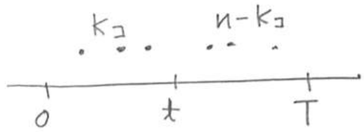
問8 (一般問題) H13



(1) n個の点を $x_1, x_2, \cdots, x_n$ とする。

$[0,t]$ にちょうど k個入っている時，${}_nC_k$ 通りの x の組の各場合について、

P(ある点 x が $[0,t]$ に含まれる) $= \frac{t}{T}$ （∵ ランダムにとったので）

$P(t,k) =$ ($[0,t]$ にちょうど含まれる k個の点として、$\{x_1, \cdots, x_n\}$ から ${}_nC_k$ 通り考えられ、その各場合に対して、
$P(x \in [0,t]) = \frac{t}{T}$ より)

$$= \underline{{}_nC_k \left(\frac{t}{T}\right)^k \left(1-\frac{t}{T}\right)^{n-k}} \quad /\!/ \quad \sim \text{Binomial}\left(n, \frac{t}{T}\right)$$

(2) $$P^{(n)}(t,k) = \frac{n!}{k!(n-k)!}\left(\frac{\lambda t}{n}\right)^k \left(1-\frac{\lambda t}{n}\right)^{n-k}$$

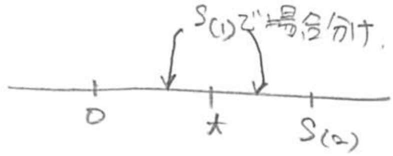
$$= \frac{(\lambda t)^k}{k!} \cdot \underbrace{\left(1-\frac{\lambda t}{n}\right)^n}_{\to e^{-\lambda t}} \cdot \underbrace{\frac{n!}{n^k}\left(1-\frac{\lambda t}{n}\right)^{-k}\frac{1}{(n-k)!}}_{①}$$

$\frac{n-\lambda t}{n}$

$\left(\frac{n}{n-\lambda t}\right)^k \frac{n!}{n^k}$

$$① = \frac{\overbrace{n\cdot(n-1)\cdot \cdots \cdot (n-k+1)}^{k\text{コ}}}{n\cdot \cdots\cdots \cdot n} \cdot \underbrace{\left(1-\frac{\lambda t}{n}\right)^{-k}}_{\to 1}$$

$$= \left(\frac{n}{n}\right)\left(\frac{n-1}{n}\right)\cdot \cdots \cdot \left(\frac{n-k+1}{n}\right) \to 1$$



$\therefore$ ① $\to 1$

$$\therefore P^{(n)}(t,k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \quad /\!/$$

(3) $P(t,0) = P(\underbrace{S_{(0)} = 0 \le t}_{\text{常に成立}} < S_{(1)}) = P(t < S_{(1)})$ ，$P(t,1) = P(S_{(1)} \le t < S_{(2)})$

$$P(S_{(2)} \le t) = 1 - P(t < S_{(2)}) = 1 - \{\underbrace{P(S_{(1)} \le t < S_{(2)})}_{= P(t,1)} + \underbrace{P(t < S_{(1)} < S_{(2)})}_{= P(t < S_{(1)}) = P(t,0)}\}$$

~~$= 1 - \int_0^t P(S_{(1)}$~~

$$= 1 - P(t,1) - P(t,0) \quad /\!/$$

(4) 比 $$\frac{d}{dt}P(S_{(2)} \le t) = -\frac{d}{dt}\left\{n\left(\frac{\lambda t}{n}\right)^1\left(1-\frac{\lambda t}{n}\right)^{n-1}\right\} - \frac{d}{dt}\left\{\left(1-\frac{\lambda t}{n}\right)^n\right\}$$

$$= -\left\{\lambda\left(1-\frac{\lambda t}{n}\right)^{n-1} + \lambda t (n-1)\left(-\frac{\lambda}{n}\right)\left(1-\frac{\lambda t}{n}\right)^{n-2}\right\} - n\cdot\left(-\frac{\lambda}{n}\right)\left(1-\frac{\lambda t}{n}\right)^{n-1}$$

$$= -\lambda\left(1-\frac{\lambda t}{n}\right)^{n-1} + \frac{\lambda^2 t}{n}(n-1)\left(1-\frac{\lambda t}{n}\right)^{n-2} + \lambda\left(1-\frac{\lambda t}{n}\right)^{n-1} = \lambda^2 t \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \left(1-\frac{\lambda t}{n}\right)^{-2} \cdot \left(1-\frac{\lambda t}{n}\right)^n$$

$$\to \lambda^2 t \cdot 1 \cdot 1 \cdot e^{-\lambda t} = \lambda^2 t e^{-\lambda t} \quad /\!/$$