H30-A

(1)

$A=\frac{1}{3}B$ とおく。

$\det(A-\lambda I)=\det\left(\frac{1}{3}(B-3\lambda I)\right)=\left(\frac{1}{3}\right)^3\det(B-3\lambda I)=0$ より、

$\begin{vmatrix} -1-3\lambda & 0 & -2 \\ 0 & 1-3\lambda & -2 \\ -2 & -2 & -3\lambda \end{vmatrix}=(\lambda+1)\lambda(\lambda-1)=0$ より、 $\lambda=-1,0,1$

(2)

${}^\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R},\ {}^\forall x,y\in\{z\in\mathbb{R}^3\,;\,T^k(z)=z\}$

$T^k(\alpha x+\beta y)=A^k(\alpha x+\beta y)=\alpha\underbrace{A^k x}_{0}+\beta\underbrace{A^k y}_{0}=0$

∴ $\alpha x+\beta y$ もこの空間の元

(3)

$T(x)=x$ とすると、

$(B-3I)x=0$

$\begin{pmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=0$ より、 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=C\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ $(C\in\mathbb{R})$

従って、次元1，基底 $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$

注：$Ax=1x$ より、固有値1に対する固有空間

(4)

$Ax=\lambda x$ $(x\neq0)$ とすると、

$A^k x=\lambda^k x$ であり、A^kの固有値はλ^kで、その固有ベクトルはxとなる。(特に、$\lambda=1$を使う)

一方、

$T^k(x)=x$ とすると、

$A^k x=1x$ より、xはA^kの固有値1の固有ベクトルである。

従って、(3)と同じ集合である。