

H24-6

(1)

与式を $E(t)$ とおくと、

$$E'(t) = \int_0^\pi (2u_t u_{tt} + 2k u_x u_{xt}) dx \quad u_{tt} = u_{xx} = (u_x)' \text{ より、}$$

$$= [2u_t u_x]_0^\pi - \int_0^\pi (2u_{tx} u_x) dx + \int_0^\pi (2k u_x u_{xt}) dx$$

$$= 2(k-1) \int_0^\pi u_{tx} u_x dx$$

$$E'(t) = 0 \quad (\forall t) \text{ より、 } k=1$$

$$u_{xt} = u_{tx} \text{ かつ } u_t(0, t) = u_t(0, \pi) = 0 \text{ より、}$$

(2)

$$E(0) = \int_0^\pi (u_t^2(x, 0) + u_x^2(x, 0)) dx = 0 \quad (\because u(x, 0) = 0 \text{ より、 } u_x(x, 0) = 0)$$

従って、

$$E(t) = 0 \quad (\forall t) \text{ より、 } u_t^2(x, t) + u_x^2(x, t) = 0 \text{ より、 } u_{xt} \equiv u_t \equiv 0 \text{ より、}$$

$$u \text{ は } x \text{ の関数 } \varphi(x) \text{ を用いて、 } u(x, t) = \varphi(x)$$

$$u(x, 0) = 0 \quad (\forall x) \text{ より、 } \varphi \equiv 0$$

従って、

$$u \equiv 0$$

(3)

ダランベールの公式より、

$$u(t, x) = \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} (\sin 2s + \sin 5s) ds$$

$$= -\frac{1}{4} (\cos 2(x+t) - \cos 2(x-t)) - \frac{1}{10} (\cos 5(x+t) - \cos 5(x-t))$$

$$= \frac{1}{2} \sin 2x \sin 2t + \frac{1}{5} \sin 5x \sin 2x$$