H25 - 2

(1)

$$\lim_{h\to+0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to+0}\frac{e^{-\frac{1}{h}}}{h}=\lim_{t\to\infty}\frac{t}{e^t}=0$$

$$\lim_{h\to-0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to-0}\frac{0}{h}=0$$

従って、$\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$ は存在する。

(2) (1)より導関数が存在し、($x\neq0$ の点で微分可能は明らか)

$$f'(x)=\begin{cases}0 & (x\leq0)\\ \frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}} & (x>0)\end{cases}$$

- ${}^\forall x\ (x\neq0)$ で f' が連続なのは明らか。
- $x=0$ 点について、

$$\lim_{x\to+0}f'(x)=\lim_{x\to+0}\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}=\lim_{h\to\infty}\frac{h^2}{e^h}=0$$

$$\lim_{x\to-0}f'(x)=\lim_{x\to-0}0=0$$

従って、$\displaystyle\lim_{x\to0}f'(x)=f'(0)$ より、$x=0$ でも連続。

従って、f は C^1 級

(3)

$$g_n(x)\triangleq\begin{cases}0 & (x\leq0)\\ \frac{1}{x^n}e^{-\frac{1}{x}} & (x>0)\end{cases}\quad(n\in\mathbb{N})$$

$$\lim_{x\to-0}g_n(x)=0$$

$$\lim_{x\to+0}g_n(x)=\lim_{y\to\infty}\frac{y^n}{e^y}=0$$

より、g_n は微分可能。

$f^{(n)}(x)$ は存在すれば、

$$f^{(n)}(x)=\left(\sum_{k=2}^{m}\frac{C_k}{x^k}\right)e^{-\frac{1}{x}}\quad(C_k\in\mathbb{R})$$

の形で書けるので、g_n が微分可能であることから、$f^{(n)}$ もそうであることが帰納的に示される。

従って、$f^{(n)}$ は C^∞ 級