H31-2

(1)

① $\phi, \mathbb{R} \in \mathfrak{U}^*$ は明らか。

② $^\forall U, V \in \mathfrak{U}^*$ に対して、

Ⓐ $U, V$ が少なくとも一方が $\phi$ or $\mathbb{R}$ のときは明らかに $U \cap V \in \mathfrak{U}^*$

Ⓑ $U, V (\neq \phi, \mathbb{R})$ のとき、

$(U \cap V)^c = U^c \cup V^c$ はコンパクト集合の和なのでコンパクト。

従って、$U \cap V \in \mathfrak{U}^*$

③ $^\forall U_\lambda \in \mathfrak{U}^* \ (\lambda \in \Lambda)$ に対して、

Ⓐ $^\forall \lambda \in \Lambda, U_\lambda = \phi \Longrightarrow \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda = \phi \in \mathfrak{U}^*$

Ⓑ $^\exists \lambda_0 \in \Lambda, U_{\lambda_0} = \mathbb{R} \Longrightarrow \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda = \mathbb{R} \in \mathfrak{U}^*$

Ⓒ それ以外のとき、

$$^\exists \Sigma \subset \Lambda, \ \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda = \bigcup_{\lambda \in \Sigma} U_\lambda \quad (U_\lambda \neq \phi, \mathbb{R}, \ ^\forall \lambda \in \Sigma)$$

$\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda\right)^c = \bigcap_{\lambda \in \Sigma} U_\lambda^c$ は、$U_\lambda^c$ が閉集合なので無限積も閉集合。

また、$U_\lambda^c$ が有界なので、これも有界であり、コンパクト。

従って、$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \in \mathfrak{U}^*$

(2) $^\forall G \in \mathfrak{U}^*$ に対して、

Ⓐ $G = \phi, \mathbb{R} \in \mathfrak{U}$ は明らか。

Ⓑ それ以外のとき、

$G^c$ はコンパクトより、$G^c$ は有界閉集合なので、$G^c = \bigcup_{i=1}^{n} [a_i, b_i]$ （$[a_i, b_i]$ は互いに素）とかける。

$$G = \bigcap_{i=1}^{n} (-\infty, a_i) \cup (b_i, +\infty) \in \mathfrak{U}$$

(3) $^\forall x, y \in \mathbb{R}$ に対して、$^\forall U, V \in \mathfrak{U}^*$ に対して、

$x \in U, y \in V$ かつ $U \cap V = \phi$ とすると、$x \in \mathbb{R} \setminus V$, $y \in \mathbb{R} \setminus U$ となる必要がある。

$\mathbb{R} \setminus V = \bigcup_{i=1}^{n} [a_i, b_i]$, $\mathbb{R} \setminus U = \bigcup_{i=1}^{m} [c_i, d_i]$ （$\{[a_i, b_i]\}$ は互いに素, $\{[c_i, d_i]\}$ は互いに素）とかける。

しかし、例えば、$\min\{a_1, \cdots, a_n, c_1, \cdots c_m\} - 1 \in U \cap V$ より、必ず交わってしまうので、ハウスドルフ空間でない。