H16−1

(1) (Aについて)

$\det(A-\lambda I) = (\lambda+2)(\lambda-3) = 0$ より、$\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 3$

① λ_1のとき、

$(A-\lambda_1 I)x = 0$ より、 $x_1 + 2x_2 = 0$ より、 λ_1の固有ベクトルは、 $x = c\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$ $(c \neq 0)$

② λ_2のとき、

$(A-\lambda_2 I)x = 0$より、 $2x_1 - x_2 = 0$ より、 λ_2の固有ベクトルは、$x = c\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ $(c \neq 0)$

(Bについて)

$A^{-1} = \frac{1}{6}B$であり、$Ax = \lambda x \Rightarrow A^{-1}x = \frac{1}{\lambda}x \Rightarrow Bx = \frac{6}{\lambda}x$ より、

Bの固有値、その固有ベクトルは、$\lambda_3 = -3$, $c\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$ $(c \neq 0)$ と $\lambda_4 = 2$, $c\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ $(c \neq 0)$

(2) (1)より、AとBの固有ベクトルの組が同じなので、

$U \triangleq \begin{pmatrix}-2 & 1\\1 & 2\end{pmatrix}$ とすると、 $A = UD_AU^T$, $B = UD_BU^T$, $D_A \triangleq \begin{pmatrix}-2 & 0\\0 & 3\end{pmatrix}$, $D_B \triangleq \begin{pmatrix}-3 & 0\\0 & 2\end{pmatrix}$

(3)

$X^2 + AX + B = 0$ より、

$$U^TXUU^TXU + D_AU^TXU + D_B = 0$$

$Y \triangleq U^TXU$ とおくと、

$$Y^2 + D_AY + D_B = 0$$

$$(Y + D_A)Y = -D_B$$

$Y = \begin{pmatrix}a & b\\b & c\end{pmatrix}$ とおくと、 $(\because Y^T = Y)$

$$\begin{pmatrix}a-2 & b\\b & c+3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\b & c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 & 0\\0 & -2\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}a(a-2) + b^2 = 3\\ \left.\begin{array}{l}ab + b(c+3) = 0\\ b(a-2) + bc = 0\end{array}\right\} \rightarrow b = 0\\ b^2 + c(c+3) = -2\end{cases}$$

$$\begin{cases}b = 0\\(a-3)(a+1) = 0\\(c+1)(c+2) = 0\end{cases}$$

$\therefore a = -1, 3$

$b = 0$

$c = -2, -1$

$Y = \begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & -2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3 & 0\\0 & -2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}$

の各場合について、$X = UYU^T$より、

$$X = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix}6 & 2\\2 & 9\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2 & -2\\-2 & -1\end{pmatrix}, \frac{1}{5}\begin{pmatrix}11 & -8\\-8 & -1\end{pmatrix}$$