H13-6

(1)

$$\frac{x'}{x} = a + b(t)$$

$$\log x = \int (a+b(t))\,dt + C_1 \qquad (C_1 : 積分定数)$$

$$x(t) = e^{at} \cdot e^{\int b(t)dt} \cdot C_2 \qquad (C_2 = e^{C_1})$$

$\lim_{t\to\infty} b(t) = 0$ より、 $\exists t_0 > 0$, $t \geq t_0 \Rightarrow |b(t)| \leq \frac{|a|}{2}$

不定積分として $\int_0^t$ の区間を用いても一般性を失わない。

$$|x(t)| = |C_2| \exp\left\{at + \int_0^{t_0} b(t)\,dt + \int_{t_0}^{t} b(t)\,dt\right\}$$

$$\leq |C_2| \exp\left\{ \quad '' \quad + \int_{t_0}^{t} |b(t)|\,dt\right\} \qquad (\because e^x \uparrow)$$

$$\leq |C_2| \exp\left\{ \quad '' \quad + \int_{t_0}^{t} \frac{|a|}{2}\,dt\right\}$$

$$= \underbrace{|C_2| \exp\left\{\int_0^{t_0} b(t)\,dt - \frac{|a|}{2}t_0\right\}}_{定数} \exp\left\{t\left(a + \frac{|a|}{2}\right)\right\}$$

$$\rightarrow 0 \quad (t \to \infty) \qquad \left(\because a + \frac{|a|}{2} < 0\right)$$

(2) 定数変化法で $x(t)$ を求める。(1)の C_2 を $C_2(t)$ とみて、与式に代入すると、

$$C_2'(t)\exp\left\{at+\int_0^t b(t)dt\right\} + C_2(t)(a+b(t))\exp\left\{at+\int_0^t b(t)dt\right\}$$
$$= (a+b(t))C_2(t)\exp\left\{at+\int_0^t b(t)dt\right\} + c(t)$$

$$\Longleftrightarrow \quad C_2'(t)\exp\left\{at+\int_0^t b(t)\,dt\right\} = c(t)$$

より、

$$C_2(t) = \int_0^t c(w)\exp\left\{-\left(aw+\int_0^w b(s)ds\right)\right\}dw + C_3 \quad (C_3\text{：積分定数})$$