H14問2

(1)

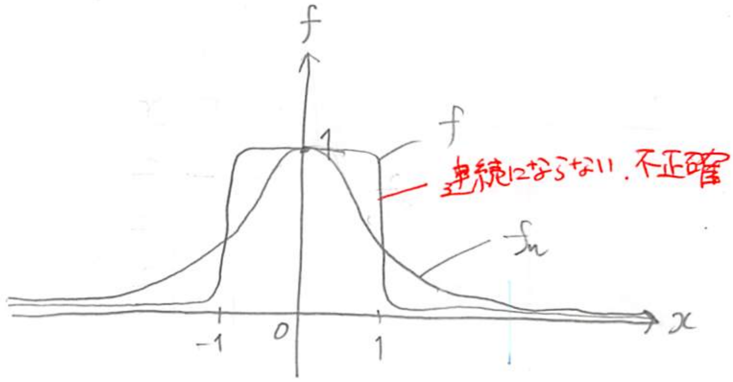
$$f(x) = \lim_{n\to\infty} e^{-x^{2n}} = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

$$f_n(x) = e^{-x^{2n}}\ (>0) \qquad f_n(0) = 1$$

$$f_n'(x) = -2n x^{2n-1} e^{-x^{2n}}$$

$$\lim_{x\to\infty} f_n(x) = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} f_n(x) = \lim_{x\to-\infty} e^{-(x^2)^n} = 0$$



$$\lim_{n\to\infty} x^{2n} = \begin{cases} 0 \\ 1 \\ \infty \end{cases}$$ から考える.

$f_n'(x) = 0$ とすると、

$$-2n x^{2n-1} e^{-x^{2n}} = 0$$

$$x^{2n-1} e^{-x^{2n}} = 0 \quad (\because -2n \neq 0)$$

$$x^{2n-1} = 0 \quad (\because e^{-x^{2n}} > 0)$$

$$\therefore x = 0$$

$f_n(-x) = e^{-(-x)^{2n}} = e^{-x^{2n}} = f_n(x)$ より、$f_n(x)$ は偶関数.

$$f_n''(x) = -2n\left\{(2n-1)x^{2n-2}e^{-x^{2n}} - 2n x^{2n-1} x^{2n-1} e^{-x^{2n}}\right\}$$

$$f_n''(x) = 0 \Rightarrow (2n-1)x^{2n-2} = 2n x^{2n-1}\cdot x^{2n-1} \Rightarrow x = 0 \text{ or } (2n-1)x^{-1} = 2n x^{2n-1}$$

$$\frac{2n-1}{2n} = x^{2n}$$

$$x = \pm\left(\frac{2n-1}{2n}\right)^{\frac{1}{2n}}$$

変曲点 $\left(\frac{2n-1}{2n}\right)^{\frac{1}{2n}} = \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^{\frac{1}{2n}} \longrightarrow (1-0)^0 = 1 \ (n\to\infty)$

$0 < x < 1$ のとき、$f(x) = e^0 = 1$

$1 < x$ のとき、$f(x) = 0$

以上から右上図のようなグラフになる。

(2)

$f_n(x)$ は偶関数なので、

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} 2\int_0^{\infty} f_n(x)\,dx = 2\lim_{n\to\infty}\left\{\int_0^{1-\varepsilon} f_n(x)\,dx + \int_{1-\varepsilon}^{1+\varepsilon} f_n(x)\,dx + \int_{1+\varepsilon}^{\infty} f_n(x)\,dx\right\} \quad (*) \quad (1 \gg \varepsilon > 0)$$

・$0 \le x \le 1-\varepsilon$ のとき、

$$\sup_x |1 - f_n(x)| = \sup_x |1 - e^{-x^{2n}}| = 1 - e^{(1-\varepsilon)^{2n}} \longrightarrow 1 - e^0 = 0 \ (n\to\infty) \quad (\because 1-\varepsilon < 1)$$

・$1+\varepsilon \le x$ のとき

$$\sup_x |0 - f_n(x)| = \sup_x e^{-x^{2n}} = e^{-(1+\varepsilon)^{2n}} \longrightarrow 0 \ (n\to\infty) \quad (\because 1+\varepsilon > 1)$$

より、それぞれの区間で一様収束なので、limitと積分の交換ができる。同時に $\varepsilon \to 0$ とすると、

$$(*) = 2\left\{\int_0^{1-\varepsilon} 1\,dx + \lim\int_{1-\varepsilon}^{1+\varepsilon} f_n(x)\,dx + \int_{1+\varepsilon}^{\infty} 0\,dx\right\} = 2(1-\varepsilon) + \lim_{n\to\infty}\int_{1-\varepsilon}^{1+\varepsilon} f_n(x)\,dx$$

$$= 2(1-\varepsilon) + \lim_{n\to\infty}\left(F_n(1+\varepsilon) - F_n(1-\varepsilon)\right)$$

$\varepsilon \to 0$ と $n \to \infty$ の交換はできる?