問7 H28

(1) $P(0,0)$

(基準形)

$$\max\ 8x_1+5x_2+6x_3$$
$$\text{s.t.}\quad 4x_1+3x_2+2x_3\le 8$$
$$-3x_1+x_2-x_3\le 3$$
$$x_1,x_2,x_3\ge 0$$

(等式系:辞書)

$$Z=8x_1+5x_2+6x_3$$
$$x_4=8-4x_1-3x_2-2x_3$$
$$x_5=3+3x_1-x_2+x_3$$
$$x_i\ge 0\ (i=1,\cdots,5)$$

x_1を増加させると、$x_2=x_3=0$として、

$$x_4=8-4x_1\ge 0,\quad x_5=3+3x_1\ge 0 \longrightarrow x_1\le 2$$

より、$x_1=2$を$x_4=0$で達成。$\underset{1}{x_2}$とx_4をピボットする.

$$x_2=\frac{8}{3}-\frac{4}{3}x_1-\frac{1}{3}x_4-\frac{2}{3}x_3$$
$$x_5=3+3x_1+\left(-\frac{8}{3}+\frac{4}{3}x_1+\frac{1}{3}x_4+\frac{2}{3}x_3\right)+x_3=-\frac{2}{3}+\frac{13}{3}x_1+\frac{1}{3}x_4+\frac{5}{3}x_3$$
$$Z=8x_1+\left(\frac{40}{3}-\frac{20}{3}x_1-\frac{5}{3}x_4-\frac{10}{3}x_3\right)+6x_3=\frac{40}{3}+\frac{4}{3}x_1-\frac{5}{3}x_4+\frac{8}{3}x_3$$

× x_2でピボットしてる.

x_1とx_4をピボット

$$\begin{cases} x_1=2-\frac{1}{4}x_4-\frac{3}{4}x_2-\frac{1}{2}x_3 \\ x_5=3+\left(6-\frac{3}{4}x_4-\frac{9}{4}x_2-\frac{3}{2}x_3\right)-x_2+x_3=9-\frac{3}{4}x_4-\frac{13}{4}x_2-\frac{1}{2}x_3 \\ Z=(16-2x_4-6x_2-4x_3)+5x_2+6x_3=16-2x_4-x_2+2x_3 \end{cases}$$

x_3を増加させると、$x_2=x_4=0$より、

$$2-\frac{1}{2}x_3\ge 0,\quad 9-\frac{1}{2}x_3\ge 0 \longrightarrow x_3\le 4,\quad x_3\le 18$$

より、限界$x_3=4$をx_1で達成. x_1とx_3をピボット.

$$\begin{cases} x_3=4-\frac{1}{2}x_4-\frac{3}{2}x_2-2x_1 \\ x_5=9-\frac{3}{4}x_4-\frac{13}{4}x_2+\left(-2+\frac{1}{4}x_4+\frac{3}{4}x_2+x_1\right)=7-\frac{1}{2}x_4-\frac{5}{2}x_2+x_1 \\ Z=16-2x_4-x_2+(8-x_4-3x_2-4x_1)=24-3x_4-4x_2-4x_1 \end{cases}$$

これより、シンプレックス法が終了し、最適値24、最適解$(x_1^*, x_2^*, x_3^*)=(0,0,4)$

(2) $P(0,0)$を最適辞書において行列表示する。

$$\begin{cases} z = 8x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 0x_4 + 0x_5 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 1x_4 + 0x_5 = 8 \\ -3x_1 + 1x_2 - 1x_3 + 0x_4 + 1x_5 = 3 \end{cases}$$

基底ベクトル $x_B = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_5 \end{pmatrix}$ 非基底ベクトル $x_N = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \end{pmatrix}$

$C_B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ $C_N = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ $b = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ $N = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

とおくと、

$$P(0,0) \quad \begin{array}{ll} \max & C_B^T x_B + C_N^T x_N \\ \text{s.t.} & Bx_B + Nx_N = b \end{array}$$ とかける。

最適辞書の形にするために、目的関数からx_Bを消去する。

$Bx_B = b - Nx_N$, $x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N$.

$$\begin{aligned} C_B^T x_B + C_N^T x_N &= C_B^T(B^{-1}b - B^{-1}Nx_N) + C_N^T x_N \\ &= C_B^T B^{-1} b - C_B^T B^{-1} N x_N + C_N^T x_N \\ &= \underbrace{C_B^T B^{-1} b}_{\text{最大値}} + \underset{\overset{\wedge\mathstrut}{0}}{(C_N^T - C_B^T B^{-1} N)} x_N \end{aligned}$$

となっているのが(1)より分かっている。

ここで、$C_1: 8 \to 8 + 3\theta_1 + \theta_2$, $C_2: 5 \to 5 + \theta_1 + 3\theta_2$ としても、シンプレックス法のアルゴリズムが機能するのは、改めて、

$C_N = \begin{pmatrix} 8 + 3\theta_1 + \theta_2 \\ 5 + \theta_1 + 3\theta_2 \\ 0 \end{pmatrix}$ とした時に $(C_N^T - C_B^T B^{-1} N) \leq 0$ と同値.

- $C_B^T B^{-1} N = (6 \ 0) \cdot \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(6 \ 0)\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(24 \ 18 \ 6) = (12 \ 9 \ 3)$
- $C_N^T - C_B^T B^{-1} N = (-4 + 3\theta_1 + \theta_2, -4 + \theta_1 + 3\theta_2, -3) \leq 0$

$\iff \begin{cases} 3\theta_1 + \theta_2 \leq 4 \\ \theta_1 + 3\theta_2 \leq 4 \end{cases}$ を満たすθ_1, θ_2.

$\therefore (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) = (3, 1, 4)$

$(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2) = (1, 3, 4)$.

(2)別解

$P(\theta_1,\theta_2)$の双対問題を$D(\theta_1,\theta_2)$とすると、

$$D(\theta_1,\theta_2)\quad \begin{array}{ll} \min & 8y_1+3y_2 \\ \text{s.t.} & 4y_1-3y_2 \geq 8+3\theta_1+\theta_2 \\ & 3y_1+1y_2 \geq 5+\theta_1+3\theta_2 \\ & 2y_1-1y_2 \geq 6 \\ & y_1,y_2 \geq 0 \end{array}$$

$P(0,0)$の最適値と$P(\theta_1,\theta_2)$のが同じ $\underset{\text{双対定理}}{\Longleftrightarrow}$ $P(0,0)$と$D(\theta_1,\theta_2)$の最適値が同じ ― (*)

このとき、$P(\theta_1,\theta_2)$と$D(\theta_1,\theta_2)$に相補性定理を用いると、

特に、$P(\theta_1,\theta_2)$の2つ目の制約で、$-3x_1^*+x_2^*-x_3^*=-4\neq 3$となるので、$y_2^*=0$になっている。

すると、

$$D(\theta_1,\theta_2)\quad \begin{array}{ll} \min & 8y_1 \\ \text{s.t.} & 4y_1 \geq 8+3\theta_1+\theta_2 \\ & 3y_1 \geq 5+\theta_1+3\theta_2 \\ & 2y_1 \geq 6 \\ & y_1 \geq 0 \end{array}$$

今、最適値24なので、$y_1^*=3$になっている。

$$D(\theta_1,\theta_2)\quad \begin{array}{ll} \min & 24 \\ \text{s.t.} & 4 \geq 3\theta_1+\theta_2 \\ & 4 \geq \theta_1+3\theta_2 \end{array}$$

これは、θ_1,θ_2がこの制約を満たす $\Longleftrightarrow$ (*) となっている。 ▨