H14問4

(1)

$a=(a_n)_{n=1}^{\infty}\in l^1$ とすると、

$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|<+\infty$ —①

①より、$\lim_{n\to\infty}a_n=0$ —②

②より、$^{\exists}N\in\mathbb{N},\ n\geq N\Rightarrow|a_n|<1$　このとき、$|a_n|^2\leq|a_n|<1$ なので、

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2=\sum_{n=1}^{N-1}|a_n|^2+\sum_{n=N}^{\infty}|a_n|^2\leq\sum_{n=1}^{N-1}|a_n|^2+\sum_{n=N}^{\infty}|a_n|\leq\sum_{n=1}^{N-1}|a_n|^2+\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|<+\infty$$

$\therefore a\in l^2$

(2)

$\lim_{n\to\infty}a_n\in l^1$ が言えちゃっている。

$a_n=(a_{n,i})_{i=1}^{\infty}\in l^1$ の点列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ で、　$\sum_{i=1}^{\infty}|a_{n,i}|<+\infty\ (n\in\mathbb{N})$ で、

$\sum_{i=1}^{\infty}|a_{n,i}-a_{m,i}|^2\to 0\quad(n,m\to\infty)$ で、

$\sum_{i=1}^{\infty}|a_{n,i}-a_{m,i}|\to\infty\ (n,m\to\infty)$

となるものは、

$a^1=(1,\frac{1}{2},0,\cdots)$,　$a_i^n\triangleq(\frac{1}{2})^i\ (i\leq n+1)$

$a^2=(1,\frac{1}{2},\frac{1}{4},0,\cdots)$　$a_i^n\triangleq 0\quad(i>n+1)$

$\sum_{i=1}^{\infty}|a_i^n|=\sum_{i=1}^{n+1}(\frac{1}{2})^i<+\infty$.　$\sum_{i=1}^{\infty}|a_{n,i}-a_{m,i}|^2=\sum_{i=n}^{m}(\frac{1}{2})^i=\sum^{\infty}(\frac{1}{2})^i-\sum(\frac{1}{2})^i$

・$a^n=(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n},0,0,\cdots)$, $\sum_{i=1}^{\infty}|a_i^n|=\sum_{i=1}^{n}|\frac{1}{n}|<+\infty$

・$\sum_{i=1}^{\infty}|a_{n,i}-a_{m,i}|=\sum_{i=n}^{m}|\frac{1}{i}|=\sum^{\infty}\frac{1}{i}-\sum^{\infty}\frac{1}{i}$ は発散。

・$\sum_{i=1}^{\infty}|a_{n,i}-a_{m,i}|^2=\sum_{i=n}^{m}\frac{1}{i^2}=\sum^{\infty}\frac{1}{i^2}-\sum^{\infty}\frac{1}{i^2}<+\infty$

(3) (1)(2)より、(2)で求めた点列を $\{a_n\}\subset l^1$ とすると、$\{a_n\}\subset l^2$ である。

$(l^1,d_1)(l^2,d_2)$ は完備距離空間なので、$\{a_n\}$ は (l^2,d_2) で収束列となるが、

(l^1,d_1) で $\{a_n\}$ はコーシー列でない $\Leftrightarrow$ (l^1,d_1) で $\{a_n\}$ は収束列でない。

→開が細かい → 開の数が多い → 開 〃 → 位相が強い。