H18-2

(1)

$f(-x)=f(x)$ より f は偶関数なので $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) \iff \lim_{x\to +0} f(x) = f(0)$

$$\lim_{x\to +0} f(x) = \frac{\sin x^{\alpha}}{x^{\alpha}} x^{\alpha-\beta}$$

$\lim_{x\to +0} \frac{\sin x^{\alpha}}{x^{\alpha}} = 1$ であり、 $\lim_{x\to +0} x^{\alpha-\beta} = 0 \iff \alpha-\beta>0$

以上より、

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 \iff \alpha-\beta>0$$

(2)

$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h)}{h}$ が存在する。$\iff \lim_{h\to +0} \frac{f(h)}{h} = \lim_{h\to -0} \frac{f(h)}{h}$ を調べる。

$$\lim_{h\to +0} \frac{f(h)}{h} = \lim_{h\to +0} \frac{\sin(h^{\alpha})}{h^{\alpha}} \cdot h^{\alpha-\beta-1} = \begin{cases} 0 & (\alpha-\beta-1>0) \\ 1 & (\alpha-\beta-1=0) \\ \text{存在しない} & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

$$\lim_{h\to -0} \frac{f(h)}{h} = \lim_{h\to -0} \frac{1}{h} \cdot \frac{\sin(-h)^{\alpha}}{(-h)^{\alpha}\cdot(-h)^{\beta-\alpha}} = \lim_{h\to -0} \frac{\sin(-h)^{\alpha}}{(-h)^{\alpha}} \cdot (-h)^{1-\beta+\alpha} = \begin{cases} 0 & (1-\beta+\alpha>0) \\ 1 & (1-\beta+\alpha=0) \\ \text{発散} & \text{o.w.} \end{cases}$$

左・右極限が、

① 0で一致する時、 $\alpha-\beta>1$

② 1で一致する時、 $\alpha-\beta=1 \wedge \alpha-\beta=-1$ よりありえない。

従って、求める条件は $\alpha-\beta>1$

注：$y=|x|$ のように、微分可能については、偶関数でも $\frac{|h|}{h} \to \pm 1$ で一致するとは限らない。