H16問9

(1)

~~$P(Y=1)=P(Y=1|X=0)+P(Y=1|X=1)=$~~

$P(Y=1)=P($Sが表でその人が使用あり$)+P($Sが裏で、Tが表$)$

$=\frac{1}{2}\cdot P+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{P}{2}+\frac{1}{4}$ //

(2)

なぜこのまま計算しづらいのか?

$P(X=1|Y=1)=\frac{P(X=1,Y=1)}{P(Y=1)}=\frac{P(Y=1|X=1)P(X=1)}{P(Y=1)}=\frac{(\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2})\cdot P}{\frac{P}{2}+\frac{1}{4}}$

$=\frac{2P+P}{2P+1}=\frac{3P}{2P+1}$ 」

$P(X=0|Y=1)=1-P(X=1|Y=1)=\frac{(2P+1)-(2P+P)}{2P+1}=\frac{1-P}{2P+1}$ 」

$P(X=\cancel{1}|Y=0)=\frac{P(X=1,Y=0)}{P(Y=0)}=\frac{P(Y=0|X=1)P(X=1)}{P(Y=0)}=\frac{(\frac{1}{2}\cdot 0+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2})P}{\frac{P}{2}+\frac{1}{4}}=\frac{P}{2P+1}$

× $P(Y=1)$

$P(X=0|Y=0)=1-P(X=1|Y=0)=\frac{P+1}{2P+1}$ //

$P(X=1|Y=1)-P(X=0|Y=1)=\frac{3P}{2P+1}-\frac{1-P}{2P+1}=\frac{4P-1}{2P+1}\geq 0 \iff P\geq\frac{1}{4}$

$\therefore P\geq\frac{1}{4}$ ならば、真の回答が1である確率のほうが高い。

$>$

$P(Y=0)=1-P(Y=1)=\frac{3}{4}-\frac{P}{2}$ より、

$P(X=1|Y=0)=\frac{\frac{1}{4}P}{\frac{3}{4}-\frac{P}{2}}=\frac{P}{3-2P}$, $P(X=0|Y=0)=\frac{3-3P}{3-2P}$

(3) $E(\bar{Y})=E(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Y_i)=\frac{1}{n}\sum E(Y_i)=E(Y_1)=0\cdot\cdots+1\cdot(\frac{P}{2}+\frac{1}{4})=\frac{P}{2}+\frac{1}{4}$

より、$E(\bar{Y})-\frac{1}{4}=\frac{P}{2}$, $P=2E(\bar{Y})-\frac{1}{2}$ より、$\hat{P}=2\bar{Y}-\frac{1}{2}$ //

(4) $V(\bar{X})=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}V(X_1)=\frac{1}{n}V(X_1)=\frac{1}{n}\{\underbrace{E(X_1^2)}_{1^2\cdot P(X_1=1)=P}-\underbrace{E(X_1)^2}_{P^2}\}=\frac{1}{n}(P-P^2)=\frac{1}{n}P(1-P)$

$P = P(X_1=1)$

$V(\hat{P})=V(2\bar{Y}-\frac{1}{2})=4V(\bar{Y})=4\cdot\frac{1}{n}V(Y_1)=\frac{4}{n}(\underbrace{E(Y_1^2)}_{1^2\cdot P(Y_1=1)}-\overbrace{E(Y_1)^2}^{P(Y=1)^2})=\frac{4}{n}\cdot(\frac{P}{2}+\frac{1}{4})(1-\frac{P}{2}-\frac{1}{4})$

より、

$\frac{V(\bar{X})}{V(\hat{P})}=\frac{\frac{1}{n}P(1-P)}{\frac{4}{n}(\frac{P}{2}+\frac{1}{4})(\frac{3}{4}-\frac{P}{2})}\to 0$ //