H25-1

(1) 任意のベクトル $y \in \mathbb{R}^n$ に対して、

$y^T(xx^T)y = (x^Ty)^2 \geq 0$ より、x^Tx は半正定値の定義を満たす。

(2)

Aの固有値は、問題文の命題より、重複を含めて、$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$（全て非負）とおける。

$B = U\mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \cdots, \sqrt{\lambda_n})U^T$ とおくと、$A = B^2$ になっている。

Bを変形して、

$BU = U\mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \cdots, \sqrt{\lambda_n})$

$(b_1u_1\ b_2u_2 \cdots b_nu_n) = (\sqrt{\lambda_1}u_1\ \sqrt{\lambda_2}u_2 \cdots \sqrt{\lambda_n}u_n)$ $\quad (B = (b_1, \cdots, b_n),\ U = (u_1, \cdots, u_n))$

$b_iu_i = \sqrt{\lambda_i}u_i \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$

より、$\sqrt{\lambda_i}\ (i = 1, 2, \cdots, n)$ は、Bの非負の固有値であり、Bは明らかに対称行列なので、問題文の命題より、Bは半正定値である。

(3) (1)より、$\forall x \in \mathbb{R}^n$ に対して、$(xx^T)_{ij} = x_ix_j$ であり、明らかに対称行列なので、

$$0 \leq \langle A, xx^T \rangle = \sum_{i,j} a_{ij}(xx^T)_{ij} = \sum_{i,j} a_{ij}x_ix_j = x^TAx$$

従って、Aは半正定値となる。

(4) (2)より、

$^\exists B$：半正定値対称 s.t. $A = B^2$

$^\forall X$：半正定値対称行列 に対して、

$^\exists Y$：半正定値対称 s.t. $X = Y^2$

$$\langle A, X \rangle = \sum_{i,j} a_{ij}x_{ij} = \sum_{i,j}\Big(\sum_k b_{ik}\underset{\downarrow\, b_{jk}}{b_{kj}}\Big)\Big(\sum_l y_{il}\underset{\downarrow\, y_{jl}}{y_{lj}}\Big) = \sum_{i,j}\sum_k\sum_l (b_{ik}y_{il})(b_{jk}y_{jl})$$

$$= \sum_{k,l}\Big(\sum_i b_{ik}y_{il}\Big)\Big(\sum_j b_{jk}y_{jl}\Big)$$

$$= \sum_{k,l}\Big(\sum_i b_{ik}y_{il}\Big)^2$$

$$\geq 0$$