H25問2

(1) $\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}$ — (*)

$\lim_{h\to +0}\frac{f(h)}{h} = \lim_{h\to +0}\frac{1}{h}\cdot e^{-\frac{1}{h}} \underset{y=\frac{1}{h}}{=} \lim_{y\to +\infty} y\cdot e^{-y} = \lim \frac{y}{e^y} = 0$

$\frac{1}{x^2}$

$\lim_{h\to -0}\frac{f(h)}{h} = \lim_{h\to -0}\frac{0}{h} = 0$

∴(*) = 0 で存在。

(2) $f(x)$ は C^1 級 $\iff$ $f(x)$ が微分可能 かつ $f'(x)$ が連続

$\iff$ $f'(x)$ が連続 (∵ $x\neq 0$ でビブン可は明らかで、(1)をふくめ)

・$\forall x\,(x\neq 0)$，でビブン可は明らか

~~$\lim_{y\to x} f'(y) = \lim_{y\to x}$~~

$f'(x) = \begin{cases} 0 & (x\leq 0) \\ \frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}} & (x>0) \end{cases}$

・$x=0$ のとき

・$\lim_{y\to +0} f'(y) = \lim_{y\to +0}\frac{1}{y^2}e^{-\frac{1}{y}} = \lim_{h\to +\infty} h^2 e^{-h} = 0$

・$\lim_{y\to -0} f'(y) = \lim_{y\to -0} 0 = 0.$

∴ $\exists \lim_{y\to 0} f(y) = 0$ より ~~f~~ $y=0$ で連続。

(3) ~~少なくとも $f^{(n)}(x) = e^{-\frac{1}{x}}(a_1x^{-2} + a_2x^{-3} + a_3x^{-4} + \cdots + a_mx^{-m})$ とかける~~ ~~ことが~~

(まだ存在するかいえてない。

・~~$\frac{1}{x^n}e^{-\frac{1}{x}}$ ($n\geq 2$) は微分可能~~

・$g_n(x) = \begin{cases} 0 & (x\leq 0) \\ \frac{1}{x^n}e^{-\frac{1}{x}} & (x>0) \end{cases}$

~~$\lim_{x\to -0} g_n(x) = 0$, $\lim_{x\to +0} g_n(x) = \lim_{h\to +\infty} h^n e^{-h} = 0$ より g_n は cont ($\forall n$)~~

lim.

$$\lim_{h \to 0} \frac{g_n(h)}{h} = \begin{cases} 0 & (h \to -0) \\ \lim\limits_{h \to +0} \dfrac{g_n(h)}{h} = \lim\limits_{h \to +0} \dfrac{e^{-\frac{1}{h}}}{h^{n+1}} = 0 \end{cases}$$ より g_nはビブン可 $(\forall n)$

- $f''(x) = g_2''(x) = (x^{-4} - 2x^{-3}) e^{-\frac{1}{x}}$ ...
- $f^{(n)}(x) = \left(\sum_{i=2}^{m} x^{-i} a_i \right) e^{-\frac{1}{x}}$ とかけるので、

$= \sum_{i=2}^{m} a_i \left(x^{-i} e^{-\frac{1}{x}} \right)$ は、ビブン可の和はビブン可より、帰納的に $(\forall n)$でビ可。