H15問5

(1)

$$(右辺) = \alpha\|x\|^2 + (1-\alpha)\|y\|^2 + (\alpha^2-\alpha)(\|x\|^2 - 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2)$$

$$= \alpha^2\|x\|^2 + 2\langle \alpha x, (1-\alpha)y\rangle + (1-\alpha+\alpha^2-\alpha)\|y\|^2$$

$$= \qquad〃 \qquad + (1-\alpha)^2\|y\|^2$$

$$= \|\alpha x\|^2 + 2\langle \alpha x, (1-\alpha)y\rangle + \|(1-\alpha)y\|^2$$

$$= \|\alpha x + (1-\alpha)y\|^2$$

(2)

$F(T) = \{x \in C \,;\, T(x) = x\}$

①閉であること.

$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset C$, $\lim_{n\to\infty} x_n \in H$ となるものを任意にとってくる.
$x_n \in C$ $(n \in \mathbb{N})$ より、 $T(x_n) = x_n$ $(n \in \mathbb{N})$ を満たす. ×

・$\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset C$; Cauchy列 に対して、

$\|Tx_n - Tx_m\| \leq \|x_n - x_m\| \longrightarrow 0$ $(n > m \to \infty)$

となっている。従って、

$\{T(x_n)\}_{n=1}^{\infty} \subset C$ はCauchy列で、H上のCauchy列でもあるから、Hの完備性より、

$\lim_{n\to\infty} T(x_n) \in \underline{H}$

また、Hの完備性より、$\{x_n\}$ 自身も、$\lim_{n\to\infty} x_n \in H$.

~~一方、Tはリプシッツ連続なので連続写像 従って、$x_0 \triangleq \lim_{n\to\infty} x_n$ とおくと、~~

~~$x_n \to x_0 \Longrightarrow T(x_n) \to T(x_0)$~~

$\|Tx_n - Tx_m\| \leq \|x_n - x_m\|$ で $n \to \infty$ とすると、$\|\cdot\|$ はwell-definedで、$x_\infty \triangleq \lim_{n\to\infty} x_n$ とおくと、

$\|Tx_\infty - \underbrace{Tx_m}_{= x_m\ (\because x_m \in C)}\| \leq \|x_\infty - x_m\| \longrightarrow 0$ $(m \to \infty)$ より、$Tx_\infty = x_\infty$ $\quad \therefore x_\infty \in C$

従って、任意のコーシー列に対して、収束先がCに属するので、Cは完備。従って、閉集合。

②凸性

$^\forall t \in [0,1]$, $^\forall x, y \in C$ に対して、

$T(tx+(1-t)y) = tx+(1-t)y$ を示せばよい。

$$\|tx+(1-t)y\|^2 = t\|x\|^2+(1-t)\|y\|^2 - t(1-t)\|x-y\|^2 \quad (\because)(1) \text{ — ①}$$

$$\| \quad \|tT(x)+(1-t)T(y)\|^2$$

$$\|T(tx)-T((1-t)y)\|^2 \leq \|tx-(1-t)y\|^2 \quad (\because T) \text{ — ②}$$

①, ②より、

$$\|T(tx)-T((1-t)y)\|^2 \leq t\|x\|^2+(1-t)\|y\|^2 - t(1-t)\|x-y\|^2$$

X

$$\|T(tx+(1-t)y) - \{tx+(1-t)y\}\|^2$$

$$= \|tz+(1-t)z - tx - (1-t)y\|^2 \quad (z \triangleq T(tx+(1-t)y))$$

$$= \|t(z-x)+(1-t)(z-y)\|^2$$

$$= t\|\underset{T(x)}{z-x}\|^2 + (1-t)\|\underset{T(y)}{z-y}\|^2 - t(1-t)\|\underset{y-x}{(z-x)-(z-y)}\|^2 \quad (\because (1))$$

$\neq$

$$\leq t\|\underbrace{(tx+(1-t)y)-x}_{-x(1-t) \quad (1-t)(y-x)}\|^2 + (1-t)\|\underbrace{(tx+(1-t)y)-y}_{-ty}\|^2 - t(1-t)\|y-x\|^2 \quad (\because t, 1-t \geq 0 \text{ Tの性質})$$

$$= t\|(1-t)(y-x)\|^2 + (1-t)\|t(x-y)\|^2 - t(1-t)\|y-x\|^2$$

$$= t(1-t)^2\|y-x\|^2 + t^2(1-t)\|x-y\|^2 - t(1-t)\|y-x\|^2$$

$$= \|y-x\|^2 \underbrace{\{t(1-t)^2+t^2(1-t)-t(1-t)\}}_{\underbrace{t(1-t)\{(1-t)+t-1\}}_{0}}$$

$$= 0$$

$\therefore$ $0 \leq \|\cdot\|$ と、$\|x\|=0 \Leftrightarrow x=0$ のノルムの性質より、

$$T(tx+(1-t)y) = tx+(1-t)y$$

従って、$tx+(1-t)y \in C$,

$\therefore$ Cは凸集合

$\therefore$ ①, ②より題意は示された。