

H20-7

(1) 行列ツンプレックス表示する。

$$b = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} \quad x_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad C_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$x_N = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad C_N = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

と定義すると、この問題は以下で表せる。

$$\begin{aligned} &\text{minimize } C_B^T x_B + C_N^T x_N \\ &\text{s.t. } Bx_B + Nx_N = b \\ &\quad x_B, x_N \geq 0 \end{aligned}$$

式変形より、

$$\begin{aligned} &\text{minimize } C_B^T B^{-1}b + (C_N^T - C_B^T B^{-1}N)x_N \\ &\text{s.t. } x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N \end{aligned}$$

これはある辞書である。さらに、

$$B^{-1}b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \geq 0 \text{ より実行可能であり、}$$

$$C_N^T - C_B^T B^{-1}N = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \geq 0 \text{ より最適辞書になっている。}$$

従って、最適解は、

$$\begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{pmatrix} = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_3^* \\ x_4^* \\ x_5^* \end{pmatrix} = 0$$

(2)

題意は、(1)の辞書で非基底解が変らず最適辞書であることと同値である。

まず、 $b' = \begin{pmatrix} 6 \\ 4+2s \end{pmatrix}$ とみると、最適辞書が実行可能なままでなければならぬので、

$$B^{-1}b' \geq 0 \iff -\frac{1}{2} \leq s \leq 1$$

次に、目的関数の係数が非負である必要があるため、

$$C_N' = \begin{pmatrix} 8-2s \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{とみると、}$$

$$(C_N' - C_B^T B^{-1}N) \geq 0 \iff s \leq \frac{1}{2}$$

従って、2の2条件と題意は同値なので、

$$-\frac{1}{2} \leq s \leq \frac{1}{2}$$