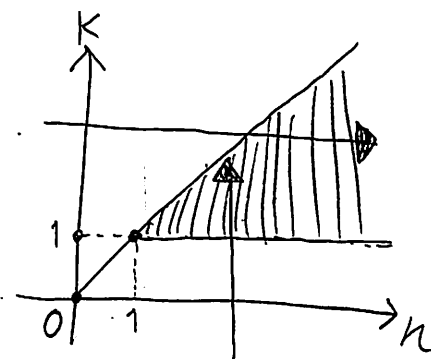


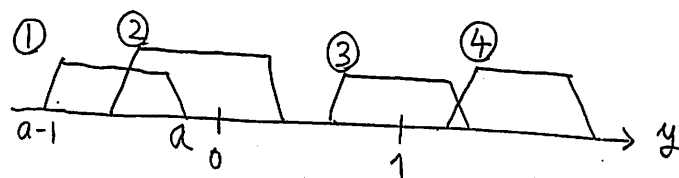
H30-5

$$\begin{aligned}
 (1) \quad E(N) &= \sum_{n=0}^{\infty} n P(N=n) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^n P(N=n) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} P(N=n) \\
 &\quad \uparrow \text{水増し} \\
 &= \sum_{k=1}^{\infty} P(N \geq k) = \sum_{k=0}^{\infty} P(N > k)
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 (2) \quad P(X_1 + X_2 \leq a) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1}(a-y) f_{X_2}(y) dy \\
 &= \begin{cases} 0 & (a \leq 0) \\ \int_0^a dy = a & (0 \leq a \leq 1) \\ \int_{a-1}^1 dy = 2-a & (1 \leq a \leq 2) \\ 0 & (2 \leq a) \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &f_{X_1}, f_{X_2} > 0 \text{ の範囲は、} \\
 &\begin{cases} 0 \leq a-y \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} a-1 \leq y \leq a \\ 0 \leq y \leq 1 \end{cases}
 \end{aligned}$$



(3) n に関する帰納法で示す。

- $n=1, 2$ のときは、 $X_1 \sim \text{Uniform}(0, 1)$, (2) より明らかに成立。
- $n=k$ のとき与式を仮定する。

$$\begin{aligned}
 P((X_1 + \dots + X_n) + X_{n+1} \leq a) &= \int_0^a \frac{(a-y)^n}{n!} \cdot 1 dy \quad (\text{ただし } a \geq 0) \\
 &= \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} \quad \text{よって } n+1 \text{ でも成立。}
 \end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}
 E(N) &= \sum_{n=0}^{\infty} P(N > n) \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} P(X_1 + X_2 + \dots + X_n \leq 1) \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1^n}{n!} \\
 &= e
 \end{aligned}$$