H16-9

(1)

$$P(Y=1) = P(S=\text{表})P(\text{回答者が質問Aで Yes}) + P(S=\text{裏})P(T=\text{表})$$

$$= \frac{p}{2}+\frac{1}{4}$$

(2) ベイズ的な考えより、

$$P(X=1|Y=1) = \frac{P(Y=1|X=1)P(X=1)}{P(Y=1)} = \frac{\frac{3}{4}\cdot p}{\left(\frac{p}{2}+\frac{1}{4}\right)} = \frac{3p}{2p+1}$$

$$P(X=0|Y=1) = \frac{P(Y=1|X=0)P(X=0)}{P(Y=1)} = \frac{\frac{1}{4}\cdot(1-p)}{\left(\frac{p}{2}+\frac{1}{4}\right)} = \frac{1-p}{2p+1} \quad (\text{注: } 1-P(X=1|Y=1))$$

$P(Y=0) = 1-P(Y=1) = \frac{3}{4}-\frac{p}{2}$ より、

$$P(X=1|Y=0) = \frac{P(Y=0|X=1)P(X=1)}{P(Y=0)} = \frac{\frac{1}{4}\cdot p}{\left(\frac{3}{4}-\frac{p}{2}\right)} = \frac{p}{3-2p}$$

$$P(X=0|Y=0) = 1-P(X=1|Y=0) = \frac{3-3p}{3-2p}$$

$P(X=1|Y=1) \gtrless P(X=0|Y=0) \iff p \gtrless \frac{1}{4}$ を境いに可能性は変わる。

(3)

$$E(\bar{Y}) = E(Y_1) = P(Y_1=1) = \frac{p}{2}+\frac{1}{4}$$

従って、

$\hat{p} = 2\bar{Y} - \frac{1}{2}$ とすると、$E(\hat{p}) = p$ となる。

(4)

$E(X_1^2) = P(X_1^2=1) = P(X_1=1) = p$ より

$$V(\bar{X}) = \frac{1}{n}V(X_1) = \frac{1}{n}(p-p^2) = \frac{1}{n}p(1-p)$$

$E(Y_1^2) = P(Y_1=1) = \frac{p}{2}+\frac{1}{4}$ より、

$$V(\bar{Y}) = \frac{1}{n}V(Y_1) = \frac{1}{n}\left\{\left(\frac{p}{2}+\frac{1}{4}\right)-\left(\frac{p}{2}+\frac{1}{4}\right)^2\right\} = \frac{1}{n}\left(\frac{p}{2}+\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}-\frac{p}{2}\right)$$ より、

$V(\hat{p}) = 4V(\bar{Y})$ より、

$$\frac{V(\bar{X})}{V(\hat{p})} = \frac{1}{4}\cdot\frac{p(1-p)}{\left(\frac{p}{2}+\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}-\frac{p}{2}\right)} \longrightarrow 0 \quad (p\to 0)$$