \\ Z = X - Y \end{cases}$ で変数変換する。 $\begin{cases} X = W \\ Y = W - Z \end{cases}$

$$f_{W,Z}(w,z) = f_{X,Y}(w, w-z)\,\mathrm{Abs}\left(\begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial W} & \frac{\partial X}{\partial Z} \\ \frac{\partial Y}{\partial W} & \frac{\partial Y}{\partial Z} \end{vmatrix}\right) = f(w)f(w-z)$$

従って、

$$g(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{W,Z}(w,z)\,dw = \int_{-\infty}^{\infty} f(w)f(w-z)\,dw = \int_{-\infty}^{\infty} f(z+y)f(y)\,dy$$

$$g(-z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y-z)f(y)\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)f(x+z)\,dx = g(z)$$

(2)

$$\mathrm{Cov}(Z, Z^2) = E(Z^3) - E(Z)E(Z^2)$$

$$= \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} z^3 g(z)\,dz}_{(奇)} - \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} z g(z)\,dz}_{(奇)} \times \int_{-\infty}^{\infty} z^2 g(z)\,dz$$

$$= 0$$

(3)
独立と仮定すると、$\forall z > 0$に対して、

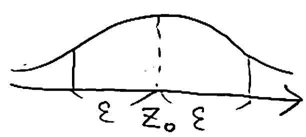
$$P(-z < Z < z)P(Z^2 > z^2) = P(-z < Z < z \text{ かつ } Z^2 > z^2)$$

より、

$$\cancel{2}\int_0^z g(z)\,dz \cdot \cancel{2}\int_z^{\infty} g(z)\,dz = 0 \quad \text{—} \ (*)$$

$\int_0^{\infty} g(z) = \frac{1}{2}$ より、$\exists z_0 > 0,\ g(z_0) > 0$

gの連続性より、$\exists \varepsilon > 0,\ |z_0 - z| \leq \varepsilon \Rightarrow g(z) > 0$



従って、(*)で $z = z_0$ とすると、

$$(\text{左辺}) \geq \int_{z_0-\varepsilon}^{z_0} g(z)\,dz \cdot \int_{z_0}^{z_0+\varepsilon} g(z)\,dz > 0$$ より矛盾する。