

H23-4

(1) 逆三角不等式より、

$$|\|a_n\| - \|a\|| \leq \|a_n - a\| \rightarrow 0$$

従って、

$$\|a_n\| \rightarrow \|a\|$$

(2)

$\forall h \in H$  に対して、シュワルツの不等式より、

$$|\langle a_n - a, h \rangle| \leq \|a_n - a\| \|h\| \rightarrow 0$$

従って、

$$\langle a_n - a, h \rangle = \langle a_n, h \rangle - \langle a, h \rangle \rightarrow 0$$

より、

$$\langle a_n, h \rangle \rightarrow \langle a, h \rangle$$

(3)

$$\|a_n - a\|^2 = \|a_n\|^2 - 2\langle a_n, a \rangle + \|a\|^2$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \downarrow \\ \|a\|^2 & & \langle a, a \rangle \end{array}$$

$$\text{より、} \|a_n - a\|^2 \rightarrow 0$$

$$\therefore \|a_n - a\| \rightarrow 0$$

(4)

$\{\varphi_n\} \subset H$  を正規直交基底とすると、バッセルの不等式より

$$\forall h \in H, \sum_{n=1}^{\infty} |\langle \varphi_n, h \rangle|^2 \leq \|h\|^2 < +\infty$$

$$\text{より、} \langle \varphi_n, h \rangle \rightarrow 0 = \langle 0, h \rangle$$

従って、 $\varphi_n \xrightarrow{\text{weak}} 0$  となる。

$$\|\varphi_n - 0\| = 1 \not\rightarrow 0$$