H28問1.

階数の定義より $r \triangleq \mathrm{rank}A$ は3以下．$\mathrm{rank}A = 3 \Leftrightarrow \det A \neq 0$ なので、

$\det A = 0$ を示せば良い。

$$\det A = \begin{vmatrix} -12 & 2\sqrt{3} & 6 \\ 2\sqrt{3} & 6b-1 & -(2b+1)\sqrt{3} \\ 6 & -(2b+1)\sqrt{3} & 2b-3 \end{vmatrix} = -12 \begin{vmatrix} 6b-1 & -(2b+1)\sqrt{3} \\ -(2b+1)\sqrt{3} & 2b-3 \end{vmatrix} - 2\sqrt{3} \begin{vmatrix} 2\sqrt{3} & -(2b+1)\sqrt{3} \\ 6 & 2b-3 \end{vmatrix} + 6 \begin{vmatrix} 2\sqrt{3} & 6b-1 \\ 6 & -(2b+1)\sqrt{3} \end{vmatrix}$$

$$= -12\{(6b-1)(2b-3) - (2b+1)^2 \cdot 3\} - 2\sqrt{3}\{2\sqrt{3}(2b-3) + (2b+1)\cdot 6\sqrt{3}\} + 6\{-6(2b+1) - 6(6b-1)\}$$

$$= -12\{\cancel{12b^2} - 20b + \cancel{3} - 3(\cancel{4b^2} + 4b + \cancel{1})\} - 12\{2b - 3 + 6b + 3\} - 36\{2b + 1 + 6b - 1\}$$

$$= -12\{-32b\} - 12(8b) - 36(8b)$$

$$= -12b(-32 + 8 + 24)$$

$$= 0$$

(2)

$b = -\frac{1}{2}$ のとき，$A = \begin{pmatrix} -12 & 2\sqrt{3} & 6 \\ 2\sqrt{3} & -4 & 0 \\ 6 & 0 & -4 \end{pmatrix}$

固有方程式を解く。Aの固有値とその固有ベクトルを $\lambda, x$ とすると、$Ax = \lambda x$．

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -12-\lambda & 2\sqrt{3} & 6 \\ 2\sqrt{3} & -4-\lambda & 0 \\ 6 & 0 & -4-\lambda \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} 2\sqrt{3} & 6 \\ -4-\lambda & 0 \end{vmatrix} + (-4-\lambda) \begin{vmatrix} -12-\lambda & 2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & -4-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= 6\{0 - 6(-4-\lambda)\} + (-4-\lambda)\{(-12-\lambda)(-4-\lambda) - 12\}$$

$$= (-4-\lambda)\{-36 + (48 + 16\lambda + \lambda^2) - 12\}$$

$$= -(\lambda+4)(\lambda^2 + 16\lambda)$$

$$= -(\lambda+4)\lambda(\lambda+16)$$

$\lambda = -16, -4, 0$

最大固有値は、0で、固有ベクトルは、

$$x_1 = \frac{2\sqrt{3}}{3} x_2$$

$$(A - \lambda I)x = Ax = \begin{pmatrix} -12x_1 + 2\sqrt{3}x_2 + 6x_3 \\ 2\sqrt{3}x_1 - 4x_2 \\ 6x_1 \quad -4x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow -\cancel{12}^{\,3}x_1 + \cancel{8}^{\,2}\sqrt{3}x_2 = 0$$

$\rightarrow 6x_1 - 4\sqrt{3}x_2 = 0$

$\rightarrow 4\sqrt{3}x_2 = 4x_3 \rightarrow \sqrt{3}x_2 = x_3$．

従って、

$$x_0 = C\begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{3}}{3} \\ 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

(3)

$V = \left\{ c x_0 \,;\, c \in \mathbb{R},\ x_0 = \begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{3}}{3} \\ 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \right\}$

$V^\perp = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \,;\, \forall y \in V,\ \langle x, y \rangle = 0 \right\}$

$V^\perp$の正規直交基底ベクトルを $a = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} \end{pmatrix}$ , $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ とすると、

①正規性

$\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2} = 1 \quad \rightarrow 3b_3^2 + b_3^2 = 4b_3^2 = 1 \rightarrow b_3^2 = \frac{1}{4} \rightarrow b_3 = \pm\frac{1}{2}$

②直交性

$\langle a, b \rangle = -\frac{\sqrt{3}}{2} b_1 + \frac{1}{4} b_2 + \frac{\sqrt{3}}{4} b_3 = 0 \quad \rightarrow -2\sqrt{3} b_1 + b_2 + \sqrt{3} b_3 = 0 \rightarrow -6\sqrt{3} b_1 + 3b_2 + 3\sqrt{3} b_3 = 0$

③ $V^\perp$の直交性

$\langle x_0, b \rangle = \frac{2\sqrt{3}}{3} b_1 + b_2 + \sqrt{3} b_3 = 0 \quad \rightarrow 2\sqrt{3} b_1 + 3b_2 + 3\sqrt{3} b_3 = 0$

$4b_2 + 4\sqrt{3} b_3 = 0 \rightarrow b_2 = -\sqrt{3} b_3$

$\downarrow$

$b_2 = \mp\frac{\sqrt{3}}{2}$

$b_1 = 0$

よって、

$b = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$