問1 H23.

(1) $P(A b I) = (PA \; bP \; P)$ より、

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(2)

$$\det(PA) = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2$$

$\therefore \det(A) \det(P) = \det(A) \cdot (-1) = 2 \quad \therefore \det(A) = -2$

(3)(4)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & -2 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 & +\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 & +\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -9 & -\frac{5}{2} & -\frac{5}{2} & -2 & +\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 & +\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$\therefore \; x = \begin{pmatrix} -9 \\ 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & -\frac{5}{2} & -2 & +\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 & +\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

WL