問2H16

・~~(1) ⇒ (2)について~~ (2) ⇒ (1)

~~f(x)の次数を2以上でないと仮定する。~~

・f(x)の次数は0か1とする。

・$f(x)=ax+b \quad (a,b\in\mathbb{R})$ と表せる.

・このとき、$^\forall N>0$, 適当な実数x_0を用いて、

$$|f(x_0)-f(x_0+1)| = |(ax_0+b)-(ax_0+a+b)| = |a| > N$$

となり、$|a|\leq N$となるNに対しては、どのようにx_0をとってきても、$|a|>N$は言えない。

従って、(2)が成立するならば、f(x)の次数は2以上である。 (2)⇒(1) ■

・(1) ⇒ (2)について

・対偶：$^\exists N>0$, $^\forall x_0\in\mathbb{R}$, $|f(x_0)-f(x_0+1)|\leq N \implies$ f(x)の次数は0か1. —(※)

・$f(x)=ax+b \quad (a,b\in\mathbb{R})$ と表せたとすると、

$|f(x_0)-f(x_0+1)|=|a|$ より、 $N=|a|$ とればよい.

} いらない？

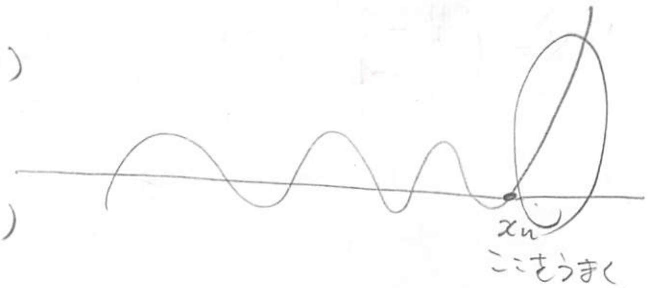
・後は、f(x)の次数が2以上で(※)が成立しないことを示せばよい.

・$f(x)=\prod_{i=1}^{n}(x-x_i)$ （$x_i<x_j$, $i<j$としても一般性を失わない）

それよりも、テイラー展開

$$f(x)=f(y)+f'(y)(x-y)+\frac{f''(y)}{2}(x-y)^2+O(\text{remain})$$

2次以上だと、必ず、$f''(x)\neq 0$



・(1) ⇒ (2)

・$f(x)=a_1x^2+a_2x^3+\cdots+a_nx^{n+1} \quad (n\geq 2, a_1\neq 0)$

$$|f(x_0)-f(x_0+1)| = |(a_1x_0^2+a_2x_0^3+\cdots+a_nx_0^n)-\{a_1(x_0+1)^2+a_2(x_0+1)^3+\cdots+a_n(x_0+1)^n\}|$$

$$=|a_1\{x_0^2-(x_0+1)^2\}+a_2\{x_0^3-(x_0+1)^3\}+\cdots+a_n\{x_0^n-(x_0+1)^n\}|$$

> ・・・とできない.

グラフ使わないとムズい。