問8 H18

(1)

$E(I_{\{X>x\}}) = P(X>x) = 1-F_X(x)$ //

(2) $^\forall a \geq 0$に対して、$\max(X-a,0)$も非負値実数関数なので、$Y \triangleq \max(X-a,0)$は、

$$E(Y) = \int_0^\infty (1-F_Y(x))dx = \int_0^\infty (1-P(Y\leq x))dx$$

$$P(Y\leq x) = P(\max(X-a,0)\leq x) = P(X-a\leq x,\ 0\leq x) = P(X-a\leq x) = P(X\leq a+x)$$

$= F_X(a+x)$ (if $x\geq 0$)より、

$$E(\max(X-a,0)) = \int_0^\infty (1-F_X(a+x))dx$$ $y=a+x$で変換すると、

$$= \int_a^\infty (1-F_X(y))dy$$ //

(3)

$E(X)=E(Y)$より、

$$\int_0^\infty (1-F_X(x))dx = \int_0^\infty (1-F_Y(y))dy \quad —— (*)$$

$^\forall a\geq 0$を固定する。

① $a\geq t$のとき、 積分区間 $t\leq a\leq x$では、常に、$F_X(x)\geq F_Y(x)$より、$1-F_X(x)\leq 1-F_Y(x)$,

$$\int_a^\infty (1-F_X(x))dx \leq \int_a^\infty (1-F_Y(x))dx$$

(2)より、

$$E(\max(X-a,0)) \leq E(\max(Y-a,0))$$

② $t>a$のとき、(*)より、

・ $$\int_0^a (1-F_X(x))dx + \int_a^t (1-F_X(x))dx + \int_t^\infty (1-F_X(x))dx = \int_0^a (1-F_Y(x))dx + \int_a^t (1-F_Y(x))dx + \int_t^\infty (1-F_Y(x))dx$$ —— Ⓐ

・ $$\int_t^\infty (1-F_X(x))dx \leq \int_t^\infty (1-F_Y(x))dx$$ —— Ⓑ

・ $$\int_a^t (1-F_X(x))dx \geq \int_a^t (1-F_Y(x))dx$$ —— Ⓒ

(∵(3)の条件)

・ $$\int_0^a (1-F_X(x))dx \geq \int_0^a (1-F_Y(x))dx$$ —— Ⓓ

Ⓐ とⒹより、

$$E\left(\max(X-a,0)\right)-E\left(\max(Y-a,0)\right) \geqq 0 \quad \blacksquare$$