

H29問2

(1)

① $\emptyset, S \in \mathcal{Q}$

② $\forall U, V \in \mathcal{Q} (U \neq V)$ に対して、

U, V の少なくとも一方が \emptyset または S の時、 $U \cap V \in \mathcal{Q}$ は明らか。

それ以外の $4C_{23}$ 通りに対して、

$$\{a\} \cap \{c\} = \emptyset$$

$$\{a\} \cap \{a, c\} = \{a\}$$

$$\{a\} \cap \{b, c, d\} = \emptyset$$

$$\{c\} \cap \{a, c\} = \{c\}$$

$$\{c\} \cap \{b, c, d\} = \{c\}$$

$$\{a, c\} \cap \{b, c, d\} = \{c\}$$

— (*)

(*) の右辺はそれぞれ \mathcal{Q} の元である。

③ S が有限集合なので、 $\forall U, V \in \mathcal{Q} (U \neq V)$, $U \cup V \in \mathcal{Q}$ を示せば良い。

U, V の少なくとも一方が \emptyset または S の時明らかである。

それ以外の場合は、(*) の左辺を \cup にしたときの右辺が、 $\{a, c\}, \{a, c\}, S, \{a, c\}, \{b, c, d\}, S$ となり、全て \mathcal{Q} に属する。

① ~ ③ より 開集合系の定義を満たす。

(2)

S の閉集合系は、 $\{S, \{b, c, d\}, \{a, b, d\}, \{b, d\}, \{a\}, \emptyset\}$

$$\overline{\{b\}} = (\text{bを含む最小の開集合}) = \{b, d\}$$

(3)

$b, c \in S$ は、それぞれを含む互いに素な開集合で分離できないので、ハウスドルフ空間の定義を満たさない。