H28問2

(1) 中間値の定理より、$\exists \gamma \in (a,b)$, $f(\gamma)=0$　($\because$ (i))

$\gamma \leq x_n < x_{n-1} \leq x_0$ $(n=1,2,\cdots)$ — (＊) を帰納法で示す。

① $n=1$ のとき、

・$x_{n-1} = x_0 \leq x_0$.

・$x_1 - x_0 = -\dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)} < 0$　($\because$ $f(x_0)=f(b)>0$, $f'(x_0)=f'(b)>0$)

より、$x_1 < x_0$

・テイラーの定理より、

$$f(x_1) = f(x_0) + f'(x_0)(x_1-x_0) + \frac{f''(y)}{2}(x_1-x_0)^2 \quad (\exists y \in (x_1, x_0))$$

$$= \frac{f''(y)}{2}(x_1-x_0)^2.$$

ここで、f は $[a,b]$ 上で、単調増加、狭義凸関数である。勾配不等式より

$$f(y) > f'(x)(y-x) + f(x) \quad (\forall x, y \in [a,b],\ x \neq y)$$

で、$x \leftarrow x_0$, $y \leftarrow x_1$ とすると、

$$f(x_1) > f'(x_0)(x_1-x_0) + f(x_0) = 0$$

$0 = f(\gamma) < f(x_1)$ より、$\gamma < x_1$　($\because f\uparrow$)

② $n=k$ のとき、(＊)を仮定する。

・$\gamma < x_k < x_{k-1} \leq x_0$ が成立。

$x_{k+1} - x_k = -\dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)} < 0$　($\because$ $x_k \in (\gamma, x_0) \subset [a,b]$ より、$f(x_k), f'(x_k) > 0$)

・勾配不等式より、

$$f(x_{k+1}) > \underbrace{f'(x_k)(x_{k+1}-x_k) + f(x_k)}_{0} = 0.$$

$\therefore$ $0 = f(\gamma) < f(x_{k+1})$ より、$\gamma < x_{k+1}$、より、$k+1$ でも(＊)成立。

①〜② より、(＊)成立。$\therefore$ $\{x_n\}\downarrow$

(2) $\{x_n\}$ は $\downarrow$ かつ下に有界 より、$\exists x_\infty \in \mathbb{R}$, $\lim_{n\to\infty} x_n = x_\infty > 0$

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right) \implies x_\infty = x_\infty - \lim \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$\implies \lim_{n\to\infty} \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} = 0$, $f \in C^2$ より、$x_n \to x_\infty \implies \underset{(f')}{f(x_n)} \to \exists\, \underset{(f')}{f(x_\infty)} \in \mathbb{R}$ より、

$\implies \dfrac{f(x_\infty)}{f'(x_\infty)} = 0 \implies f(x_\infty) = 0$, $f\uparrow$ より、$x_\infty = \gamma$ に限る　∎