H31-A

(1)

$Ax_i = \lambda x_i$ と x_j の内積をとると、

$(Ax_i)^T x_j = (\lambda x_i)^T x_j$ より、 $(\lambda_i - \lambda_j) x_i^T x_j = 0$ $\therefore$ $x_i^T x_j = 0$

(2)

$Ax_i = \lambda x_i$ より、

$A^2 x_i = \lambda^2 x_i$

Bの固有値をη, その固有ベクトルを $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ $(y_1, y_2 \in \mathbb{R}^n)$ とすると、

$B\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \eta \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ より、

$\begin{pmatrix} Ay_2 \\ Ay_1 \end{pmatrix} = \eta \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, $\begin{cases} Ay_2 = \eta y_1 \\ Ay_1 = \eta y_2 \end{cases}$ より、 $\begin{cases} A^2 y_1 = \eta^2 y_1 \\ A^2 y_2 = \eta^2 y_2 \end{cases}$

従って、 $\begin{cases} \eta^2 = \lambda_i^2 \\ y_1 = c_1 x_i \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}) \quad (\forall i = 1, \cdots, n) \\ y_2 = c_2 x_i \end{cases}$

より、題意を満たすように固有ベクトルをとると、

$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} x_i \\ x_i \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} x_i \\ -x_i \end{pmatrix}$ $(i = 1, \cdots, n)$

(3)

$-\lambda_1 < -\lambda_2 < \cdots < -\lambda_n \leq \lambda_n < \lambda_{n-1} < \cdots < \lambda_1$ より、

$\lambda_n = 0$ のとき、$2n-1$個となる。