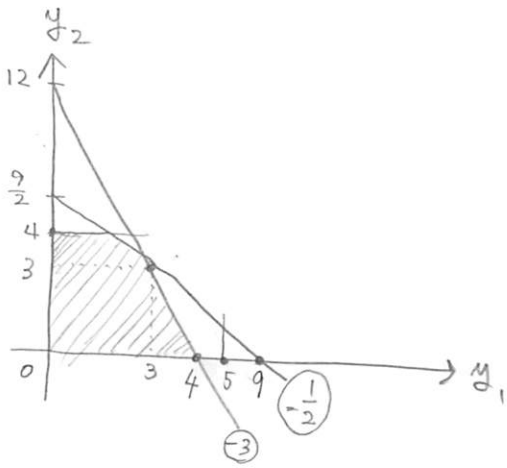
H14 問7

(1)

$$(P)\quad \begin{aligned} \text{minimize}\quad & 12x_1+9x_2+5x_3+4x_4 \\ \text{s.t.}\quad & 3x_1+1x_2+1x_3 \geq 1 \\ & x_1+2x_2+x_4 \geq t \\ & x_j \geq 0\ (j=1,\cdots,4) \end{aligned}$$

$$(D)\quad \begin{aligned} \text{maximize}\quad & 1y_1+ty_2 \\ \text{s.t.}\quad & 3y_1+1y_2 \leq 12 \\ & y_1+2y_2 \leq 9 \\ & y_1 \leq 5 \\ & y_2 \leq 4 \\ & y_1, y_2 \geq 0 \end{aligned}$$

(機械的に≥1とした)



(2) $t=0$のとき、

$$\begin{aligned} \max\quad & y_1 \\ \text{s.t.}\quad & y_2 \leq -3y_1+12 \\ & y_2 \leq -\tfrac{1}{2}y_1+\tfrac{9}{2} \\ & y_1 \leq 5 \\ & y_2 \leq 4 \end{aligned}$$

$0=-\frac{5}{2}y_1+\frac{15}{2}$, $y_1=\frac{2}{5}\cdot\frac{15}{2}=3$.
$y_2=-3\cdot 3+12=3$

図より、最適値 4 $(y_1^*, y_2^*)=(4,0)$ //

(3) $t\in[0,1]$のとき、目的関数、$y_1+ty_2=k$とおくと、$y_2=-\frac{1}{t}y_1+\frac{k}{t}$ $\left(-\frac{1}{t}\leq -1\right)$

$\max k$はこの直線の切片の最大化であり、傾き$-\frac{1}{t}$: $-\infty\to -1$としてくと、

$-\frac{1}{t}<-3$ $(t<\frac{1}{3})$のときまで最適解は、$(y_1^*, y_2^*)=(4,0)$のままで、$k^*=4$

$-\frac{1}{t}=-3$ $(t=\frac{1}{3})$のときは、$(y_1^*, y_2^*)\in\{(y_1,y_2)\ ;\ y_2=-3y_1+12,\ 3\leq y_1\leq 4\}$, $k^*=4$

$-\frac{1}{t}>-3$ $(t>\frac{1}{3})$のとき、$(y_1^*, y_2^*)=(3,3)$, $k^*=3+3t$

(2)も含めてまとめると、

		k^*	(y_1^*, y_2^*)
$0\leq t<\frac{1}{3}$	のとき、	4	$(4,0)$
$t=\frac{1}{3}$	のとき、	4	$\{(y_1,y_2)\ ;\ y_2=-3y_1+12,\ 3\leq y_1\leq 4\}$
$\frac{1}{3}<t\leq 1$	のとき、	$3+3t$	$(3,3)$

…(答)

(4) 相補性定理より、

・$0 \leq t < \frac{1}{3}$ のとき、

$y_1^* \neq 0$ より、$3x_1^* + x_2^* + x_3^* = 1 \rightarrow x_1^* = \frac{1}{3}$

$y_1^* + 2y_2^* \neq 9$ より、$x_2^* = 0$

$y_1^* \neq 5$ より、$x_3^* = 0$

$y_2^* \neq 4$ より、$x_4^* = 0$

・$t = \frac{1}{3}$ のとき、

$y_1^* \neq 0$ より、$3x_1^* + x_2^* + x_3^* = 1 \rightarrow x_1^* = \frac{1}{3}$

$3y_1^* + y_2^* = 12$ は常に満たしているので何も得られない。

$y_1^* + 2y_2^* = y_1^* - 6y_1^* + 24 = 24 - 5y_1^* \neq 0$ ($3 \leq y_1^* \leq 4$ では) より、$x_2^* = 0$

$y_1^* \leq 4 < 5$ より、$x_3^* = 0$

$y_2^* = -3y_1^* + 12 \leq 3 < 4$ より、$x_4^* = 0$

・$\frac{1}{3} < t \leq 1$ のとき、

$y_1^* \neq 0$ より、$3x_1^* + x_2^* + x_3^* = 1 \rightarrow 3x_1^* + x_2^* = 1 \rightarrow 6x_1^* + 2x_2^* = 2$

$y_2^* \neq 0$ より、$x_1^* + 2x_2^* + x_4^* = t \rightarrow x_1^* + 2x_2^* = t \rightarrow 5x_1^* = 2 - t,\ x_1^* = \frac{2-t}{5}$

$y_1^* \neq 5$ より、$x_3^* = 0$

$y_2^* \neq 4$ より、$x_4^* = 0$

$2x_2^* = t - \frac{2-t}{5} = \frac{-2+6t}{5}$, $x_2^* = \frac{-1+3t}{5}$

∴ 以上をまとめると、

$0 \leq t \leq \frac{1}{3}$ のとき、$(\frac{1}{3}, 0, 0, 0)$

$\frac{1}{3} < t \leq 1$ のとき、$(\frac{2-t}{5}, \frac{3t-1}{5}, 0, 0)$ …(答)