H13 問7.

(1) maximize $x_1 + 4x_2 + 3x_3$

s.t. $2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \leq 8$

$x_1 \leq 1$

$x_2 \leq 1$

$x_3 \leq 1$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

$Z = x_1 + \underline{4x_2} + 3x_3$

$x_4 = 8 - 2x_1 + 3x_2 - 5x_3$ $\quad \frac{8}{3}$

$x_5 = 1 - x_1$

$x_6 = 1 - x_2$ $\quad 1$

$x_7 = 1 - x_3$

$x_2 \longleftrightarrow x_6$

$x_2 = 1 - x_6$

$Z = 4 + x_1 - 4x_6 + \underline{3x_3}$ よくミスる

$x_4 = 5 - 2x_1 + 3x_6 - 5x_3$

$x_5 = 1 - x_1$

$x_7 = 1 - x_3$

$x_3 \longleftrightarrow x_7$

$x_2 = 1 - x_6$

$x_3 = 1 - x_7$

$Z = 7 + \underline{x_1} - 4x_6 - 3x_7$

$x_4 = -2x_1 + 3x_6 + 5x_7$ $\quad -2x_1 \geq 0, \underline{\underline{x_1 \leq 0}}$

$x_5 = 1 - x_1$ $\quad 1 \geq x_1$

$x_1 \longleftrightarrow \cancel{x_5}$ x_4

$x_1 = 1 - x_5$

$x_2 = 1 - x_6$

$x_3 = 1 - x_7$

$Z = 8 - x_5 - x_6 - 3x_7$

$x_4 = -2 + 2x_5 + 3x_6 + 5x_7$

$\therefore Z^* = 8, \ (x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*, x_5^*, x_6^*, x_7^*) = (1, 1, 1,$

×

$x_1 \leftrightarrow x_4$

$x_1 = -\frac{1}{2}x_4 + \frac{3}{2}x_6 + \frac{5}{2}x_7$

$Z = 7 + (-\frac{1}{2}x_4 + \frac{3}{2}x_6 + \frac{5}{2}x_7) - 4x_6 - 3x_7$

$= 7 - \frac{1}{2}x_4 - \frac{5}{2}x_6 - \frac{1}{2}x_7$

$x_2 = 1 - x_6$

$x_3 = 1 - x_7$

$x_5 = 1 + \frac{1}{2}x_4 - \frac{3}{2}x_6 - \frac{5}{2}x_7$

$\therefore Z^* = 7, \ (x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*, x_5^*, x_6^*, x_7^*)$

$= (0, 1, 1, 0, 1, 0, 0)$ //

~~問6 1121~~

(2)

(P) $\max \quad p_1x_1+\cdots+p_nx_n$

$$
\begin{aligned}
q_1x_1+\cdots+q_nx_n &\le \beta \quad (y_0)\\
x_1 \quad &\le 1 \quad (y_1)\\
x_2 \quad &\le 1\\
\ddots \quad &\vdots\\
x_n &\le 1 \quad (y_n)\\
0 \le x_i \quad (i=1,\cdots,n)
\end{aligned}
$$

(D) $\min \quad \beta y_0+y_1+y_2+\cdots+y_n$

$$
\begin{aligned}
\text{s.t.} \quad q_1y_0+y_1 \quad &\ge p_1\\
q_2y_0 \quad +y_2 \quad &\ge p_2\\
&\vdots\\
q_ny_0 \quad\quad +y_n &\ge p_n
\end{aligned}
$$

(3) 相補性定理より、

$$x_i=0 \quad \vee \quad q_iy_0+y_i=p_i \quad (i=1,\cdots,n) \quad —①$$

$$y_j=0 \quad \vee \quad x_j=1 \quad (j=1,\cdots,n) \quad —②$$

$$y_0=0 \quad \vee \quad \sum_{i=1}^{n} q_ix_i=\beta \quad —③$$

~~・$y_0=0$とすると、①より、$y_i=p_i$ ($\forall i$), >0より、②から、$x_j=1$ ($\forall j$)、③より、~~

$q_{k+1}+\cdots+q_n \le \beta$, $\beta < q_k+q_{k+1}\cdots+q_n$ となっている。

・$\sum_{i=0}^{n} q_ix_i \underset{\uparrow}{\le} \sum_{i=0}^{n} q_i < \beta$

$(x_i \le 1)$

・$y_0=0$とすると、$y_i=p_i$ ($\forall i$), $x_i=1$ ($\forall i$), $\cancel{\sum_{i=1}^{n}}q_i$ (P)sub より $\sum q_i \le \beta$

このとき、$K=\min\{j;q_{j+1}\cdots+q_n\le\beta\}=0$ より、題意をみたす。

・$y_0\neq 0$のとき、③より、$\sum_{i=1}^{n} q_ix_i=\beta$, ~~kのdefより~~

$x_i = 0 \lor q_i y_0 + y_i = P_i \quad (i=1,\cdots,n)$ — ①

$y_j = 0 \lor x_j = 1 \quad (j=1,\cdots,n)$ — ② が成立。(*は省)

$y_0 = 0 \lor \sum_{i=1}^{n} q_i x_i = \beta$ — ③

(場合1) $y_0^* = 0$ とすると、

~~① ⟺ $x_i = 0 \lor y_i = P_i \ (\forall i)$~~

①,②,③だけ見てると分からないかい

(D) $\min \ y_1 + \cdots + y_n$

s.t. $y_1 \geq P_1$
$y_2 \geq P_2$
$\vdots$
$y_n \geq P_n$

$\longrightarrow y_i^* = P_i^*$ が明らか.

max 0で.

$y_i > 0$ より. ②, $x_i = 0 \ (\forall i)$, で (P)を見ればムジュン $\Rightarrow y_0 \neq 0$ である.

(case 2) $y_0^* \neq 0$ のとき.

③より、$\sum_{i=1}^{n} q_i x_i = \beta$, $q_i, \beta > 0$ より. $\exists S \subset \{1,\cdots,n\}$, $i \in S \Rightarrow x_i > 0$

$i \in \{1,\cdots,n\} \setminus S \Rightarrow \cancel{x_i \neq 0}$ $x_i = 0$

と分けられる. し $S \neq \phi$

- $\min S$ ($x_i > 0$ の最小の添え字)
- $\forall i \in S$, $x_i > 0$ より. ①より. $q_i y_0 + y_i = P_i$. $\rightarrow y_0 + \frac{y_i}{q_i} = \frac{P_i}{q_i}$ より.

~~$\frac{P_1}{q_1} < \cdots < \frac{P_{i-1}}{q_{i-1}} < y_0 + \frac{y_i}{q_i} < \frac{P_{i+1}}{q_{i+1}} < \cdots < \frac{P_n}{q_n}$~~

$S = \{\underbrace{S_1, \cdots, S_l}_{\text{小さい順}}\}$ とおくと、$y_0 + \frac{y_{s1}}{q_{s1}} < y_0 + \frac{y_{s2}}{q_{s2}} < \cdots < y_0 + \frac{y_{sl}}{q_{sl}}$

$\frac{y_{s1}}{q_{s1}} < \frac{y_{s2}}{q_{s2}} < \cdots < \frac{y_{sl}}{q_{sl}}$

$q_i > 0, y_i \geq 0$ より. $y_{s2}, \cdots, y_{sl} > 0$ ($y_{s1} > 0$ はいえない)

②より. $x_{s2}, \cdots, x_{sl} = 1$

一方、$\{1,\cdots,n\}\setminus S = \underbrace{\{t1, t2, \cdots, tm\}}_{\text{小さい順}}$ に対して、

$x_{t1},\cdots,x_{tm}=0$ より、②より、$y_{t1},\cdots,y_{tm}=0$ (特に使わないか)

$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = \beta \longrightarrow a_{s1}x_{s1} + a_{s2} + a_{s3} + \cdots + a_{sl} = \beta$、―― (*)

$$\therefore x_{s1} = \frac{\beta - (a_{s2} + \cdots + a_{sl})}{a_{s1}}$$ //

後は、連番か？

$\frac{p_1}{a_1} < \cdots < \frac{p_n}{a_n}$ より、~~*~~最適解はインデックスに対して $\{x_i^*\}\uparrow$ が分かる。(げんみつには？)

$\therefore$ $t1, t2, \cdots, tm, s1, s2, \cdots, sl$ の順にソートできる。
$\quad\;\; 1 \quad 2 \quad \cdots\cdots \quad n$

$k=\min\{j \,;\, a_{j+1} \cdots + a_n \leq \beta\}$、$a_{k+1}+\cdots+a_n \leq \beta$、$a_k + a_{k+1} \cdots + a_n > \beta$ で、

(*) から、の $s1 = k$ とわかる。

$$\therefore \begin{cases} x_1, \cdots x_{k-1} = 0 \\ x_k = \dfrac{\beta - (a_{k+1} + \cdots + a_n)}{a_k} \\ x_{k+1}, \cdots, x_n = 1 \end{cases}$$ //