問7H25

(1)

（各輸送量を最小の変数の数で表す）

x_1をA→Cの量とすると、
B→Cは、$3-x_1$

同様に、

	C	D	E	F
A	x_1	x_2	x_3	$14-(x_1+x_2+x_3)$
B	$3-x_1$	$6-x_2$	$10-x_3$	$-9+x_1+x_2+x_3$

（B→Fは、$10-\{(3-x_1)+(6-x_2)+(10-x_3)\}=-9+x_1+x_2+x_3$ とした）

全体の輸送コストは、
$$5x_1+8x_2+7x_3+6\{14-(x_1+x_2+x_3)\}$$
$$+7(3-x_1)+6(6-x_2)+9(10-x_3)+7\{-9+x_1+x_2+x_3\}$$
$$=(84+21+36+90-63)+(5-6-7+7)x_1$$
$$+(8-6-6+7)x_2$$
$$+(7-6-9+7)x_3$$

21　42　73　168

7α

$$=168-x_1+3x_2-x_3$$

また制約は、輸送量の非負性であり、
$$x_1,x_2,x_3\geq 0,\ 14\geq x_1+x_2+x_3,\ x_1\leq 3,\ x_2\leq 6,\ x_3\leq 10,\ x_1+x_2+x_3\geq 9$$
より、

$$\text{(P)}\quad \begin{array}{ll} \text{minimize} & 168-x_1+3x_2-x_3 \\ \text{s.t.} & x_1\leq 3 \\ & x_2\leq 6 \\ & x_3\leq 10 \\ & x_1+x_2+x_3\leq 14 \\ & -x_1-x_2-x_3\leq -9 \\ & x_1,x_2,x_3\geq 0 \end{array}$$

(2)

(P)を max $-168+x_1-3x_2+x_3$ としてシンプレックス法を用いる。

辞書化、
$$z=-168+x_1-3x_2+x_3$$
$$x_4=3-x_1$$
$$x_5=6-x_2$$
$$x_6=10-x_3$$
$$x_7=14-x_1-x_2-x_3$$
$$x_8=-9+x_1+x_2+x_3$$

実行不可能だが、$x_6\leftrightarrow x_3$ とすると、

注 $x_7\leftrightarrow$ とすると x_4,x_5などが−になる。

$$\begin{cases} x_3=10-x_6 \\ z=-168+x_1-3x_2+(10-x_6)=-158+x_1-3x_2-x_6 \\ x_4=3-x_1 \\ x_5=6-x_2 \\ x_7=14-x_1-x_2-(10-x_6)=4-x_1-x_2-x_6 \end{cases}$$

$x_1 \longleftrightarrow x_4$

$x_1 = 3 - x_4$

$z = -155 - x_4 - 3x_2 - x_6$

この時点で、max -155，$(x_4^*, x_2^*, x_6^*) = (0,0,0) \longrightarrow x_1^* = 3,\ x_5^* = 6,\ x_3^* = 10$

∴最適値 155 $(x_1^*, x_2^*, x_3^*) = (3, 0, 10)$

(3)

新たな条件化でのLPを(P_α)とする。 maxにしたほう。

	C	D	E	F	
A	x_1	x_2	x_3	$14 - x_1 - x_2 - x_3$	
B	$3+\alpha - x_1$	$6 - x_2$	$10 - x_3$	-9	$+x_1+x_2+x_3$

$$\left(\begin{aligned} &B \to F\text{は、}(10+\alpha) - \{(3+\alpha - x_1) + (6 - x_2) + (10 - x_3)\} \\ &= -9 + \cancel{\alpha} + x_1 + x_2 + x_3 \end{aligned} \right)$$

全体の輸送コストは、

$7\alpha + 168 - x_1 + 3x_2 - x_3$

$C^T x$ではない。

$$(P_\alpha)\quad \begin{aligned} \max\ & \underbrace{-7\alpha - 168}\ + x_1 - 3x_2 + x_3 \\ \text{s.t.}\ & x_1 \le \underbrace{3+\alpha} \\ & x_2 \le 6 \\ & x_3 \le 10 \\ & x_1 + x_2 + x_3 \le 14 \\ & -x_1 - x_2 - x_3 \le -9 \\ & x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{aligned}$$

ここがポイント

$$(D_\alpha)\quad \begin{aligned} \min\ & 3y_1 + 6y_2 + 10y_3 + 14y_4 - 9y_5 \\ \text{s.t.}\ & y_1 + 1y_4 - 1y_5 \ge \\ & y_2 + 1y_4 - y_5 \\ & y_3 + y_4 - y_5 \end{aligned}$$

・B→Cの非負条件が変わり、$3+\alpha \ge x_1$となる。

題意は、基底変数が変わらないことと同じだから、

(P_α)で(x_1^*, x_2^*, x_3^*)を代入した時に制約が保たれれば良い。

従って、 $x_1^* \le 3+\alpha \iff 0 \le \alpha$?

×

・行列シンプレックス表示で

$$\begin{aligned} \max\ & C_B^T x_B + C_N^T x_N \\ \text{s.t.}\ & B x_B + N x_N = b \end{aligned} \longrightarrow \begin{aligned} & C_B^T B^{-1} b - C_B^T B^{-1} N x_N + C_N^T x_N \\ & \underline{x_B = B^{-1} b - B^{-1} N x_N} \end{aligned}$$

で実行可能のままであればよいので、

1 3 5

$$B^{-1} b \ge 0 \iff B^{-1}\begin{pmatrix} 3+\alpha \\ 〃 \\ 〃 \end{pmatrix} \ge 0 \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3+\alpha \\ * \\ \vdots \end{pmatrix} \ge 0$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 6 & \frac{1}{2} & \\ 0 & * & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3+\alpha \\ 6 \\ 10 \\ + \end{pmatrix} \ge 0 \iff$$

×