H17-1

(1)

$c_1, c_2, \cdots, c_m \in \mathbb{R}$ に対して、$c_1 a^1 + c_2 a^2 + \cdots + c_m a^m = 0 \Longrightarrow c_1 = c_2 = \cdots = c_m = 0$

(2)

$c_1, c_2, \cdots, c_m \in \mathbb{R}$ に対して、m 個のベクトルの線形結合が

$$c_1(a^1+a^2) + c_2(a^2+a^3) + \sum_{i=3}^{m} c_i a_i = 0$$ とすると、

$$c_1 a^1 + (c_1+c_2)a^2 + (c_2+c_3)a^3 + \sum_{i=4}^{m} c_i a_i = 0$$

$a^1, \cdots, a^m$ の線形独立性より、

$$c_1 = c_1 + c_2 = c_2 + c_3 = c_4 = c_5 = \cdots = c_m = 0$$

従って、

$$c_i = 0 \quad (i=1, \cdots, m)$$

従って、$a^1+a^2, a^2+a^3, a^3, \cdots, a^m$ は線形独立。

(3)

$c_1, c_2, \cdots, c_m \in \mathbb{R}$ に対して、m 個のベクトルの線形結合が、

$$\sum_{i=1}^{m-1} c_i(a^i + a^{i+1}) + c_m(a^m + a^1) = 0$$ とすると、

$$(c_1 + c_m)a^1 + \sum_{i=2}^{m}(c_{i-1} + c_i)a^i = 0$$

$a^1, \cdots, a^m$ の線形独立性より、

$$\begin{cases} c_1 = -c_m \\ c_i = -c_{i-1} \quad (i=2,3,\cdots,m) \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1 = -c_m \\ c_i = (-1)^{i-1} c_1 \quad (i=2,3,\cdots,m) \end{cases}$$

より、$c_m = (-1)^m c_m = -c_m$ ($\because$ m が奇数) なので、$c_m = 0$

従って、$c_i = 0 \ (i=1,2,\cdots,m)$