H16-8

(1)

$$P(X_{(1)} \le x) = 1-(e^{-x})^n \quad (\because \text{iid})$$
$$= 1-e^{-nx} \quad (x \ge 0)$$

$P(\frac{X_n}{n} \le x) = P(X_n \le nx) = 1-e^{-nx}$ より一致。

(2)

$Y_n \triangleq \frac{X_n}{n}$ とおくと、密度関数 $f_{Y_n}(y) = ne^{-ny}$ $(y \ge 0)$

Y_n, Y_{n-1} は独立で、たたみこみより、

$$f_{Y_n+Y_{n-1}}(y) = \int_{y-z\ge 0 \wedge z \ge 0} f_{Y_n}(y-z) f_{Y_{n-1}}(z)\, dz$$
$$= \int_0^y ne^{-n(y-z)} \cdot (n-1)e^{-(n-1)z}\, dz$$
$$= n(n-1)\{e^{-(n-1)y} - e^{-ny}\} \quad (y \ge 0)$$

従って、

$$P(Y_n + Y_{n-1} \le y) = \int_0^y f_{Y_n+Y_{n-1}}(y)\, dy$$
$$= 1 + (n-1)e^{-ny} - ne^{-(n-1)y} \quad (y \ge 0)$$

(3)

$x \ge y \ge 0$ のとき、

$$P(X_{(2)} > x, X_{(1)} \le y) = \sum_{k=1}^n P(\min\{X_1, \cdots, X_{k-1}, X_{k+1}, \cdots, X_n\} > x, X_k \le y)$$
$$= \sum_{k=1}^n P(X_1 > x, \cdots, X_{k-1} > x, X_{k+1} > x, \cdots, X_n > x, X_k \le y)$$
$$= nP(X_2 > x, \cdots, X_n > x, X_1 \le y) \quad (\because \text{iid})$$
$$= nP(\min\{X_2, \cdots, X_n\} > x, X_1 \le y)$$

(4)

$$P(X_{(2)} > x) = P(X_{(2)} > x, X_{(1)} \le x) + P(X_{(2)} > x, X_{(1)} > x)$$
$$= \quad 〃 \quad + P(X_{(1)} > x)$$
$$= n \cdot P(X_1 \le x) \cdot \prod_{i=2}^n P(X_i > x) + 1 - P(X_{(1)} \le x)$$
$$= n \cdot (1-e^{-x}) \cdot e^{-(n-1)x} + e^{-nx}$$

従って、

$P(X_{(2)} \le x) = 1 - P(X_{(2)} > x) = P(Y_n + Y_{n-1} \le x)$ $(x \ge 0)$ となり一致。