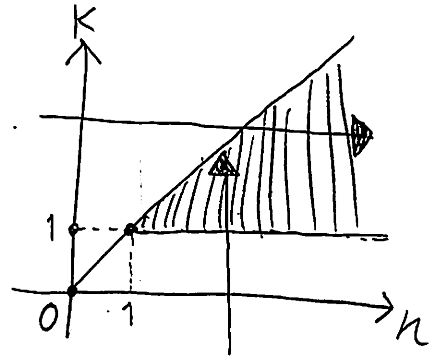
H30-5

(1)

$$E(N)=\sum_{n=0}^{\infty} nP(N=n) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{n} P(N=n) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=k}^{\infty} P(N=n)$$

↑ 水増し

$$= \sum_{k=1}^{\infty} P(N\geq k) = \sum_{k=0}^{\infty} P(N>k)$$



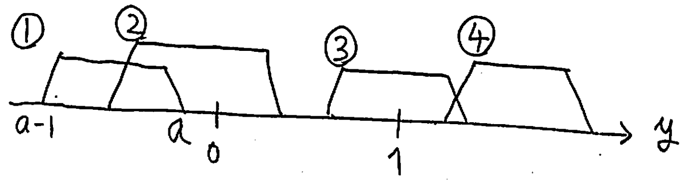
(2)

$$P(X_1+X_2\leq a) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1}(a-y) f_{X_2}(y)\,dy$$

$f_{X_1}, f_{X_2}>0$ となる範囲は、

$$\begin{cases} 0\leq a-y\leq 1 \\ 0\leq y \leq 1 \end{cases} \iff \begin{cases} a-1\leq y\leq a \\ 0\leq y\leq 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & (a\leq 0) \\ \int_0^a dy = a & (0\leq a\leq 1) \\ \int_{a-1}^{1} dy = 2-a & (1\leq a\leq 2) \\ 0. & (2\leq a) \end{cases}$$



(3) nに関する帰納法で示す。

- $n=1,2$ のときは、$X_1\sim \mathrm{Uniform}(0,1)$, (2)より明らかに成立。
- $n=k$ のとき与式を仮定する。

$$P((X_1+\cdots+X_n)+X_{n+1}\leq a) = \int_0^a \frac{(a-y)^n}{n!}\cdot 1\,dy \quad (\text{たたみ込み})$$

$$= \frac{a^{n+1}}{(n+1)!}$$ より $n+1$ でも成立。

(4)

$$E(N) = \sum_{n=0}^{\infty} P(N>n)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P(X_1+X_2+\cdots+X_n\leq 1)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1^n}{n!}$$

$$= e$$