H31-B

(2)

$$\Gamma(s+1) = \int_0^\infty e^{-x}x^s dx = \left[-e^{-x}x^s\right]_0^\infty + \int_0^\infty s e^{-x}x^{s-1}dx \quad = s\Gamma(s) \qquad (s>0)$$

(1)

この広義積分は収束しないとしたら、$+\infty$に発散するので、(2)は$+\infty$で一致する。

・$s=1$のとき

$$\int_0^\infty e^{-x}dx < +\infty$$

・$s=n$ $(n=2,3,\cdots)$のとき

$$\Gamma(n) = (n-1)!\,\Gamma(1) < +\infty$$

・それ以外の時 (2)が定義される限り帰納的に用いると、

$\exists s_0>0$, $\exists c\in\mathbb{R}$, $s_0-1<0$ かつ $\Gamma(s)=(s-1)\Gamma(s-1)=\cdots=c\Gamma(s_0)$

$$\Gamma(s_0) = \int_0^1 e^{-x}x^{s_0-1}dx + \int_1^\infty e^{-x}x^{s_0-1}dx \le \int_0^1 e^{-x}x^{s_0-1}dx + \int_1^\infty e^{-x}dx < +\infty$$ より従う。

(3)

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-x}x^{-\frac{1}{2}}dx$$

$$= \int_0^\infty e^{-y^2}dy$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$