H15-1

(a)

$\det(A-\lambda I)=(\lambda-3)(\lambda-6)=0$ より、 固有値 $\lambda_1=3$, $\lambda_2=6$

① $Ax=\lambda_1 x$ とすると、

$(A-\lambda_1 I)x=0$ より、 $x_1+2x_2=0$ より、(λ_1の)固有ベクトル $x=c\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$ $(c\neq 0)$

② $Ax=\lambda_2 x$ とすると、

$(A-\lambda_2 I)x=0$ より、 $x_1-x_2=0$ より、(λ_2の)固有ベクトル $x=c\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ $(c\neq 0)$

(b)

Aの固有値をλ, その固有ベクトルをxとすると、 $A^n x=A^{n-1}(Ax)=\cdots=\lambda^n x$ より、

$e^A x=\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n!}\right)x=e^{\lambda}x$ より、

e^{λ}とxは、行列e^Aの固有値、固有ベクトルになっている。

従って、 $e^3 \leftrightarrow c\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$ $(c\neq 0)$ と $e^6 \leftrightarrow c\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ $(c\neq 0)$

(c)

$P\triangleq\begin{pmatrix}-2&1\\1&1\end{pmatrix}$ $D\triangleq\begin{pmatrix}3&0\\0&6\end{pmatrix}$ とおくと、 $A=PDP^T$ である。

$$A^n=PD^nP^T$$

$$=-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3^n&0\\0&6^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\-1&-2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2\cdot3^{n-1}+2\cdot6^{n-1} & -2\cdot3^{n-1}+4\cdot6^{n-1}\\ -3^{n-1}+2\cdot6^{n-1} & 3^{n-1}+4\cdot6^{n-1}\end{pmatrix}$$

(d)

$$e^A=I+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}PD^nP^T=P\begin{pmatrix}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{n!}&0\\0&\sum_{n=0}^{\infty}\frac{6^n}{n!}\end{pmatrix}P^T=P\begin{pmatrix}e^3&0\\0&e^6\end{pmatrix}P^T$$ (注：(b)から直ちに言えた)

$$=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2e^3+e^6 & -2e^3+2e^6\\ -e^3+e^6 & e^3+2e^6\end{pmatrix}$$