H24-8 $P(X_1 \leq x) = 1 - e^{-\mu x}$

(1)

$$P(N=n) = P(X_1 \leq a, X_2 \leq a, \cdots, X_{n-1} \leq a, X_n > a)$$
$$= P(X_1 \leq a)P(X_2 \leq a) \cdots P(X_{n-1} \leq a)P(X_n > a)$$
$$= (1-e^{-\mu a})^{n-1} e^{-\mu a}$$

(2)

$X > a$が与えられた時のXの条件付き密度関数

$$E(X_i | X_i > a) = \int_a^{\infty} x f_X(x | x > a) dx$$

$y = x - a$で変換すると、

$$= \int_0^{\infty} (y+a) f_X(y+a | x > a) dy$$
$$= \int_0^{\infty} (y+a) f_X(y) dy \quad (\because 無記憶性)$$
$$= E(X_i) + a P(X_i \leq \infty)$$
$$= \mu^{-1} + a$$

・ $$P(X_i \leq x | X_i \leq a) = \frac{P(X_i \leq x, X_i \leq a)}{P(X_i \leq a)} = \begin{cases} 1 & \text{if } x \geq a \\ \frac{P(X_i \leq x)}{P(X_i \leq a)} & \text{if } x \leq a \end{cases}$$
$$\left(= \frac{1-e^{-\mu x}}{1-e^{-\mu a}} \right)$$

より、

$$f(x | x \leq a) = \begin{cases} 0 & (x \geq a) \\ \frac{\mu e^{-\mu x}}{1-e^{-\mu a}} & (x \leq a) \end{cases}$$

$$E(X_i \leq x | X_i \leq a) = \int_0^a x f(x | x \leq a) dx$$
$$= \frac{1}{1-e^{-\mu a}} \left[-x e^{-\mu x} \right]_0^a + \frac{1}{1-e^{-\mu a}} \int_0^a e^{-\mu x} dx$$
$$= \frac{-a e^{-\mu a}}{1-e^{-\mu a}} + \frac{1}{\mu}$$
$$= \frac{1}{\mu} - \frac{a e^{-\mu a}}{1-e^{-\mu a}}$$

(3)

$$E\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right) = E\left(E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \,\middle|\, N=n\right)\right)$$

$$= E\left(E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \,\middle|\, X_1 \le a, \cdots, X_{n-1} \le a, X_n > a\right)\right)$$

$$= E\left(\sum_{i=1}^{n-1} E(X_i | X_i \le a) + E(X_n | X_n > a)\right)$$

$$= E\left((n-1)E(X_1|X_1 \le a) + (\mu^{-1}+a)\right)$$

$$= E(X_1|X_1 \le a)\underbrace{E(n-1|N=n)}_{= E(N)-1} + (\mu^{-1}+a) \quad \text{—— } (*)$$

ここで、

$$E(N) = \sum_{n=0}^{\infty} n(1-e^{-\mu a})^{n-1} e^{-\mu a}$$

$$= \frac{1}{(e^{-\mu a})^2} \cdot e^{-\mu a} \qquad \left(\because \sum_{n=0}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}\right)$$

$$= e^{\mu a}$$

より、

$$(*) = \left(\frac{1}{\mu} - \frac{a e^{-\mu a}}{1-e^{-\mu a}}\right)(e^{\mu a}-1) + (\mu^{-1}+a)$$

$$= \frac{e^{\mu a}}{\mu}$$

注： $E\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right) = E(X_1)E(N)$ ですぐ求まるが。