H20問4

(1) シュワルツの不等式より、

$$|\langle x, x_n\rangle| \le \|x\|\|x_n\| \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

両辺下極限をとると、

$$\liminf_{n\to\infty} |\langle x, x_n\rangle| \le \liminf_{n\to\infty} \|x\|\|x_n\|$$

$$\|$$

$$|\langle x, x\rangle| \quad (\because X \ni \lim_{n\to\infty} x_n \Leftrightarrow \liminf x_n = \limsup x_n = \lim x_n \in X)$$

$$\|x\|^2 \le \|x\| \varliminf_{n\to\infty} \|x_n\|$$

$$\|x\| \le \varliminf \|x_n\| \qquad (x=0 \text{のときも成立})$$

■

(2) 単位ベクトル $\{e_1, \cdots, e_N\}$ は正規直交基底なので、

・$x_n = \sum_{i=1}^{N} \langle x_n, e_i\rangle e_i \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

・$x = \sum_{i=1}^{N} \langle x, e_i\rangle e_i$

$$\longrightarrow y \triangleq x_n - x = \sum_{i=1}^{N} \langle x_n - x, e_i\rangle e_i$$

・弱収束から、$\lim_{n\to\infty} \langle \underset{y}{\underset{\shortparallel}{x_n - x}}, e_i\rangle = 0 \quad (\forall i = 1, 2, \cdots, N)$

パーセバルの等式より

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{N} |\langle x_n - x, e_i\rangle|^2}_{\downarrow\ 0} = \|x_n - x\|^2$$

$\therefore\ x_n \to x \quad (n\to\infty)$

$\therefore$ 強収束 $\Rightarrow \lim \|x_n\| = \|x\|$

$\therefore$ $\qquad \|$

$\qquad \liminf \|x_n\|$

■

内積の計算で、$h = e_i$ とするほうがよい。

(3) $\{\varphi_j\}$: ONS とすると、

パーセバルより、$\forall x \in H$, $\sum_{j=1}^{\infty} |\langle x, \varphi_j\rangle|^2 \le \|x\|^2 \Rightarrow \langle x, \varphi_j\rangle \to \underset{\langle 0, \varphi_j\rangle}{\underset{\shortparallel}{0}} \quad (j\to\infty)$

$\therefore$ $\{\varphi_j\}$ は $\overset{x}{0}$ に弱収束するが、

・$\|0\| = 0$

・$\lim_{n\to\infty} \|\varphi_n\| = 1$ 　より等式をみたさない //

■