H16問1

(1)
$$\det|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)(2-\lambda)-4 = \lambda^2-\lambda-6 = (\lambda-3)(\lambda+2)=0$$

$\lambda=-2, 3$.

① $\lambda=-2$ のとき、

$$(A-\lambda I)x = \begin{pmatrix} +1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0, \quad \begin{cases} x_1+2x_2=0 \\ 2x_1+4x_2=0 \end{cases} \quad x_2=C,\ x_1=-2C$$

② $\lambda=3$ のとき

$$(A-\lambda I)x = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0, \quad 2x_1-x_2=0, \quad x_1=C,\ x_2=2C$$

以上より、Aについて、

$$-2 \leftrightarrow C\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad 3 \leftrightarrow C\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (C\neq 0)$$

- $A^{-1} = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}B$
- $Ax=\lambda x \rightarrow A^{-1}Ax = A^{-1}(\lambda x) \rightarrow x = \lambda A^{-1}x \rightarrow A^{-1}x = \frac{1}{\lambda}x \rightarrow Bx = \frac{6}{\lambda}x$

つまり、Bについて、

固有値は、$\frac{6}{-2}=-3$ と $\frac{6}{3}=2$ で、固有ベクトルは、それぞれ同様 $C\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ と $C\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $(C\neq 0)$

(2)
固有ベクトルがAとBで同じになっていることを用いて、$U=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ とすると、

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = U^TAU, \quad \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = U^TBU \quad となる。$$

(3) $X^2+AX+B=0$

$$X^2+UD_AU^TX+UD_BU^T = 0 \quad (D_A \triangleq \mathrm{diag}(-2,3),\ D_B \triangleq \mathrm{diag}(-3,2))$$

$$U^TX^2+D_AU^TX+D_BU^T = 0$$

$$U^TXUU^TXU + D_AU^TXU + D_BU^TU = 0 \qquad U^TXU=Y とおくと、Y^T=U^TX^TU = U^TXU = Y.$$

$$Y^2+D_AY+D_B=0$$

$Y=\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ とおくと、

$$\begin{pmatrix} a^2+b^2 & ab+bc \\ ab+bc & b^2+c^2 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} -2a & -2b \\ 3b & 3c \end{pmatrix}} + \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} a^2+b^2-2a-3=0 \\ ab+bc-2b=0 \rightarrow b=0 \text{ or } a+c=2 \\ ab+bc+3b=0 \rightarrow b=0 \text{ or } a+c=-3 \\ b^2+c^2+3c+2=0 \end{cases}$$

$\rightarrow b=0 \wedge b=0 \vee \cdots \rightarrow b=0$ のみでてくる.

両辺引いて $b=0$ がよい.

① $\cancel{a+c=2}$, $b=0$ のとき

$a^2-2a-3=0$, $(a-3)(a+1)=0$, $a=-1, 3$

$c^2+3c+2=(c+1)(c+2)=0$, $c=-1, -2$ $\qquad \cancel{a+c=2 \to a=3, c=-1}$

② $\cancel{a+c=-3}$, $b=0$ のとき,

$\cancel{a+c=-3}$ ~~より~~ , $a=-1$, $c=-2$,

$\therefore Y=\begin{pmatrix}3&0\\0&-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1&0\\0&-2\end{pmatrix}$

$U^TXU=Y$ より $X=UYU^T=\begin{pmatrix}-2&1\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-1\\-1&-2\end{pmatrix}\frac{1}{-5}=-\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-6&-1\\3&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-1\\-1&-2\end{pmatrix}=\frac{-1}{5}\begin{pmatrix}-11&8\\8&-1\end{pmatrix}$

と

$X=$ 〃 $\begin{pmatrix}-1&0\\0&-2\end{pmatrix}$ 〃 $=-\frac{1}{5}\begin{pmatrix}2&-2\\-1&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-1\\-1&-2\end{pmatrix}=-\frac{1}{5}\begin{pmatrix}6&2\\2&9\end{pmatrix}$. //

$($ 〃 $)\begin{pmatrix}3&0\\0&-2\end{pmatrix}($ 〃 $)=-\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-6&-2\\3&-4\end{pmatrix}$ 〃 $=-\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-10&10\\10&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-2\\-2&-1\end{pmatrix}$

〃 $\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$ 〃 $=-\frac{1}{5}\begin{pmatrix}2&-1\\-1&-2\end{pmatrix}$ 〃 $=-\frac{1}{5}\begin{pmatrix}5&0\\0&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$ //

$\therefore X=\begin{pmatrix}\frac{11}{5}&-\frac{8}{5}\\-\frac{8}{5}&-\frac{1}{5}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-\frac{6}{5}&-\frac{2}{5}\\-\frac{2}{5}&-\frac{9}{5}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2&-2\\-2&-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$ 答