H25問5

(1)

$I_n \triangleq (-n, n) \quad (n \in \mathbb{N})$

$S \triangleq \{I_n ; n \in \mathbb{N}\}$

$S \subset D$であり、$\mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n = \bigcup_{I \in S} I \in \mathcal{O}^*$

(2)

① $\phi, \mathbb{R} \in \mathcal{O}^*$

($\because$)

(1)より, $\mathbb{R} \in \mathcal{O}^*$

$\phi \subset D$より、 $\phi = \bigcup_{I \in \phi} I \in \mathcal{O}^*$

② $^\forall O_1, O_2 \in \mathcal{O}^*$に対して、

$^\exists S_1, S_2 \subset D, \ O_1 = \bigcup_{I \in S_1} I, \ O_2 = \bigcup_{J \in S_2} J$

$O_1 \cap O_2 = \left(\bigcup_{I \in S_1} I\right) \cap \left(\bigcup_{J \in S_2} J\right) = \bigcup_{I \in S_1}\left(I \cap \bigcup_{J \in S_2} J\right) = \bigcup_{I \in S_1} \bigcup_{J \in S_2} (I \cap J)$

$= \begin{cases} \phi & \text{if } ^\forall I \in S_1, ^\forall J \in S_2, \ I \cap J = \phi \\ \text{端点が整数であるような開区間の和集合} & \text{o.w.} \end{cases}$ ($\because I \cap J \neq \phi \Rightarrow$ $I \cap J$の端点は整数)

$\in \mathcal{O}^*$

③ $^\forall \{O_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subset \mathcal{O}^*$、

$^\forall \lambda \in \Lambda, \ ^\exists S_\lambda \subset D, \ O_\lambda = \bigcup_{I \in S_\lambda} I$

$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \bigcup_{I \in S_\lambda} I = \bigcup_{I \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda} I \in \mathcal{O}^* \quad (\because \bigcup_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda \subset D)$

(3) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3} \in \mathbb{R}$を含む最小の開集合は$(0,1)$なので、

$U, V \in \mathcal{O}^*$が$\frac{1}{2} \in U, \frac{1}{3} \in V \Rightarrow (0,1) \subset U \cap V$となり, $U \cap V \neq \phi$.

(4)

$f(x) \triangleq x - \lfloor x \rfloor$

$^\forall O \in \mathcal{O}^*, \ f^{-1}(O) = \left\{\begin{matrix} \mathbb{R} & \text{if } (0,1) \subset O \\ \phi & \text{o.w.} \end{matrix}\right\} \in \mathcal{O}^*$

だが、$(\mathbb{R}, \mathcal{O})$では明らかに連続でない.