H13 − 1

(1)

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi} \quad より、\quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(x-b)^2} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

$$F(t) = e^{\frac{c^2}{4t}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t(x-\frac{c}{2t})^2}dx = e^{\frac{c^2}{4t}}\sqrt{\frac{\pi}{t}}$$

(2)

$$F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (e^{-tx^2})'\left(-\frac{x}{2t}\right)dx = \frac{1}{2t}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-tx^2}dx = \frac{1}{2t}\sqrt{\frac{\pi}{t}}$$

(3)

$I_n = F(t)$ とおく。

・nが奇数のとき、I_nは奇関数なので、$I_n = 0$

・nが偶数のとき、部分積分より

$$I_n = \int_{-\infty}^{\infty} (e^{-tx^2})'\left(-\frac{x^{n-1}}{2t}\right)dx = \frac{n-1}{2t}I_{n-2} = \frac{(n-1)!!}{(2t)^{\frac{n}{2}}}I_0$$

従って、

$$F(t) = \begin{cases} 0 & (n:奇数) \\ \dfrac{(n-1)!!}{(2t)^{\frac{n}{2}}}\sqrt{\dfrac{\pi}{t}} & (n:偶数) \end{cases}$$