H14-4

(1) $a=(a_n)_{n=1}^{\infty}\in \ell^1$ に対して、

$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|<+\infty$ より、$\lim_{n\to\infty}a_n=0$ なので、$^{\exists}N\in\mathbb{N},\ ^{\forall}n\geq N,\ |a_n|^2\leq|a_n|<1$

従って、

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2=\sum_{n=1}^{N-1}|a_n|^2+\sum_{n=N}^{\infty}|a_n|^2\leq\underbrace{\sum_{n=1}^{N-1}|a_n|^2}_{\text{有限和}}+\underbrace{\sum_{n=N}^{\infty}|a_n|}_{a\in\ell^1}<+\infty$$

従って、$a\in\ell^2$

$\therefore \ell^1\subset\ell^2$

(2)

点列 $\{a^n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset \ell$ を、$a^n=(a^n_i)_{i=1}^{\infty}=(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n},0,0,\cdots)$ で定義すると、

$^{\forall}a^n$ に対して、$\sum_{i=1}^{\infty}|a^n_i|=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}<+\infty$ より、$\{a^n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset\ell^1$

$n,m\in\mathbb{N}\ (n>m)$ に対して、

$$d_2(a^n,a^m)=\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}|a^n_k-a^m_k|^2}=\sqrt{\sum_{k=m+1}^{n}\frac{1}{k^2}}=\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}-\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k^2}}\longrightarrow 0\quad(n>m\to\infty)$$

より、d_2 に関してコーシー列だが、

$$d_1(a^n,a^m)=\sum_{k=1}^{\infty}|a^n_k-a^m_k|=\sum_{k=m+1}^{n}\frac{1}{k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k}\longrightarrow\infty-\infty\quad(n>m\to\infty)$$

より、d_1 に関してコーシー列でない。

注：d_1 に関しては (ℓ^1,d_1) が完備なので、$\lim_{n\to\infty}a^n\notin\ell$ を示すだけでよい。

(3)

(ℓ^1,d_1) の収束列は明らかに (ℓ^1,d_2) の収束列であり、

つまり、(ℓ^1,d_1) の閉集合系 $\mathcal{F}_1\subseteq(\ell^1,d_2)$ の閉集合系 $\mathcal{F}_2$

しかし、(2) の点列は、$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\in\mathcal{F}_2$ だが $\notin\mathcal{F}_1$

従って、真に $\mathcal{F}_1\subsetneq\mathcal{F}_2$ となり、(ℓ^1,d_2) の位相のほうが強い。