H17問6

$\varphi_n = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin nx$ $(n=1,2,\cdots)$ は、$L^2(0,\pi)$ の正規直交基底である。

まず、$u(x,t) = \eta(t)\varphi(x)$ となるときの解を求める。

$u_t = \eta'\varphi$, $u_{xx} = \eta\varphi''$ より、$\lambda \in \mathbb{R}$ を用いて、$\frac{\eta'}{\eta} = \frac{\varphi''}{\varphi} = -\lambda$ とかける。

それぞれの方程式を解くと、

$\eta(t) = C_1 e^{-\lambda t}$, $\varphi(x) = C_2 \cos\sqrt{\lambda}x + C_3 \sin\sqrt{\lambda}x$

となり、端点の条件から、$\varphi(0) = \varphi(\pi) = 0$ より、

$\varphi(x) = C_3 \sin\sqrt{\lambda}x$, $\lambda = n^2$ $(n=0,1,\cdots)$

従って、$u(x,t) = C_4 e^{-n^2 t} \sin nx$ $(C_4 = C_1 C_3)$

初期値が連続なので、無限の重ね合わせ、フーリエ級数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t)$ も解になることを既知とする。

初期条件より、 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n = x(\pi - x)$ (a_nは定数)

$^\forall k \in \mathbb{N}$ に対して、上式を φ_k と内積をとると、

$$a_k = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\pi} x(\pi - x)\sin kx\,dx$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[x(\pi-x)\left(-\frac{\cos kx}{k}\right)\right]_0^{\pi} + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{k}\int_0^{\pi}(\pi - 2x)\cos kx\,dx$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{k^2}\left[(\pi-2x)\sin kx\right]_0^{\pi} - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{k^2}\int_0^{\pi}(-2)\sin kx\,dx$$

$$= \frac{2}{k^3}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(1 - (-1)^k\right)$$

従って、

$e^t u(x,t) = a_1 e^0 \varphi_1 + a_2 e^{-3t}\varphi_2 + a_3 e^{-8t}\varphi_3 + \cdots$

より、

$\lim_{t\to\infty} e^t u(x,t) = a_1 e^0 \varphi_1 = \frac{8}{\pi}\sin x$

注：a_1だけ求めれば良かった。