H27問1

(1) Aは対称行列なので対角化でき、直交行列P, $\lambda_2,\cdots,\lambda_n \in \mathbb{R}$ を λ_1以外のAの固有値, $D := \mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$ として、 $A = P^{-1}DP$ とかける。

$$\max_{y\neq 0}\frac{y^TAy}{y^Ty} = \max_{y\neq 0}\frac{y^TP^TDPy}{y^Ty} \underset{\substack{\uparrow \\ (P\text{は全単射なので})}}{=} \max_{\substack{x\neq 0 \\ y=P^{-1}x}}\frac{x^TPP^TDPP^Tx}{x^TPP^Tx} = \max_{x\neq 0}\frac{x^TDx}{x^Tx}$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \|\cdot\|\text{はユークリッドノルム}}}{=} \max_{x\neq 0}\frac{\overbrace{x^T(D^{\frac{1}{2}})^T}^{(D^{\frac{1}{2}}x)^T}D^{\frac{1}{2}}x}{\|x\|^2} = \max_{x\neq 0}\frac{\|D^{\frac{1}{2}}x\|^2}{\|x\|^2} = \max_{x\neq 0}\sqrt{\frac{\|D^{\frac{1}{2}}x\|}{\|x\|}} = \max_{x\neq 0}\sqrt{\left\|D^{\frac{1}{2}}\frac{x}{\|x\|}\right\|}$$

$$= \max_{\|y\|=1}\sqrt{\|D^{\frac{1}{2}}y\|} = \sqrt{\max_{\|y\|=1}(\sqrt{\lambda_1}y_1+\sqrt{\lambda_2}y_2+\cdots+\sqrt{\lambda_n}y_n)} \underset{\substack{\uparrow \\ \lambda_1\text{の最大性}}}{=} \sqrt{\sqrt{\lambda_1}} = \lambda_1$$

■

(2)

固有方程式 $\det(A-\lambda I)=0$ を解く。

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\underbrace{\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}}_{(3-\lambda)(1-\lambda)-1} - 1\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}}_{(1-\lambda)-1} + 1\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 3-\lambda \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}_{1-(3-\lambda)}$$

$$= (1-\lambda)(\lambda^2-4\lambda+3-1)\underbrace{-(-\lambda)+(-2+\lambda)}_{-2(1-\lambda)} = (1-\lambda)(\lambda^2-4\lambda) = (1-\lambda)(\lambda-4)\lambda = 0$$

$\therefore \lambda = 0, 1, 4$, $\lambda_1 = 4$

$$(A-\lambda_1 I)x = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbb{0} \text{ より、} \quad \begin{cases} -3x_1+x_2+x_3=0 \\ x_1-x_2+x_3=0 \\ x_1+x_2-3x_3=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3x_1+x_2+x_3=0 \\ 2x_1-2x_3=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 3x_1-x_3 = 2c \\ x_1 = x_3 = c \end{cases}$$

より、λ_1の固有ベクトル $\bar{x} = c\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $c \in \mathbb{R}$ ■

(3)

$A|x| - |\lambda||x|$ のk成分について、

$$(A|x| - |\lambda||x|)_k = \sum_{j=1}^{n} a_{kj}|x_j| - |\lambda||x_k| = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{|a_{kj}||x_j|}_{= |a_{kj}x_j|} - |\lambda||x_k|$$

$$\underset{\text{三角不等式}}{\geq} \left|\sum_{j=1}^{n} a_{kj}x_j\right| - |\lambda||x_k| = |(Ax)_k| - |\lambda x_k| = |(\lambda x)_k| - |\lambda x_k| = |\lambda x_k| - |\lambda x_k| = 0$$

kの任意性より、$A|x| - |\lambda||x| \geq 0$ ■

(4)

$\|\bar{x}\| = 1$ としても一般性を失わない。このとき、$\||\bar{x}|\| = (|\bar{x}_1|^2 + |\bar{x}_2|^2 + \cdots + |\bar{x}_n|^2)^{\frac{1}{2}} = \|\bar{x}\|$.

$$\lambda_1 = \max_{y \neq 0} \frac{y^T A y}{y^T y} \geq \frac{|\bar{x}|^T A |\bar{x}|}{|\bar{x}|^T |\bar{x}|} = |\bar{x}|^T A |\bar{x}| = \sum_{i,j} a_{ij}|\bar{x}_i \bar{x}_j| > 0 \quad (\because \bar{x} \neq 0) \quad \text{—— ①}$$

一方、$$|\bar{x}|^T A |\bar{x}| = \sum_{i,j} a_{ij}|\bar{x}_i||\bar{x}_j| = \sum_{i,j} |a_{ij}\bar{x}_i\bar{x}_j| \geq \left|\sum_{i,j} a_{ij}\bar{x}_i\bar{x}_j\right| = |\bar{x}^T \underbrace{A\bar{x}}_{= \lambda_1 \bar{x}}| = |\lambda_1| \quad \text{—— ②}$$

従って、

$$|\bar{x}|^T A |\bar{x}| = \lambda_1$$

両辺右から $|\bar{x}|$ をかけて、解けない。