H18-8

(1)

$$E(I\{X>x\}) = 0\cdot P(I\{X>x\}=0) + 1\cdot P(I\{X>x\}=1) = P(X>x) = 1-F_X(x)$$

(2)

$$\begin{aligned}
E(\max(X-a,0)) &= \int_0^\infty \left(1-P(\max(X-a,0)\le x)\right)dx \\
&= \int_0^\infty \left(1-P(X-a\le x,\ 0\le x)\right)dx \\
&= \int_0^\infty \left(1-P(X-a\le x)\right)dx \qquad (\because \text{ on } [0,\infty)) \\
&= \int_0^\infty \left(1-F_X(a+x)\right)dx \\
&= \int_a^\infty \left(1-F_X(y)\right)dy
\end{aligned}$$

(3)

① $a\ge$ 大のとき

$$E(\max(X-a,0)) = \int_a^\infty (1-F_X(x))\,dx \le \int_a^\infty (1-F_Y(x))\,dx = E(\max(Y-a,0))$$

(積分区間で 大$\le x$ より、$0\le 1-F_X\le 1-F_Y$ より)

② $a<$ 大 のとき

$E(X)=E(Y)$ より

$$\int_0^a (1-F_X(x))\,dx + \int_a^\infty (1-F_X(x))\,dx = \int_0^a (1-F_Y(x))\,dx + \int_a^\infty (1-F_Y(x))\,dx \quad —(\#1)$$

$\forall x\le a\,(<$大$)$ に対して、

$0\le 1-F_Y\le 1-F_X$ より、

$$\int_0^a (1-F_X(x))\,dx \ge \int_0^a (1-F_Y(x))\,dx \quad —(\#2)$$

(#1)(#2) より、

$$E(\max(X-a,0)) \le E(\max(Y-a,0))$$