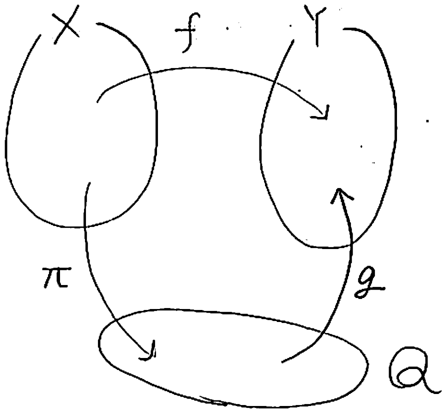
H28問5




(1) 位相空間の開集合系を$\mathcal{O}_X$で表す.

$g([x]) = g(\pi(x)) = f(x)$ より、

$^\forall U \in \mathcal{O}_Y$ に対して、

$g^{-1}(U) = \pi(f^{-1}(U))$

$f^{-1}(U)$ は $f$ の連続性より、$f^{-1}(U) \in \mathcal{O}_X$

$\pi$ は自然な射影なので、

$V \subset Q$ が $Q$の 開集合 $\iff$ $\pi^{-1}(V)$ が $X$ の開集合.

が成立している。

従って、$\pi(f^{-1}(U)) \in \mathcal{O}_Q \iff \pi^{-1} \circ \pi(f^{-1}(U)) = f^{-1}(U) \in \mathcal{O}_X$

右辺の命題は真なので、左辺も真で、

$g^{-1}(U) = \pi(f^{-1}(U)) \in \mathcal{O}_Q$ となる。

よって、$g$は連続写像

(2)

$Y$をHausdorff空間とする。

$^\forall y_1, y_2 \in Y$ $(y_1 \neq y_2)$, $^\exists U, V \in \mathcal{O}_Y$, $y_1 \in U$, $y_2 \in V$, $U \cap V = \phi$ となっている.

$^\forall [x_1], [x_2] \in Q$ に対して、$([x_1] \neq [x_2])$

$g([x_1]), g([x_2]) \in Y$ であるから、

$^\exists U_1, U_2 \in \mathcal{O}_Y$, $g([x_1]) \in U_1$, $g([x_2]) \in U_2$, $U_1 \cap U_2 = \phi$ とできる.

写像の性質から、$[x_1] \in g^{-1}(U_1)$, $[x_2] \in g^{-1}(U_2)$ と変形できる.

また、$g^{-1}(U_1) \cap g^{-1}(U_2) = g^{-1}(U_1 \cap U_2) = g^{-1}(\phi) = \phi$ と互いに素で、

$g$の連続性より、$g^{-1}(U_1), g^{-1}(U_2) \in Q$

以上より、$Q$はHausdorff空間になる.

(3) $g$が全単射で、$g^{-1}$が連続であることを示せば良い。

(単射性)

$g([x_1]) = g([x_2])$ とすると、

$f(x_1) = f(x_2)$ (∵ $g$のdef)

$x_1 \sim x_2$ (∵ $\sim$のdef)

$[x_1] = [x_2]$ (∵ $\sim$のdef)

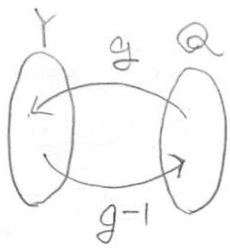
(全射性)

$^\forall y \in Y$に対して、

$f$の全射性より、$^\exists x \in X$, $f(x) = y$

$f(x) = g([x])$ より、$[x] \in Q$が必ず存在する。

従って、$g$は全射。




($g^{-1}$の連続性)

$g$が全単射なので、$g^{-1}$が存在する。

$g^{-1}$が連続 $\iff$ $^\forall F \in Q$の閉集合系$C_Q$, $(g^{-1})^{-1}(F) \in Y$の閉集合系$C_Y$

より、右辺の命題を示す。

$^\forall F \in C_Q$に対して、

$(g^{-1})^{-1}(F) = g(F)$

ここで、

全体空間はよい。

(a)より、コンパクト空間$X$の連続写像$\pi$による像$\pi(X) = Q$はコンパクト空間。
(∵ $\pi$は全射)

~~(a)より、コンパクト空間$X$の連続写像$f$による像$f(X) = Y$はコンパクト空間~~
~~(∵ $f$は全射)~~

(a)より、 〃 $Q$の 〃 $g$ 〃 $g(F)$はコンパクト部分集合。

単なる集合がいきなりコンパクトにはならない。

(c)より、Hausdorff空間$Y$のコンパクト部分集合$g(F)$は閉集合

つまり、$g(F) \in C_Y$

従って、$g^{-1}$が連続で、$g$は同相写像 //