H26 問5

(1) まず、$\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty}\frac{|x_i-y_i|}{2^i} \leq \sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{2^i} < +\infty$ を断わっておく。

(i) 非負性

$|x_i - y_i| \geq 0$ より明らか

(ii) 同一律

$$d(x,y)=0 \iff \sum_{i=0}^{\infty}\frac{|x_i-y_i|}{2^i}=0 \iff \frac{|x_i-y_i|}{2^i}=0 \ (^{\forall}i\in\mathbb{N}) \iff |x_i-y_i|=0 \ (^{\forall}i\in\mathbb{N})$$

$$\iff x_i=y_i \ (^{\forall}i\in\mathbb{N}) \iff x=y$$

(iii) 対称律

$|x_i-y_i| = |y_i-x_i|$ より明らか。

(iv) 三角不等式(劣加法性)

$$d(x,z)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{|x_i-z_i|}{2^i}=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{|x_i-y_i+y_i-z_i|}{2^i} \leq \sum_{i=0}^{\infty}\frac{|x_i-y_i|+|y_i-z_i|}{2^i} = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{|x_i-y_i|}{2^i}+\sum_{i=0}^{\infty}\frac{|y_i-z_i|}{2^i}$$

$$= d(x,y)+d(y,z)$$ ■

(2)

$$d(x,y)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{|x_i-y_i|}{2^i} = \frac{|x_0-y_0|}{2^0}+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{|x_i-y_i|}{2^i} \geq d(f(x),f(y))$$

より、リプシッツ連続。従って連続 ■

(3) $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ を、$y_n \triangleq [x_0,\cdots,x_{n-1}$ を繰り返す$] = (x_0,\cdots,x_{n-1},x_0,\cdots,x_{n-1},\cdots)$ とすると、
$f^n(y_n)=y_n$ より、y_n は周期点。

~~$\displaystyle d(x,y_n)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{|x_i-y_{n,i}|}{2^i} \leq \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{|x_i-y_{n,i}|}{2^i} \leq \sum_{j=0}^{\infty}$~~

X 最初の周期を何回も足したほうが大きい。 → $x_i = y_{n,i}$ になってる。

$$d(x,y_n)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{|x_i-y_{n,i}|}{2^i} = \underbrace{\sum_{i=0}^{n-1}\frac{|x_i-y_{n,i}|}{2^i}}_{=0}+\sum_{i=n}^{\infty}\frac{|x_i-y_{n,i}|}{2^i} = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{|x_i-y_{n,i}|}{2^i}-\sum_{i=0}^{n-1}\frac{|x_i-y_{n,i}|}{2^i}$$

$$\to 0 \quad \left(\because \sum_{i=0}^{\infty}\text{〃} < +\infty\right)$$ ■