H16問4

$S=\{1,2,3,4\}$, $\mathcal{O}=\{\phi,\{1\},\{1,2\},\{1,3\},\{1,2,3\},S\}$, $M=\{1,3,4\}$

(1)

$\mathbb{F}=\{S,\{2,3,4\},\{3,4\},\{2,4\},\{4\},\phi\}$ は S の閉集合系

$\overline{M}=(M$を含む最小の$\mathbb{F}$の集合$)=S$

$M^{\circ}=(M$に含まれる最大の$\mathcal{O}$の集合$)=\{1,3\}$

$M^{a}=\overline{M}-M^{\circ}=\{2,4\}$

(2)

$\mathcal{O}_M=\mathcal{O}\cap M=\{X\cap M\,;\,X\in\mathcal{O}\}=\{\phi,\{1\},\{1,3\},M\}$

(3)

$\mathcal{O}'=\{\phi,\{1\},\{1,3\},\{1,3,4\},S\}$

$f\in\mathfrak{S}_4$ が、$\forall O'\in\mathcal{O}'$, $f^{-1}(O')\in\mathcal{O}$ となっているか考える。

置換fは全単射なので、集合の大きさは保存されるので、

$f^{-1}(\{1,3,4\})=\{1,2,3\}$ — ①

$f^{-1}(\{1\})=\{1\}$ — ②

$f^{-1}(\{1,3\})=\{1,2\}$ or $\{1,3\}$ — ③

②より、

- $f(1)=1$

①より、

$f^{-1}(\{3,4\})=\{2,3\}$

③より、

$f^{-1}(\{3\})=\{2\}$ or $\{3\}$

- case A : $f(2)=3$ のとき、

$f(3)=4$,

$f(4)=2$

case B : $f(3)=3$ のとき、

$f(2)=4$,

$f(4)=2$

$\therefore$ $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&3&4&2\end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&3&2\end{pmatrix}$ ■