H24-7

2つの無関係な部分問題に帰着する。

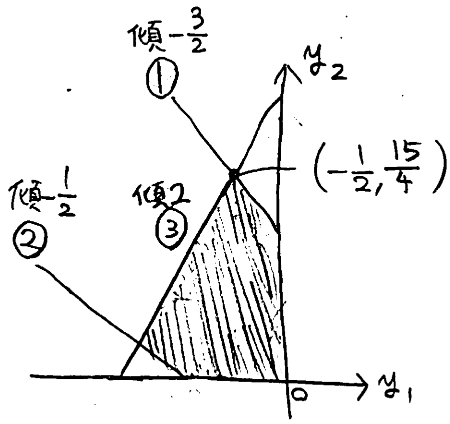
$$\text{(P1)}\quad \begin{aligned} &\text{minimize} && \tfrac{1}{3}x_1 - x_2 - \tfrac{5}{12}x_3 \\ &\text{s.t.} && -x_1 - x_2 - \tfrac{1}{3}x_3 \geq -\tfrac{1}{5} \\ &&& x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\text{(P2)}\quad \begin{aligned} &\text{minimize} && \max(y_1 - y_2,\ 3y_1 - 2y_2) \\ &\text{s.t.} && \tfrac{3}{2}y_1 + y_2 \leq 3 \quad \text{— ①} \\ &&& \tfrac{1}{2}y_1 + y_2 \geq -1 \quad \text{— ②} \\ &&& -2y_1 + y_2 \leq \tfrac{19}{4} \quad \text{— ③} \\ &&& y_1 \leq 0 \\ &&& y_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\text{(D1)}\quad \begin{aligned} &\text{maximize} && -\tfrac{1}{5}y_1 \\ &\text{s.t.} && -y_1 \leq \tfrac{1}{3} \\ &&& -y_1 \leq -1 \\ &&& -\tfrac{1}{3}y_1 \leq -\tfrac{5}{12} \\ &&& y_1 \geq 0 \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad y_1^* = \tfrac{5}{4},\ \max -\tfrac{1}{4}$$

相補性定理より、(P1)の最適値 $-\frac{1}{4}$, $(0, 0, \frac{3}{5})$
(と双対定理)

(P2)を図で解く。



$\max(y_1 - y_2, 3y_1 - 2y_2) = K$ とおく。

- $y_1 - y_2 \geq 3y_1 - 2y_2$ のとき、($y_2 \geq 2y_1$)
  $K = y_1 - y_2$ より、Kのminimizeは
  直線 $y_2 = y_1 - K$ の切片のmaximize
  従って、①,②の交点で達成し、$K^* = -\frac{17}{4}$
- $y_1 - y_2 \leq 3y_1 - 2y_2$ のとき、($y_2 \leq 2y_1$)
  $(y_1, y_2) = (0, 0)$ しかないので、$K^* = 3y_1^* - 2y_2^* = 0$
- 従って、(P2) $K^* = -\frac{17}{4}$, $(-\frac{1}{2}, \frac{15}{4})$
- 従って、元の問題は、最適値 $-\frac{1}{4} - \frac{17}{4} = -\frac{9}{2}$, $(x_1^*, x_2^*, x_3^*, y_1^*, y_2^*) = (0, 0, \frac{3}{5}, -\frac{1}{2}, \frac{15}{4})$