H25 問6

(1) $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $x,y\in C[0,\pi]$ に対して、

$$F(\alpha x+\beta y) = \frac{1}{2\pi}\int_0^s \sin(s-t)(\alpha x+\beta y)(t)\,dt + f(s)$$

$$= \alpha\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^s \sin(s-t)x(t)\,dt + \beta\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^s \sin(s-t)y(t)\,dt + f(s)$$

$$= \alpha\left(F(x)-f(s)\right)+\beta\left(F(y)-f(s)\right)+f(s)$$

$$= \alpha F(x)+\beta F(y) + f(s)\{1-\alpha-\beta\}$$

より、

Fが線形 $\Longleftrightarrow f(s)(1-\alpha-\beta)=0 \ (\forall\alpha,\beta) \Longleftrightarrow f(s)\equiv 0$

(2)

$$\|F(x)-F(y)\| = \left\|\frac{1}{2\pi}\int_0^s \sin(s-t)x(t)\,dt - \frac{1}{2\pi}\int_0^s \sin(s-t)y(t)\,dt\right\|$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left\|\int_0^s \sin(s-t)(x(t)-y(t))\,dt\right\|$$

$$= \frac{1}{2\pi}\max_{0\le s\le\pi}\left|\int_0^s \sin(s-t)(x(t)-y(t))\,dt\right|$$

$$\le \frac{1}{2\pi}\max_{0\le s\le\pi}\int_0^s |x(t)-y(t)|\,dt \qquad (\because |\sin|\le 1,\ \left|\int\right|\le\int|\ |)$$

$$\le \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi |x(t)-y(t)|\,dt$$

$$\le \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \|x-y\|\,dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\cdot\|x-y\|\cdot\pi$$

$$= \frac{1}{2}\|x-y\|$$

より、Fは連続.

(3) (2)より、Fは特に縮小写像で、$(C[0,\pi], \|\cdot\|)$ はバナッハなので、

縮小写像の不動点定理より、Fは不動点を一意にもつ。

$\exists^1 x\in X$, $F(x)=x$ は、(*)の解が一意的に存在することを示している.