H18 − 6

(1)

$$E'(t) = \int_0^1 (2u_t u_{tt} + 2u_x u_{xt})\,dx$$ （∵積分と微分の順序交換を許した）

$$= [2u_t u_x]_0^1 - \int_0^1 2u_{tx} u_x\,dx + \int_0^1 2u_x u_{xt}\,dx$$ （∵ $u_{tt} = u_{xx} = (u_x)'$ で部分積分）

$$= 0$$ （∵端点条件より、$u_t(0,t) = u_t(1,t) = 0$ と C^2級より $u_{xt} = u_{tx}$ ）

従って、ある定数 C を用いて

$E(t) = C \quad (\forall t)$

従って、

$E(t) = E(0)$

(2)

u_1, u_2 を (P) の古典解とする。

$V \triangleq u_1 - u_2$ とおくと、$f \equiv g \equiv 0$ の時の (P) を V は満たす。従って、

V に対するエネルギー E も (1) を満たす。

$E(0) = \int_0^1 V_t^2(x,0) + V_x^2(x,0)\,dx = 0$ より、

$E(t) = 0 \quad (\forall t)$ より、

$V_t^2(x,t) + V_x^2(x,t) = 0$ より、

$V_t \equiv V_x \equiv 0$ より、

V は t の関数 $\varphi(t)$ と x の関数 $\psi(x)$ を用いて、

$V(x,t) = \varphi(t) = \psi(x)$

$V(0,t) = 0 \ (\forall t)$ より、

$V \equiv 0$

従って、$u_1 \equiv u_2$ となり (P) の古典解は一意的。