H26問6

(1) $f \in C[0,1]$ とする。

①

$\|f\|_\infty, \|f\| \geq 0$ は明らか。

$\|f\|_\infty = 0 \iff |f(x)| = 0 \ (\forall x) \iff f \equiv 0$

$\|f\|_1 = 0 \iff |f(x)| = 0 \ (\forall x) \iff f \equiv 0$

② $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して、

$\|\alpha f\|_\infty = \max_{0 \leq x \leq 1} |(\alpha f)(x)| = |\alpha| \max_{0 \leq x \leq 1} |f(x)| = |\alpha| \|f\|_\infty$

$\|\alpha f\|_1 = \int_0^1 |(\alpha f)(x)| dx = |\alpha| \int_0^1 |f(x)| dx = |\alpha| \|f\|_1$

③ $g \in C[0,1]$ とする。

$\|f+g\|_\infty \leq \max |f| + \max |g| = \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ （∵ 三角不等式）

$\|f+g\|_1 \leq \int_0^1 |f(x)| dx + \int_0^1 |g(x)| dx = \|f\|_1 + \|g\|_1$

以上よりいずれのノルムも定義をみたす。

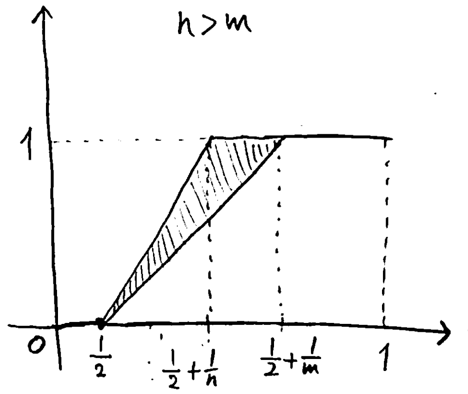
(3) $\forall n, m \in \mathbb{N}$ （$n > m$ としても一般性を失わない）

$\|f_n - f_m\|_1 = \int_0^1 |f_n(x) - f_m(x)| dx$

= （右図斜線部の三角形）

$= \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right) \cdot 1 \cdot \frac{1}{2}$

$\longrightarrow 0 \quad (n > m \to \infty)$



(2) $\forall \{f_n\} \subset C[0,1]$; Cauchy列.

~~$\forall n, m \in \mathbb{N}$ ($n > m$),~~

~~$\|f_n - f_m\|_\infty = \max_{0 \leq x \leq 1} |f_n(x) - f_m(x)| = |f_n(x_0) - f_m(x_0)|$ となる $x_0 \in [0,1]$ が存在する。~~

$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, n > m \geq N \Longrightarrow \|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon$

$\|f_n - f_m\| = \max_{0 \leq x \leq 1} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$ より、

$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \quad (\forall x \in [0,1])$ ——(*)

x を固定すると、$\{f_n(x)\} \subset \mathbb{R}$ は、$\mathbb{R}$ 上の Cauchy列なので、$\mathbb{R}$ の完備性より、

$\exists y_x \in \mathbb{R}$ s.t. $f_n(x) \to y_x$

x の任意性より、$\{y_x\}_{0 \leq x \leq 1}$ は、表現を変えれば、$x \in [0,1] \mapsto y_x \in \mathbb{R}$ の写像であるから、

$f_\infty : [0,1] \to \mathbb{R}$ を、$f_\infty(x) \triangleq y_x$ とすれば、$f_n \to f_\infty$ $(n\to\infty)$.

一方、(*)で、$n\to\infty$ とすると、

$|f_\infty(x) - f_m(x)| < \varepsilon$ であるから、$\lim_{m\to\infty} f_m(x) = f_\infty(x)$ $(\forall x)$ より、$f_\infty \in C[0,1]$. //

(4) (3)のf_nは、

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & (0 \leq x < \frac{1}{2}) \\ 1 & (\frac{1}{2} \leq x \leq 1) \end{cases}$$ より、$\lim_{n\to\infty} f_n \notin C[0,1]$.

∴ N_1は完備でない。

∴ バナッハでない。