H31-3

(1)(単射)

$\forall x_1, x_2 \in Y$ に対して、$Tx_1 = Tx_2$ とすると、$\dfrac{dx_1}{dt} = \dfrac{dx_2}{dt}$ より、$x_1(t) = x_2(t) + Const$

$x_1(0) = x_2(0) = 0$ より、$Const = 0$

$\therefore x_1 \equiv x_2$

(全射)

${}^\forall x \in X$ に対して、xは積分可能なので、${}^\exists y(t) \in C[0,1]$, $y(t) = \displaystyle\int_0^t x(t)\,dt$

この関数は、$y(0) = 0$ を満たすので、$y \in Y$

(2)

- 線形性は積分の線形性から従う。
- ${}^\forall x \in X$ に対して、

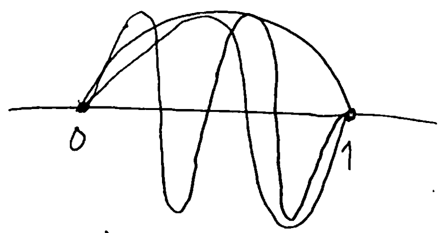
$$\|T^{-1}x\| = \max_{0 \le t \le 1} \left| \int_0^t x(s)\,ds \right| \le \max \int_0^t |x(s)|\,ds \le \max \|x\| t \le \|x\|$$

より有界

(3)

$f_n(x) = \sin(n\pi x)$

$f_n'(x) = (n\pi)\cos(n\pi x)$



$\|f_n\| = 1$

$|Tf_n(x)| = |f_n'(x)| = |n\pi \cos(n\pi x)| \to \infty \quad (n \to \infty)$

より、${}^\forall K > 0$ に対して、${}^\exists N \in \mathbb{N}$,

$|Tf_N(x)| > K\|f_N\|$