問2.(基礎)

(i) $\mathbb{R}^m$ のk本のベクトル $a^1, a^2, \cdots, a^k$ が線形(一次)独立

$$\Updownarrow$$

$$c_1 a^1 + c_2 a^2 + \cdots + c_k a^k = 0 \Rightarrow c_1 = c_2 = \cdots = c_k = 0.$$

(ii) $a^1, a^2, \cdots, a^k \in S$ がSの基底であるとは、

・$a^1, a^2, \cdots, a^k$ が線形独立 かつ $\forall b \in S, \exists c_1, c_2, \cdots, c_k \in \mathbb{R}$ s.t. $b = \sum_{i=1}^{k} c_i a^i$

次元の定義,

Sの次元はn $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\exists a^1, \cdots, a^n \in S$ s.t. 線形独立 かつ $\forall a^1, \cdots, a^{n+1} \in S$, 線形従属

(iii) $A = (a^1, a^2, \cdots, a^n) \in \mathbb{R}^{m \times n}$

$B := (b^1, b^2, \cdots, b^k) \in \mathbb{R}^{m \times k}$, 各 $b^i \in \mathbb{R}^m$

~~$C := (c^1, c^2, \cdots, c^n) \in \mathbb{R}^{k \times n}$, 各 $c^i \in \mathbb{R}^k$~~ $C = \begin{pmatrix} c_1^T \\ \vdots \\ c_n^T \end{pmatrix}$ とおくと

$A = BC$ より、 $a_{ij} = \sum_{l=1}^{k} b_{il} c_{lj} \quad (i \in \{1, \cdots, m\}, j \in \{1, \cdots, n\})$

$$\left(\sum_{j=1}^{n} a^j x_j\right)_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{l=1}^{k} b_{il} c_{lj}\right) x_j = \sum_{l=1}^{k} b_{il} \underbrace{\sum_{j=1}^{n} c_{lj} x_j}_{= d_l}$$

$$= \sum_{l=1}^{k} d_l b_{il}$$

$$\therefore \sum_{j=1}^{n} a^j x_j = \begin{pmatrix} d_1 b_{11} + d_2 b_{12} + \cdots + d_k b_{1k} \\ \vdots \\ d_1 b_{m1} \quad \cdots \quad + d_k b_{mk} \end{pmatrix} = d_1 b^1 + \cdots + d_k b^k$$

$x_j \in \mathbb{R}$ より、$d_l \in \mathbb{R}$ なので、 $\dim X = \dim \operatorname{span}\langle b^1, \cdots, b^k \rangle \leq k$. //