

音乐原理通论 - A Treatise on Music Principle

《音乐与科技》通识课配套参考讲义

作者：周洋

组织：上海大学机自学院无人艇工程研究院 & 人工智能研究院

时间：August 28, 2025

版本：Ver. 3.1415926

模板：ElegantBook 4.3 修改版



纪念 Jazz Fusion 钢琴家，和泉宏隆先生（1958.09.28-2021.04.26）

目录

序章：写在前面	1
0.1 序言	1
0.2 本书主要结构	3
0.3 凡例	4
第1章 声学基础	7
1.1 基本假设	7
1.2 一维声波	9
1.2.1 波动方程推导：弹性体形式	9
1.2.2 波动方程推导：液体形式	11
1.2.3 波动方程推导：气体形式	12
1.3 弦的振动	15
1.3.1 问题描述	15
1.3.2 波动方程推导	16
1.4 流体中的声波	17
1.4.1 连续性方程	17
1.4.2 Euler 方程	18
1.4.3 波动方程推导	20
1.5 固体中的声波	23
1.5.1 平衡方程	26
1.5.2 几何方程	28
1.5.3 本构关系	32
1.5.4 以位移表示的弹性力学问题	35
1.5.5 波动方程推导	36
1.6 波动方程的解与含义	46
1.6.1 d'Alembert 行波解	46
1.6.2 平面波的行波解	52
1.7 声强与声压级	55
1.7.1 声音强度	55
1.7.2 电路类比	58
1.7.3 声压级	59
第2章 音乐声学	62

2.1	典型乐器声学分析	62
2.1.1	弦振动的一般解	62
2.1.2	细杆中的弯曲波	67
2.1.3	平面薄膜振动	72
2.1.4	平板弯曲振动	78
2.2	Fourier 变换	85
2.2.1	Fourier 级数	85
2.2.2	Fourier 积分	91
2.2.3	连续时间 Fourier 变换 (CFT)	93
2.3	乐音体系的构成	98
2.3.1	声音的物理表现	98
2.3.2	乐音的频率关系	98
2.3.3	十二平均律	100
2.4	弦乐器的声学解释	104
2.4.1	拨弦乐器	105
2.4.2	击弦乐器	108
2.4.3	拉弦乐器	110
2.4.4	音板与共鸣腔	111
2.5	管乐器的声学解释	112
2.5.1	开管乐器	113
2.5.2	闭管乐器	114
2.5.3	超吹技法	115
2.6	打击乐器的声学解释	115
2.6.1	音高打击乐器	116
2.6.2	普通打击乐器	117
2.6.3	特例说明	121
第3章	和声理论	122
3.1	基础乐理	122
3.1.1	调式音阶	122
3.1.2	音程关系	127
3.1.3	和弦	129
3.1.4	节奏	137
3.1.5	织体	139
3.2	再谈音阶	140
3.2.1	七大中古调式	140
3.2.2	小调的三种模式	144

3.2.3 五声音阶	145
3.2.4 音阶的横向思维	147
3.3 再谈和弦	152
3.3.1 和弦排列方式 (Voicing)	152
3.3.2 和弦进行 (Turnaround)	153
3.3.3 声部连接 (Voice Leading)	156
3.4 和声分析	157
3.4.1 和声编配的重要性	157
3.4.2 古典音乐篇章	158
3.4.3 流行音乐篇章	161
3.4.4 影视游戏配乐篇章	169
3.4.5 Jazz 音乐篇章	173
3.4.6 和泉宏隆独奏特辑	176
第 4 章 数字音频	182
4.1 声音录制与回放	182
4.1.1 换能器	183
4.1.2 声音存储设备	184
4.1.3 电声乐器工作原理	185
4.2 信号与系统	185
4.2.1 线性卷积	190
4.2.2 离散时间 Fourier 变换 (DTFT)	196
4.2.3 连续时间的 Laplace 变换	204
4.2.4 离散时间的 z 变换	214
4.2.5 频率响应	222
4.3 数模转换	236
4.3.1 采样定理	236
4.3.2 信号量化	236
4.3.3 信号编码	236
4.3.4 信息传输	236
4.4 数字信号处理	236
4.4.1 离散 Fourier 变换 (DFT)	236
4.4.2 快速 Fourier 变换 (FFT)	237
4.4.3 数字滤波器	237
第 5 章 声音合成	238
5.1 电子音乐概述	238
5.2 减法合成原理	238

5.3 FM 合成原理	240
5.4 音色设计	240
5.4.1 合成器的设计逻辑	240
5.4.2 声音调制	240
5.5 数字音频工作站 (DAW)	240
5.5.1 MIDI 协议	240
5.5.2 乐器采样与演奏技法 (Articulation)	240
5.5.3 软音源 (Sample Library)	240
5.5.4 编曲过程	240
第 6 章 音乐的未完待续	241
6.1 音频效果器	241
6.1.1 EQ 类	241
6.2 物理建模合成	241
6.3 人工智能音乐	241
6.4 尾声：后记	241
参考文献	242
附录 A 相关数学基础	247
A.1 一元函数的 Taylor 展开	247
A.2 梯度、散度与旋度	248
A.2.1 方向导数	248
A.2.2 梯度	248
A.2.3 散度	249
A.2.4 旋度	249
附录 B 相关力学基础	251
B.1 Newton 第二定律	251
B.2 d'Alembert 原理	251
B.3 守恒定律	252
附录 C 相关热力学基础	253
C.1 气体分子动理论	253
C.2 理想气体状态方程	254
C.3 理想气体的比热容	254
附录 D 曲线坐标系	256
D.1 基础理论	256

D.2	Edington 张量	258
D.3	曲线坐标系下的 Hamilton 算子	260
D.4	基向量关于坐标的偏导数	261
D.5	正交曲线坐标系	265
附录 E 补充证明（指标形式）		269
E.1	物质导数	269
E.2	势能与势函数	269
E.3	体积应变	269
E.4	场论关系式（向量部分）	270
E.5	场论关系式（张量部分）	273
E.6	广义 Gauss 公式	274
E.7	广义 Stokes 公式	274
E.8	薄膜振动方程的一般化推导	275
附录 F 相关电磁学基础		278
F.1	静电场	278
F.2	恒定磁场	281
F.3	Lorentz 力	285
F.4	电磁感应	286
F.5	Maxwell 方程组	286
F.6	电磁波	288
附录 G 特殊函数相关		291
G.1	Gamma 函数	291
G.2	Bessel 方程	291
G.3	第一类 Bessel 函数	292
G.4	第二类 Bessel 函数	293
G.5	修正 Bessel 函数	295
附录 H 和声理论相关		297
H.1	和声可视化	297
H.2	常用调式音阶汇总对比	298
H.3	级数和弦的功能属性汇总	299
H.4	和声逻辑思维导图	300
附录 I 信号系统的内积视角		302
I.1	线性空间的内积	302
I.2	向量内积	302



I.3	函数内积	303
I.4	复数域的内积	304
I.5	卷积的内积视角	306
I.6	Fourier 变换的内积视角	307
	术语索引	310



插图目录

图 1 音乐原理相关内容的串联关系	3
图 1.1 弹性体形式的一维声波示意图	9
图 1.2 液体形式的一维声波示意图	11
图 1.3 气体形式的一维声波示意图	12
图 1.4 弦的振动发声示意图	16
图 1.5 弹性体内微元六面体的受力示意图	24
图 1.6 弹性体内斜面应力的受力示意图	26
图 1.7 弹性体内微元变形情况示意图	28
图 1.8 无旋场、无散场, 以及有旋有散场情形下的向量场示意图	43
图 1.9 无旋场无散场情形下的向量场示意图	43
图 1.10 一维声波解的含义	47
图 1.11 不同时刻下弦的波动状态	50
图 1.12 初始位移分布函数示意图	50
图 1.13 不同时刻下的二维波动状态	52
图 1.14 标准等响曲线簇 (ISO 226:2023)	60
图 2.1 Euler 公式的几何表示	64
图 2.2 弦振动的驻波解	66
图 2.3 不同 n 取值情况下弦振动的初始波形	66
图 2.4 杆的振动发声示意图	67
图 2.5 薄膜振动的参数化几何模型	74
图 2.6 平板弯曲振动参数化示意图	79
图 2.7 平板单元力与力矩的平衡关系示意图	80
图 2.8 不同模态下的 Chladni 图形	84
图 2.9 方波 $f_{\text{square}}(t)$ 、锯齿波 $f_{\text{sawtooth}}(t)$ 和三角波 $f_{\text{triangle}}(t)$ 的函数图	87
图 2.10 不同项数下 $f_{\text{square}}(t)$ 的 Fourier 级数展开波形	88
图 2.11 不同项数下 $f_{\text{sawtooth}}(t)$ 的 Fourier 级数展开波形	89
图 2.12 不同项数下 $f_{\text{triangle}}(t)$ 的 Fourier 级数展开波形	90
图 2.13 $f_{\text{square}}(t)$ 、 $f_{\text{sawtooth}}(t)$ 和 $f_{\text{triangle}}(t)$ 的 Fourier 级数展开瀑布图	90
图 2.14 rect 函数和 sinc 函数的函数图	93
图 2.15 周期 rect 函数和其频域函数图	95
图 2.16 频率倍数关系不均等的单音序列会遇上升降调问题	101
图 2.17 频率倍数关系相等的单音序列可以任意升降调	101

图 2.18 不同等分情形下的单音排列与和谐声音的拟合关系	102
图 2.19 钢琴键盘与十二平均律的对应关系	103
图 2.20 拨弦乐器的初始位移状态	105
图 2.21 击弦乐器的初始速度状态	109
图 2.22 拉弦乐器琴弦振动示意图	110
图 2.23 拉弦乐器琴弓处位移变化曲线	111
图 2.24 开管乐器中压强扰动 \tilde{p} 和空气质点速度 v 的前四个振动模态	113
图 2.25 闭管乐器中压强扰动 \tilde{p} 和空气质点速度 v 的前四个振动模态	115
图 2.26 单一模态下圆对称圆膜振动的示意图	119
图 3.1 音名在钢琴键盘上的对应关系	125
图 3.2 和弦进行的五度圈关系	154
图 3.3 大调与小调 II → V → I 所构建的 Voice Leading	157
图 4.1 声音录制与回放的实现过程链路图	183
图 4.2 信号链路的系统图	186
图 4.3 RC 电路系统示意图	188
图 4.4 RC 并联电路的两种反馈系统示意图	189
图 4.5 线性卷积在信号与系统中的应用	191
图 4.6 掷骰子联合概率分布的卷积示意	194
图 4.7 时域卷积和频域乘积的信号示例	197
图 4.8 不同 k 值情形下的 $\cos[k\pi n]$ 示意图	198
图 4.9 Laplace 变换收敛域示例	208
图 4.10 RC 串联电路电容电压变化曲线	210
图 4.11 z 变换收敛域示例	219
图 4.12 RC 串联电路的频率响应曲线图	225
图 4.13 RC 串联电路的频率响应 Bode 图	226
图 4.14 频率响应与极/零点的几何关系示意图	230
图 4.15 LTI/LSI 系统在共振点处的输出信号示意图	232
图 4.16 话筒-扬声器音频反馈系统示意图	234
图 5.1 减法合成工作原理 (图片来源: Logic Pro 使用手册: 减法合成器组件)	238
图 5.2 ADSR 原理 (图片来源: Logic Pro 使用手册: 减法合成器组件)	239
图 E.1 平面电磁波传播示意图	290
图 G.1 n 阶 Bessel 函数的坐标曲线	293
图 G.2 n 阶第二类 Bessel 函数的坐标曲线	294
图 G.3 两类修正 Bessel 函数的坐标曲线	296

图 H.1 十二音体系下的和声对称性	297
图 H.2 两种减音阶与减七和弦的对照关系	298
图 H.3 和声逻辑思维导图	301



表格目录

表 2.1 220 Hz 为基频的声音频率分布	99
表 2.2 分别以 110 Hz 与 220 Hz 为基频的单音包含关系	99
表 2.3 以不同正整数倍频率为基频的单音频率分布关系	100
表 2.4 十二平均律中单音的间隔与纯比值的对应关系	103
表 3.1 自然大调音阶	123
表 3.2 C 自然大调音阶的两种表示法	124
表 3.3 自然小调音阶（通过与 C 自然大调音阶的关系建立）	124
表 3.4 两种自然小调的唱名表示法	126
表 3.5 通过自然大调音阶构建级数的概念	129
表 3.6 两种自然小调的唱名与级数表示法	129
表 3.7 常用和弦及它们的和弦内音	133
表 3.8 自然大调音阶中的 7 个顺阶和弦	135
表 3.9 自然小调音阶中的 7 个顺阶和弦（关系大调视角）	136
表 3.10 自然小调音阶中的 7 个顺阶和弦（纯首调视角）	136
表 3.11 节拍中不同音符之间的关系	137
表 3.12 乐曲中常用的节拍	137
表 3.13 架子鼓演奏常规的四四拍（四小节为一组）	138
表 3.14 Ionian 调式	140
表 3.15 Dorian 调式	141
表 3.16 Phrygian 调式	142
表 3.17 Phrygian Dominant 调式	142
表 3.18 Lydian 调式	143
表 3.19 Mixolydian 调式	143
表 3.20 Aeolian 调式	144
表 3.21 Locrian 调式	144
表 3.22 小调的三种模式	145
表 3.23 中国五声音阶	146
表 3.24 日本五声音阶（平调子）	146
表 3.25 日本五声音阶（阴旋）	146
表 3.26 东南亚五声音阶	147
表 3.27 印度五声音阶	147
表 3.28 Czerny - Études OP. 849 No. 26 和声分析	158

表 3.29 Bach - Prelude in C Major, BWV 846 No. 1 和声分析	159
表 3.30 Beethoven - Piano Sonata in C [#] minor, Op. 27 No. 2 第一乐章和声分析	160
表 3.31 The Beatles - Yesterday 和声分析	161
表 3.32 The Beatles - Hey Jude 和声分析	162
表 3.33 周杰伦 - 黑色幽默和声分析	163
表 3.34 周杰伦 - 你好吗和声分析	165
表 3.35 王力宏 - Forever Love 和声分析	166
表 3.36 方大同 - 爱爱爱和声分析	167
表 3.37 方大同 - Love Song 和声分析	168
表 3.38 John Williams - Hedwig's Theme 和声分析	169
表 3.39 光田康典 - Corridor of Time 和声分析	170
表 3.40 目黑将司 - Life Will Change 和声分析	171
表 3.41 骆集益 - 御剑江湖和声分析	172
表 3.42 麦振鸿 - 莫失莫忘和声分析	173
表 3.43 Frank Churchill/Larry Morey - Someday My Prince will Come 和声分析 .	173
表 3.44 Luiz Bonfá - Black Orpheus 和声分析	174
表 3.45 Erroll Garner - Misty 和声分析	175
表 3.46 Bill Withers - Just the Two of Us 和声分析	176
表 3.47 和泉宏隆 - Twilight in Upper West 和声分析	177
表 3.48 和泉宏隆 - Omens of Love 和声分析	178
表 3.49 和泉宏隆 - Takarajima 和声分析	179
表 3.50 和泉宏隆 - Forgotten Saga 和声分析	180
表 4.1 Fourier 级数复指数展开和离散时间 Fourier 积分的对称关系	201
表 H.1 常用调式音阶及不同的音程关系对比	299
表 H.2 级数和弦的功能属性汇总	300

序章：写在前面

0.1 序言

在艺术领域中，音乐与理工科一直密不可分。常人看来，也许这种认识难以理解，可实际上，音乐的发展离不开科学技术的推动作用。就教材来说，目前作者已经知道国内外各种琳琅满目，如《音乐与数学》[1–5]、《音乐与物理》[6–8]、《音乐声学》[9–13]、《计算机音乐》[14–16]、《音频音乐 & 数字音频技术》[17–23]、《电子音乐 & 声音合成技术》[24–27]、《音乐的数字信号处理》[28]、《Music: A Mathematical Offering》[29]、《Musimathics》[30, 31]、《Fundamentals of Musical Acoustics》[32]、《The Physics of Musical Instruments》[33] 等阐述偏理工科特色的音乐书籍。这说明，音乐作为一门跨学科研究领域，已逐渐形成完善的知识架构和学科体系。

本质而言，音乐是声音的一种表现形式，而声音的物理学基础是声学。声学是偏理论且比较小众的一门学科（开设该专业的院校寥寥无几），相关基础知识一般分散在各种力学教材中，如《流体力学》[34, 35]、《弹性力学》[36–38]，以及《连续介质力学》[39] 里。声学作为一门独立的学科，主要得益于瑞利（Rayleigh）和莫尔斯（Morse）的两本巨著《The theory of sound》[40, 41] 和《Vibration and sound》[42, 43]。在此基础上，近些年国内外也凝结出版了一批较为权威的理论声学与声学工程书籍[44–54]。随着电磁领域的突破[55–61] 和后续进入繁荣发展的计算机时代，声音更以“信号”作为普遍研究对象，延伸出了以信号处理为核心的专业学科。相关教材和专著包括《信号与系统》[62–67]、《离散时间信号处理》[68]、《数字信号处理》[69–72]、《数字音频信号处理》[73] 等。然而，这些书籍主要以泛指的“声音”或“信号”作为阐述对象，而非“音乐”；毕竟从概念上讲，音乐只是声音或信号的一个子集。另外，虽然这些书籍较为专业，理论知识精深，但主要应用于特定的学科领域，无法得到广泛的科普，所以很难为大众所熟知。

除了音乐理工科的一面，大众更熟悉其“艺术”的一面。音乐也被划分在艺术领域，作为一门相当古老的学科，走过了漫长的岁月，积累了灿烂的艺术文明（可参考《诺顿音乐断代史丛书》系列[74–79]）。现如今，得益于流行音乐的发展，音乐作为所谓“九大艺术”之一，相比于其他艺术领域，对于大众而言也显得更加“亲民”。几乎人人都有自己喜爱的音乐，许多人的生活已离不开音乐。音乐已然称为现代人重要的“精神食粮”。

当然若要深入研究“艺术”的音乐，如和声理论、配器法，以及现代音乐的录音、编曲及混音等，看书其实并不是一个很好的策略，因为音乐是“时间的艺术”。在如今互联网发达的时代，看视频教程和参与网络论坛其实是非常好的学习音乐方式。尽管在知识付费已大为普遍的时代，仍旧有一些非常优秀的免费视频教程和网站，如《好

和弦》系列 [80]、《爵士专业课》系列视频 [81]，以及论坛“音频应用” [82] 等。此时，书籍 [83-109] 只能当作“参考书”或“工具书”（本书这方面亦是如此），需要查阅相关资料时进行补充学习即可。

作者上世纪 90 年代出生，一直以来都是非常典型的理工科生。但从小主动学习古典音乐和传统乐器演奏，同时也受到了音乐潮流文化的巨大影响，对音乐痴迷般的热爱，长时间的沉浸早已不能说音乐只是自己的一个“兴趣爱好”。当然，尽管人人热爱音乐，但对音乐的敏感程度其实大不相同，想研习音乐的初心也不一样。作者长时间“额外”投入时间精力成本学习音乐，其实也不知为何，反正越学越觉得自己无知，越无知就越想学，最后一步步落入了学习音乐的“深渊”。

自从事高校工作以来，作者一直也未考虑把音乐当作学术研究对象，毕竟所在团队非常优秀，本职工作已颇具挑战，人的精力也是有限的。可就是机缘巧合之下，作者于 2021 年在学校开出了一门名叫《音乐与科技》的本科生通识课。开课之初，由于可参考资料甚少，授课内容便由着自己过去所学率性而设。与此同时，作者也广泛阅读了以上提及的书籍、视频资料和相关专业论文，不断夯实自身理论基础的同时，也萌生了撰写教材讲义的念头。但写书不是件容易的事，前人讲透的道理，后人不该赘述；而前人未曾涉猎的知识点，其实也已寥寥无几。

所以，作者想写一本不太一样的书，它有一点怪。它以“音乐”作为唯一的研究对象，在作者知识范围内，一切有助于理解该对象的基本原理全都放进来，不管是偏“艺术”的还是偏“理工”的，最后形成一种“既非科普、亦非专业”的独特知识框架体系；另外，作者自己期待写成一种带有“温度”的行文——即能够从字里行间中看出对音乐的热忱，而非古板的知识罗列。

作者研究生求学阶段时，曾因上课啥也听不懂而疯狂恶补力学知识，再加上周围有“大神”辅助，终日沉迷于张量分析 [110, 111] 等非常“抽象”的理论，学习之余时常感叹“科学之艰深，人力之有穷”。虽然当时不知道学这些对未来有什么用，但现在写书貌似可以派上用场。本书虽然绝不会在“张量”等理论体系下讨论问题，但也希望力求绝大多数数学推导不在坐标系下展开而进行，可以尽可能体现出数学和力学的魅力——一种普适而统一的美。

除此之外，作者也曾深受《费曼物理学讲义》 [112, 113] 和《朗道理论物理学教程》 [34, 36] 两套巨著写作风格的感染，前者深入浅出，后者清晰简洁。尽管两者写作风格迥异，但均彰显着浓郁的严谨学术风格。相较而言，艺术讲究发散式思维，现如今的音乐发展更是天马行空、肆意妄为。可作者总抱着一丝幻想，能在一本书中，将“严谨”与“浪漫”两种截然不同的气质杂糅到一起，形成一种颇具趣味性的阅读体验。

当然实际如何，作者的视角已无任何参考价值。在作者的通识课结束后，有的学生继续着组乐队、写歌编曲的“纯音乐”道路，也有学生被音乐技术深深吸引，开始“捏音色”、玩效果器；当然也有少部分不排斥数学的，想要继续深入研究音乐声学或人工智能音乐。由此可以看到，虽然大家共同热爱着音乐，但想深入研究音乐的方向却大相径庭；这也再次证明了音乐原理的博大精深，和在大众眼中的“多面性”。总

而言之，不论读者带着哪一面，或何种状态阅读本书，都希望可以在本书中找到一丝乐趣。当然作者更大的希望还在于，本书可以起到学科推广的作用，可以为音乐领域的重视与发展略尽绵薄之力。

最后，作者能力有限，无法保证本书中所有的音乐知识都阐述正确。但不论多么艰难，本书的撰写，小到一张图表、一个公式推导，或是一段文字说明，甚至本书 *LATEX* 模板的修改，都不想假手于人，全由作者本人完成，力求做到所有内容都了然于胸。这也有利用后续版本的更迭与改进。尽管作者平时工作事务繁忙，但空了就抽时间查查资料做点记录，写一点，再写一点；慢慢积累下来，总有本书完稿的那一天。

注 为保证后续音乐知识介绍的连贯性与完整性，本书不再列出任何参考文献，也不会提及太多音乐发展的各种历史等。作者所参考的资料均已在上述列出。当然本书必然还会有许多零碎知识获取自互联网，这里无法一一展开。谨向互联网知识传播的无私贡献者们致以最大的谢意。

2023 年 6 月 10 日，深夜

0.2 本书主要结构

音乐原理相关知识点繁杂而精深，想要梳理出一套脉络清晰的撰写思路来实属不易。作者在参考了其他相关教材和实际教学经验的基础上，以“不发散”为基本准则，以介绍“基础理论”和“基础应用”为主线，提出了如下图1的初步撰写思路：

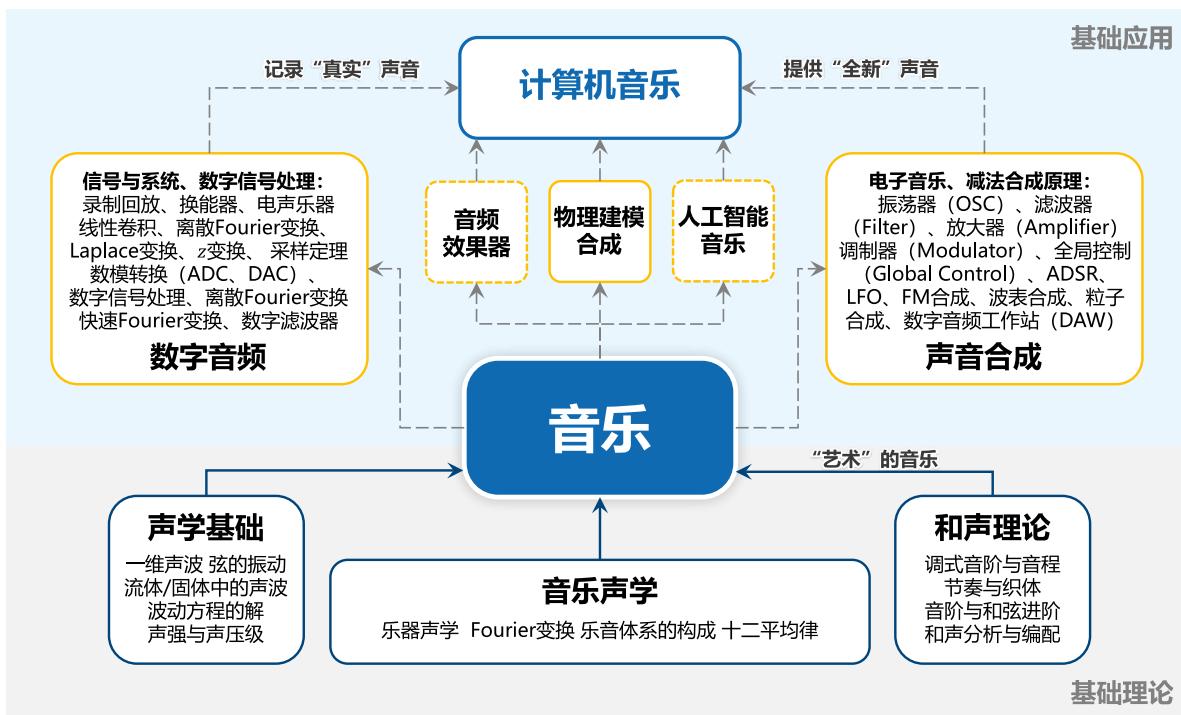


图 1：音乐原理相关内容的串联关系

本书将从音乐的基础理论讲起，主要包含三部分：声学基础、音乐声学与和声理论。这三部分是音乐理论知识的基石；随后，以计算机音乐为主讲述音乐的基础应用，

其中包含两个大的核心章节：**数字音频与声音合成**。当然还有许多知识点比如音频效果器、物理建模合成、人工智能音乐等等，由于较为复杂，若要详细展开则很难短暂收场，所以只好先放置在**音乐的未完待续章节中**，留待以后继续扩充。

0.3 凡例

- 本书围绕“音乐”相关知识展开论述。尽管音乐的目的主要是为了“陶冶情操”、“愉悦身心”（这也是大众喜爱音乐的原因），但为了真正理解音乐，必然会牵扯到许多枯燥乏味的理论知识：
 - 本书不可避免会涉及到部分数学知识，阅读这些部分需要具备**微积分、线性代数及概率论**以上的数学基础；
 - 本书所涉及的物理知识主要在**力学**部分，这部分的阅读具有一定难度（其实作者在本书中已相当“克制”，熟悉力学知识的读者会发现本书探讨的力学问题都是建立在较为基础的模型之上）。作者尽可能先从简单情形（如一维模型）开始介绍，复杂的模型（主要为了完善整个知识框架）可当作补充理论进行跳读；
 - **向量**和**矢量**两种概念经常混淆，其实指代的都是英文中的**vector**。本书中两种说法都会使用，但约定：当“感觉”在描述**数学量**时用**向量**，描述**物理量**时用**矢量**；
 - 数学运算中，点乘 = 点积 = 内积 = 数量积，叉乘 = 叉积 = 外积 = 向量积。本书更倾向于使用**点积**和**叉积**；
 - 当描述一个向量的**坐标分量**时，一般可以用 (x, y, z) ，或者用 $[x, y, z]^\top$ 的矩阵（列向量）形式。本书会混合使用两种写法，具体使用哪种取决于当下的行文是否需要用到矩阵运算（若需要则采用第二种）；
 - 不熟悉力学知识的读者对于“**张量**”的概念将会非常陌生。本书并不想涉及太多张量知识（复杂的内容基本都放在附录部分供参考），所以读者仅需大概了解“**张量是标量与矢量的一种推广**”即可：
 - 标量为零阶张量，是一个只有大小的量；
 - 矢量为一阶张量，是一个有大小、有方向的量，在选定的坐标系下一般将其分量展开为列向量形式；
 - 二阶张量比较抽象（具体遇到时会结合其物理含义进行说明），在选定的坐标系下可以将其分量展开为二维矩阵形式；
 - 二阶以上张量极少遇到，首次出现时会结合其物理含义进行详细说明；
 - 书中涉及到外文人名、专有名词、曲名之处，一律采用原始外文（第一次介绍时会附加中文译名），主要原因在于更方便后续进一步的文献资料查阅；
 - 本书关于数学符号的约定：
 - 一般来说，小写字母指代标量，小写字母加粗指代矢量（一阶张量），大写

字母加粗指代二阶张量。当然也会有一些例外，如描述力一般采用大写字母 F ，矢量则为 \mathbf{F} ；为区别于一些小写字母的运算符（例如散度运算 $\operatorname{div} \mathbf{A}$ ），也会用大写字母加粗指代向量；

- 一维情形下，受力分析不需要考虑矢量，仅需要考虑正负号是否正确即可。因此所有物理量符号均不需要加粗；
- 特别地，取值为零的物理量，不分标量、矢量或张量，所以全部采取不加粗写法；
- 进行导数运算时，可能存在多种表示形式：
 - 函数 $f(x)$ 对 x 求导，可以表示为 $\frac{df}{dx} = f'$, $\frac{d^2f}{dx^2} = f''$, $\frac{d^n f}{dx^n} = f^{(n)}$ ；
 - 特别对时间 t 求导（以函数 $x(t)$ 为例），可以表示为 $\frac{dx}{dt} = \dot{x}$, $\frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}$ ；
 - 当涉及到偏导数运算时，可以表示为 $\frac{\partial f}{\partial x} = f_x$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}$ ；
- 由于下标常常具有其他含义，所以本书尽量避免使用下标表示偏导数运算。除少数情形需要进行缩写，一般还是将偏导数运算写全进行表示；
- 积分公式中，按照一般数学分析书籍里的写法，只有在重积分表示形式下，才将积分区域写在积分符号正下方，其余时候写在右下方；
- 关于无穷大 ∞ 符号，一般特指正无穷大（省略 + 符号）；相对应地，采用 $-\infty$ 指代负无穷大；
- 单竖线符号 $| \cdot |$ 和双竖线符号 $\| \cdot \|$ 在表述上容易混淆，本书做统一约定：指代实数绝对值和矩阵行列式时，采用单竖线；而指代向量的模或丈量范数时，采用双竖线。特别针对复数域，当存在虚部时，求取绝对值实际是求取模长，但一般仍沿用单竖线写法；
- 符号 $/$ 可以指代算数中的除法（节省排版空间），也可以在行文中表示“或”。本书两种用法均会采用，具体为哪种一般联系上下文即可辨别；
- 拉普拉斯（Laplace）算子 ∇^2 ，一般也可使用符号 Δ ，但由于容易与乐理中的“大七和弦”符号混淆（虽然正文部分并未使用），所以本书还是仅采用前者记法。
- 矢量和张量的角标用拉丁字母 i, j, k, \dots 表示；在公式同一项中上标下标重复出现（哑指标）则表示遍历求和（省略求和符号），即满足爱因斯坦（Einstein）求和约定（其实本书正文部分极少涉及曲线坐标系，所以上下标并无实质区别）；
- 本书中绝大多数关于 \mathbb{R}^3 空间的指代，均表示欧几里得（Euclidean） \mathbb{R}^3 空间；换言之，本书基本不涉及黎曼（Riemann）空间等非欧几何学的内容；
- 需指出，鉴于数学符号有限，本书不可避免会遇到采用相同符号描述不同物理/数学量的情况（如 $u(t)$ 可能描述位移函数，也可能表示单位阶跃信号），此时需结合上下文进行理解区分；
- 音乐作为艺术领域的重要分支，具有自己通用的“语言”，即五线谱。但以作者经验，不懂五线谱的如看天书，略懂五线谱的反应不过来，懂五线谱的最好也得

上乐器演练才行。总之，在非乐谱类书籍中记录五线谱就是凸显一个麻烦。所以，关于音乐语言的记录，本书做如下约定：

- 本书预设看书的读者不具备音乐相关的乐理知识，所以尽管“音乐的语言”很重要，但全文不会出现五线谱（必要情形仅用音符作为示意）；
- 本书会大量采用阿拉伯数字（1 2 3 4 5 6 7）、大写英文字母（C D E F G A B），以及罗马数字（I II III IV V VI VII）来指代音乐中的各类“元素”。这三者具体如何使用会在正文进行详细说明；
- 在音乐中有许多变音符号如升号♯、降号♭和还原号♮等。这些概念在正文第一次出现时会进行介绍；实际使用这些符号时，本书按常规约定：用英文字母和罗马数字描述时写在右边（如F♯大调、VII♭级和弦），而用阿拉伯数字描述时写在左边（如♭4音）；
- 和弦有多种表示法。例如一般来说，对于I级和弦，有： $I_{maj}7 = I_M7 = I\Delta$ ， $I_m7 = I_{min}7 = I_7$ ， $I_{dim} = I^\circ$ ， $I_{aug} = I^+ = I^{(\sharp)5}$ ， $I_\emptyset = I_{min}7-5 = I_m7(\flat 5)$ 。以上例子，本书均倾向于采用第一种表示法。
- 本书以通用的西方现代音乐体系展开乐理论述，而诸如中国古典律学等，由于年代久远，知识脉络芜杂，文献资料亦众说纷纭，莫衷一是，许多理论来源并不可考，甚至存在争议，所以只在必要时做简要介绍，不做具体展开；
- 本书绘制矢量图主要采用 PowerPoint，辅以 Mathematica 和 PlantUML 编程，以及 Inkscape 格式调整。

第1章 声学基础

内容提要

- | | |
|------------------|-------------|
| □ 一维声波：流体形式与固体形式 | □ 固体中的声波 |
| □ 弦的振动 | □ 波动方程的解与含义 |
| □ 流体中的声波 | □ 声强与声压级 |

人类最初聆听音乐的方式是通过演奏各种乐器来完成的，这仿佛再稀松平常不过。可若细细探究就会发现整个过程其实并不简单。人之所以能够听到声音，主要依靠振源振动→介质传递→人耳接收，这个完整的链路。如果淡化“人耳为什么可以接收声音并转化为某种情感认知”这个需要脑科学知识来补充回答的问题，那么还需要解释“振源振动带来了什么”以及“介质是如何传递声音”这两个核心问题；除此之外，还需解释清楚“为何只有乐器发出的声音，人类才会认为是音乐（乐音）”。所以可以看到，由一个基本概念，一点点简单的发散，已经把音乐逐渐变得复杂；当然，如若可以合理解释以上问题，回报也是丰厚的——可以更加深入了解我们所热爱的音乐本身。

1.1 基本假设

本节先介绍声学的一些基础和前提假设，以便后续可以顺利进行理论推导。

振源的振动需要能量，能量需要在媒介中“发挥作用”；振源振动后需要在介质中传递，传递的介质也是一种媒介。这些媒介可以统称为连续介质。连续介质是一种力学假设，但这里可以简单地看作就是一种“连续的物质”，一般主要分为两大类：流体与固体。流体是可以流动的物质，在切向作用力下可以任意变形；而固体一般具有固定的形状，不易发生形变，需要受较大力才可使其发生微小的形状变化。

固体中声音的传播主要在弹性体内，即没有到塑性变形阶段；而流体中声音的传播主要在气体和液体内。

性质 弹性体、气体与液体的基本性质如下：

- 弹性体：外力去除便恢复到初始状态，对周围环境不产生影响，变形过程可逆；
- 气体：可压缩性大，压缩过程与温度关系密切（详细介绍见附录C）；
- 液体：除去水击等特殊情况外，可看作不可压缩并与温度无关的流体。

不同于力学知识体系，考虑到声音传播的可能性，在声学领域中，许多关于流体与固体的固有性质探讨，都是在简单情形下展开；如果再凝聚于音乐领域，则可以得到进一步的简化——重点在于，把研究的注意力放在“音乐”本身，而非传递媒介的复杂性上。

假设 本书构建音乐声学理论的几点基本假设：

- 气体和液体都是各向同性物质，没有性质特别的方向，即从任何方向使力都相等的“费力”；从力学上讲，即为在密度相同的任意构型中本构方程相同；
- 声音传播的弹性体媒介也考虑为各向同性物质；
- 尽管会发生形变，但弹性体与液体可以考虑为密度不发生变化（或密度变化非常微小）的物质，而气体为可压缩物质；
- 声音传播时，考虑为绝热过程，也称为定熵过程，意思是不会与外界产生热交换。但这并不代表温度不会发生变化——气体因其可压缩性而与温度相关；
- 媒介自身具有重力，但考虑到音乐声学的讨论情形，一般可视作无重力状态。

除了传播媒介的固有性质以外，还需详细分析传播媒介的运动情况。这种运动很特殊，是一种“波动”现象，所以声音也可称为“声波”。波是一种从“观感上”似乎一直在“前进”（除极少数情况外，后续会讨论），但其实物质只在附近做往复运动的物理现象。这说明物质其实“并不喜欢”被推动，所以它在受外力情况下“象征性”动了动，就带着“强烈的倾向”回去了；当然受惯性影响，虽然想回家，但也只能在自己“家”附近一直往复运动下去。其临近物质的运动也类似，只是会有先后顺序，看上去有一些错位，所以才会带来波动现象。不然物质都沿着一个固定方向运动下去，就无法产生“波动”。

波动现象很容易被肉眼所观察到，也很容易理解上述所说物质的“被动性”。但为了详细了解波动的具体性质，还需要从理论上推导出声音传递的波动方程。

由于波动过程可视为一种动力学模型，所以不论传播媒介的固有性质如何，进行理论分析一般均需要三个步骤：

1. 通过连续介质假设，给出扰动时微元体的受力与媒介固有性质之间的数学关系；
2. 通过质量守恒定律，建立扰动情形下的媒介固有性质与微元体位移在空间上的变化状态之间的数学关系；
3. 通过牛顿（Newton）第二定律和达朗贝尔（d'Alembert）原理（详细介绍见附录B），建立媒介在运动状态下的动力学平衡方程，给出受力与微元体位移在时间上的变化状态（体现在加速度上）之间的数学关系。

按照如上三步顺序进行数学推导，可以清晰看到，最终将可构建出微元体位移在媒介中与时间空间变化之间的数学关系，即可描述扰动情形下物质在媒介中传递的运动状态。建立该方程后，对其寻找解析解，则可以通过最后解的形式来说明是否真的产生了波动现象。

注 考虑到弹性体和液体的媒介固有性质在声音传播时基本不会发生变化，所以此两类媒介情形下的波动方程推导，上述第一步和第二步可以合并。

接下来，本章将从比较简单的一维情形进行各种媒介状态（固体和流体）下的波动方程推导，然后过渡到 \mathbb{R}^3 空间的一般情形，最后给出波动方程解的理论解释，并辅以各种案例进行有针对性的分析，旨在对音乐范畴内的声学基础原理有一个全方位且有深度的透彻理解。

1.2 一维声波

接下来讨论的几类一维声波，真实世界中其实并不存在，主要是为了简化推导步骤而设的一种理想情况，方便先对较简单的模型有一个基本的了解。

1.2.1 波动方程推导：弹性体形式

弹性体形式的一维波动方程推导也许是最为简单的一种。因为弹性体在微小变形下可以用单一的弹性模量 E 来描述物质的固有性质。具体如下：

首先以弹簧振子的一维振动为例，其满足胡克（Hooke）定律，即

$$F = k \cdot \Delta x \quad (1.1)$$

该式描述了一个一维模型下物体的受力 F 与弹簧振子位移 Δx 之间的线性关系， k 为弹性系数。在弹性体内部，这种规律依旧存在，但需要进行扩充才能适用：

- 弹性体的内力是分布力，需要用应力 σ （单位面积下的内力）指代微元体的受力；
- 弹性体的形变也不是固定不变的，需要用应变 ε （单位长度的变化率）指代形变。

一维形态下，与弹簧振子类似，应力与应变也存在线性关系（后续章节1.5.3会介绍更一般的情形），系数为弹性模量 E 。该参数可以用来描述弹性体承受拉压的能力。

同时，一维情形下，面积的意义消失，所以应力 σ 可以直接当作受力来使用；此外，遵循“拉伸”导致“形变增加”的原则来定义应力应变的正负号。

考虑一小段一维形态下的微元体 Δx 作为初始构型下的“**初始体积**”，在受力不均的情况下 t 时刻产生了构型变化：向前“挪动”了一小步（即位移 u ），此时变为了“**当前体积**”。建立一个横向的 x -坐标系，可将该描述转化为如下示意图1.1：

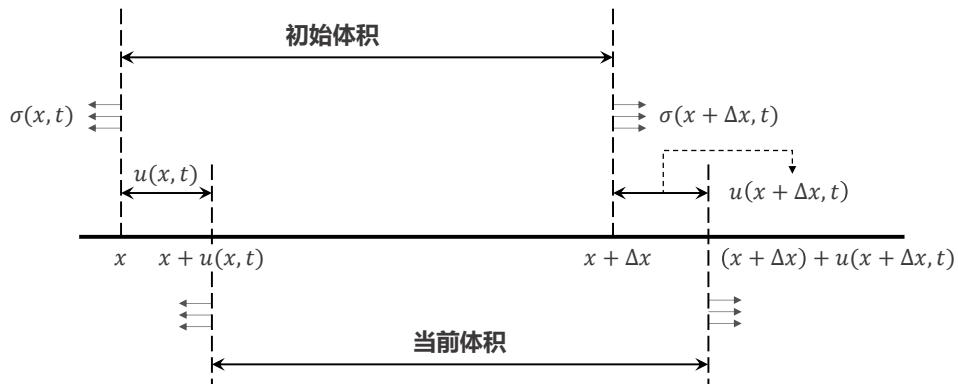


图 1.1: 弹性体形式的一维声波示意图

注 上述图示过程虽然较为明晰，但还有一些细节需要作进一步解释：

1. 需要强调的是，初始构型到当前构型的变化必须当作是“瞬时”完成的。平衡状态不产生任何变化（不计入初始形变），而受力不均（带来扰动）即会瞬间带来微元体新的形变和各质点的位移。所以上图中描述的均可看作是 t 时刻发生的；
2. 物理量 $u(x, t)$ 描述的是平衡状态位于 x 处的质点，在 t 时刻产生的位移。

第一步（连续介质假设）与第二步（质量守恒定律）合并：

一维情形下，微元体的体积即为长度，所以此时新产生的应变可表示为（当前体积-初始体积）/初始体积，计算该式并取极限 $\Delta x \rightarrow 0$ ，则有

$$\varepsilon = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[(x + \Delta x) + u(x + \Delta x, t) - x - u(x, t)] - \Delta x}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \quad (1.2)$$

随后，根据上述介绍的弹性体内 Hooke 定律的一维形式，可给出单个质点 ($\Delta x \rightarrow 0$ ，所以作用对象由微元体变为质点) 的受力（扰动力，用 $\tilde{\sigma}$ 指代）与位移 u 在 t 时刻空间上变化之间的关系：

$$\tilde{\sigma} = E \cdot \varepsilon = E \cdot \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \quad (1.3)$$

第三步（Newton 第二定律和 d'Alembert 原理）：

t 时刻下，在微元体 Δx （初始体积，质量 m 为 $\rho \Delta x$ ，其中 ρ 为密度）上沿任一方向（这里选择右向）建立动力学平衡方程：合力 F_N +惯性力 $F_I = 0$ ，并考虑到此时扰动方向（同时也是加速度 a 的方向）向右，则有

$$\sigma(x + \Delta x, t) - \sigma(x, t) + F_I = 0 \quad (1.4)$$

进一步移项，并代入泰勒（Taylor）展开的一阶展开式（详细介绍见附录A.1）和惯性力表达式 $F_I = -ma$ 化简可知：

$$\sigma(x + \Delta x, t) - \sigma(x, t) \approx \frac{\partial \sigma}{\partial x}(x, t) \cdot \Delta x = ma = \rho \Delta x \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) \quad (1.5)$$

由于应力分布本为平衡状态（处处相等），变化的部分只有额外扰动力 $\tilde{\sigma}$ ，所以有

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x}(x, t) = \frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial x}(x, t) \quad (1.6)$$

将公式(1.3)代入(1.6)，然后再代入公式(1.5)可得：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = c^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \quad (1.7)$$

其中，

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (1.8)$$

公式(1.7)即为弹性体的一维波动方程，参数 c 为常数，其具体含义将在后续的章节1.6.1中介绍。另外这里的量纲需要对应清楚：若应力 σ 直接当作受力来使用，则弹性模量 E 的单位为 N，对应此时的密度 ρ 应为线密度，单位为 Kg/m。

 **笔记** 弹性体形式的一维波动方程还可以通过如下方式推导，更为直观：

$$F_N = \sigma(x + \Delta x, t) - \sigma(x, t) = E \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x+\Delta x, t} - E \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x, t} = ma = \rho \Delta x \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) \quad (1.9)$$

将等式右端 Δx 移到左端，并取极限 $\Delta x \rightarrow 0$ （此时刚好等式右端加速度 a 的作用位置也趋近于 x ），则可以得到上述同样的波动方程表达式。

上式中将 $\sigma(x, t)$ 和 $\sigma(x + \Delta x, t)$ 看作了对应质点新产生的扰动力。

所以可以看到 $\tilde{\sigma}$ 和 $\sigma(x + \Delta x, t) - \sigma(x, t)$ 并不能直接划等号（容易搅混）。前者代表质点（单位体积）所受的扰动力合，后者代表微元体 Δx 所受的扰动力合。

1.2.2 波动方程推导：液体形式

接下来推导液体形式的一维波动方程。有了弹性体波动方程推导的基础，液体形式的推导将会大大简化。

虽然液体的密度一般也视作定值，但由于无法承受切向力而与弹性体差别较大。不过在一维情形下，根本不存在什么切向力，所以实际上与弹性体也并无区别。图1.2给出了液体形式下施加扰动后的运动状态示意图，与弹性体的主要区别在于：

1. 微元体位移 u 相较弹性体更大一些（可理解为液体比弹性体更易推动）；
2. 液体中一般采用压力 p 来指代微元体的受力。

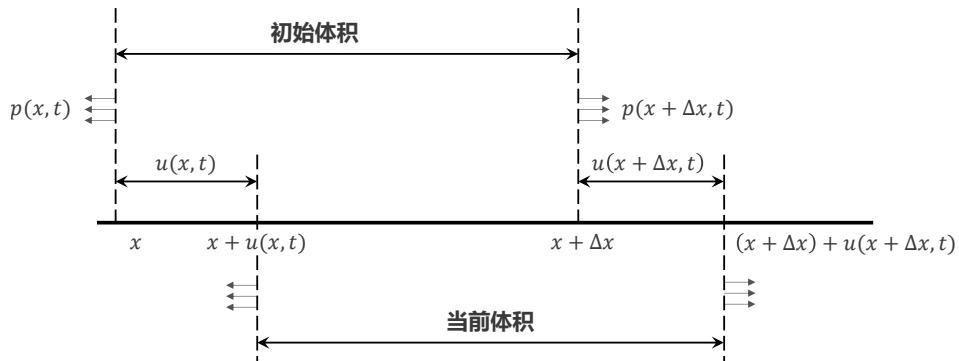


图 1.2: 液体形式的一维声波示意图

第一步（连续介质假设）与第二步（质量守恒定律）合并：

液体由于为各向同性的物质，所以一般可直接采用**体积弹性模量** K 来描述物质的固有性质。体积弹性模量表征了压强扰动 \tilde{p} 与单位体积变化率（体积扰动用 \tilde{V} 表示）的线性关系，即

$$\tilde{p} = K \cdot \frac{\tilde{V}}{\Delta V} \quad (1.10)$$

根据上述示意图，液体前后的体积变化率与弹性体的应变完全一样，所以后续公式也一样，只需把 $\tilde{\sigma}$ 换成 \tilde{p} ， E 换成 K ，即可得到 $\Delta V(\Delta x) \rightarrow 0$ 的质点模型下扰动压强与位移 u 在 t 时刻空间上变化之间的关系：

$$\tilde{p} = K \cdot \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \quad (1.11)$$

第三步（Newton 第二定律和 d'Alembert 原理）：

运动学方程这里也完全一样，只需将 σ 换成 p ， $\tilde{\sigma}$ 换成 \tilde{p} 即可，再代入公式(1.11)，即可得到同样的波动方程：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = c^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \quad (1.12)$$

其中，

$$c = \sqrt{\frac{K}{\rho}} \quad (1.13)$$

可以看到，液体形式下一维波动方程的参数 c 也为常数，并具有跟固体形式相类似的表达式，只是公式中弹性模量 E 换为了体积弹性模量 K 。

1.2.3 波动方程推导：气体形式

气体形式下的一维波动方程推导会略微不同，主要原因在于气体为可压缩流体，所以在扰动情形下密度变化较大。下面示意图1.3描述了气体形式下施加扰动后的运动状态，有以下几点大的变化：

1. 微元体位移 u 大大增加（可理解为气体极易推动）；
2. 扰动产生后，微元体体积明显增大，密度相应减小。

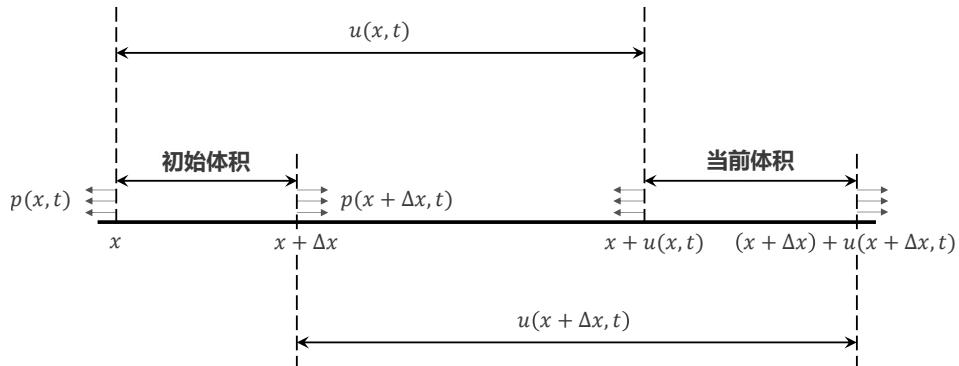


图 1.3: 气体形式的一维声波示意图

第一步（连续介质假设）：

气体作为流体的一种，受力一般也采用压强 p ，媒介固有性质即密度 ρ 。这里需要明确压强 p 与密度 ρ 具备某种函数关系如 $p = f(\rho)$ 。若令初始压强为 p_0 ，压强扰动为 \tilde{p} ，相对应的初始密度为 ρ_0 ，密度变化为 $\tilde{\rho}$ ，则有

$$p_0 + \tilde{p} = f(\rho_0 + \tilde{\rho}) = f(\rho_0) + \frac{dp}{d\rho}(\rho_0) \cdot \tilde{\rho} = p_0 + \frac{dp}{d\rho}(\rho_0) \cdot \tilde{\rho} \quad (1.14)$$

所以，

$$\tilde{p} = \frac{dp}{d\rho}(\rho_0) \cdot \tilde{\rho} \quad (1.15)$$

注 当 ρ_0 给定， $\frac{dp}{d\rho}(\rho_0)$ 为一个确定的系数。即，压强扰动与密度变化之间的线性关系取决于气体的初始密度。

第二步（质量守恒定律）：

当微元体开始受扰动而移动时，气体密度发生改变，但依旧满足质量守恒，即原有质量 = 现有质量：

$$\rho_0 \Delta x = (\rho_0 + \tilde{\rho}) [x + \Delta x + u(x + \Delta x, t) - x - u(x, t)] \quad (1.16)$$

化简上式可得：

$$-\tilde{\rho} \Delta x = (\rho_0 + \tilde{\rho}) [u(x + \Delta x, t) - u(x, t)] \quad (1.17)$$

对上式进行移项并取极限 $\Delta x \rightarrow 0$ ，同时考虑到 $\tilde{\rho}$ 较小，则有

$$\tilde{\rho} = -(\rho_0 + \tilde{\rho}) \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \approx -\rho_0 \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \quad (1.18)$$

这个推导出来的公式颇具合理性：随着扰动开始，微元体位移增加，密度下降，刚好与公式中的符号对应。

第三步 (Newton 第二定律和 d'Alembert 原理):

与前面构建的运动学平衡方程类似, 这里直接给出:

$$p(x + \Delta x, t) - p(x, t) + F_I = 0 \quad (1.19)$$

此时微元体初始质量 m_0 为 $\rho_0 \Delta x$, 进一步移项化简可得:

$$p(x + \Delta x, t) - p(x, t) \approx \frac{\partial p}{\partial x}(x, t) \cdot \Delta x = m_0 a = \rho_0 \Delta x \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) \quad (1.20)$$

同样地,

$$\frac{\partial p}{\partial x}(x, t) = \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x}(x, t) \quad (1.21)$$

将公式(1.15)代入上式(1.21), 并联立公式(1.18)可得:

$$\frac{\partial p}{\partial x}(x, t) = \frac{dp}{d\rho}(\rho_0) \cdot \left[-\rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \right] \quad (1.22)$$

将上式(1.22)代回公式(1.20), 可最终得到与弹性体和液体同样的气体形式一维波动方程:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = c^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \quad (1.23)$$

其中,

$$c = \sqrt{-\frac{dp}{d\rho}(\rho_0)} \quad (1.24)$$

注 这里的推导过程为保持与弹性体和液体情形的统一, 将压强 p 视作了微元体的“内力”(如图1.2和1.3所示), 即满足“压强增大, 体积增大, 密度减小”的符号约定, 所以 $\frac{dp}{d\rho}$ 才会为负值, 可以开根号。但鉴于传统热力学及其它涉及到压强物理量的学科, 均将压强视作“外力”, 所以这里为了方便还是回归“传统”: 当压强为“外力”时, 作用力与反作用力相等, 只是符号相反, 公式(1.20)需要稍作调整, 最终上式(1.24)可以改写为

$$c = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}(\rho_0)} \quad (1.25)$$

此时, 该公式遵循“压强增大, 体积减小, 密度增大”的符号约定。

气体形式下, 由于目前参数 c 还是一种不太好理解的导数形式, 在借助热力学相关知识(详细介绍见附录C)后, 可进一步对上式进行改写。

引理 1.1 (理想气体热力学方程: 绝热(定熵))

引入比热容比 γ , 绝热(定熵)环境下理想气体的热力过程满足如下方程:

$$p = \text{常数} \cdot \rho^\gamma \quad (1.26)$$

证明 对单位质量的物质输入热量 q , 其压力 p 和体积 v (单位质量的体积, 即 V/m) 均可能发生变化, 用全微分的方式来描述(热量变化需用符号 δq , 详见附录C), 即

$$\delta q = \frac{\partial q}{\partial p} dp + \frac{\partial q}{\partial v} dv \quad (1.27)$$

根据附录C介绍的比热容概念(定压比热容 c_p 和定容比热容 c_v), 以及定压或定

容情况下的理想气体状态方程(C.7)可知, 剩余两个气体状态参数可转化为线性关系, 则可将上式中的偏微分项改写为

$$\begin{aligned}\frac{\partial q}{\partial p} &= \left. \frac{\partial q}{\partial T} \right|_v \cdot \frac{\partial T}{\partial p} = c_v \cdot \frac{T}{p} \\ \frac{\partial q}{\partial v} &= \left. \frac{\partial q}{\partial T} \right|_p \cdot \frac{\partial T}{\partial v} = c_p \cdot \frac{T}{v}\end{aligned}\quad (1.28)$$

代回公式(1.27)可得:

$$\delta q = T \left(c_v \cdot \frac{dp}{p} + c_p \cdot \frac{dv}{v} \right) \quad (1.29)$$

在不考虑热交换的情况下, 即绝热状态, 则有 $\delta q = 0$ 。令 $\gamma = c_p/c_v$, 则有

$$\frac{dp}{p} + \gamma \frac{dv}{v} = 0 \quad (1.30)$$

其中, γ 为比热容比。根据附录C中关于两种比热容的描述可知, 液体和固体的 $\gamma = 1$, 而气体的 $\gamma > 1$ 。

由于 $\rho v = \rho V/m = 1$, 所以

$$d(\rho v) = 0 \Rightarrow \rho dv = -v d\rho \Rightarrow \frac{dv}{v} = -\frac{d\rho}{\rho} \quad (1.31)$$

代回公式(1.30)可得:

$$\frac{dp}{p} = \gamma \frac{d\rho}{\rho} \quad (1.32)$$

对上式两端进行积分:

$$\ln p = \gamma \cdot \ln \rho + C \Rightarrow p = \text{常数} \cdot \rho^\gamma \quad (1.33)$$

其中, C 为积分常数。

一个热力系统中, 熵¹的变化与热量变化成正比, 即

$$dS = \frac{\delta Q}{T} \quad (1.34)$$

所以, 绝热环境也可称为定熵环境。

对公式(1.25)引入上述绝热(定熵)环境下理想气体的热力学方程(1.26), 则有

$$\frac{dp}{d\rho} = \text{常数} \cdot \gamma \rho^{\gamma-1} = \frac{\gamma p}{\rho} \quad (1.35)$$

于是, 公式(1.25)可进一步简化为

$$c = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}} \quad (1.36)$$

由于比热容比一般为定值, 所以气体形式下一维波动方程中的参数 c 也为常数。

 **笔记** 值得注意的是, 同为性质类似的流体, 上述推导过程其实也适用于液体形式的一维波动方程。尽管液体在扰动状况下密度变化不大(可视为不可压缩流体), 但对应于体积的变化, 密度也会相应改变, 即对于固定质量 m 的流体(气体或液体)来说, 有

$$\rho V = m \Rightarrow d(\rho V) = 0 \Rightarrow \frac{dV}{V} = -\frac{d\rho}{\rho} \quad (1.37)$$

¹熵的定义可参阅一般热力学教材。熵是状态参数, 需要通过热力学第二定律导出, 这里不做具体展开。

所以液体形式下的体积弹性模量公式(1.10)可以改写为

$$\tilde{p} = -K \cdot \frac{\Delta \rho}{\rho} = -\frac{K}{\rho} \tilde{\rho} \quad (1.38)$$

与公式(1.15)进行印证可得：

$$\frac{dp}{d\rho}(\rho_0) = -\frac{K}{\rho_0} \quad (1.39)$$

由于此时的推导依旧将压强视作“内力”，所以需要代入公式(1.24)进行参数 c 的计算，最终可得：

$$c = \sqrt{\frac{K}{\rho_0}} \quad (1.40)$$

上式中，液体形式下密度变化较小，所以下标可以去掉，即得到了与液体形式一维波动方程同样的参数 c 表达式。

1.3 弦的振动

不同于前述几种一维波动形式，弦的振动是真实存在的，并广泛应用于乐器发声当中。弦的振动只是一种振源的振动，若想将声波传递出去，还需要介质如空气等进行传递。

弦的振动专门单独列出来一节，因为它没法归类到任意一种媒介当中去。考虑到弦的振动并不是在单一的维度上产生位移，所以并不符合一维模型（一维模型不允许有第二个维度）；如果将弦的振动归类到三维弹性体中也明显不合适，因为弦在横截面上的尺度远远小于长度的尺度，分析的时候也很难用一般情形下的三维弹性体来处理。所以，对于弦的振动需要单独作为一种情形进行分析。庆幸的是，弦振动的波动方程推导非常简单，而且较为直观。

1.3.1 问题描述

弦的振动有几点非常特殊，所以需要首先对其基本性质做一个归纳：

性质 弦振动的基本性质：

- 一根弦在无张力情形下是无法保持其形态的，所以不能当作弹性体来处理（不符合线性的应力应变关系），主要原因在于其自身具有一定重力；
- 在有张力情形下，弦的张紧状态又可视为无重力，且弦上处处拉伸力等于张力；
- 张紧的弦上只能施加小扰动，此时弦上各点沿垂直弦长方向产生扰动位移 u 。实际计算时，可以对位移 u 及其导数的高阶小量进行忽略。

由于扰动时弦的形变小，且不符合 Hooke 定律，根据以上基本性质，任意扰动情形下弦上处处所受拉伸力仍可视为等于张力（定值，用 T 表示）。

沿弦长方向和垂直弦长方向建立坐标系，当弦受扰动进行振动时，在弦上选取微元体进行受力分析，以上描述可转化为如下示意图1.4：



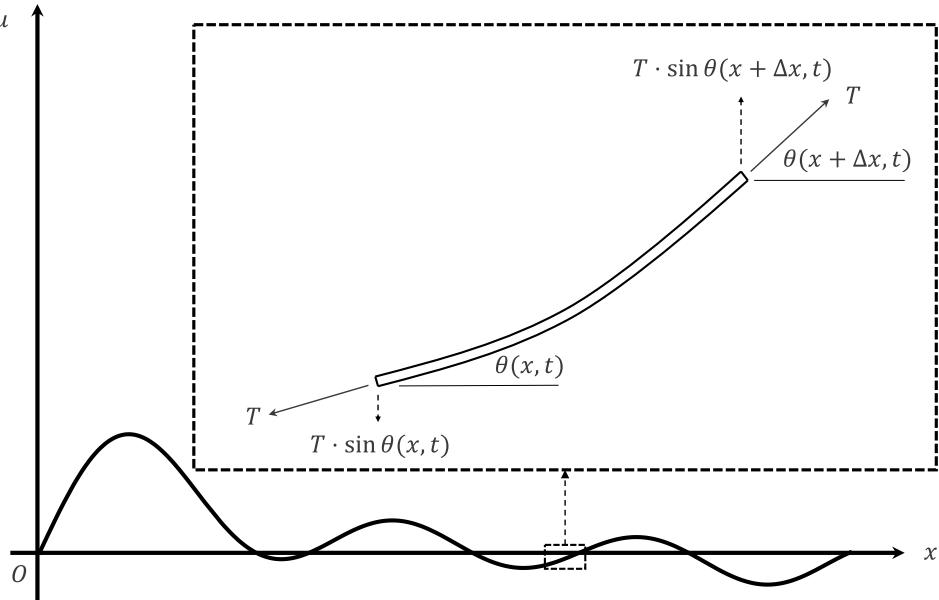


图 1.4: 弦的振动发声示意图

1.3.2 波动方程推导

第一步（连续介质假设）与第二步（质量守恒定律）合并：

在微元体上，两端拉伸力的角度 θ 不尽相同。受力分析时，在水平方向上，这种不一致在整根弦上得到了平衡；但是在垂直方向，即微元体的位移方向上却无法得到平衡，所以必然会带来力的扰动。设扰动力为 \tilde{T} ，此时微元体有想“回家”的趋势（与当前速度无关），即朝向 u 的正向，所以可列出如下表达式：

$$\tilde{T} = T \cdot \sin \theta(x + \Delta x, t) - T \cdot \sin \theta(x, t) \approx T \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x+\Delta x, t} - T \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x, t} \quad (1.41)$$

第三步（Newton 第二定律和 d'Alembert 原理）：

构建动力学平衡方程 $\tilde{T} + F_I = 0$ ，并将上式(1.41)代入可得：

$$T \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x+\Delta x, t} - T \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x, t} = ma = \rho \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta u)^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) \quad (1.42)$$

将等式右端 Δx 提出移到左端，并取极限 $\Delta x \rightarrow 0$ （此时刚好等式右端加速度 a 的作用位置也趋近于 x ），忽略位移 u 相关的高阶小量，则有

$$T \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = \rho \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \quad (1.43)$$

最后依然可以得到同样的波动方程表达式：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = c^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \quad (1.44)$$

其中，

$$c = \sqrt{\frac{T}{\rho}} \quad (1.45)$$

这里公式(1.45)的量纲也需要强调：若张力 T 采用力的单位 N，则密度 ρ 为线密度，单位为 Kg/m；或者张力 T 采用压强的单位 N/m²，此时密度 ρ 的单位为 Kg/m³。

1.4 流体中的声波

经过前面各种媒介情形下波动方程问题的梳理与推导，已经对于声波的产生与方程的形式建立了初步认知。但是最关键的问题：为什么方程是“波动”方程，以及方程里的参数到底指代什么均没有回答。

本来，这理应是下一节的重点内容。然而，考虑到除了弦的振动外，其余介绍的一维波动方程在真实世界中并不存在。想要严谨且完备地证明波动方程均具有统一的形式，还需要在真实的空间如 \mathbb{R}^3 空间中对其进行推导与建立。

根据一维形式波动方程的推导可知，液体与气体具有类似的性质可以合并为同一种媒介进行推导。本节接下来将沿用这一思路，以流体（液体与气体）为主要媒介（此时主要是为了进行介质传递），进行矢量形式下，可适用于曲线坐标系的 \mathbb{R}^3 空间（也可推广至 \mathbb{R}^n 空间）中的波动方程推导。

首先，需要提前介绍流体力学里的两个基本方程：连续性方程和 Euler 方程。

1.4.1 连续性方程

流体力学中，连续性方程即质量守恒定律的方程，其本质与一维情形下的质量守恒定律方程并无区别，只是方程形式更为复杂与抽象。

考虑 \mathbb{R}^3 空间某个区域 Ω （体积为 V ，边界的光滑闭曲面用 $\partial\Omega$ 表示）中，单位时间内穿过边界表面 \mathbf{S} 的流体（流体质点的速度为 \mathbf{v} ），应当等于该区域内流体质量（微元质量用 ρdV 表示）的减少，用积分形式可以写成：

$$\iint_{\partial\Omega} \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\Omega} \rho dV \quad (1.46)$$

其中，向量 \mathbf{S} 的方向指代闭曲面 $\partial\Omega$ 的外法向；如果流体流出该区域，则等式左边的积分项为正，反之则为负。

将上式左端的曲面积分转化为体积分，即利用微积分中高斯（Gauss）公式的向量形式（与坐标系选取无关）：

$$\iint_{\partial\Omega} \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_{\Omega} (\nabla \cdot \rho \mathbf{v}) dV \quad (1.47)$$

则有

$$\iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{v} \right) dV = 0 \quad (1.48)$$

其中，符号 ∇ 为哈密顿（Hamilton）算子，附录A.2详细介绍了相关的理论知识。由于上式对任何区域都成立，所以被积函数应当为零，所以

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{v} = 0 \quad (1.49)$$

上式(1.49)即为流体力学中著名的连续性方程。

 **笔记** 一维形式下，上述连续性方程(1.49)可退化为如下形式（依旧沿用一维情形下的

物理量 $u(x, t), \rho_0, \tilde{\rho}$ 等):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{v} = \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial t} \right) = \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right] \quad (1.50)$$

上述推导的第二步考虑到了密度 ρ 在微元体中变化不大, 所以将 ρ 提到微分运算外并近似等于 ρ_0 。

对上式在时间 t 上进行积分 (此时第二项中的密度依旧考虑为忽略随时间变化的部分), 则可得到与公式(1.18)同样的表述。

进一步思考, 一维情形下推导时, 考虑的是一团微元在扰动后变为了“另一团微元”, 这两者质量相同; 而本节推导连续性方程, 考虑的是一个固定区域, 流出的质量等于区域内质量的减少。其实细想会发现这两者其实是一回事。在一维情况下用本节介绍的连续性方程思路来推导质量守恒定律的方程, 也会得到相同的表达式。

1.4.2 Euler 方程

流体力学中, 欧拉 (**Euler**) 方程即动力学平衡的方程, 其本质也与一维情形下的动力学平衡方程并无区别, 只是方程形式更为复杂与抽象。

同样考虑 \mathbb{R}^3 空间某个区域 Ω (体积为 V , 边界的光滑闭曲面用 $\partial\Omega$ 表示), 扰动过程中作用在该区域上流体的合力 \mathbf{F}_N 应为压强 p 在区域表面 \mathbf{S} 上的积分, 即

$$\mathbf{F}_N = \iint_{\partial\Omega} p d\mathbf{S} \quad (1.51)$$

注意此时向量 \mathbf{S} 仍指代闭曲面 $\partial\Omega$ 的外法向, 所以压强 p 的定义为外法向为正, 所以这里仍然沿用一维情形推导时的约定, 即将压强考虑为“内力”。

同样将上式由面积分转化为体积分 (需利用 **Gauss** 公式向量形式的推论, 可通过引入常向量构造 Gauss 公式向量形式进行证明, 或根据后续的定理1.3), 则有

$$\mathbf{F}_N = \iiint_{\Omega} (\nabla p) dV \quad (1.52)$$

由此可见, 对于该区域内的任意流体微元 dV 来说, 扰动时都会产生一个大小为 ∇p 的合力 (内力)。

根据 Newton 第二定律, 此时该流体微元所受的合力, 应表现为该流体微元的密度 (即单位体积的质量) 与该微元加速度的乘积 (由于合力通过矢量形式直接给出, 所以不需要使用 d'Alembert 原理):

$$\nabla p = \rho \cdot \mathbf{a} = \rho \cdot \frac{D}{Dt} \mathbf{v} \quad (1.53)$$

这里关于流体微元速度 \mathbf{v} 的导数引入了一个新的微分符号 $\frac{D}{Dt}$ 。原因在于, 此时速度 \mathbf{v} 的导数并不能简单看作只随空间变化的量; 或空间位置不变, 只随时间发生变化的量, 所以需要同时考虑两部分分量:

1. 流体微元固定位置 (即将观测点置于微元上) 时, 其本身速度分布发生的变化;
2. 流体微元位置发生变化, 即运动时 (此时时间也在改变, 但与上一条本质完全不同) 速度发生的变化。

注意上述两部分分量是同时发生的。简单来说就是，一团东西，位置变化的时候有速度变化，眼睛跟着一起动（即位置相对无变化）时流体微元也在发生速度变化。

在流体力学中，这种特殊的导数被称为物质导数，或随体导数。

定义 1.1 (物质导数)

物质导数 $\frac{D}{Dt}$ 描述了运动流体上物理量（如压强、温度、密度以及速度等）的属性变化，由如下当地导数和对流导数两部分组成：

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla) \quad (1.54)$$



证明 本证明先采用比较直观的笛卡尔 (Cartesian) 坐标系下的标准正交基 $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ 进行展开推导，完备的证明介绍见附录E.1。根据上面物质导数两部分分量的描述，可以计算得到物质导数的表达式如下：

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} &= \frac{\partial}{\partial t} + \left(\frac{\partial x}{\partial t} \cdot \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial t} \cdot \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial t} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \right) \\ &= \left(\frac{\partial x}{\partial t} \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial t} \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial t} \mathbf{k} \right) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \right) \end{aligned} \quad (1.55)$$

由于

$$\boldsymbol{v} = \frac{\partial x}{\partial t} \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial t} \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial t} \mathbf{k} \quad (1.56)$$

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \quad (1.57)$$

所以可以得到上述矢量形式的物质导数表达式。

将物质导数的表达式(1.54)代入公式(1.53)，即可得到最后的动力学表达式：

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla) \boldsymbol{v} = \frac{1}{\rho} \nabla p \quad (1.58)$$

上式(1.58)即为流体力学中著名的 Euler 方程。

如果流体处于重力场中，则单位体积的流体微元还受到重力 $\rho \mathbf{g}$ 的作用，其中 \mathbf{g} 为重力加速度。由于重力为微元体自身的力，所以与内力的符号约定一致。公式(1.58)则改写为

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla) \boldsymbol{v} = \frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{g} \quad (1.59)$$

事实上，在液体介质中，重力场非常重要。液体中的压强公式： $p = \rho g h$ ，即描述了重力场下液体压强随深度 h 的变化关系。但是，除非是海洋领域中的水声学，将声音用作通信与探测，一般声音传播特别是音乐声学也不会在深度上“大做文章”，所以本书探讨流体中声音的传播，无论是液体还是气体，还是考虑为无重力状态。

注 前面讨论的压强定义为“内力”还是“外力”，这里还是有必要再做强调。本节采用的推导过程，将压强当作“内力”；然而若想要沿用普遍的“外力”压强的定义，则只需要在公式(1.58)右端添加负号即可。



笔记 考虑到扰动较小，推导波动方程时一般会略去对流导数项 $(\boldsymbol{v} \cdot \nabla) \boldsymbol{v}$ （推导半天没用上实属可惜）。一维形式下，上述 Euler 方程(1.58)可退化为如下形式（依旧沿用一维

情形下的物理量 $u(x, t), \rho_0$ 等):

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = \frac{1}{\rho_0} \cdot \frac{\partial p}{\partial x}(x, t) \quad (1.60)$$

上述推导同样考虑了密度 ρ 变化不大, 所以将当前时刻 t 的密度近似等于 ρ_0 。可以看到, 一维情形下的 Euler 方程与前面小节中提及的动力学公式(1.20)也完全相同。

1.4.3 波动方程推导

有了连续性方程和 Euler 方程的基础, 本节开始推导流体中的波动方程。值得说明的是, 这里的推导仅针对“声波在流体介质中传递”的情形, 并不包括流体中其他形式的波动现象如表面波等。

第一步 (连续介质假设):

与公式(1.15)一样。

第二步 (质量守恒定律):

考虑扰动时发生的密度变化, 即 $\rho = \rho_0 + \tilde{\rho}$, 将其代入连续性方程(1.49), 并忽略其在空间上的变化, 可得:

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (1.61)$$

联立上式(1.61)与公式(1.15)可得:

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial t} + \rho_0 \left[\frac{dp}{d\rho}(\rho_0) \right] \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (1.62)$$

进行到这一步, 仿照一维情形的分析, 理应将速度 \mathbf{v} 转化为各质点的位移 \mathbf{u} , 然后再对时间 t 进行积分。但是在高维情形下, 还需要做进一步的说明, 这里先暂缓。

第三步 (Newton 第二定律和 d'Alembert 原理):

考虑扰动时发生的压强变化, 即 $p = p_0 + \tilde{p}$, 将其代入 Euler 方程(1.58)中可得:

$$\nabla \tilde{p} = \rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \quad (1.63)$$

上式中考虑到速度 \mathbf{v} 很小, 所以略去了对流导数项 $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$; 同时将密度 ρ 近似考虑为 ρ_0 。

为了考察流体中声波速度 \mathbf{v} 的性质, 对上式(1.63)两边取旋度运算, 则有

$$\nabla \times (\nabla \tilde{p}) = \rho_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{v}) \quad (1.64)$$

引理 1.2 (场论恒等式)

对 \mathbb{R}^3 空间中的任意标量场 φ , 有如下基本关系式:

$$\nabla \times (\nabla \varphi) = 0 \quad (1.65)$$

证明 本证明还是先采用 Cartesian 坐标系下的标准正交基 $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ 进行展开推导, 完备的证明介绍见附录E.4。由于

$$\nabla \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \mathbf{k} \quad (1.66)$$

则有

$$\nabla \times (\nabla \varphi) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} & \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{vmatrix} = 0 \quad (1.67)$$

该公式(1.65)也可以从几何的角度来阐述其物理意义，即：任意标量场的梯度场都是无旋场。

考虑 \mathbb{R}^3 空间中的某个曲面区域 Σ （面积为 S ，边界的光滑闭曲线用 $\partial\Sigma$ 表示，周长为 l ），应用微积分中斯托克斯（Stokes）公式的向量形式（与坐标系选取无关），通过公式(1.65)还可以得到：

$$\oint_{\partial\Sigma} (\nabla \varphi) \cdot d\mathbf{l} = \iint_{\Sigma} [\nabla \times (\nabla \varphi)] \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (1.68)$$

其中，向量 \mathbf{l} 指代沿边界曲线的移动方向，即曲线上任意一点的切向量；而向量 \mathbf{s} 仍指代闭曲面 Σ 的外法向。

公式(1.68)指出，梯度场 $\nabla \varphi$ 内沿任意闭合曲线的环路积分为零，进一步得到在梯度场 $\nabla \varphi$ 内做功与路径无关的推论（可以通过构造闭合的往返路径来证明）。

当在一个向量场内做功与路径无关（只取决于起点和终点）时，该向量场被称作**保守场**，所受力为**保守力**。重力/引力场和静电场都是物理学中典型的保守场（附录E1对静电场的保守性质做了详细推导，重力/引力场的原理也类似）。

定义 1.2 (势能与势函数)

任意保守场内，从相对参考点 M_0 移动到点 M ，保守力 \mathbf{F} 所做的恒定功 W ，可以表示为一种储存能量 U 的减少，在物理学中被称为势能。若约定相对参考点 M_0 处势能为零，点 M 处势能为 $-U$ ，进一步将保守力 \mathbf{F} 写为某个标量场 φ 的梯度，即 $\mathbf{F} = \nabla \varphi$ ，则满足如下关系式：

$$\Delta U = -U = W = \int_{M_0 M} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \varphi \quad (1.69)$$

该标量场 φ 被称作势函数。



证明 本证明还是先采用比较直观的笛卡尔（Cartesian）坐标系下的标准正交基 $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ 进行展开推导，完备的证明介绍见附录E.2。势能 U 与恒定功 W 的转换较为直观，描述了保守力 \mathbf{F} 做正功，势能减少，做负功，势能增加的物理现象（例如典型的重力/引力势能和电势能）；而公式(1.69)中恒定功 W 与势函数 φ 的积分关系式即为微积分中典型的第二型曲线积分，此时 $d\mathbf{l}$ 也可以写作矢径 $\mathbf{r} = (x, y, z)$ 的微元 $d\mathbf{r} = (dx, dy, dz)$ ，则有

$$\begin{aligned} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} &= \nabla \varphi \cdot d\mathbf{r} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \mathbf{k} \right) \cdot (dx \cdot \mathbf{i} + dy \cdot \mathbf{j} + dz \cdot \mathbf{k}) \\ &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz = d\varphi \end{aligned} \quad (1.70)$$

上式表明，保守力 \mathbf{F} 所做的单位功量等于势函数 φ 的全微分。两边同时积分，即

可得到公式(1.69)。

以上关于向量场性质的说明可以归纳为如下定理：

定理 1.1 (保守场/有势场的性质)

对 \mathbb{R}^3 空间中单联通区域^a内的任意向量场，以下命题相互等价：

1. 场保守：场内做功与路径无关（也等同于任意环路积分为零）；
2. 场有势：可以表示为某个标量势的梯度；
3. 场无旋：场内处处旋度为零。

^a可以形象理解为没有“洞”的区域。



上述定理对单联通区域的约束，主要是为了应用 Stokes 公式，将闭合曲线积分转换为面积分，最终缩至一点，将积分符号去掉，得到旋度关系式（与附录A.2中旋度定义一致）。若是闭合区域内存在“洞”，定理中1.和2.仍然等价，但无法推导出3.。

回到公式(1.64)，由于探讨的对象是各向同性物质，给定流体中的一点，其压强从四面八方看均是“定值”。所以尽管压强可以看作是某种形式的“力”，但一般可将压强视作标量场（压强扰动 \tilde{p} 同理）。

根据引理1.2，公式(1.64)的左端恒等于零，则有

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{v}) = 0 \quad (1.71)$$

由于上式对任意时刻都成立，所以 $\nabla \times \mathbf{v} = \text{常数}$ 。再取 $\mathbf{v} = 0$ 可得：

$$\nabla \times \mathbf{v} = 0 \quad (1.72)$$

这是一个很有意思的结论，说明可以从理论上证实声音传播时质点的运动产生的无旋流。在流体力学中，无旋流也被称为势流（与定理1.1的描述一致）。

简单来说即是，声音传播时质点运动的流线不会产生任何旋转。

结合定理1.1，与任何旋度为零的向量场一样，势流中的速度 \mathbf{v} 可以进一步表示为某个标量的梯度，在流体力学中用速度势 φ 来表示，即

$$\mathbf{v} = \nabla \varphi(\mathbf{r}, t) \quad (1.73)$$

由于速度 \mathbf{v} 可看作是时间 t 的函数，在引入梯度运算后可知速度势 φ 应该是时间 t 与空间（矢径 \mathbf{r} ）的多元函数。

这里先不去深究速度势的具体含义（后面会详细说明），回到波动方程的推导上来，则公式(1.63)可化简为

$$\tilde{p} = \rho_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t}(\mathbf{r}, t) \quad (1.74)$$

将速度势的表达式(1.73)和上式(1.74)代入第二步（质量守恒定律）推导出的公式(1.62)，最终可得流体中完整的波动方程如下：

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}(\mathbf{r}, t) = c^2 \cdot \nabla^2 \varphi(\mathbf{r}, t) \quad (1.75)$$

其中， $\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla$ 定义为拉普拉斯（Laplace）算子。通过向量运算和微分运算法则

易证 $\nabla \cdot (\nabla \varphi) = (\nabla \cdot \nabla) \varphi$ (有限维曲线坐标系下同样适用), 所以可以用 ∇^2 来简化表示。

在 Cartesian 坐标系下, Laplace 算子的展开式为

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (1.76)$$

而公式(1.75)中参数 c 依旧为如下表达式:

$$c = \sqrt{-\frac{dp}{d\rho}(\rho_0)} \quad (1.77)$$

液体与气体中, 参数 c 具有不同的进一步化简方式, 但由于推导过程与一维形式完全相同, 所以这里不做赘述。

接下来考察一下速度势 φ 在声音传播中的具体含义。

首先速度势 φ 对空间的一阶导数 (通过梯度运算) 为速度 \mathbf{v} , 而对时间的一阶导数与压强扰动 \tilde{p} 和密度扰动 $\tilde{\rho}$ 均成正比 (根据关系式(1.15)和(1.74)可知), 所以很难界定其究竟是一种什么明确的物理量, 只能说这是一种比较抽象的概念, 代表着某种由时空参数影响的“能量”或“势能”, 而这种能量的运动满足波动方程(1.75)。

另外, 对于方程(1.75)还有一个重要特性, 即如果该方程有一个任意特解

$$\varphi = f_0(\mathbf{r}, t) \quad (1.78)$$

则 f_0 对于其自变量中任一参数 (假设用 ξ) 的偏导数 $\frac{\partial f_0}{\partial \xi}$ 也是该方程的特解, 即

$$\frac{\partial^2 f_0}{\partial t^2} = c^2 \cdot \nabla^2 f_0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial^2 f_0}{\partial t^2} \right) = c^2 \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} (\nabla^2 f_0) \Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial f_0}{\partial \xi} \right) = c^2 \cdot \nabla^2 \left(\frac{\partial f_0}{\partial \xi} \right) \quad (1.79)$$

同时, 由于方程(1.75)为线性方程, 所以易知速度 \mathbf{v} (对方程两边取梯度)、压强扰动 \tilde{p} (对方程两边对时间 t 求一阶导)、密度扰动 $\tilde{\rho}$ (对方程两边对时间 t 求一阶导) 均满足上述波动方程。这也是在流体中采用速度势 φ 进行推导的另一重要原因: 可以通过统一的方式, 完成对所有满足波动方程物理量的普适描述。

 **笔记** 一维形式下, 仅考虑沿 x 方向的运动, 上述波动方程(1.75)可退化为如下形式:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}(x, t) = c^2 \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x, t) \quad (1.80)$$

此时速度势 φ 可以进一步变化为一维情形下的质点速度, 当然也可以对其在时间 t 上做一次积分 (初始 $t_0 = 0$), 则可以得到与一维形式下同样的, 关于位移 $u(x, t)$ 的波动方程。

很明显, 波动方程(1.75)当然也适用于矢量形式下的各质点位移 $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ 。不直接用位移矢量 $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ 进行推导的主要原因在于, 流体最大的特点在于其“流动性”, 所以用速度 \mathbf{v} 来刻画更为直观。

1.5 固体中的声波

在 \mathbb{R}^3 空间中, 相比于流体, 固体的波动方程推导会更加复杂。具体来说, 由于物质的固有性质, 流体中的任意一点, 四面八方的受力均为相同的数值, 即压强 p ; 但

对于固体来说，却并非如此。就算是各向同性的固体，其内部任意一点抗“拉压”和抗“剪切”的能力也是不相同的。

这里首先简要解释一下拉压和剪切的物理含义：

- 拉压：在某方向上对物体进行“拉拽”或“挤压”，在该方向及其他方向上均会产生形变。例如，拉伸会让物体在该方向上产生“拉长”现象，而在其他方向上产生“收缩”现象（沿 x 轴拉伸，该方向上被拉长， y 和 z 轴方向上被收缩）；
- 剪切：在平行于物体表面的方向上进行受力，会让物体产生类似“错位”的形变。例如在一个二维正方形某条边上施加平行力，会让垂直与该方向上的边产生角度变化。

所以，在固体上某一点处使力，觉得“费劲”，除了在受力单方向上有物质的“抵抗”外，还存在其他方向上物质的“抵抗”，以及类似不同层物质之间相互作用的“抵抗”；而流体一般只能承受正压力，无法通过剪切力的方式产生剪切形变²，这也是流体“流动性”最主要的原因。

以上解释也是对前面阐述“流体在切向作用力下可以任意变形”的一个回应。

考虑仍处于弹性阶段的固体，声波可以在其中自由传播；当固体物质较小时，也可以将其当作振源处理。此时需要对固体内的受力做一个详细分析。下面还是先采用Cartesian坐标系下的微元体进行描述：

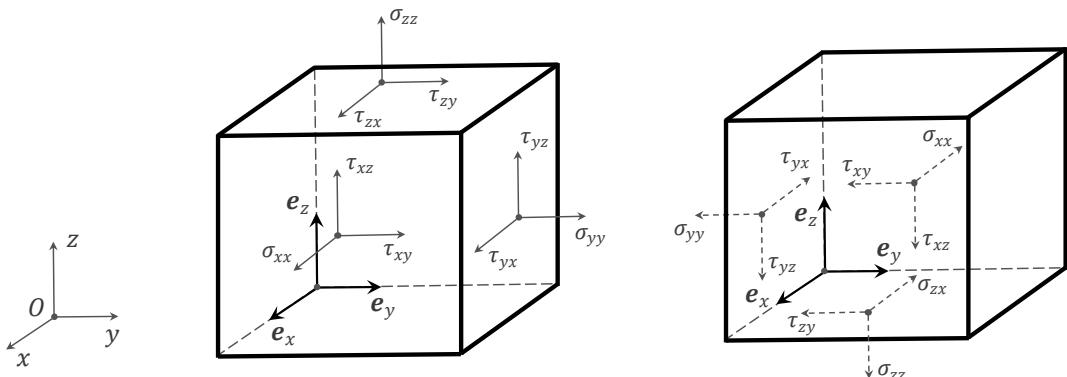


图 1.5: 弹性体内微元六面体的受力示意图

如上图1.5所示，构建Cartesian坐标系（这里采用 (e_x, e_y, e_z) 的表示法）后，一个弹性体内的微元六面体，每个面上都会产生一个正应力，用符号 σ 表示。其中3个表面的外法向与坐标轴正向分别相同（左图），其余3个表面的外法向则分别与坐标方向相反（右图）。由于微元体足够小，再根据受力平衡关系可知，六面体每一对表面相反方向的正应力可视为相等，相反方向的剪切应力也视为相等。另外，垂直于法向量的作用平面上也存在前述的剪切应力，用符号 τ 表示。由于每个面上的剪切应力方向未知，所以需要按坐标系进行展开，此时一个面上需要两个剪切应力分量。

应力下标的含义：以图1.5中的左图为例，所有应力（无论是正应力还是剪切应力）的第一个下标指代该作用面法向量指向的坐标方向，第二个下标指代该应力指向的坐

²注意，存在所谓的粘性流体，能够产生一定的剪切形变，且这种流体较为常见。但由于在声学中几乎很少遇到，所以这里仍将流体视作无粘性状态。

标方向。当两个下标相同时为正应力，不相同时为剪切应力。例如， σ_{xx} 指代法向量指向坐标 x 的平面上，指向坐标 x 的应力；而 τ_{xy} 指代法向量指向坐标 x 的平面上，指向坐标 y 的应力。对于图1.5中的右图，以上规律完全相反即可。有了上述每一对表面上的应力关系，再根据力矩平衡关系可知，一对相反下标的剪切应力也相等。

接下来考察一下如何理解这一大堆“应力”。如果按照坐标系来合并的话（合应力分别用 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ 来表示），可以得到：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}_x &= \sigma_{xx}\mathbf{e}_x + \tau_{xy}\mathbf{e}_y + \tau_{xz}\mathbf{e}_z \\ \boldsymbol{\sigma}_y &= \tau_{yx}\mathbf{e}_x + \sigma_{yy}\mathbf{e}_y + \tau_{yz}\mathbf{e}_z \\ \boldsymbol{\sigma}_z &= \sigma_{zx}\mathbf{e}_x + \tau_{zy}\mathbf{e}_y + \sigma_{zz}\mathbf{e}_z\end{aligned}\quad (1.81)$$

定义 1.3 (并矢)

任意两个矢量 \mathbf{a} 和 \mathbf{b} 并写在一起^a， \mathbf{ab} 称为并矢，也称为两个矢量的张量积。

^a另一种写法为 $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$ ，由于符号太杂不易理解，所以本书默认省略 \otimes 符号。



引入并矢的概念，是为了增加对应力的理解。对公式(1.81)来说， $\boldsymbol{\sigma}_x, \boldsymbol{\sigma}_y, \boldsymbol{\sigma}_z$ 已经是矢量了，若想再进一步合并应力分量的话，必须采用更高维的表示形式。令

$$\mathbf{T} = \sigma_{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j \quad (1.82)$$

其中， i 和 j 的取值均为 x, y, z ，由于在 Cartesian 坐标系下可以不分上下标（详见附录D.1），指标 i, j 在同一项中均出现了两次，也需要求和。此时，物理量 \mathbf{T} 表示为并矢的方式，也是比矢量更高一阶的量，称为二阶张量，所以 \mathbf{T} 也被称为应力张量。

应力张量 \mathbf{T} 的应力分量也可采用矩阵形式进行对应：

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \sigma_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (1.83)$$

这种表示方法将应力分量统一在一个矩阵中，刚好下标也对应着位置，每一行每一列取值都是 x, y, z 三个。但需要注意的是，应力张量 \neq 应力分量的矩阵。 \mathbf{T} 是带有基向量的张量，只是其分量可以用矩阵形式表示。

根据前面对应力分量之间关系的描述可知， $[\sigma_{ij}]$ 为对称矩阵。

 **笔记** 在任意曲线坐标系下，也可定义应力张量，仅需把标准正交基改为曲线坐标系下的协变基或逆变基即可（见附录D.1）。此时需注意指标的升降，上下标未有指标的位置需用符号·替代，如可定义

$$\mathbf{T} = \sigma^{ij}\mathbf{g}_i\mathbf{g}_j = \sigma^i_{\cdot j}\mathbf{g}_i\mathbf{g}^j = \sigma^j_{\cdot i}\mathbf{g}^i\mathbf{g}_j = \sigma_{ij}\mathbf{g}^i\mathbf{g}^j \quad (1.84)$$

本节开篇即引出“张量”的表示法实属“迫不得已”，因为弹性力学中的物理量许多都是二阶张量，所以有必要提前阐述。不论如何，有了上述基础，接下来可以继续固体中波动方程的详细推导。与流体部分一样，首先需要介绍弹性力学里的一些基本方程。

1.5.1 平衡方程

前面介绍了应力张量 \mathbf{T} , 下面通过推导给出平衡状态时微元体中任意一点的内力所满足的平衡关系。由于需要考虑任意方向的内力, 所以将前述的微元六面体“剖开”, 采用斜面应力的方式进行分析:

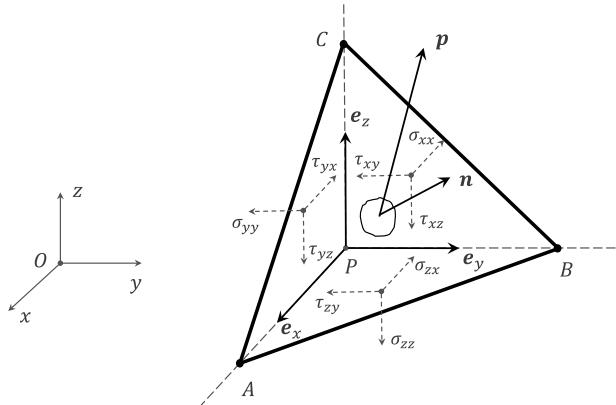


图 1.6: 弹性体内斜面应力的受力示意图

上图1.6以点 P 构建局部 Cartesian 坐标系, 切出来的平面为三角形 ABC ; 该平面的单位法向量设为 \mathbf{n} (与附录A.2中介绍的方向余弦所组成的向量相同), 其上一点的内力为矢量 \mathbf{p} 。根据该四面体的受力平衡关系 (注意此时应力分量的指向与坐标方向相反) 可知:

$$\begin{aligned} (\mathbf{p} \Delta S) \cdot \mathbf{e}_x &= \sigma_{xx} \Delta S_x + \tau_{yx} \Delta S_y + \tau_{zx} \Delta S_z \\ (\mathbf{p} \Delta S) \cdot \mathbf{e}_y &= \tau_{xy} \Delta S_x + \sigma_{yy} \Delta S_y + \tau_{zy} \Delta S_z \\ (\mathbf{p} \Delta S) \cdot \mathbf{e}_z &= \tau_{xz} \Delta S_x + \tau_{yz} \Delta S_y + \sigma_{zz} \Delta S_z \end{aligned} \quad (1.85)$$

其中, $\Delta S_x, \Delta S_y, \Delta S_z$ 分别表示对应法向量所在平面的局部三角形面积, ΔS 为三角形 ABC 的面积。考虑到 \mathbf{p} 和 \mathbf{n} 均可表示成展开式 (注意需求和):

$$\mathbf{p} = p_i \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{n} = n_i \mathbf{e}_i, \quad i = x, y, z \quad (1.86)$$

且 $\Delta S_x, \Delta S_y, \Delta S_z$ 均为 ΔS 在对应平面上的投影, 即

$$\Delta s_i = \Delta S \cdot \cos(\mathbf{n}, \mathbf{e}_i) = \Delta S \cdot n_i, \quad i = x, y, z \quad (1.87)$$

则上式(1.85)可化为

$$\begin{aligned} p_x &= \sigma_{xx} n_x + \tau_{yx} n_y + \tau_{zx} n_z \\ p_y &= \tau_{xy} n_x + \sigma_{yy} n_y + \tau_{zy} n_z \\ p_z &= \tau_{xz} n_x + \tau_{yz} n_y + \sigma_{zz} n_z \end{aligned} \quad (1.88)$$

其指标形式 (注意需求和) 为

$$p_i = n_j \sigma_{ji}, \quad i = x, y, z \quad (1.89)$$

整体形式为

$$\mathbf{p} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{T} \quad (1.90)$$

从公式(1.90)可以看到，应力张量 \mathbf{T} 确实可以表征固体内任意一点的应力状态。

笔记 公式(1.90)当然也不仅限于 Cartesian 坐标系，在任意曲线坐标系下也依旧成立。其实上述推导过程所采用的思路，如投影关系、矢量展开式等也都适用于曲线坐标系，只是公式会略有不同，但结论都一样。所以这里不作细致推导，仅作基本描述。

有了固体内任意一点受力的描述，接下来可以继续进行受力分析。

考虑 \mathbb{R}^3 空间某个区域 Ω （体积为 V ，边界的光滑闭曲面用 $\partial\Omega$ 表示），作用在该区域上固体的合力 \mathbf{F}_N 应为任意一点的内力矢量 \mathbf{p} 在区域表面 S 上的积分，即

$$\mathbf{F}_N = \iint_{\partial\Omega} \mathbf{p} dS \quad (1.91)$$

注意由于这里的内力矢量 \mathbf{p} 不一定指向表面 S 的外法向 \mathbf{n} ，所以上式的结构与流体中的受力分析表达式有细微差别。

引理 1.3 (广义 Gauss 公式)

对 \mathbb{R}^3 空间中的任意张量场 Φ ，存在如下面积分到体积分的转化：

$$\iint_{\partial\Omega} (\mathbf{n} \odot \Phi) dS = \iiint_{\Omega} (\nabla \odot \Phi) dV \quad (1.92)$$

其中， \odot 表示任意许可的运算，包括点积、叉积和张量并。



该引理的证明将会非常抽象，因为涉及到了张量运算，也不太容易用 Cartesian 坐标系进行展开介绍，所以证明部分完全放在了附录E.6。

上述广义 Gauss 公式非常有用，事实上，前面流体部分在推导 Euler 方程时所使用的 **Gauss 公式向量形式的推论**，即公式(1.52)，也可以通过该引理得到快速证明。

有了引理1.3介绍的广义 Gauss 公式加持，公式(1.91)可以代入应力张量 \mathbf{T} 的关系式(1.90)进行化简：

$$\mathbf{F}_N = \iint_{\partial\Omega} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{T}) dS \quad (1.93)$$

注意 \mathbf{T} 为二阶张量，所以左右点积其实并不相等。巧合的是，广义 Gauss 公式刚好需要左点积，所以上式的面积分可以进一步转化为体积分：

$$\mathbf{F}_N = \iiint_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{T}) dV \quad (1.94)$$

由此可见，对于区域 Ω 内的任意固体微元 dV 来说，在受外力情况下都会产生一个大小为 $\nabla \cdot \mathbf{T}$ 的合力（内力）。这与流体中的结论也颇为相似，只不过流体中是标量 p 的梯度，而固体中是张量 \mathbf{T} 的散度。以上结论说明流体与固体同作为连续介质范畴内的物质，存在一定结构上的力学规律统一性。

考虑受力平衡关系，此时可以加入微元体的体力（微元体自身的重力），也可以考虑在动力学状态下加入惯性力。这里先都不加，此时微元体的合力 = 0，则可以得到如下平衡方程的整体形式：

$$\nabla \cdot \mathbf{T} = 0 \quad (1.95)$$

选定一个坐标系，可以将整体形式进行展开。例如若在 Cartesian 坐标系下进行展开，则可以得到：

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = 0 \end{array} \right. \quad (1.96)$$

1.5.2 几何方程

接下来考察一下弹性阶段的固体在受力状态下的变形情况。

假设点 P 在受力状态下移动到点 \tilde{P} ，两点间的位移矢量为 $\mathbf{u}(r)$ ，其附近邻域的点 p' 也相应移动到点 \tilde{P}' ，两点间的位移矢量为 $\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u}(r + dr) = \mathbf{u} + d\mathbf{u}$ ，则当前时刻微元 dr 的变化量可以表示为

$$d\mathbf{u} = \mathbf{u}(r + dr) - \mathbf{u}(r) \quad (1.97)$$

上述公式可以用如下矢量情形下的弹性体内微元变形示意图1.7(a)来描述：

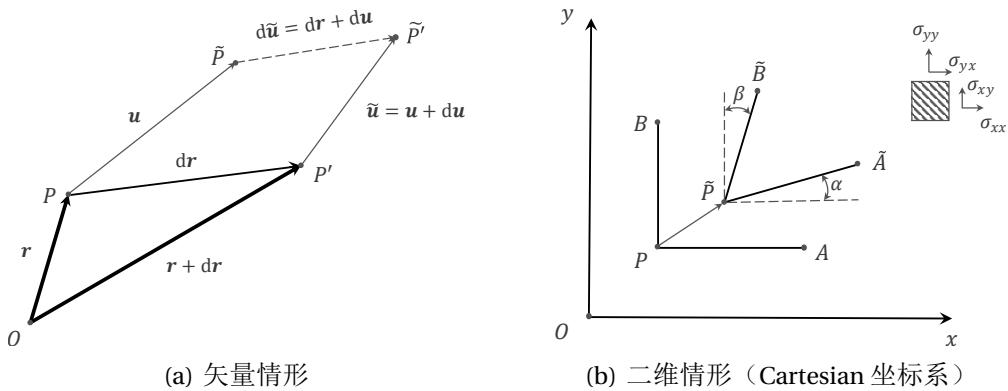


图 1.7: 弹性体内微元变形情况示意图

可以看到，矢量情况下弹性体内微元的变形描述与前面一维情况下的也颇为相似。但由于函数关系变为了向量值映照（即自变量与应变量均为向量），所以其微分运算需要做一定扩展。

引理 1.4 (向量值映照的微分关系)

向量值映照 $\mathbf{u}(r)$ 具有如下微分运算的矢量表达式：

$$d\mathbf{u} = \mathbf{u}(r + dr) - \mathbf{u}(r) = (\mathbf{u}\nabla) \cdot dr \quad (1.98)$$

该引理的证明同样将会非常抽象，因为 $\mathbf{u}\nabla$ 这个量是一个二阶张量，也不太容易用 Cartesian 坐标系进行展开介绍，所以证明部分完全放在了附录E.5。

通过上述引理1.4，可以了解到，一个固体在受力状态下所有的“位移行为”，都包含在一个二阶张量 ($\mathbf{u}\nabla$) 中（因为 dr 可看作是微元位移的基向量）。

接下来考虑固体的“位移行为”都有哪些。虽然不涉及到物体宏观的运动，仅仅是物质内部的变化，仍然应该存在平动和转动两种情况。现在将二阶张量($\mathbf{u}\nabla$)拆分成一个对称张量 $\boldsymbol{\Gamma}$ 和反对称张量 $\boldsymbol{\Omega}$ ，如下：

$$\boldsymbol{\Gamma} = \frac{1}{2}(\mathbf{u}\nabla + \nabla\mathbf{u}) \quad (1.99)$$

$$\boldsymbol{\Omega} = \frac{1}{2}(\mathbf{u}\nabla - \nabla\mathbf{u}) \quad (1.100)$$

矢量形式的表达式不易理解，所以这里通过一个简单的二维情形（固体受力后的变形情况如上图1.7(b)所示），分别考察下两个张量的物理与几何含义。

二维情形下将对称张量 $\boldsymbol{\Gamma}$ 和反对称张量 $\boldsymbol{\Omega}$ 展开成矩阵形式（ u_x, u_y 为坐标分量）：

$$[\Gamma_{ij}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y}\right) & \frac{\partial u_y}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (1.101)$$

$$[\Omega_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}\right) & 0 \end{bmatrix} \quad (1.102)$$

分析平面微元的前后变化，图1.7(b)中各点的坐标变化可表示为如下形式：

$$\left\{ \begin{array}{l} P(x, y) \rightarrow \tilde{P}(x + u_x, y + u_y) \\ A(x + dx, y) \rightarrow \tilde{A}\left(x + dx + u_x + \frac{\partial u_x}{\partial x}dx, y + u_y + \frac{\partial u_y}{\partial x}dx\right) \\ B(x, y + dy) \rightarrow \tilde{B}\left(x + u_x + \frac{\partial u_x}{\partial y}dy, y + dy + u_y + \frac{\partial u_y}{\partial y}dy\right) \end{array} \right. \quad (1.103)$$

首先考虑微线元 \overline{PA} 到 $\overline{\tilde{P}\tilde{A}}$ 的相对长度变化，则有

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{P}\tilde{A} - PA}{PA} &= \frac{\sqrt{\left(dx + \frac{\partial u_x}{\partial x}dx\right)^2 + \left(\frac{\partial u_y}{\partial x}dx\right)^2} - dx}{dx} \\ &= \sqrt{\left(1 + \frac{\partial u_x}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_y}{\partial x}\right)^2} - 1 \approx \frac{\partial u_x}{\partial x} \end{aligned} \quad (1.104)$$

同理可知，微线元 \overline{PB} 到 $\overline{\tilde{P}\tilde{B}}$ 的相对长度变化为 $\frac{\partial u_y}{\partial y}$ 。

以上两者形变根据上图1.7(b)中的描述，可以视作正应力 σ_{xx} 和 σ_{yy} 的作用所分别产生的应变，一般用 ϵ_{xx} 和 ϵ_{yy} 表示。

接下来考虑角 $\angle APB$ 的变化，对于上图1.7(b)中的角 $\angle A$ 和 $\angle B$ ，有

$$\tan \alpha = \frac{\frac{\partial u_y}{\partial x}dx}{dx + \frac{\partial u_x}{\partial x}dx} \approx \frac{\partial u_y}{\partial x}, \quad \tan \beta = \frac{\frac{\partial u_x}{\partial y}dy}{dy + \frac{\partial u_y}{\partial y}dy} \approx \frac{\partial u_x}{\partial y} \quad (1.105)$$

考虑到角 $\angle APB$ 的变化主要由剪切应力产生，例如角 $\angle A$ 主要由 σ_{xy} 产生，而角 $\angle B$ 主要由 σ_{yx} 产生。根据前面的描述可知 $\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$ ，所以可以采用取平均的方式计算由剪切应力带来的剪切应变，一般用 γ_{xy} 和 γ_{yx} ，如下：

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \approx \frac{1}{2}(\tan \alpha + \tan \beta) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right) \quad (1.106)$$

对照表达式(1.101)可知，二维情形下对称张量 $\boldsymbol{\Gamma}$ 可以完全描述物质内部的平动状

态。而以上分析可以很方便扩展到 \mathbb{R}^3 空间中，所以对称张量 Γ 的整体形式(1.99)即描述了物质内的全部形变，所以 Γ 也被称为应变张量。

接下来考虑转动的变化。假设图1.7(b)中 P 到 \tilde{P} 的改变是仅由固体的转动引起的（即没有产生任何形变），则微线元 \overline{PA} 和 \overline{PB} 将会绕着同一个方向进行旋转。例如若是逆时针旋转，微线元 \overline{PA} 转动了 α 角，则微线元 \overline{PB} 理应转动了 $-\beta$ 角。再考虑到固体附近邻域的旋转角度应该处处相等，所以也可以采用取平均的方式计算。在右手螺旋定则下，令沿 z 轴的旋转角度为 ω_3 ，则有

$$\omega_3 = \frac{1}{2} [\alpha + (-\beta)] \approx \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \quad (1.107)$$

定义 1.4 (角速度张量)

\mathbb{R}^3 空间中任意刚体的自由转动可以用一个二阶反对称张量 Ω 来完全描述，Cartesian 坐标系下其矩阵形式为

$$[\Omega_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.108)$$

矩阵中的非零元素 $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ 分别表示沿 x, y, z 轴的角速度分量（即转动角度对时间的一阶导数），也可以写成矢量形式（伪矢量），即 $\boldsymbol{\omega} = [\omega_1, \omega_2, \omega_3]$ ，此时满足如下关系式：

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{r} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} \quad (1.109)$$

上式中， \boldsymbol{v} 为物质在转动情况下质点的速度， \boldsymbol{r} 代表其矢径。



证明 本证明还是先采用比较直观的 Cartesian 坐标系下的标准正交基 $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ 进行展开推导，公式(1.109)完备的证明介绍见附录E.5。在 \mathbb{R}^3 空间中，构建一个 Cartesian 坐标系，则一个物体存在 x, y, z 三个旋转坐标轴。

当物体进行了旋转后，所参考的坐标系将会变为随时间变化的局部运动标架（标准正交基 $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ 是不随时间发生变化的），所以其上任意一点的物理量如速度 \boldsymbol{v} 的计算需要考虑两方面的变化：一是分别沿 x, y, z 轴旋转的角速度（3个分量， $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ ），二是需要局部运动标架在随物体发生旋转时相对时间的一阶导数（通过与标准正交基的微分同胚关系求得），有了以上两方面信息则可最终得到如公式(1.108)描述的 \mathbb{R}^3 空间中角速度分量的表达式，且速度 \boldsymbol{v} 的分量可写作角速度矩阵与坐标向量的乘积，写成矢量形式如下：

$$\boldsymbol{v} = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} + v_z \mathbf{k} = \boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{r} = [\mathbf{i} \quad \mathbf{j} \quad \mathbf{k}] \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (1.110)$$

可以看到，一个二阶张量与矢量的点积会让阶数降两阶，最终产生一个矢量。

由于以上推导的具体细节展开还是颇为复杂，所以仅采用了文字描述简要说明，进一步解释可以参阅专门的理论力学书籍。

将二阶反对称张量 Ω 的元素写成伪矢量 $\omega = [\omega_1, \omega_2, \omega_3]$, 则有

$$\omega \times \mathbf{r} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ -x & y & z \end{vmatrix} \quad (1.111)$$

展开计算公式(1.110)和(1.111), 会发现两者完全相同。所以公式(1.109)得证。

回到二维微元内部的转动情况, 会发现公式(1.107)中定义的 ω_3 刚好是沿 z 轴旋转的单位时间角速度。而与公式(1.102)互相印证, 则可进一步发现 ω_3 的位置和符号也与公式(1.108)中的完全一致。所以二维情形下反对称张量 Ω 可以完全描述物质内部的转动状态。而以上分析也可很方便扩展到 \mathbb{R}^3 空间中, 所以反对称张量 Ω 的整体形式(1.100)即描述了物质内的全部转动。

由于固体中声音传播主要依靠物质的形变来传递, 不会包含由宏观物体转动所引起的位移, 所以这里仅需关注公式(1.99)所描述的内容 (后续推导中会采用 ϵ_{ij} 的指标形式来指代应变张量 Γ 中的所有元素), 在弹性力学中也被称为几何方程。

选定一个坐标系, 可以将整体形式进行展开。例如若在 Cartesian 坐标系下进行展开, 则可以得到:

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \epsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad \epsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} \\ \gamma_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right), \quad \gamma_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \\ \gamma_{zx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) \end{array} \right. \quad (1.112)$$

此外, 这里还需进一步介绍一下体积应变的概念。前面一维形式下介绍过体积弹性模量, 曾引出过体积应变的定义, 即单位体积的变化率。

定义 1.5 (体积应变)

物体内一点的体积应变, 描述该点单位体积下的变化率。在小变形假设下, 可用位移矢量 \mathbf{u} 的散度来表示, 即

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\tilde{V}}{\Delta V} = \nabla \cdot \mathbf{u} \quad (1.113)$$

证明 本证明还是先采用比较直观的 Cartesian 坐标系下的标准正交基 $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ 进行展开推导, 完备的证明介绍见附录E.3。在 \mathbb{R}^3 空间中, 设任意一点处的微元六面体的棱边长度分别为 $\Delta x, \Delta y, \Delta z$, 则变形前该微元体的体积为

$$\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z \quad (1.114)$$

变形后的体积 (仿照公式(1.103)的写法) 为

$$\begin{aligned} \Delta V + \tilde{V} &= \left(\Delta x + \frac{\partial u_x}{\partial x} \Delta x \right) \left(\Delta y + \frac{\partial u_y}{\partial y} \Delta y \right) \left(\Delta z + \frac{\partial u_z}{\partial z} \Delta z \right) \\ &= \Delta x \Delta y \Delta z \left(1 + \frac{\partial u_x}{\partial x} \right) \left(1 + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) \left(1 + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (1.115)$$

则体积应变可表示为

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\tilde{V}}{\Delta V} = \left(1 + \frac{\partial u_x}{\partial x}\right) \left(1 + \frac{\partial u_y}{\partial y}\right) \left(1 + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right) - 1 \quad (1.116)$$

在小变形假设下，可以忽略应变分量的高阶项，则上式可进一步化简为

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\tilde{V}}{\Delta V} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = \nabla \cdot \mathbf{u} \quad (1.117)$$

1.5.3 本构关系

根据前面分析，应力张量 \mathbf{T} 与应变张量 $\boldsymbol{\Gamma}$ 可以分别描述固体内一点的受力与形变情况。由于力与其作用点的位移之间的点积为该力对物体所做的功，所以应力张量 \mathbf{T} 与应变张量 $\boldsymbol{\Gamma}$ 对应元素的乘积（即双点积运算，进一步解释可以参阅专门的张量分析书籍）理应表现为固体内一点（单位体积）在各方向上所做的功。

考虑到声音在固体中的传播一般可视为绝热（定熵）状态，即没有内外的热交换，此时固体的热力学能，即内能 U 的变化则完全由做功来体现。将内能 U 视作应变张量 $\boldsymbol{\Gamma}$ （表现为位移的改变量）的函数，则应力张量 \mathbf{T} 采用指标形式可表示为

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}} \quad (1.118)$$

上式即为通过热力学方式推导出的固体在弹性阶段的本构关系。

由于前面已经介绍过一维情形下的 Hooke 定律，其描述了特定固体在弹性阶段应力与应变之间不同的线性关系，即阐述了不同材料的固有属性（不同的材料“弹性”程度不同），接下来可以在 \mathbb{R}^3 空间中对其进行扩充。为方便讨论，接下来的推导同样在单位正交基下展开，所以指标不分上下标。

进一步将应力张量 \mathbf{T} 视作应变张量 $\boldsymbol{\Gamma}$ 的函数，对其进行 Taylor 展开。考虑到声音传播在固体中产生的均为小变形，所以仅保留其一阶展开项，则可以得到如下广义 Hooke 定律的表达式：

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(\boldsymbol{\Gamma} = 0) + \left[\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{ks}}(\boldsymbol{\Gamma} = 0) \right] \cdot \varepsilon_{ks} = D_{ij} + C_{ijkl} \varepsilon_{ks} \quad (1.119)$$

上式中， D_{ij} 即为初始无应变状态下的应力，可视为零； C_{ijkl} 即为小变形情况下 \mathbb{R}^3 空间中描述应力与应变之间线性关系的系数，表现为初始无应变状态下任意应力分量相对于任意应变分量的偏导数。由于其具有 4 个下标，所以这是一个比较复杂的四阶张量，一般称为弹性张量，可以用符号 \mathbf{C} 表示。

尽管这个四阶张量看上去有些过于“劝退”，毕竟在 \mathbb{R}^3 空间中四个指标即意味着有 $3^4 = 81$ 个分量，但其实 C_{ijkl} 中具有实际不同数值的分量并不多。

1. 首先，由于应力张量 \mathbf{T} 和应变张量 $\boldsymbol{\Gamma}$ 均为对称张量，所以每个张量实际只有六个不同项，因此在 C_{ijkl} 中最多只有 36 个不同项；
2. 其次，由公式(1.118)和(1.119)联立可知：

$$C_{ijkl} = \frac{\partial^2 U}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} = \frac{\partial^2 U}{\partial \varepsilon_{ks} \partial \varepsilon_{ij}} = C_{klsij} \quad (1.120)$$



所以，弹性张量 \mathbf{C} 实际是具有完全对称性的四阶张量。简单来说，若将应力分量和应变分量展开成列向量，具有 36 个元素的弹性分量矩阵也是对称矩阵。所以，实际上弹性张量 \mathbf{C} 里独立的分量只有 21 个；

3. 如果进一步考虑各向同性的固体，即弹性属性在任何方向上都相同，则可以通过坐标变换的方式（旋转 180° 、 90° 、 45° ，以及镜像翻转等）证明，实际弹性张量仅具有两个独立的弹性常数。

对于各向同性的固体，两个独立的弹性常数一般采用拉梅 (Lamé) 常数 λ 和 μ ，此时广义 Hooke 定律可以改写为如下的指标形式：

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (1.121)$$

上述关于各向同性表达式推导的具体细节展开还是颇为复杂，所以仅采用了文字描述简要说明，进一步解释可以参阅专门的弹性力学书籍。

公式(1.121)也可以采用如下比较直观的矩阵形式 (Cartesian 坐标系下) 表示：

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix} \quad (1.122)$$

值得注意的是，可以看到剪切应力分量与对应的剪切应变分量之间存在一个固定的线性系数 2μ ，所以 μ 也可以被称为剪切模量，一般用符号 G 表示。另外，在工程上有时候会省略该线性系数中的倍数 2，直接放到剪切应变里去。本书由于采用的是偏数学的表达方式，所以这里还是选择保留该倍数。

上面推导出的广义 Hooke 定律，即公式(1.121)虽然具有严谨的数学描述，但物理上并不直观。从一维形式的弹性理论进行扩充，通过下述方式更具有明确的物理含义：

- 采用杨氏 (Young) 模量 E 描述固定方向上正应力与正应变之间的线性关系；
- 采用剪切模量 G 描述固定方向上剪切应力与剪切应变之间的线性关系；
- 由于某方向上的正应变也有可能来自于其他方向上正应力的影响，所以还需采用泊松 (Poisson) 比 ν 描述不同方向上正应力与正应变之间的线性关系；

构建一个 Cartesian 坐标系，通过上述描述会发现采用应力分量来描述应变分量更为合适，最后可以得到如下广义 Hooke 定律的表达式：

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{xx} = \frac{1}{E} [\sigma_{xx} - \nu (\sigma_{yy} + \sigma_{zz})] \\ \varepsilon_{yy} = \frac{1}{E} [\sigma_{yy} - \nu (\sigma_{zz} + \sigma_{xx})] \\ \varepsilon_{zz} = \frac{1}{E} [\sigma_{zz} - \nu (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})] \\ \gamma_{xy} = \frac{1}{2G} \tau_{xy}, \quad \gamma_{yz} = \frac{1}{2G} \tau_{yz}, \quad \gamma_{zx} = \frac{1}{2G} \tau_{zx} \end{array} \right. \quad (1.123)$$

在上式中，一共产生了三个弹性参数。根据前面的分析，其中只会存在两个独立

的弹性参数，所以剪切模量 G 必然可以写成另外两个参数的函数。

首先将公式(1.123)也写成矩阵形式，并注意到此时应力分量与应变分量的位置与公式(1.122)中相反，所以弹性系数需要取逆，再对比各元素，最后可得到：

$$G = \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad \lambda = \frac{Ev}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (1.124)$$

则公式(1.123)可最终改写为只有两个独立参数 E 和 ν 的表达式，其矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1+\nu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \text{Sym.} & & 1+\nu & 0 & 0 & 0 \\ & & & 1+\nu & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix} \quad (1.125)$$

公式(1.122)和公式(1.125)两种广义 Hooke 定律的矩阵形式也可以通过二阶张量的方式改写为如下整体形式：

$$\mathbf{T} = \lambda \operatorname{tr}(\boldsymbol{\Gamma}) \mathbf{I} + 2\mu \boldsymbol{\Gamma} \quad (1.126)$$

$$\boldsymbol{\Gamma} = \frac{1}{E} [(1+\nu) \mathbf{T} - \nu \operatorname{tr}(\mathbf{T}) \mathbf{I}] \quad (1.127)$$

其中，函数符号 tr 代表应变张量 $\boldsymbol{\Gamma}$ 和应力张量 \mathbf{T} 矩阵形式的迹，即矩阵对角线上的元素之和。例如 $\operatorname{tr}(\boldsymbol{\Gamma}) = \varepsilon_{ii}$ ，在 Cartesian 坐标系下展开即为 $\operatorname{tr}(\boldsymbol{\Gamma}) = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}$ 。从前面关于体积应变的推导中也可以发现， $\operatorname{tr}(\boldsymbol{\Gamma})$ 也可以用来指代体积应变，即 $\operatorname{tr}(\boldsymbol{\Gamma}) = \nabla \cdot \mathbf{u}$ 。 \mathbf{I} 则为单位张量，其矩阵形式表现为对角线上元素为 1，而其他元素均为 0。

 **笔记** 虽然上述推导过程均建立在 Cartesian 坐标系下，但整体形式(1.126)与(1.127)适用性更加广泛。其实只要应力应变的对应关系构建好，就算在曲线坐标系下表示应力应变分量，依旧可以在该坐标系下建立这种统一的 Young 氏模量、Poisson 比的物理描述，即整体形式的公式(1.126)与(1.127)可以不依赖于坐标系完全描述固体的各向同性本构关系。

进一步来看，虽然本书讨论的声音传播媒介均为各向同性的物质，但为了保持知识体系的完备性，还是有必要对“如何处理非各向同性的物质”做一简要说明。根据前面的描述，非各向同性的物质最多含有 21 个独立的弹性分量，想要完全计算出各个分量在数学上是十分困难的。所以合理的方式还是要找到一个局部坐标系，去构建含有 Young 氏模量、Poisson 比的物理描述，甚至以上两个参数在不同的方向上可以有不同的数值，只要这种描述依旧具有物理的直观性，则可以构建出合适的应力应变关系，最后再通过局部坐标系到当前坐标系的坐标变换求解出原始的弹性系数矩阵。事实上，自然界中不论何种物质，一般总能在某些特定方向上找到这种统一的物理规律。完全各向异性的物质是极少的，也不符合客观规律。所以上述方法是较为合适且具有普适性的。

1.5.4 以位移表示的弹性力学问题

现在重新把固体所满足的平衡方程、几何方程和本构方程整体形式写出来：

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \mathbf{T} = 0 \\ \boldsymbol{\Gamma} = \frac{1}{2}(\mathbf{u}\nabla + \nabla \mathbf{u}) \\ \mathbf{T} = \lambda \operatorname{tr}(\boldsymbol{\Gamma}) \mathbf{I} + 2\mu \boldsymbol{\Gamma} \end{array} \right. \quad (1.128)$$

其中，本构方程选用的是带 Lamé 常数 λ 和 μ 的方程，主要原因在于其更简洁，而且在后续推导中也会更加方便。接下来，将利用这三个基本方程，推导出以位移表示的弹性力学问题所满足的数学表达式。

引理 1.5 (张量迹运算的基本关系式)

对 \mathbb{R}^n 空间中的任意向量 \mathbf{u} ，存在如下张量迹运算的基本关系式：

$$\operatorname{tr}(\mathbf{u}\nabla + \nabla \mathbf{u}) = 2\nabla \cdot \mathbf{u} \quad (1.129)$$

其中，函数符号 tr 代表括号内张量矩阵形式的迹。



该引理的证明较为抽象，因为 $\mathbf{u}\nabla$ 和 $\nabla \mathbf{u}$ 都是二阶张量，也不太容易用 Cartesian 坐标系进行展开介绍，所以证明部分完全放在了附录E.5。

有了上述引理，则可以首先将方程组(1.128)中的第二式代入第三式得：

$$\mathbf{T} = \lambda(\nabla \cdot \mathbf{u}) \mathbf{I} + \mu(\mathbf{u}\nabla + \nabla \mathbf{u}) \quad (1.130)$$

对上式两边取散度（考虑到与方程组(1.128)中第一式的对应），则有

$$\nabla \cdot \mathbf{T} = \nabla \cdot [\lambda(\nabla \cdot \mathbf{u}) \mathbf{I} + \mu(\mathbf{u}\nabla + \nabla \mathbf{u})] \quad (1.131)$$

上式(1.131)越变越复杂，等式右端涉及到了二阶张量的运算，而且带有不只一个 Hamilton 算子的复合运算，所以还需要引入一些基本的张量运算式。

引理 1.6 (含 Hamilton 算子的张量运算式)

对 \mathbb{R}^n 空间中的任意向量 \mathbf{u} ，有如下基本关系式：

$$\nabla \cdot [(\nabla \cdot \mathbf{u}) \mathbf{I}] = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) \quad (1.132)$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{u}\nabla) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) \quad (1.133)$$

$$\nabla \cdot (\nabla \mathbf{u}) = \nabla^2 \mathbf{u} \quad (1.134)$$



该引理中三个表达式的证明也较为抽象，因为均含有二阶张量项，也不太容易用 Cartesian 坐标系进行展开介绍，所以证明部分完全放在了附录E.5。

有了上述引理，公式(1.131)则可以进一步化简为

$$\nabla \cdot \mathbf{T} = (\lambda + \mu)\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu\nabla^2 \mathbf{u} \quad (1.135)$$

再结合方程组(1.128)中的第一式，最终可得：

$$(\lambda + \mu)\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu\nabla^2 \mathbf{u} = 0 \quad (1.136)$$

通过关系式(1.124)，将 Lamé 常数 λ 和 μ 换成 Young 氏模量 E 和 Poisson 比 ν ，则可以得到以位移描述弹性力学问题的另一种表述：

$$\frac{E}{2(1+\nu)(1-2\nu)}\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \frac{E}{2(1+\nu)}\nabla^2 \mathbf{u} = 0 \quad (1.137)$$

上式也可根据实际情况产生各种变种，比如考虑体力、考虑动力学问题时的惯性力等，只需根据受力分析时的方向加在等式正确的地方即可。

 **笔记** 固体部分的介绍并未像流体一样，每一小节都退化到一维形式与前面的一维章节进行对应。因为相比于流体，这种对应关系更加直观。例如一维形式下 $\nabla \cdot \mathbf{T} = 0$ 很容易退化为 $\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = 0$ ，在加上惯性力后则与公式(1.5)完全一样。其他部分如应变分析、弹性本构等也很容易转化为一维的形式。事实上，直接将公式(1.137)退化为一维形式，此时 $\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) = \nabla^2 \mathbf{u} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\nu = 0$ ，在加上惯性力后则可得到与公式(1.7)完全一样的弹性体一维波动方程。

1.5.5 波动方程推导

当固体内部产生微小扰动时，可以将上述以位移表示的弹性力学基本方程推广到动力学情形下。这里为方便推导还是采用带 Lamé 常数 λ 和 μ 的方程(1.136)，此时等式左端即代表微元体的合力 $\nabla \cdot \mathbf{T}$ ，所以与流体部分类似，仅需在等式右端添加微元体的密度（即单位体积的质量）与该微元体加速度的乘积即可，如下：

$$(\lambda + \mu)\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu\nabla^2 \mathbf{u} = \rho \cdot \mathbf{a} = \rho \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \quad (1.138)$$

由于在固体中并不存在“流动性”，所以这里还是采用位移矢量 \mathbf{u} 对时间 t 的二阶导数来描述加速度。上式也是固体形式波动方程的原始形式。

显然，公式(1.138)并不具备较好的可解释性，想要让方程的形式更为简洁直观，还需要做一些形式上的处理。从流体部分的内容获得启发，声音传递仅具有“无旋”的成分；而固体相比流体来说能够承受剪切力，所以理应还需要考虑是否有别的成分。

引理 1.7 (场论恒等式)

对 \mathbb{R}^3 空间中的任意向量场 \mathbf{A} ，有如下基本关系式：

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0 \quad (1.139)$$

证明 本证明还是先采用 Cartesian 坐标系下的标准正交基 $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ 进行展开推导，完备的证明介绍见附录E.4。由于

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k} \quad (1.140)$$

则有

$$\nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \mathbf{k} \quad (1.141)$$

所以最终有

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = \frac{\partial^2 A_z}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 A_y}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 A_z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial y \partial z} = 0 \quad (1.142)$$

该场论恒等式(1.139)也可以从几何的角度来阐述其物理意义，即：任意向量场的旋度场为无散场。

考虑 \mathbb{R}^3 空间某个区域 Ω （体积为 V ，边界的光滑闭曲面用 $\partial\Omega$ 表示），应用微积分中 **Gauss 公式** 的向量形式（与坐标系选取无关），通过公式(1.139)还可以得到：

$$\iint_{\partial\Omega} (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} = \iiint_{\Omega} [\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A})] dV = 0 \quad (1.143)$$

其中，向量 \mathbf{S} 仍指代闭曲面 $\partial\Omega$ 的外法向。

公式(1.143)指出，旋度场 $\nabla \times \mathbf{A}$ 内包裹的任意闭合曲面积分为零（通量为零，无源），进一步得到在旋度场 $\nabla \times \mathbf{A}$ 内沿向量线构造的管型区域前后截面通量相等的推论（可以通过构造闭合的管型区域来证明）。

当在一个向量场内任意闭合曲面积分为零时，该向量场被称作管型场，或无源场。恒定磁场是物理学中典型的管型场（附录F.2对恒定磁场的无源性质做了详细推导）。

根据公式(1.143)，由于此时向量场可以写作另外某个向量场 \mathbf{A} 的旋度，所以向量场 \mathbf{A} 也被称作该向量场的向量势。

以上关于向量场性质的说明可以归纳为如下定理：

定理 1.2 (管型场/无源场的性质)

对 \mathbb{R}^3 空间中单联通区域内的任意向量场，以下命题相互等价：

1. 场无源：场内任意闭合曲面积分为零（也等同于沿向量线构造的管型区域前后截面通量相等）；
2. 场可以表示为另外某个向量场（向量势）的旋度；
3. 场无散：场内处处散度为零。



上述定理对单联通区域的约束，主要是为了应用 Gauss 公式，将闭合曲面积分转换为体积分，最终缩至一点，将积分符号去掉，得到散度关系式（与附录A.2中散度定义一致）。若是闭合区域内存在“洞”，定理中1.和2.仍然等价，但无法推导出3.。

事实上，对一般的向量场来说，总可以写成两部分向量分量，一部分为“无旋”的成分，另一部分为“无散”的成分，该定理称为亥姆霍兹（Helmholtz）分解。这里为考虑与后续推导的符号体系保持统一，将无旋的成分令为 \mathbf{u}_p ，无散的成分令为 \mathbf{u}_s 。其中， p 代表主要 (primary)， s 代表次要 (secondary)。

定理 1.3 (亥姆霍兹 (Helmholtz) 分解)

对 \mathbb{R}^3 空间中的任意向量场 \mathbf{u} ，存在标量场 $\varphi \in \mathbb{R}^3$ 和向量场 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^3$ ，使得：

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_p + \mathbf{u}_s = \nabla\varphi + \nabla \times \mathbf{A} \quad (1.144)$$



下面给出该定理的存在性证明。



证明 将向量场 \mathbf{u} 进行分解，先加入一个势函数 φ ，令向量分量 $\mathbf{u}_p = \nabla\varphi$ ，则有

$$\mathbf{u} = \nabla\varphi + \mathbf{u}_s \quad (1.145)$$

由于此时 \mathbf{u}_p 为无旋场（基于引理1.2可知），所以仅需证明另一向量分量 \mathbf{u}_s 为无散场即可。

对上式(1.145)两边取散度可得：

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \nabla^2\varphi + \nabla \cdot \mathbf{u}_s \quad (1.146)$$

由于目前还不清楚势函数 φ 的取值，反正无论如何取， $\mathbf{u}_p = \nabla\varphi$ 都是无旋场。所以可以直接令

$$\nabla^2\varphi = \nabla \cdot \mathbf{u} \quad (1.147)$$

代回公式(1.146)有

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_s = 0 \quad (1.148)$$

由于 \mathbf{u}_s 的散度为零，则根据引理1.7的场论恒等式(1.139)，可知此时 \mathbf{u}_s 可表示为一个向量的旋度，即

$$\mathbf{u}_s = \nabla \times \mathbf{A} \quad (1.149)$$

进一步，定理1.3的Helmholtz分解表达式还可以给出一种定量化证明，但需要引入一些前置知识。

定义 1.6 (狄拉克 (Dirac) 函数)

一维狄拉克 (Dirac) 函数定义为 $\delta(x)$ ，满足

$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1 \\ \delta(x) = 0, \quad x \neq 0 \end{cases} \quad (1.150)$$

Dirac 函数可以推广至 \mathbb{R}^n 空间，对于区域 Ω (广义体积为 V) 中的向量值自变量 $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^n$ ，Dirac 函数 $\delta(\mathbf{r})$ 满足

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \delta(\mathbf{r}) dV = 1 \\ \delta(\mathbf{r}) = 0, \quad \mathbf{r} \neq 0 \end{cases} \quad (1.151)$$

特别地，针对 \mathbb{R}^3 空间的 Cartesian 坐标系下，三维 Dirac 函数可以表示为

$$\delta(\mathbf{r}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z) \quad (1.152)$$

其中， $\mathbf{r} = (x, y, z)$ 为矢径。



Dirac 函数是一种广义函数，它在自变量不为零处全为零，而在自变量为零处又没有明确的数值定义，但在整个定义域区间内却满足积分为 1。

性质 Dirac 函数具有如下基本数学性质：

- Dirac 函数为偶函数，分别满足 $\delta(x) = \delta(-x)$ 和 $\delta(\mathbf{r}) = \delta(-\mathbf{r})$ ，进一步推广得到： $\delta(x - x_0) = \delta(x_0 - x)$ 和 $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = \delta(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r})$ 。其中， x_0 和 \mathbf{r}_0 分别为一维空间的实



数取值和多维空间的向量取值；

- 对于任意一元函数 $f(x)$ 和多元向量值函数 $f(\mathbf{r})$ ，必有 $f(x)\delta(x) = f(0)\delta(x)$ 和 $f(\mathbf{r})\delta(\mathbf{r}) = f(0)\delta(\mathbf{r})$ ，进一步得到如下 Dirac 函数的“筛选抽取”性质：

$$\begin{cases} f(x_0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-x_0)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x_0-x)dx \\ f(\mathbf{r}_0) = \int_{\Omega} f(\mathbf{r})\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)dV = \int_{\Omega} f(\mathbf{r})\delta(\mathbf{r}_0-\mathbf{r})dV \end{cases} \quad (1.153)$$

引理 1.8 (Dirac 函数恒等式)

对 \mathbb{R}^n 空间中的任意向量值自变量 \mathbf{r} 和常向量 \mathbf{r}_0 ，有如下基本关系式：

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|} \right) = -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \quad (1.154)$$



证明 该引理可以适用于任意有限维曲线坐标系下的向量场，但完整证明将较为繁琐。这里仅采用 Cartesian 坐标系下标准正交基 $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ 的方式做一记录。首先考虑到

$$\begin{aligned} \nabla \|\mathbf{r}\| &= \nabla (\sqrt{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}}) = \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \right) \cdot \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} (x \cdot \mathbf{i} + y \cdot \mathbf{j} + z \cdot \mathbf{k}) = \frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|} = \mathbf{e}_r \end{aligned} \quad (1.155)$$

其中， \mathbf{e}_r 指代沿 \mathbf{r} 方向的单位向量。该式表明，作为函数，矢径的模长沿矢径方向增长最快（方向导数最大），且增长率（方向导数的数值）为 1。

根据复合函数的链式求导法则易知：

$$\nabla f(g) = f'(g) \cdot \nabla g \quad (1.156)$$

其中， f 为外层函数， g 为内层函数。令 $g = \|\mathbf{r}\|$, $f = \frac{1}{\|\mathbf{r}\|}$ ，结合公式(1.155)可得：

$$\nabla \left(\frac{1}{\|\mathbf{r}\|} \right) = \left(\frac{1}{\|\mathbf{r}\|} \right)' \nabla \|\mathbf{r}\| = -\frac{1}{\|\mathbf{r}\|^2} \mathbf{e}_r \quad (1.157)$$

此时，若想继续计算上式的散度，最简便的方法即是将 \mathbf{e}_r 视作 \mathbb{R}^3 空间球坐标系 (r, θ, ϕ) 下沿 r 坐标方向的单位基， $-\frac{1}{\|\mathbf{r}\|^2} = -\frac{1}{r^2}$ 为相应的坐标分量，根据附录D.5中球坐标系下的散度计算式(D.111)，直接得到：

$$\nabla \cdot \nabla \left(\frac{1}{\|\mathbf{r}\|} \right) = \nabla \cdot \left(-\frac{1}{\|\mathbf{r}\|^2} \mathbf{e}_r \right) = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \cdot \frac{1}{r^2} \right) = 0 \quad (1.158)$$

以上计算结果是很反常的，因为从公式(1.157)可以看出， \mathbf{e}_r 作为单位矢径，是一个十分明显的有源场，从物理意义上讲， $\nabla \left(\frac{1}{\|\mathbf{r}\|} \right)$ 应当具有很大的散度。究其原因，问题只可能出现在 $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ 处，此时 $\frac{1}{\|\mathbf{r}\|}$ 没有定义，自然公式(1.158)也就不成立（除此之外，应当认为公式(1.158)绝对正确）。

若想探究 $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ 时以上各式的计算结果，无法直接求解，只能从其他角度寻求方法。这里考虑公式(1.157)的散度在 \mathbb{R}^3 空间区域 Ω （体积为 V ）的体积分，并应用 Gauss 公式转换为面积分（边界闭曲面 $\partial\Omega$ ），有

$$\iiint_{\Omega} \left[\nabla \cdot \nabla \left(\frac{1}{\|\mathbf{r}\|} \right) \right] dV = - \iiint_{\Omega} \left[\nabla \cdot \left(\frac{1}{\|\mathbf{r}\|^2} \mathbf{e}_r \right) \right] dV = - \iint_{\partial\Omega} \left(\frac{1}{\|\mathbf{r}\|^2} \mathbf{e}_r \right) \cdot d\mathbf{s} \quad (1.159)$$



根据公式(1.158), 上式积分在 $\mathbf{r} \neq \mathbf{0}$ 处全为零; 而当 $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ 时, 包裹矢径 \mathbf{r} 的区域应当理解为一个无穷小的球体, 此时采用球坐标系 (r, θ, ϕ) , 边界闭曲面 $\partial\Omega$ 的单位法向量刚好为 \mathbf{e}_r , 再根据微积分中的换元积分可知此时面积元 $d\mathbf{S}$ 为 $r^2 \sin\theta d\theta d\phi \cdot \mathbf{e}_r$, 则上式可进一步计算得到:

$$\begin{aligned} \iint_{\partial\Omega} \left(\frac{1}{\|\mathbf{r}\|^2} \mathbf{e}_r \right) \cdot d\mathbf{S} &= \iint_{\partial\Omega} \left(\frac{1}{r^2} \mathbf{e}_r \right) \cdot (r^2 \sin\theta d\theta d\phi \cdot \mathbf{e}_r) = \iint_{\partial\Omega} \sin\theta d\theta d\phi \\ &= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin\theta d\theta = 4\pi \end{aligned} \quad (1.160)$$

结合以上分析, 利用前面介绍的 Dirac 函数, 可以最终给出:

$$\nabla \cdot \nabla \left(\frac{1}{\|\mathbf{r}\|} \right) = \nabla^2 \left(\frac{1}{\|\mathbf{r}\|} \right) = -4\pi\delta(\mathbf{r}) \quad (1.161)$$

引入常向量 \mathbf{r}_0 , 将 \mathbf{r} 替换为 $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ 或 $\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}$, 依照上述相同的证明思路即可得到:

$$\begin{cases} \nabla \|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\| = \nabla \|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}\| = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|} \\ \nabla \left(\frac{1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|} \right) = \nabla \left(\frac{1}{\|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}\|} \right) = -\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|^3} \\ \nabla^2 \left(\frac{1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|} \right) = \nabla^2 \left(\frac{1}{\|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}\|} \right) = -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \end{cases} \quad (1.162)$$

引理 1.9 (场论恒等式)

对 \mathbb{R}^3 空间中的任意向量场 \mathbf{u} , 有

$$\nabla^2 \mathbf{u} = (\nabla \cdot \nabla) \mathbf{u} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) \quad (1.163)$$

该引理的证明较为抽象, 虽然等式中不存在二阶张量, 但两次求旋度也不太容易用 Cartesian 坐标系进行展开介绍, 所以证明部分完全放在了附录E.4。

引理 1.10 (含 Hamilton 算子的函数积的微分运算式)

对 \mathbb{R}^3 空间中的任意标量场 φ 和向量场 \mathbf{A} , 有

$$\nabla \cdot (\varphi \mathbf{A}) = (\nabla \varphi) \cdot \mathbf{A} + \varphi (\nabla \cdot \mathbf{A}) \quad (1.164)$$

$$\nabla \times (\varphi \mathbf{A}) = (\nabla \varphi) \times \mathbf{A} + \varphi (\nabla \times \mathbf{A}) \quad (1.165)$$

证明 本证明还是先采用 Cartesian 坐标系下的标准正交基 $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ 进行展开推导, 完备的证明介绍见附录E.4。需要注意, 如果将向量场 \mathbf{A} 展开成分量进行证明, 特别对于旋度运算, 将会格外繁琐。这里考虑到向量函数的散度和旋度, 还可以统一先进行微分运算, 再进行向量运算, 所以可以不对 \mathbf{A} 进行展开, 直接有

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\varphi \mathbf{A}) &= \frac{\partial(\varphi \mathbf{A})}{\partial x} \cdot \mathbf{i} + \frac{\partial(\varphi \mathbf{A})}{\partial y} \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial(\varphi \mathbf{A})}{\partial z} \cdot \mathbf{k} \\ &= \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \mathbf{k} \right) \cdot \mathbf{A} + \varphi \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} \cdot \mathbf{i} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z} \cdot \mathbf{k} \right) \\ &= (\nabla \varphi) \cdot \mathbf{A} + \varphi (\nabla \cdot \mathbf{A}) \end{aligned} \quad (1.166)$$

上式的推导用到了微积分中函数积的微分运算法则。

对于旋度公式的证明类似，但需要注意向量的叉积运算交换向量次序后并不相等（相差一个负号），所以最好一开始将标准正交基 $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ 写在偏导数项的左边，其余证明过程与上式完全一致。

基于以上理论基础，定理1.3的 Helmholtz 分解可以给出如下定量化证明：

证明 将向量场 \mathbf{u} 写作 \mathbb{R}^3 空间区域 Ω 中矢径 \mathbf{r} 的函数，根据 Dirac 函数的性质公式(1.153)可以扩展成同一空间另一片区域 Ω_0 （体积为 V_0 ）中相对于向量 \mathbf{r}_0 （注意此时 \mathbf{r}_0 并不能视作常向量）的积分关系式，有

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \int_{\Omega_0} \mathbf{u}(\mathbf{r}_0) \delta(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}) dV_0 = \int_{\Omega_0} \mathbf{u}(\mathbf{r}_0) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) dV_0 \quad (1.167)$$

这里将 Dirac 函数的形式写成 $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$ ，主要是考虑到 $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ 具有较好的几何含义，即指代矢径 \mathbf{r}_0 到 \mathbf{r} 的向量。

代入引理1.8的 Dirac 函数恒等式可进一步得到（注意此时 ∇^2 仅作用于 \mathbf{r} 上）：

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \int_{\Omega_0} \mathbf{u}(\mathbf{r}_0) \left(-\frac{1}{4\pi} \nabla^2 \frac{1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|} \right) dV_0 = -\frac{1}{4\pi} \nabla^2 \int_{\Omega_0} \frac{\mathbf{u}(\mathbf{r}_0)}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|} dV_0 \quad (1.168)$$

结合引理1.9的场论恒等式(1.163)，可将上式改写为

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{r}) &= -\frac{1}{4\pi} \nabla \left(\nabla \cdot \int_{\Omega_0} \frac{\mathbf{u}(\mathbf{r}_0)}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|} dV_0 \right) + \frac{1}{4\pi} \nabla \times \left(\nabla \times \int_{\Omega_0} \frac{\mathbf{u}(\mathbf{r}_0)}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|} dV_0 \right) \\ &= -\frac{1}{4\pi} \left[\nabla \left(\int_{\Omega_0} \mathbf{u}(\mathbf{r}_0) \cdot \nabla \frac{1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|} dV_0 \right) + \nabla \times \left(\int_{\Omega_0} \mathbf{u}(\mathbf{r}_0) \times \nabla \frac{1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|} dV_0 \right) \right] \end{aligned} \quad (1.169)$$

上式第二步的推导，用到了引理1.10介绍的含 Hamilton 算子的函数积的微分运算式(1.164)和(1.165)，即将 $\frac{1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|}$ 视作标量函数， $\mathbf{u}(\mathbf{r}_0)$ 为向量函数（但对 ∇ 的微分运算来说只是常向量），并结合叉积运算的性质，对第二项交换向量次序后的表达式进行了正负号转换。

公式(1.169)可以继续进行转换，但考虑到与表达式中积分项的统一，最好先将积分项内的微分算子改为作用于 \mathbf{r}_0 而非 \mathbf{r} 上（相比于公式(1.154)的形式，即反过来处理，将前一项 \mathbf{r} 视为常向量）。为以示区别，后续作用于 \mathbf{r} 上的 Hamilton 算子采用符号 ∇ ，而作用于 \mathbf{r}_0 上的采用 $\bar{\nabla}$ 。

根据引理1.8的推导易证，如果转换 Hamilton 算子的作用项，整个计算过程会相差一个负号，即满足

$$\begin{cases} \bar{\nabla} \|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\| = -\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|} = -\nabla \|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\| \\ \bar{\nabla} \left(\frac{1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|} \right) = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|^3} = -\nabla \left(\frac{1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|} \right) \\ \bar{\nabla}^2 \left(\frac{1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|} \right) = 4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = -\nabla^2 \left(\frac{1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|} \right) \end{cases} \quad (1.170)$$

利用公式(1.170)的第二式，公式(1.169)可以化为如下形式：

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \left[\nabla \left(\int_{\Omega_0} \mathbf{u}(\mathbf{r}_0) \cdot \bar{\nabla} \frac{1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|} dV_0 \right) + \nabla \times \left(\int_{\Omega_0} \mathbf{u}(\mathbf{r}_0) \times \bar{\nabla} \frac{1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|} dV_0 \right) \right] \quad (1.171)$$

上式即表明，向量场 \mathbf{u} 可以拆解为一个无旋场 $\mathbf{u}_p = \nabla \varphi$ 和一个无散场 $\mathbf{u}_s = \nabla \times \mathbf{A}$ 的组合，满足定理1.3的 Helmholtz 分解公式(1.144)。其中标量场 φ 和向量场 \mathbf{A} 的定量

化描述（均写成了与 \mathbf{r}_0 相关的表达式）为

$$\begin{cases} \varphi = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega_0} \mathbf{u}(\mathbf{r}_0) \cdot \bar{\nabla} \frac{1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|} dV_0 \\ \mathbf{A} = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega_0} \mathbf{u}(\mathbf{r}_0) \times \bar{\nabla} \frac{1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|} dV_0 \end{cases} \quad (1.172)$$

上两式还可继续进行改写。根据引理1.10介绍的含 Hamilton 算子的函数积的微分运算式(1.164)和(1.165)，有

$$\begin{cases} \mathbf{u}(\mathbf{r}_0) \cdot \bar{\nabla} \frac{1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|} = \bar{\nabla} \cdot \frac{\mathbf{u}(\mathbf{r}_0)}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|} - \frac{\bar{\nabla} \cdot \mathbf{u}(\mathbf{r}_0)}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|} \\ \mathbf{u}(\mathbf{r}_0) \times \bar{\nabla} \frac{1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|} = -\bar{\nabla} \times \frac{\mathbf{u}(\mathbf{r}_0)}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|} + \frac{\bar{\nabla} \times \mathbf{u}(\mathbf{r}_0)}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|} \end{cases} \quad (1.173)$$

代回公式(1.172)可知：

$$\begin{cases} \varphi = \frac{1}{4\pi} \left(\int_{\Omega_0} \bar{\nabla} \cdot \frac{\mathbf{u}(\mathbf{r}_0)}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|} dV_0 - \int_{\Omega_0} \frac{\bar{\nabla} \cdot \mathbf{u}(\mathbf{r}_0)}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|} dV_0 \right) \\ \mathbf{A} = \frac{1}{4\pi} \left(- \int_{\Omega_0} \bar{\nabla} \times \frac{\mathbf{u}(\mathbf{r}_0)}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|} dV_0 + \int_{\Omega_0} \frac{\bar{\nabla} \times \mathbf{u}(\mathbf{r}_0)}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|} dV_0 \right) \end{cases} \quad (1.174)$$

可以看到，上两式的每一项均可以通过引理1.3介绍的广义 Gauss 公式，统一将体积分转换为面积分（边界的光滑闭曲面用 $\partial\Omega_0$ 表示），得到：

$$\begin{cases} \varphi = \frac{1}{4\pi} \left(\int_{\Omega_0} \mathbf{n}_0 \cdot \frac{\mathbf{u}(\mathbf{r}_0)}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|} dS_0 - \int_{\Omega_0} \frac{\bar{\nabla} \cdot \mathbf{u}(\mathbf{r}_0)}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|} dV_0 \right) \\ \mathbf{A} = \frac{1}{4\pi} \left(- \int_{\Omega_0} \mathbf{n}_0 \times \frac{\mathbf{u}(\mathbf{r}_0)}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|} dS_0 + \int_{\Omega_0} \frac{\bar{\nabla} \times \mathbf{u}(\mathbf{r}_0)}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|} dV_0 \right) \end{cases} \quad (1.175)$$

其中， \mathbf{n}_0 指代向量 \mathbf{r}_0 所在区域表面 S_0 的单位法向量。公式(1.175)即为完整形态的 Helmholtz 分解定量化表达式。

考虑到绝大多数真实的向量场空间均是无界的，在无穷远处的区域表面进行积分，向量值自变量 \mathbf{r}_0 的大小远超向量场函数 $\mathbf{u}(\mathbf{r}_0)$ ，所以公式(1.175)中的第一项均可忽略，Helmholtz 分解的定量化表达式简化为

$$\begin{cases} \varphi = -\frac{1}{4\pi} \int_{\Omega_0} \frac{\bar{\nabla} \cdot \mathbf{u}(\mathbf{r}_0)}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|} dV_0 \\ \mathbf{A} = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega_0} \frac{\bar{\nabla} \times \mathbf{u}(\mathbf{r}_0)}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|} dV_0 \end{cases} \quad (1.176)$$

将上式代回 Helmholtz 分解公式(1.144)，利用梯度运算也满足类似引理1.10的函数积的微分运算式（易证），再结合公式(1.170)的第二式（注意此时 ∇ 仅作用于 \mathbf{r} 上），进行化简，还可获得关于向量场 \mathbf{u} 的一种统一表达形式：

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{r}) &= -\frac{1}{4\pi} \nabla \int_{\Omega_0} \frac{\bar{\nabla} \cdot \mathbf{u}(\mathbf{r}_0)}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|} dV_0 + \frac{1}{4\pi} \nabla \times \int_{\Omega_0} \frac{\bar{\nabla} \times \mathbf{u}(\mathbf{r}_0)}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|} dV_0 \\ &= -\frac{1}{4\pi} \int_{\Omega_0} \bar{\nabla} \cdot \mathbf{u}(\mathbf{r}_0) \left(\nabla \frac{1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|} \right) dV_0 - \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega_0} \bar{\nabla} \times \mathbf{u}(\mathbf{r}_0) \times \left(\nabla \frac{1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|} \right) dV_0 \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega_0} \bar{\nabla} \cdot \mathbf{u}(\mathbf{r}_0) \left(\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|^3} \right) dV_0 + \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega_0} \bar{\nabla} \times \mathbf{u}(\mathbf{r}_0) \times \left(\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|^3} \right) dV_0 \end{aligned} \quad (1.177)$$

该式虽然目前看不出有什么特别之处，但在电磁学及电动力学领域，却有着明确

的物理含义（具体可参阅附录E.3）。

综上，简要来说，根据定理1.3，向量场 \mathbf{u} 的分解，可以产生一个无旋场 \mathbf{u}_p 和无散场 \mathbf{u}_s ，满足

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_p &= \nabla\varphi, \quad \nabla \times \mathbf{u}_p = 0 \\ \mathbf{u}_s &= \nabla \times \mathbf{A}, \quad \nabla \cdot \mathbf{u}_s = 0\end{aligned}\tag{1.178}$$

下图1.8给出了几种二维 (x, y) 坐标情形（无旋场、无散场，以及有旋有散场）下向量场 \mathbf{u} 的详细示意图，可以直观地看到不同向量场分布的具体情况。

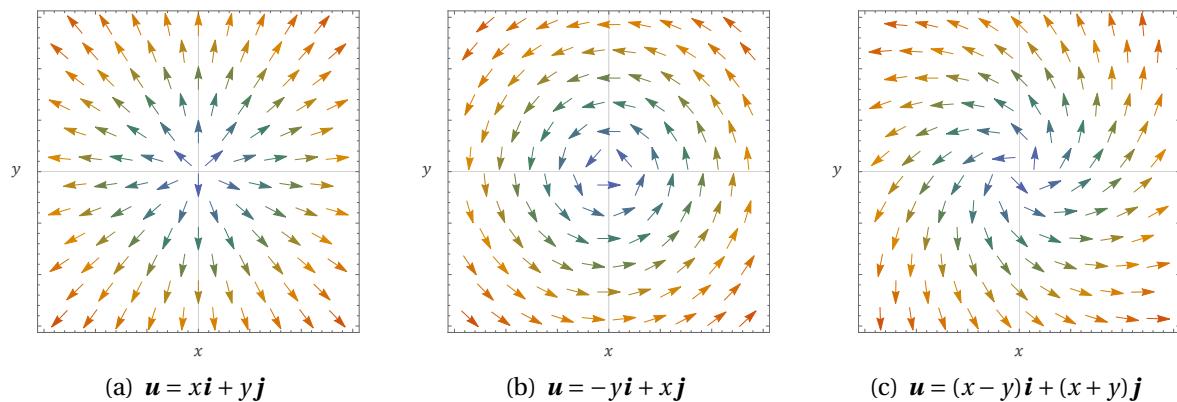


图 1.8: 无旋场、无散场，以及有旋有散场情形下的向量场示意图

注 需要说明的是，并不是所有的向量场都必然是“有散”或“有旋”的。例如下图1.9中的两种情况，一种被称为 **Laplace 场**，另一种被称为均匀场（Laplace 场的特殊情形），便是“既无旋也无散”的无旋无散场。

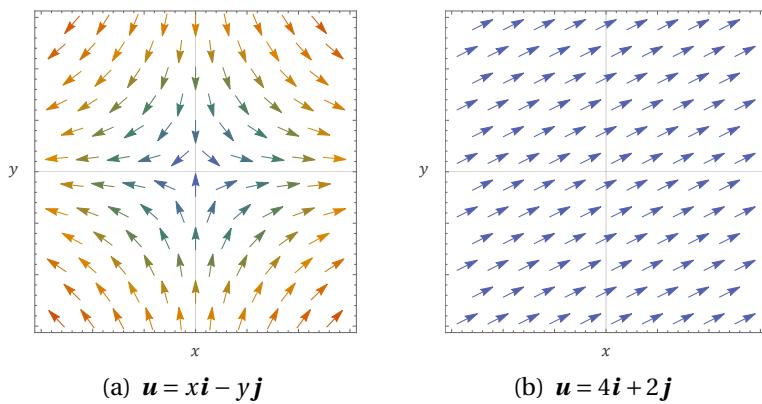


图 1.9: 无旋场无散场情形下的向量场示意图

当在一个向量场内处处散度与旋度均为零时，该向量场被称作调和场。由向量场无旋可知（基于引理1.2），必然存在势函数 φ 满足向量场 $\mathbf{u} = \nabla\varphi$ ；再由向量场无散（基于引理1.7）可知， $\nabla \cdot \mathbf{u} = \nabla^2\varphi = 0$ 。此时势函数 φ 也被称作调和函数。

笔记 调和场也可先根据无散性质再根据无旋性质，得到向量势 \mathbf{A} 满足 $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$ 。只是在实际应用时，还是势函数（调和函数） φ 的计算更为方便。

所以，对于定理1.3的Helmholtz分解，更完备的前提条件应当为：向量场 \mathbf{u} 满足 $\nabla \cdot \mathbf{u} \neq 0$ 且 $\nabla \times \mathbf{u} \neq 0$ 。

本章基于声学相关基础知识，陆续介绍的**保守场（有势场）**、**管型场（无源场）**以及**调和场**，即场论分析中最常见的三类特殊向量场。

回到本节的波动方程推导，基于定理1.3，将位移矢量 \mathbf{u} 的Helmholtz分解 $\mathbf{u} = \mathbf{u}_p + \mathbf{u}_s$ （其中 \mathbf{u}_p 为无旋场， \mathbf{u}_s 为无散场）代入公式(1.138)，则有

$$(\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}_p) + \mu \nabla^2 (\mathbf{u}_p + \mathbf{u}_s) = \rho \cdot \frac{\partial^2 (\mathbf{u}_p + \mathbf{u}_s)}{\partial t^2} = \rho (\ddot{\mathbf{u}}_p + \ddot{\mathbf{u}}_s) \quad (1.179)$$

上式中为书写方便，将 \mathbf{u}_p 和 \mathbf{u}_s 对时间的二阶导数分别用 $\ddot{\mathbf{u}}_p$ 和 $\ddot{\mathbf{u}}_s$ 来简化表示。

引理1.11(含Laplace算子的基本关系式)

对 \mathbb{R}^n 空间中的任意向量 \mathbf{u} ，有如下基本关系式：

$$\nabla \cdot (\nabla^2 \mathbf{u}) = \nabla^2 (\nabla \cdot \mathbf{u}) \quad (1.180)$$



证明 本证明还是先采用 Cartesian 坐标系下的标准正交基 $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ 进行展开推导，完备的证明介绍见附录E.4。由于

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{u} &= \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial z^2} = \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right) \mathbf{i} \\ &\quad + \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right) \mathbf{k} \end{aligned} \quad (1.181)$$

则有

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\nabla^2 \mathbf{u}) &= \frac{\partial^3 u_x}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 u_x}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 u_x}{\partial z^3} + \frac{\partial^3 u_y}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 u_y}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 u_y}{\partial z^3} + \frac{\partial^3 u_z}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 u_z}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 u_z}{\partial z^3} \\ &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) = \nabla^2 (\nabla \cdot \mathbf{u}) \end{aligned} \quad (1.182)$$

结合引理1.11，对公式(1.179)两边取散度，可将无散场 \mathbf{u}_s 直接消去：

$$(\lambda + \mu) \nabla^2 (\nabla \cdot \mathbf{u}_p) + \mu \nabla^2 (\nabla \cdot \mathbf{u}_p) = \rho \nabla \cdot \ddot{\mathbf{u}}_p \quad (1.183)$$

进一步化简则可得到单独 \mathbf{u}_p 所满足的动力学方程：

$$\nabla \cdot [(\lambda + 2\mu) \nabla^2 \mathbf{u}_p - \rho \ddot{\mathbf{u}}_p] = 0 \quad (1.184)$$

注意这里的 \mathbf{u}_p 为无旋场，其线性组合必然也为无旋场。同时 \mathbf{u}_p 也必然为有散场（具体原因后面会解释），这里其线性组合却等于零。所以只有一种情况符合，即

$$(\lambda + 2\mu) \nabla^2 \mathbf{u}_p - \rho \ddot{\mathbf{u}}_p = 0 \quad (1.185)$$

公式(1.184)描述的情况主要是因为根据 Helmholtz 分解已经提前约束了 \mathbf{u}_p 为有散场（向量场还要随时间变化，也不可能一直满足 $\nabla^2 \varphi = \nabla \cdot \mathbf{u}_p = 0$ ），所以才能得到公式(1.185)的表达式。

接下来考虑如何在公式(1.179)中消去 \mathbf{u}_p ，来获取 \mathbf{u}_s 所满足的方程。

想要消去 \mathbf{u}_p ，必然要引入旋度运算，这里利用引理1.9的场论恒等式(1.163)，将

$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}_p)$ 进行替换，再结合 \mathbf{u}_p 为无旋场，可得到：

$$(\lambda + \mu)\nabla^2 \mathbf{u}_p + \mu\nabla^2(\mathbf{u}_p + \mathbf{u}_s) = \rho(\ddot{\mathbf{u}}_p + \ddot{\mathbf{u}}_s) \quad (1.186)$$

引理 1.12 (含 Laplace 算子的基本关系式)

对 \mathbb{R}^n 空间中的任意向量 \mathbf{u} ，有如下基本关系式：

$$\nabla \times (\nabla^2 \mathbf{u}) = \nabla^2(\nabla \times \mathbf{u}) \quad (1.187)$$

证明 本证明还是先采用 Cartesian 坐标系下的标准正交基 $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ 进行展开推导，完备的证明介绍见附录E.4。根据公式(1.181)，直接计算：

$$\nabla \times (\nabla^2 \mathbf{u}) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u_x & u_y & u_z \end{vmatrix} = \nabla^2(\nabla \times \mathbf{u}) \quad (1.188)$$

结合引理1.12，对上式两边取旋度，可将 \mathbf{u}_p 直接消去：

$$\mu\nabla^2(\nabla \times \mathbf{u}_s) = \rho(\nabla \times \ddot{\mathbf{u}}_s) \quad (1.189)$$

进一步化简则可得到单独 \mathbf{u}_s 所满足的动力学方程：

$$\nabla \times [\mu\nabla^2 \mathbf{u}_s - \rho \ddot{\mathbf{u}}_s] = 0 \quad (1.190)$$

与前面情况类似，这里不做赘述，直接给出：

$$\mu\nabla^2 \mathbf{u}_s - \rho \ddot{\mathbf{u}}_s = 0 \quad (1.191)$$

这样，便分别得到了两部分位移分量 \mathbf{u}_p 和 \mathbf{u}_s 所单独满足的动力学方程。将两个公式(1.185)和(1.191)改写成统一的格式，则可得到固体中波动方程的完整形式：

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}_p}{\partial t^2}(\mathbf{r}, t) = c_p^2 \cdot \nabla^2 \mathbf{u}_p(\mathbf{r}, t) \quad (1.192)$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}_s}{\partial t^2}(\mathbf{r}, t) = c_s^2 \cdot \nabla^2 \mathbf{u}_s(\mathbf{r}, t) \quad (1.193)$$

其中，

$$c_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} = \sqrt{\frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)\rho}} \quad (1.194)$$

$$c_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} = \sqrt{\frac{E}{2(1+\nu)\rho}} \quad (1.195)$$

可以看到， \mathbb{R}^3 空间中，固体的声音传播显得较为复杂，需要展开成两部分。 $\mathbf{u}_p = \nabla\varphi$ 这部分与流体中的形式完全相同，产生的是一个无旋位移；而 $\mathbf{u}_s = \nabla \cdot \mathbf{A}$ 这部分则为无散位移。根据定义1.5中对体积应变的描述可知， $\mathbf{u}_s = \nabla \cdot \mathbf{A}$ 这部分位移扰动不会带来体积的改变，即产生的是等容位移。

其实，由于场的概念比较抽象，所以上述解释还是并不直观。最直观的解释会放在章节1.6.2进行详细介绍。

与流体部分类似，在固体中由于几何方程、本构关系等也均为线性运算，所以易知不仅位移矢量 \mathbf{u} 满足波动方程，应变张量 $\boldsymbol{\Gamma}$ 、应力张量 \mathbf{T} 也均满足上述波动方程。



 **笔记** 上述的固体波动方程推导过程其实略显繁琐。从数学上讲，还有很多更加简明巧妙的推导方式。例如从公式(1.179)开始，直接应用引理1.9的场论恒等式(1.163)，则可得到：

$$[(\lambda + 2\mu)\nabla^2 \mathbf{u}_p - \rho \ddot{\mathbf{u}}_p] + [\mu \nabla^2 \mathbf{u}_s - \rho \ddot{\mathbf{u}}_s] = 0 \quad (1.196)$$

对上式两边分别取散度和旋度，一样可以得到固体中波动方程的完整形式。

事实上，更往前一步，从公式(1.138)开始，即可直接运用 Helmholtz 分解快速得到下式（这也说明 Helmholtz 分解与引理1.9的场论恒等式(1.163)存在某种必然联系）：

$$\nabla \cdot \left[(\lambda + 2\mu)\nabla^2 \varphi - \rho \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right] + \nabla \times \left[\mu \nabla^2 \mathbf{A} - \rho \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} \right] = 0 \quad (1.197)$$

然后通过对上式两边分别取散度和旋度，可以得到标量势 φ 和向量势 \mathbf{A} 均满足类似流体的完整波动方程。而位移矢量则可进一步通过标量势 φ 和向量势 \mathbf{A} 得到，所以也可以推导出固体中波动方程的完整形式。

本节主要是为了让固体中声波传递的几何与物理含义更加凸显，所以未采用以上两种更加简洁且数学化的推导。

1.6 波动方程的解与含义

经过前面冗长的梳理与推导，本节终于可以开始回答前面提出的核心问题：为什么方程是“波动”方程，以及方程里的参数到底指代什么。

由于无论如何变换声音传播的媒介，波动方程的形式永远保持不变（哪怕是 Euclidean \mathbb{R}^3 空间中矢量形式下的波动方程亦是如此，因为 Laplace 算子本身就是对坐标的二阶导数），只是参数 c 的取值略有不同，所以可以用统一的方式来进行解释。

1.6.1 d'Alembert 行波解

首先从最简单的一维形式开始分析，重新写出一维形式下的波动方程：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = c^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \quad (1.198)$$

这是一个二阶偏微分方程，在没有给定边界条件和初始条件下，可以先通过如下方式给出其通解。

为了消去波动方程中的参数 c ，这里可以巧妙地引入如下变量替换：

$$\xi = x + ct, \quad \eta = x - ct \quad (1.199)$$

根据微积分中复合函数求偏导数的链式法则有

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} = c \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \quad (1.200)$$

进一步求二阶导数有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right) \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \frac{\partial \eta}{\partial t} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \right) \quad (1.201)$$

同理可得：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \quad (1.202)$$

将公式(1.201)和(1.202)代回公式(1.198)，则可得到：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \quad (1.203)$$

上式分别对 ξ 和 η 进行积分，则有

$$u(x, t) = f(\xi) + g(\eta) = f(x + ct) + g(x - ct) \quad (1.204)$$

其中，函数符号 f 和 g 为任意的可导函数。注意上式在积分时并未包含有积分常数，因为常数项也可以包含在任意的函数 $f(\xi)$ 和 $g(\eta)$ 中。

考察下公式(1.204)的数形几何含义，会发现位移 u 的解表现为两列任意函数向 x 轴左右两个方向的“无限平移”，平移的距离为 ct ，如下图1.10所示（这里波形只是示意）。由于参数 t 指代时间，所以参数 c 的物理含义则为声音传播的速度。

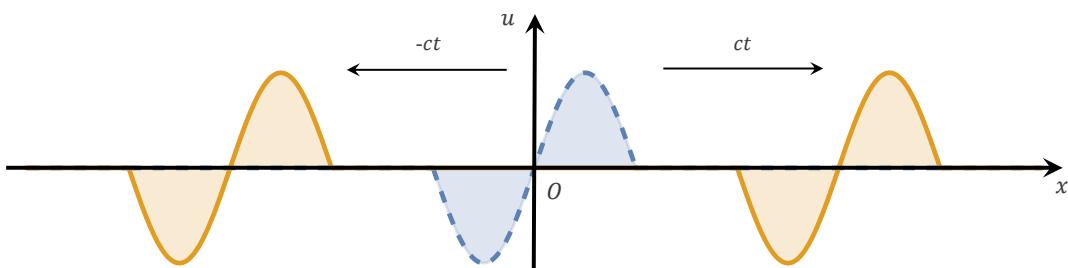


图 1.10：一维声波解的含义

这里需强调的是，声音传播的速度与物质的扰动速度完全不同。前者代表一种“表观现象”，描述了一种宏观的“能量传递”；而后者描述的是真实物质的运动状态。两者不可混为一谈。人之所以能够听到声音，是由于媒介局部微扰动引起的能量变化传递到了人耳。例如空气中声音的传播，其实就是气体的疏密变化在不停向前传递，直到被人耳所感知到。

通过以上分析，可以总结出如下波动方程的性质：

性质 在连续介质中，声音传播满足波动方程，其中参数 c 为在媒介中的传播速度。

例题 1.1 试求声波在空气中传播的速度。

解 气体中，声音传播速度的计算式应采用公式(1.36)。考虑到公式中的密度 ρ 不易得到，根据理想气体状态方程中的公式(C.7)可知：

$$c = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}} = \sqrt{\gamma R_g T} \quad (1.205)$$

要计算空气的气体常数 R_g ，需要先分析下空气的摩尔质量。

空气中，主要包含 21% 的氧气 (O_2)、78% 的氮气 (N_2)、1% 的稀有气体（以氩气 Ar 计算）和极少量的其他气体（忽略不计），因此空气的摩尔质量（不同元素的摩尔质量可通过查表得到）可计算为（以下物理量均采用国际单位制，即 SI 制）

$$\frac{m}{N} = (21\% \times 16 \times 2 + 78\% \times 14 \times 2 + 1\% \times 18) \times 10^{-3} = 2.874 \times 10^{-2} \text{ kg/mol} \quad (1.206)$$

此时空气的气体常数可通过摩尔气体常数 R (数值为 $8.314 \text{ J/mol}\cdot\text{K}$) 进行计算: $R_g = R/(m/N) \approx 289.28 \text{ J/kg}\cdot\text{K}$; 再代入空气的比热容比 $\gamma = 1.4$, 温度 $T = 20^\circ = 293.15 \text{ K}$, 则可得到 20 摄氏度下的声速大小: $c \approx 344 \text{ m/s}$ 。

接下来分别进一步考虑边界条件和初始条件的约束。

首先是**边界条件**。由于波动方程对坐标 x 是二阶导数, 所以需要两个边界条件。考虑长度为 L , 且两端固定 (位移 u 永远为零) 的一维波动, 则对于任意 $t \geq 0$, 有

$$u(0, t) = u(L, t) = 0 \quad (1.207)$$

由 $u(0, t) = 0$ 代入公式(1.204)可得 $f(ct) + g(-ct) = 0$, 即对任意自变量 τ 有 $g(\tau) = -f(-\tau)$, 因此公式(1.204)可变化为

$$u(x, t) = f(x + ct) - f(ct - x) \quad (1.208)$$

由 $u(L, t) = 0$ 代入上式(1.208)可得 $f(L + ct) = f(ct - L)$, 即对任意自变量 τ 有

$$f(\tau) = f(\tau + 2L) \quad (1.209)$$

因此函数 $f(\tau)$ 是一个周期为 $2L$ 的周期函数, 即在两端固定的情况下, 施加扰动产生的波一定是周期函数。

然后是**初始条件**, 同样需要两个初始条件。这里给出位移 u 和其对时间 t 的一阶导数即速度的初始条件:

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = v_0(x) \quad (1.210)$$

注意上面给出的是 $t = 0$ 时刻的位移分布函数 $u_0(x)$ 和速度分布函数 $v_0(x)$ 。

引理 1.13 (波动方程中位移分布函数与速度分布函数的性质)

任意 t 时刻下, 位移分布函数 $u(x)$ 和速度分布函数 $v(x)$ 均为奇函数, 且均为周期为 $2L$ 的周期函数, 即给定时刻 t_0 , 满足

$$u(x) = -u(-x), \quad u(x) = u(x + 2L) \quad (1.211)$$

$$v(x) = -v(-x), \quad v(x) = v(x + 2L) \quad (1.212)$$

证明 根据公式(1.208)可知, 在任意 t_0 时刻有

$$\begin{aligned} u(x) &= u(x, t_0) = f(x + ct_0) - f(ct_0 - x) = -u(-x) \\ v(x) &= \frac{\partial u}{\partial t}(x, t_0) = cf'(x + ct_0) - cf'(ct_0 - x) = -v(-x) \end{aligned} \quad (1.213)$$

上式中, 由于参数 t 已固定, 所以函数 $f(x)$ 退化为一元函数, 可以用 $f'(x)$ 指代对 x 的一阶导数。

当处于任意 t_0 时刻时, 根据公式(1.209)可知 $f(x) = f(x + 2L)$, 即此时一元函数 $f(x)$ 是周期为 $2L$ 的周期函数; 对其两边同时求一阶导可得 $f'(x) = f'(x + 2L)$ 。结合该两式, 代入公式(1.208)可分别得到:

$$\begin{aligned} u(x + 2L) &= u(x + 2L, t_0) = f(x + 2L + ct_0) - f(ct_0 - x - 2L) \\ &= f(x + ct_0) - f(ct_0 - x) = u(x) \end{aligned} \quad (1.214)$$

$$\begin{aligned} v(x+2L) &= \frac{\partial u}{\partial t}(x+2L, t_0) = cf'(x+2L+ct_0) - cf'(ct_0-x-2L) \\ &= cf'(x+ct_0) - cf'(ct_0-x) = v(x) \end{aligned} \quad (1.215)$$

根据引理1.13可知，上述初始条件(1.210)中的 $u_0(x)$ 和 $v_0(x)$ 也均为奇函数和周期为 $2L$ 的周期函数。

将初始条件(1.210)中的两式分别代回公式(1.204)有³

$$f(x) + g(x) = u_0(x) \quad (1.216)$$

$$cf'(x) - cg'(x) = v_0(x) \quad (1.217)$$

对公式(1.217)进行积分，并考虑到 $v_0(0) = 0$ ，则有

$$cf(x) - cg(x) = \int_0^x v_0(x) dx \quad (1.218)$$

联立公式(1.216)和(1.218)，则可求得：

$$f(x) = \frac{1}{2} \left[u_0(x) + \frac{1}{c} \int_0^x v_0(x) dx \right] \quad (1.219)$$

$$g(x) = \frac{1}{2} \left[u_0(x) - \frac{1}{c} \int_0^x v_0(x) dx \right] \quad (1.220)$$

由于 $v_0(x)$ 为奇函数，所以有

$$\int_{-x}^x v_0(x) dx = \int_{-x}^0 v_0(x) dx + \int_0^x v_0(x) dx = 0 \quad (1.221)$$

联立公式(1.219)和(1.220)，并结合公式(1.221)，代回公式(1.204)可最终得到：

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [u_0(x+ct) + u_0(x-ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} v_0(x) dx \quad (1.222)$$

以上波动方程的解也被称为达朗贝尔 (d'Alembert) 行波解。

考虑一种简化情况，初始速度分布函数设为零，此时可求得 $f(x) = g(x) = \frac{1}{2} u_0(x)$ ，再依照上述分析可知：

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [u_0(x+ct) + u_0(x-ct)] \quad (1.223)$$

$$u_0(x) = -u_0(-x), \quad u_0(x) = u_0(x+2L)$$

这也是较为常见的一种一维波动方程的具体形式。另外，由于弦的振动也符合一维波动方程，所以一般可以采用弦的振动模型来更加直观地说明波的传播。

例题 1.2 假设一种理想情况，在弦的振动模型中，弦长为 2，两端进行固定，即对于任意时刻 t 有 $u(0, t) = u(2, t) = 0$ ，初始位移分布函数在 $x > 0$ 时满足 $u_0(x) = 0.5e^{-100(x-1)^2}$ ，初始速度分布函数 $v_0 = 0$ ，波速 $c = 0.02$ 。试分析该情况下波传播的具体形式。

解 聚焦于 x 轴的正向范围，以 y 轴表示位移 u ，代入波速、边界条件和初始条件，可以采用数值方法绘制出不同时刻下的波动状态，如下图1.11所示：

图1.11可以完全印证前述所提出的理论模型。首先，根据该模型的描述，应当采用公式(1.223)进行分析。 $t = 0$ 时刻往后，初始位移分布函数 $u_0(x)$ 迅速分解成两个完

³这里也可采用公式(1.208)进行推导，两者本质完全相同。



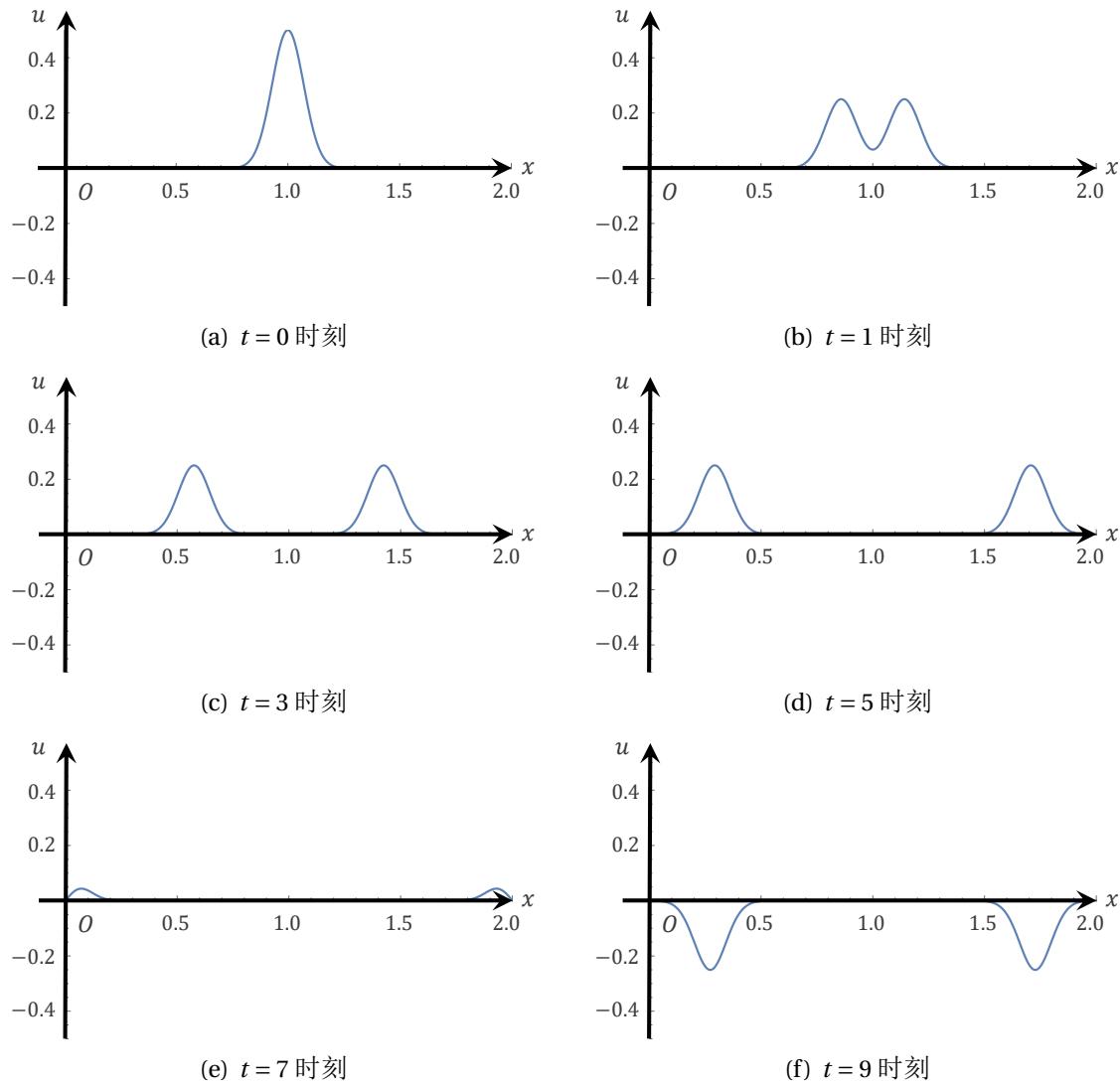


图 1.11: 不同时刻下弦的波动状态

全相同的波，开始向左右两个方向传播，符合公式(1.223)中的第一式，即代入初始条件所满足的方程。

另外，在补全 $x < 0$ 的情况下，可以绘制出初始位移分布函数的函数图1.12。可以明显看到该函数为奇函数，且是周期为 $2L$ 的周期函数。所以该模型也完全符合公式(1.223)中的第二式，即代入边界条件所满足的方程。

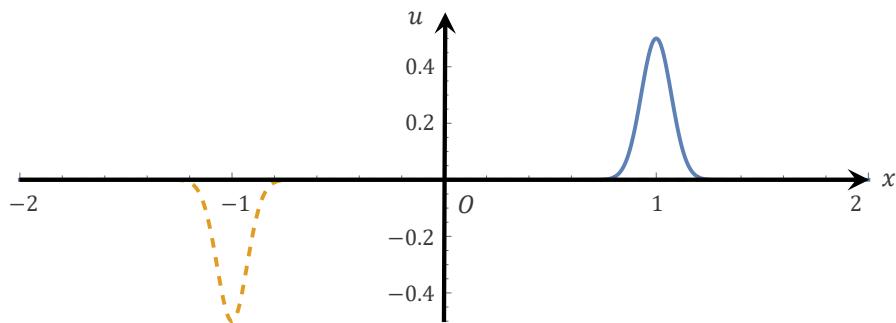


图 1.12: 初始位移分布函数示意图

进一步分析，有趣的是，尽管波的传播是在 $(0, 2)$ 的范围内，但在补全 $(-2, 0)$ 的范围后，公式(1.208)也可以得到很好的解释。结合图1.12可以看到，从数形结合的角度，公式(1.208)描述了两列以 x 轴奇对称、 y 轴偶对称的初始波形，分别以速度 c 做反向运动。当两者在 x 轴上有重叠部分时将会进行叠加，所以才会出现图1.11(e)和图1.11(f)的现象，即到达端点时波形快速消失然后变换到 y 轴反向重新出现。

受公式(1.204)即 d'Alembert 行波解通解的启发，在 \mathbb{R}^3 空间中，直观上会认为此时波动方程的通解应该是一个沿空间中任意方向传播的行波，所以这时候需要一个向量来指代方向。

考虑在 Cartesian 坐标系下，给出 \mathbb{R}^3 空间中任意一点所在平面的单位法向量 $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$ （也可采用类似附录A.2中，相对于 Cartesian 坐标系的三个方向余弦，即 $\mathbf{n} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ 来描述），则其与该点矢径 $\mathbf{r} = (x, y, z)$ 的点积为

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} = n_x x + n_y y + n_z z \quad (1.224)$$

上式可以看作任意一点处的矢径 \mathbf{r} 在单位法向量 \mathbf{n} 上的投影。

注意此时是给定了一点的方向，所以单位法向量 $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$ 并不是关于坐标的函数，而需要视作常向量来处理。

仿照公式(1.204)的推导过程，令

$$\xi = \mathbf{n} \cdot \mathbf{r} + ct, \quad \eta = \mathbf{n} \cdot \mathbf{r} - ct \quad (1.225)$$

此时位移矢量 \mathbf{u} 关于时间 t 的二阶导数，与公式(1.201)的形式完全相同。

而位移矢量 \mathbf{u} 关于空间坐标 x, y, z 的二阶导数则需要做进一步分析。以位移矢量 \mathbf{u} 关于空间坐标 x 的二阶导数为例，先写出其一阶导数的表达式：

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = n_x \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \eta} \right) \quad (1.226)$$

则其二阶导数为

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi} \right) \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi} \right) \frac{\partial \eta}{\partial x} = n_x^2 \left(\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \eta^2} \right) \quad (1.227)$$

考虑到 \mathbf{n} 为单位向量，即 $n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1$ ，则有

$$\nabla^2 \mathbf{u} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \mathbf{u} = \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \eta^2} \quad (1.228)$$

接下来的后续推导则与一维形式下的完全一样，最终可给出如下 \mathbb{R}^3 空间中波动方程的通解：

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{u}_0 [f(\xi) + g(\eta)] = \mathbf{u}_0 [f(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} + ct) + g(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} - ct)] \quad (1.229)$$

其中， \mathbf{u}_0 为与位移矢量 \mathbf{u} 同向或反向的任意常向量。这里给出 \mathbf{u}_0 主要是为了指代一个方向，如果换成其他标量函数的波动方程，则省去 \mathbf{u}_0 即可。

上述通解即 d'Alembert 行波解在 \mathbb{R}^3 空间中的整体形式。结合其几何含义可知， \mathbf{n} 即为波的传播方向，函数 f 和 g 分别表示沿 \mathbf{n} 负向和正向的两列波，波速为 c 。

 **笔记** 公式(1.229)当然也不仅限于 Cartesian 坐标系，在任意曲线坐标系下也成立。其实上述推导过程所采用的基本思路，也都适用于曲线坐标系，只是公式会略有不同，但

结论都一样。所以这里不作细致推导，仅作基本描述。

在 \mathbb{R}^3 空间中，想从波动方程的通解进一步找到满足边界条件和初始条件的定解是十分困难的。下面给出一个二维波动方程在空间中的可视化案例，感受下其波形的复杂程度。

例题 1.3 假设一种理想情况，在二维振动模型中，边界 (x, y) 均为 0 到 2，四周进行固定，即对于任意时刻 t 有 $u(x, 0, t) = u(x, 2, t) = u(0, y, t) = u(2, y, t) = 0$ ，初始位移分布函数在 $x, y > 0$ 时满足 $u_0(x, y) = 0.5e^{-100[(x-1)^2+(y-1)^2]}$ ，初始速度分布函数 $v_0 = 0$ ，波速 $c = 0.02$ 。试分析该情况下波传播的具体形式。

解 聚焦于 x 轴和 y 轴的正向范围，以 z 轴表示位移 u ，代入波速、边界条件和初始条件，可以采用数值方法绘制出不同时刻下的波动状态，如下图1.13所示：

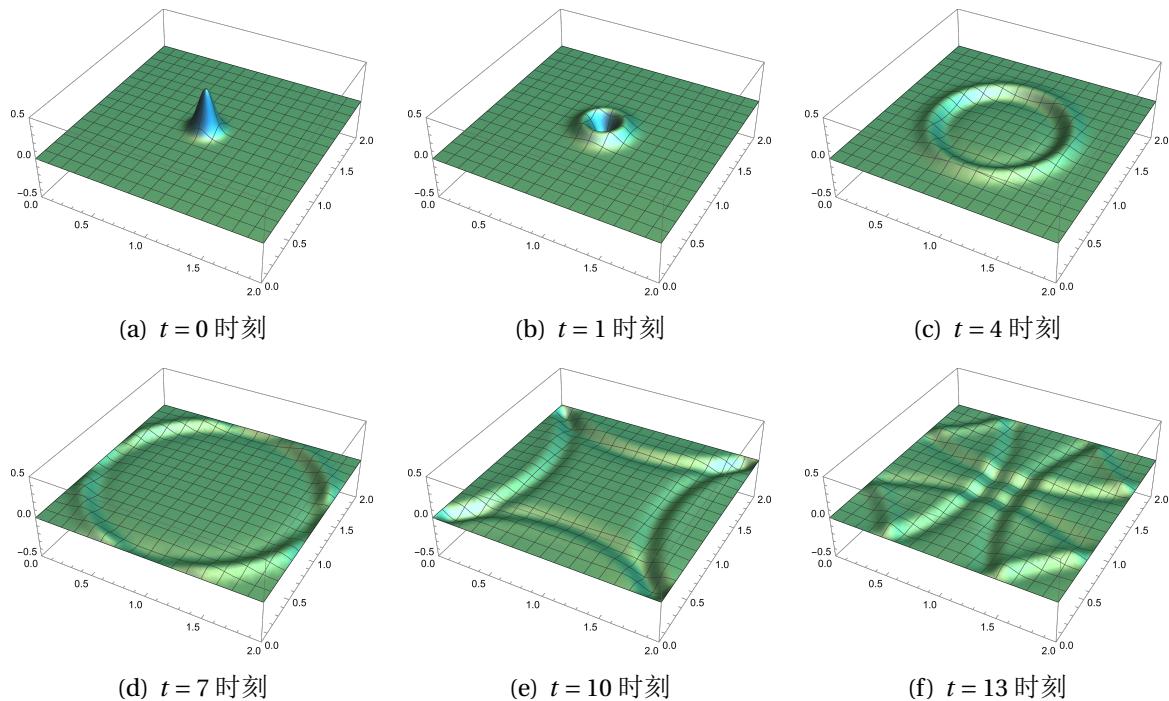


图 1.13: 不同时刻下的二维波动状态

可以看到，当波刚开始运动时确实符合公式(1.229)所推导出的通解结果，即朝四周进行传播。但是在遇到边界阻碍后，波之间产生了叠加作用，会使得后续的波形变化逐渐复杂。

所以，实际声学问题当中，更合适的方式是根据具体情况直接通过方程形式和特定条件寻求波动方程的定解，或者采用数值方法来求解。

1.6.2 平面波的行波解

根据上一节的分析，如果物质内某一点受到振源的振动，其所引起的位移及其他局部物理量，就将以波的形式从该点向四周进行传递。

考虑一种被称为平面波的简化情况：在任意媒介中，假设此时的扰动需要传递到离振源较远的位置，将振源中心与该位置点连成一条直线，则波向该点进行传播时，受扰动的物理量可以视作只受到该直线上单一方向的影响。以该直线为 x 轴建立 Cartesian 坐标系，则扰动物理量仅仅是坐标 x 和时间 t 的多元函数，而对坐标 y 和 z 的导数全部为零。

根据以上分析，在流体中，波动方程的原始形式(1.75)将转化为

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}(x, t) = c^2 \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x, t) \quad (1.230)$$

此时平面波的形式即为一维波动方程。而对于流体中其他的扰动物理量如速度 \mathbf{v} 、压强扰动 \tilde{p} 以及密度扰动 $\tilde{\rho}$ 等，由于均可以通过速度势 φ 导出，自然也同样全部满足一维波动方程。

以速度 \mathbf{v} 为例，在平面波情形下，根据公式(1.73)有

$$\mathbf{v} = \nabla \varphi(x, t) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, t) \cdot \mathbf{i} \quad (1.231)$$

所以公式(1.230)两边同时对坐标 x 求导，即可得到速度满足的一维波动方程。

再应用 d'Alembert 行波解可知，此时物质扰动的速度方向与波的传播方向均沿 x 轴方向，这也与前述一维波动方程的分析相符。

 **笔记** 事实上，在流体中，物质扰动的速度方向与波的传播方向同向（或反向）不仅仅适用于平面波，而是对于任何情形都成立。这里结合纯矢量的方式，利用 Cartesian 坐标系做一简要证明。

假设流体中声波的传播方向用单位常向量 $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$ 指代，写出此时速度势 φ 在 \mathbb{R}^3 空间的 d'Alembert 行波解（与公式(1.229)形式相同），有

$$\varphi = f(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} + ct) + g(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} - ct) \quad (1.232)$$

则速度 \mathbf{v} 可以计算得到为

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \nabla \varphi(\mathbf{r}, t) = \nabla [f(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} + ct) + g(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} - ct)] \\ &= (f' + g') (\mathbf{n} \cdot \mathbf{i}) \mathbf{i} + (f' + g') (\mathbf{n} \cdot \mathbf{j}) \mathbf{j} + (f' + g') (\mathbf{n} \cdot \mathbf{k}) \mathbf{k} \\ &= (f' + g') \mathbf{n} \end{aligned} \quad (1.233)$$

即速度 \mathbf{v} 与单位常向量 \mathbf{n} 同向，表明与波的传播方向平行。

接下来考虑在固体中的平面波情形，此时波动方程的原始形式(1.138)将转化为

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} \mathbf{i} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} \mathbf{i} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} \mathbf{j} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} \mathbf{k} \right) = \rho \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} \mathbf{i} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} \mathbf{j} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} \mathbf{k} \right) \quad (1.234)$$

合并分量式则可得：

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}(x, t) &= c_p^2 \cdot \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}(x, t) \\ \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2}(x, t) &= c_s^2 \cdot \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2}(x, t) \\ \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}(x, t) &= c_s^2 \cdot \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2}(x, t) \end{aligned} \quad (1.235)$$

再应用 d'Alembert 行波解可知，此时在固体中位移矢量 \mathbf{u} 可以被分成两部分，一

部分 ($\mathbf{u}_p = u_x \mathbf{i}$) 沿波传播的方向 (即 x 轴方向, 与流体情形类似), 一般称为纵波, 波速为 c_p ; 而另一个波 ($\mathbf{u}_s = u_y \mathbf{j} + u_z \mathbf{k}$) 的位移方向与波的传播方向垂直, 一般称为横波, 波速为 c_s 。对照 \mathbb{R}^3 空间中固体波动方程的推导过程可进一步得知:

$$\nabla \times \mathbf{u}_p = \nabla \times u_x \mathbf{i} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u_x & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad (1.236)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_s = \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0$$

所以纵波与横波的分解也刚好对应无旋波与等容波的分解。若反过来求解, 并考虑到 Cartesian 坐标系下的几何方程(1.112), 则有

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_p = \frac{\partial u_x}{\partial x} = \varepsilon_{xx}$$

$$\nabla \times \mathbf{u}_s = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & u_y & u_z \end{vmatrix} = -\frac{\partial u_z}{\partial x} \mathbf{j} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \mathbf{k} = -2\gamma_{xz} \mathbf{j} + 2\gamma_{xy} \mathbf{k} \quad (1.237)$$

从上式可以看到, 在固体中, 纵波的传递伴随有物体体积的胀缩, 是由正应力完成的局部拉伸与压缩, 而横波的传递与物体的体积变化无关, 却有旋转的倾向, 是通过剪切力来完成的局部微扰动。所以, 前述的下标 p 也可以表示为压缩 (Pressure), 而 s 可以表示为剪力 (Sheer)。

从以上分析还可得知, 对于固体、液体、气体三种连续媒介形态来说, 纵波均可以在其中进行传递, 而横波只能在固体中传递。

根据公式(1.194)和(1.195), 考察下两种波速 c_p 和 c_s 的比值有

$$\frac{c_p}{c_s} = \sqrt{\frac{2-2\nu}{1-2\nu}} \quad (1.238)$$

由于 Poisson 比 ν 取值在 (0,1) 之间, 所以可知纵波的波速大于横波的波速。

横波与纵波的概念较为清晰直观, 所以经常用于对波动现象的描述中。比如, 一维形式下各类媒介中声波的传播以及 \mathbb{R}^3 空间中的流体声波均为纵波, 而弦的振动为横波, 附录E.6介绍的平面电磁波也是一种横波 (且可以不借助媒介在真空中进行传播)。另外, 对于纵波波速 c_p 来说, 若忽略 Poisson 比 ν , 则与一维形式下弹性体的波速 c 完全一致。

 **笔记** 在固体中, 横波与纵波的特性也不仅仅适用于平面波, 而是对于任何情形都成立。这里同样结合纯矢量的方式, 利用 Cartesian 坐标系做一简要证明。

将位移矢量 \mathbf{u} 也写为 \mathbb{R}^3 空间的 d'Alembert 行波解形式 (公式(1.229)), 根据引理1.10介绍的含 Hamilton 算子的函数积的微分运算式(1.164)和(1.165), 分别考察位移矢量 \mathbf{u} 的散度和旋度, 有

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \nabla [f(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} + ct) + g(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} - ct)] \cdot \mathbf{u}_0 = (f' + g') \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}_0 \quad (1.239)$$

$$\nabla \times \mathbf{u} = \nabla [f(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} + ct) + g(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} - ct)] \times \mathbf{u}_0 = (f' + g') \mathbf{n} \times \mathbf{u}_0 \quad (1.240)$$

所以，若位移矢量 \mathbf{u} 的散度为零，即为等容波，则有

$$(f' + g') \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}_0 = 0 \Rightarrow \mathbf{n} \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (1.241)$$

说明此时位移矢量 \mathbf{u} 与波的传播方向垂直，即为横波。

若位移矢量 \mathbf{u} 的旋度为零，即为无旋波，则有

$$(f' + g') \mathbf{n} \times \mathbf{u}_0 = 0 \Rightarrow \mathbf{n} \times \mathbf{u} = 0 \quad (1.242)$$

说明此时位移矢量 \mathbf{u} 与波的传播方向平行，即为纵波。

综上，对于 \mathbb{R}^3 空间中的固体声波，横/纵波是普遍存在的。

1.7 声强与声压级

波动现象产生声音，声音在空间中形成声场。对于人耳听觉系统来说，实际很难精细捕获声场中各物理量的细微变化，所以无论是为了听觉认知，还是声学测量，都有必要建立一套更为通用且宽泛的丈量方式。

考虑到人耳接收声音信息主要通过空气传播，这里将围绕声压展开分析。由于声压波动较为迅速，人耳无法完全感应，只能体会到其时间平均；但对于起伏不定的声压变化，若是类似标准正余弦函数则时间平均后结果为零，与实际情况不符，所以一般定义有效声压 p_e ，为瞬时声压扰动 \tilde{p} 在特定时间间隔 $[0, T]$ 内的均方根值（RMS），用以描述声压的时间平均效果，具体表达式如下：

$$p_e = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \tilde{p}^2 dt} \quad (1.243)$$

实际人耳感受到的或传感器测量的，也往往为有效声压。

1.7.1 声音强度

在物理学中，为了刻画声音“大小”，通常采用的是声音强度 I ，简称声强，定义为单位时间内与声音传播方向垂直的单位面积上的平均声能。对于空气媒介来说，声能的产生主要源于压力做功，而声音传播方向与物质扰动的速度方向相同，所以可以用特定时间间隔 $[0, T]$ 内瞬时声压扰动 \tilde{p} 和速度 \mathbf{v} 的乘积平均值来计算声强，即

$$I = \frac{1}{T} \int_0^T \tilde{p} \cdot \mathbf{v} dt \quad (1.244)$$

可以看到，声强与有效声压类似，也是综合考量了一段时间内瞬时数值的变化规律，只不过这里是直接采用的平均值测算方式。此外需指出，声音强度 I 为矢量，大小为单位时间单位面积上的平均声能，而方向指向声音传播方向。

根据章节1.4的描述，声波传递时，瞬时声压扰动 \tilde{p} 与速度 \mathbf{v} 存在如公式(1.63)的恒等关系，这里重新写出：

$$\nabla \tilde{p} = \rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \quad (1.245)$$

将瞬时声压扰动 \tilde{p} 表示为 \mathbb{R}^3 空间的 d'Alembert 行波解形式（公式(1.229)），即

$$\tilde{p} = f(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} + ct) + g(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} - ct) \quad (1.246)$$

代回上式(1.245)可知：

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \frac{1}{\rho_0} \nabla \tilde{p} = \frac{1}{\rho_0} (f' + g') \mathbf{n} \quad (1.247)$$

由于 \mathbf{n} 为单位常向量，上式中速度 \mathbf{v} 只能沿 \mathbf{n} 方向（事实上流体中也只存在纵波），然后通过换元积分 ($\xi = \mathbf{n} \cdot \mathbf{r} + ct$, $\eta = \mathbf{n} \cdot \mathbf{r} - ct$)，可以得到：

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \left[\frac{1}{\rho_0} \int_0^t (f' + g') dt \right] \mathbf{n} = \left[\frac{1}{\rho_0 c} \left(\int_{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}^{\xi} f' d\xi - \int_{\eta}^{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}} g' d\eta \right) \right] \mathbf{n} \\ &= \frac{1}{\rho_0 c} [f(\xi) + g(\eta)] \mathbf{n} = \frac{1}{\rho_0 c} [f(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} + ct) + g(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} - ct)] \mathbf{n} \end{aligned} \quad (1.248)$$

上式最后做了一定简化，主要考虑到一般 $t = 0$ 时刻并未产生物质扰动，所以积分上下限中的 $f(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}) = g(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}) = 0$ ，消去了积分常数。

结合公式(1.246)和(1.248)，有

$$\frac{\tilde{p}}{\|\mathbf{v}\|} = \rho_0 c \quad (1.249)$$

所以，将上式代回(1.244)，再根据有效声压定义式(1.243)，可最终得到：

$$\mathbf{I} = \frac{1}{\rho_0 c} \left(\frac{1}{T} \int_0^T \tilde{p}^2 dt \right) \mathbf{n} = \frac{p_e^2}{\rho_0 c} \mathbf{n} \quad (1.250)$$

该式也是计算声强大小最基本的公式。

由于空气中声波传递为绝热过程，不存在热交换，通过压力做功获取的声能将完全转化为气体的热力学能，包含宏观动能和宏观位能（即势能）两部分（与附录B.3中的机械能类似），所以这里也可以通过能量关系导出声强的计算式。

首先是动能部分，参考附录B.3中对动能的描述，在体积 V_0 内，由声扰动新增的动能 \tilde{E} 可以表示为（式中 v^2 为 $\|\mathbf{v}\|^2$ 的简写）

$$\tilde{E} = \frac{1}{2} \rho_0 V_0 v^2 \quad (1.251)$$

接下来是位能（势能）部分，由声扰动新增的位能 \tilde{U} 与弹性势能类似，均由压力做功完成，其微元功量可以表示为

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = pd\mathbf{S} \cdot d\mathbf{l} = pdV \quad (1.252)$$

其中， $d\mathbf{l}$ 为力 \mathbf{F} 移动方向的长度微元，刚好与面积微元 $d\mathbf{S}$ （方向指代面积元的外法向）点积后形成体积微元 dV 。

为了顺利对上式进行积分，这里还需要做一些前置工作。首先根据章节1.2.3和章节1.4的描述，压强扰动 \tilde{p} 和密度扰动 $\tilde{\rho}$ 可以通过公式(1.15)和(1.77)建立联系：

$$\frac{\tilde{p}}{\tilde{\rho}} = \frac{dp}{d\rho} = -c^2 \quad (1.253)$$

以及考虑到章节1.2.3中的公式(1.37)，即对于固定质量的气体，有

$$\frac{dV}{V} = -\frac{d\rho}{\rho} \quad (1.254)$$

联立公式(1.253)和(1.254)，并延续章节1.2.3和章节1.4中的假设，将声扰动情形下的体积 V 和密度 ρ 视作定值 V_0 和 ρ_0 ，可得：

$$dV = -\frac{V_0}{\rho_0} d\rho = \frac{V_0}{\rho_0 c^2} dp \quad (1.255)$$

将上式代回公式(1.252)，并在声扰动范围内进行积分，则新增位能 \tilde{U} 可计算出为（式中 \tilde{V} 为体积扰动）

$$\tilde{U} = \int_0^{\tilde{V}} p dV = \frac{V_0}{\rho_0 c^2} \int_0^{\tilde{p}} p dp = \frac{V_0}{2\rho_0 c^2} \tilde{p}^2 \quad (1.256)$$

注意上式的符号体系是与章节1.2.3和章节1.4中的约定保持一致，将压强视作“内力”，所以不同于热力学中做膨胀功，位能减少；而是与弹性势能类似，压强增大，体积增加，势能增加。

结合公式(1.251)和(1.256)，并计算单位体积内的声能，可得到声能量密度 ω ：

$$\omega = \frac{\tilde{E} + \tilde{U}}{V_0} = \frac{1}{2} \rho_0 v^2 + \frac{\tilde{p}^2}{2\rho_0 c^2} \quad (1.257)$$

与声强类似，这里也可以统计特定时间间隔 $[0, T]$ 内声能量密度的平均值，结合公式(1.249)和有效声压定义式(1.243)，得到平均声能量密度 $\bar{\omega}$ ：

$$\bar{\omega} = \frac{1}{T} \int_0^T \omega dt = \frac{1}{T} \int_0^T \left(\frac{1}{2} \rho_0 v^2 + \frac{\tilde{p}^2}{2\rho_0 c^2} \right) dt = \frac{1}{\rho_0 c^2} \left(\frac{1}{T} \int_0^T \tilde{p}^2 dt \right) = \frac{p_e^2}{\rho_0 c^2} \quad (1.258)$$

由于物理学上定义功率为单位时间内的能量，所以根据平均声能量密度 $\bar{\omega}$ ，还可以得到声功率 \mathbf{P} ，也被称作平均声能量流，为单位时间内通过垂直于声音传播方向上面积 S_0 的平均声能量，即

$$\mathbf{P} = \frac{\bar{\omega} \cdot V_0}{t} \mathbf{n} = (\bar{\omega} \cdot S_0 c) \mathbf{n} = \left(\frac{p_e^2}{\rho_0 c} S_0 \right) \mathbf{n} \quad (1.259)$$

上式考虑到声能量沿声音传播方向流动，所以提前添加了单位常向量 \mathbf{n} ，将声功率当作矢量看待。

进一步，根据相关物理含义之间的关系，单位面积的声功率即为声强，所以有

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{P}}{S_0} = \frac{p_e^2}{\rho_0 c} \mathbf{n} \quad (1.260)$$

该结果也与前述公式(1.250)完全相同。

 **笔记** 前述关于声扰动情形下气体体积与压强变化的公式(1.255)，还可以直接通过引理1.1证明过程中的公式(1.30)得到完全等价的表达式：

$$\frac{dp}{p} + \gamma \frac{dv}{v} = \frac{dp}{p} + \gamma \frac{d(V/m)}{V/m} = \frac{dp}{p} + \gamma \frac{dV}{V} = 0 \quad (1.261)$$

同样将体积 V 和压强 p 视作定值，并结合气体形式下的波速公式(1.36)，有

$$dV = -\frac{V_0}{\gamma p_0} dp = -\frac{V_0}{\rho_0} \cdot \frac{\rho_0}{\gamma p_0} dp = -\frac{V_0}{\rho_0 c^2} dp \quad (1.262)$$

注意上式是沿用热力学中的约定，将压强视作“外力”，所以等式多了负号。

进一步，对公式(1.261)进行积分，还可以得到引理1.1的另一种变种形式：

$$\ln p + \gamma \cdot \ln V = C \Rightarrow p \cdot V^\gamma = \text{常数} \quad (1.263)$$

其中， C 为积分常数。

1.7.2 电路类比

附录F通过精炼的篇幅，全面回顾了电磁学中所有重要的基础理论。当建立宏观的电路结构时，还存在如下经实验总结的基本电路定律：

定理 1.4 (欧姆 (Ohm) 定律)

导体两端的电势差 (电压) U 与通过导体两端的电流强度 I 成正比，比例常数被称为电阻 R ，即满足

$$U = I \cdot R \quad (1.264)$$



根据势能与势函数的定义1.2，以及附录F1中的定理E3可知，对于导体两端的电势差 U ，可以理解为单位电荷下电场力（即电场强度）所做功，所以有

$$U = \frac{dW}{dQ} \quad (1.265)$$

其中，电荷用 Q 指代，表示是通过导体横截面的总电荷量（也可以将导体看作无横截面的线段，此时对应为点电荷 q ）。另外，电路中的电势差 U 一般规定为沿电流方向的高电位指向低电位，与常规力做功势能减少的约定相反，所以上式符号为正。

再结合附录F2中电流强度的定义式F2，可以计算此时通过导体的电功率为

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{dW}{dQ} \frac{dQ}{dt} = U \cdot I \quad (1.266)$$

联立上式与定理1.4的 Ohm 定律，还可以得到一系列电功率的变种形式：

$$P = U \cdot I = I^2 \cdot R = \frac{U^2}{R} \quad (1.267)$$

以上关于电路中各物理量的描述较为清晰，在声学中，许多物理量也完全可以等效于电路中的关系，借此通过电路类比来辅助声学分析。

重新整理公式(1.249)，若令

$$Z_s = \rho_0 c \quad (1.268)$$

则有（将 $\|\mathbf{v}\|$ 缩写为 v ）

$$\tilde{p} = v \cdot Z_s \Rightarrow p_e = v_e \cdot Z_s \quad (1.269)$$

其中，与有效压强 p_e 的表达式相同， v_e 为相对应的有效速度（大小）。

若将有效压强 p_e 类比于电压 U ，有效速度（大小） v_e 类比于电流 I ，则 Z_s 对应为电阻 R 。如果进一步计算声强 \mathbf{I} ，还可以得到（注意区分相同符号的不同物理量）：

$$\mathbf{I} = \frac{p_e^2}{Z_s} \mathbf{n} = v_e^2 \cdot Z_s \mathbf{n} = p_e v_e \mathbf{n} \quad (1.270)$$

上式与公式(1.267)的结构完全相同，只是增加了单位常向量 \mathbf{n} 。由于声强 \mathbf{I} 与声功率 \mathbf{P} 只相差一个面积系数 S_0 ，所以可以看到，以上的声-电类比具有相当广泛的对应性。基于此，在声学中， Z_s 也被称作声阻抗率，具有描述声场中物质媒介限速能力



的物理含义。

笔记 事实上，在力学中，也存在与声-电类比相同的结构，即振动系统中的粘性阻尼，进而形成更为广泛的“力-电-声类比”。粘性阻尼的基本物理模型为 $F = \kappa \cdot v$ ，即阻尼力 F 与物质速度 v 满足线性关系，其中 κ 为阻尼系数。可以看到，该结构中 κ 的也可以视作某种阻抗参数。

1.7.3 声压级

对于人耳的听觉范围来说，声强与声压的绝对量均相差较大。以声压举例，频率为 1 kHz 的声音，声压为 2×10^{-5} Pa，即 $20 \mu\text{Pa}$ 附近，为人耳的最低听觉阈值；而 10 Pa 甚至 100 Pa 的声压，也在人耳的感知范围内。再加上声学测量方面较难采集到绝对数值，所以物理学上一般采用相对比值的对数来描述声强与声压大小。除此之外，采用对数还有另一个重要原因，即如下经过大量实验验证的心理物理学定律：

定理 1.5 (韦伯-费希纳 (Weber-Fechner) 定律)

人类的感觉，包括视觉、触觉、听觉等等，一般均以对数方式作出响应，即物理量成几何级数增长时，心理量对应只成算术级数增长。



尽管该定律由实验总结出，但在频率认知方面，后续章节 2.3 也给出了一种理论解释，即对于音乐中线性升高的音高认知，实际的频率物理量是呈幂指数级增长的。

最初使用相对比值的对数来描述物理量是在电信号中，定义电功率比的对数单位为贝 (Bel)；为了进一步放大具体数值的精细度，再将单位缩小 10 倍（数值增大 10 倍），于是采用分贝 (Decibel，简称 dB) 作为常用的度量单位。

在声学中，根据公式(1.260)，声强本身便具备类似声功率的含义，所以可以沿用上述定义；而声强（大小）与有效声压的平方成正比，即 $I \propto p_e^2$ （其中 I 为 $\|I\|$ 的简写），所以也可以变换物理量，采用有效声压来度量，最终得到如下定义：

定义 1.7 (声强级与声压级)

在声学中，一般采用声强级 SIL (符号为 L_I) 和声压级 SPL (符号为 L_p) 来定量描述声音强度，单位为分贝 (dB)，具体表达式如下：

$$\text{SIL} = L_I = 10 \log_{10} \frac{I}{I_{\text{ref}}} = 10 \lg \frac{I}{I_{\text{ref}}} \quad (I_{\text{ref}} = 10^{-12} \text{ W/m}^2 = 1 \text{ pW/m}^2) \quad (1.271)$$

$$\text{SPL} = L_p = 10 \log_{10} \frac{p_e^2}{p_{\text{ref}}^2} = 20 \lg \frac{p_e}{p_{\text{ref}}} \quad (p_{\text{ref}} = 2 \times 10^{-5} \text{ Pa} = 20 \mu\text{Pa}) \quad (1.272)$$

上式中， I 和 p_e 分别代表声强大小和有效声压的绝对数值。 I_{ref} 和 p_{ref} 分别为参考的基准声强与基准声压，约等于人耳所能感知到 1 kHz 频率下的最小声强与声压（也对应于 0 dB）。



可以看到，声强级与声压级实际描述的是同一个物理量。在日常生活中，人们描述声音大小为多少多少分贝，其来源便在于此。另外一般认为，人耳不宜接收超过

90 dB 以上的声，不然会损害听觉系统。

注意到定义1.7中只规范了基准声强/声压的频率大小为 1 kHz，并未给出绝对声强/声压的频率取值，所以一般可以进一步定义 1 kHz 频率下的声压级为声音的响度级，单位为方（phon），作为人耳听觉认知上对于声音响度的参考数值。

之所以要对频率作出约束，主要在于人耳对声音强弱的主观感受不仅仅依赖于声音强度，与频率也存在一定关系。哪怕完全不同的声音强度，也可能因为频率差异而导致人耳认定为相同“响度”。所以，响度级采用了不同于 dB 的 phon 作为单位，以区别于纯物理维度，更偏向于主观感知维度。经大量测试总结归纳，若绘制出人在不同频率⁴下对相同响度认知的声压级大小，即如下图1.14所示的等响曲线簇，会发现以下几个显著特征：

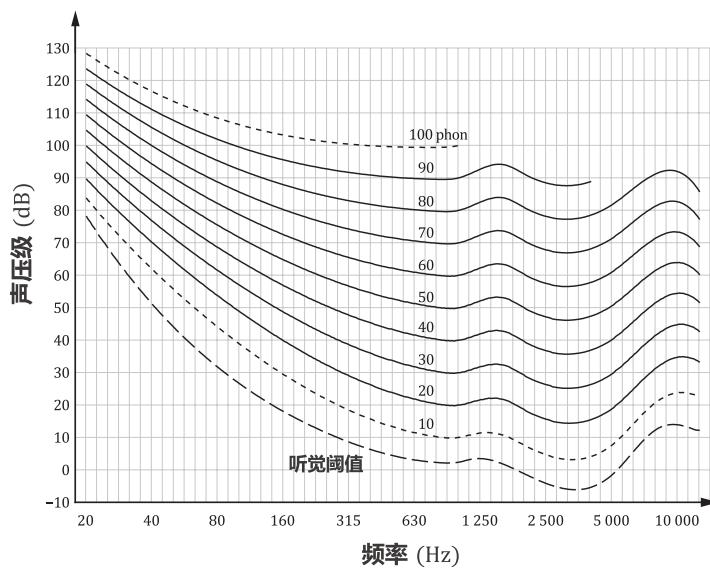


图 1.14: 标准等响曲线簇 (ISO 226:2023)

1. 低音部分通常需要更高的声音强度才能让人感受到相同的响度，即人耳对于低频区间的灵敏度会逐渐降低；
2. 不同响度值的曲线在低频区间逐渐聚集收拢，即低音部分只需要较小的声压波动，就可以让人耳产生较大的响度感知变化；
3. 随着响度级的升高，等响曲线会逐渐趋于平直形态，即所有频段的声音强度会恢复到相近的响度级。

以上结论也很容易通过日常的生活经验所验证：

1. 音乐的低频总是非常关键，经常会感觉不够响。而当低频扎实有力时，会觉得声音充满了质感和厚度；
2. 调节总音量时，低频的响度（主观感受）相比于其他频段，总是会变化更为明显；
3. 而当放大总音量时，总会产生一种音质也在提升的“错觉”（实际是各个频段的响度值均有所回升，特别是低频），所以摇滚音乐的现场 Live 表演，才那么容易

⁴注意到根据定理1.5，这里频率也是以对数形式表示。许多其他类似图形中，在不同倍数的频率范围内，网格会由疏到密，也是源于采用了对数标尺（非线性，二阶导数小于零）。

直抵人心，震撼轰鸣。

结论 本章介绍了声学相关的基础理论，回答了如下基本问题：

- 振源的振动带来了波动现象。例如弦的振动可视为一种振源的振动；
- 介质中的声音传递也是通过波动现象实现的。具体过程为：振源振动迫使介质产生扰动，通过局部物质的拉伸与压缩，或剪切变形，以纵波（波的传播方向与物质扰动方向平行）或横波（波的传播方向与物质扰动方向垂直）的形式沿固定的方向进行传递。传播的介质不限，可以为气体、液体或固体；
- 无论是振源的振动，还是介质中的声音传递，均满足形式相同的波动方程，唯一的区别在于波传播的速度不同；
- 人耳只能感受声波的动态平均，在物理学上是通过声强级和声压级，以分贝作为单位来描述声音响度，且频率对于声音响度也具有一定影响。

此外，“为何只有乐器发出的声音，人类才会认为是音乐（乐音）”这一问题目前还无法给出回答，将会放在下一章中具体介绍。

第2章 音乐声学

内容提要

- 典型乐器声学分析
- Fourier 变换
- 乐音的构成
- 十二平均律
- 原声乐器的声学解释

上一章以通用的方式介绍了声音的产生与传播。接下来本章将聚焦音乐与乐器声学，探究为何乐器发出的声音是一种“特殊”的声音，即乐音。

2.1 典型乐器声学分析

首先，以乐器构型中的几种基本单元：弦、杆、膜和板，分别展开详细介绍。

2.1.1 弦振动的一般解

在上一章波动方程的求解中，d'Alembert 行波解提供了一种思路，较好地给出了各种参数的物理含义，但解的形式中需要给定初始位移分布函数和速度分布函数，所以并不直观。本节考虑弦振动的具体情况，通过边界条件和初始条件的约束逐步给出具体解的形式，以期对这种在乐器中极其常见的发声模式有一个较好的理解。

首先根据弦振动的具体理论模型，重新写出其所满足的波动方程，以及边界条件与初始条件：

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \\ u(0, t) = u(L, t) = 0 \\ u(x, 0) = \phi(x) \\ u_t(x, 0) = \psi(x) \end{array} \right. \quad (2.1)$$

上述方程组中，假定弦长为 L ，两端固定，初始的位移分布函数为 $\phi(x)$ ，速度函数为 $\psi(x)$ 。想要给出该波动方程的解，目前只能通过“猜”一个解的形式来进行。考虑到波动方程是一个二阶偏微分方程，所以可行的方案是先通过分离变量的方法给出一个形式解（后面会分析使用分离变量法的条件），如下：

$$u(x, t) = \Phi(x)\Psi(t) \quad (2.2)$$

将上式代回波动方程并整理可得到分离变量后的表达式：

$$c^2 \cdot \frac{\Phi''(x)}{\Phi(x)} = \frac{\Psi''(t)}{\Psi(t)} \quad (2.3)$$

上式成功将自变量 x 和 t 分离到等式两端。两个不同自变量的函数表达式相等，只有一种可能，即表达式恒等于一个常数，可记为 $-\omega^2$ （后面会逐渐理解这样表示的原因），则关于 $\Phi(x)$ 的表达式可变为

$$\Phi''(x) + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \Phi(x) = 0 \quad (2.4)$$

上式是一个很常规的线性齐次常微分方程，具有如下形式的通解：

$$\Phi(x) = C_1 e^{\lambda x} + C_2 e^{-\lambda x} \quad (2.5)$$

其中， $\lambda = \sqrt{-\left(\frac{\omega}{c}\right)^2}$ 。 C_1, C_2 为积分常数。

根据所构造的定解形式和方程本身的边界条件可知：

$$\begin{aligned} u(0, t) &= \Phi(0)\Psi(t) = 0 \\ u(L, t) &= \Phi(L)\Psi(t) = 0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

上述两式对任意时刻 t 均满足，所以可以得到如下常微分方程(2.4)所满足的两个边界条件：

$$\Phi(0) = \Phi(L) = 0 \quad (2.7)$$

接下来再对 $\left(\frac{\omega}{c}\right)^2$ 进行分情况讨论，给出方程(2.4)的定解。

- 当 $\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 < 0$ 时，对通解(2.5)代入两个边界条件(2.7)可知：由于此时 C_1, C_2 的系数均为实数常数，所以只有零解，即 $C_1 = C_2 = 0$ ；
- 当 $\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 = 0$ 时，同样只有零解；
- 当 $\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 > 0$ 时， λ 为虚数，需要先引入如下 Euler 公式。

定理 2.1 (欧拉 (Euler) 公式)

复数域中，存在如下恒等式：

$$e^{jx} = \cos x + j \sin x \quad (2.8)$$

其中， e 是自然常数， j 是虚数单位^a。

^a虚数单位一般采用符号 i 。由于本书后续将涉及许多信号处理的知识，所以沿用 j 来表示。



证明 上述 Euler 公式过于著名，但其证明一般较为繁琐，例如可以采用自然底数 e 的定义来引申证明，也可以利用各函数的 Taylor 展开来证明。这里提供一种巧妙的证法，但需要首先默认虚数 j 符合实数域的求导法则。

由于 e^{jx} 不可能为零，所以可定义如下函数 $f(x)$ 的表达式：

$$f(x) = \frac{\cos x + j \sin x}{e^{jx}} \quad (2.9)$$

对其求一阶导数，则有

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(-\sin x + j \cos x) \cdot e^{jx} - (\cos x + j \sin x) \cdot j \cdot e^{jx}}{(e^{jx})^2} \\ &= \frac{-\sin x \cdot e^{jx} - j^2 \sin x \cdot e^{jx}}{(e^{jx})^2} = \frac{-\sin x \cdot e^{jx} + \sin x \cdot e^{jx}}{(e^{jx})^2} = 0 \end{aligned} \quad (2.10)$$

所以，函数 $f(x)$ 为常数函数。令 $x=0$ 即可求得：

$$f(x) = f(0) = \frac{\cos 0 + j \sin 0}{e^0} = 1 \quad (2.11)$$

对上式重新整理即可得到：

$$e^{jx} = \cos x + j \sin x \quad (2.12)$$

Euler 公式也具有较好的几何含义，如下图2.1所示。

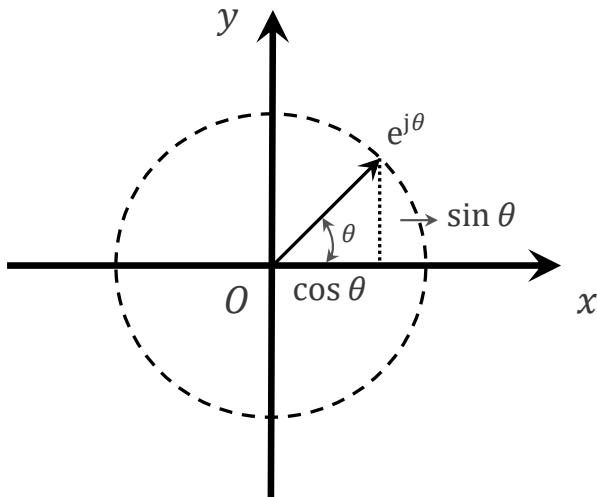


图 2.1: Euler 公式的几何表示

由于虚数单位 j 其实具有逆时针旋转 90° 的本质（所以才可以在二维数轴上以 $a+bj$ 的形式来表示任意复数），若以 x 轴作为实数轴， y 轴作为虚数轴，则 $e^{j\theta}$ 可视作复数域平面内的一个单位向量，随着角度 θ 的变化而旋转。其在 x 轴上的分量为 $\cos\theta$ ，在 y 轴上的分量为 $\sin\theta$ ，刚好符合复数域的向量表示法。

当 λ 为虚数时，有 $\lambda = \pm \frac{\omega}{c}j$ 。根据 Euler 公式，此时通解(2.5)可进一步化简为

$$\Phi(x) = A \cos\left(\frac{\omega}{c}x\right) + B \sin\left(\frac{\omega}{c}x\right) \quad (2.13)$$

其中， A 和 B 为新的积分常数。代入边界条件(2.7)可知：

$$A = 0, \quad \frac{\omega}{c}L = n\pi, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.14)$$

所以 $\Phi(x)$ 的定解是一系列正弦函数：

$$\omega_n = \frac{n\pi}{L}c, \quad \Phi_n(x) = B_n \sin\left(\frac{\omega_n}{c}x\right), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.15)$$

进一步考虑 $\Psi(t)$ ，可以用上述同样的步骤求得其通解为

$$\Psi_n(t) = C_n \cos(\omega_n t) + D_n \sin(\omega_n t) \quad (2.16)$$

尽管此时有两个初始条件可以给出 C_n, D_n 的具体表达式，但 $\phi(x)$ 和 $\psi(x)$ 的函数形式未给出，这里先不用考虑计算其定解，只需知道 C_n, D_n 与初始的位移分布函数 $\phi(x)$ 、速度分布函数 $\psi(x)$ ，以及 B_n 有关即可。

此时可以进一步将 $\Phi(x)$ 和 $\Psi(x)$ 两部分解合并为完整的解，如下：

$$u_n(x, t) = \sin\left(\frac{\omega_n}{c}x\right) [a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t)] \quad (2.17)$$

其中，系数 $a_n = B_n C_n$, $b_n = B_n D_n$ 。另外可以看出， ω_n 具有角频率的物理量含义。

由于对于所有 $n = 1, 2, \dots$, 系列解 $u_n(x, t)$ 均满足所提出的波动方程，所以可以用无穷级数的方式给出弦振动的一般解（区别于通解，表示还满足边界条件），如下：

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\omega_n}{c}x\right) [a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t)] \quad (2.18)$$

上式还可进一步化简，考虑到三角函数中的两角和差公式 $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$ ，则可以通过构造

$$\sin \varphi_n = \frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}, \quad \cos \varphi_n = \frac{b_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} \quad (2.19)$$

对公式(2.18)进行最终变化：

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \sin(\omega_n t + \varphi_n) \sin\left(\frac{\omega_n}{c}x\right) \quad (2.20)$$

可以看到，相比于 d'Alembert 行波解，本节通过无穷级数的方式给出了由一系列看上去“不会传播”的波形组成的特殊解。即对于每一项 $u_n(x, t)$ ，随着时间推移，其上任意一点 x 均以相同的正弦函数波形做上下的周期振动（不会产生错位），只是振幅不同而已（振幅大小与 x 有关，也符合正弦函数的变化），而没有从宏观上产生向两边“传播出去”的趋势。这种波动形式较为常见，被称为驻波。

注 根据以上推导过程，可以总结下偏微分方程应用分离变量法的条件：

1. 偏微分方程是齐次的，即方程每一项关于自变量的次数均相等（一般是零次，即不包含自变量组成的自由项函数），这样才能写出形如公式(2.3)的分离变量形式；
2. 边界条件也是齐次的，即边界条件也不含自变量组成的自由项函数，这样才能给出形如公式(2.7)的分离变量后的边界条件。
3. 偏微分方程是线性的，即方程的导数之间是线性运算，这样才能应用叠加原理得到无穷级数形式的一般解，即公式(2.18)。

例题 2.1 假设一种实际情况，在弦的振动模型中，弦长为 2π ，两端进行固定，即对于任意时刻 t 有 $u(0, t) = u(2\pi, t) = 0$ ，初始位移分布函数未知（小扰动），初始速度分布函数 $v_0 = 0$ ，波速 $c = 0.5$ 。试分析该情况下波传播的具体形式。

解 聚焦于 x 轴的正向范围，以 y 轴表示位移 u ，由初始速度分布函数 $v_0 = 0$ 可进一步化简上述弦振动的一般解公式(2.20)。

首先由于 $u(x, t) = \Phi(x)\Psi(t)$ ，考虑到 $\Psi(t)$ 的表达式(2.16)，其一阶导数在零点处

$$\Psi'_n(0) = D_n \cdot \omega_n \quad (2.21)$$

而初始速度分布函数 $v_0(x) = u'(x, 0) = \Phi(x)\Psi'_n(0) = 0$ ，所以必须满足 $D_n = 0$ ，进一步推出 $b_n = 0$ 。此时公式(2.20)可简化为

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\omega_n t + \frac{\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{\omega_n}{c}x\right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}ct\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad (2.22)$$

将 a_n 简化为单位系数，并代入弦长和波速的数值，可以绘制出不同时刻下的波动状态，这里以单一的 $n=3$ 情形为例，如下图2.2所示：



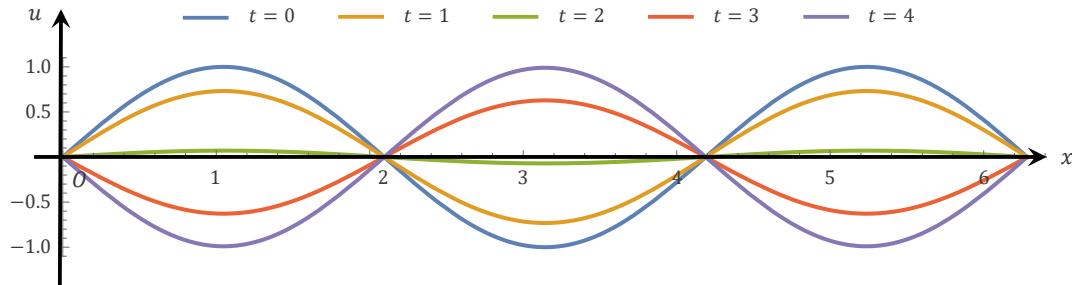
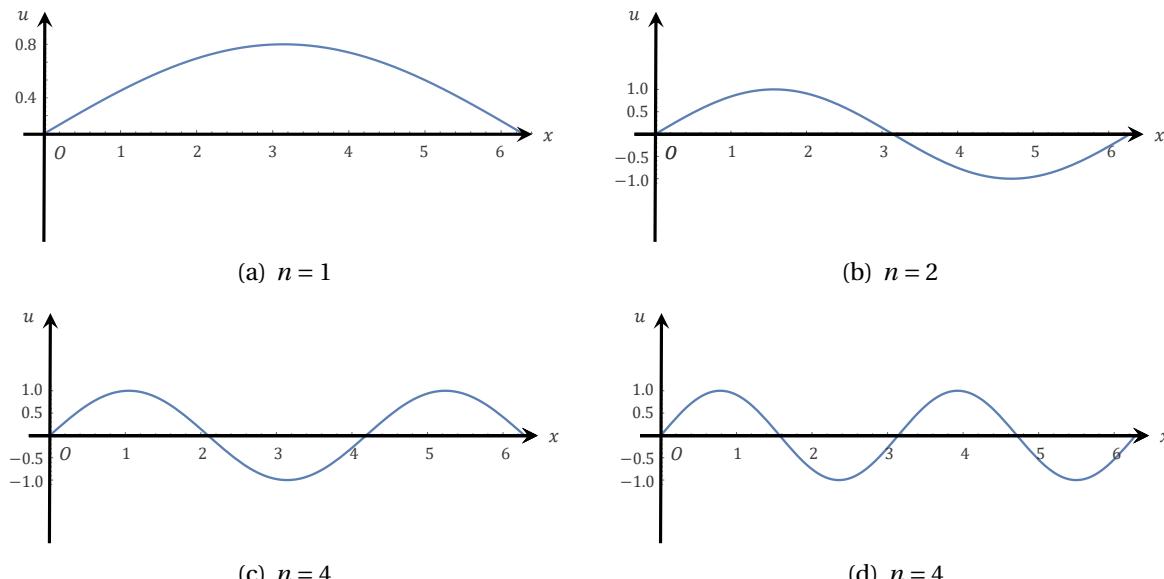


图 2.2: 弦振动的驻波解

可以看到，弦振动的解产生的为驻波，且波形为周期函数。

下面展示下不同 n 取值情况下的初始波形，如下图2.3所示：

图 2.3: 不同 n 取值情况下弦振动的初始波形

上述不同 n 取值情况下的波形也被称为弦振动的第 n 个模态。 n 个模态的波形叠加，形成了弦振动一般解的完整形式。值得注意的是，尽管针对单个模态而言，每个波形均为驻波，但合并起来的完整波确实有可能在“传播”的。

进一步考察上述例题2.1中，弦振动的一般解与 d'Alembert 行波解的关系，会发现其实两者完全相同。事实上，公式(2.22)可根据三角函数中的积化和差公式 $\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)]$ 改写为如下形式：

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2} \left[\sin\left(\frac{n\pi}{L}ct + \frac{n\pi}{L}x\right) - \sin\left(\frac{n\pi}{L}ct - \frac{n\pi}{L}x\right) \right] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2} \left[\sin\left(\frac{n\pi}{L}x + \frac{n\pi}{L}ct\right) + \sin\left(\frac{n\pi}{L}x - \frac{n\pi}{L}ct\right) \right] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2} \left[\sin \frac{\omega_n}{c}(x + ct) + \sin \frac{\omega_n}{c}(x - ct) \right] \end{aligned} \quad (2.23)$$

该形式与初始速度分布函数为零的 d'Alembert 行波解公式(1.223)可以完全对应

上，其相互关系为

$$u_0(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{\omega_n}{c}\tau\right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}\tau\right) \quad (2.24)$$

以上可以得出一个十分有趣的结论，即周期函数可以拆解为一系列基础的三角函数之和。后续章节2.2.1将会对该数学结论做一般化阐述。

笔记 需要说明的是，尽管描述的情形应当相同，但例题1.2与例题2.1所展示的波动解却大相径庭。主要原因在于例题1.2所构建的模型其实是一种理想模型，为了描述行波的运动过程“虚构”了一个初始位移分布函数 u_0 ，其并不满足驻波形成的条件，即需要两列沿相反方向传播的振幅相同、频率相同的波（一般通过反射得到）进行叠加。

事实上，只要将例题1.2中的弦长 L 改为 2π ，初始位移分布函数 $u_0(x)$ 改为本节介绍的任一模态 $\sin\left(\frac{\omega_n}{c}x\right) = \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$, $n = 1, 2, \dots$ ，即可得到对应模态的驻波解。

2.1.2 细杆中的弯曲波

在乐器声学的振源中，杆也是一种基本的发声单元。通常情况下，沿杆件长度方向的尺寸远大于横截面的尺寸，所以极易在杆件长度方向上产生振动，主要表现为横波。但与弦的振动不同的是，杆主要通过自身刚度（抵抗弹性变形的能力）提供恢复力，完成初始扰动后的弯曲波动现象。

沿着杆长方向和垂直杆长方向建立坐标系，当杆受扰动进行振动时，在杆上选取微元体进行受力分析，以上描述可转化为如下示意图2.4：

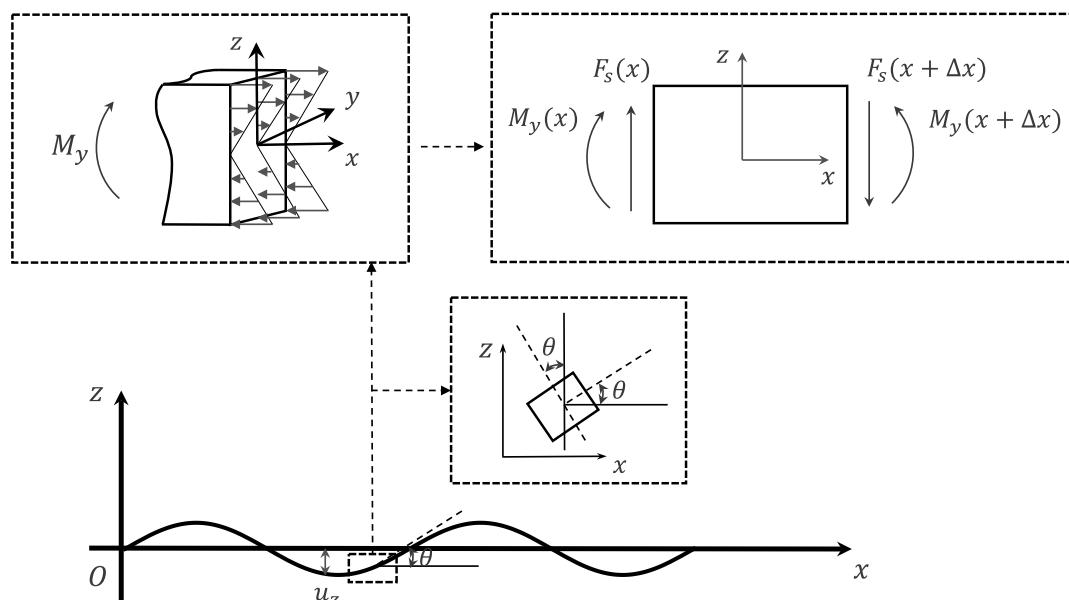


图 2.4: 杆的振动发声示意图

杆作为固体类物质的一种，可以借鉴前述固体中声波的部分分析方法。这里先讨论下杆的变形情况。根据上图2.4所示，需要引入如下假设：

假设 细杆在弯曲状态下所满足的位移/应变假设：

- 由于弯曲振动沿 z 方向，所以 u_z 可以视作 x 的函数，即 $u_z = u_z(x)$ ；

- 细杆沿 y 方向上没有产生位移，所以 $u_y = 0$ ；
- 细杆横截面上沿 z 方向较难产生剪切变形，所以 $\gamma_{xz} = \gamma_{zx} = 0$ 。

将第三个位移假设代入固体的几何方程(1.112)中关于 γ_{zx} 的计算式有

$$\frac{\partial u_x}{\partial z} = -\frac{\partial u_z}{\partial x} \quad (2.25)$$

根据第一个位移假设， u_z 此时只是 x 的一元函数，所以等式右端与 z 无关，上式可以直接积分得到：

$$u_x = -z \frac{\partial u_z}{\partial x} \quad (2.26)$$

上式考虑到了边界条件 $(u_x)_{(z=0)} = 0$ ，即小扰动情况下杆的中性层上没有沿 x 方向的位移，所以消去了积分常数。

以上分析较为抽象，这里还可以给出一种几何解释。 u_x 的产生主要是受到了杆单元旋转的影响，其表达式可通过上图2.4中第一个虚线框所示的几何关系得到：

$$u_x = -(z - u_z) \cdot \sin \theta \approx -z \frac{\partial u_z}{\partial x} \quad (2.27)$$

其中考虑到小扰动，所以忽略了上式中的 u_z ；另外，由于 θ 较小，所以用 $\tan \theta = \frac{\partial u_z}{\partial x}$ 即杆弯曲的斜率代替了 $\sin \theta$ 。

从以上几何描述可以看到边界条件 $(u_x)_{(z=0)} = 0$ 建立的原因，即小扰动情形下可以视作永远把坐标系中心放在杆的中性层上，所以尽管中性层也会弯曲，但在任意方向上均不会产生位移。

综合以上并结合第二个位移假设，再次代入几何方程的展开式(1.112)，则可得到细杆在弯曲状态下的应变关系：

$$\varepsilon_{xx} = -z \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2}, \quad \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = \gamma_{xy} = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0 \quad (2.28)$$

接下来讨论杆的本构关系。这里也需要提前引入一些假设：

假设 细杆在弯曲状态下所满足的应力/本构关系假设：

- 弯曲状态下，杆所满足的本构关系式(1.123)中，正应力 σ_{yy} 和 σ_{zz} 可忽略不计；
- 同理剪切应力 τ_{xy} 和 τ_{yz} 也可忽略不计；
- 再考虑到应变关系式(2.28)的原因，本构关系式(1.123)中，关于 ε_{yy} 和 ε_{zz} 的项需要舍弃，否则等式无法成立。

根据以上假设化简本构关系式(1.122)，可进一步得到细杆中应力与应变的关系：

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = \frac{1}{E} \sigma_{xx} \\ \gamma_{zx} = \frac{1}{2G} \tau_{zx} = \frac{1}{2G} \tau_{xz} \end{cases} \quad (2.29)$$

理论上讲，推导至此已经可以根据所建立的应力表达式来构建细杆弯曲的动力学方程。可上式中的切应力 τ_{zx} 目前仍无法计算。需要说明的是，尽管前面已经明确了剪切应变 $\gamma_{zx} = \gamma_{xz} = 0$ ，但由于杆件的剪切模量 G 较大（可以理解为杆件极难进行上下错位形变），仍可认为剪切应力 τ_{xz} 不为零（所以上式(2.29)中保留了 τ_{xz} 项）。

为实现对切应力 τ_{zx} 的计算，这里从杆件的受力分析进行讨论。杆的弯曲振动主

要产生自外部集中力或分布力的扰动（例如敲击、弹拨等），所以纯弯曲的情形是极少的，一般会受到剪力和弯矩的共同作用。这里分别用图2.4中所示的 F_s 和 M_y （根据右手定则沿 y 轴的力矩）表示。

上述两者的方向沿用材料力学中的正负号规定（这里仅需注意剪力弯矩的符号对应关系即可，不用规范剪力和弯矩单独的正负号），即当施加向下的集中力或分布力使得杆件弯曲时，微元体有顺时针旋转和向内凹陷的趋势，所以剪力满足“左上右下”，弯矩满足“左顺右逆”，如图2.4右上方虚线框中所示。按照此约定，杆件右端的剪力 F_s 朝向向下为正，而弯矩 M_y 的力矩方向沿 y 轴负向为正。

所以，由于右端的剪力 F_s 即为杆件横截面（其面积为固定的几何量，假设为 A ）上的剪切应力合力，根据符号规定应当满足 $F_s = -\tau_{xz} A$ 。

进一步考虑弯矩 M_y 。由于杆是沿着 z 方向做弯曲振动，所以将在其弯曲内侧产生压缩而外侧产生拉伸，中间的中性层满足材料力学中的平截面假设，既不拉伸也不压缩。另外其内外侧的拉压程度与离中性层的距离成正比，如上图2.4左边虚线框中所示，正应力 σ_{xx} 在横截面上的合力将会形成一个沿 y 轴正向的力矩作用。根据力矩分析，此时弯矩 M_y 满足

$$M_y = - \int_A \sigma_{xx}(x, y, z) z dA \quad (2.30)$$

将公式(2.28)代入公式(2.29)则有

$$\sigma_{xx} = E\varepsilon_{xx} = -Ez \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} \quad (2.31)$$

弯矩 M_y 可根据上式(2.31)变化为

$$M_y = \int_A Ez^2 \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} dA = E \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} \int_A z^2 dA = EI_y \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} \quad (2.32)$$

上式中， $I_y = \int_A z^2 dA$ 与杆的横截面结构有关，是一个固定的几何量，在材料力学中一般称为惯性矩。当横截面为矩形（宽高分别设为 b, h ）时有

$$I_y = \int_A z^2 dA = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2 \left(\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dy \right) dz = \frac{bh^3}{12} \quad (2.33)$$

可以看到，通过以上分析已经建立起弯矩 M_y 与弯曲位移 u_z 之间的关系。为了推导出其与切应力 τ_{xz} 之间的表达式，还需要建立起弯矩 M_y 与剪力 F_s 之间的联系。

在杆中截取某一单元，根据图2.4上面右边虚线框中所示的剪力弯矩示意图，考虑中心点在右端的力矩平衡关系，则有

$$M_y(x) + F_s(x) \cdot \Delta x = M_y(x + \Delta x) \quad (2.34)$$

对上式移项并取极限 $\Delta x \rightarrow 0$ ，则可得到：

$$\frac{\partial M_y}{\partial x} = F_s \quad (2.35)$$

 **笔记** 为保持与前述章节的统一，上述应变关系式(2.28)采用了弹性力学的描述方法。当然这部分也可以采用材料力学中的推导方法，即通过杆的弯曲曲率来计算，可以得到同样的结果，这里不做赘述；而公式(2.35)描述的剪力弯矩微分关系，其实也可以采用

弹性力学的方式进行推导，但过程较为繁琐，所以这里还是选择通过宏观的微元体上剪力与力矩的平衡关系来建立。

接下来，基于以上基础，再根据前面固体声波章节的介绍，可以建立如下细杆在弯曲状态下的动力学关系式：

$$\nabla \cdot \mathbf{T} = \rho \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \quad (2.36)$$

结合公式(1.96)，将上式在 Cartesian 坐标系下展开，并考虑前述相关的应力假设 ($\sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$)，可得：

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = \rho \cdot \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} = \rho \cdot \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} \end{cases} \quad (2.37)$$

上式(2.37)中的第一式计算的是沿杆长方向的位移 u_x ，所以可以不予考虑（虽然确实可以求解）。而第二式则是所需要计算杆弯曲位移的表达式。

联立公式(2.32)和(2.35)，并考虑到 $F_s = -\tau_{xz}A$ ，代入公式(2.37)中的第二式，可求得细杆中弯曲波所满足的波动方程表达式：

$$\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}(x, t) = -c_0^2 K^2 \cdot \frac{\partial^4 u_z}{\partial x^4}(x, t) \quad (2.38)$$

其中，

$$c_0 = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad K = \sqrt{\frac{I_z}{A}} \quad (2.39)$$

值得说明的是，公式(2.38)并不具备前述波动方程的统一形式，所以这里对方程中的系数做了一定归纳处理，以便进一步的分析说明。

首先，参数 c_0 具有一般波动方程中波速的定义。若固体声波中的无旋波波速 c_p 忽略 Poisson 比 ν 的影响，则与这里的参数 c_0 完全一致。虽然细杆中的弯曲波体现为横波，但弯曲的扰动主要由正应力 σ_{xx} 提供，所以参数 c_0 具有纵波的特质，与 c_p 的特征相吻合。

而参数 K 为固定的几何量，与细杆横截面的结构有关。比如当横截面为矩形（宽高分别设为 b, h ）时有

$$K = \sqrt{\frac{bh^3}{12} \cdot \frac{1}{bh}} = \sqrt{\frac{h^2}{12}} \quad (2.40)$$

此时参数 K 仅与截面高度 h 有关，而与宽度 b 无关。

接下来考虑如何对方程(2.38)进行求解。这里还是可以利用分离变量法，即令

$$u_z(x, t) = \Phi(x)\Psi(t) \quad (2.41)$$

代入原式(2.38)进行整理可得到分离变量后的表达式：

$$-c_0^2 K^2 \cdot \frac{\Phi^{(4)}(x)}{\Phi(x)} = \frac{\Psi''(t)}{\Psi(t)} \quad (2.42)$$

其中， $\Phi^{(4)}(x)$ 即代表函数 $\Phi(x)$ 对 x 的四阶导数。

与弦振动一般解的步骤类似，这里可以令公式(2.42)恒等于常数 $-\omega^2$ 。此时先考虑

$\Psi(t)$ 所形成的方程有

$$\Psi''(t) + \omega^2 \Psi(t) = 0 \quad (2.43)$$

该常微分方程的通解与公式(2.16)完全一样，即为一系列三角函数的叠加。这里可以提前根据两角和差公式对其做一点简化，得到：

$$\Psi_n(t) = A'_n \sin(\omega_n t + \varphi_n) \quad (2.44)$$

注意此时公式中的角频率 ω_n 仍未知，需要根据具体的边界条件来确定。

继续考虑对 $\Phi(x)$ 的求解，写出其常微分方程式：

$$\Phi^{(4)}(x) - \left(\frac{\omega}{c_0 k}\right)^2 \Phi(x) = 0 \quad (2.45)$$

尽管该式为四阶常微分方程，但从其结构上依旧可以看出形如 $e^{\lambda x}$ 的函数能够满足该方程的解。将该试探解代回方程(2.45)可得：

$$\lambda^4 = \left(\frac{\omega}{c_0 K}\right)^2 \quad (2.46)$$

此时 λ 存在四个根，分别为

$$\begin{cases} \lambda = \pm \sqrt{\frac{\omega}{c_0 K}} = \pm \frac{\omega}{c} \\ \lambda = \pm j \sqrt{\frac{\omega}{c_0 K}} = \pm j \frac{\omega}{c} \end{cases} \quad (2.47)$$

其中， $c = \sqrt{c_0 \omega K}$ ，是一个具有速度量纲的量。这样替换的目的是为了与弦振动的一般解形式保持一致，可以更方便后续了解其物理含义。

所以，方程(2.45)存在四个形如函数 $e^{\lambda x}$ 的特解，其中 $\lambda = \pm \frac{\omega}{c}, \pm j \frac{\omega}{c}$ 。

由于指数形式的表达式物理含义不明显，这里可以对其做一些变换。由于方程(2.45)为线性常微分方程，所以四个特解的线性组合也为该方程的特解。

根据定理2.1介绍的 Euler 公式，以及双曲函数 \cosh 和 \sinh 的定义有，

$$\begin{cases} \cos x = \frac{1}{2}(e^{jx} + e^{-jx}) \\ \sin x = -\frac{1}{2}j(e^{jx} - e^{-jx}) \\ \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \\ \sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \end{cases} \quad (2.48)$$

则方程(2.45)的通解可通过特解的线性组合给出：

$$\Phi_n(x) = B'_n \cos \frac{\omega_n}{c} x + C'_n \sin \frac{\omega_n}{c} x + D'_n \cosh \frac{\omega_n}{c} x + F'_n \sinh \frac{\omega_n}{c} x \quad (2.49)$$

注意这里参数均加了下标 n ，主要是依据弦振动一般解的经验，在引入边界条件后，将会产生一系列三角函数的叠加解。

合并 $\Phi(x)$ 和 $\Psi(t)$ 通解的表达式，可得到如下细杆中弯曲波的最终通解形式（由于只存在一个方向的弯曲位移 u_z ，这里均用 u 对其简化表达）：

$$u_n(x, t) = \left(A_n \cos \frac{\omega_n}{c} x + B_n \sin \frac{\omega_n}{c} x + C_n \cosh \frac{\omega_n}{c} x + D_n \sinh \frac{\omega_n}{c} x\right) \sin(\omega_n t + \varphi_n) \quad (2.50)$$



其中, A_n, B_n, C_n, D_n 为合并后新的积分常数, 需通过给定的边界条件与初始条件确定其具体数值。

接下来简要分析下此时参数 c 的物理含义。若仅取 $\Phi(x)$ 通解中的正弦项, 并令 $\Psi(x)$ 通解中的相位 $\varphi_n = \frac{\pi}{2}$, 则上式(2.50)可简单写为

$$u_n(x, t) = B_n \cos(\omega_n t) \sin\left(\frac{\omega_n}{c}x\right) \quad (2.51)$$

该形式与弦振动一般解中的公式(2.22)完全一致, 也可以通过积化和差公式改写为如下行波解的表达式:

$$u_n(x, t) = \frac{B_n}{2} \left[\sin \frac{\omega_n}{c} (x + ct) + \sin \frac{\omega_n}{c} (x - ct) \right] \quad (2.52)$$

所以可以看到, 此时参数 c 的定义刚好为细杆中弯曲波传播的波速。但是与其他波动方程不同的是, 此时的波速 $c = \sqrt{c_0 \omega_n K}$ 是一个与系列波频率相关的参数, 并非为定值, 表现为不同频率的波传播速度不同, 即会产生弥散现象。

对于细杆弯曲波的波动方程求解, 并未像弦振动的一般解一样一开始便代入边界条件, 原因在于细杆可能存在好几种不同的边界条件情形, 以下列举几种:

- 固定端边界:

细杆的一端呈现被“嵌入”的状态, 既不能平动也不能转动。此时该处的 z 方向位移 u_z 为零, 同时 x 方向位移 u_x (旋转的倾向) 也为零, 所以可得到:

$$u_z = 0, \quad \frac{\partial u_z}{\partial x} = 0 \quad (2.53)$$

- 固定铰边界:

细杆的一端呈现被铰链“套住”的状态, 不能平动但可以转动。此时该处的 z 方向位移为零, 由于可以转动, 所以无法承受弯矩, 即 M_y 为零, 所以可得到:

$$u_z = 0, \quad \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} = 0 \quad (2.54)$$

- 自由端边界:

细杆的一端完全自由, 不能承受任何力或弯矩。此时该处的弯矩 M_y 为零, 同时剪力 F_s 也为零, 所以可得到:

$$\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 u_z}{\partial x^3} = 0 \quad (2.55)$$

实际情况中, 杆的两端分别需要一个上述边界条件, 四个等式刚好对应偏微分方程(2.38)中关于 x 的四阶项, 理论上可以求解出波动方程的定解。具体的应用案例将会放在后续章节2.6中介绍。

2.1.3 平面薄膜振动

平面薄膜的振动作为乐器声学中的典型振动模型之一, 似乎可以看作是弦振动的扩展, 比如假想将弦密集排布则可以形成一张薄膜, 且两者之间均依靠外部张力提供振动时的恢复力, 而可以忽略此时自身重力或刚度的影响。

但若仔细推敲便会发现其中难解之处。弦的振动本应看作是一个二维模型 (振动



方向与弦长方向垂直), 但却满足一维波动方程; 若想进一步将其推广至平面薄膜情形, 会发现并不能直接做一个简单的升维处理。所以这里必须要重新建立平面薄膜振动所满足的动力学方程。

首先分析下平面薄膜的振动形式。一张薄膜被张紧后形成了一个二维平面, 对其表面进行外部扰动(一般是敲击), 则薄膜开始振动。此时薄膜上每一点均可看作是在垂直方向上做上下往复运动, 而宏观上看则会形成波动现象(与弦的振动类似)。

所以这并不是一个简单的二维平面分析或三维空间分析, 而是一个嵌入在三维空间中的光滑曲面分析。

曲面的参数化分析难度较大, 这里采用曲面参数 (ξ, η) 向 Cartesian 坐标 (x, y, z) 进行映射的定义方式, 仅列出相应的基本概念, 以及简要说明。

定义 2.1 (正则曲面)

一个集合 $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ 为正则曲面, 当且仅当存在一个映射, 满足以下形式:

$$\Sigma(\mathbf{x}_\Sigma): \mathbb{R}^2 \ni \mathbf{x}_\Sigma = \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} \mapsto \Sigma(\mathbf{x}_\Sigma) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad (2.56)$$

其中, 向量形式 $\Sigma(\mathbf{x}_\Sigma) = \mathbf{r}(\xi, \eta) = [x(\xi, \eta), y(\xi, \eta), z(\xi, \eta)]^\top$ 都是 3 次以上连续可微的, 处处是正则点的参数曲面。



以上定义中:

1. 对于正则曲面, $\Sigma(\mathbf{x}_\Sigma)$ 均需要 3 次以上连续可微的原因在于, 曲面的几何不变量涉及到 $\Sigma(\mathbf{x}_\Sigma)$ 的 3 阶导数;
2. 处处是正则点, 表示曲面在所形成的参数曲线上的切线是完全确定的, 即对于任意的曲面参数 (ξ, η) , 有 $\frac{\partial \Sigma}{\partial \xi}, \frac{\partial \Sigma}{\partial \eta} \neq 0$ (参数曲线的切向量)。

从上述定义可以看出, 曲面的参数化模型为向量值映照 ($\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$)。

参数曲面有一种特殊形式如下:

$$z = z(\xi, \eta) = z(\xi(x, y), \eta(x, y)) \quad (2.57)$$

该形式下曲面的参数方程可表示为

$$\mathbf{r} = (x, y, z(x, y)) \quad (2.58)$$

这种曲面形式被称为蒙日(Monge)形式, 可以通过上式直接证明, 用 Monge 形式给出的曲面都是正则的。

对平面薄膜振动的几何模型进行参数化分析, 会发现其也是一种典型的 Monge 曲面, 即可以用二维坐标 (x, y) 描述薄膜上各点的固定位置, 而用 z 方向刻画薄膜上各点的振动位移(用任意曲面参数 (ξ, η) 的一般化推导可参考附录E.8)。此时考虑该 \mathbb{R}^3 空间中的某个曲面区域 Σ (面积为 S , 边界的光滑闭曲线用 $\partial\Sigma$ 表示, 周长为 l), 张力 T (大小可视为常数) 则均匀分布在曲面的边界 $\partial\Sigma$ 上, 如下图2.5所示:

由于曲面边界 $\partial\Sigma$ 可能产生任意形态, 所以该模型下张力 T 的方向是变化的。但



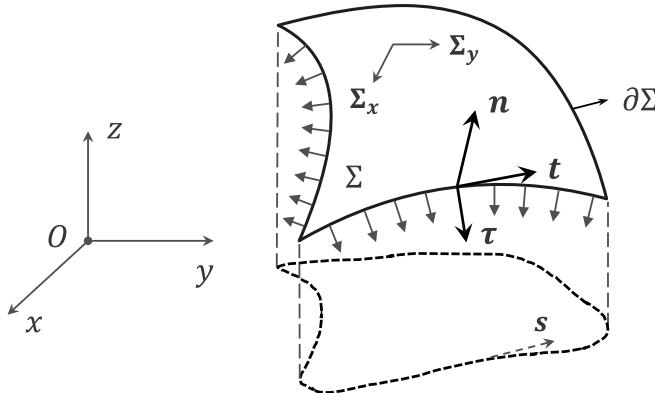


图 2.5: 薄膜振动的参数化几何模型

根据平面薄膜振动的物理构型可以发现，指代张力 T 方向的单位矢量（图示单位向量 τ ）永远在曲面上该点的切平面上，即与图示曲面单位法向量 n 垂直；同时还垂直于曲面边界 $\partial\Sigma$ ，即与图示单位切向量 t 也垂直。

为了求得此时薄膜曲面边界 $\partial\Sigma$ 上的合力，需要给出单位向量 τ 的具体表达式。但是从图2.5所示的几何构型上分析，单位向量 τ 可能指向任意的方向，无法直接给出一个固定的参数化表示，所以只能退而求其次，从曲面的投影开始重新思考。

假设曲面边界 $\partial\Sigma$ 在 xy 平面上的投影为图2.5所示的虚线闭曲线，则可以定义投影曲线的单位切向量 s ，为曲面边界 $\partial\Sigma$ 曲线的单位切向量 t 在 xy 平面上的投影。由于曲面边界 $\partial\Sigma$ 为任意三维曲线，所以其投影曲线形状也并不固定，只能令 $s = (s_x, s_y, 0)$ ，其中 $s_x^2 + s_y^2 = 1$ ；或者可以用单参数来表示，例如 $s = (\cos\theta, \sin\theta, 0)$ ，其中 θ 为 s 与 x 轴的夹角。此时若求得曲面单位法向量 n ，则单位切向量 t 可通过与单位法向量 n 的垂直关系，且投影向量为 s 来导出。随后单位向量 τ 即可通过 $t \times n$ 得到。

首先根据定义2.1重新给出薄膜曲面的参数化表达式如下：

$$\Sigma(\mathbf{x}_\Sigma) : \mathbb{R}^2 \ni \mathbf{x}_\Sigma = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \Sigma(\mathbf{x}_\Sigma) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z = u(x, y) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad (2.59)$$

其中， $u(x, y)$ 表示薄膜在 z 方向上的位移偏量，同时也是待求解的薄膜振动位移。

对该曲面参数化构型进行求导可得：

$$\Sigma_x = \frac{\partial \Sigma}{\partial x}(x, y) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad \Sigma_y = \frac{\partial \Sigma}{\partial y}(x, y) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (2.60)$$

根据矢量形式下参数化构型导数的几何含义， Σ_x 和 Σ_y 分别代表曲面上沿 x 和 y 方向参数曲线的切向量。所以给定曲面上一点，求得的 Σ_x 和 Σ_y 刚好在曲面上张成唯一的切平面，此时曲面法向量 n 可根据下式求得：

$$\mathbf{n} = \frac{\Sigma_x \times \Sigma_y}{|\Sigma_x \times \Sigma_y|} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & \frac{\partial u}{\partial x} \\ 0 & 1 & \frac{\partial u}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial u}{\partial x} \\ -\frac{\partial u}{\partial y} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.61)$$

上式考虑到薄膜振动为“微扰动”，而 $|\boldsymbol{\Sigma}_x \times \boldsymbol{\Sigma}_y| = \sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}$ ，所以对关于函数 $u(x, y)$ 偏导数的高阶项均进行了忽略。

由于 $\mathbf{t} \perp \mathbf{n}$ ，且在 xy 平面上的投影向量为 \mathbf{s} （这里采用 $\mathbf{s} = (s_x, s_y, 0)$ 的定义），所以可令 $\mathbf{t} = (s_x, s_y, t_z)$ ，根据 $\mathbf{t} \cdot \mathbf{n} = 0$ 求得 t_z ，从而给出曲面边界 $\partial\Sigma$ 的切向量 \mathbf{t} 表达式：

$$\mathbf{t} = \left(s_x, s_y, \frac{\partial u}{\partial x} s_x + \frac{\partial u}{\partial y} s_y \right) \quad (2.62)$$

这里切向量 \mathbf{t} 依然可以视作单位向量。

此时，指代张力 T 的方向，即单位向量 $\boldsymbol{\tau}$ 可根据 $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{t} \times \mathbf{n}$ 给出（忽略高阶项）：

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{t} \times \mathbf{n} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ s_x & s_y & \frac{\partial u}{\partial x} s_x + \frac{\partial u}{\partial y} s_y \\ -\frac{\partial u}{\partial x} & -\frac{\partial u}{\partial y} & 1 \end{vmatrix} = \left[s_y, -s_x, \frac{\partial u}{\partial x} s_y - \frac{\partial u}{\partial y} s_x \right]^\top \quad (2.63)$$

根据薄膜振动的物理模型，此时需要计算张力 T 沿曲面边界 $\partial\Sigma$ 的分布合力。由于张力为矢量，所以完整的张力描述应该为 $T \cdot \boldsymbol{\tau}$ 。考虑到张力的大小可为常值 T ，但方向却会沿着曲面边界 $\partial\Sigma$ 发生变化，所以应当用曲线积分来描述薄膜振动时的合力大小，这里依旧采用 \mathbf{F}_N 来表示：

$$\mathbf{F}_N = T \oint_{\partial\Sigma} \boldsymbol{\tau} dl \quad (2.64)$$

由于单位向量 $\boldsymbol{\tau}$ 的 x 和 y 分量分别为 s_y 和 $-s_x$ ，两者绕曲面边界 $\partial\Sigma$ 进行环路积分，计算结果均为零。所以最后 \mathbf{F}_N 只会剩下 z 方向的积分分量 F_z ：

$$F_z = T \oint_{\partial\Sigma} \left(\frac{\partial u}{\partial x} s_y - \frac{\partial u}{\partial y} s_x \right) dl \quad (2.65)$$

引理 2.1 (广义 Stokes 公式)

对 \mathbb{R}^3 空间中的任意张量场 Φ ，存在如下线积分到面积分的转化：

$$\oint_{\partial\Sigma} (\mathbf{t} \odot \Phi) dl = \iint_{\Sigma} (\mathbf{n} \times \nabla) \odot \Phi dS \quad (2.66)$$

其中， \odot 表示任意许可的运算，包括点积、叉积和张量并。

该引理的证明将会非常抽象，因为涉及到了张量运算，也不太容易用 Cartesian 坐标系进行展开介绍，所以证明部分完全放在了附录E.7。

根据引理2.1，公式(2.65)可进一步将线积分转化为面积分，但需要按照广义 Stokes 公式的格式进行一下构造。考虑到公式(2.65)中被积函数的形式和单位切向量 \mathbf{t} 的表达式，这里可以构造一个与向量（用 $\boldsymbol{\phi}$ 表示）的点积运算：

$$\mathbf{t} \cdot \boldsymbol{\phi} = \frac{\partial u}{\partial x} s_y - \frac{\partial u}{\partial y} s_x, \quad \boldsymbol{\phi} = \left[-\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial x}, 0 \right]^\top \quad (2.67)$$

所以根据引理2.1有

$$F_z = T \oint_{\partial\Sigma} (\mathbf{t} \cdot \boldsymbol{\phi}) dl = T \iint_{\Sigma} (\mathbf{n} \times \nabla) \cdot \boldsymbol{\phi} dS \quad (2.68)$$

需要强调， $(\mathbf{n} \times \nabla) \cdot \boldsymbol{\phi}$ 是先做叉积运算（不包含微分运算），再做类似散度的运算。

将 Hamilton 算子 ∇ 在 Cartesian 坐标系下展开, 由于

$$\mathbf{n} \times \nabla = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -\frac{\partial u}{\partial x} & -\frac{\partial u}{\partial y} & 1 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial x} \\ -\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (2.69)$$

所以有 (忽略高阶项)

$$\begin{aligned} (\mathbf{n} \times \nabla) \cdot \boldsymbol{\phi} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} \right) \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{j} \right) \\ &= \nabla \cdot \nabla u = \nabla^2 u \end{aligned} \quad (2.70)$$

特别需要注意, 上式中的 ∇ 是降维后的二维平面 Hamilton 算子。此外, 由于可以通过在曲面 $z = u(x, y)$ 上构造等高线 (contour), 根据梯度运算的几何含义 (详见附录A.2), 这里 ∇u 也指向曲面等高线的法向方向。

将公式(2.70)代回公式(2.68), 可计算出薄膜曲面区域 Σ 上的张力合力:

$$F_z = T \iint_{\Sigma} (\nabla^2 u) dS \quad (2.71)$$

上式表明, 当张紧的薄膜产生微小扰动时, 单位面积上的合力为 $T \cdot \nabla^2 u$, 且只有沿 z 方向上的分量。与前面推导波动方程的过程类似, 这里也很方便可以将静力学公式推广到动力学情形下。此时仅需让单位面积上的合力等于曲面微元的密度 (即单位面积的质量) 与该曲面微元加速度 a 的乘积即可, 如下:

$$T \cdot \nabla^2 u = \rho \cdot a = \rho \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (2.72)$$

进一步化简即可求得平面薄膜振动所满足的波动方程:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\mathbf{x}_{\Sigma}, t) = c^2 \cdot \nabla^2 u(\mathbf{x}_{\Sigma}, t), \quad \mathbf{x}_{\Sigma} \in \mathbb{R}^2 \quad (2.73)$$

其中,

$$c = \sqrt{\frac{T}{\rho}} \quad (2.74)$$

注意这里也需要对量纲进行强调: 薄膜上的张力 T 采用单位长度上力的单位 N/m, 此时密度 ρ 为面密度, 单位为 Kg/m²; 或者也可以让张力 T 采用压强的单位 N/m² (考虑成一张带厚度的膜), 此时密度 ρ 的单位为 Kg/m³。

可以看到此情形下, 波动方程的形式也具有类似的统一性。另外尽管是在 \mathbb{R}^3 空间中, 但薄膜位移 u 仅指代在 z 方向上的位移, 所以这里并没有采用加粗的矢量写法。

 **笔记** 虽然上述关于平面薄膜振动的理论推导过程较为清晰, 且几何关系明确, 但这并不是唯一的推导途径。事实上, 还有另一种更为简洁抽象的推导方法, 可以直接给出最后的结果。

从公式(2.64)出发, 由于 $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{t} \times \mathbf{n}$, 所以可以根据引理2.1构造出另外一种广义 Stokes 公式的格式, 从而避免计算单位切向量 \mathbf{t} 的具体表达式, 即

$$\mathbf{F}_N = T \oint_{\partial\Sigma} (\mathbf{t} \times \mathbf{n}) dl = T \iint_{\Sigma} (\mathbf{n} \times \nabla) \times \mathbf{n} dS \quad (2.75)$$

同样需要强调, $(\mathbf{n} \times \nabla) \times \mathbf{n}$ 是先做叉积运算, 再做类似旋度的运算。

由于

$$(\mathbf{n} \times \nabla) \times \mathbf{n} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -\frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} & -\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \\ -\frac{\partial u}{\partial x} & -\frac{\partial u}{\partial y} & 1 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{bmatrix} \quad (2.76)$$

上式同样忽略了函数 $u(x, y)$ 偏导数的高阶项。

所以, 薄膜单位面积上的合力为

$$T \cdot [(\mathbf{n} \times \nabla) \times \mathbf{n}] = T \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \mathbf{k} \quad (2.77)$$

之后的推导则与前述完全一致。

接下来对平面薄膜波动方程(2.73)进行求解。本节首先考虑 Cartesian 坐标系下的薄膜振动 (即矩形薄膜), 此时公式(2.73)可以展开写成:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (2.78)$$

上式还是可以利用分离变量法, 即令

$$u(x, y, t) = V(x, y) T(t) \quad (2.79)$$

将其代入公式(2.78)可得到:

$$c^2 \cdot \frac{1}{V} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) = \frac{T''}{T} = -\omega^2 \quad (2.80)$$

与前面两节的处理类似, 上式的 $-\omega^2$ 为分离常数 (后面会看到它依然具有角频率的物理含义)。

这里先考虑关于 $V(x, y)$ 的方程, 根据上式(2.80)可知:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 V = 0 \quad (2.81)$$

该方程可以再次分离变量, 令

$$V(x, y) = X(x) Y(y) \quad (2.82)$$

将其代入公式(2.81)可得到:

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y'' + \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 Y}{Y} = -\mu^2 \quad (2.83)$$

此时 $X(x)$ 和 $Y(y)$ 可以分离出单独所满足的常微分方程, 如下:

$$\begin{cases} X''(x) + \mu^2 X(x) = 0 \\ Y''(y) + \nu^2 Y(y) = 0 \end{cases} \quad (2.84)$$

其中,

$$\mu^2 + \nu^2 = \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \quad (2.85)$$

公式(2.84)的形式与前述弦振动的公式(2.4)完全一样, 若给定常微分方程所满足的边界条件, 则可直接导出方程的定解。

假设 x 的取值在 $[0, a]$ 区间内, y 的取值在 $[0, b]$ 区间内 (类似弦长的取值在 $[0, L]$



区间内), 则需要满足边界固定的条件:

$$\begin{aligned} u(0, y, t) &= V(0, y) T(t) = X(0) Y(y) T(t) = 0 \\ u(a, y, t) &= V(a, y) T(t) = X(a) Y(y) T(t) = 0 \\ u(x, 0, t) &= V(x, 0) T(t) = X(x) Y(0) T(t) = 0 \\ u(x, b, t) &= V(x, b) T(t) = X(x) Y(b) T(t) = 0 \end{aligned} \quad (2.86)$$

上述公式对任意时刻 t , 任意位置 x 和 y 均满足, 即可得:

$$X(0) = X(a) = Y(0) = Y(b) = 0 \quad (2.87)$$

可以看到, 边界条件的形式也与公式(2.7)完全相同。所以, 上述两个常微分方程可给出其定解, 同样为一系列正弦函数:

$$\begin{cases} \mu_m = \frac{m\pi}{a}, \quad X_m(x) = B_m \sin(\mu_m x), \quad m = 1, 2, 3, \dots \\ \nu_n = \frac{n\pi}{b}, \quad Y_n(x) = B_n \sin(\nu_n x), \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{cases} \quad (2.88)$$

其中, B_m 和 B_n 为积分常数。根据公式(2.85), 可进一步求得:

$$\omega_{mn}^2 = c^2 \pi^2 \left[\left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2 \right], \quad m, n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.89)$$

即此时的 ω 是一个与 m, n 均相关的变量。

接下来求解公式(2.80)中 $T(t)$ 的部分, 其通解与弦振动章节中的公式(2.16)完全一致, 只是需要结合公式(2.89)进行变换。最终整理合并可给出薄膜振动所满足的无穷级数形式一般解, 如下:

$$u(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) [C_{mn} \cos(\omega_{mn} t) + D_{mn} \sin(\omega_{mn} t)] \quad (2.90)$$

其中, C_{mn} 和 D_{mn} 即为合并后的两个积分常数, 与 m, n 均相关。 ω_{mn} 为角频率, 满足

$$\omega_{mn} = c\pi \sqrt{\left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2} \quad (2.91)$$

注 相比于公式(2.89), 上式似乎并未保留负数项, 事实上这是由于求解常微分方程所造成的 (详见弦振动章节的推导), 即无论开方后保留哪一项, 最终在三角函数中均呈现正数项。

实际问题中, 可通过给定初始位移分布函数和初始速度分布函数来导出 C_{mn} 和 D_{mn} 的具体表达式, 然后利用公式(2.90)给出薄膜振动的定解。

2.1.4 平板弯曲振动

与平面薄膜振动相对于弦的振动类似, 平板弯曲振动也可以看作是细杆弯曲振动的扩展, 且其研究思路与细杆弯曲振动基本一致, 许多推导方法也可以完全借鉴。

沿着平板长宽方向 (长度为 a , 宽度为 b) 和垂直平板方向建立 Cartesian 坐标系, 将 xy 平面置于平板的中性面上 (厚度为 h), 其参数化示意图如下图2.4所示:

首先还是讨论下平板的变形情况, 需要引入如下假设:

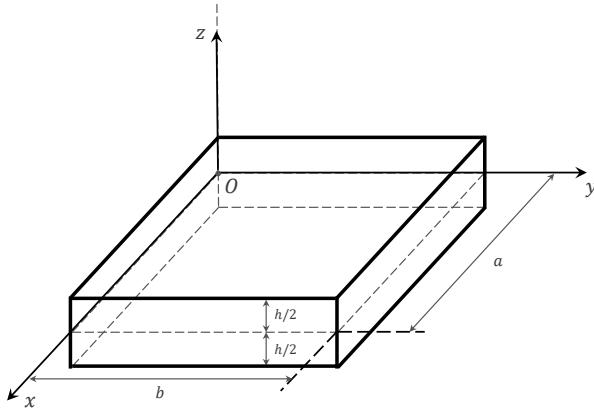


图 2.6: 平板弯曲振动参数化示意图

假设 平板在弯曲状态下所满足的位移/应变假设:

- 平板的厚度在整体尺度上较小, 所以可认为 z 方向上正应变 $\varepsilon_{zz} = 0$;
- 平板横截面上沿 z 方向较难产生剪切变形, 所以可认为 $\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$ 。

将上述第一个假设代入固体的几何方程(1.112)中有 $\frac{\partial u_z}{\partial z} = 0$, 从而得到 $u_z = u_z(x, y)$, 说明平板在 z 方向上的位移只取决于 x, y 两个参数。这也与实际的假想情况相符。

接下来根据第二个假设, 同样代入固体的几何方程(1.112)中有

$$\frac{\partial u_x}{\partial z} = -\frac{\partial u_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial u_y}{\partial z} = -\frac{\partial u_z}{\partial y} \quad (2.92)$$

由于 u_z 此时只是 x, y 的二元函数, 所以上两式的右端均与 z 无关, 可以直接积分得到:

$$u_x = -z \frac{\partial u_z}{\partial x}, \quad u_y = -z \frac{\partial u_z}{\partial y} \quad (2.93)$$

上两式考虑到了边界条件 $(u_x)_{(z=0)} = 0, (u_y)_{(z=0)} = 0$, 即小扰动情况下板的中性层上没有沿 x 和 y 方向的位移, 所以消去了积分常数。

综合以上各式, 再次代入几何方程的展开式(1.112), 则可得到平板在弯曲状态下的应变关系:

$$\varepsilon_{xx} = -z \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2}, \quad \varepsilon_{yy} = -z \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2}, \quad \gamma_{xy} = -2z \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial y}, \quad \varepsilon_{zz} = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0 \quad (2.94)$$

接下来讨论平板的本构关系。这里同样需要提前引入一些假设:

假设 细杆在弯曲状态下所满足的应力/本构关系假设:

- 弯曲状态下, 平板所满足的本构关系式(1.123)中, 正应力 σ_{zz} 可忽略不计;
- 再考虑到应变关系式(2.94)的原因, 本构关系式(1.123)中, 关于 ε_{zz} 的项需要舍弃, 否则等式无法成立。

根据以上假设化简本构关系式(1.122), 可进一步得到平板中应力与应变的关系:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{xx} = \frac{1}{E} (\sigma_{xx} - \nu \sigma_{yy}) \\ \varepsilon_{yy} = \frac{1}{E} (\sigma_{yy} - \nu \sigma_{xx}) \\ \gamma_{xy} = \frac{1}{2G} \tau_{xy}, \quad \gamma_{yz} = \frac{1}{2G} \tau_{yz}, \quad \gamma_{zx} = \frac{1}{2G} \tau_{zx} \end{array} \right. \quad (2.95)$$

与细杆的弯曲振动类似，尽管前面已经明确了剪切应变 $\gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$ ，但由于杆件的剪切模量 G 较大（可以理解为平板极难进行上下的错位形变），仍可认为剪切应力 τ_{yz} 和 τ_{zx} 不为零（所以上式(2.95)中保留了 τ_{yz} 和 τ_{zx} 项）。

将公式(2.95)改写成应力相对于应变的表达式，再代入公式(2.94)的结果有

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{xx} = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{xx} + \nu \varepsilon_{yy}) = -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} \right) \\ \sigma_{yy} = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{yy} + \nu \varepsilon_{xx}) = -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} \right) \\ \tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy} = -\frac{Ez}{1+\nu^2} \cdot \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial y} \end{array} \right. \quad (2.96)$$

可以看到，此时还有 τ_{yz} 和 τ_{zx} 无法计算（通过本构关系无法得到），所以同样需要从平板的受力分析进行讨论。由于平板横截面上还存在切应力 τ_{xy} 和 τ_{yx} ，所以给定一个平板微元体，将会同时受到剪力、弯矩和扭矩的联合作用，如下图2.7所示：

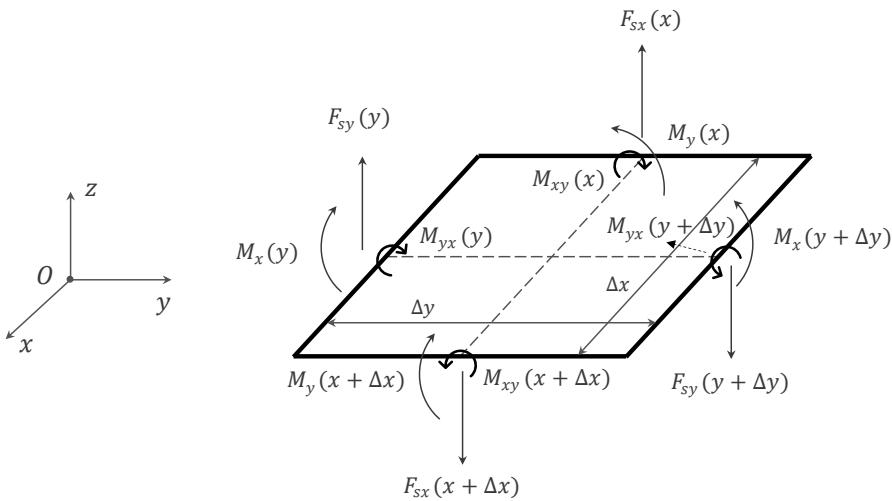


图 2.7: 平板单元力与力矩的平衡关系示意图

这里用 F_{sx} 和 F_{sy} 分别代表 x 方向和 y 方向横截面上沿 z 轴的剪力， M_x 和 M_y 分别代表力矩沿 x 和 y 轴的弯矩，两者符号仍然按材料力学中的约定（与细杆弯曲振动中的描述一致）；而扭矩则依照对应切应力的下标给出，例如 x 横截面上带来扭转效应的切应力为 τ_{xy} ，所以 x 横截面上的扭矩用 M_{xy} 表示，同理 M_{yx} 则为 y 横截面上的扭矩。扭矩的符号也遵循材料力学中的约定，即力矩方向沿横截面外法向为正。

按照此约定，平板外法向沿 x 和 y 轴正向的横截面上，剪力 F_{sx}, F_{sy} 朝 z 轴负向为正，弯矩 M_x 的力矩方向沿 x 轴正向为正，相反弯矩 M_y 的力矩方向沿 y 轴负向为正；扭矩 M_{xy} 和 M_{yx} 的力矩方向则分别沿 x 和 y 轴正向为正。

上述的受力分析，也只需要考虑剪力、弯矩以及扭矩的符号对应关系即可（因为后面只会导出力与力矩之间的相对函数关系），不用规范剪力、弯矩以及扭矩单独的正负号。

类似细杆弯曲振动的分析（可参考图2.4），这里考虑平板沿 x 方向和 y 方向单位宽度横截面（可理解为横截面面积均为 h ）上的所受弯矩和扭矩与应力之间的积分关

系, 可得:

$$\begin{aligned} M_x &= - \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{yy}(x, y, z) z dz, \quad M_y = - \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xx}(x, y, z) z dz \\ M_{xy} &= - \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xy}(x, y, z) z dz, \quad M_{yx} = \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{yx}(x, y, z) z dz \end{aligned} \quad (2.97)$$

将公式(2.96)代入上式, 可以发现, 由于位移 u_z 只是 x, y 的二元函数, 所以被积函数中关于应力的部分均可以提到积分项外 (这也是为什么需要求解单位宽度横截面上的弯矩和扭矩), 可以得到:

$$\begin{aligned} M_x &= \frac{EhK^2}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} \right), \quad M_y = \frac{EhK^2}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} \right) \\ M_{xy} &= \frac{EhK^2}{1+\nu} \cdot \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial y}, \quad M_{yx} = - \frac{EhK^2}{1+\nu} \cdot \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (2.98)$$

上式中, 参考公式(2.40), 提前引入了固定的几何量参数 K , 满足 $K = \sqrt{\frac{h^2}{12}}$ 。这里并未考虑采用细杆弯曲振动中介绍的惯性矩来表示, 因为一般平板的横截面均为矩形, 可提前进行化简。

接下来继续构建力与力矩之间的联系。在平板中截取某一单元, 根据图2.7中所示的剪力弯矩扭矩示意图, 考虑以图示平面中间虚线为轴的两个力矩平衡关系, 则有

$$\begin{aligned} M_x(y) + M_{xy}(x) + F_{sy}(y) \left(\frac{\Delta y}{2} \right) + F_{sy}(y + \Delta y) \left(\frac{\Delta y}{2} \right) &= M_x(y + \Delta y) + M_{xy}(x + \Delta x) \\ M_y(x) + M_{yx}(y + \Delta y) + F_{sx}(x) \left(\frac{\Delta x}{2} \right) + F_{sx}(x + \Delta x) \left(\frac{\Delta x}{2} \right) &= M_y(x + \Delta x) + M_{yx}(y) \end{aligned} \quad (2.99)$$

对上两式移项并取极限 $\Delta x, \Delta y \rightarrow 0$ (化简中可近似认为 $\Delta x = \Delta y$), 则可得到:

$$F_{sx} = \frac{\partial M_y}{\partial x} - \frac{\partial M_{yx}}{\partial y}, \quad F_{sy} = \frac{\partial M_x}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \quad (2.100)$$

同样地, 根据前面固体声波章节的介绍, 可以建立如下平板在弯曲状态下的动力学关系式:

$$\nabla \cdot \mathbf{T} = \rho \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \quad (2.101)$$

结合公式(1.96), 将上式在 Cartesian 坐标系下展开, 并考虑前述相关的应力假设 ($\sigma_{zz} = 0$), 可得:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = \rho \cdot \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = \rho \cdot \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = \rho \cdot \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} \end{array} \right. \quad (2.102)$$

上式(2.102)中的第一式和第二式计算的是沿平板平面方向的位移 u_x 和 u_y , 所以可以不予考虑 (虽然确实可以求解)。而第三式则是所需要计算平板弯曲位移的表达式 (后续将 u_z 简化为 u)。

将公式(2.98)的结果代入公式(2.100), 并考虑到剪力 F_{sx} 和 F_{sy} 对应切应力 τ_{xz} 和

τ_{yz} 的关系 (由于是单位宽度, 所以这里应当满足 $F_{sx} = -\tau_{xz}h$, $F_{sy} = -\tau_{yz}h$), 再代入公式(2.102)中的第三式, 可求得平板弯曲振动所满足的波动方程表达式:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, y, t) &= -\frac{c_0^2 K^2}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \right)(x, y, t) \\ &= -\frac{c_0^2 K^2}{1-\nu^2} \nabla^2 (\nabla^2 u)(x, y, t) = -\frac{c_0^2 K^2}{1-\nu^2} \nabla^4 u(x, y, t)\end{aligned}\quad (2.103)$$

其中,

$$c_0 = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad K = \sqrt{\frac{h}{12}} \quad (2.104)$$

接下来对平板弯曲波动方程(2.103)进行求解。这里还是首先考虑 Cartesian 坐标系下的平板弯曲 (即矩形平板), 依然利用分离变量法, 即令

$$u(x, y, t) = V(x, y) T(t) \quad (2.105)$$

将其代入方程(2.103)可得到:

$$-\frac{c_0^2 K^2}{1-\nu} \cdot \frac{\nabla^4 V(x, y)}{V(x, y)} = \frac{T''(t)}{T(t)} = -\omega^2 \quad (2.106)$$

与前述求解的步骤类似, 上式的 $-\omega^2$ 为分离常数, 其依然具有角频率的物理含义。

上式(2.106)中 $T(t)$ 的部分, 其通解仍然与弦振动章节中的公式(2.16)完全一致, 这里不做赘述。

下面考虑 $V(x, y)$ 的部分, 通过(2.106)可知:

$$(\nabla^4 - k^4)V = 0 \quad (2.107)$$

其中,

$$k^4 = \frac{\omega^2 (1-\nu^2)}{c_0^2 K^2} \quad (2.108)$$

公式(2.107)可通过因式分解改写为

$$(\nabla^2 + k^2)(\nabla^2 - k^2)V = 0 \quad (2.109)$$

上式表明, 此时 $V(x, y)$ 的通解可以写为如下两个关于 V_1 和 V_2 的偏微分方程通解的线性组合:

$$(\nabla^2 + k^2)V_1 = 0, \quad (\nabla^2 - k^2)V_2 = 0 \quad (2.110)$$

以第一式为例, 其求解方法与上一节关于平面薄膜振动的推导类似, 即还需要再进行一次分离变量, 之后会得到三角函数形式的通解。注意这里不能也直接套用相同的边界条件, 因为一般平板弯曲振动的边界条件不是固定端边界, 而是自由端边界, 即平板四边均完全自由, 满足剪力 F_{sx} 和 F_{sy} 、弯矩 M_x 和 M_y , 以及扭矩 M_{xy} 和 M_{yx} 均为零。其中, 弯矩和扭矩的边界方程由公式(2.98)给出, 而剪力则需要进一步通过公式(2.100)给出。

可以看到, 由于上述方程较为复杂, 而此时还只求解了一半, 所以实际很难导出简洁且完备的平板弯曲振动波动方程的一般解, 致使本节后续的理论探讨已失去实用意义。关于平板弯曲振动波动方程的求解, 一般采用数值方法更为方便。

例题 2.2 克拉尼 (Chladni) 图形：不同振动频率下，平板表面放置的细颗粒会自动聚集，最终整体呈现出形态各异的花纹。试通过平板弯曲振动模型给出其理论解释。

解 首先分析 Chladni 图形的成因。对平板进行特定的频率激励（可通过激振器，也可以在其边缘用弓弦对其进行摩擦），平板会出现弯曲振动，此时其表面附着的细颗粒将被弹起，最后聚集到驻波的波节（振动幅值恒为零）处。根据前述理论分析，即需要求解在不同振动频率（即不同的角频率 ω ）下， $V(x, y) = 0$ 的图像形态。

由于想要直接求解 $V(x, y)$ 的表达式比较困难，这里可以考虑一种简化情况。首先采用同样的分离变量法，令 $V(x, y) = X(x)Y(y)$ ，然后分别将函数 $X(x)$ 和 $Y(y)$ 假设为由单一的三角函数组成。考虑到上一节已推导出正弦函数是满足固定边界条件的解，所以这里采用余弦函数来构造。

以 $X(x)$ 为例，可令 $X(x)$ 是由 $\cos \omega_m x$ 组成。根据前述章节的介绍，将会存在一系列的 ω_m ，其中 $m = 1, 2, 3, \dots$ ，使得 $\cos \omega_m x$ 均满足 $X(x)$ 解的形式。最基础的振动模式即为类似图 2.3(a) 中的情形，此时可根据频率关系 $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2a$ (a 为平板沿 x 方向的长度，如图 2.6 所示) 计算出基础角频率 $\omega = \frac{\pi}{a}$ 。

另外，考虑到平板的对称结构，这里将坐标系中心置于平板中心（可以理解为将函数 $X(x)$ 和 $Y(y)$ 分别向 x 和 y 轴负向平移了相对应平板长度尺寸的一半），结合以上分析构造出如下 $X(x)$ 和 $Y(y)$ 的函数形式：

$$\begin{cases} X(x) = \cos \left[\omega_m \left(x - \frac{a}{2} \right) \right], & \omega_m = \frac{m\pi}{a} \\ Y(y) = \cos \left[\omega_n \left(y - \frac{b}{2} \right) \right], & \omega_n = \frac{n\pi}{b} \end{cases} \quad (2.111)$$

这里并未如前所述，将解写成无穷级数的形式，主要是为了配合后续不同振动频率下的平板弯曲分析。

有了 $X(x)$ 和 $Y(y)$ ，则可以进一步构建 $V(x, y)$ 的表达式。但需要注意的是，这里不能直接简单地认为 $V(x, y) = X(x)Y(y)$ ，因为 m 和 n 不一定相同，但对于同一种振动模式 (m, n) 来说，平板沿 x 轴和 y 轴实际是对称等价的（根据波动方程解的形式可知）。换句话说，在构建 $V(x, y)$ 的表达式时，需要构造一种可以互换 m, n ，同时不影响 $V(x, y) = 0$ 的格式。

容易想到的是通过对称和反对称函数来构造，如下（为方便阐述，将平板的尺寸做归一化处理）：

$$\begin{aligned} V(x, y) &= \cos \left[m\pi \left(x - \frac{1}{2} \right) \right] \cdot \cos \left[n\pi \left(y - \frac{1}{2} \right) \right] \\ &\pm \cos \left[n\pi \left(x - \frac{1}{2} \right) \right] \cdot \cos \left[m\pi \left(y - \frac{1}{2} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.112)$$

实际计算时，上式可以采用符号 (sgn) 函数 $\text{sgn}(x)$ 来统一表达式：

$$\begin{aligned} V(x, y) &= \cos \left[m\pi \left(x - \frac{1}{2} \right) \right] \cdot \cos \left[n\pi \left(y - \frac{1}{2} \right) \right] \\ &+ \text{sgn}(m-n) \cdot \cos \left[n\pi \left(x - \frac{1}{2} \right) \right] \cdot \cos \left[m\pi \left(y - \frac{1}{2} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.113)$$

其中,

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases} \quad (2.114)$$

据此, 通过符号函数 $\operatorname{sgn}(x)$ 改写后的表达式, 就算是 $m=n$ 的情形, 也并不影响 $V(x, y)=0$ 的格式。

根据公式(2.113), 则可以绘制出不同振动模式 (m, n) 情形下 $V(x, y)=0$ 的函数图形, 即 Chladni 图形, 如下图2.8所示:

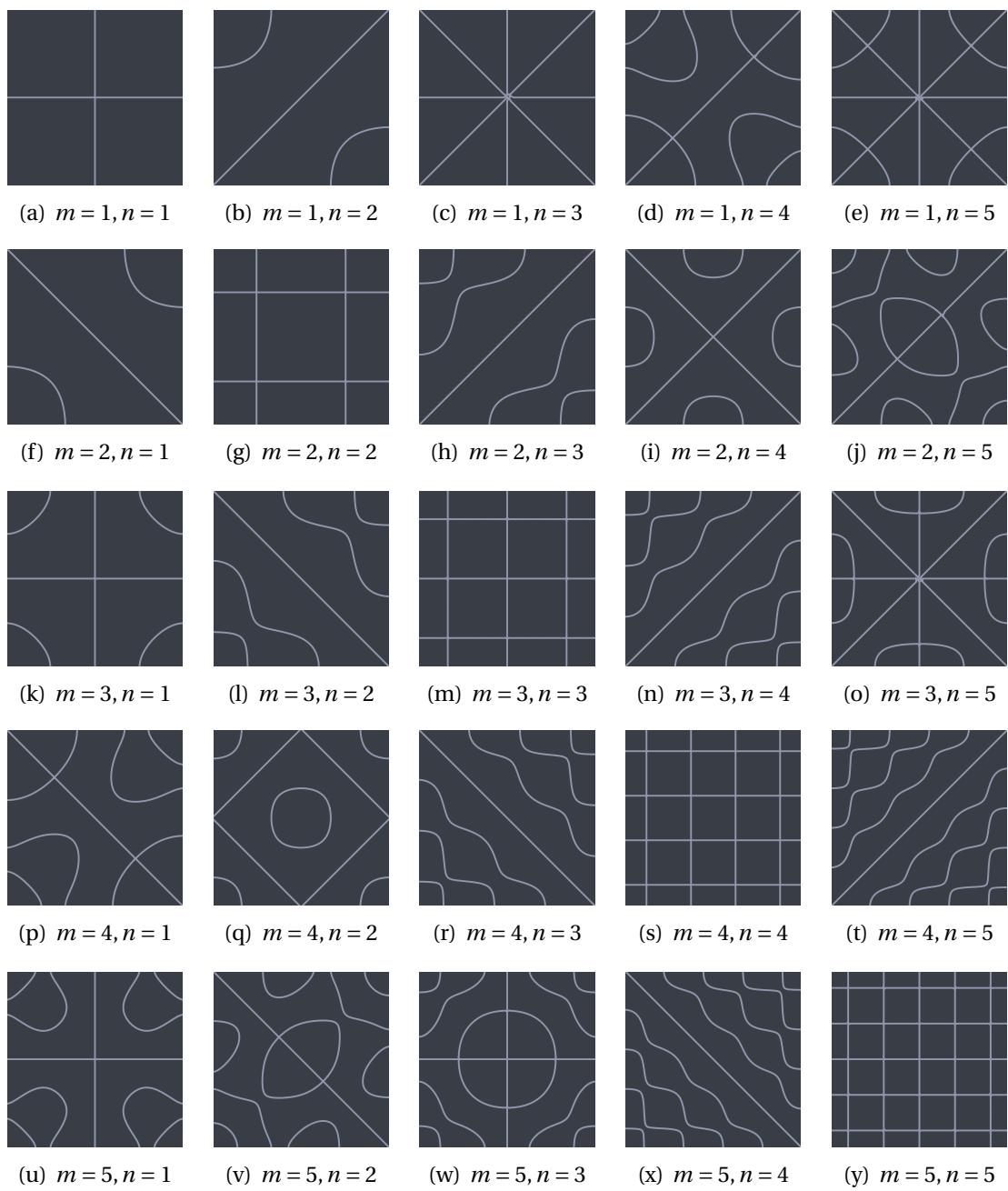


图 2.8: 不同模态下的 Chladni 图形

可以看到，以上图形中有些是对称结构，有些是反对称结构，还有些两者均是。图形的形状主要取决于 (m, n) 的取值。

以上 Chladni 图形在实际实验中也已被证实。

通过 $V(x, y)$ 的表达式，也可以反推出不同振动模式 (m, n) 情形下的平板振动频率。将公式(2.112)代回公式(2.107)，可以求得：

$$\pi^4 (m^2 + n^2)^2 - k^4 = 0 \quad (2.115)$$

根据参数 k 的表达式，即公式(2.108)，代入上式可得：

$$\omega_{mn} = \pi^2 (m^2 + n^2) \frac{c_0 K}{\sqrt{1 - \nu^2}} \quad (2.116)$$

注意，上式也只取了 ω_{mn} 的正数项。

通过以上角频率 ω_{mn} 的关系式，可进一步求得平板振动频率（用 f 指代）为

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega_{mn}}{2\pi} = \frac{\pi}{2} (m^2 + n^2) \frac{c_0 K}{\sqrt{1 - \nu^2}} \quad (2.117)$$

注 值得说明的是，以上关于 Chladni 图形的推导均是建立在简化平板弯曲振动解的前提下进行的。事实上，公式(2.112)并不是方程(2.107)的通解，自然也不能构成平板弯曲振动的波动方程(2.103)的通解。但是通过以上分析，可以简要从理论上说明各种 Chladni 图形的成因。

另外，尽管上述模型可以通过振动模式 (m, n) 反推出此时的平板弯曲振动频率，但这种关系并不是一一对应的。若想要精确得到平板振动频率与所呈现图案的对应关系，理论分析已难以处理，合适的方案还是通过数值算法来求解。

2.2 Fourier 变换

以上几节推导出的波动方程解，均以一系列三角函数的叠加形式出现。然而从 d'Alembert 行波解中了解到，解的形式也可以以完整的周期函数来呈现。这说明两者之间存在一定的必然联系。接下来，将介绍该数学结论的一般化描述，即傅里叶 (Fourier) 变换。

2.2.1 Fourier 级数

首先需要介绍的是 Fourier 级数。与 Taylor 展开类似，对于任意周期函数 $f(t)$ ，一个直观的念头是也希望可以采用某种类似的方式对其进行多项式拟合。

考虑到周期函数的特殊性，其多项式的组成必然也需要用到周期函数。最简单的周期函数即为三角函数。以正弦函数为例，一个完整的包含频率、相位和幅值的正弦函数可以表示为 $A \sin(\omega t + \varphi)$ 。根据前面介绍的两角和差公式，也可以将其展开成 $a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)$ ，其中 $A = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\sin \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $\cos \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ 。此时，可以通过更改角频率 ω 的大小，来构建一系列基础的三角函数，以期最终可以达到拟合任意周期函数的目的。这便是 Fourier 级数的核心思想。



定理2.2(傅里叶(Fourier)级数)

在周期 T 内可积的周期函数 $f(t)$ 可以进行如下三角函数形式的展开:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)] \quad (2.118)$$

其中, 常值分量

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt \quad (2.119)$$

余弦分量的幅值

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt \quad (2.120)$$

正弦分量的幅值

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin(n\omega_0 t) dt \quad (2.121)$$

式中, ω_0 为角频率, 满足 $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$; n 的取值为 $n = 1, 2, 3, \dots$ 。此外, 以上各式积分区间可在一个周期 T 内任选(这里仅采用了对称区间)。



证明 考察形如 $1, \cos(\omega_0 t), \sin(\omega_0 t), \cos(2\omega_0 t), \sin(2\omega_0 t), \dots, \cos(n\omega_0 t), \sin(n\omega_0 t), \dots$ 的一系列函数系, 会发现其中任意两个函数均满足正交性(详见附录I), 即

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} 1 \cdot \cos(n\omega_0 t) dt = 0, \quad \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} 1 \cdot \sin(n\omega_0 t) dt = 0 \\ \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos(m\omega_0 t) \cdot \cos(n\omega_0 t) dt = 0, \quad m \neq n \\ \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin(m\omega_0 t) \cdot \sin(n\omega_0 t) dt = 0, \quad m \neq n \\ \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos(m\omega_0 t) \cdot \sin(n\omega_0 t) dt = 0 \end{array} \right. \quad (2.122)$$

其中, $m = 1, 2, 3, \dots, n = 1, 2, 3, \dots$ 。上式(2.122)的中间两式, 当 $m = n$ 时积分为 $\frac{T}{2}$ 。另外对于上式(2.122)中的后三式需要用到几个积化和差公式, 如下:

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)] \\ \sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)] \\ \cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)] \end{array} \right. \quad (2.123)$$

有了函数系的正交性特征, 则可对公式(2.118)两边进行积分, 得到 a_0 的表达式:

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt \quad (2.124)$$

再对公式(2.118)两边同时乘以 $\cos(n\omega_0 t)$ 后进行积分, 可得到 a_n 的表达式:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt \quad (2.125)$$

最后对公式(2.118)两边同时乘以 $\sin(n\omega_0 t)$ 后进行积分，可得到 b_n 的表达式：

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin(n\omega_0 t) dt \quad (2.126)$$

从以上推导可以看出，若想要进行上述三角函数的展开，只需 $f(t)$ 在周期 T 内满足可积条件即可，且积分区间可在一个周期 T 内任选。

笔记 值得说明的是，上述 Fourier 级数展开的前置条件是不完备的。若要满足 Fourier 级数的逐点收敛性，需要符合狄利克雷 (Dirichlet) 条件。该内容一般包含于数学分析书籍中，这里不做具体论述。由于本书探讨的绝大部分声学信号均符合 Dirichlet 条件，所以这里仅用“周期内可积”来简化描述满足 Fourier 级数展开的条件。

例题 2.3 试分析方波、锯齿波和三角波的 Fourier 级数展开。

解 首先给出方波、锯齿波和三角波的解析表达式，分别用函数 $f_{\text{square}}(t)$ 、 $f_{\text{sawtooth}}(t)$ 和 $f_{\text{triangle}}(t)$ 表示。为简化说明可令振幅为 1，在一个周期 T 内有

$$f_{\text{square}}(t) = \begin{cases} -1, & t \in \left[-\frac{T}{2}, 0\right] \\ 1, & t \in \left[0, \frac{T}{2}\right] \end{cases} \quad (2.127)$$

$$f_{\text{sawtooth}}(t) = \frac{2}{T}t, \quad t \in \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right] \quad (2.128)$$

$$f_{\text{triangle}}(t) = \begin{cases} 1 + \frac{4}{T}t, & t \in \left[-\frac{T}{2}, 0\right] \\ 1 - \frac{4}{T}t, & t \in \left[0, \frac{T}{2}\right] \end{cases} \quad (2.129)$$

注意上述三式中，不必纠结分段函数的间断点处取值如何。在计算 Fourier 级数展开时，是分别对区间内进行积分，所以均可看作是闭区间。

令周期 $T = 2\pi$ （角频率 ω_0 则简化为 1），三者分别的函数图如下图2.9所示：

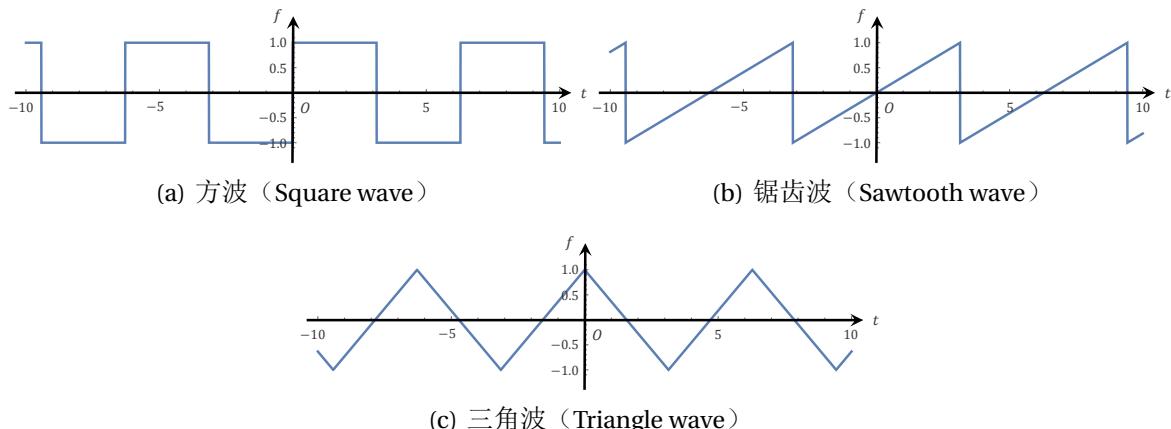


图 2.9：方波 $f_{\text{square}}(t)$ 、锯齿波 $f_{\text{sawtooth}}(t)$ 和三角波 $f_{\text{triangle}}(t)$ 的函数图

首先对 $f_{\text{square}}(t)$ 进行 Fourier 级数展开的求解。根据图2.9中所示的函数性质， $f_{\text{square}}(t)$ 为奇函数，即满足 $f_{\text{square}}(t) = -f_{\text{square}}(-t)$ ，代回 Fourier 级数展开式(2.118)有

$a_n = 0$, 同时 $f_{\text{square}}(t)$ 在一个周期内的积分面积为零, 得到 $a_0 = 0$, 所以 $f_{\text{square}}(t)$ 的 Fourier 级数展开仅存在正弦级数项, 且被积函数为偶函数, 仅需计算周期 T 一半的积分再乘以 2 即可。此时求得:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_{\text{square}}(t) \sin(n\omega_0 t) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f_{\text{square}}(t) \sin(nt) dt \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin(nt) dt = \frac{2}{n\pi} [-\cos(nt)]_0^\pi = \frac{2}{n\pi} [1 - \cos(n\pi)] \end{aligned} \quad (2.130)$$

可以看到, 此时 b_n 的取值与 n 相关, 即

$$b_n = \begin{cases} \frac{4}{n\pi}, & n \text{ 为奇数} \\ 0, & n \text{ 为偶数} \end{cases} \quad (2.131)$$

于是 $f_{\text{square}}(t)$ 的 Fourier 级数展开可表示为如下形式:

$$\begin{aligned} f_{\text{square}}(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(2n-1)\pi} \sin[(2n-1)t] = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin[(2n-1)t]}{2n-1} \\ &= \frac{4}{\pi} \left(\sin t + \frac{1}{3} \sin 3t + \frac{1}{5} \sin 5t + \dots \right) \end{aligned} \quad (2.132)$$

不断增加 Fourier 级数的项数, 可以看到上述表达式所呈现的波形逐渐趋向于 $f_{\text{square}}(t)$ 的形状 (间断点处取值为左极限与右极限的平均值), 如下图 2.10 所示:

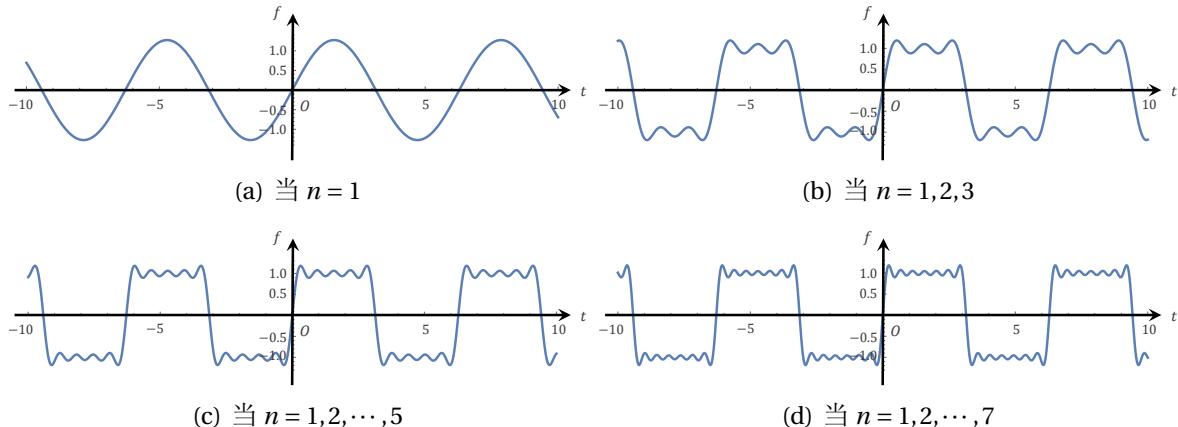


图 2.10: 不同项数下 $f_{\text{square}}(t)$ 的 Fourier 级数展开波形

接下来对 $f_{\text{sawtooth}}(t)$ 进行 Fourier 级数展开的求解。根据图 2.9 中所示的函数性质, $f_{\text{sawtooth}}(t)$ 与 $f_{\text{square}}(t)$ 类似, 也为奇函数, 同时 $f_{\text{sawtooth}}(t)$ 在一个周期内的积分面积也为零, 所以其 Fourier 级数展开也仅存在正弦级数项, 且被积函数也为偶函数, 仅需计算周期 T 一半的积分再乘以 2 即可。此时求得:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_{\text{sawtooth}}(t) \sin(n\omega_0 t) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{1}{\pi} t \sin(nt) dt \\ &= -\frac{2}{n\pi^2} \left[\int_0^\pi t d(\cos nt) \right] = -\frac{2}{n\pi^2} \left[t \cos(nt) \Big|_0^\pi - \int_0^\pi \cos(nt) dt \right] \\ &= -\frac{2}{n\pi^2} \cdot \pi \cos(n\pi) = (-1)^{n+1} \frac{2}{n\pi} \end{aligned} \quad (2.133)$$

上式第二行的推导，用到了微积分中的分部积分法。另外，考虑到此时 $\cos(n\pi)$ 可以替换为 $(-1)^n$ ，所以可以采取最后一步的化简方式。

于是 $f_{\text{sawtooth}}(t)$ 的 Fourier 级数展开可表示为如下形式：

$$f_{\text{sawtooth}}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2}{n\pi} \sin(nt) = \frac{2}{\pi} \left(\sin t - \frac{1}{2} \sin 2t + \frac{1}{3} \sin 3t - \dots \right) \quad (2.134)$$

不断增加 Fourier 级数的项数，可以看到上述表达式所呈现的波形逐渐趋向于 $f_{\text{sawtooth}}(t)$ 的形状（间断点处取值为左极限与右极限的平均值），如下图 2.11 所示：

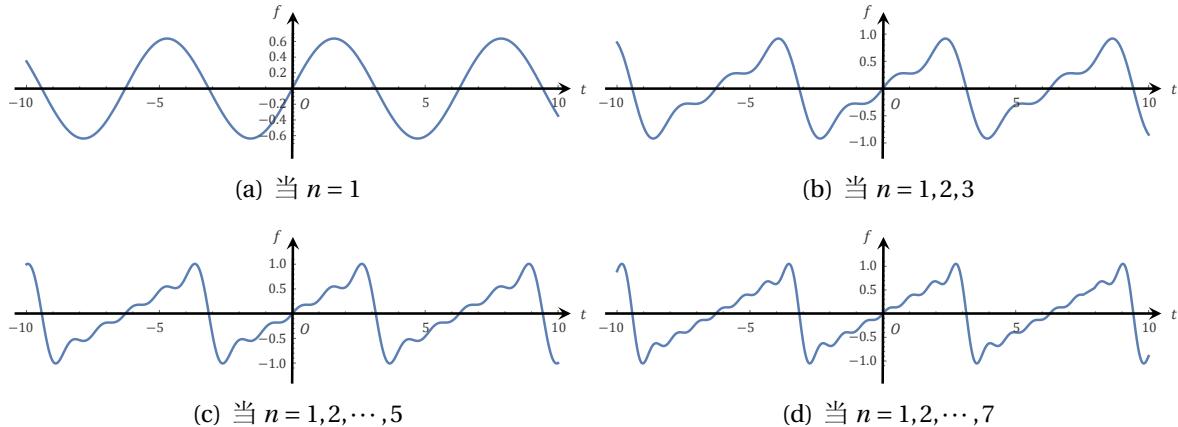


图 2.11：不同项数下 $f_{\text{sawtooth}}(t)$ 的 Fourier 级数展开波形

最后对 $f_{\text{triangle}}(t)$ 进行 Fourier 级数展开的求解。根据图 2.9 中所示的函数性质， $f_{\text{triangle}}(t)$ 为偶函数，即满足 $f_{\text{triangle}}(t) = f_{\text{triangle}}(-t)$ ，代回 Fourier 级数展开式(2.118)有 $b_n = 0$ ，同时 $f_{\text{triangle}}(t)$ 在一个周期内的积分面积也为零，得到 $a_0 = 0$ ，所以 $f_{\text{triangle}}(t)$ 的 Fourier 级数展开仅存在余弦级数项，且也为偶函数，仅需计算周期 T 一半的积分再乘以 2 即可。此时求得：

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_{\text{triangle}}(t) \cos(n\omega_0 t) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f_{\text{triangle}}(t) \cos(nt) dt \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos(nt) dt - \frac{2}{\pi^2} \int_0^\pi 2t \cos(nt) dt = -\frac{4}{n\pi^2} \left[\int_0^\pi t d(\sin nt) \right] \\ &= -\frac{4}{n\pi^2} \left[t \sin(nt) \Big|_0^\pi - \int_0^\pi \sin(nt) dt \right] = \frac{4}{n^2\pi^2} [\cos(n\pi) - 1] \end{aligned} \quad (2.135)$$

上式第二行到第三行的推导，同样用到了微积分中的分部积分法。

可以看到，此时 a_n 的取值也与 n 相关，即

$$a_n = \begin{cases} \frac{8}{n^2\pi^2}, & n \text{ 为奇数} \\ 0, & n \text{ 为偶数} \end{cases} \quad (2.136)$$

于是 $f_{\text{triangle}}(t)$ 的 Fourier 级数展开可表示为如下形式：

$$\begin{aligned} f_{\text{triangle}}(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{(2n-1)^2\pi^2} \cos[(2n-1)t] = \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos[(2n-1)t]}{(2n-1)^2} \\ &= \frac{8}{\pi^2} \left(\cos t + \frac{1}{3^2} \cos 3t + \frac{1}{5^2} \cos 5t + \dots \right) \end{aligned} \quad (2.137)$$

不断增加 Fourier 级数的项数，可以看到上述表达式所呈现的波形逐渐趋向于 $f_{\text{triangle}}(t)$ 的形状，如下图2.12所示：

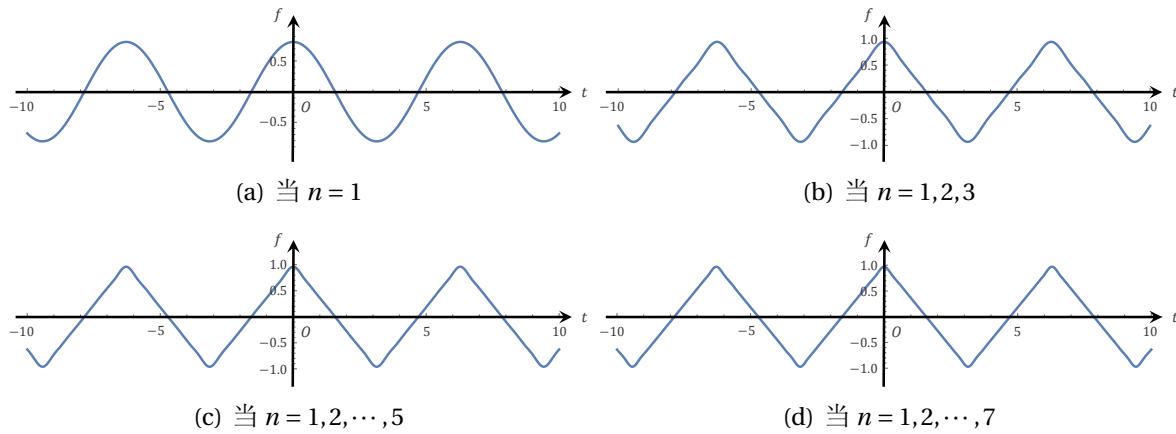


图 2.12: 不同项数下 $f_{\text{triangle}}(t)$ 的 Fourier 级数展开波形

上述 $f_{\text{square}}(t)$ 、 $f_{\text{sawtooth}}(t)$ 和 $f_{\text{triangle}}(t)$ 的无穷级数叠加也可以采用如下图2.13所示的瀑布图方式表示，更加直观：

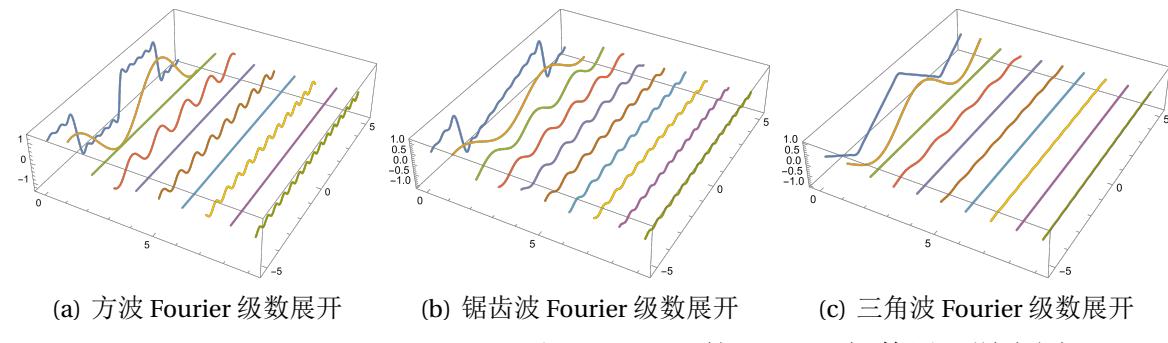


图 2.13: $f_{\text{square}}(t)$ 、 $f_{\text{sawtooth}}(t)$ 和 $f_{\text{triangle}}(t)$ 的 Fourier 级数展开瀑布图

以上例题2.3仅给出了方波、锯齿波和三角波所对应的简化函数表达式。若波形振幅与角频率不做归一化处理，也并不需要重新计算便可直接通过上述结果得到各自最终的 Fourier 级数展开式。对于振幅来说，仅需整体乘以振幅的系数；对于角频率来说，则需要在正弦或余弦级数项中增加角频率系数 ω_0 。事实上，随着波形在选定坐标系中的位置不同（上下左右平移），或进行镜像翻转（锯齿波的锯齿可以“向右”也可以“向左”），其 Fourier 级数展开也会略有不同，但同样不需要重新计算，直接通过函数关系进行替换即可（例如对 y 轴镜像只需用 $f(-t)$ 替换原来的 $f(t)$ ）。不过，无论如何变化，方波、锯齿波和三角波 Fourier 级数展开的整体性质仍然保持不变：

性质 针对 Fourier 级数展开，方波和三角波仅存在奇数频率的无穷级数项，而锯齿波存在全整数频率的无穷级数项。

笔记 有了 Fourier 级数展开的理论表达式，则可以对前面包括弦振动一般解在内的无穷级数项进行进一步的分析与印证。例如在 d'Alembert 行波解章节中，公式(1.223)给出了初始速度分布函数为零的弦振动行波解所满足的前提条件，即初始位移分布函数 $u_0(x)$

是周期为 $2L$ 的奇函数；而在弦振动的一般解章节中，则推导出了形如公式(2.24)的无穷级数表达式。两者可一一对应。

根据上述关于方波和锯齿波 Fourier 级数展开的推导过程可以知道，当周期函数为奇函数时，其 Fourier 级数展开仅存在正弦级数项——与公式(2.24)刚好对应，且其中系数满足 $\frac{\omega_n}{c} = \frac{n\pi}{L}$ ；当 $u_0(x)$ 的周期为 $2L$ 时，也刚好与 Fourier 级数展开式中的 ω_0 对应（由于无穷级数每一项均为周期函数，所以只需算出其基频即 $n=1$ 时的函数周期即可），满足 $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{L}$ 。

也就是说，无论在弦的任意地方进行初始扰动，产生了一个任意的初始位移函数 $u_0(x)$ ，其均满足是周期为 $2L$ 的奇函数，且其无穷级数展开项仅包含正弦级数项。当然此时并不一定所有正弦级数项均会出现，有时候也会缺失掉某些特定的频率，这就需要给出具体的初始位移函数 $u_0(x)$ 的表达式再进行分析。该部分将在后续章节2.4中进行详细介绍。

2.2.2 Fourier 积分

上一节考虑了任意周期函数 $f(t)$ 的 Fourier 级数展开。一个自然的想法即将函数的周期 T 扩展至无穷，此时周期区间 $T \rightarrow (-\infty, \infty)$ ，函数 $f(t)$ 则化为更一般的非周期函数。这便是本节要介绍的 Fourier 积分。

不过当一个周期区间 $T \rightarrow (-\infty, \infty)$ 时，函数 $f(t)$ 将不具备可积条件，而需要推广至微积分中的广义积分（反常积分）进行收敛性的讨论。

性质 可积与绝对可积的性质：

1. 在常义积分，也被称为黎曼（Riemann）积分中，函数可积必定绝对可积，但反之不一定，如区间 $[0,1]$ 上有理数取值为 1，无理数取值为 0 的函数；
2. 在广义积分（反常积分）中，绝对收敛的积分一定收敛（即绝对可积必定可积），但反之不一定，如在 $x=0$ 处存在瑕点的函数 $\frac{\sin x}{x}$ （例题2.4有进一步说明）。

以上性质的具体论述可参阅数学分析相关书籍，这里不做详细证明。

所以，若想将周期函数 $f(t)$ 的 Fourier 级数展开推广至 $(-\infty, \infty)$ 的非周期情形，一般需使用绝对可积作为前置条件（Dirichlet 条件亦使用绝对可积），且积分覆盖整个定义域区间，实际上对 $f(t)$ 提出了更加严苛的要求。

定理 2.3 (Fourier 积分)

在区间 $(-\infty, \infty)$ 内绝对可积的函数 $f(t)$ 可以以连续频谱 ω 的形式进行积分表示：

$$f(t) = \int_0^\infty [A(\omega) \cos \omega t + B(\omega) \sin \omega t] d\omega \quad (2.138)$$

其中，

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t dt \quad (2.139)$$

$$B(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \omega t dt \quad (2.140)$$



证明 首先, 对于定理2.2中 Fourier 级数的表达式和各个参数, 当 $T \rightarrow \infty$ 时, $n\omega_0$ 趋向于连续频谱 ω , $\Delta\omega = (n+1)\omega_0 - n\omega_0 = \omega_0$ 趋向于微元 $d\omega$, 且有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cdots \Delta\omega \xrightarrow{T \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \cdots d\omega \quad (2.141)$$

此时, 若函数 $f(t)$ 在整个 $(-\infty, \infty)$ 内绝对可积, 结合关系式 $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ 可求得:

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 0 \quad (2.142)$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Delta\omega}{\pi} \left[\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt \right] \cos(n\omega_0 t) \\ &\xrightarrow{T \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \underbrace{\left[\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t dt \right]}_{A(\omega)} \cos \omega t d\omega \end{aligned} \quad (2.143)$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega_0 t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Delta\omega}{\pi} \left[\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin(n\omega_0 t) dt \right] \sin(n\omega_0 t) \\ &\xrightarrow{T \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \underbrace{\left[\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \omega t dt \right]}_{B(\omega)} \sin \omega t d\omega \end{aligned} \quad (2.144)$$

以上各式代回 Fourier 级数的表达式(2.118), 则公式(2.138)得证。

例题 2.4 试求解矩形(rect) 函数的 Fourier 积分。

解 首先给出 rect 函数的解析表达式 (τ 为一固定参数):

$$\text{rect}(t) = \begin{cases} \frac{1}{\tau}, & |t| \leq \frac{\tau}{2} \\ 0, & |t| > \frac{\tau}{2} \end{cases} \quad (2.145)$$

对 rect 函数进行全定义域的积分, 会发现结果恒为 1, 满足绝对可积条件:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{rect}(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\text{rect}(t)| dt = \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} \frac{1}{\tau} dt \equiv 1 \quad (2.146)$$

考虑到 $\text{rect}(t)$ 为偶函数, 对于公式(2.140), 得到 $B(\omega) = 0$ 。而

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} \frac{1}{\tau} \cos \omega t dt = \frac{2}{\omega \pi \tau} \sin \omega t \Big|_0^{\frac{\tau}{2}} = \frac{2}{\omega \pi \tau} \sin \frac{\omega \tau}{2} \quad (2.147)$$

代入公式(2.138), 则 rect 函数的 Fourier 积分为

$$\text{rect}(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin(\omega \tau/2) \cos \omega t}{\omega \tau/2} d\omega \quad (2.148)$$

特别对上式令 $\tau = 2$, 取 $t = 0$, 可以得到一个特殊的积分关系式:

$$\text{rect}(0) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \omega}{\omega} d\omega = \frac{1}{2} \Rightarrow \int_0^{\infty} \frac{\sin \omega}{\omega} d\omega = \frac{\pi}{2} \quad (2.149)$$

由于上式中被积函数为偶函数, 若再采用变量替换 $\omega = \pi t$ (也可只移动参数 π , 但做变量替换更能保持函数形式的整体性), 则可得到归一化处理后的积分构造式:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \pi t}{\pi t} dt = 1 \quad (2.150)$$

其中, $\frac{\sin \pi t}{\pi t}$ 被定义为 sinc 函数, 是一个在整个 $(-\infty, \infty)$ 内有值, 满足可积 (积分分为 1) 但绝对可积不收敛 (不做具体证明, 可参阅数学分析书籍) 的特殊函数。

下图 2.14 分别给出了 rect 函数 (取 $\tau = 1$) 和 sinc 函数的函数图:

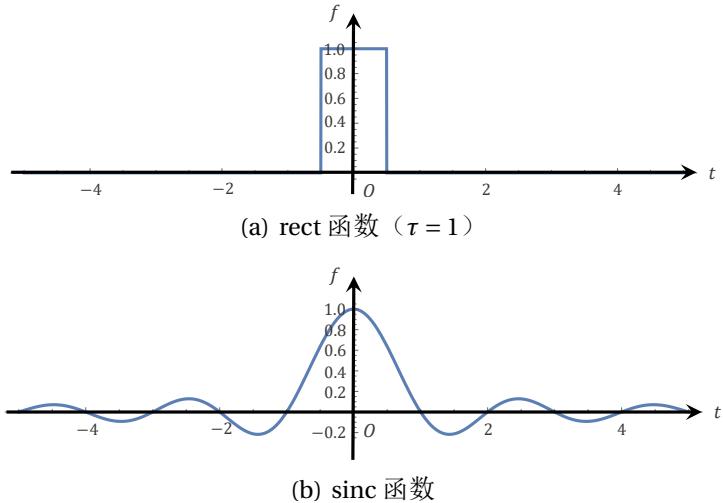


图 2.14: rect 函数和 sinc 函数的函数图

 **笔记** 例题 2.4 中得到 sinc 函数表达式的方式较为巧妙。事实上, 若想要证明 sinc 函数在全区间 $(-\infty, \infty)$ 上的积分为 1, 还有复变函数中的留数定理、构造重积分变换等众多方法。不过借助 Fourier 积分, 可以很好地利用其收敛性的先决条件 (Dirichlet 条件), 证明过程更加完备, 而且思路较为直观。

此外, 尽管 sinc 函数并不满足绝对可积条件, 但仍然可以进行后续介绍的 Fourier 变换 (Fourier 积分复指数展开)。下一节的例题 2.6 将会对此做进一步推导论证。

2.2.3 连续时间 Fourier 变换 (CFT)

Fourier 级数展开给出了任意周期函数可以表示为一系列三角函数叠加的数学结论, 而 Fourier 积分突破周期函数的限制, 推广至非周期函数的积分表达。从原理上看, 这种表述较为清晰, 但整体公式形式偏繁琐, 而且无穷级数和广义积分的表达式也不太容易看出其具体含义。根据前面定理 2.1 介绍的 Euler 公式, 可以进一步化简, 首先将 Fourier 级数的三角展开式以复指数形式表示。

定理 2.4 (Fourier 级数复指数展开)

在周期 T 内可积的周期函数 $f(t)$ 可以进行如下复指数形式的展开:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n\omega_0) e^{jn\omega_0 t} \quad (2.151)$$

其中,

$$F(n\omega_0) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \quad (2.152)$$

式中, ω_0 为角频率, 满足 $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$; n 的取值为 $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$



证明 根据定理2.1介绍的 Euler 公式，可以得到：

$$\begin{cases} \cos n\omega_0 t = \frac{1}{2} (e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t}) \\ \sin n\omega_0 t = -\frac{1}{2} j (e^{jn\omega_0 t} - e^{-jn\omega_0 t}) \end{cases} \quad (2.153)$$

此时公式(2.118)可以改写为

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2} (a_n + jb_n) e^{-jn\omega_0 t} + \frac{1}{2} (a_n - jb_n) e^{jn\omega_0 t} \right] \quad (2.154)$$

代入 a_0, a_n, b_n 的积分计算式可知：

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt \quad (2.155)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (a_n + jb_n) &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) [\cos(n\omega_0 t) + j\sin(n\omega_0 t)] dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{jn\omega_0 t} dt \end{aligned} \quad (2.156)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (a_n - jb_n) &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) [\cos(n\omega_0 t) - j\sin(n\omega_0 t)] dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \end{aligned} \quad (2.157)$$

上述三式之间存在一定规律，可以用一个以基频倍数 $n\omega_0$ 为自变量的复值离散函数 $F(n\omega_0)$ 来统一描述（为作区分，频域函数一般用相对应的大写符号表示），即

$$F(n\omega_0) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \begin{cases} \frac{a_0}{2}, & n = 0 \\ \frac{1}{2} (a_n + jb_n), & n = -1, -2, -3, \dots \\ \frac{1}{2} (a_n - jb_n), & n = 1, 2, 3, \dots \end{cases} \quad (2.158)$$

代回公式(2.154)，则公式(2.151)得证。

定理2.4中的两个公式(2.151)和(2.152)以一种高度浓缩的形式提供了“连续时间域-离散频域”的双向变换，构成了一组 Fourier 变换对。 $F(n\omega_0)$ 可以看作周期函数 $f(t)$ 经展开后的无穷级数系数，也可以看作时间域函数经过变换后的频域函数。

对于 Fourier 级数来说，其直观意义在于可以看到到一系列三角函数叠加后是如何逼近于原本的周期函数；而 Fourier 级数复指数展开更适合考察时间域函数和经变换后频域函数的相关性质。

例题 2.5 试求解周期 rect 函数的 Fourier 级数复指数展开。

解 周期 rect 函数即以 rect 函数为基础，以周期 T 进行循环所构成的周期函数。首先其在区间 $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ 内明显满足可积条件，通过公式(2.152)，再结合公式(2.153)可得：

$$F(n\omega_0) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{1}{\tau} e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{1}{T\tau} \cdot \frac{j}{n\omega_0} e^{-jn\omega_0 t} \Big|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = \frac{1}{T} \frac{\sin(n\omega_0 \tau / 2)}{n\omega_0 \tau / 2} \quad (2.159)$$

可以看到，周期 rect 函数所求得的频域函数 $F(n\omega_0)$ 具有某种 sinc 函数的形态，只

不过是离散形式的。

下图2.15分别给出了周期 rect 函数（取 $\tau = 1, T = 5\tau$ ）和经变换后的频域函数图：

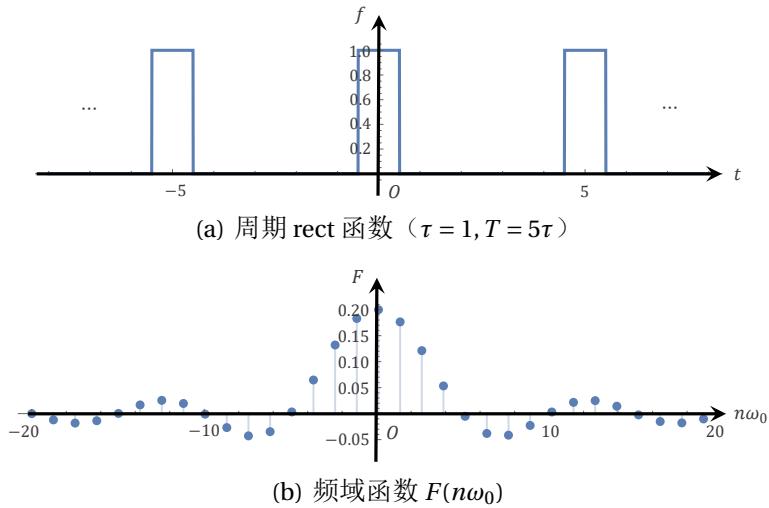


图 2.15: 周期 rect 函数和其频域函数图

通过定理2.4，有了形式更加简洁的 Fourier 级数复指数展开，则可以继续根据 Fourier 积分的思路，将周期函数推广至非周期函数。

定理 2.5 (Fourier 积分复指数展开)

在区间 $(-\infty, \infty)$ 内绝对可积的函数 $f(t)$ 可以以连续频谱 ω 的形式进行如下复指数形式的展开：

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (2.160)$$

其中，

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (2.161)$$

证明 需要说明的是，以上定理也可以通过 Fourier 积分的表达式(2.138)结合定理2.1介绍的 Euler 公式进行推导证明，但计算过程会略显繁琐。

有了定理2.4，这里只需要效仿定理2.3中得到 Fourier 积分的推导思路，将无穷级数项求和将变为连续函数的积分，直接一步得到：

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{\Delta\omega}{2\pi} \left[\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \right] e^{jn\omega_0 t} \xrightarrow{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \right]}_{F(\omega)} e^{j\omega t} d\omega \quad (2.162)$$

笔记 从以上证明过程可以看出，系数 $\frac{1}{2\pi}$ 可以自由选择放在 $f(t)$ 或 $F(\omega)$ 的表达式中。不同于 Fourier 级数与 Fourier 积分的形式，定理2.5将系数置于 $f(t)$ 中，只是约定俗成的一种写法。

定理2.5中的两个公式(2.160)和(2.161)同样提供了“时间域-频域”的双向变换，不过这次是通过非周期函数实现连续时间域到连续频域的转换，也可以反过来实现连续频域到连续时间域的转换。

由于 ω 为三角函数中的角频率，在实际使用中，常采用频率 $f = \frac{\omega}{2\pi}$ 进行替换。将该式代入公式(2.160)和(2.161)中，可最终得到如下通常意义下的 Fourier 变换，也被称为连续时间 Fourier 变换（CFT）。

定义 2.2 (连续时间 Fourier 变换 (CFT))

在 $(-\infty, \infty)$ 范围内满足 Dirichlet 条件的函数，存在如下 Fourier 变换表达式：

$$\begin{cases} F(f) = \mathcal{F}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j2\pi f t} dt \\ f(t) = \mathcal{F}^{-1}\{F(f)\} = \int_{-\infty}^{\infty} F(f) e^{j2\pi f t} df \end{cases} \quad (2.163)$$

其中， $f(t)$ 为函数在时间域上的表达式， $F(f)$ 则为在频域上的表达式； $\mathcal{F}\{f(t)\}$ 被称为 Fourier 正变换， $\mathcal{F}^{-1}\{F(f)\}$ 则为 Fourier 逆变换；变换对可用 $\xleftrightarrow{\text{CFT}}$ 表示。



由于时间域上的函数最常见的即为有限声音信号，满足 $(-\infty, \infty)$ 范围内的绝对可积条件，所以理论上可以通过上述 Fourier 变换将任意时域信号 $f(t)$ 转化为频域信号 $F(f)$ ，对音频信号的频谱进行分析（相关技术细节将会在第4章展开分析）。

考察下此时 $F(f)$ 的物理含义。由于定理2.4中的 $F(n\omega_0)$ 为无量纲的参数（具体参考附录I），而从定理2.4到定义2.2，对于 $f(t)$ 的表达式，只涉及 $F(n\omega_0)$ 到 $F(f)df$ 的变化，即两者量纲相同，所以 $F(f)$ 应当看作是某种“频率密度函数”。

例题 2.6 试证明：rect 函数和 sinc 函数互为 Fourier 变换对。具体来讲，即满足

$$\text{rect}(t) \xleftrightarrow{\text{CFT}} \text{sinc}(\tau f), \quad \text{sinc}(\tau t) \xleftrightarrow{\text{CFT}} \text{rect}(f) \quad (2.164)$$

证明 首先推导时域函数 $\text{rect}(t)$ 的 Fourier 正变换：

$$F(f) = \mathcal{F}\{f(t)\} = \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} \frac{1}{\tau} e^{-j2\pi f t} dt = \frac{\sin(\tau\pi f)}{\tau\pi f} = \text{sinc}(\tau f) \quad (2.165)$$

根据本节 Fourier 变换的推导过程可知，求得了 Fourier 正变换即同时得到了 Fourier 逆变换。这里利用 $\text{sinc}(\tau f)$ 的 Fourier 逆变换做一验证：

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathcal{F}^{-1}\{F(f)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\tau\pi f)}{\tau\pi f} [\cos(2\pi f t) + j \sin(2\pi f t)] df \\ &= 2 \int_0^{\infty} \frac{\sin(\tau\pi f) \cos(2\pi f t)}{\tau\pi f} df \end{aligned} \quad (2.166)$$

上式最后一步的推导，用到了被积函数中奇函数与偶函数的积分特性。

若对公式(2.166)进行变量替换 $f = \frac{\omega}{2\pi}$ ，则可得到与公式(2.148)完全一样的 rect 函数 Fourier 积分表达式。

接下来推导时域函数 $\text{sinc}(\tau t)$ 的 Fourier 正变换：

$$F(f) = \mathcal{F}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\tau\pi t)}{\tau\pi t} [\cos(2\pi f t) - j \sin(2\pi f t)] dt \quad (2.167)$$

可以看到，虽然上式与公式(2.166)略有区别，但结合被积函数中相同的积分特性，还是会得到形式相同的积分结果（注意此时参数 f 与 t 进行了替换）。

频域函数 $\text{rect}(f)$ 的 Fourier 逆变换证明从略，计算过程与公式(2.165)类似。

以上巧合，主要源于函数本身为偶函数，以及 $e^{\pm j2\pi f t}$ 特殊的积分特性。



进一步，考虑到周期函数其实并不符合定义2.2的 Fourier 变换条件（在 $(-\infty, \infty)$ 范围内积分不收敛），尽管按照定理2.4的 Fourier 级数复指数展开可以对周期函数进行频域求解，但最好还是将其改写为类似定义2.2的统一变换形式。

引理 2.2 (周期函数的 Fourier 变换)

在周期 T 内可积的周期函数 $f(t)$ ，存在如下 Fourier 变换表达式：

$$F(f) = \mathcal{F}\{f(t)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n) \delta(f - nf_0) \quad (2.168)$$

其中，

$$F(n) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-j2\pi n f_0 t} dt \quad (2.169)$$

δ 函数为前述章节定义1.6介绍的 Dirac 函数； f_0 为周期函数的频率，满足 $f_0 = \frac{1}{T}$ ；
 n 的取值为 $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$



证明 结合 Dirac 函数的性质公式(1.153)，计算 $\delta(t)/\delta(f)$ 的 Fourier 正/逆变换（满足绝对可积条件），可以得到如下特殊的 Fourier 变换对：

$$\delta(t) \xrightarrow{\text{CFT}} 1, \quad 1 \xrightarrow{\text{CFT}} \delta(f) \quad (2.170)$$

同时还可从理论上给出 Dirac 函数一种特殊的积分定义（ τ 为任意积分参数）：

$$\delta(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm j2\pi \tau x} d\tau \quad (2.171)$$

根据定理2.4的 Fourier 级数复指数展开，有

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n\omega_0) e^{jn\omega_0 t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n) e^{j2\pi n f_0 t} \quad (2.172)$$

其中，

$$F(n) = F(n\omega_0) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-j n \omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-j 2\pi n f_0 t} dt \quad (2.173)$$

此时，直接对周期函数 $f(t)$ 进行 Fourier 变换，结合公式(2.171)的形式，可将本不符合条件的函数变换为利用 Dirac 函数描述的形式：

$$\begin{aligned} F(f) &= \mathcal{F}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n) e^{j2\pi n f_0 t} \right] e^{-j2\pi f t} dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n) \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi(f-nf_0)t} dt \right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n) \delta(f - nf_0) \end{aligned} \quad (2.174)$$

以上推导还可进一步延伸归纳出如下的 Fourier 变换对：

$$e^{j2\pi f_0 t} \xrightarrow{\text{CFT}} \delta(f - f_0), \quad \delta(t - t_0) \xrightarrow{\text{CFT}} e^{-j2\pi t_0 f} \quad (2.175)$$

例题 2.7 试求解周期 rect 函数的 Fourier 变换表达式，并分析其与例题2.5的关系。

解 根据引理2.2，先计算 $F(n)$ ，形式与公式(2.159)相同（只需将 ω_0 转为 f_0 ），最终有

$$F(f) = \mathcal{F}\{f(t)\} = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\pi n f_0 \tau)}{\pi n f_0 \tau} \cdot \delta(f - nf_0) = f_0 \operatorname{sinc}(\tau f) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - nf_0) \quad (2.176)$$

即 $F(f)$ 可表示为经过一串周期 Dirac 函数“抽样”后的某种 sinc 函数。对 $F(f)$ 的每一项进行积分，刚好等于例题2.5中 $F(n\omega_0)$ 的对应项，符合其“频率密度”的概念。

② **笔记** 根据以上分析, sinc 函数和 1 其实均不满足全定义域的绝对可积条件, 这说明 Dirichlet 条件仅是 Fourier 变换的充分非必要条件。不过这种特殊案例是极少的。

2.3 乐音体系的构成

讨论到这里, 其实都还是站在理论的角度, 对振动现象作出的解释。当具体到“声音”的本质时, 会发现从“振动”到“声音”之间还存在一条相当大的鸿沟。原因在于, 振动即是振动, 这种外界的运动无法“自发”产生声音。

所以声音并非产生于外界, 其诞生源于外界物体的振动带动周围空气的振动, 这种振动形式传递到人耳, 耳膜振动, 再由耳神经传递至大脑, 大脑将这种刺激最终转化为“声音”。即声音其实产生于人类内心, 是一种对外界干扰现象的心理反应。

2.3.1 声音的物理表现

经验上来说, 声波的物理特性与人对于声音特质的理解具有一定联系。宏观上看, 一般会认为振动频率越大的声波, 其“音调”越高; 而振动越剧烈的声波, 其“音量”越大。原因在于, 振动频率越大, 空气振动挤压耳膜越“频繁”, 人脑对于这种振动模式的理解也会表现为越“激烈”, 转化为一种“认知”即为音调越高; 而振动越剧烈的声波, 即波形的振动幅度越大, 耳膜需要承担振幅更大的振动, 人脑的理解则会表现出一种“觉得声音响度大”的认知。

尽管上述描述具有一定道理, 但其实对于频率和振幅来说, 其物理表现与人的心理反应并不都是简单的一对一关系。例如根据章节1.7.3的描述, 音量(响度)就同时与振动的振幅和频率相关(当然主要影响因素还是振幅); 而对于音高来说, 则需要做进一步说明。

首先, 人的听觉能力是有限的, 并不是所有的振动都可以转换为人对于声音的认知。对于响度来说, 根据章节1.7.3的描述, 0 dB 即为最低听觉阈值; 而对于频率来说, 也具有经实验测量的参考数值: 人的可听范围大致在 20 Hz – 20 kHz 之间。

假设一个振动模型传递到人耳时在可听响度/频率范围内, 那么周期性的波形更容易让人脑产生“规律性”的理解, 从而形成“固定音高”的认知。由于所谓非周期性信号一般也是时域“有限”的, 此时也可通过循环该非周期性信号达到合成周期性信号的目的, 从而形成固定音高。

注意这里的周期性波形必须是“稳定”的周期性波形, 动态变化的波形也较难形成固定音高的认知。

2.3.2 乐音的频率关系

由 Fourier 变换可知, 任意周期性信号其实是一系列不同频率的基本三角函数波形叠加而成。其基础频率为 ω_0 , 剩余的频率分别为 ω_0 的正整数倍(这里为方便描述,



采用三角函数的角频率来指代频率)。所以人对于“固定音高”的认识，其实是以基础频率 ω_0 为准的认识，而不同频率的分布则将影响声音的“特质”，即音色。

通常情况下，除了基础频率的波形外，剩余频率的波形可以称为“谐波”；另外也可以用“泛音列”的概念来描述声音的频率分布，如基础频率的波形为第一泛音，2倍于基础频率的波形为第二泛音，3倍于基础频率的波形为第三泛音，以此类推。下表2.1描述了以220 Hz为基础频率的声音，其频率分布的情形：

表 2.1: 220 Hz 为基频的声音频率分布

	基波（第一泛音）	谐波（第二泛音、第三泛音、…）			
倍数关系	1	2	3	…	n
频率大小	220 Hz	440 Hz	660 Hz	…	$n \times 220$ Hz

性质 根据上述分析，总结下声音振幅与频率的物理性质：

- 声波的振幅决定了声音的音量，0 dB为最低的可听阈值；
- 周期性（即固定频率）的声波形成固定的音高；
- 人的听觉频率范围大体为20 Hz–20 kHz；
- 声波的基础频率决定了声音的音高；
- 声波的频率分布决定了声音的音色。

既然已经明确周期性的声音均可以拆解为离散的“基波+谐波”组合，接下来可以进一步考虑“乐音”是如何构成的。首先频率分布稳定的周期性声音是必须的，这样才能形成固定音高；其次，尽管不同的周期性波形对人来说其音高感受不尽相同，但由于波形频率分布的关系，必然存在某些具有固定音高声音（后面用“单音”来描述）的组合同时发声也具备“和谐”的特性。

例如，本身基础频率就为正整数倍关系的单音放在一起必然和谐，因为其泛音列均呈现出“包含关系”。基础频率为220 Hz的单音，其所有泛音均包含在基础频率为110 Hz的单音之中，如下表2.2所示：

表 2.2: 分别以110 Hz与220 Hz为基频的单音包含关系

	基波（第一泛音）	谐波（第二泛音、第三泛音、…）			
倍数关系	1	2	3	…	n
频率大小	110 Hz	220 Hz	330 Hz	…	$n \times 110$ Hz
频率大小	220 Hz	440 Hz	660 Hz	…	$n \times 220$ Hz

接下来，考虑基础频率为非正整数倍的情形。很明显，非正整数倍情况下，不同的单音叠加在一起，无法像正整数倍一样那么“和谐”，但依旧会存在某些泛音频率相等的情况。例如，基础频率为220 Hz的单音，其第三泛音就与基础频率为330 Hz的单音的第二泛音完全相同，频率均为660 Hz。此时两个单音在一起，也存在一定程度的“和谐”。而330 Hz是220 Hz的 $\frac{3}{2}$ 倍，不是正整数倍，而是介于1倍和2倍之间。

将以上发现的规律做一般化处理，以基频为k Hz的单音作为基准，展示不同正整数倍频率为基频的单音频率分布关系，会产生一个 $m \times n$ 的矩阵，如下表2.3所示：



表 2.3: 以不同正整数倍频率为基频的单音频率分布关系

	基波	谐波			
倍数关系	1	2	3	...	n
k Hz 为基频的单音	k Hz	2k Hz	3k Hz	...	$n \times k$ Hz
2k Hz 为基频的单音	2k Hz	4k Hz	6k Hz	...	$n \times 2k$ Hz
3k Hz 为基频的单音	3k Hz	6k Hz	9k Hz	...	$n \times 3k$ Hz
...
$m \times k$ Hz 为基频的单音	$m \times k$ Hz	$m \times 2k$ Hz	$m \times 3k$ Hz	...	$m \times n \times k$ Hz

此时可以得到一个普适性的结论，即基频为 $m \times k$ Hz 的单音，其第 n 泛音与基频为 $n \times k$ Hz 的单音的第 m 泛音完全相同，频率均为 $m \times n \times k$ Hz，也就是说此种情况下，总可以通过泛音列寻找两个单音频率的最小公倍数。而 $n \times k$ Hz 是 $m \times k$ Hz 的 $\frac{n}{m}$ 倍，其中 $m = 1, 2, 3, \dots, n = 1, 2, 3, \dots$ 。

换种说法，若约定 $m < n$ ，则可以在基频为 k Hz 之后插入一个基频为 $\frac{n}{m} \times k$ Hz = $n \times k$ Hz 的单音，两者具备一定程度的“和谐”。此时的比值 $\frac{n}{m}$ 依照泛音列的顺序可分为 $\frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \dots$ 。由于对于人脑来说，是以基频作为基准固定音高，即更容易关注与基频相近的泛音，所以该比值序列，其“和谐”程度依次递减。

总结来讲，首先确定单音为固定音高，然后若想要让多个单音的合奏达到“和谐”，需要让单音之间满足特定的比值关系。最完美的比值即为正整数倍 $1, 2, 3, \dots$ ，其次是由正数组成的分式 $\frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \dots$ 。这便是音乐中乐音体系构建需要具备的频率关系。

2.3.3 十二平均律

有了乐音的频率关系作为理论基础，则可以开始考虑如何构建合适的单音体系，来形成真正的“音乐”。现在由于发现满足一定比值关系的单音，互相之间具备“和谐”的可能，所以需要尽可能将这些单音囊括在所建立的单音体系中。

首先，频率关系满足正整数倍 $1, 2, 3, \dots$ 的单音自然要优先考虑在内，然而这还远远不够，还需要进一步在这些倍频中插入更多的单音，这样才能最大化丰富声音的体系。由于最小的倍频关系是 2 倍，所以这里可以以基础频率为 k Hz 的单音作为起始音，2 倍为公比，构建出一条单音的排列方式¹，频率依次为： $k, 2k, 4k, \dots$ 。然后，再在其中进行插值，形成最终的单音排列方式。以最小的倍数关系 2 倍来构建的原因在于，这样才能保证音与音之间的频率差距最小，此时插值才能够选取出最密集的单音。

接下来考虑如何插值，频率关系满足 $\frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \dots$ 这些分式的单音自然可以考虑在内，但这些分式插入倍频关系的数列中，将会破坏原有的“等比数列”格局。例如，将频率为 $\frac{3}{2}k$ 的单音插入频率为 k 和 $2k$ 的单音之间，新形成的数列并不是等比数列，前者比值为 $\frac{3}{2}$ ，后者比值为 $\frac{4}{3}$ 。

为何需要维持频率的等比数列关系呢？这涉及到音乐当中的“升降调”（术语解释见章节3.1）难题。一段旋律能够自由升降调，需要满足：

¹频率满足倍频关系的单音才可能“和谐”，所以需要构建“等比数列”，而非“等差数列”。

1. 旋律当中的每个单音之间“间隔”保持不变，即频率的倍数关系保持不变；
2. 所有单音可以以“打包”的方式整体升高或降低一个统一的频率倍数。

假设此时构建出了一条非等比数列的单音排列方式，所有的单音都在这里了，只能以这些音来写作一条旋律，若想要升降调，也就是将这一段特殊的单音排列在不改变音与音之间频率倍数关系的前提下整体挪动一个或几个单音的距离，会发现某些音存在“对不齐”的情况。

下图2.16展示了将频率为 $\frac{3}{2}k$ 的单音插入频率为 k 和 $2k$ 的单音之间形成的单音排列方式，在升调升高一个音时的情形。由于音与音之间的频率倍数关系不均等，导致在升调后会出现许多原有单音排列中不存在的音。此时若想要“强行”升调，则只能近似用原有的音来替代现在升调后旋律中出现的新音，这将破坏原有旋律的规律性，使得某些音听上去极度不协和。

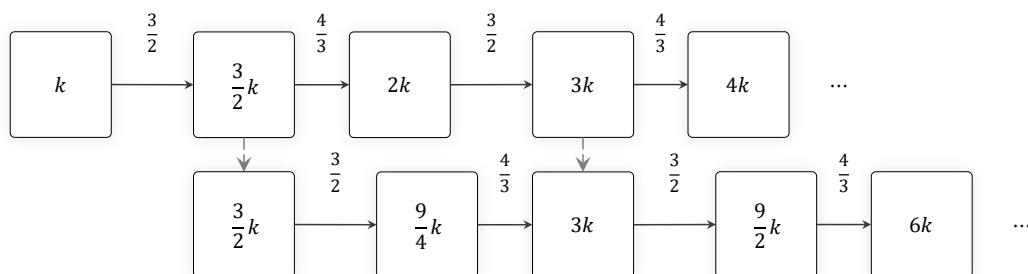


图 2.16: 频率倍数关系不均等的单音序列会遇上升降调问题

若想要单音的排列方式完全保持为等比数列，则需要一个固定的计算格式。例如在频率为 k 和 $2k$ 的单音间隔之间按倍数关系切分成三等分，令公比为 x ，则等比数列为 $k, k \cdot x, k \cdot x^2, k \cdot x^3$ 。此时根据 $k \cdot x^3 = 2k$ ，可求得公比的具体数值为 $2^{\frac{1}{3}}$ 。这样构建出的单音排列方式将不会存在上述的升降调问题，而且可以进一步按照同样的等比数列格式将单音排列续写下去，如下图2.17所示：

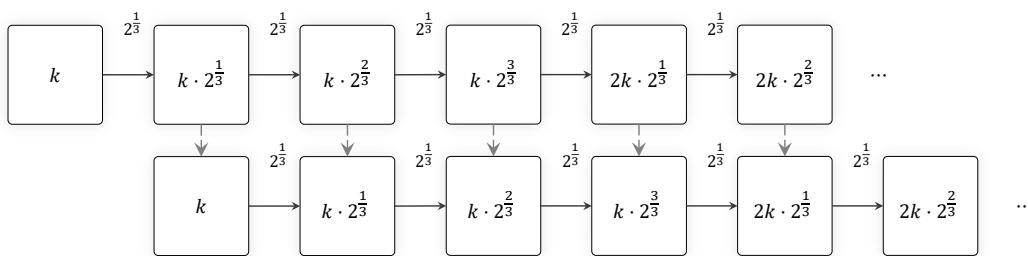


图 2.17: 频率倍数关系相等的单音序列可以任意升降调

笔记 这里为展示方便，用“距离的长短”来示意频率倍数关系是否相等。这与一般的长度丈量关系并不相同（常规来说，等距意味着是等差数列），需要注意区分。

所以可以看到，既要声音满足和谐关系，又要旋律能够任意升降调，这两者并不可同时兼得。一个可行的方案即为采用迂回的方式，按等比数列的格式在频率为 k 和 $2k$ 的单音间隔中不断增大等分的数量，让插入的单音频率逐渐趋近于 $\frac{3}{2}k, \frac{4}{3}k, \frac{5}{4}k, \dots$ 这

些“和谐”的声音。这样既可满足升降调的需求，同时可以让新产生的单音“近似”满足和谐关系。

将前述等比数列的计算格式一般化，当在 k 和 $2k$ 的单音之间按相等的频率倍数等分 N 份，则可求得此时公比为 $2^{\frac{1}{N}}$ ，每一个单音的频率为 $k \cdot 2^{\frac{i}{N}}$, $i = 0, 1, \dots, N$ 。逐渐增大 N 的取值，可以看到这些频率为无理数组成的单音与“和谐”声音之间拟合程度的变化趋势。这里选取了 $N = 5, 10, 12, 19$ 四种不同的情形，同时为简化令 $k=1$ ，如下图2.18所示：

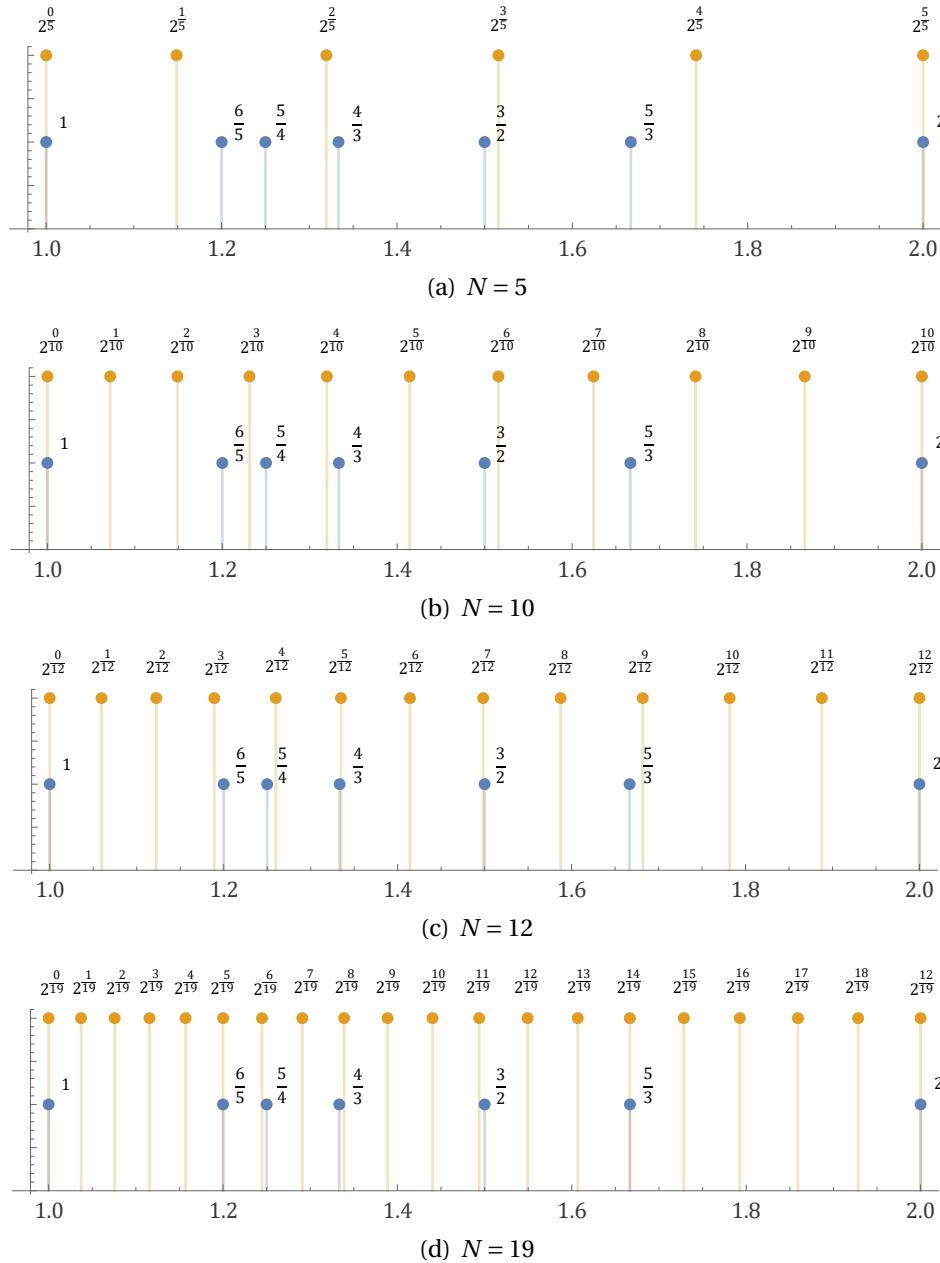


图 2.18: 不同样分情形下的单音排列与和谐声音的拟合关系

可以看到，随着 N 取值逐渐增大，新形成的单音排列与由正整数分式组成的和谐声音的拟合可能也将逐渐增大。尽管从数学上讲，自然是细分的越多越好越可能拟合，但从上图2.18(c)和图2.18(d)中可以发现，对于 $\frac{3}{2}$ 和 $\frac{4}{3}$ 这两个较为靠前的和谐单音来说，

按频率倍数关系等分12份居然比等分19份的拟合程度更好；另外，从人的听觉上讲，也并不能无限制去细分音与音之间的间隔。为了保证新形成的单音排列，每一个音都拥有听觉上独立的音高，也需要考虑每个单音之间的频率差异。

对于上述单音排列规律的探讨由来已久，随着对音律研究的逐渐深入，也诞生了诸多音律排列方式，例如中国古代的三分损益法和西方的五度相生律，即是通过 $\frac{3}{2}$ 的频率比值插值而成（尽管两者的具体操作细节会略有不同）；纯率则是允许更多不同正整数倍频率的分式进行插值；而十二平均律是相对较为圆满可同时解决和谐与升降调问题的方案，还能够保证音与音之间具有一定的频率差异。十二平均律也是从古典和声时代起逐渐约定俗成的定律范式，一直延续到现代音乐，也未曾改变，足以说明这种定律方式的优越之处。

下表2.4总结了十二平均律中一个两倍频率关系内不同间隔的单音频率之间相对于纯率中频率比值的对应关系及其误差。

表 2.4: 十二平均律中单音的间隔与纯比值的对应关系

声音的和谐程度	单音的间隔个数	拟合的纯率频率比值	误差百分比
完全和谐	0	1:1	0.0%
	12	1:2	0.0%
和谐	7	2:3	-0.1%
	5	3:4	+0.1%
不完全和谐	4	4:5	+0.8%
	9	3:5	+0.9%
	3	5:6	-0.9%
	8	5:8	-0.8%
不和谐	10	4:7	+1.8%
	2	8:9	-0.2%
	6	5:7	+1.0%
	11	8:15	+0.7%
	1	15:16	-0.7%

下图2.19展示了按键排列规律较为明显的钢琴键盘与十二平均律的对应关系。

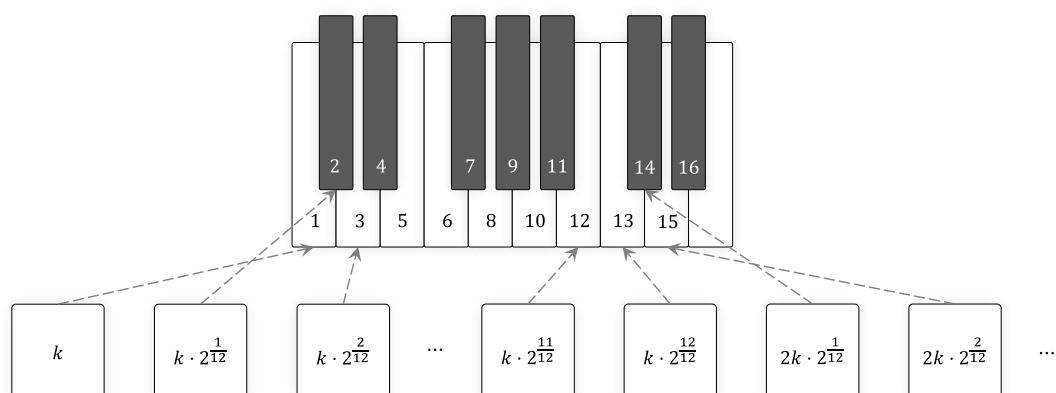


图 2.19: 钢琴键盘与十二平均律的对应关系

十二平均律是具有划时代意义的科学发现。正是因为有了这种较为完善的定律方式作为基石，才为现代音乐如此绚烂丰富的声音色彩提供了可能。据史料记载，第一个完整阐述导出十二平均律并留存有著作问世的人是我国明朝的朱载堉。在那个科学衰微思想蒙昧的年代，朱载堉凭借着一把算盘利用珠算开方得到了十二平均律中公比的具体数值。作为明太祖八世孙，明朝郑藩的第五代世子，尽管在音乐领域作出了极其伟大的科学贡献，却并未像明朝历史上其他名垂青史的人物般耀眼，而是在很长一段时间里，其著作都是束之高阁，无人问津。

古往今来，人人都离不开音乐，可人人也都不重视音乐，视音乐为“靡靡之音”。搞懂音乐既不能加官进爵，也无法腰缠万贯。其实从前述关于十二平均律的探讨可以看到，其思想动机较为直接，推导过程也并不复杂。也许该思想的萌芽诞生于更早先的年代也未尝可知，但在那时钻研下去并不知有何意义，就算真的一意孤行，也极难通过当时现有的数学手段实现对于 $2^{\frac{1}{12}}$ 的计算，更别说如朱载堉般著书立说了。所以十二平均律的科学发现极其难得且珍贵。

 **笔记** 尽管十二平均律的定律方法早已成为范式，但其实这些音都不是“完美和谐”的，而是“近似和谐”。正是由于对十二平均律的长久“浸染”，导致人耳已经顺从了这种“不完美”的声音，“自我欺骗”将其视作“乐音”。

除此以外，对于更多等分的平均律探索在现代音乐里也颇具趣味。例如十九平均律就可以以微小的误差提供适应古典和声的声音²以外，还增加了一些高度陌生的微分音（指代比十二平均律频率间隔更小的单音），但这些微分音所近似的频率比包含的正整数也基本都在15以下，所以十九平均律从理论上可以通过增加不同音的组合提供更加丰富的和声，增加和弦色彩的可能性，对探索现代音乐不同的声音具有深远意义。只是对于绝大多数习惯十二平均律听感的人来说，十九平均律的声音会略显“怪异”，所以这些尝试仍尚处于实验阶段，也许未来某一天会被大众所广泛接受，也许永远不会。

2.4 弦乐器的声学解释

作为人类文明的瑰宝，古典音乐时期可谓大师云集、名作不断，这当然与集结了人类智慧之结晶所创造出的各类繁复的原声乐器密不可分。事实上，很难讲到底是先有了本书前述那些繁琐复杂的理论知识积淀后才做出的这些原声乐器，还是通过一代代匠人的实践经验积累制作而出，理论知识只是辅助；但不论如何，现在若已经提前具备了如此多声学相关的理论知识，对原声乐器本身将会有更加透彻的理解和全新的解读视角。

以本节所介绍的弦乐器为例，前面公式(2.18)已经给出了张紧且两端固定的弦在任意初始情况下进行振动所产生的波形数学描述，理论上可以适用于任意弦乐器的分析。无论初始状态下对弦做任意的小扰动，都将产生一系列满足基础三角函数的驻波

²即传统乐理中的do re mi fa sol la si，后续下一章节会进行详细介绍。

叠加，即弦上每一点单一模态的振动状态均完全相同（只是幅值不同），且不同模态的频率呈现倍频关系。考虑到人对于音高的认识主要与波形成的稳定频率有关，所以不管弦如何振动，均可以形成固定音高。更进一步，可以通过将公式(2.18)中的 x 视为常数，得到弦乐器振动频率 f_{string} 的具体数学表达式，也被称为梅森（Mersenne）公式：

$$f_{\text{string}} = \frac{1}{T} = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{n}{2L}c = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{T}{\rho}}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.177)$$

上式(2.177)中用到了角频率 ω_n 与弦长 L 之间的关系式(2.15)，以及弦振动中波速 c 的推导结果(1.45)。这个数学结论有意思的地方在于，可以从理论上证实，弦的振动频率仅仅与弦长 L 、张力 T ，以及弦的密度 ρ 有关，而与常规认识中弦的粗细无关。所以弦乐器的低音弦才以缠绕的方式进行加粗，就是为了只改变琴弦的密度，减少由于琴弦粗细变化带来的弯曲刚度影响，尽可能保持琴弦柔韧的力学特征。

考虑到公式(2.18)中还存在两个未知参数 a_n 和 b_n ，而若想要导出具体的 a_n 和 b_n 数值，还需要给出弦的初始位移与速度状态。根据弦乐器的传统分类，可以分别从拨弦乐器、拉弦乐器，和击弦乐器三大类出发，分别进行论述。

2.4.1 拨弦乐器

拨弦乐器的代表：吉他、竖琴、古筝、琵琶、箜篌等。

拨弦乐器通过手指的弹拨进行演奏。由于手指拨弦后会迅速离开琴弦，所以琴弦的振动会随着空气阻力的影响逐渐减缓，第一下最强的振动将会形成一个非常明显的“音头”，这也是拨弦乐器最大的音色特点。

此时拨弦而未放开时所形成的琴弦状态，即可用前面章节提到的初始位移分布函数 $u_0(x)$ 进行描述，而此刻的初始速度分布函数 $v_0(x)$ 则为零。

该状态下可以直接采用前述公式(2.22)进行后续分析。根据公式(2.22)可知，初始位移分布函数 $u_0(x)$ 可以通过令 $u(x, t)$ 中的 $t=0$ 得到，即有

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = u_0(x) \quad (2.178)$$

可以看到，此时若能给出具体的 $u_0(x)$ 表达式，则唯一的未知参数 a_n 可解 ($b_n = 0$)，最终可导出该初始扰动状态下琴弦具体的波动方程定解。

根据拨弦的动作，可以将此时弦的初始位移状态简化描述成一个折线方程，如下图2.20所示：

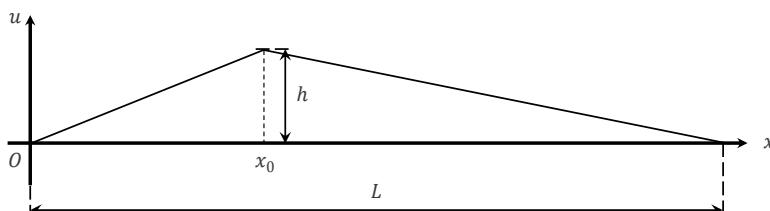


图 2.20：拨弦乐器的初始位移状态

上图以弦长 L 方向为 x 轴，垂直方向为 u 轴建立二维坐标系。拉弦的位置为 x_0 处，

h 表示通过手指拉弦后该点与原来位置之间的距离，则此时可以给出该初始状态下折线方程的解析表达式：

$$u_0(x) = \begin{cases} \frac{h}{x_0}x, & x \in [0, x_0] \\ \frac{h}{L-x_0}(L-x), & x \in [x_0, L] \end{cases} \quad (2.179)$$

 **笔记** 根据前面公式(1.223)的描述，可知初始位移分布函数 $u_0(x)$ 为周期为 $2L$ 的周期函数。所以这里可以看作只给出了“右半边” $u_0(x)$ 的表达式，而“左半边”只需要按照奇函数定义补全即可。

对于公式(2.178)来说，可以借鉴 Fourier 级数证明中的分析思路，对其两边同时乘以 $\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$ ，并在区间 $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ 上进行积分（其中 $T=2L$ ），此时根据三角函数系的正交性特征，即公式(2.122)，可给出 a_n 的求解表达式：

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L u_0(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \quad (2.180)$$

本质上来说，由于初始位移分布函数 $u_0(x)$ 就是一个周期函数（周期为 $2L$ ），所以可以利用 Fourier 级数展开成无穷级数的形式，即公式(2.178)。而其中的参数 a_n 也与 Fourier 级数中的参数类似（这里的 a_n 对应 Fourier 级数公式(2.118)中的 b_n ）。

代入初始位移分布函数 $u_0(x)$ 的具体表达式，则可求得 a_n 的数值。

由于公式(2.179)给出的形式不太容易看出规律（ x_0 为弦上任意位置），这里可以考虑将 x_0 固定在弦上特定的位置，例如弦长的 $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$ 倍数处，即按照多等分的方式来确定手指拨弦的具体位置，进一步考察在弦上不同位置处进行拨弦，对所发出声音的影响。

此时 x_0 可表示为

$$x_0 = \frac{L}{k}, \quad k = 2, 3, 4, \dots \quad (2.181)$$

公式(2.179)相应变化为

$$u_0(x) = \begin{cases} \frac{kh}{L}x, & x \in [0, x_0] \\ \frac{kh}{(k-1)}\left(1 - \frac{x}{L}\right), & x \in [x_0, L] \end{cases} \quad (2.182)$$

注意到此时 a_n 的求解表达式(2.180)中，被积函数里 $u_0(x)$ 和 $\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$ 在区间 $[-L, L]$ 上均为奇函数，所以被积函数整体为偶函数，故可以简化运算，只计算一半的积分即可，如下：

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L u_0(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx = \frac{2}{L} \int_0^L u_0(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \quad (2.183)$$

随后，将 $u_0(x)$ 的表达式(2.182)代入公式(2.180)中可得：

$$a_n = \frac{2}{L} \left[\int_0^{\frac{L}{k}} \frac{kh}{L}x \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx + \int_{\frac{L}{k}}^L \frac{kh}{k-1} \left(1 - \frac{x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \right] \quad (2.184)$$

对上式进一步展开并整理成三项：

$$a_n = a_n^{(1)} + a_n^{(2)} + a_n^{(3)} \quad (2.185)$$

其中,

$$\begin{aligned} a_n^{(1)} &= \frac{2kh}{L^2} \int_0^{\frac{L}{k}} x \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \\ a_0^{(2)} &= \frac{2kh}{(k-1)L} \int_{\frac{L}{k}}^L \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \\ a_0^{(3)} &= -\frac{2kh}{(k-1)L^2} \int_{\frac{L}{k}}^L x \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \end{aligned} \quad (2.186)$$

第二项 $a_n^{(2)}$ 可直接求得:

$$\begin{aligned} a_n^{(2)} &= \frac{2kh}{(k-1)L} \int_{\frac{L}{k}}^L \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx = -\frac{2kh}{(k-1)L} \cdot \frac{L}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \Big|_{\frac{L}{k}}^L \\ &= \frac{2kh}{(k-1)n\pi} \left[\cos\left(\frac{n\pi}{k}\right) - \cos(n\pi) \right] \end{aligned} \quad (2.187)$$

第一项 $a_n^{(1)}$ 和第三项 $a_n^{(3)}$ 则需要用到微积分中的分部积分法:

$$\begin{aligned} a_n^{(1)} &= \frac{2kh}{L^2} \int_0^{\frac{L}{k}} x \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx = -\frac{2kh}{L^2} \cdot \frac{L}{n\pi} \int_0^{\frac{L}{k}} x d \left[\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right] \\ &= -\frac{2kh}{n\pi L} \left[x \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \Big|_0^{\frac{L}{k}} - \int_0^{\frac{L}{k}} \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \right] \\ &= -\frac{2kh}{n\pi L} \left[\frac{L}{k} \cos\left(\frac{n\pi}{k}\right) - \frac{L}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \Big|_0^{\frac{L}{k}} \right] \\ &= -\frac{2h}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi}{k}\right) + \frac{2kh}{n^2\pi^2} \sin\left(\frac{n\pi}{k}\right) \end{aligned} \quad (2.188)$$

$$\begin{aligned} a_n^{(3)} &= -\frac{2kh}{(k-1)L^2} \int_{\frac{L}{k}}^L x \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx = \frac{2kh}{(k-1)L^2} \cdot \frac{L}{n\pi} \int_{\frac{L}{k}}^L x d \left[\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right] \\ &= \frac{2kh}{(k-1)n\pi L} \left[x \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \Big|_{\frac{L}{k}}^L - \int_{\frac{L}{k}}^L \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \right] \\ &= \frac{2kh}{(k-1)n\pi L} \left[L \cos(n\pi) - \frac{L}{k} \cos\left(\frac{n\pi}{k}\right) - \frac{L}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \Big|_{\frac{L}{k}}^L \right] \\ &= \frac{2kh}{(k-1)n\pi} \cos(n\pi) - \frac{2h}{(k-1)n\pi} \cos\left(\frac{n\pi}{k}\right) + \frac{2kh}{(k-1)n^2\pi^2} \sin\left(\frac{n\pi}{k}\right) \end{aligned} \quad (2.189)$$

将上述三式代回公式(2.185)会发现绝大多数项合并后均被消去, 最终得到:

$$a_n = a_n^{(1)} + a_n^{(2)} + a_n^{(3)} = \frac{2k^2h}{(k-1)n^2\pi^2} \sin\left(\frac{n\pi}{k}\right) \quad (2.190)$$

将上式(2.190)代入公式(2.22), 则可给出在不同等分点上拨弦的弦振动定解。

考察下公式(2.190)会发现, 随着 k 的取值不同, 会存在 a_n 取值为零的情形。例如在弦的中心处 ($k=2$) 进行拉伸弹拨, 则弦振动的定解仅包含奇数频率的正弦级数项, 即所发出的声音缺少偶数次谐波; 在琴弦的 $\frac{1}{3}$ 处弹拨, 则会缺少 $3, 6, 9, \dots$ 次谐波, 以此类推。

进一步分析, 若想要直接得到任意 x_0 位置下被抑制的谐波模态 n , 只需满足

$$\frac{n\pi}{k} = m\pi, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (2.191)$$



并将关系式(2.181)代入上式中即可得到:

$$n = m \left(\frac{L}{x_0} \right), \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (2.192)$$

由于此时 n 也为正整数, 所以若想要抑制拨弦乐器振动时的某些模态, 即满足上式成立, 需要在弦长的任意等分点上进行弹拨 (不仅仅是在弦长的 $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$ 倍数处, 也可以在 $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots$ 等处)。

总结来说, 在给定一种弦的张紧模式后, 拨弦乐器发声的特质完全取决于拨弦的位置 (这里未考虑乐器共鸣腔体的作用)。这也是为什么, 在拨弦乐器上不同的位置进行演奏, 产生的声音会有细微差别的原因 (虽然音高不会发生变化)。

 **笔记** 虽然上述推导采用的是将弦长 k 等分的方式, 但由于公式(2.181)中各参数均可视为常数, 所以若想要得到任意 x_0 位置下拨弦的振动定解也很方便, 将 $k = \frac{L}{x_0}$ 代入公式(2.190)进行变换即可。

2.4.2 击弦乐器

击弦乐器的代表: 钢琴、扬琴等。

击弦乐器的基本发声模式与拨弦乐器较为类似, 都是在两端固定拉紧的弦上, 给定一个初始状态进行的自由振动。只不过击弦的运动是一种瞬时的加速运动, 击弦结束立刻完成对初始速度分布函数 $v_0(x)$ 的建立, 而此刻的初始位移函数 $u_0(x)$ 则可视为零。所以这里需要回到弦振动一般解的初始形态, 即公式(2.18)进行分析。

由于此时 $u_0(x) = u(x, 0) = 0$, 代入公式(2.18)即可求得 $a_n = 0$ 。所以击弦乐器模型下的弦振动一般解可简化为

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{\omega_n}{c}x\right) \sin(\omega_n t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L}ct\right) \quad (2.193)$$

上式对时间 t 求一阶偏导数, 并令 $t = 0$ 即可求得此时初始速度分布函数 $v_0(x)$ 的表达式:

$$v_0(x) = \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \omega_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad (2.194)$$

由于根据引理1.13可知, $v_0(x)$ 也是周期为 $2L$ 的周期函数, 与拨弦乐器的分析类似, 这里可以通过对上式两边同时乘以 $\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$, 并在区间 $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ 上进行积分 (其中 $T = 2L$), 从而求得此刻 b_n 的表达式:

$$b_n = \frac{1}{\omega_n L} \int_{-L}^L v_0(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \quad (2.195)$$

所以, 只要给出具体的初始速度分布函数 $v_0(x)$ 的解析形式, 根据上式(2.195)即可求得此时唯一的未知参数 b_n , 最终导出击弦乐器模型下确切的弦振动定解。

 **笔记** 上述两节推导出的未知参数 a_n 和 b_n 的求解表达式(2.180)和(2.195), 不仅仅适用于 $v_0(x) = 0$ 或 $u_0(x) = 0$ 的情形。事实上, 通过同样的推导流程可以证明, 在任意初始位移与速度状态下, 公式(2.180)和(2.195)均成立。

一般来说, 击弦乐器的初始速度分布函数 $v_0(x)$ 可以简化为一个分段常数模型, 如

下图2.21所示：

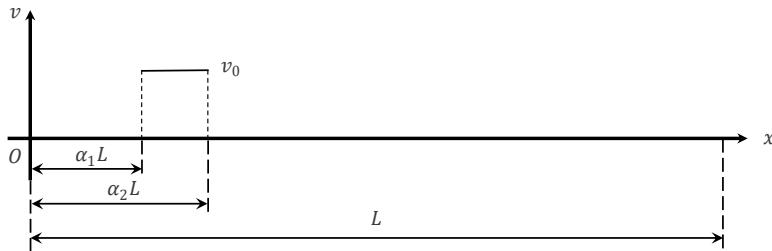


图 2.21：击弦乐器的初始速度状态

由于一般击弦的榔头都具有一定宽度，所以击弦的一瞬间可以看作是在 x 轴上有一段速度为 v_0 的常数区间（不论击弦动作的方向如何，这里均简化为产生一个正方向的速度），而弦上其他位置速度则为零。这里具有速度的区间可以用 $[\alpha_1 L, \alpha_2 L]$ 来表示（ α_1 和 α_2 分别为弦长 L 的某个比例系数），则此时该初始状态下的速度解析式为

$$v_0(x) = \begin{cases} v_0, & x \in [\alpha_1 L, \alpha_2 L] \\ 0, & \text{else} \end{cases} \quad (2.196)$$

与拨弦乐器的分析类似，由于根据引理1.13可知， $v_0(x)$ 也是奇函数（上图2.21也是只绘制了“右半边”），这里对于求解 b_n 的关系式(2.195)也可以简化为只计算一半的积分，如下所示：

$$b_n = \frac{1}{\omega_n L} \int_{-L}^L v_0(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx = \frac{2}{\omega_n L} \int_0^L v_0(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \quad (2.197)$$

将公式(2.196)代入上式，则可直接计算出 b_n 的表达式：

$$b_n = \frac{2}{\omega_n L} \int_{\alpha_1 L}^{\alpha_2 L} v_0 \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx = \frac{2v_0 L}{cn^2 \pi^2} [\cos(\alpha_1 n\pi) - \cos(\alpha_2 n\pi)] \quad (2.198)$$

再将上式(2.198)代回公式(2.193)，则可给出击弦乐器完整的弦振动定解。

可以看到，击弦乐器模型中，初始速度 v_0 至关重要。 v_0 越大，则最后波的振幅也越大，产生的声音也越大。这也与击弦时的实际情况相吻合，若击弦力度越大，产生的瞬时速度也将越大，此时触发的声音也相应越大。

事实上，击弦乐器的琴弦状态也有区别于拨弦乐器的地方。为了让击弦的动作在琴弦上的反馈更加明显，一般击弦乐器的琴弦张紧力会远大于拨弦乐器，使得琴弦处于一种相当“紧绷”的状态，更趋向于前述的“细杆”基础模型。而根据章节2.1.2的推导可知，细杆中的弯曲波会存在弥散现象，即产生的不同谐波其传播速度也不同。所以对于人来说，击弦乐器所发出的声音在听感上相比拨弦乐器会更加“不和谐”，这便是由于谐波的“不稳定”所导致。

然而，并不是“不和谐”就一定“不好”，与此相反，由于击弦乐器兼顾弦振动的“固定音高”特征和杆振动的“弥散”特征，所以还是较容易调制出一个相对稳定的“音高认知”，此时谐波的不稳定反倒会造就“层次丰富”的声音听感，对人耳来说不失为一种美妙的声音。例如钢琴的音色便是一种极其细腻丰富的音色，在实际演奏中可以提供宽广的动态范围和丰富的声响效果。

2.4.3 拉弦乐器

拉弦乐器的代表：小提琴、中提琴、大提琴、二胡、马头琴等。

拉弦乐器的发声模式较为复杂，而且直观上也很难想得到。原因在于，尽管拉弦乐器的琴弦也是两端固定且张紧的状态，但却是通过琴弓摩擦琴弦发出声音，且声音会随着琴弓的运动一直持续。此时琴弦的运动更像是一种“受迫振动”，所以其振动的波形与拨弦或击弦乐器相差较大，也很难直接应用弦振动的一般解进行套用，给出其无穷级数的表达形式。

具体来说，琴弓的弓毛具有一定“粘滞效应”，并且带有方向性，即用手沿着弓毛去“刷蹭”时，会发现一个方向上“毛刺感”较明显，即摩擦较大，而另一个方向上较为光滑。利用这个特点，琴弓采用了多缕弓毛反向安装，这样能够保证在琴弦垂直方向上拉弦（即所谓的运弓）时，无论是沿哪个方向，都能够有一半的弓毛对琴弦施加明显的摩擦作用。

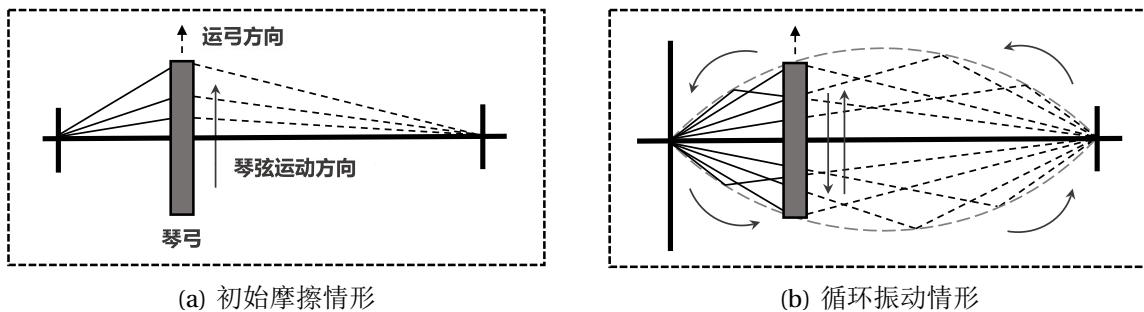


图 2.22: 拉弦乐器琴弦振动示意图

然而由于琴弦本身张力较大，并不可能一直被琴弓牢牢抓住。所以在琴弦随着琴弓运动时会达到一个临界点，此时静摩擦力已无法平衡被拉开的琴弦张力，导致琴弦会挣脱琴弓的束缚做反向运动。拉弦乐器的初始摩擦情形见上图2.22(a)所示。

在经过初始摩擦阶段后，挣脱束缚的琴弦并不会一直自由下去，而是会在反向运动到某一位置再次被琴弓抓住，导致琴弦继续重复被琴弓拖拽做同向运动的状态。

具体来分析琴弦的这种往复运动。由于琴弓一般在靠近琴弦端部的位置进行运弓。当琴弦经过初始摩擦阶段，其之后的“释放阶段”与“摩擦阶段”将会组成一个完整的周期，而琴弦的波动将遍布整根弦，一个来回走过的周期距离刚好为 $2L$ 。由于在摩擦阶段，琴弦随琴弓一起运动时该点的速度与运弓速度相同，而在释放阶段时，琴弦将会拥有一个较大的张力，致使释放过程“瞬间完成”。所以从时间上讲，摩擦阶段将远大于释放阶段。

由于拉弦的过程是一种受迫振动，所以在上述分析下，琴弦只可能“被迫”产生一个“逆时针”的循环运动（若是自由形态下，偏左端的琴弦被拉起，左边的张紧力将更大，琴弦会有向右波动的倾向性）。且考虑到琴弦的惯性影响，其循环过程将呈现出一种被“甩出去”的形态，即琴弦的弯折点会形成弧线的轨迹，如上图2.22(b)所示。

拉弦乐器所表现出的这种运动形态，也被称为亥姆霍兹（Helmholtz）运动。值得说明的是，上述分析在实际的拉弦过程中，都是快速到人的肉眼难以捕获，需要高速相机才能呈现一二。人眼只能看出拉弦时琴弦在快速振动而已。

事实上，从弦的振动章节推导过程可以知道，拉弦乐器的理论模型也符合波动方程，只是受琴弓影响其运动形态有所不同。所以拉弦乐器的波速 c 也可以采用公式(1.45)进行计算（波速 c 只受张紧力和材料属性影响）。而拉弦乐器琴弦的一个运动周期距离为 $2L$ ，所以可以求得拉弦乐器所发出声音的基础频率为

$$f_{\text{bowed}} = \frac{c}{2L} = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{T}{\rho}} \quad (2.199)$$

这说明，拉弦所发出的声音音高与拨弦或击弦完全相同。

例如，拉弦乐器拉出一个基础频率为 440 Hz 的声音，则此时 Helmholtz 运动进行一个周期只需要 $\frac{1}{440}$ s，说明拉弦时的琴弦振动确实快到人眼难以分辨。

进一步分析与琴弓接触点处的琴弦运动状态，可以绘制出其位移变化曲线，如下图2.23所示：

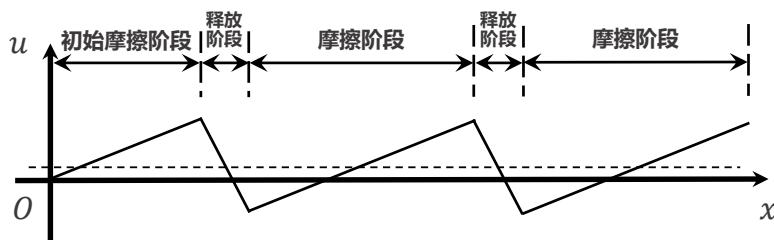


图 2.23: 拉弦乐器琴弓处位移变化曲线

由于经过初始摩擦阶段后，琴弦反向运动并不能回到以原静止处为轴心完全相反的位置，所以琴弓点处的琴弦往复运动中心（虚线）会略高于原静止处（ x 轴）。此外，摩擦阶段由于是与琴弓同时运动，所以该处的琴弦运动可以看作是匀速；而释放阶段由于过于短暂，这里也可以简化为匀速运动。所以整个过程均可简化为周期性的折线函数。弦上其他位移点处的运动也与之类似，只是振幅与相位不同而已。

所以，拉弦乐器所发出的声音更倾向于“锯齿波”的形态。而根据前面 Fourier 变换章节的分析，锯齿波包含全整数频率的正弦级数项，所以发出的声音泛音更加丰富，听感上具有更加明显的“毛刺感”。这也是为什么，相比于其他弦乐器，初学拉弦乐器的人总是很难发出相对悦耳的声音，总是给人一种“锯木头”的感觉。

2.4.4 音板与共鸣腔

弦乐器中，除了作为发声单元的琴弦，音板与共鸣腔也扮演着极其重要的作用。这也是为何不同的弦乐器所产生的声音差异如此之大的原因。

首先，相比于其他原声乐器，弦的振动由于发声单元较小，无法提供浑厚的音量，所以需要通过音板形成一个有限空间（腔体），利用壁面的反射效应来增强声音效果。具体来说，音板（一般是木材，也有用膜制品，如二胡）提供了由不同的反射面组成

的几何空间，其中的声场将是驻波的形式（根据前述理论分析可知）。当空间的几何形状不规则时，通过反射效应形成的声场将变的非常复杂。同时，由弦的振动激发的声音在反射过程中并不会改变其频率成分，所以听觉上并不会觉得音调发生了变化，而只会觉得增强了混响效果。

其次，前面章节已经通过理论计算说明，无论是薄膜还是平板，其振动模式均较为复杂（与 (m, n) 的取值有关），可以同许多频率发生共振。所以无论是高音还是低音琴弦，其发声后均能带动音板产生各种谐波，与之进行声音叠加。

在实际弦乐器音板与共鸣腔的选择与制作上，理论分析已无太大参考价值。以提琴的音板为例，为了了解木材的声学特征，往往需要亲自上手，对其各个部分进行敲击，或通过前述 Chladni 图形来辅佐对其振动特性的认知，这样才能提前预判将音板组装后的乐器声响效果。正是由于一代代匠工不断尝试、积累与传承，形成了丰富的制作经验，才让那么多可称之为艺术品的弦乐器流传至今。

2.5 管乐器的声学解释

管乐器的发展历史源远流长，若从传统交响乐编制上可以分为木管乐器和铜管乐器两大类，从振动方式则可分为气鸣乐器和簧鸣乐器。简单来说，管乐器均是通过吹奏来激发管中空气柱振动的一类发声单元，具体从振源的形式又可分为如下三种：

1. 气流振荡（如长笛、竹笛、箫等）：通过一定角度对吹孔吹气，气流遇到其尖锐边缘处被分割出独立的气体涡旋，此时持续的气流将会形成所谓边棱音，再经过与管内空气柱的频率谐振，从而发出具有稳定音高的声音；
2. 簧片振动（如单簧管、双簧管、葫芦丝等）：通过吹奏引起簧片振动，此时吹口处的狭缝变化带来压强的改变，再经过与管内空气柱的频率谐振，从而发出具有稳定音高的声音；
3. 嘴唇振动（如小号、圆号、长号等）：与簧片振动类似，这里是通过嘴唇振动对吹口处带来压强改变，传递至管内空气柱，形成周期性的气流变化，从而发出具有稳定音高的声音。

可以看到，不论振源振动的形式如何，管乐器的核心实际在管内的空气柱（也可以理解为一种共鸣腔）中。气体能在管中形成气流，管内两端必然不能完全封闭，所以可以演化为如下两种形态：开管状态（两端均开放）和闭管状态（一端开放一端封闭。当吹奏端被嘴唇堵住时，可看作是封闭端）。

管乐器的长度尺寸一般设计成远大于其横截面尺寸，这样声学模型可以近似满足气体形态的一维波动方程。与弦振动章节的介绍类似，此时无论边界条件如何，波动方程的解均由一系列满足倍频关系的驻波组成，自然便可以形成固定音高。

接下来分别从理论的角度，给出开管乐器和闭管乐器的声学特性解释。

注 根据章节1.4的介绍，流体形态下速度势 φ 、压强扰动 p 、密度扰动 ρ ，以及流体质点速度 v 均满足波动方程。结合公式(1.73)和(1.74)，在一维情形下，根据分离变量法

(采用 $\varphi(x, t) = \Phi(x)\Psi(t)$ 的符号体系) 有

$$\begin{aligned}\tilde{p}(x, t) &= \rho_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x, t) = [\rho_0 \Psi'(t)] \Phi(x) \\ v(x, t) &= \nabla \varphi(x, t) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \Psi(t) \Phi'(x)\end{aligned}\quad (2.200)$$

这表明, 任意时刻下 (也可理解为给定时刻 t_0 , 此时 $\Psi(t_0), \Psi'(t_0)$ 均为常系数), 一维情形的流体质点速度 v 沿 x 坐标的函数分布, 与压强扰动 \tilde{p} 关于 x 的一阶导数成正比。该结论将作为后面建立开管和闭管乐器边界条件的重要依据。

2.5.1 开管乐器

开管乐器的代表: 长笛、竹笛、箫、葫芦丝等。

开管状态下, 管的两端压强扰动 \tilde{p} 恒为零 (与大气压强一致)。假设管长为 L , 考虑压强扰动 \tilde{p} 的波动方程求解问题, 则有边界条件 $\tilde{p}(0, t) = \tilde{p}(L, t) = 0$, 这与弦振动章节中的情形完全一致。若仍采用 $\tilde{p}(x, t) = \Phi^{(\tilde{p})}(x)\Psi^{(\tilde{p})}(t)$ 的分离变量表示法 (用上标 (\tilde{p}) 以示区分), 则会得到与公式(2.15)完全一样的倍频关系式, 这里重新写出:

$$\omega_n = \frac{n\pi}{L}c, \quad \Phi_n^{(\tilde{p})}(x) = B_n^{(\tilde{p})} \sin\left(\frac{\omega_n}{c}x\right), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.201)$$

进一步可导出开管乐器振动频率 f_{open} 的具体数学表达式:

$$f_{\text{open}} = \frac{1}{T} = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{n}{2L}c, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.202)$$

其中, c 为管中空气的波速。根据例题1.1的计算结果, 常温下空气声速一般为 340 m/s。

结合前述一维情形下关于流体质点速度 v 与压强扰动 \tilde{p} 的导数关系, 可继续推导开管乐器空气质点速度 v 的解中对应 $\Phi_n^{(v)}(x)$ 的表达式:

$$\Phi_n^{(v)}(x) = B_n^{(v)} \cos\left(\frac{\omega_n}{c}x\right), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.203)$$

$B_n^{(v)}$ 为对应公式(2.201)中新的系数。上式相当于对公式(2.201)进行了一次求导。

从上式还可看出, 相对于压强扰动 \tilde{p} 的边界条件为两端波节 (振动幅值为零), 空气质点速度 v 的边界条件为两端波腹 (振动幅值最大)。该理论推导的结果也符合实际情况, 即开管情形下, 两端空气逸散最快。

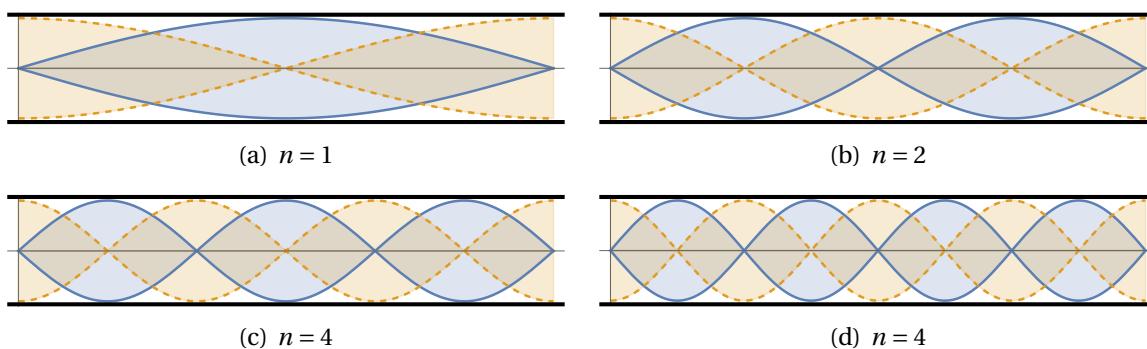


图 2.24: 开管乐器中压强扰动 \tilde{p} 和空气质点速度 v 的前四个振动模态

根据以上分析，可以绘制出如上图2.24所示的开管乐器中压强扰动 \tilde{p} 和空气质点速度 v 在不同 n 取值情况下的振动模态。其中蓝色实线表示压强扰动 \tilde{p} ，橙色虚线表示空气质点速度 v ，两者均以驻波的形式呈现（为方便示意将幅值调为一致）。

此外，本节计算出的开管乐器振动频率公式(2.202)在实际制作开管乐器时十分有用。例如若想要制作一根竹笛，需要根据音高进行挖孔距离的计算，则挖孔到吹孔的距离 l 与声音基础频率 f 之间需满足（令公式(2.202)中 $n=1$ 即为基频）：

$$l = \frac{c}{2f} \quad (2.204)$$

 **笔记** 上式只是数学推导的基本公式。在实际运用中，考虑到各种情况一般还需要在右端加入一个距离的修正系数。

2.5.2 闭管乐器

闭管乐器的代表：单簧管、双簧管、萨克斯、小号、圆号、长号等。

闭管状态下，管的开放端压强扰动 \tilde{p} 仍恒为零，而封闭端则不同。由于封闭端与外界不相通，应当认为空气质点速度 v 恒为零（需要强调，尽管吹口处仍有气流进入管中，但其端点处仍应做出速度为零的假设）。

这里考虑空气质点速度 v 的波动方程求解问题。假设管长为 L ，左端封闭右端开放，则有速度 v 的边界条件 $v(0, t) = 0$ ，代入分离变量后关于 $\Phi(x)$ 的函数关系式（即公式(2.13)。为与上一节符号保持一致，采用 $\Phi^{(v)}(x)$ 的表示法），则有

$$\Phi_n^{(v)}(x) = B_n^{(v)} \sin\left(\frac{\omega_n}{c}x\right), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.205)$$

上式中参数均加了下标 n ，主要还是依据前述经验，提前引入了模态解。

同样地，这里可继续推导闭管乐器压强扰动 \tilde{p} 的解中对应 $\Phi_n^{(\tilde{p})}(x)$ 的表达式：

$$\Phi_n^{(\tilde{p})}(x) = B_n^{(\tilde{p})} \cos\left(\frac{\omega_n}{c}x\right), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.206)$$

$B_n^{(\tilde{p})}$ 为对应公式(2.205)中新的系数（与公式(2.201)中不同）。上式相当于对公式(2.205)进行了一次积分，并考虑到压强扰动 \tilde{p} 振动的对称关系，消去了积分常数。

代入右端压强扰动 \tilde{p} 的边界条件 $\tilde{p}(L, t) = 0$ ，则可得到：

$$\frac{\omega_n}{c}L = \frac{2n-1}{2}\pi \Rightarrow \omega_n = \frac{(2n-1)\pi}{2L}c, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.207)$$

进一步可导出闭管乐器振动频率 f_{close} 的具体数学表达式：

$$f_{\text{close}} = \frac{1}{T} = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{2n-1}{4L}c, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.208)$$

从以上推导还可总结出，闭管状态下，压强扰动 \tilde{p} 的边界条件为开放端波节，封闭端波腹；而空气质点速度 v 的边界条件为封闭端波节，开放端波腹。该理论推导的结果也符合实际情况，即闭管情形下，封闭端空气不流动，积压导致压强最大。

通过对公式(2.202)和(2.208)的对比发现，开管乐器的基础频率是闭管乐器基础频率的两倍（令 $n=1$ ），所以同样的管长，开管乐器的基础音高更高。此外，开管乐器具有全倍频关系的振动模态响应，而闭管乐器只有奇数倍频率的振动模态响应。



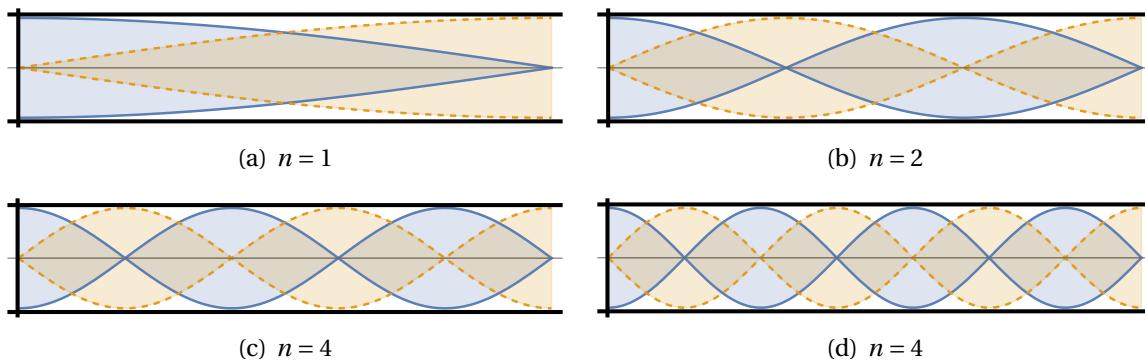


图 2.25: 闭管乐器中压强扰动 \tilde{p} 和空气质点速度 v 的前四个振动模态

据此,同样可以绘制出如上图2.25所示的闭管乐器中压强扰动 \tilde{p} 和空气质点速度 v 在不同 n 取值情况下的振动模态。其中蓝色实线表示压强扰动 \tilde{p} , 橙色虚线表示空气质点速度 v , 两者均以驻波的形式呈现。从图中可以明显看出前述理论分析的结果示意,以及与开管乐器声学特性的对比关系。

2.5.3 超吹技法

前面分析了管乐器的发声原理,在给定管长的情况下,不论振源形式如何,开管乐器和闭管乐器均会分别形成各自的固定音高(基频满足两倍关系)。所以,可通过改变管径中空气柱的长度来达到吹奏不同音高的效果,这也是制作管乐器的核心。例如,长笛等乐器是通过在管径上挖孔来改变内部空气柱的长度,而小号等乐器则是具有一个精巧的内部结构,当按压按钮时,也可改变内部空气柱的长度。

但是,管乐器毕竟长度有限,想要通过改变管径中空气柱长度来制作大音域范围的乐器是十分困难的。一般来说,通过改变长度,只能产生出一个倍频关系内的基础声音(一个倍频就需要将管内空气柱缩短一半)。对于十二平均律来说,亦即只能最多实现12个不同音高的声音。

所以,为了吹奏出更高音调的声音,需要借助管乐器演奏的一种特殊技法:超吹,也被称为泛音吹法。这种吹奏方法并不改变原有的基础频率,只是可以通过更“用力”吹奏的方式(改变气流速度),让振源的振动去激发管中空气柱更高频次的泛音。对于开管乐器来说,同一指法(即同一空气柱长度)可以吹奏出比基础频率高两倍、三倍及以上的音高,而对于闭管乐器来说,同一指法只能吹奏出比基础频率高三倍、五倍及以上(奇数倍)的音高。在任意管乐器中进行实验,以上结论均可得到验证。

2.6 打击乐器的声学解释

打击乐器种类繁多,用途各异,根据其结构特点,常被分为膜鸣乐器和体鸣乐器两大类。常规来讲,打击乐器主要通过敲击、拍打等方式提供瞬时声音,用以带来强劲的节奏感(还有一些小打乐器,用来装饰与点缀)。但事实上,也有不少具备固定音

高的打击乐器，可以提供泛音丰富的旋律。

2.6.1 音高打击乐器

音高打击乐器的代表：音叉、木琴、马林巴、颤音琴等。

绝大多数音高打击乐器均可以简化为细杆结构，所以若给定边界条件，理论上根据章节2.1.2的分析可以得到相对应乐器的振动频率关系。

例题2.8 试分析细杆弯曲振动在几类常见边界条件下的声学特性（假设杆长为 L ）。

解 下面以三类典型边界条件为例进行说明（其中 u 均指代章节2.1.2中的弯曲位移 u_z ）。

1. 固定端-自由端条件：

设细杆在 $x=0$ 处为固定端，而在 $x=L$ 处为自由端，则边界条件为

$$\begin{cases} u(0) = 0, & \frac{\partial u}{\partial x}(0) = 0 \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(L) = 0, & \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(L) = 0 \end{cases} \quad (2.209)$$

结合双曲函数的导数关系 $(\sinh x)' = \cosh x$, $(\cosh x)' = \sinh x$, 将上式代入细杆弯曲振动中的通解公式(2.50)可得到 $A_n = -C_n$, $B_n = -D_n$, 同时有

$$\begin{cases} A_n \left(\cosh \frac{\omega_n}{c} L + \cos \frac{\omega_n}{c} L \right) + B_n \left(\sinh \frac{\omega_n}{c} L + \sin \frac{\omega_n}{c} L \right) = 0 \\ A_n \left(\sinh \frac{\omega_n}{c} L - \sin \frac{\omega_n}{c} L \right) + B_n \left(\cosh \frac{\omega_n}{c} L + \cos \frac{\omega_n}{c} L \right) = 0 \end{cases} \quad (2.210)$$

若积分常数 A_n 和 B_n 不为零，则上式可以看作 A_n 和 B_n 的二元一次方程组，联立可知其系数行列式为零，再结合恒等式 $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ 化简可得：

$$\cosh \left(\frac{\omega_n}{c} L \right) \cos \left(\frac{\omega_n}{c} L \right) = -1 \quad (2.211)$$

这是一组频率方程，但很明显 ω_n 之间不满足倍频关系。

2. 固定铰-固定铰条件：

同样先写出边界条件：

$$\begin{cases} u(0) = 0, & \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0) = 0 \\ u(L) = 0, & \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(L) = 0 \end{cases} \quad (2.212)$$

代入通解公式(2.50)可得到 $A_n = C_n = 0$, 同时有

$$\begin{cases} B_n \sinh \frac{\omega_n}{c} L + D_n \sin \frac{\omega_n}{c} L = 0 \\ B_n \sinh \frac{\omega_n}{c} L - D_n \sin \frac{\omega_n}{c} L = 0 \end{cases} \quad (2.213)$$

化简可得：

$$\sinh \left(\frac{\omega_n}{c} L \right) \sin \left(\frac{\omega_n}{c} L \right) = 0 \quad (2.214)$$

由于函数 $\sinh x$ 只有 $x=0$ 一个零点，所以上式只能满足

$$\sin \left(\frac{\omega_n}{c} L \right) = 0 \Rightarrow \omega_n = \frac{n\pi}{L} c \Rightarrow \omega_n = \frac{n^2\pi^2}{L^2} c_0 K \quad (2.215)$$

其中最后一步推导用到了细杆弯曲振动中的关系式 $c = \sqrt{c_0 \omega K}$ 。

可以看到，该情况下 ω_n 呈现倍频关系，泛音频率与基础频率的比值为 n^2 。

3. 自由端-自由端条件：

同样先写出边界条件：

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0) = 0, & \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(0) = 0 \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(L) = 0, & \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(L) = 0 \end{cases} \quad (2.216)$$

代入通解公式(2.50)可得到 $A_n = C_n, B_n = D_n$ ，同时有

$$\begin{cases} A_n \left(\cosh \frac{\omega_n}{c} L - \cos \frac{\omega_n}{c} L \right) + B_n \left(\sinh \frac{\omega_n}{c} L - \sin \frac{\omega_n}{c} L \right) = 0 \\ A_n \left(\sinh \frac{\omega_n}{c} L + \sin \frac{\omega_n}{c} L \right) + B_n \left(\cosh \frac{\omega_n}{c} L - \cos \frac{\omega_n}{c} L \right) = 0 \end{cases} \quad (2.217)$$

化简可得：

$$\cosh \left(\frac{\omega_n}{c} L \right) \cos \left(\frac{\omega_n}{c} L \right) = 1 \quad (2.218)$$

同样这也是一组频率方程，但 ω_n 之间并不满足倍频关系。

音高打击乐器中，音叉、八音盒、卡林巴（也被称为拇指琴）等都是典型的固定端-自由端边界约束。从上述推导可以看出，其实这类乐器并不具备倍频的振动模态。但若进一步对公式(2.211)进行分析，会发现其系列解中后续的泛音频率均比基础频率大很多，所以这类乐器初听会觉得音调尖锐且有空灵感，但随着阻尼影响，高频泛音将会快速衰减，只剩下几乎为基频的纯音，最终形成极具特色的固定音高。

另一类音高打击乐器如木琴、钟琴、马林巴、颤音琴等，可以看作是自由端-自由端边界约束。该情形下的频率方程(2.218)与前述相仿，所以频率响应也具有类似的特质。此外，马林巴等乐器还会在振源下方设置共鸣管，管长会调整到对应细杆振动的基频（相关公式可参考上一节管乐器的理论分析），在增加对固定音高塑造的同时还能增强响度，且具有缓解泛音衰减的效果，最终形成“冰凉如水”般的持续音色。

值得一提的是，本节计算出的各类频率方程在实际制作细杆类音高打击乐器时十分有用。无论边界条件如何，此类乐器均可给出形如公式(2.215)的频率计算式。根据该计算式，可以得出如下结论：细杆类打击乐器的音高与其长度的平方成反比，与其厚度成正比（参数 K ）。

2.6.2 普通打击乐器

普通打击乐器的代表：架子鼓、大鼓、铙钹、锣等。

本节主要介绍以膜或板结构为主体的非音高类打击乐器。

在章节2.1.3中，关于平面薄膜振动的波动方程推导是建立在 Cartesian 坐标系下的，但整个过程强调矢量性，所以也很方便可以推广至任意曲线坐标系（见附录E.8）。事实上，以膜的振动为发声原理的乐器一般均采用圆膜形态，此时平面薄膜的坐标将转化为极坐标 (r, θ) 。根据附录D.5的推导可知，极坐标系（柱坐标系忽略第三个维度

z) 下 Laplace 算子的计算式为

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} \quad (2.219)$$

将上式中的函数 f 换为位移 u (均可视作标量函数), 代回公式(2.73)即可得到圆膜所满足的振动方程:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (2.220)$$

上述方程同样可以采用分离变量法。这里直接令

$$u(r, \theta, t) = R(r)\Theta(\theta)T(t) \quad (2.221)$$

代入原方程化简可知:

$$c^2 \cdot \left[\frac{R''(r)}{R(r)} + \frac{1}{r} \frac{R'(r)}{R(r)} + \frac{1}{r^2} \frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} \right] = \frac{T''(t)}{T(t)} = -\omega^2 \quad (2.222)$$

上式的 $-\omega^2$ 依然为具有角频率物理含义的分离常数。

关于 $T(t)$ 的部分与前述一致, 其通解可以写作 (先省略积分常数)

$$T(t) = \sin(\omega t + \varphi) \quad (2.223)$$

这里先不引入模态解, 即 ω 不加入下标 n , 后面会统一说明。

考虑 $R(r)$ 和 $\Theta(\theta)$ 的部分, 可进一步化简为

$$r^2 \frac{R''(r)}{R(r)} + r \frac{R'(r)}{R(r)} + \left(\frac{\omega}{c} r \right)^2 = -\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} = m^2 \quad (2.224)$$

上式的 m^2 为另一个分离常数。

关于 $\Theta(\theta)$ 的部分与 $T(t)$ 类似, 其通解可以写作 (先省略积分常数):

$$\Theta(\theta) = \sin(m\theta + \tilde{\varphi}) \quad (2.225)$$

其中 $\tilde{\varphi}$ 为三角函数合并后的另一个相位参数。由于 $u(r, \theta, t)$ 与 $u(r, \theta + 2\pi, t)$ 指代同一位置, 所以有 $\Theta(\theta) = \Theta(\theta + 2\pi)$, 这里可以提前求得 $m = 0, 1, 2, \dots$, 即 m 必须为零或正整数。

而关于 $R(r)$ 的部分, 整理后的方程形式为

$$r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + r \frac{dR}{dr} + \left[\left(\frac{\omega}{c} r \right)^2 - m^2 \right] R = 0 \quad (2.226)$$

该方程是一个典型的变系数常微分方程, 也被称为 m 阶贝塞尔 (Bessel) 方程 (且为整数阶)。附录G给出了其相关的理论分析, 这里直接将其通解形式写出:

$$R(r) = A \cdot J_m \left(\frac{\omega}{c} r \right) + B \cdot Y_m \left(\frac{\omega}{c} r \right) \quad (2.227)$$

其中 $J_m \left(\frac{\omega}{c} r \right)$ 和 $Y_m \left(\frac{\omega}{c} r \right)$ 均为特殊函数 (非初等函数), 分别被称为 m 阶第一类和第二类 Bessel 函数 (详见附录G), A 和 B 为积分常数。

根据附录G的介绍, 当 $r = 0$ 时, 第二类 Bessel 函数 $Y_m \left(\frac{\omega}{c} r \right) \rightarrow \infty$, 与实际圆膜振动情况不符, 所以必须满足 $B = 0$, 得到 $R(r) = A \cdot J_m \left(\frac{\omega}{c} r \right)$ 。再考虑到圆膜振动与弦的振动类似, 均满足端点固定的边界条件, 即 $u(L, \theta, t) = 0$ (其中 L 指代圆膜的半径长度)。将其代入, 可得到 $J_m \left(\frac{\omega}{c} L \right) = 0$ 。所以整个过程本质是在求解 m 阶第一类 Bessel 函数的系列零点, 然后可推导出圆膜振动的频率关系式。



由于任意阶第一类 Bessel 函数均有无穷多个零点，这里需要两个参数 m 和 n ，指代 m 阶第一类 Bessel 函数的第 n 个零点，推导出的角频率 ω_{mn} 将会是与 m 和 n 均相关的物理量，最终可给出圆膜振动方程(2.220)所满足的完整通解：

$$u(r, \theta, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \cdot J_m\left(\frac{\omega_{mn}}{c} r\right) \sin(m_n \theta + \tilde{\varphi}_{mn}) \sin(\omega_{mn} t + \varphi_{mn}) \quad (2.228)$$

可以看到，上式依然是无穷级数形式的模态解，且每一个模态均为驻波。

下面先分析一种简单的圆对称情形，即敲击点在圆膜中心，此时振动会沿 r 方向蔓延，但与 θ 无关，则以上分析中可省去 $\Theta(\theta)$ ，且 $m=0$ ，得到通解：

$$u_n(r, t) = A_n \cdot J_0\left(\frac{\omega_n}{c} r\right) \sin(\omega_n t + \varphi_n) \quad (2.229)$$

其中 $J_0\left(\frac{\omega}{c} r\right)$ 为零阶第一类 Bessel 函数，附录G中绘制出了相关函数图形。

例题 2.9 试分析圆对称情形下的圆膜振动频率响应。

解 令圆膜半径 $L = 10$, $A_n = 1$, 初始情形下位移 u 最大，则公式(2.229)可简化为

$$u(r, t) = J_0\left(\frac{\omega_n}{c} r\right) \cos(\omega_n t) \quad (2.230)$$

任选角频率为 $\frac{\pi}{10}$ 的模态，忽略 J_0 的自变量系数，则可写出此时 Cartesian 坐标系下的圆膜振动参数化模型：

$$\begin{cases} x = r \cos \theta, & y = r \sin \theta \\ z = u = J_0(r) \cos\left(\frac{\pi}{10} t\right) \end{cases} \quad (2.231)$$

此情形下的振动示意图如下所示：

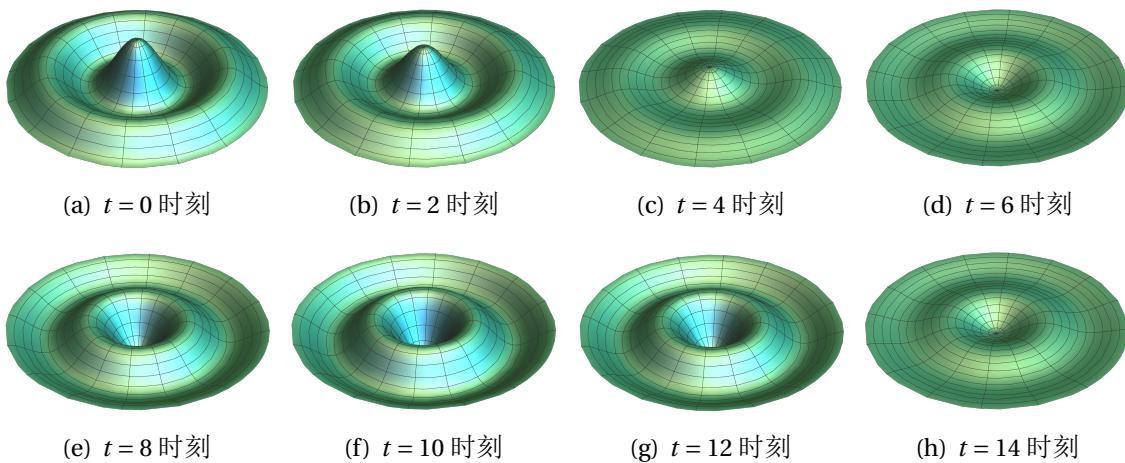


图 2.26：单一模态下圆对称圆膜振动的示意图

上图2.26可以看作是一个振幅随时间波动的零阶第一类 Bessel 函数绕零点旋转一周所形成的，且波形为驻波。注意，这里仅展示了单一模态的结果，并非圆膜的实际振动（所以与例题1.3中的示例不同）。

事实上，大部分打击乐器的敲击点都不在圆膜中心，此时根据公式(2.228)可以得到圆膜振动任意模态下驻波波节（振动幅值恒为零）的节线方程，如下：

$$J_m\left(\frac{\omega_{mn}}{c} r\right) \sin(m_n \theta + \tilde{\varphi}_{mn}) = 0 \quad (2.232)$$

该式是一个与 r 和 θ 相关的二元参数方程。根据不同的 (m, n) 取值，通过第一类 Bessel 函数的零点可以确定 ω_{mn} ，而考虑到 θ 角的参考坐标是相对的，所以可以直接取 $\tilde{\varphi}_{mn} = 0$ ，最后根据方程(2.232)绘制出相应模态下的参数曲线。该部分的处理与章节2.1.4中的 Chladni 图形较为类似，这里不做赘述。

下面分析板结构为主体的非音高类打击乐器。

在章节2.1.4中，关于平板弯曲振动的波动方程推导也是建立在 Cartesian 坐标系下的，但同样最后建立起的波动方程(2.103)并不受限于坐标系的选取（Laplace 算子可适用于任意曲线坐标系）。事实上，以板的振动为发声原理的乐器一般也采用圆板形态，而从波动方程(2.103)到公式(2.110)仍可采用章节2.1.4的推导，到公式(2.110)再转化为极坐标 (r, θ) 下的分解，如下所示：

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + k^2 \right) V_1 = 0 \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + k^2 \right) V_2 = 0 \end{cases} \quad (2.233)$$

该两式仍然可以通过 $V(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta)$ 进行一次分离变量，以 V_1 为例，得到：

$$r^2 \frac{R''(r)}{R(r)} + r \frac{R'(r)}{R(r)} + k^2 = -\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} = m^2 \quad (2.234)$$

$\Theta(\theta)$ 先写出其通解（省略积分常数）：

$$\Theta(\theta) = \sin(m\theta + \tilde{\varphi}) \quad (2.235)$$

而关于 $R(r)$ 的部分，整理后的方程形式为：

$$\begin{cases} r^2 \frac{d^2 R_1}{dr^2} + r \frac{dR_1}{dr} + [(kr)^2 - m^2] R_1 = 0 \\ r^2 \frac{d^2 R_2}{dr^2} + r \frac{dR_2}{dr} - [(kr)^2 + m^2] R_2 = 0 \end{cases} \quad (2.236)$$

注意由于 R_1 和 R_2 的分离变量方式完全一致，所求得的 $\Theta(\theta)$ 形式也完全相同（积分常数由边界条件确定），所以上两式中的参数 m 需同样满足 $m = 0, 1, 2, \dots$ ，即 m 必须为零或正整数。

上式(2.236)中的第一式即为 m 阶 Bessel 方程，其通解按照前述分析可求出为 $J_m(kr)$ 。第二式为 m 阶修正 Bessel 方程，按照附录G的介绍，其通解为第一类修正 Bessel 函数 $I_m(kr)$ 和第二类修正 Bessel 函数 $K_m(kr)$ 的线性组合。但由于第二类修正 Bessel 函数在零点处 $K_m(0) \rightarrow \infty$ ，同样需要舍弃。最后综上所述，可以得到平板弯曲振动方程(2.103)所满足的完整通解：

$$u(r, \theta, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} [A_{mn} \cdot J_m(k_{mn}r) + B_{mn} \cdot I_m(k_{mn}r)] \sin(m_n \theta + \tilde{\varphi}_{mn}) \sin(\omega_{mn} t + \varphi_{mn}) \quad (2.237)$$

理论上讲，根据边界条件可以求得不同 (m, n) 情形下的 k_{mn} 值，进而通过 k_{mn} 求得 ω_{mn} 的频率关系式，最终可给出平板弯曲振动不同模态下的位移表达式。但事实上板结构的打击乐器均为自由端边界，根据章节2.1.4中的描述，其边界条件形式较为复杂（需满足剪力、弯矩、扭矩均为零），很难给出理论解。目前板结构打击乐器的模态

分析以及 Chladni 图形均建立在简化模型基础上，或者通过数值方法进行求解。

2.6.3 特例说明

膜结构为主体的音高打击乐器特例：定音鼓

根据上一节的介绍，膜鸣乐器由于频率响应无法构成谐波（即各阶振动模态的频率不是整数倍），极难形成固定音高。但这里面有一个例外，即定音鼓。事实上，定音鼓也很难形成如其他音高类乐器般非常明显的固定音高，只是定音鼓一般作为一组，可通过不同的张力和鼓腔大小加强人对于不同音高的认识。在管弦乐编制中，定音鼓很少用作独奏乐器，主要用来烘托乐曲的递进情绪。

板结构为主体的音高打击乐器特例：编钟

钟形状的打击乐器可以看作是一个经过变形的圆板，其振动模态与圆板较为类似，均可以按径向和轴向进行分解，形成所谓不同模态下的节线方程。除此之外，钟所形成的内腔可以提供类似共鸣腔的作用，致使其所发出的声音“悠远绵长”。绝大多数钟均为圆钟，但也有例外，即编钟，特别是著名的曾侯乙编钟，以“合瓦形”构型产生“一钟双音”，一组编钟甚至可以构建十二音体系作为独奏乐器使用，是中国古代钟匠所创造的声学奇迹。

想从理论上探寻编钟的声学特性是极其困难的，目前已知的简化方法是将其视为“椭圆截面”的椎体来分析。但就算是已简化的模型，其处理也颇为复杂，得到的结果也不如通过实验或数值计算来的精确，所以这里不做具体展开。

结论 本章围绕十二平均律的基础理论，介绍了如下相关知识：

- 包括弦、杆、膜，以及板在内的四类典型乐器声学振动理论分析；
- 通过无穷级数形式的波动方程一般解，引出 Fourier 变换与乐音体系的构成；
- 运用以上理论分别介绍了几大典型原声乐器的声学特性。

至此，前两章已基本完成对音乐声学和乐器声学的全面阐述，分析了乐音产生的原因，以及在十二平均律中不同单音的和谐程度，这将是下一章介绍和声学的重要理论参考。随着时代推移，人们早已不满足于完美的“和谐声音”，朝着既要“不违和”也要“够新奇”的境地进发，这些内容都将会放在下一章中具体介绍。

第3章 和声理论

内容提要

- | | |
|-------------|----------------|
| □ 基础乐理介绍 | □ 和声分析：流行音乐 |
| □ 再谈音阶 | □ 和声分析：影视游戏配乐 |
| □ 再谈和声 | □ 和声分析：Jazz 音乐 |
| □ 和声分析：古典音乐 | □ 和声分析：和泉宏隆 |

在传统音乐领域，和声学是一门非常重要的学科基础课程，相关的知识体系庞杂艰深，一般需要花费大量时间精力研习才能初窥门径。事实上，尽管乐音的产生和不同单音之间的和谐程度均具有较好的理论解释做支撑（其数学原理在上一章已做详细阐述），但绝大多数和声学知识基本还是建立在人的“经验积累”上，从最初构建不同的调式音阶，到形成完备的古典和声体系，再到现当代流行和声，甚至爵士（Jazz）和声的建立与发展，均彰显着人类主观认知的决定性作用。和声学是流动变化的，即人类就是要不断挑战自己对于音乐认识的边界，在保留有一定和谐原则的基础上，持续寻求声音的刺激感和新鲜感。

所以，本章寄希望通过一种“非传统”的讲述方式，重点在于传达出和声色彩的自由性与丰富性，而不仅仅只是理解传统和声的功能与用法。

3.1 基础乐理

作为“全世界通用的语言”，人们热爱音乐，热爱其中所传递出的强烈情感与自由浪漫。这种感染与共鸣是如此浑然天成、无拘无束，然而落到纸面理论上却充斥着大量天书般的术语和繁冗的计算。不懂乐理也许能偶尔哼出“悠扬”的旋律，但却很难持续写出“合理”的乐章。所以尽管枯燥乏味，学习乐理对于深入了解音乐仍然十分必要。基于此，接下来本节将首先介绍一些音乐中常用的基础乐理。

3.1.1 调式音阶

在一个两倍频的关系内（详见章节2.3.3）进行音乐律制的构建，即限定了可供选择的单音种类和个数，在此基础上可以根据任意排列组合的方式挑选出一些音形成一种调式（Mode），若进一步将其按照频率由低到高进行排序则可组成一条音阶（Scale）。当选定其中一种音阶格式，进入下一个倍频关系时，则延续完全相同的挑选准则，进入循环即可。所以，一个调式音阶，可以看作是以一个基础音为起点，到另一个与基础音高度和谐的音（频率关系1:2）为终点的一串单音组合。

由于调式音阶具有明确的声音逻辑规律，这种围绕基础音构建、强化基础音认知的效果便形成了调（Key）。这里所定义的调，与常说的“调起高了”、“男生女生调不一样”是相同含义。前述章节曾引出的“升降调”概念也类似，核心在于基础音的改变。若进一步结合调（基础音）与调式，则构成了调性（Tonality）。为了达到听感上的“和谐统一”，绝大多数音乐均为调性音乐；而二十世纪的无调性（Atonality）音乐则反其道而行，通过刻意避免与基础音的联系、强调每个音的平等性（弱化固定调式的听感）来达到“找不到调性”的作用。但这种音乐自然并不如常规的调性音乐“悦耳动听”，而是更具有一种前瞻性、实验性的音乐探索意味。

 **笔记** 调（Key）和调式（Mode）是两个完全不同的概念。任意选定一个基础音，均可以基于此给出一个两倍频的关系来构建音乐律制。此时由于基础音已经明确，所以调（Key）便已经确定，但仍可以通过所构建的音乐律制进行单音的自由选择，形成不同的调式（Mode）。

在十二平均律框架体系下，一个两倍频关系内可供选择的单音自然有 12 个。由于初始的基础音（后续用“起始音”指代）必须选择在内，此时在其余单音中任选形成不同调式音阶的可能性总共有如下多种：

$$C_{11}^0 + C_{11}^1 + C_{11}^2 + \dots + C_{11}^{11} = 2^{11} = 2048 \quad (3.1)$$

这里的 C 指的是排列组合中的符号。其中， C_{11}^0 代表只选择起始音（其余 11 个音一个也不选）， C_{11}^{11} 则代表全部 12 个音都选上。

细数公式(3.1)当中的可能性，其实并不是所有组合都用得上，例如只挑选 1 个（起始音）或 2 个音（起始音加任一其他单音）的情况，过于单调，不能称之为音阶；而全部 12 个音都用上，当然也算是一种音阶，但这种排列太过于“平均”，音与音之间也太密集，听感上并不会觉得有足够的记忆点。所以，合理挑选单音形成音阶的方式需要满足：

- 音与音之间的频率间隔不能大量使用密集形式；
- 音与音之间的频率间隔最好能“长短结合”，形成起伏感；
- 尽量加入和谐频率的单音，即与起始音满足频率关系为 $\frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \dots$ 等分式的单音（具体频率对应关系可参阅表2.4）。

在这些约束条件下，音乐中最为重要的自然大调音阶就此应运而生。若将十二平均律相邻音之间称为半音，而两个半音之间称为全音，则自然大调音阶总共 7 个音，可用口诀“全全半全全全半”来描述音与音之间的间隔关系，具体如下表3.1所示：

表 3.1：自然大调音阶

表示方法（唱名）	1 do	2 re	3 mi	4 fa	5 sol	6 la	7 xi
与下个音的间隔音个数	2 个 全音	2 个 全音	1 个 半音	2 个 全音	2 个 全音	2 个 全音	1 个 半音
相对起始音的 倍频关系（近似）	1	$\frac{6}{5}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{15}{8}$

其中，只有3音、4音之间，和7音、1音（下一个两倍频中的1音）之间是半音。相对于其他全音的间隔而言，半音具有强烈的不稳定性。

上表3.1中给出的自然大调音阶唱名表示法是一种音与音之间的“相对关系”，因为任意一个确定音高的音均可以作为起始音来构建出一条自然大调音阶。也就是说，通过上述唱名体系给出的自然大调音阶具有“平移不变性”，不论何种情形，音与音之间的相对关系不变；而音阶内每个音尽管音高会发生变化，但起始音可以永远视为从1音开始。这种表示方法也被称为首调记谱法。

相应地，自然也可以建立一种固定调记谱法。此时，每一个固定音高的音均只有唯一的音名（所以也被称为音名表示法）。在自然大调音阶中，一般采用大写英文字母C D E F G A B来表示具备“全全半全全全半”间隔关系的不同音；除此以外，国际标准音一般定义440 Hz（基础频率）作为A音，这样便可以通过一个绝对参考进行标定，再根据不同音的间隔关系，得到自然大调音阶内所有音名与其相对应的基础频率。

下表3.2给出了C自然大调音阶在音名体系（固定调）和唱名体系（首调）下相对应的不同表示法。

表3.2: C自然大调音阶的两种表示法

表示方法	音名体系（固定调）	C	D	E	F	G	A	B
	唱名体系（首调）	1	2	3	4	5	6	7
		do	re	mi	fa	sol	la	xi

后续的阐述中，为了统一表达，用音名指代固定调情形下的单音名称，而用唱名指代首调情形下的单音名称。

在自然大调音阶中，以大写英文字母进行表示时，并未从字母A开始，这只是约定俗成的记法。过去在创建统一的音名表示法时，常用爱尔兰小调，那时便采用A音作为起始音。所以，尽管追根溯源两种调式音阶的产生有先后顺序，这里仍可以通过自然大调音阶引出自然小调音阶的概念，如下表3.3所示：

表3.3: 自然小调音阶（通过与C自然大调音阶的关系建立）

表示方法	音名	A	B	C	D	E	F	G
	唱名	6	7	1	2	3	4	5
		la	xi	do	re	mi	fa	sol
与下个音的间隔音个数		2个 全音	1个 半音	2个 全音	2个 全音	1个 半音	2个 全音	2个 全音
相对起始音的 倍频关系（近似）		1	$\frac{9}{8}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{7}{4}$

可以看到，自然小调音阶是从给定自然大调音阶的第6音作为起始音，按照自然大调音阶的格式进行后续构建的一种调式音阶。满足这种对应关系的自然小调也被称为相应自然大调的关系小调。

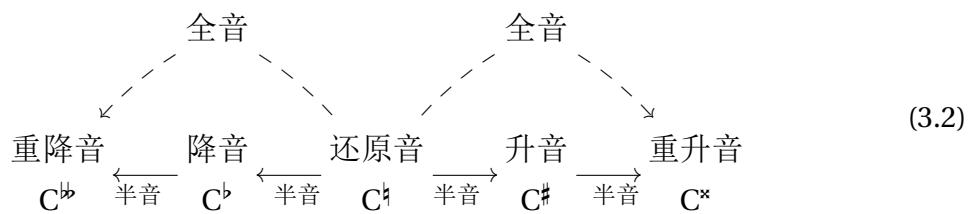
在古典乐理中，自然大调和自然小调是音乐的两种基本调式。绝大多数调性内的旋律（Melody）写作，均建立这两种基本调式之上；也就是说，旋律的创作，最常见



的就是在大小调的七个音中进行挑选，然后重新排列而得到。

再次强调，音名体系是针对固定调记谱法的，每一个音名均可以作为起始音来构建自然大调和自然小调音阶；而唱名体系是针对首调记谱法的，任意自然大调音阶均从1音（do）开始，相应的关系小调可以视作从6音（la）开始。

由于自然大调音阶在一个两倍频关系内只有7个音，所以还需要通过定义临时的变音符号对音名进行扩充，这样才能覆盖到十二平均律中的每一个音。变音符号一般有以下五种：升号[#]（升高半音）、降号^b（降低半音）、还原号^h（为了将临时的升降号还原）、重升号^x（升高两个半音），以及重降号^{bb}（降低两个半音）。下面的关系式描述了这五类变音符号之间的相互联系（假设以C音作为基准）：



通常来说，重升号和重降号较少使用。但就算如此，通过这种方式对音名进行扩充，仍会发现在十二平均律框架体系下，有些不同的音名会具有相同的音高。例如， $C^b = B$, $C^{\#} = B^b$ 。

以钢琴键盘为例，所有固定音高的音名与键盘上键位的映射关系如下图3.1所示：

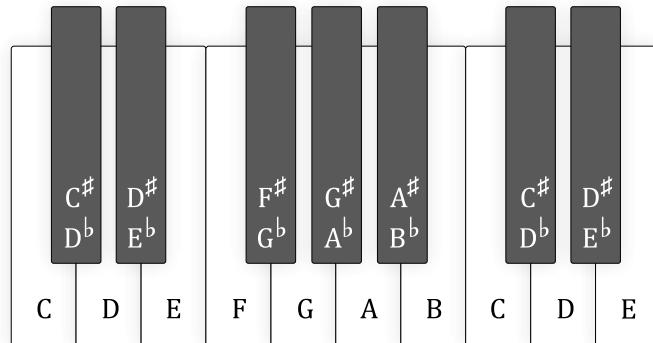


图 3.1: 音名在钢琴键盘上的对应关系

可以看到，若以C音作为起始音，构建一条满足“全全半全全全半”格式的大调音阶（即C自然大调音阶），所有音名不会出现升降号，且在钢琴上所有音名的键位均为白键（相对应的A自然小调音阶亦是如此）；而若从其他音开始构建，则为了满足音与音之间的间隔关系，一些音名必然需要进行升降处理。

 **笔记** 前述自然大调音阶和自然小调音阶的描述均建立在一个两倍频关系内。如果超出这个区域范围，一般先对两倍频区域进行分组，用数字进行标注，然后通过“音名+数字”的方式给出所有不同音高的具体音名。在实际操作中，一般有科学音高记号法和Helmholtz音高记号法两种，且极易搞混。由于本书涉及的乐理知识一般不需要精确指出音名是在哪个两倍频区域内，所以这里不做具体展开。

在首调记谱法（不区分调）下，任意自然大调音阶的唱名记为1234567，所以与音名CDEFGAB类似，这些数字本身便自带音与音之间不同的间隔关系，如1和2音之间为全音，而3和4音之间为半音。对于自然小调来说，方便的方式自然是考虑其与对应自然大调的相关性，用6712345来表示；但若将其看作是一条独立的调式音阶，而非自然大调的关系调式，则也可以采用另一种阿拉伯数字的表示法来构建唱名：12^b345^b6^b7。这样表示尽管脱离了与自然大调的关系，看上去也更复杂，但却突出了不同调式音阶均以1音作为起始音的“首调”性。后续不做特殊说明的情况下，对于小调音阶，一般还是采用后一种首调的表示法。

下表3.4将以上两种对自然小调音阶不同的唱名表示法再次进行了对比归纳：

表3.4: 两种自然小调的唱名表示法

唱名表示法	关系大调视角	6	7	1	2	3	4	5
	纯首调视角	1	2	^b 3	4	5	^b 6	^b 7

问题3.1 试问在十二平均律体系下，一共有多少个调（key）？

解 两种思考方式：

1. 十二平均律中，一个两倍频关系内总共有12个音（再往后的每一个音均与该12个音中的某一个高度和谐，频率满足2, 4, …倍，不应视作不同的调），每个音均可以作为起始音，构建出一条大调音阶，共计12个大调；若将大调和小调视作不同的调，则还有12个关系小调。所以总共24个调；
2. 用传统乐理的思维，通过不同起始音构成调的升降号个数来计算：

- 大调音阶（若采用首调记谱法，唱名均为1234567），共计15个调：

- 无升降号，1个调：

- C大调：以C音为起始音，CDEFGAB；

- 升号（不考虑重升号），7个调：

- G大调：以G音为起始音，1个升号，GABCDEF#；

- D大调：以D音为起始音，2个升号，DEF#GABC#；

- A大调：以A音为起始音，3个升号，ABC#DEF#G#；

- E大调：以E音为起始音，4个升号，EF#G#ABC#D#；

- B大调：以B音为起始音，5个升号，BC#D#EF#G#A#；

- F#大调：以F#音为起始音，6个升号，F#G#A#BC#D#E#；

- C#大调：以C#音为起始音，7个升号，C#D#E#F#G#A#B#；

- 降号（不考虑重降号），7个调：

- F大调：以F音为起始音，1个降号，FGAB^bCDE；

- B^b大调：以B^b音为起始音，2个降号，B^bCDE^bFGA；

- E^b大调：以E^b音为起始音，3个降号，E^bFGA^bB^bCD；

- A^b大调：以A^b音为起始音，4个降号，A^bB^bCD^bE^bFG；

- D^b大调：以D^b音为起始音，5个降号，D^bE^bFG^bA^bB^bC；



- G^b 大调：以 G^b 音为起始音，6个降号，G^b A^b B^b C^b D^b E^b F；
- C^b 大调：以 C^b 音为起始音，7个降号，C^b D^b E^b F^b G^b A^b B^b；
- 小调音阶（常用小写英文字母表示调号，音名还是大写。若采用首调记谱法，唱名均为 1 2 ^b3 4 5 ^b6 ^b7），共计 15 个调：
 - 无升降号，1 个调：
 - a 小调：以 A 音为起始音，A B C D E F G；
 - 升号（不考虑重升号），7 个调：
 - e 小调：以 E 音为起始音，1 个升号，E F[#] G A B C D；
 - b 小调：以 B 音为起始音，2 个升号，B C[#] D E F[#] G A；
 - f[#] 小调：以 F 音为起始音，3 个升号，F[#] G[#] A B C[#] D E；
 - c[#] 小调：以 C 音为起始音，4 个升号，C[#] D[#] E F[#] G[#] A B；
 - g[#] 小调：以 G 音为起始音，5 个升号，G[#] A[#] B C[#] D[#] E F[#]；
 - d[#] 小调：以 D 音为起始音，6 个升号，D[#] E[#] F[#] G[#] A[#] B C[#]；
 - a[#] 小调：以 A 音为起始音，7 个升号，A[#] B[#] C[#] D[#] E[#] F[#] G[#]；
 - 降号（不考虑重降号），7 个调：
 - d 小调：以 D 音为起始音，1 个降号，D E F G A B^b C；
 - g 小调：以 G 音为起始音，2 个降号，G A B^b C D E^b F；
 - c 小调：以 C 音为起始音，3 个降号，C D E^b F G A^b B^b；
 - f 小调：以 F 音为起始音，4 个降号，F G A^b B^b C D^b E^b；
 - b^b 小调：以 B 音为起始音，5 个降号，B^b C D^b E^b F G^b A^b；
 - e^b 小调：以 E 音为起始音，6 个降号，E^b F G^b A^b B^b C^b D^b；
 - a^b 小调：以 A 音为起始音，7 个降号，A^b B^b C^b D^b E^b F^b G^b；

所以大调小调一起总共 30 个调。

上述两种计算方式的结果不同，主要在于用传统乐理构建出的调中，B 大调与 C^b 大调、F[#] 大调与 G^b 大调、C[#] 大调与 D^b 大调这三者的构建音完全相同；g[#] 小调与 a^b 小调、d[#] 小调与 e^b 小调、a[#] 小调与 b^b 小调这三者的构建音也完全相同（其实这就是三条大调音阶及他们的关系小调音阶），所以有 6 个调实际是重复的。

理论上来说，确定一个调性后，其中每一个音都代表着不同的含义，理应是独立的，只是在十二平均律下会出现固定音高的“撞车”现象；从实用角度来说，采用不同的固定音高来记忆明显更加方便简洁，且具有较好的数学含义和相对关系。

3.1.2 音程关系

为了度量不同音高之间的“距离”，需要一种统一的描述——在音乐中这种关系被称为音程（Interval），单位为度。

首先介绍自然大调音阶中的音程关系。

一个自然大调音阶可以用 1 2 3 4 5 6 7 来表示（首调记谱法），1 音和 1 音之间为一

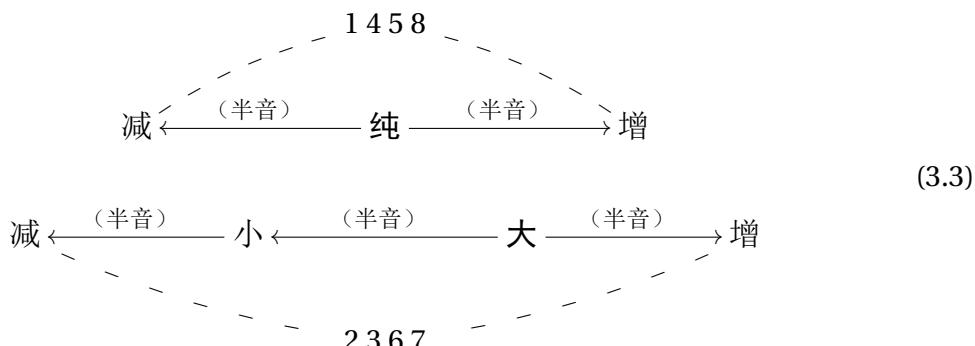


度（自己跟自己），1音与2音之间为二度，以此类推，1音与下一个两倍频关系中的1音即为八度。所以乐理中常说的“高八度”即是比起始音高两倍频的那个音。

由于这里丈量音程关系都是从1音开始数的。如果要从其他音开始计算音程关系，首先需要从这个音开始，令其为起始音，再构建出一条大调音阶，然后采用上述相同的度量方式进行计算即可。

当遇到自然大调音阶以外的音时，很明显上述记法已不足以进行描述，所以需要进一步扩展。这里先给出一个定义：在自然大调音阶里，每一个音与第一个音之间的距离，都叫做“纯”（Perfect）或“大”（Major）音程。然后，按照口诀“一四五八，二三六七”对音程关系进行分类。若属于“一四五八”度的范畴，则称为“纯”，在此基础上降半音的音称为“减”，升半音的音称为“增”；而若属于“二三六七”度的范畴，则称为“大”，在此基础上降半音的音称为“小”，再降半音称为“减”，升半音的音称为“增”。

以上描述可用下面的关系式进行归纳：



对音程关系按照“一四五八，二三六七”进行分类的原因在于，一度、四度、五度、八度的频率倍数关系分别为 $1, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, \frac{2}{1}$ （详见表2.4），这些是最靠前的频率比值，所以音程关系更加“纯”。

例题3.1 试给出C[#]音和E音、D^b音和G音之间的音程关系。

解 分别进行分析：

- C[#]音和E音：C[#]音频率较低，以其作为起始音构建大调音阶，即C[#]大调，C[#] D[#] E[#] F[#] G[#] A[#] B[#]。C[#]音到E[#]音为三度，所以称为“大三度”，降半音，则C[#]音和E音之间称为“小三度”；
- D^b音和G音：D^b音频率较低，以其作为起始音构建大调音阶，即D^b大调，D^b E^b F G^b A^b B^b C。D^b音到G^b音为四度，所以称为“纯四度”，升半音，则D^b音和G音之间称为“增四度”。

注 关于音程关系的命名，有时并不唯一。以上述问题中的D^b音和G音为例，这里也可以考虑G音是D^b大调中的第五音A^b降半音得到的，按照类似的规律可以称之为“减五度”。另外，“增四减五”按照全音关系也可以称为“三全音”。三全音的频率比值为5:7，已经属于较靠后的泛音系列，所以音程关系并不和谐。

后续最常用的音程关系即为大三度和小三度。所以这里提前进行强调：大三度的音程为2个全音（4个半音），而小三度的音程为1个全音+1个半音（3个半音）。

3.1.3 和弦

给定一种调式音阶，则可以在其中任选多个音进行“绑定”产生共鸣。由于不同音之间具有不同的频率关系，所以不同的组合将形成不同的声音色彩，这便是和弦（Chord）。在和弦的概念中，一般指三个音及三个音以上的单音组合（两个音只能称为音程），且音与音之间的最小间隔通常来说起码要跨过调式音阶内的一个音（音程关系为大三度或小三度），不然就仍是音阶。

在介绍和弦之前，首先需要给出级数的概念。一个自然大调音阶的级数与唱名之间的对应关系如下表3.5所示：

表 3.5: 通过自然大调音阶构建级数的概念

自然大调音阶	1	2	3	4	5	6	7
级数	I	II	III	IV	V	VI	VII
术语	主音	上主音	中音	下属音	属音	下中音	导音

简单来说，大调音阶的每一个音除了本身的声音属性以外，还具有功能属性。例如I级即为主音，每一个调式音阶都是围绕主音展开的，所以主音具有“家”的功能属性；而VII级导音由于与I级主音只相差一个半音，所以具有强烈的“导向主音”意味，也被称为“解决”的“倾向性”。

在级数的概念下，音阶中的每一个音也被称为音级。

脱离和弦单独讲级数是不完备的，因为所谓“功能属性”本身就是一个复合概念。对自然大调音阶来说，每一级均可以延伸出一个最简单的三个单音组成的和弦：I级和弦（135）、II级和弦（246）、III级和弦（357）、IV级和弦（461）、V级和弦（572）、VI级和弦（613）、VII级和弦（724）。这些和弦本身的色彩以及其向下一个和弦“流动”的倾向性都将强化所在级数的功能属性。

对于自然小调来说，与前述类似，同样具有关系大调视角和纯首调视角两种级数的定义。但与唱名需根据音程关系进行变化音的调整不同，一旦确定一种描述级数的视角，仍然采用I到VII级的级数定义，具体可通过下表3.6进行说明：

表 3.6: 两种自然小调的唱名与级数表示法

关系大调视角	唱名	6	7	1	2	3	4	5
	级数	VI	VII	I	II	III	IV	V
纯首调视角	唱名	1	2	^b 3	4	5	^b 6	^b 7
	级数	I	II	III	IV	V	VI	VII

选择上述任一视角，确定唱名所对应的级数后，若遇到调式以外的音，再通过变音符号对级数进行升降处理。

需要说明的是，以上两种视角在小调的级数使用中均很常见。后续对小调的分析中，将视具体情况采用两种视角中的一种进行级数定义。



此外，自然小调中和弦的构造与自然大调类似，均是在每一级上通过隔一个音的方式延伸出不同的和弦。

 **笔记** 在一个八度内按照级数构造和弦，会发现有些和弦内音将超出一个八度。这些音由于均可以在原八度内找到高度和谐的替代音（音程关系为八度），所以为方便理解，也可以用原八度内的唱名来表示，和弦整体将具有类似的声音效果。后续描述中，从和弦记法上考虑，超出八度的音还是采用其本身的唱名，但必要时会用括号标记出相应的原八度内唱名。事实上，这种相互的数学关系也较为明确，第二个八度内的音只要减去7，即为原八度内高度和谐的替代音。

由于和弦种类繁多，且和弦内音个数不一，所以寄希望可以给出一种简化的和弦表示法，通过和弦代号便可以清楚知晓所使用和弦内的所有音。

一个完整的和弦代号一般包括顺序排列的三个部分：

1. **根音所指代的音名或级数**：一个和弦中的最低音也被称为**根音**（最高音为冠音）。根音是一个和弦性质的基础，在和弦代号中，可以用具体音名表示（固定调记谱法），也可以用级数表示（首调记谱法）；
2. **基础和弦记号**：不同的和弦采用不同的基础和弦记号，后面会详细介绍；
3. **其他需要标记出的和弦内音**：一个和弦若还包括无法通过“根音 + 基础和弦记号”方式表达的和弦内音，则单独加在后面。这里需要强调所谓的和弦内音有两种定义：一是和弦代号中的和弦内音标记，一般以根音作为I级，其他音按照此基准通过音程关系给出；二是与唱名表示法一致，将调（Key）的起始音作为I级，和弦内音均按照此基准通过音程关系给出。后续描述中，不做特殊说明，一般采用第一种定义描述“和弦内音”。另外，由于根音会用到级数表达（大写罗马数字），所以和弦内音一般通过阿拉伯数字进行标记。

接下来，将一一列出所有常用的基础和弦表示法（均以C音作为根音举例）：

首先是**大和弦**。大和弦是由自然大调音阶延伸出的一系列和弦。即，以根音作为自然大调音阶的I级主音，可供选择的和弦内音就是该音阶内的音：

- 三个音：大三和弦，和弦代号为C（省略maj后缀），和弦内音为1 3 5；
- 四个音：大七和弦（约定俗成，意指七度四个音的和弦，后续类似），和弦代号为Cmaj7，和弦内音为1 3 5 7；
- 五个音：大九和弦，和弦代号为Cmaj9，和弦内音为1 3 5 7 9(2)；
- 六个音：大十一和弦，和弦代号为Cmaj11，和弦内音为1 3 5 7 9(2) 11(4)；
- 七个音：大十三和弦，和弦代号为Cmaj13，和弦内音为1 3 5 7 9(2) 11(4) 13(6)。

这里只需列到十三和弦，因为十五度将又回到比初始主音高两个八度的“**和声音**”，可以视作和弦内音出现了重复，不应考虑为不同的和弦。

接下来是**小和弦**。小和弦是由自然小调音阶延伸出的一系列和弦。即，以根音作为自然小调音阶的I级主音¹，可供选择的和弦内音就是该音阶内的音：

- 三个音：小三和弦，和弦代号为Cm，和弦内音为1 ♫3 5；

¹注意这里采用的是纯首调视角。

- 四个音：小七和弦，和弦代号为 Cm7，和弦内音为 1 ♭3 5 ♭7；
- 五个音：小九和弦，和弦代号为 Cm9，和弦内音为 1 ♭3 5 ♭7 9(2)；
- 六个音：小十一和弦，和弦代号为 Cm11，和弦内音为 1 ♭3 5 ♭7 9(2) 11(4)；
- 七个音：小十三和弦，和弦代号为 Cm13，和弦内音为 1 ♭3 5 ♭7 9(2) 11(4) 13(6)。

需要说明的是，在自然小调中，13 音理应为 ♭13(♯6)。但是在小十三和弦的和弦内音中，依然采用与大十三和弦相同的 13 音，其原因主要是为了统一和弦代号的表示法。若和弦中有 ♭13(♯6) 音出现时，只需临时标记出即可。

除了大小和弦以外，还有一类音乐中非常重要的和弦系列，被称为属（Dominant）和弦。属和弦即为自然大调中的 V 级和弦（唱名为 5 7 2），若将其延伸至七和弦，则和弦的音级包括 5 7 2 4（音程关系为“大三度、小三度、小三度”，用和弦内音表示则为 1 3 5 ♭7）。其中 7 音和 4 音呈现“三全音”，非常不稳定，7 音有向 1 音“解决”的“倾向性”，而 4 音则有向 3 音“解决”的“倾向性”。所以一个 V 级的属七和弦将有强烈向 I 级主和弦进行的“导向”，即具有“从属”的性质。此外，一个属和弦可以唯一确定乐曲的调（Key）²，因为一个自然大调音阶中只有唯一一个 V 级属和弦（而大小和弦可能重复出现在不同的调中）。

问题 3.2 一个和弦的和弦内音分别为 E♭ G B♭ D♭，满足“大三度、小三度、小三度”的音程关系。试问能否根据该和弦的属性，确定乐曲的调（Key）？

解 根据该和弦的音程关系，可知其为属七和弦。确定其属和弦的性质后，则可明确该和弦为 V 级和弦，进一步确定和弦内音 E♭ G B♭ D♭ 分别为 V 级属音、VII 级导音、II 级上主音，以及 IV 级下属音。所以 I 级主音为 A♭，该乐曲为 A♭ 调。

属和弦同样是由自然大调延伸出的一系列和弦（从七和弦开始，因为三个音的三和弦，音程关系与大三和弦完全相同，无法用不同的代号表示），但需要以自然大调音阶的 V 级属音作为根音，可供选择的和弦内音仍然是该音阶内的音³：

- 四个音：属七和弦，和弦代号为 C7，和弦内音为 1 3 5 ♭7；
- 五个音：属九和弦，和弦代号为 C9，和弦内音为 1 3 5 ♭7 9(2)；
- 六个音：属十一和弦，和弦代号为 C11，和弦内音为 1 3 5 ♭7 9(2) 11(4)；
- 七个音：属十三和弦，和弦代号为 C13，和弦内音为 1 3 5 ♭7 9(2) 11(4) 13(6)。

除了大、小、属三大和弦家族以外，还有一些特殊的和弦记号，罗列如下：

- **sus**：挂留和弦⁴，表示用和弦内音中的 2 音或 4 音替换掉大三和弦中的 3 音，符号写在基础和弦记号后面。当用 4 音替换时可以直接写作 sus（具有强烈向大三和弦解决的倾向性），而用 2 音替换时一般写作 sus2：

- e.g. Csus2 和弦，表示 C 大三和弦的 3 音替换为 2 音，和弦内音为 1 2 5；
- **add**：表示增加音（一般增加的是调式音阶内的音），符号写在基础和弦记号后面（增加什么和弦内音就再写在 add 的后面）：

²注意这里不区分大小调，即将大小调视作关系调对待。

³将 V 级属音当作和弦内音的 1 音，其他音根据自然大调的音程关系做临时升降处理（7 音变为 ♭7 音）。

⁴挂留和弦是极少数和弦音程关系存在大二度，而非大三度和小三度的和弦。

- e.g. Cadd9 和弦, 表示 C 大三和弦再加一个 9 音, 和弦内音为 1 3 5 9(2);
- omit: 表示省略音, 符号写在基础和弦记号后面 (省略什么和弦内音就再写在 omit 的后面, omit 有时也会写作 no):
 - e.g. C7omit5 和弦, 表示 C 属七和弦省略 5 音, 和弦内音为 1 3 \flat 7;
- aug: 特指增三和弦的记号。增三和弦可以看作是大三和弦的 5 音变为 $\#$ 5 音。增三和弦也可以延伸到七和弦, 和弦记号为 aug7。注意这里的 7 指的是属七音, 即在五度音上再堆叠小三度音; 若想堆叠大三度音, 一般写作大七和弦, 然后单独标记出 $\#$ 5 音:
 - e.g. Caug7 和弦, 表示 C 属七和弦的 5 音变为 $\#$ 5, 和弦内音为 1 3 $\#$ 5 \flat 7;
- dim: 特指减三和弦的记号。减三和弦可以看作是小三和弦的 5 音变为 \flat 5 音。减三和弦也可以延伸到七和弦, 和弦记号为 dim7。注意这里的 7 指的是重降七音, 所以从音程关系来看, 减七和弦的音程均为小三度 (与增三和弦类似, 不满足这样音程关系的和弦应当采用其他和弦代号):
 - e.g. Cdim7 和弦, 表示 C 减七和弦, 和弦内音为 1 \flat 3 \flat 5 \flat 7(6);
- \emptyset : 特指半减七和弦的记号。半减七和弦可以看作减七和弦的七音只减去“一半”, 所以为降七音:
 - e.g. C \emptyset 和弦, 表示 C 半减七和弦, 和弦内音为 1 \flat 3 \flat 5 \flat 7;
- 0: 和弦代号后面可以在括号里添加任意多余的信息, 或者当和弦代号较为复杂时, 也可以把次要信息放在括号里:
 - e.g. Cm7(\flat 9) 和弦, 表示 C 小七和弦再加一个 \flat 9 音, 和弦内音为 1 \flat 3 5 \flat 7 \flat 9(\flat 2);
 - e.g. Cm(add9,11), 该和弦也可以写作 Cm11(omit7), 表示 C 小和弦的变化型, 和弦内音为 1 \flat 3 5 9(2) 11(4)。

以上的和弦代号和特殊记号已基本可以囊括绝大多数和弦的表示。当然仍会存在一些特殊情形, 这里列举以下两个例子:

- 斜杠和弦: 斜杠和弦的表示方法为“和弦代号/低音”, 念作“和弦代号 on 低音”。其中的低音可能是和弦内音, 也可能不是 (注意与根音区分)。当低音是和弦内音时, 一般称为转位和弦 (和弦内音的顺序做了调整, 根音不变但低音发生了变化)。另外, 通过斜杠和弦代号判断和弦内音⁵, 需要回到音程关系来推导:
 - e.g. F/C 和弦, 即 F 大三和弦, 但低音为 C 音。F 大三和弦按照音程关系, 和弦内音的音名包括 F A C, 会发现此时低音刚好是和弦内音 (低八度的 C 音)。所以可以按和弦内音的顺序转换两次低音 (称为第二转位), 将低音变为 C 音, 和弦内音的音名顺序为 C F A。在古典乐理中, 大三和弦的第二转位也被称为四六和弦 (低音上方四度音和六度音);
 - e.g. II \flat /IV 和弦, 即 II \flat 级大三和弦, 但低音落在 IV 级上。II \flat 级大三和弦按

⁵这里和弦内音最好用具体音名或音级 (根据和弦的级数作为基准) 来表示, 而非用和弦代号中的和弦内音 (以和弦根音作为 1 音)。

照音程关系，和弦内音的音级（以和弦的级数为基准）包括 $\flat 2\ 4\ \sharp 6$ ，会发现此时低音刚好也是和弦内音（IV级音）。所以可以按和弦内音的顺序转换一次低音（称为第一转位），将低音变为IV级音，和弦内音的音级顺序为 $4\ \sharp 6\ \flat 2$ 。在古典乐理中，II \flat 级（大小调均可）大三和弦的第一转位也被称为**那不勒斯（Neapolitan）六和弦**（古典时期常被用于那不勒斯的音乐家，故得名。低音上方六度音），和弦代号也可以写作N6；

- **数字低音和弦：**和弦的数字低音表示法是另一种和弦的简化代号，在很早的古典音乐时期便用于和弦的标记。其表示方式是通过“低音（音名或级数）+和弦内其他音（以低音作为1音，按竖直方向由下到上写在后面）”来标记。由于前面介绍的现代和弦表示法目前已相当普及，所以数字低音一般作为补充，描述那些较难用现代和弦表示法囊括的和弦：

- e.g. 首先上述四六和弦（还是以C和弦为例）可以用数字低音表示为C $\frac{6}{4}$ ，但该和弦等同于斜杠和弦F/C，所以并不需要采用数字低音表示法；
- e.g. C $\frac{9}{6}$ 和弦，即低音为C音，与上方六度音和九度音组成的和弦，被称为六九和弦，和弦内音为1 6 9(2)（仍具有C和弦性质，根音也为C）。这个特殊的和弦明显无法用现代和弦代号进行表示，所以只能采用数字低音。

除此以外，后续如果再遇到其他特殊的和弦，则具体情况具体分析。

以上关于众多和弦的介绍过于冗长，为方便查找，这里首先将所提及的全部和弦及它们的和弦内音简化归纳如下（仍然以C和弦为例）：

表3.7：常用和弦及它们的和弦内音

大和弦	C (1 3 5)	Cmaj7 (1 3 5 7)	Cmaj9 (1 3 5 7 9)
	Cmaj11 (1 3 5 7 9 11)	Cmaj13 (1 3 5 7 9 11 13)	
小和弦	Cm (1 \flat 3 5)	Cm7 (1 \flat 3 5 \flat 7)	Cm9 (1 \flat 3 5 \flat 7 9)
	Cm11 (1 \flat 3 5 \flat 7 9 11)	Cm13 (1 \flat 3 5 \flat 7 9 11 13)	
属和弦	Cm (1 \flat 3 5)	Cm7 (1 \flat 3 5 \flat 7)	Cm9 (1 \flat 3 5 \flat 7 9)
	Cm11 (1 \flat 3 5 \flat 7 9 11)	Cm13 (1 \flat 3 5 \flat 7 9 11 13)	
特殊和弦记号	Csus2 (1 2 5)	Cadd9 (1 3 5 9)	C7omit5 (1 3 \flat 7)
	Caug7 (1 3 \sharp 5 \flat 7)	Cdim7 (1 \flat 3 \flat 5 \flat 7)	C \emptyset (1 \flat 3 \flat 5 \flat 7)
	Cm7(\flat 9) (1 \flat 3 5 \flat 7 \flat 9)	Cm(add9,11) = Cm11(omit7) (1 \flat 3 5 9 11)	
其他特殊情形	F/C = C $\frac{6}{4}$ (音名 C F A)	II \flat /IV (唱名 4 \flat 6 \flat 2)	C $\frac{9}{6}$ (1 6 9)

对于和弦的记忆，一般需要长期的反复使用外加大量实操练习才可逐渐适应和弦与其和弦内音在乐器上的对应关系。不过和弦也只是在确定调式下的某种单音排列组合，其逻辑关系依然有迹可循。下面将总结一些和弦相关的基础性质以及经验规律，以期加深对和弦概念的印象。

性质 和弦相关的基础性质及经验规律：

- 当根音保持一致，不论大、小、属和弦，其9音、11音、13音均完全相同；
- 除了挂留和弦，其余主要介绍的和弦内音相对关系全部为大三度或小三度；

- 大三和弦由大三度加小三度构成，小三和弦由小三度加大三度构成：
 - 大七和弦是在大三和弦上方堆叠大三度；
 - 属七和弦是在大三和弦上方堆叠小三度；
 - 另外，小三和弦下方堆叠大三度也是属七和弦；
 - 小七和弦是在小三和弦上方堆叠小三度；
 - 另外，大三和弦下方堆叠小三度也是小七和弦；
- 七和弦只要把根音升高半音：
 - 大七和弦变为半减七和弦。e.g. Cmaj7 和弦根音升高半音 = C[#]Ø；
 - 属七和弦变为减七和弦。e.g. C7 和弦根音升高半音 = C[#]dim7；
- 增三和弦的音程关系为两个大三度，三个大三度刚好构成八度循环。所以如果将增三和弦的两种转位也视为相同和弦，则十二平均律中总共只有四类不同的增三和弦；同理，减七和弦的音程关系为三个小三度，而四个小三度刚好也构成八度循环。所以类似地，如果将转位和弦也视为相同和弦，十二平均律中总共也只有三类不同的减七和弦（可视化解释见附录H.1）。

接下来，将通过一系列实际练习强化对和弦及其和弦内音的认识与记忆。首先是通过和弦代号判断和弦内音。

 **练习 3.1** 试分别给出和弦 B^bmaj13(#11)、Gm9(add13)、B11sus、Fm6、F[#]Ø、A^bdim7、D/C、E^b6 和弦内音的音名。

解 根据和弦代号分别进行分析，并结合问题3.1中给出的所有大小调的音名，可得：

- B^bmaj13(#11)：大十三和弦，和弦内音包括 1 3 5 7 9 11 13，括号内标记了 #11，一般表示添加的信息，但这里默认表示将 11 音替换为 #11 音。和弦的根音为 B^b，则根据音程关系和弦内音的音名包括 B^b D F A C E G；
- Gm9(add13)：小九和弦，和弦内音包括 1 ^b3 5 ^b7 9，括号内标记了 add13，表示添加 13 音。和弦的根音为 G，则根据音程关系和弦内音的音名包括 G B^b D F A E；
- B11sus：属十一和弦，和弦内音包括 1 3 5 ^b7 9 11，sus 表示 3 音替换为 4 音。和弦的根音为 B，则根据音程关系和弦内音的音名包括 B E F[#] A C[#] E；
- Fm6：小三和弦，和弦内音包括 1 ^b3 5，后面写的 6 比较特殊，指的是以 F 为起始音的大六度音，而非自然小调中的六度音（应当标记为 ^b6）。和弦的根音为 F，则根据音程关系和弦内音的音名包括 F A^b C D；
- F[#]Ø：半减七和弦，和弦内音包括 1 ^b3 ^b5 ^b7。和弦的根音为 F[#]，则根据音程关系和弦内音的音名包括 F[#] A C E（可根据 F 大七和弦的根音升半音快速得到）；
- A^bdim7：减七和弦，和弦内音包括 1 ^b3 ^b5 ^bb7。和弦的根音为 A^b，则根据音程关系和弦内音的音名包括 A^b B D F（可根据 G 属七和弦的根音升半音快速得到）；
- D/C：斜杠和弦，主要和弦为 D 大三和弦，但低音为 C，直接根据音程关系得到和弦内音的音名包括 C D F[#] A；
- E^b6：六九和弦，和弦内音包括 1 6 9。和弦的低音（根音）为 E^b，则根据音程关系和弦内音的音名包括 E^b C F。

反过来，给定一串音名，理论上也可以用和弦代号进行表示（其实这才是使用和弦代号的意义）。但需要说明的是，并不是所有和弦均只有一种和弦代号。一个和弦只有在分析出其在乐曲中的实际作用，才能够最终确定和弦代号。不过这里可以提前给出一些单独判断也不太会产生争议的和弦案例，主要是为了强化对和弦与和弦代号之间关系的理解。

练习 3.2 和弦的根音均为 C 音，和弦内音分别为 1 5 11、1 \flat 3 5 7、1 3 \sharp 5 7、1 3 7 \sharp 11 \flat 13，试给出以上和弦的和弦代号。

解 根据描述分别进行分析：

- 1 5 11：这个和弦很奇特。一般来说，11 音应该属于某个大小属和弦的延伸音⁶，但这里既未给出 3 音也未给出 7 音，所以无法确定其为大小属和弦的系列。事实上，11 音可以等同于 4 音，所以该和弦应当写作 Csus。实际演奏该和弦，也能够明显听到挂留和弦的意味，而非大小属和弦中 11 音作为延伸音的感觉；
- 1 \flat 3 5 7：这个和弦看前三个音，确定为小三和弦，但多出的 7 音为大七度，所以这里的和弦代号应当写作 Cmmaj7。该和弦一般也被称为小大七和弦；
- 1 3 \sharp 5 7：这个和弦看前三个音，应当为增和弦，但多出的 7 音并非为属七音，所以无法用 aug7 来表示。这里应当先通过 1 3 7 三个音确定为大七和弦，然后单独标记出 \sharp 5 音，和弦代号为 Cmaj7(\sharp 5)；
- 1 3 \flat 7 \sharp 11 \flat 13：这个和弦看前三个音，确定其为属七和弦，后面两个音均为扩展音⁷，写在括号中即可，和弦代号为 C7(\sharp 11 \flat 13)。在 Jazz 音乐中，这样带扩展音的和弦也被称为变化 (Alter) 和弦，和弦代号可以简单用 C7alt 表示，说明不用在意具体的扩展音，怎么加都合理。

本节的最后，简单通过调式音阶（自然大调和自然小调）的例子，从级数引申到和弦，并再次强调和弦在调式音阶中所具备的功能属性概念。

例题 3.2 试给出自然大调音阶的 7 个顺阶三和弦、七和弦，和弦代号用级数表示。

解 根据自然大调音阶的音程关系，以调 (key) 的起始音作为 I 级，可以按顺序得到 7 个顺阶三和弦的和弦代号分别为 I IIIm IIIIm IV V VIIm VIIIdim；7 个顺阶七和弦的和弦代号分别为 Imaj7 IIIm7 IIIIm7 IVmaj7 V7 VIIm7 VII \emptyset 。

用级数表示和弦时，和弦内音应当采用前述第二种定义方式，即与音阶的音级保持一致，这样更加方便描述不同和弦之间的关联。另外，这里和弦内音均采用一个八度内的音级进行示意。综上，自然大调音阶的 7 个顺阶三和弦与七和弦可归纳如下：

表 3.8：自然大调音阶中的 7 个顺阶和弦

三和弦	I	IIIm	IIIIm	IV	V	VIIm	VIIIdim
	1 3 5	2 4 6	3 5 7	4 6 1	5 7 2	6 1 3	7 2 4
七和弦	Imaj7	IIIm7	IIIIm7	IVmaj7	V7	VIIm7	VII \emptyset
	1 3 5 7	2 4 6 1	3 5 7 2	4 6 1 3	5 7 2 4	6 1 3 5	7 2 4 6

⁶延伸音表示在基础和弦以外，但仍然在调式音阶内的音。

⁷扩展音表示已经在调式音阶以外的音。

可以看到，在自然大调音阶中构造的和弦，基本上均为大和弦与小和弦，另外还有一个属和弦与减和弦。前面已经提前介绍过，V级属和弦具有强烈的向I级主和弦解决的倾向性。事实上，一首乐曲只要围绕I级主和弦展开，最后通过V级属和弦回到I级主和弦，中间进行和弦连接的方式具有相当高的自由性（和弦连接也是一个重要课题，后续会详细展开），这也造就了除了和弦本身制造的声响特性以外，通过“和弦的流动性”对和弦产生的附加功能属性。

例题3.3 试给出自然小调音阶的7个顺阶三和弦、七和弦，和弦代号用级数表示。

解 根据自然小调音阶的音程关系，考虑到其具有两种音级定义的视角（关系大调视角和纯首调视角），这里均加以介绍。

首先是以关系大调的起始音作为I级（和弦内音的音级也相同），可以按顺序得到自然小调音阶的7个顺阶三和弦分别为VI_m VII_{dim} I II_m III_m IV V；7个顺阶七和弦分别为VI_{m7} VII_Ø I_{maj7} II_{m7} III_{m7} IV_{maj7} V₇。

简单来说就是把前述自然大调音阶的顺阶和弦改变了一下顺序。下表3.9归纳了关系大调视角下自然小调音阶的7个顺阶三和弦与七和弦：

表3.9: 自然小调音阶中的7个顺阶和弦（关系大调视角）

三和弦	VI _m	VII _{dim}	I	II _m	III _m	IV	V
	6 1 3	7 2 4	1 3 5	2 4 6	3 5 7	4 6 1	5 7 2
七和弦	VI _{m7}	VII _Ø	I _{maj7}	II _{m7}	III _{m7}	IV _{maj7}	V ₇
	5 7 2 4	6 1 3 5	7 2 4 6	1 3 5 7	2 4 6 1	3 5 7 2	4 6 1 3

接下来是以自然小调音阶的起始音作为I级（和弦内音的音级也相同），可以按顺序得到自然小调音阶的7个顺阶三和弦分别为I_m II_{dim} III IV_m V_m VI VII；7个顺阶七和弦分别为I_{m7} II_Ø III_{maj7} IV_{m7} V_{m7} VI_{maj7} VII₇。

下表3.10归纳了纯首调视角下自然小调音阶的7个顺阶三和弦与七和弦：

表3.10: 自然小调音阶中的7个顺阶和弦（纯首调视角）

三和弦	Im	II _{dim}	III	IV _m	V _m	VI	VII
	1 ^b 3 5	2 4 ^b 6	^b 3 5 ^b 7	4 ^b 6 1	5 ^b 7 2	^b 6 1 ^b 3	^b 7 2 4
七和弦	Im ₇	II _Ø	III _{maj7}	IV _{m7}	V _{m7}	VI _{maj7}	VII ₇
	1 ^b 3 5 ^b 7	2 4 ^b 6 1	^b 3 5 ^b 7 2	4 ^b 6 1 ^b 3	5 ^b 7 2 4	^b 6 1 ^b 3 5	^b 7 2 4 ^b 6

在自然小调音阶中构造的和弦，其基本特性与自然大调中的完全一致，只是和弦的顺序不一样，所以便形成了大小调不同的声音色彩。例如自然大调的I级和弦是大和弦，而自然小调的I级和弦（纯首调视角）为小和弦。根据表3.1和3.3中大小调音阶各个音的倍频关系（大三和弦三个音的倍频关系为 $1, \frac{5}{4}, \frac{3}{2}$ ，而小三和弦三个音的倍频关系为 $1, \frac{6}{5}, \frac{3}{2}$ ）可知，大和弦纯天然就比小和弦听上去更加和谐⁸。所以人们常说，大调是阳光、明朗的，而小调是阴暗、忧郁的，实际上是在描述大小调的和弦色彩。而

⁸事实上，若按照倍频关系，sus和弦最为和谐（三个音的倍频关系为 $1, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}$ ），但其音程关系较为拥挤，所以综合来讲还是大三和弦的和谐性最高。

调式音阶均是围绕I级主音展开的，I级主和弦占据了主导作用，所以才会形成对于大小调不同的听觉感受。

以上两个例子，无论是在自然大调还是自然小调中，当描述和弦的功能属性时均不仅仅只针对孤立的和弦本身，还应考虑到不同级数上和弦的连接方式。和声学便是在此基础上应运而生。音乐术语中的和声（Harmony），事实上包含两个部分：和弦+和弦连接。而和弦连接所形成的走向也被称为和弦进行（Progression）。这些和弦相关的进阶内容将在后续的章节中进一步详细展开。

3.1.4 节奏

在音乐中，节奏（Rhythm）也是相当重要且关键的元素之一。但在介绍节奏之前，首先要引出节拍（Meter）的概念。

节拍是一种固定型，描述了一种在时间轴上具有循环特性，但在声音强弱上错落有致的组织形式。节拍的基本单元称为“拍子”，不同时长的拍子是通过不同的音符来体现的。下表3.11描述了不同音符之间的关系（以全音符的时值作为基准）：

表 3.11: 节拍中不同音符之间的关系

音符名称	全音符	二分音符	四分音符	八分音符	十六分音符
标准表示法	。	♪	♩	♪	♪
时值	/	全音符的 $\frac{1}{2}$	全音符的 $\frac{1}{4}$	全音符的 $\frac{1}{8}$	全音符的 $\frac{1}{16}$

上述音符可以继续无限制划分下去，但一般常规音乐最小的声音单元就到十六分音符，三十二分音符已较为少见。音符的具体时值一般会标记在乐曲之前，也被称为BPM（Beat Per Minute），即为每分钟的节拍数，常用四分音符作为标准。例如♩=72，表示一分钟可均匀演奏72个四分音符。

有了以上定义，则可以通过音符和拍子的基本单元在乐曲小节中构成具有规律性的节拍。节拍是乐曲的根基，“无规矩不成方圆”，正是因为有了稳固的节拍存在，乐曲的延展才具备了坚实的框架⁹。下表3.12给出了一些常用的乐曲节拍及它们的含义：

表 3.12: 乐曲中常用的节拍

节拍名称	四四拍	四二拍	四三拍	八六拍
标准表示法	$\frac{4}{4}$ 或 c	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{6}{8}$
节拍含义	以四分音符 为一拍， 每小节四拍	以四分音符 为一拍， 每小节两拍	以四分音符 为一拍， 每小节三拍	以八分音符 为一拍， 每小节六拍

乐曲以小节作为循环，每个循环内的节拍通过声音的强弱对比进一步强化听感。例如，四四拍一般让四分音符构成“强、弱、次强、弱”的声音强度，以此形成起伏

⁹并不是所有乐曲均具有固定的节拍，有的在乐曲中间会换节拍，还有的本身就是散拍。这些方式都是为了服务于作品想要表达的意向，而非肆意为之。

感；而四三拍则更倾向于构成“强、弱、弱”。五拍子和七拍子较为少见，因为无论怎样构建声音的强弱对比，一般都很难抓住节拍的规律性。

例题3.4 试通过架子鼓的演奏来说明节拍的形成。

解 架子鼓作为节奏乐器，一般利用不同的鼓组搭配提供稳定的节拍。其中，底鼓（低音大鼓）产生低频声音，军鼓产生中频声音，而镲片产生高频声音，所以可以通过这样的配置来形成具有声音强弱对比的节拍。假设底鼓用符号•、军鼓用符号○、踩镲用符号×、踩镲开镲用符号⊗来表示（关于具体的架子鼓术语这里不做展开），可以将架子鼓所演奏的一种简单四四拍用表格的形式展示如下：

表 3.13: 架子鼓演奏常规的四四拍（四小节为一组）

节拍	♩ ♩ ♩ ♩	♩ ♩ ♩ ♩	♩ ♩ ♩ ♩	♩ ♩ ♩ ♩
踩镲	⊗ × × ×	× × × ×	× × × ×	× × × ×
底鼓	•	•	•	•
军鼓	○	○	○	○

可以看到，底鼓和军鼓分别通过低频和中频提供“强”和“次强”的声音，而踩镲通过高频提供“弱”的声音。只有在四小节为一组的第一个四分音符上，通过开镲来加大音量，宣告这是一组节拍的起始。

接下来，在固定的节拍框架下，便可以通过音符间不同的排列组合进一步产生各种各样不同的节奏型¹⁰，所以节奏是千变万化的。对于乐曲来说，旋律必然需要节奏性，和弦连接事实上也具有节奏性，所以节奏是乐曲中极其关键的部分，被称为音乐的“骨骼”。

为了丰富表现力，节奏还具有许多变化形式，下面将介绍常用的几种：

1. **附点音符：**有时一个音符的时值无法用前述的单个基础音符来表示，例如“全音符的 $\frac{3}{4}$ ”这种，只能写成 $\text{J} + \text{J}$ 。所以为方便表示，可以通过附点符号（在音符右下方附加一个小点）来简化音符，表示在原音符时值基础上再增加 $\frac{1}{2}$ ：
 - e.g. $\text{J} \cdot = \text{J} + \text{J}$; $\text{J} \cdot = \text{J} + \text{J}$; $\text{J} \cdot = \text{J} + \text{J}$;
2. **连接线：**音符上方可以通过连接线进行连接。连接线有两类，一类是将音高不相同的音符进行连接，称为连音线，表示连奏（Legato），意指声音保持连贯；而另一类将音高相同的音符进行连接的方式，称为延音线，则与节奏相关，表示这些音符合并为同一个音符，所以时值是延音线音符内时值的累加。另外，连接线可以跨小节对音符进行连接，当通过延音线跨小节对音高相同的音符进行连接时，将导致节奏与节拍的一定错位，即形成短暂的“滞留感”；
3. **三连音：**一个基础拍（例如四分音符）进行三等分而得来的音符称为三连音。可以看到，若把四分音符的时值除以三，其与各种基础音符的时值均相去甚远，所以三连音的出现会在常规节奏中带来新奇的感觉。事实上，一个基础拍可以进

¹⁰由不同时值的音符组成的一串节奏称为节奏型（与基础节拍不同）。

行 N 等分，从而形成 N 连音，这样便可以覆盖各种时值的音符（对表3.11的补充），不过一般最常用的还是 $N=3$ 时的三连音；

4. 切分音：在常规节拍中，可以通过延长弱拍上的音符时值而造成“重音移位”的感觉，此时新产生的重音称为切分音。切分音也是极具特色的一类节奏型：

- e.g. 以四个八分音符的节奏为例， $\text{♪} \text{♪} \text{♪} \text{♪}$ 变化为 $\text{♪} \text{♪} \text{♪}$ ，则“强、弱、次强、弱”的强度对比变为了“弱、强、一、弱”（符号—表示前面的“强”持续两个八分音符）；

5. 休止符号：在一个节奏型中，某些位置也可以不演奏音符，此时便用休止符号进行替代。每一个常规音符都有其对应时值的休止符号。在乐曲进行中，节奏上的突然休止也会形成独特的听感。

综上，无论是旋律还是和弦连接，均可以通过以上各种方式将节奏“玩出花样”。以旋律创作为例，一段优秀的旋律，在音高选择上必然“此起彼伏、有近有远”，而在节奏上也会“长短交错、轻重不一”，最终勾勒出丝滑顺畅的旋律线条。所以，节奏是音乐魅力中的重要体现元素之一。

3.1.5 织体

最后要介绍的基础乐理概念是织体 (Texture)。音乐中的织体较为抽象，通俗一点理解即为“音乐元素的编织状态”，这种状态可以简单也可以很复杂。音乐的三大基础元素旋律、和弦、节奏均可用织体进行描述。以节奏为例，简单的织体就是普通的基础节奏型，而变化丰富的密集节奏型则是较为复杂的节奏织体。对于演奏者和改编者而言，织体也是音乐中最难把握的部分，往往需要精雕细琢，才能成就精品。

下面简单介绍几种常被提及的音乐织体类型：

1. 单声织体：一首乐曲只由一条单一的旋律组成，例如乐曲独奏，所以可以专注于旋律线条的构建。就算有伴奏，往往也只是为了陪衬主旋律；
2. 多声织体：常见于多声部编制的作品，例如弦乐/管乐四重奏，以及更为复杂的交响乐。多声织体可以在声场的纵向空间上，一层层将声音的厚度叠加上去；
3. 复调织体：音乐中多条独立发展的旋律同时进行的方式称为复调织体。相对于多声织体来说，复调织体更加突出每条旋律的独立性。他们同时存在，互为主角，但整体上仍然满足声音的和谐性，所以复调写作是极其困难的。值得一提的是，复调织体中不同的声部可以是不同的旋律各自发展（对比式复调），也可以是同一条旋律前后错位发展，甚至镜像发展（模仿式复调）；
4. 和弦织体：前面介绍的和弦是不同音高的单音堆叠，但这种堆叠在时间轴上可以同时进行，也可以按某种顺序依次进行（为保证声场效果，一般会让和弦内音一直持续），所以会构建出丰富的和弦织体。和弦织体也可以与旋律进行混合，形成浑然交错的感觉。以钢琴独奏改编为例，不同的和弦织体也许会让同一首乐曲呈现出完全不同的气质，所以非常考验改编者的音乐功底。

3.2 再谈音阶

在音乐发展的漫长历程中，除了自然大调和自然小调这两种基本调式以外，还诞生出了相当多极具特色、应用广泛的调式音阶。这些音阶中有的甚至成为了一些国家或地区所特有的色彩符号，衍生出了各式各样具有地域风情的民族音乐。所以尽管当前的音乐创作多数还是围绕传统的大小调来展开，但了解更多的调式音阶仍然对探索创作的边界大有裨益。

需要提前指出的是，以下所介绍的各种音阶，有些本身便由于特殊的音程关系而自带特色，不过更多的音阶还需要进一步结合其所搭配的和声来进行分析。也就是说，当谈到调式音阶的特色，绝大多数其实是在**功能性和声**运用上的一种“复合效应”；只有当音乐中所使用的和弦是**非功能性**的时候，作为旋律写作的“地基”，调式音阶本身的特点才能够尤其凸显。

 **笔记** 以下描述中，“调式”和“音阶”两个术语会进行混用。但约定：当需要强调起始音（调性）的重要性时，采用“调式”的说法；反之，则用“音阶”。

3.2.1 七大中古调式

七大中古调式的具体诞生契机已不可考究（大致于中世纪时期左右），但从理论分析的角度来看，均可以视作是自然大调音阶在不同级数上的衍伸调式。而且虽然名称为“中古调式”，但其实这些调式早已广泛应用于现代音乐当中。

- **伊奥尼亚（Ionian）调式：**

自然大调的I级模式，即为从自然大调的I级音开始按顺序进行排列的一种调式。不论以自然大调的唱名体系还是该调式本身的唱名体系均为1 2 3 4 5 6 7。

Ionian调式的I级和弦为大和弦，拥有与自然大调完全相同的色彩：整体上偏向于明亮、正统的感觉。

- 当使用非功能和弦时，Ionian调式将不能完全等同于自然大调音阶，但“全全半全全全半”的音程关系过于深入人心，所以若当作纯粹的横向旋律流动随意演奏调式内的音，仍然会具有悠闲、放松等色彩特点。

下表3.14对 Ionian 调式与其基本特征进行了简单归纳：

表 3.14: Ionian 调式

Ionian	唱名	1 2 3 4 5 6 7
	特征	自然大调的 I 级模式，拥有与自然大调完全相同的色彩 调式本身仍然具有悠闲、放松的感觉

- **多利亚（Dorian）调式：**

自然大调的II级模式，即为从自然大调的II级音开始按顺序进行排列的一种调式。以自然大调的唱名体系为2 3 4 5 6 7 1（这里的1指的是7音之后高八度的1音。后续类似），而以该调式本身的唱名体系则为1 2 \flat 3 4 5 6 \flat 7。



Dorian 调式的 I 级和弦为小和弦，色彩上与自然小调接近，所以也可以按照关系小调的唱名体系写作 6 7 1 2 3 #4 5。相比于自然小调，只有小六度音变为了大六度音，会给小调黯淡的色彩带来一丝明亮感。

Dorian 调式在现代音乐中应用广泛，可能会带来各种不同的音乐情绪，这取决于如何对待 Dorian 调式中的大六度音。下面罗列几种常用案例：

- 在小调的框架下，采用 Dorian 调式内的 IV 级大和弦来突出大六度音的听感，或者直接在 I 级主和弦上对大六度音进行旋律衔接，整体上均会偏向于梦幻、神圣、史诗的特点，具有明显的凯尔特（Celtic）音乐风格；
- 在调式内的 I 级主和弦上突出大六度音，相比自然小调的小六度音具有一丝“悬而未决”的意味，常用于制造焦虑、空虚的色彩（中国古典雅乐中的变徵音与此类似，常产生悲凉凄婉之感）；
- 在节奏感较强的音乐中，也会展示出其俏皮、热血、狂野的一面。

由于大六度是 Dorian 调式中的特色音程，所以在实际音乐中，也常将其作为一种独特的色彩元素，与其他调式音阶进行混用（例如可以与后续介绍的 Blues 音阶结合）。即，一首音乐不一定只围绕一种单一的调式音阶进行写作，而是会将不同调式的特征进行融合。

下表3.15对 Dorian 调式与其基本特征进行了简单归纳：

表 3.15: Dorian 调式

	唱名	1 2 ♯3 4 5 6 ♯7
Dorian	特征	自然大调的 II 级模式，色彩与自然小调接近 大六度音作为特色音，可以带来各种不同的音乐情绪

• 弗里几亚（Phrygian）调式：

自然大调的 III 级模式，即为从自然大调的 III 级音开始按顺序进行排列的一种调式。以自然大调的唱名体系为 3 4 5 6 7 1 2，而以该调式本身的唱名体系则为 1 ♯2 ♯3 4 5 ♯6 ♯7。

Phrygian 调式的 I 级和弦为小和弦，色彩上与自然小调接近，所以也可以按照关系小调的唱名体系写作 6 ♯7 1 2 3 4 5。相比于自然小调，只有大二度音变为了小二度音，会给小调黯淡的色彩继续增加一丝威胁感。

- 单从该调式上讲，其 II 级上主音为传统小调的 II^b 级，该特征音具有强烈向下解决到 I 级主音的倾向性。而此特征音作为旋律的经过音迅速得到解决时，这种倾向将会进一步强化了小调音乐的黑暗与紧张属性；
- 若从该调式上所构建的和声来讲，由于其 II 级和弦（自然小调的 II^b 级）为大和弦，而在自然小调上，II^b 级的大三和弦即为前述所介绍的 Neapolitan 和弦（没有转位）。在一个小调性质的乐曲中，一段由 I 级小和弦到 II^b 级大和弦的和弦进行，反倒会给小调的色彩带来一丝希望感。

下表3.16对 Phrygian 调式与其基本特征进行了简单归纳：



表 3.16: Phrygian 调式

Phrygian	唱名	1 \flat 2 \flat 3 4 5 \flat 6 \sharp 7
	特征	自然大调的 III 级模式，色彩与自然小调接近 调式本身极具威胁感，而和声运用有可能反倒增加希望感

Phrygian 调式有一种更为常见的变种，被称为**大弗里几亚（Phrygian Dominant）**调式。该调式可以理解为 Phrygian \sharp 3，即将 Phrygian 调式的 \flat 3 音还原，导致该调式的 I 级和弦变为了大和弦，整体色彩向大调性质靠拢。

- Phrygian Dominant 调式相比自然大调， \sharp 3 的改变会使得调式中的 II 级和 III 级之间由大二度变为增二度，III 级和 IV 级之间由大二度变为小二度，再结合本来 I 级和 II 级之间的小二度，便会在大调的框架下营造出极其强烈的**异域风情**——例如**阿拉伯音乐**的色彩；
- 而从和声上考虑，Phrygian Dominant 调式中，依然可以构建一个传统调式的 I 级向 II^\flat 级 Neapolitan 和弦的进行（回到 I 级时还可以交替使用 Phrygian 和 Phrygian Dominant 调式中的小和弦与大和弦），只不过这次是在大调体系上。而这种和弦进行将会产生一种明显的**西班牙风**，例如**弗拉明戈（Flamenco）**音乐的特色。

下表3.17对 Phrygian Dominant 调式与其基本特征进行了简单归纳：

表 3.17: Phrygian Dominant 调式

Phrygian Dominant	唱名	1 \flat 2 3 4 5 \flat 6 \sharp 7
	特征	Phrygian \sharp 3，具有强烈的异域风情，常用于 阿拉伯音乐 和声使用上则会带来 西班牙 Flamenco 音乐 的特色

• 利底亚（Lydian）调式：

自然大调的 IV 级模式，即为从自然大调的 IV 级音开始按顺序进行排列的一种调式。以自然大调的唱名体系为 4 5 6 7 1 2 3，而以该调式本身的唱名体系则为 1 2 3 \sharp 4 5 6 7。

Lydian 调式的 I 级和弦为大和弦，色彩上与自然大调接近。相比于自然大调，只有大四度音变为了增四度音，会给大调正统的色彩继续增加一丝**明亮感**。

- Lydian 调式与 Dorian 调式有着异曲同工之妙。若将两者看作大小调的关系调式（Dorian 调式以 6 音作为起始音），会发现其实特征音均为 \sharp 4 音，所以色彩有些类似。只不过 Dorian 调式更趋向于小调的性质，而 Lydian 调式则更趋向于大调；
- 由于 Lydian 调式的音程关系需要持续三个全音才会迎来一个半音，所以常被用来刻画具有**漂浮感**或**提升感**的音乐；也可以通过特征音与主音的不协和性（增四度即为三全音）制造**奇异、有趣、滑稽**的感觉；另外在影视配乐中，也常搭配更多的配器或强有力的节奏营造激昂、浩瀚的气息；



- 在和声使用上，Lydian 调式可以一直落在 I 级大和弦上，也可以通过调式内的 II 级大和弦来烘托与主音之间增四度的特征音，还可以直接通过 II 级大和弦升调到 II 级自然大调上去。但更多 Lydian 调式的和声用法还是跟前述所说类似，将其与主音之间增四度的特征音程当作一种和声色彩元素，向其他调式和声进行解决。

下表3.18对 Lydian 调式与其基本特征进行了简单归纳：

表 3.18: Lydian 调式

	唱名	1 2 3 #4 5 6 7
Lydian	特征	自然大调的 IV 级模式，色彩比自然大调更加明亮 与主音之间的增四度音程会带来漂浮、提升的感觉

- 混合利底亚（Mixolydian）调式：

自然大调的 V 级模式，即为从自然大调的 V 级音开始按顺序进行排列的一种调式。以自然大调的唱名体系为 5 6 7 1 2 3 4，而以该调式本身的唱名体系则为 1 2 3 4 5 6 ^b7。

Mixolydian 调式的 I 级和弦为大和弦，色彩上与自然大调接近。相比于自然大调，只有大七度音变为了小七度音，会让大调音阶中原来导音的位置变得更加开阔，而不再具有强烈想要解决的倾向性。

- 在 I 级大和弦上随意演奏 Mixolydian 调式，极易产生出具有中世纪风味的远古气息，但这种气息与 Dorian 调式的感觉不尽相同；
- Mixolydian 调式的 VII 级大和弦是一个非常具有特色的和弦，这里还是按照自然大调的级数来思考，即为 VII^b 级大和弦。这个和弦会制造出一种积极、明朗的色彩，常用于摇滚乐、融合乐等音乐风格中；
- 在节奏感较强的音乐中通过 I 级大和弦向 VII^b 级大和弦的和弦进行，演奏 Mixolydian 调式则会产生一种略带笨拙的活泼氛围。

下表3.19对 Mixolydian 调式与其基本特征进行了简单归纳：

表 3.19: Mixolydian 调式

	唱名	1 2 3 4 5 6 ^b 7
Mixolydian	特征	自然大调的 V 级模式，小七度音程关系会让调式更加开阔 VII ^b 级大和弦的运用会带来积极、明朗，或者活泼的色彩

- 爱奥尼亚（Aeolian）调式：

自然大调的 VI 级模式，即为从自然大调的 VI 级音开始按顺序进行排列的一种调式。以自然大调的唱名体系为 6 7 1 2 3 4 5，而以该调式本身的唱名体系则为 1 2 ^b3 4 5 ^b6 ^b7。

Aeolian 调式的 I 级和弦为小和弦，拥有与自然小调完全相同的色彩：整体上偏向于黯淡、悲伤的感觉。



- 相比于其他调式，Aeolian 调式的特征音即为与主音呈现小六度的 $\flat 6$ 音。若不突出 $\flat 6$ 的特征音，则无法判断属于哪条音阶，只会觉得具有小调的色彩。而当旋律中出现 $\flat 6$ 音时（一般采用类似分解和弦织体的方式），会制造出非常忧郁甚至悬疑、恐惧的色彩特点。

下表3.20对 Aeolian 调式与其基本特征进行了简单归纳：

表 3.20: Aeolian 调式

	唱名	1 2 $\flat 3$ 4 5 $\flat 6$ $\flat 7$
Aeolian	特征	自然大调的VI级模式，拥有与自然小调完全相同的色彩 $\flat 6$ 特征音会制造出忧郁、甚至悬疑、恐惧的情绪特点

• 洛克里亚 (Locrian) 调式：

自然大调的VII级模式，即为从自然大调的VII级音开始按顺序进行排列的一种调式。以自然大调的唱名体系为7 1 2 3 4 5 6，而以该调式本身的唱名体系则为1 $\flat 2 \flat 3 4 \flat 5 \flat 6 \flat 7$ 。

Locrian 调式的I 级和弦为减和弦，是七大中古调式中最为特殊的一种。主和弦便是不和谐的色彩，让本该承担调式重心骨的“家”有一种特殊的破败感。

- Locrian 调式因为不具备传统大小调的和声色彩，所以在古典音乐中极少使用。但由于其主和弦与调式色彩极为接近（其他调式的色彩不仅仅取决于主和弦），所以若想要渲染类似黑暗、诡谲、不稳定的氛围时，在减和弦上采用 Locrian 调式是一种不错的选择；
- 当强烈节奏搭配失真音色演奏 Locrian 调式，会让其黑暗属性得到一定缓解，营造出一种紧张与激昂并存的摇滚风，常用于金属乐等音乐风格中。

下表3.21对 Locrian 调式与其基本特征进行了简单归纳：

表 3.21: Locrian 调式

	唱名	1 $\flat 2 \flat 3$ 4 $\flat 5 \flat 6 \flat 7$
Locrian	特征	自然大调的VII级模式，I 级和弦为减和弦 色彩极其不稳定、黑暗，也常用于节奏感强烈的金属乐中

3.2.2 小调的三种模式

前面介绍的自然小调，作为基础调式的一种，无论从音程关系上还是和弦搭配上仍然具有一定局限性。最大的问题在于其七度音为小七度，并没有足够向主音解决的倾向性。所以可以将自然小调的七度音从小七度改为大七度，此时V级七和弦也由小七和弦变为了属七和弦，与自然大调一样拥有了V级向I级进行的强烈倾向性。由于以上变化基本出于对和声的考量，所以一般称为和声小调。

然而，变化为和声小调后，也会带来一些新的问题： $\flat 6$ 音和7音的音程关系为增二度，间隔太远了，而且 $5 \flat 6 7 1$ 的间隔排列与 Phrygian Dominant 调式的前四个音完



全相同，这种紧张感在传统的古典和声中很难被接受，于是便诞生出另一种小调调式，将 $\flat 6$ 音也还原为6音，此时各个音程关系均转变为较为正常的状态；此外，从旋律上看，只有调式音阶在上行时会遇到 $\flat 7$ 音没有强烈解决感的问题，所以在下行时， $\flat 7$ 音便不用改为7音，连带着 $\flat 6$ 音也不用更改。这种小调也被称为**旋律小调**。

下表3.22对三种不同的小调调式以及相关主要特征进行了归纳：

表 3.22：小调的三种模式

小调	唱名（纯首调视角）	特征
自然小调	1 2 $\flat 3$ 4 5 $\flat 6$ $\flat 7$	自然大调的VI级模式
和声小调	1 2 $\flat 3$ 4 5 $\flat 6$ 7	$\flat 7$ 变为7，V级变为属七和弦
旋律小调	上行：1 2 $\flat 3$ 4 5 6 7 下行： $\flat 7$ $\flat 6$ 5 4 $\flat 3$ 2 1	上行6、7音一起还原 下行时保持不变

以上三种小调调式，实际最常用的还是和声小调，毕竟绝大多数调性音乐还是建立在和声体系上进行创作，只是需要在旋律写作时尽量避免长期待在增二度音程附近。和声小调的乐曲**柔和中带着忧伤**，是写作**伤感乐曲**的上佳之选。

另外，由于和声小调与旋律小调均改变了音程关系，所以与自然大调类似，都将可以继续在不同级数上衍生出新的调式模式。例如 Phrygian Dominant 调式即为**和声小调的V级模式**。只是对于和声小调来说，其音程关系比较特殊，使用场景有限，并未像自然大调一样形成完整的调式模式体系（也可以用，但不具备色彩差异明显的调式特征）。至于旋律小调，由于与 Jazz 音乐有着千丝万缕的联系，后续还将做进一步展开说明。

3.2.3 五声音阶

五声音阶的概念由来已久，但这里想介绍的主要还是带有**民族特色**的几类五声音阶，且重点在于强调不同五声音阶中的音程色彩，而非与中古调式一样，将主音与主和弦作为调式的中心来分析。

- **中国五声音阶：**

中国五声音阶即传统的“宫、商、角、徵、羽”。事实上，这五个汉字指代的是一种固定的音程关系，以自然大调的唱名体系即为1 2 3 5 6。可以看到，这种五声音阶相比自然大调缺少了4音和7音，避免了小二度的存在，从而音与音之间最少也要间隔一个全音，在听感上会赋予音阶更为**大气**的色彩。

- 若追根溯源，中国五声调式是通过五度相生的方式产生的，即先给定一个起始音，然后五度五度叠加上去，可以按顺序得到宫(1)、徵(5)、商(2)、羽(6)、角(3)五个音。所以这是一种通过**五度和谐音程**构建出的音阶；
- 中国五声音阶也可以通过选择不同的起始音来衍生出不同的调式模式：I级宫调、II级商调、III级角调、V级徵调、VI级羽调。这些调式模式的色彩并

不完全一致，但通常来讲，根据中国五声音阶所写就的旋律织体，均会带来一种中正、优雅的音乐氛围。

下表3.23对中国五声音阶与其基本特征进行了简单归纳：

表 3.23: 中国五声音阶

中国五声音阶	唱名	1 2 3 5 6
	特征	对应中国传统的宫、商、角、徵、羽，音阶整体呈现出大气、正统、优雅的色彩

• **日本五声音阶：**

具有日本民族特色的五声音阶，大体上均可以用两种基本形态来描述：平调子和阴旋。

平调子即一般所说的都节调式，以自然大调的唱名体系为1 2 \flat 3 5 \flat 6，可以视作在中国五声调式基础上将3音和6音进行了降半音处理。该音阶整体上趋向于小调质感，但音程关系中极易强调出不和谐的小二度与增四度，会给小调继续增加一丝幽暗、神秘的色彩。

- 从关系大调视角上看，其唱名体系为6 7 1 3 4，与自然小调只差两个音，而其他音均没有改变。这种排列还可以进行顺序替换，以形成不同的模式，如3 4 6 7 1、7 1 3 4 6等，均是都节调式中常用的变化形式。但无论怎么改变音阶的模式，不和谐的小二度与增四度听感不会改变，仍然会具有类似日本民族风味；

下表3.24对日本五声音阶中的平调子与其基本特征进行了简单归纳：

表 3.24: 日本五声音阶（平调子）

日本五声音阶 (平调子)	唱名	1 2 \flat 3 5 \flat 6
	特征	3音和6音变为了 \flat 3音和 \flat 6音，整体趋向于小调质感 不和谐的小二度与增四度会增加音阶的幽暗色彩

另一种日本五声音阶的基本形态为阴旋，以自然大调的唱名体系为1 2 \flat 3 5 6，可以视作在平调子基础上将 \flat 6音进行了还原。该音阶整体上仍趋向于小调质感，但 \flat 6音的还原反倒会给平调子的小调色彩增加更多的紧张感。

下表3.25对日本五声音阶中的阴旋与其基本特征进行了简单归纳：

表 3.25: 日本五声音阶（阴旋）

日本五声音阶 (阴旋)	唱名	1 2 \flat 3 5 6
	特征	在平调子基础上将 \flat 6音还原为6音，仍具有小调质感 还原为6音后反倒会给音阶增加更多的紧张感

• **东南亚五声音阶：**



这里提到的东南亚五声音阶，即所谓的琉球调式，以自然大调的唱名体系为1 3 4 5 7，整体上趋向于大调质感。尽管该音阶看上去均为自然大调中的音，但由于缺少了2音和6音，同时又保留了3音和4音、7音和1音之间两个小二度音程，从而让整个音阶展现出独特的声音色彩，具有浓郁的海岛风情。

- 琉球调式与印尼等东南亚国家的音乐风格接近，例如著名的甘美兰音乐。尽管甘美兰音乐甚至都不遵循十二平均律，但琉球调式中特殊的音程听感作为一种色彩元素，早已成为东南亚音乐的特征听觉符号。

下表3.26对东南亚五声音阶与其基本特征进行了简单归纳：

表 3.26: 东南亚五声音阶

东南亚五声音阶	唱名	1 3 4 5 7
	特征	趋向于大调质感，但保留了两个小二度音程 地域特征明显，具有浓郁的海岛风情

● 印度五声音阶：

印度五声音阶也是极具地域色彩的一种音阶，以自然大调的唱名体系为1 3 4 5 \flat 7，整体上趋向于大调质感。但是 \flat 7音的出现让这条音阶产生了一些独特的音程组合，例如 \flat 7 1 3 4这四个音的音程排列为“大二度+大三度+小二度”，会带来一种奇异的听感，具有强烈的异域风情。

- 印度五声音阶与 Mixolydian 调式相当接近，只缺少了2音和6音。但两者的色彩却有着极大差异，重点还是在于音阶中音程关系的区别。事实上，许多以 Mixolydian 调式写作的音乐会带有一定异域色彩，也是因为首先强调了印度五声音阶的音程特色，再对旋律音进行的扩展（例如加入2音）。

下表3.27对印度五声音阶与其基本特征进行了简单归纳：

表 3.27: 印度五声音阶

印度五声音阶	唱名	1 3 4 5 \flat 7
	特征	趋向于大调质感，但音阶中拥有独特的音程组合 会带来奇异的听感，具有强烈的异域风情

3.2.4 音阶的横向思维

前面所介绍的所有调式音阶，均是在十二音体系下对不同单音组合的一种延伸性思考。当确定好一种调式音阶后，便可以在不同级数上构建出一系列顺接和弦，从而形成和声框架，对所创作的调性旋律进行“烘托”。

但这种创作是呆板的。如果将音乐比作一门语言，每当需要讲话交流前都必须先打好腹稿，则不能称之为随心所欲。为了达到“尽情交流”的目的，音乐演奏必然要从以固定调式、固定和声为主的纵向思维，转变为可以在合理范围内肆意演奏各类音



阶的横向思维。这也正是自 20 世纪以来，在 Jazz 音乐领域，为了实现“即兴演奏”所诞生出的颠覆性思维转变。

为了确立音阶演奏的规则，就必须要了解什么样的音阶可以在什么样的和弦上进行演奏。接下来，将主要以不同的音阶作为对象按顺序进行阐述，同时会顺带介绍更多现代音乐（特别是 Jazz 音乐）中常用的音阶。

 **笔记** 一些提前说明：横向思维更加注重“可以演奏哪些音”或“哪些音的排列”，而不是强调起始音（调性）。尽管一条音阶总有起始音，但接下来不做特殊说明，一律采用“音阶”的术语；此外，在音阶的概念中，八度音程关系的音可以视为等同，所以 $2=9$ 、 $4=11$ 、 $6=13$ ，后面会视具体情况任选其中的数字进行描述；最后，在不确定根音的情况下，将采用其他简化代号来描述和弦，例如：major= 大和弦、minor= 小和弦、dominant= 属和弦，其他情形则沿用之前的和弦记号即可。

- **大调音阶：**与七大中古调式类似，大调音阶也具有七种模式：

1. **Ionian:** 1 2 3 4 5 6 7，自然大调的 I 级模式，堆叠出的和弦为 major13，一般用于 major7（其他音可视作延伸音，不影响和弦性质。后续类似），需注意 4 音的“避免音”（与 major7 的 3 音不和谐，尽量当作“经过音”处理）；
2. **Dorian:** 1 2 \flat 3 4 5 6 \flat 7，自然大调的 II 级模式，堆叠出的和弦为 minor13，一般用于 minor7；
3. **Phrygian:** 1 \flat 2 \flat 3 4 5 \flat 6 \flat 7，自然大调的 III 级模式，堆叠出的和弦为 minor7(\flat 9 \flat 13)。虽然具有小和弦性质，但 \flat 2 音和 \flat 6 音均在其中不和谐，所以该音阶一般用于 sus(\flat 9)；
4. **Lydian:** 1 2 3 \sharp 4 5 6 7，自然大调的 IV 级模式，堆叠出的和弦为 major13(\sharp 11)，一般用于 major7(\sharp 4)。特别在 IV 级 major7 上， \sharp 4 音反而会作为 Lydian 的特征音而不用被“避免”；
5. **Mixolydian:** 1 2 3 4 5 6 \flat 7，自然大调的 V 级模式，堆叠出的和弦为 dominant13，一般用于 dominant7，需注意 4 音的“避免音”；或用于 sus（可以不向 major 解决），此时无“避免音”；
6. **Aeolian:** 1 2 \flat 3 4 5 \flat 6 \flat 7，自然大调的 VI 级模式，堆叠出的和弦为 minor11(\flat 13)，较少使用（ \flat 6 音在小和弦中不和谐），偶尔用于需强调 \flat 6 音的 minor7(\flat 6)；作为 VI 级和弦时，一般不使用调式内的 minor7，更倾向于使用 dominant7，可以有更多选择性；
7. **Locrian:** 1 \flat 2 \flat 3 4 \flat 5 \flat 6 \flat 7，自然大调的 VII 级模式，堆叠出的和弦为 minor7(\flat 9 \sharp 11 \flat 13)，一般用于 \emptyset ，需注意 \flat 2 的“避免音”。

快速找到七种大调音阶中的音：通过更为熟悉的自然大调来找。以 C dorian 为例，Dorian 为自然大调的 II 级模式，一条音阶的 II 级音是 C，则 I 级音是 B \flat ，写出 B \flat 大调音阶，再从 C 音开始按顺序排列，便是 C dorian 音阶。

- **Jazz 旋律小调音阶：**前面在小调章节的介绍中，旋律小调分上行和下行，但从音阶的横向思维上考虑，一种音阶只需要一种独立的音程关系来展现不同的音效。

所以在 Jazz 音乐中，旋律小调一般只使用上行音阶的形态。仔细观察 Jazz 旋律小调音阶，会发现其在小调的框架下塞入了四个全音音程（4 5 6 7），能提供一种独特的声响效果——更笼统一点说，即为非常明显的 **Jazz** 色彩。此外，与大调音阶类似，Jazz 旋律小调也可以衍生出七种模式：

1. Jazz Minor: 1 2 \flat 3 4 5 6 7，旋律小调的 I 级模式，堆叠出的和弦为 minor-major13，一般用于 minor-major7，即小大七和弦。此条音阶没有特别的名称，这里用 Jazz Minor 进行指代；
2. Dorian \flat 2: 1 \flat 2 \flat 3 4 5 6 \flat 7，旋律小调的 II 级模式，也可以理解为 Phrygian \flat 6，堆叠出的和弦为 minor13(\flat 9)。相比 Phrygian 来说，虽然 \flat 6 音得到了处理，但在小和弦性质下， \flat 9 音也不和谐，所以该音阶与 Phrygian 一样，一般用于 sus(\flat 9)；
3. Lydian #5: 1 2 3 #4 #5 6 7，旋律小调的 III 级模式，也被称为 Lydian Augmented，堆叠出的和弦为 major13(#11 \flat 13)，一般用于 major7(#5)；
4. Lydian \flat 7: 1 2 3 #4 5 6 \flat 7，旋律小调的 IV 级模式，也被称为 Lydian Dominant，堆叠出的和弦为 dominant13(#11)，一般用于 dominant7(#11)；
5. Mixolydian \flat 6: 1 2 3 4 5 \flat 6 \flat 7，旋律小调的 V 级模式，堆叠出的和弦为 dominant11(\flat 13)，较少使用（4 音和 \flat 6 音在属和弦中均不和谐），偶尔用于 minor-major7/V。看到 dominant7，更倾向于使用 Altered 音阶或全音音阶（后续会介绍）；
6. Locrian \sharp 2: 1 2 \flat 3 4 \flat 5 \flat 6 \flat 7，旋律小调的 VI 级模式，也被称为 Half-diminished，堆叠出的和弦为 minor7(#11 \flat 13)，一般用于 \emptyset ，相比 Locrian 来说，无“避免音”问题；
7. Super Locrian: 1 \flat 2 \flat 3 \flat 4 \flat 5 \flat 6 \flat 7，旋律小调的 VII 级模式，也被称为 Altered，堆叠出的和弦为 dominant7(\flat 9 #9 #11 \flat 13)，一般用于 dominant7(alt)。这里的 alt 指代 \flat 9、#9、#11、 \flat 13 中的任意音。

Jazz 旋律小调中的音阶若单独使用，也会如中古调式一样产生某些特殊色彩。例如 Mixolydian \flat 6 音阶，在合适的和声选择下，可以烘托出壮丽、宏大的氛围。但是更普遍的用法，还是将 Jazz 旋律小调视作横向思维下的音阶“武器库”，在即兴演奏的段落中使用，凸显自由、随性的音乐色彩。

若想要快速找到七种 Jazz 旋律小调音阶中的音，方法与前面大调音阶类似，也是先判断属于几级旋律小调，然后在更为熟悉的 Jazz Minor 音阶中去寻找。

此外，Jazz 旋律小调中，**Super Locrian** 音阶比较特殊，需要做进一步说明：

- Super Locrian 音阶的构建方法（不从 Jazz 旋律小调的 VII 级考虑）：
 - 首先给出属和弦最重要的三个音：1 3 \flat 7 (\flat 4 音就是 3 音)；
 - 在一个八度内把所有非自然大调内的音（ \flat 2 #2 \flat 5 #5）全加上即可；
 - 由于该音阶包含了 dominant7 外的所有变化音（除 7 音外，不然和弦性质会发生变化），所以也被称为 Altered 音阶。从记谱角度，四个和弦变化音

最好以和弦的堆叠数字来标记: $\flat 9(\flat 2)$ 、 $\sharp 9(\sharp 2)$ 、 $\flat 11(\flat 5)$ 、 $\sharp 13(\sharp 5)$;

- Altered 音阶的记忆方法:
 - 升半音找 Jazz Minor 音阶，再把起始音还原¹¹；
 - 降半音找自然大调音阶，再把起始音还原。
- 减音阶：减七和弦作为一个特殊和弦，没有常规音阶能与之适配。为了解决这个问题，需要构造出适合在减七和弦上演奏的人工音阶。一个常规的思路即为在该和弦基础上加入更多延伸音，但不能引入“避免音”，因为减七和弦已经足够不和谐。

这里需要再强调一下何为“避免音”：一个和弦是向上堆叠的，所以一条音阶中的音要尽量向下避免与和弦内音的小二度（半音）关系，向上则不必。例如 Ionian 音阶中，4 音因为向下与 3 音为半音关系，所以为“避免音”，但 7 音向上也与 1 音为半音，却不必视作“避免音”。

回到减七和弦，按照上面的规则，可以在减七和弦的四个音 $1 \flat 3 \flat 5 \flat 7(6)$ （以根音作为音阶的起始音）基础上继续添加与这四个音呈现大二度的延伸音 $2 4 \flat 6 7$ （这四个音刚好也构成一个减七和弦），以形成一条适合演奏减七和弦的减音阶。由于减音阶的音程关系是对称的，所以可以将其结构进行镜像，产生如下两条不同形态的减音阶：

1. Whole-Half 减音阶（可简写为 W/H-dim）： $1 2 \flat 3 4 \flat 5 \flat 6 \flat 7(6) 7$ ，音程关系为“全音-半音”交替，一般用于 dim7；
2. Half-Whole 减音阶（可简写为 H/W-dim）： $1 \flat 2 \flat 3 3 \flat 5 5 \flat 7(6) \flat 7$ ，音程关系为“半音-全音”交替，因“避免音”的存在不适合在 dim7 上演奏，反而适合用于 dominant7(alt)。相比 Altered 音阶，这条减音阶仅无 $\flat 13$ 音，多出来的 5 音和 6 音也与属和弦不冲突。

减音阶与减七和弦一样，如果只讨论不同音的组合，则一共只有三条（可视化解释见附录H.1）。事实上，由于减音阶的对称性，并不像其他音阶一样，对主音有非常明确“家”的认知，所以在实际演奏中，只用记住三条减音阶即可。

- 全音音阶：前面提到过，一条音阶的音程关系最好能形成“起伏”。减音阶由于其对称结构，其实很容易产生机械感。而全音音阶则是音程关系全部为全音的音阶，按照唱名体系为 $1 2 3 \#4 \#5 \#6$ ，音与音之间没有明确的解决倾向性，具有强烈的缥缈性质。可简写为 Whole-tone。
 - 全音音阶可以记为 Iaug 和 IIaug 合并的六声音阶，与减音阶类似，没有“家”的感觉，总共也只有两条（可视化解释见附录H.1）。全音音阶堆叠出的和弦为 dominant7($\sharp 11 \flat 13$)，一般用于 aug7，偏印象派的色彩；
 - 看到 dominant7，还是更倾向于使用 dominant7(alt)，演奏 Altered 音阶。
- Bebop 音阶：增加一个调性中心属性的环绕音，这个半音的加入会让音阶整体更加“顺滑”，也会带来一些新鲜的色彩。Bebop 音阶主要有以下四种形态：

¹¹即前面介绍的方法，Altered 音阶是 VII 级，升半音即为 Jazz 旋律小调的 I 级：Jazz Minor 音阶。



1. Bebop Dorian: 1 2 \flat 3 \flat 4 4 5 6 \flat 7, 环绕音经过于 \flat 3 和 4, 一般用于 II m 7;
 2. Bebop Dominant: 1 2 3 4 5 6 \flat 7 7, 环绕音经过于 \flat 7 和 1, 一般用于 V7;
 3. Bebop Major: 1 2 3 4 5 \flat 6 6 7, 环绕音经过于 5 和 6, 一般用于 I m aj7;
 4. Bebop Minor: 1 2 \flat 3 4 5 \flat 6 6 7, 环绕音经过于 5 和 6, 一般用于 I m aj7;
- 五声音阶: 1 2 3 5 6, 这里所介绍的用法与前面提到的中国五声音阶完全不同。4 音和 7 音的缺失会造成声场开阔、调式模糊的特点, 是极具现代色彩的音阶。一些普遍用法如下:
 - 在自然大调上, 可以形成 I、IV、V 级三条五声音阶:
 - 在 II 级和弦上, 可以演奏 I、IV、V 级五声音阶;
 - 在 V 级和弦上, 可以演奏 V 级五声音阶;
 - 在 I 级和弦上, 可以演奏 I、V 级五声音阶;
 - 在 II - V - I 的和弦进行(后续会介绍)上, 可以只演奏 V 级五声音阶(视为没有“避免音”的大调音阶);
 - 在 Major7 上, 还可以演奏 II 级五声音阶(把 major7 变为 major7(\sharp 4), 具有 Lydian 色彩);
 - 在旋律小调上, 只能形成 IV 级五声音阶。特别对于 dominant7(alt), 由于 Altered 音阶是 Jazz 旋律小调的 VII 级模式, 只要找到 dominant7(alt) 所对应的旋律小调, 便可以演奏其 IV 级五声音阶。可简单记为: 在 dominant7(alt) 上演奏距离三全音的五声音阶。
 - e.g. 在 C7(alt) 上可以直接演奏钢琴纯黑键(F \sharp 五声音阶)。
 - Blues 音阶: 1 \flat 3 4 \sharp 4 5 \flat 7, 小调属性, 可简写为 Minor Blues, 从关系大调视角则为 6 1 2 \sharp 2 3 5。Jazz 音乐的起源, 无法用传统乐理解释, 专属 Blues 的独特色彩。
 - 一般用于 I 级、IV 级、V 级和弦, 均为 dominant7, 且不需要解决;
 - e.g. 经典的 12 小节 Blues 即兴;
 - 事实上, 只要把调性弄清, 在哪儿都可以使用。此时最好采用关系大调视角, 衍生出大调 Blues 音阶 1 2 \sharp 2 3 5 6, 可简写为 Major Blues, 会发现该音阶只比五声音阶多了一个 \sharp 2 音(大调 Blues 音阶的特征音);
 - e.g. 可以无视和弦进行, 在 C 大调(a 小调)上演奏 C 大调 Blues 音阶(a 小调 Blues 音阶);
 - 可以与 Mixolydian 或 Dorian 调式进行混合, 完成中古调式的 Blues 化:
 - 对于 Mixolydian 调式来说, 本来 I 级和弦即为属和弦, 所以很容易在其上混合演奏 Blues 音阶;
 - 对于 Dorian 调式来说, 只需引入 \sharp 4 音(小调 Blues 的特征音, 以关系大调视角看与大调 Blues 的特征音是同一个音), 即可将其与 Blues 音阶完美融合;

以上洋洋洒洒列举了大量音阶与它们所适用的和弦, 可以看到, 一个和弦其实并不只有一条音阶可以使用, 具体选用哪条要取决于当下正在演奏的音乐风格, 以及乐

手本人的习惯，所以可以为音乐的即兴演奏带来无穷的可能性。

这些所介绍的调式音阶各具特色，想要完全记住并实际运用在音乐创作中实非易事。附录H.2汇总了所有提及的调式音阶与它们的音程关系对比，若前面讨论未及，可对照表格进行参阅。

3.3 再谈和弦

前面的章节，对和弦及其基本功能已经做了一定的介绍，但事实上，关于和弦的探讨还远不止于此。作为音乐创作的“灵魂”，和弦的知识体系也在随着时代变化不断积累与丰富。所以接下来，本节将围绕几个重点主题，对和弦相关的进阶知识做更加深入地梳理与论述。

3.3.1 和弦排列方式（Voicing）

和弦被分为了大、小、属三大类基础和弦家族。以更为广泛的现代和声来说，挂留和弦、增和弦其实可以归类于具有大和弦性质，而减和弦则可以归类于具有小和弦性质，至于增加音和省略音，在确定七和弦的基础上，一般也并不会影响大、小、属和弦的基本属性。所以，若以此种方式对和弦进行划分，当在实际乐曲中根据和弦属性选择和弦排列方式（一般也用 Voicing 的术语指代）时，将会产生出万般变化。

下面列举一些 Voicing 的常用变化手段：

- **变化音和弦：**通过延伸音、扩展音来丰富大小属和弦的色彩，甚至可以将 major 替换为 sus（不用向 major 解决，且 3 音和 4 音可同时存在）以增加和弦的张力（tension）。另外，在吉他演奏中，还存在只有根音 + 五度音排列的强力和弦（省略 3 音的和弦配置单一且强劲，常搭配失真音色用于摇滚乐等音乐风格中）；
 - **上层结构（Upper Structure）：**一种记忆变化音和弦的方式，常用于键盘乐器，可以理解为基础和弦上再堆叠一个三和弦（符号以分式表示）。e.g. 乐曲结尾处常使用的 C13(#11)，可以视作 $\frac{D}{C7}$ ；
- **横向排列：**注重横向的排列思维，构建和弦的旋律织体，而非和弦堆叠的构建音思维。通过和弦内音的重新搭配，产生更多色彩上改变；
 - e.g. minor11，和弦内音 1 ♭3 5 ♯7 9(2) 11(4)，向上堆叠的方式改变为 1 5 9(2) ♭3 ♯7 11(4)，更具开阔感，且音程关系错落有致。此外，在实际乐曲中，和弦内音也可交替演奏，将和弦旋律化；
- **四度和弦：**在调性内按照四度堆叠（Diatonic Fourth）的和弦，不一定为纯四度，具体要看调式音阶本身的四度音程关系。四度和弦会产生与常规的三度和弦全然不同的现代色彩，可以在功能性和声中当作变化音和弦使用（例如和弦内音 1 4 7 3，可以视为 major11），也可以在非功能和声中以模进（Modal）的形式演绎（根据基础和弦确定主音与音阶，和弦内音以四度关系延伸推进）。四度和弦没

有单独的和弦代号，一般还是沿用其调性和弦的符号，也可以标记出 4th.；

- **So What 和弦：**一种 minor11 的特殊 Voicing，也可以看作四度和弦的变种，诞生于一首名为“So What”的 Jazz 名曲之中。和弦向上堆叠的方式为 1 4 \flat 7 \flat 3 5，音程关系为“三个纯四度 + 大三度”，且五个和弦内音放在一个八度内刚好构成五声音阶的 V 级模式，拥有相当高的演奏自由性；
- **代理和弦：**通过不同和弦之间的相互联系进行和弦代理，在常规进行中形成新的和声色彩。下面列举一些常用的代理和弦方式：
 - 大三和弦往下堆叠一个小三度 = 小七和弦，所以有和弦代理：大三和弦 \leftarrow 低小三度的小七和弦。e.g. F \leftarrow Dm；
 - 无根音的属七降九和弦 = 减七和弦（不同转位下的四种形式均可使用）。所以有和弦代理：属七和弦 \leftarrow 根音升高半音的减七和弦。e.g. G7 \leftarrow A \flat dim7 / Bdim7 / Ddim7 / Fdim7；
 - **三全音代理：**属七和弦利用 3 音和 \flat 7 音组成的三全音（刚好为八度的一半音程）做和弦代理，当根音升高或降低三全音，属和弦 3 音和 \flat 7 音的音名不变。e.g. G7 \leftarrow D \flat 7, A7 \leftarrow E \flat 7（降二代五）；
 - **共同音原则：**替换不同的和弦，但仍然保持有旋律的共同音。e.g. C \leftarrow Am / A \flat / D \flat maj9 / F \sharp dim7，C 大调结尾处将主和弦替换为带有主音的其他和弦。

3.3.2 和弦进行（Turnaround）

和弦进行，也被称为和弦连接，术语一般采用 Progression，现代音乐也常用 Turnaround 来指代特定的和弦进行模式。前面已经多次指出，具有明确指向性的和弦连接包括 V 级属和弦向 I 级主和弦的进行，以及挂四和弦向同根音大三和弦的进行；当然也有例外，V 级属和弦和 sus 和弦在特定情况下也可以不解决，不过这里主要还是探讨普遍情形。

在传统和声学中，最重要的三个功能属性为主（I, Tonic）、下属（S, Sub Dominant）和属（D, Dominant）。从自然大调的级数上考虑，具有主功能的和弦为 I 级大和弦，具有下属功能的和弦为 IV 级大和弦，而具有属功能的和弦为 V 级属和弦。属和弦非常不稳定，必须要解决到主和弦，而下属和弦也不太稳定，但并不是一定需要寻求解决，所以可以放在属和弦之前。一首乐曲，通常都是从主和弦出发，在踏上一段不稳定之旅后解决回到主和弦。这便是和声学中经典的 T-S-D-T 理论。

按照上述分析，和弦进行可以演变成如下三种基础形态：

- 正格进行：T（稳定） \rightarrow D（极不稳） \rightarrow T（解决）；
- 变格进行：T（稳定） \rightarrow S（不稳） \rightarrow T（解决）；
- 完全进行：T（稳定） \rightarrow S（不稳） \rightarrow D（极不稳） \rightarrow T（解决）。

T-S-D-T 理论企图囊括一个调式内所有和弦的进行方式，所以其他级数和弦也尽可能要归纳到这三类功能属性当中。一般来说，II 级小和弦趋向于下属功能，VII 级减

和弦趋向于属功能，而 III、VI 级小和弦用法较多，一般可以放在和弦进行中，承接主功能与下属功能。

对于小调调式，与大调调式一样，也可以建立类似的和弦进行理论。

附录H.3以表格的形式汇总了传统大小调中七个级数和弦的功能属性，可进一步对级数和弦及其常用的 Turnaround 进行查阅。

一个从和弦进行引申出的话题为**终止式**。当乐曲行进到结尾时，必然要解决到主和弦，但也可能出现各种不同的情形：

- 稳定终止（全终止）：以主和弦结束的终止式；
 - 正格终止：V 级属和弦 → I 级主和弦的终止式；
 - 变格终止：IV 级下属和弦 → I 级主和弦的终止式；
- 不稳定终止：停留在不稳定和弦上的终止式；
 - 半终止：停留在下属和弦或属和弦上的终止式；
 - e.g. 正格半终止：I → V、IV → V；变格半终止：I → IV；
 - 假终止（阻碍终止）：从 V 级属和弦接到不是 I 级主和弦的终止式；
 - e.g. V → VI^m（前面提及的共同音原则）。这种终止可以视为“已经结束”，只是不太具有结束的意味；
 - e.g. V → IV。这种终止是不合理、非期望的，具有阻碍终止的效果，不能视为“已经结束”，和弦进行需要继续下去；
 - e.g. V → IV[#]∅。这种终止可以制造出一种藕断丝连的“悬停感”，既像是结束了又像没结束。这里的 IV[#]∅ 也常被称作**刹车和弦**。

以上提及的和弦进行相关理论还是建立在固定调式下。当放到十二平均律中来看时，和弦的连接将会变得极其复杂。这时可以采用最基础的 V → I 的进行方式，环绕十二个调，构建出**五度圈**的概念，如下图3.2所示：

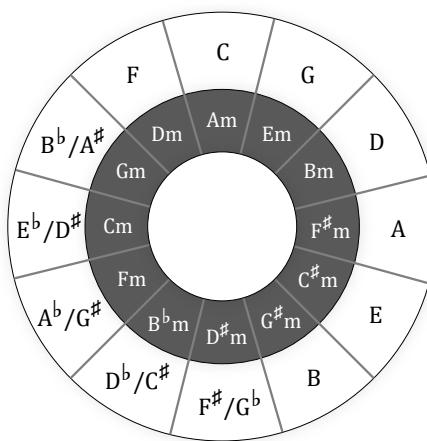


图 3.2: 和弦进行的五度圈关系

五度圈在音乐理论中用途广泛，可以顺时针找五度关系，逆时针找四度关系，对面找三全音，内外圈找关系调。现代和声学中最常用的 II → V → I 和弦进行，也可以在五度圈中逆时针找到。

 **笔记** II → V → I 和弦进行：若想丰富 V → I 的基础 Turnaround，传统和声学的做法自然是在 V 级属和弦前面加入 IV 级下属和弦，或者用终止四六和弦（I 级和弦第二转位，可以写作 I/V 或 V⁶₄，和弦代号为 K⁶₄）接到 V 级属和弦，还可以引入增六和弦来制造向 V 级属和弦的解决感（VI^b 级的增六度很想解决到 V 级的八度）；而现代和声学更倾向于使用 II 级接到 V 级。在大调中，这种连接方式可以理解为用更具深沉色彩的下属性质小和弦（II^m）替换了 IV 级大和弦，也可以理解为采用了副属和弦（即次属和弦，意指临时 I 级的属和弦），在 V 级和弦前面加入了临时以 V 级为主音的大调属和弦（II⁷)¹²。所以一个大调 II → V → I 的 Turnaround 中，II 级可以使用属和弦也可以使用小和弦，只是一般更倾向于使用调式内的 II^m。对于小调来说，同样可以构建 II → V → I 的 Turnaround，只是需要注意，若使用调式内的 II 级和弦，应该为 II∅。

下面利用五度圈，进一步介绍一些现代和声学中常见的和弦进行变种形式：

- I → V/VII → VI^m → I/V → IV → I/III → II^m → V → I：利用大调音阶做出低音下行的一种 Turnaround。原始的 Turnaround 可以看作为一种经过扩充的完全进行；
- IV → V → III^m → VI^m → II^m → V → I：在大调中，从下属和弦出发，一直按照 V → I 的临时进行方式走到主和弦。所形成的 Turnaround 中，第二个和弦为 VII∅，在大调中较少使用，所以替换为同样具备属功能的 V；
- II^m → V → I → IV → VII∅ → III → VI^m：与上一种 Turnaround 类似，这次是在小调中（级数采用关系大调视角），从下属和弦出发，一直按照 V → I 的临时进行方式走到小调的主和弦。VII∅ → III → VI^m 即为和声小调的 II → V → I；
- 离调和弦：所使用的和弦内音存在非调性内的音，有多种方法可以制造离调；
 - 大小和弦转换：在一个调式中，每一级上均可以做大小和弦转换。一旦转换便会产生调性外的音，可以增加不同的和声色彩；
 - e.g. F → G → A。可以看做 a 小调的 S → D → T，但最后并没有回到 Am，而是结束在同主音的大和弦 A 上。这种手法在古典音乐时期也被称为 **辟卡迪（Picardie）三度**；
 - 借用和弦：利用同主音的不同调式所构建出的顺接和弦进行互相借用；
 - e.g. C 大调：C Dm Em F G Am Bdim，C 小调：Cm Ddim E^b Fm Gm A^b B^b。两者相对应的七组顺接和弦在 Turnaround 中可以互相借用；
 - 临时 II → V → I：在 Turnaround 中，把中间的和弦视作临时的主和弦，前面加入一个 II → V → I 结构，注意有大调和小调 II → V → I 的区别；
 - e.g. C → B∅ → E7 → Am → Gm → C7 → F → …。C 大调中，一个基础的 C → Am → F → … 进行，以 Am 和 F 和弦作为临时主和弦，前面分别加入小调和大调的 II → V → I；
 - 三全音代理：相比上一节的介绍，这里可以更进一步，只做根音的三全音替代，和弦性质视 Turnaround 情况而定（非常规三全音代理）；
 - e.g. 和弦连接为 G7 → Cmaj7，此时可考虑 G7 ← D^bmaj7 的非常规代理；

¹²属和弦的属和弦也被称为重属和弦，是副属和弦的一种。另外副属和弦通常都是七和弦的配置。

- 后门（Backdoor）和弦进行：即 $VII^b7 \rightarrow I$ （相对于正统的“前门”进行 $V \rightarrow I$ ）。应当理解为从同主音的平行小调借用了其 VII 级属和弦（对于大调来说是 VII^b7 ）。不能认为与 Mixolydian 调式相关，因为其 VII 级和弦为大和弦；
 - e.g. $Fm \rightarrow B^b7 \rightarrow C$ 。C 大调中，将后门进行的 VII^b7 视作大调 $II \rightarrow V \rightarrow I$ 的 V 级和弦，前面加入临时的 II 级和弦（ IIm ）；
 - e.g. $C \rightarrow E^b7 \rightarrow F \rightarrow B^b7 \rightarrow C$ 。C 大调中，在 IV 级和 I 级和弦前面分别加入一个临时的后门和弦。这里 E^b7 不能理解为借用和弦，因为平行小调的 III 级（大调中为 III^b 级）和弦为大和弦；

除此之外，在乐曲演绎中，一个与和弦进行密切相关的写作手段称为转调。相比于临时游离于调性外的离调，转调走得更彻底，主要用于改变乐曲的情绪色彩。通常来讲，转调可以单纯升降调，也可以调性变换（如大小调转换）；可以直接转，也可以通过精心构建和弦进行的倾向性来转。下面列举一些常见的构造型转调方式：

- 升调（Key）：产生递进的情绪色彩。可以直接硬转，也可以通过旋律的共同音转，还可以构造和弦进行走到升调后的 V 级属和弦即可通过 $V \rightarrow I$ 来转；
 - e.g. (C 大调) $C \rightarrow Gm/B^b \rightarrow F/A \rightarrow A^b \rightarrow C^\#$ (C[#] 大调)。通过下行（也可以上行）走到升小二度的 V 级属和弦，即可从 C 大调升到 C[#] 大调；
 - e.g. (C 大调) $C \rightarrow Fm/C \rightarrow B^b \rightarrow E^b$ (E^b 大调)。通过 IV 级大小和弦转换，刚好转到升小三度的 II 级小和弦，通过 $II \rightarrow V \rightarrow I$ 从 C 大调升到 E^b 大调；
- 同主音大小调转换：大小调色彩差异明显，通过转调让乐曲色彩由黯淡转入明亮，或明亮转入黯淡；
 - e.g. (a 小调) $Am \rightarrow F \rightarrow Esus \rightarrow E \rightarrow A$ (A 大调)。一般来说，同主音大小调转换直接通过大小和弦转即可。这里是通过 C 大调 (a 小调的关系大调) 的 III 级挂留和弦（和弦内音均在调性内）解决到 III 级大和弦，刚好走到 A 大调的 V 级属和弦完成的转调（也可以看作是 C 大调降调到 A 大调）。

3.3.3 声部连接（Voice Leading）

在和弦进行时，声部连接（Voice Leading）也是非常重要的概念。这种手法可以突出和弦内音的独立流动性，让每一个音得到足够的独立线条发展，而不是跟随和弦“糊”在一起。不同于传统和声学中的四部和声写作¹³，Voice Leading 更加自由，只需满足一些基本旋律发展的规则即可，如下：

- 和弦连接时，如果存在共同音，则尽量保留；
- 针对上一条，如果不得不移动，则选择最小的音程距离。

例题 3.5 通过大调和小调 $II \rightarrow V \rightarrow I$ 的 Turnaround，构建和弦内音的 Voice Leading。

解 这里选择偏 Jazz 版本的 Turnaround，大调： $IIm9 \rightarrow V13(^b9) \rightarrow Imaj13 \rightarrow I_6^9$ ；小调： $II\phi9 \rightarrow V7(^b9\,13) \rightarrow Immaj7 \rightarrow Im^6$ 。以键盘和声为主构建双手 Voicing，左手采用 Half

¹³ 将音乐分为高音、中音、次中音，以及低音四个独立声部，有着严格的写作规定，例如不允许平行五度/八度（会丢失一个声部的听感）等。按照此种标准写法可以写出具有古典味道“既视感”的音乐。

Shell Voicing (Shell Voicing 意指一个和弦的最基本配置, 例如属和弦的 Shell Voicing 即为 $1\ 3\ ^b7$, 而 Half Shell 则表示连 3 音都省略), 构建出一种 Voice Leading 的形式, 如下图3.3所示 (大小调均采用首调记谱法):

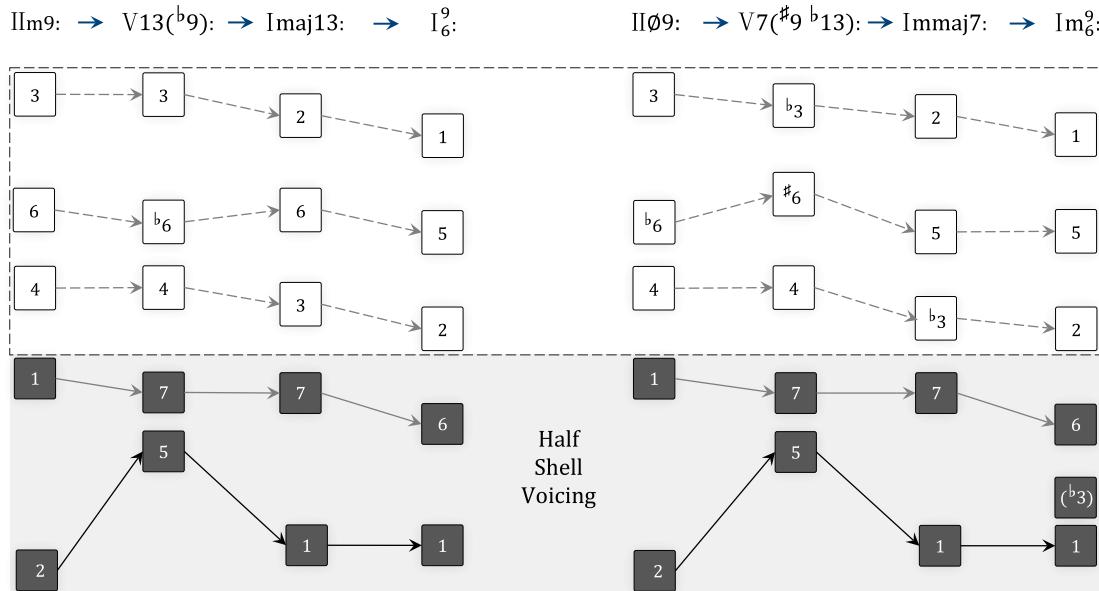


图 3.3: 大调与小调 II → V → I 所构建的 Voice Leading

可以看到, 这样构造的 Voice Leading, 每一个音都有着自己独立的就近发展, 而且用到了一些 Jazz 色彩明显的四度和弦 (例如大调中的 Imaj13 → I₆⁹)。

3.4 和声分析

音乐的学习, 最重要的是“实战”, 而非纸上谈兵式的纯理论知识灌输。所幸音乐全部的秘密, 都藏在音乐本身之中。从实际的乐曲中进行学习、吸收与归纳, 是深入理解音乐世界的不二法门, 也是对前述章节理论知识的补充与完善。

3.4.1 和声编配的重要性

音乐的元素有许多, 但谈到创作与改编, 最基础也是最重要的元素即为和声。和声的编配是音乐中具有较高技术难度的一环, 需要大量的积累与尝试。和声编得好甚至可以弥补旋律不够出彩的缺憾, 为乐曲带来更为丰富的情绪色彩。

下面, 将广泛选取各种不同类型的音乐, 横跨古典、流行、影视游戏配乐, 以及 Jazz 等, 企图以较为全面的方式对和声进行分析与理解。此外, 尽管不同调的色彩, 因为乐器和人声的音色, 会在不同调上呈现不同的感觉, 但和声分析更关心和弦进行的方式, 即和弦的相对关系, 所以在任何调上结果均相同。基于此, 除去调性不明确的情形将使用原和弦标记之外, 以下绝大多数乐曲均采用级数标记进行分析。

笔记 需指出, 和声分析很难做到 100% 正确之说, 这里也只能竭尽所能, 不做误导。

3.4.2 古典音乐篇章

练习 3.3 试对车尔尼 (Czerny) 练习曲 (Études) OP. 849 No. 26 进行和声分析。

解 Czerny 的 Études 系列是学习古典钢琴绕不开的基础练习材料。但除了对手指机能的常规训练外，这些 Études 的和声写作方式也很值得学习，特别是其经常不露痕迹地转调，凸显出 Czerny 对和声运用的强大掌控力。其中，OP. 849 No. 26 是一首并不枯燥乏味，反而相当悦耳动听的 g 小调 Études。整首 Études 分为两个基本段落 (A/B 段)，所有的和弦进行记录（级数采用纯首调视角，更方便分析和弦功能）如下表3.28所示：

表 3.28: Czerny - Études OP. 849 No. 26 和声分析

4/4 拍 I = g		小节 1	小节 2	小节 3	小节 4
<i>A</i>	Im → V7	Im → V7	Im/III → V/II	Im → Im/III → V7	
	Im → VII7	III → II7 (转 I = d, V7)	Im/III → IIdim/IV	Im/V → V7 → Im (转 I = g, Vm)	
	III/VII → VII7	III/VII → VII	III/V → VII → III → VII7/IV	III/VII → VII	
	VII7 → III/VII	VII → VIIdim	VII → III → VII7/IV → VII/II	VII7/IV → III	
	V7/II	Im	V7/VII [#]	Im	
	IV [#] dim7	IV [#] dim7	V → V7	Im/V → V	
	Im → V7	Im → V7	Im/III → V/II	Im → Im/III → V7	
	Im/III → II \emptyset /IV	I7/V → IVm	VI7 → Im/V	IV [#] dim7	
<i>B</i>	Im/V	Im (音阶)	V → Im/V → V7 → V7/IV	Im	

A 段开始便是和声小调的 I 级 - V 级来回切换，构造了一个简单的 T → D 正格进行，第 3 小节利用转位和弦对和弦内音形成了解决倾向；第 5 小节构造了一个 I 级到自然小调 VII 级属和弦的 Turnaround，解决到临时的 III 级大和弦后，再采用同样的 Turnaround 向下大二度进行到 II 级属和弦，刚好这个和弦是 d 小调的 V 级属和弦，于是顺利完成了转调；随后采用类似的正格进行回到主和弦，其中 II \emptyset /IV 有向 Im/V 解决的倾向，而 Im/V 则是古典音乐中常用于全终止前接到 V 级属和弦的终止四六和弦 (K $\frac{6}{4}$)；最后刚好回到 g 小调的 V 级和弦，于是再次转回了 g 小调。

B 段开始左右手同时出现长时间的保留音 F，所以这里和弦低音也做了 VII 级的保留。和弦进行上则一直强调 III 级和 VII 级的变换（可视作临时的 T - D）；随后旋律出现上行，和弦搭配 V7 → I 的进行。通过两小节的 IV[#]dim7 过渡和弦回到 V 级，之后进入开头的重复段落；最后同样旋律出现上行，和弦基于旋律音进行配置。在通过 IV[#]dim7 的过渡走到 I 级后，利用 Part 1 同样的终止式结束全曲。

练习 3.4 试对巴赫 (Bach) C 大调前奏曲 (Prelude) BWV 846 No. 1 进行和声分析。

解 作为巴洛克时期 (16-18 世纪左右) 的代表性音乐家，巴赫的历史地位自不必说，

特别是其赋格（复调音乐的一种，通过主题的对比和发展形成乐曲）之手法神乎其技，将和声的对位运用到了极致。不过，这首来自巴赫十二平均钢琴曲集中的 C 大调 Prelude，却是一首简单的单声织体调性作品。所以，尽管巴洛克时期可能还未形成系统的和声学理论，更多是多声部的旋律构建思维，但仍可以借鉴常规的和声分析学习其写作思路。这首 C 大调 Prelude 的所有和弦进行记录如下表3.29所示：

表 3.29: Bach - Prelude in C Major, BWV 846 No. 1 和声分析

4/4 拍 I = C	小节 1	小节 2	小节 3	小节 4	小节 5	小节 6	小节 7
<i>A</i>	I	IIm7/I	V7/VII	I	VIIm/I	II7/I	V/VII
	Imaj7/VII	VIIm7	II7	V	Vdim7	IIIm/IV	IVdim7
	I/III	IVmaj7/III	IIIm7	V7	I	I7	IVmaj7
	IV [#] dim7	IVm6/VI ^b (#4 音经过音)	V7	I/V	V7sus	V7	IV [#] dim7/V
	I/V	V7sus	V7	I7	IV/I	V7/I	I

整首作品主要构建在传统的 T → S → D → T 完全进行上，一开始便是一个 I → II → V → I 的 Turnaround。但巴赫创作的巧思在于对低音线条进行了重新设计，与高音声部的和弦织体一起，分别形成了旋律音的合理解决，经常可以听到小二度音程关系的流动，并且这种做法贯穿始终。除此以外，其和弦连接也并不仅仅只拘泥于 C 大调的传统进行，中间采用许多减七和弦制造了临时的“游离感”。在第 19 小节回到 I 级主和弦后，转而使用 I 级属七和弦解决到 IV 级大七和弦上，而接下来这段 IV → V 的几小节处理，可谓全曲最精彩的部分。特别是第 23 小节，甚至很难用和声理论给出其确切的和弦标记，更像是一种带有动机的旋律发展。后世有些出版乐谱认为第 23 小节前不应该直接从 IV[#] 级走到 VI^b 级，而应该再增添一小节 V 级和弦作为过渡。但这种判断是对巴赫作曲动机的误解。这段 IV → V 的 Turnaround，必须通过构造解决的倾向性来到达目的地，中间不能提前进入 V 级。这样，当到达第 24 小节的 V 级属七和弦时，才会有一种“完成感”。

若详细剖析第 23 小节的和声色彩，会发现其建立在和声小调的音程关系上，“增二度 + 小二度”的组合特别具有类似 Phrygian Dominant 调式的异域特征。这里和弦可以标记为 IVm6/VI^b，#4 音（和弦内音）作为经过音；也可以标记为 IVdim7/VI^b，5 音（和弦内音）作为经过音。但从功能上讲，还是 IVm6 比较适合接到 V7，而且以现代和声的观念，减七和弦上也不太会演奏容易与 ^b5 音（和弦内音）打架的 5 音。

练习 3.5 试对贝多芬（Beethoven）c[#] 小调钢琴奏鸣曲（Sonata）Op. 27 No. 2（也称为月光奏鸣曲）的第一乐章进行和声分析。

解 贝多芬是古典音乐时期的巨匠，其作品深沉、厚重，同时还能保证丰富的旋律性。这首钢琴奏鸣曲的第一乐章，拥有宁静却又暗藏汹涌的强烈情感，如若亲身演奏，更能近距离感受到该首作品的震撼之处。详细对乐曲进行分析，会发现其和声运用也是

一气呵成，令人叹为观止。全曲的和弦进行记录如下表3.30所示：

表 3.30: Beethoven - Piano Sonata in C \sharp minor, Op. 27 No. 2 第一乐章和声分析

2/2 拍 I = c \sharp	小节 1	小节 2	小节 3
	Im	Im7/VII	VI → II \flat /IV
V7 → Im/V → Vsus → V7	Im		V7/VII \sharp
Im → IVm (转 I = E, IIIm)	I/V → V7		I
Im (转 I = C, IIIm)	V7/II		I → IIIIm/VII → (转 I = b, IVm/I) VII \sharp dim7 → V7/VII \sharp
Im → II \emptyset 7/IV → II \emptyset 7/VI	Im/V → V	Im → I (转 I = B)	
IVm (5 音环绕音)	I		IVm (5 音环绕音)
I → Idim7/VI \sharp (转 I = f \sharp , IIIdim7)	V7/VII \sharp → Im	II \flat /IV → Idim7/IV \sharp	
I/V → Vsus → V	Im		V7/VII \sharp
Im (转 I = c \sharp , IVm) → IIIdim7 → IVm/I	V7/VII \sharp	Im → IIIdim/IV → Idim/IV \sharp	
A	V → V7	V → V7	Im/V
Im/V	IIIdim7/V (V7(\flat 9))		Im/V
Idim7/V	IIIdim7/V (V7(\flat 9))	IIIdim7/V (V7(\flat 9))	
IIIdim7/V (V7(\flat 9))	V7(\flat 9)		V7(\flat 9 #11)
V7(\flat 9) → VI	II \emptyset 7/IV → V → V7	Im	
V7/VII \sharp	Im → IVm (转 I = E, IIIm)		I/V → V7
I	V7/VII \sharp	I (转 I = c \sharp , III) → V7/II → Im	
V7/VII \sharp → Im	II \flat /IV → V7	Im → I (转 I = C \sharp)	
IVm (5 音环绕音)	I		IVm (5 音环绕音)
I → IVm (转 I = c \sharp)	VII7/II → III	VImaj7/I → IIIdim → V7/VII \sharp → Im	
II \emptyset 7/VI → Vsus → II \emptyset 7/IV	Im/V → V7	Im	
V7/VII \sharp	Im	IIIdim7/V (V7(\flat 9))	
Im	IIIdim7/V (V7(\flat 9))	Im	
Im	Im	Im	

首先，乐曲本身是 $\frac{2}{2}$ 拍（也可写作 C ），和弦织体却以三连音的方式呈现，构造出低音、三连音和弦，以及旋律线三个声部。第 3 小节引入小调的 Neapolitan 六和弦 (N6)，听感上出现离调色彩，随即解决到 V 级属七和弦上；之后 Im/V 为四六和弦，从功能上讲为经过和弦，过渡到 V 级挂留和弦上，第 5 小节全终止。



旋律线进入后，第7小节通过IV级的共同和弦，转入c[#]小调的关系大调E大调，然后构造II→K⁶→V→I的进行，第9小节完成全终止；随后立刻又通过同主音转换到小和弦，进入C大调。第12小节，再次出现新的属功能和弦，将调性引向b小调。这里IIIm/VII（b小调下为IVm/I）也是一种经过四六和弦（低音为B），连接前面的C和后面的A[#]dim7。之后第15小节再次通过同样的终止式完成全终止。

第15小节往后，乐曲出现了四小节I→IVm的Turnaround。从调性上看，应当是转调到了B大调，但IVm却并不是调性内的和弦。事实上，IVm具有向I级或V级和弦解决的倾向性，所以也常用于大调调式中。除此以外，贝多芬还在IVm上围绕其5音做了环绕音处理，产生了一种向增和弦（#5音）和减和弦（^b5音）短暂离调的感觉。第19小节后，再次转调进入[#]F小调，采用类似的旋律动机向前推进。

第25小节重新转回c[#]小调，在通过两个减七和弦解决到V级后，乐曲进入中段的连续琶音。其中，第29小节往后的几个Im/V，根据其功能一般被称为辅助（持续）四六和弦；IIdim7/V则可以看作变化属和弦V7(^b9)，第39小节甚至在旋律音上出现了V级属和弦的#11音。之后，乐曲进入重复段落，逐渐步入尾声。

乐曲的尾段，和声在T-D中数次切换，旋律则采用类似的分解和弦动机，慢慢回归到c[#]小调的主和弦，最后通过趋于平静的方式结束全曲。

3.4.3 流行音乐篇章

练习3.6 试对披头士乐队（The Beatles）的歌曲 Yesterday 进行和声分析。

解 The Beatles 作为流行音乐史上的传奇乐队，经典作品无数。许多名曲传唱度高，好听且耐听。就算单从和声上讲，也颇多可圈可点之处，堪称流行音乐的典范。这首 Yesterday 可以说是 The Beatles 最著名的一首作品，全曲主要分为两个基本段落：主歌（Verse）和副歌（Chorus），所有的和弦进行记录如下表3.31所示：

表 3.31: The Beatles - Yesterday 和声分析

4/4 拍 I = F	小节 1	小节 2	小节 3	小节 4
Verse	I	VIIIm → III7	VIm → /V	IV(maj7) → V7
	I → /VII	VIm(7) → II7	IV → I	I
Chorus	VIIIm(11) → III	VIm → V → IV(maj7) → /III	IIIm(6) → V7	I → (I7)

乐曲开始便进入 Verse 部分。由于第3小节想要接到VIm，所以前面出现了小调II→V→I的临时离调。但相比于自然小调的II \emptyset ，这里却使用了IIIm，即 Jazz 旋律小调的II级和弦，以便让旋律构造更加柔和而不会出现强行离调的生硬感。之后和弦转换出现连续的低音下行，进行到离调性质的II7后，利用变格进行S→T回到主和弦。

Chorus 部分的和弦运用也是出人意表，直接从前面相同的小调II→V→I开始，这里VIIIm 也可以演奏成小十一和弦，更有想要接到III级的挂留感（III sus ）。之后的

一小节里密集变换成了四个和弦，低音继续出现连续下行（6543），旋律却反向出现了连续上行（671…），设计上颇具巧思。最后，采用常规的大调II→V→I回到主和弦。值得一提的是，这里II级和弦上演唱的旋律突出了小调的 $\sharp 6$ 音，所以会具有一定Dorian调式特征音的梦幻听感。

练习3.7 试对披头士乐队（The Beatles）的歌曲 Hey Jude 进行和声分析。

解 Hey Jude 是 The Beatles 的另一首世界名曲。整体旋律朗朗上口，易于传唱，但又不会显得过于俗套，许多离调和弦用得恰到好处。全曲主要分为三个基本段落：主歌（Verse）、副歌（Chorus），以及尾奏（Outro），所有的和弦进行记录如下表3.32所示：

表 3.32: The Beatles - Hey Jude 和声分析

4/4 拍 I = F		小节 1	小节 2	小节 3	小节 4	小节 5	小节 6	小节 7	小节 8
Verse		I	V	V7	I	IV	I	V → V7	I
Chorus	I7	IV → IV/III	IIIm → IIIm/I	V7/VII → V7	I	(I7 → V7)			
Outro	I	VII ^b	IV	I					

Verse部分是一个简单的正格+变格进行。但一般到V级和弦时，要么直接使用大和弦，要么使用紧张感更为强烈的属七和弦，主要目的在于制造向主和弦的倾向性。然而这里第2小节到第3小节，却将V级和弦做了拆分，形成了一个V→V7的延伸进行，模糊了属和弦的强烈倾向性，让旋律发展产生出一种独特的听感。

到了Chorus部分，直接从I7的离调和弦开始，顺利接到IV级，随后低音出现下行，逐渐回到I级。这里I级属七和弦的运用非常巧妙，可以制造向IV级和弦的倾向性，也可以为旋律创作带来更多可能。例如第二段Chorus第6小节I7→V7的进行，旋律便临时游离到了Mixolydian音阶上，然后再回来自然大调音阶；同时节奏也发生了些许改变，之后还延续了几小节V7，再接回到Verse部分。

进入Outro部分，这是全曲的华彩段落，情绪一下变得明亮且开阔。其中最灵魂的和弦便是第2小节调性外的VII^b大和弦。从功能上讲，这里VII^b可以视为副下属和弦（临时I级的下属和弦），完成两次变格终止后回到主和弦。一般遇到VII^b也可以运用调式互换的思维，将其视作平行自然小调或Mixolydian调式的VII级和弦，拥有一定向主和弦流动的倾向性。由于该段落后续演唱引入了Blues元素，而Blues音阶一般在属七和弦上演奏，所以认为是Mixolydian调式更为合理（其I级和弦为属七和弦）。

练习3.8 试对周杰伦的歌曲黑色幽默进行和声分析。

解 在华语流行音乐领域，周杰伦是公认的一位具有变革性贡献的创作型音乐人。其作品众多，风格多变，且基本保持有相当高的艺术水准。周杰伦的创作，可以明显感觉到，一切的音乐技巧都在围绕“旋律”而展开，许多作品带有强烈的歌唱性，百听不厌，且毫无炫技之感，是创作者音乐功底和艺术天分的完美体现。

这首黑色幽默收录于周杰伦2000年发行的首张专辑中，已经可以听到许多具有现代色彩的和声，中间部分的转调更是堪称一绝，旋律演唱上毫无违和。全曲包括前

奏 (Intro)、主歌 (Verse)、预副歌 (Pre-Chorus)、副歌 (Chorus)、桥段 (Bridge)，以及尾奏 (Outro) 六个部分，所有的和弦进行记录如下表3.33所示：

表 3.33: 周杰伦 - 黑色幽默和声分析

4/4 拍 I = B ^b	小节 1	小节 2	小节 3	小节 4
Intro	I → Imaj7	IVmaj7 → IVadd9	Iadd9 → Imaj7	IVmaj7 → IVadd9
Verse	I(add9)	VIm7	IVmaj9	Vsus → V → (V/IV)
Pre-Chorus	IIIIm7	VIm7	IIIm7	Vsus → V → (V/IV)
Chorus	I (转 I = D ^b , IIIm)	IVm6 → IVm7 (转 I = D ^b , IIIm)	IV/V → V/VII	Isus → I → V/VII
	VIm7	IIIm7	VII ^b add9	IV/V → VIIIm7 → (转 I = B ^b , IIIm7) → Vsus
	I(add9) (转 I = D ^b , IIIm)	IVm6 → IVm7 (转 I = D ^b , IIIm)	IV/V → V/VII	Isus → I → V/VII
Bridge	VIm7	IIIIm7	IIIm7 → IV/V	I(add9) → (I7/III)
	I (转 I = B ^b) → Imaj7/VII	VIm7 → Vm7 → (I7)	IVmaj7	Vsus → IV/VI → V/VII (Vsus → V/IV)
Outro	IV	I/III → VIm7	IIIm7 → IV/V	VI ^b maj9 → V ^b maj9(#11) → IIIImaj7(#5) → III ^b maj9
	Iadd9(#11)			

Intro 部分一开始是一个简单的 I → IV 进行，但加入了许多和弦延伸音来丰富和声。例如第 1、3 小节的后两拍，就在大七和弦上做延伸形成了自然大调的旋律织体（所以只简单标记为 Imaj7）；而进行到 IV 级和弦时，也能听到 7 音和 9 音的色彩。

Verse 部分是常规的 I → VI → IV → V 进行，为情绪积累做铺垫。在第二遍 Verse 进行到第 4 小节时，从 Vsus 接到 V 后，还增加了一个很好听的经过和弦 V/IV。其本质是 V7，但低音在 IV 级，所以很顺利可以接到 Pre-Chorus 段落的起始 III 级和弦。

Pre-Chorus 部分也是另一种常规的 III → VI → II → V 进行，作为过渡段逐渐进行到 Chorus 部分。另外，在重复第二遍 Pre-Chorus 前也使用了 V/IV 的经过和弦。

Chorus 部分从 I 级和弦开始，进行到一个在大调中常用的 IV 级小和弦。该和弦也可以视作上方小三度的 II 级小和弦，于是顺利通过一个临时 II → V → I 由 B^b 大调升到 D^b 大调。值得说明的是，这种转调手法其实并不奇特，难得的是能够与旋律融为一体，以最小的“违和”听感代价实现了升调的效果。第 3 小节，这里 V 级和弦使用的是 IV/V，其本质可以视作 V9sus；之后，出现一个新的过渡和弦 V/VII，可以向上接到 I 级，也可以向下接到 VI 级。第 7 小节，VII^b 级和弦再次出现，但这里并不能视为副下属和弦或 Backdoor 和弦。考虑其大和弦的性质，相对比较合理的解释是替代了下属

性质的 II^bm7 (VII^badd9 去掉根音即为上方大三度的 II^bm7)，于是可以接到 V 级属和弦，同时拥有更为明亮且色彩特殊的和声听感。第 8 小节后半段，V 级和弦并未直接接回 I 级，而是通过一个 VII^bm7 (下方小三度的 II^bm7) 再次临时 II → V → I 回到原来的 B^b 大调。整个升调再降调的过程浑然天成，毫无斧凿痕迹。第 9 小节往后，旋律重复进行，后半段的和声做了一些变化，回到 I 级主和弦时停留在 D^b 大调，结束 Chorus 段落。

随后 Bridge 部分直接从 D^b 大调开始，走了一个低音下行的 Turnaround。此外，Bridge 的两段旋律所对应的第 4 小节，其中和弦略有区别，主要看再往后接的和弦，一段重复 Bridge，一段进 Pre-Chorus，所以构造了不同的和弦级进。

最后的 Outro 部分，最出彩的便是第 4 小节连续平行移动的四个大和弦，在保持离调色彩的同时还在和弦内音中构造了一个自然小调的旋律下行 (5 4 ^b3 2)，但最终却回到大调性质的 I 级主和弦，有一种类似 Picardie 三度的感觉。此外，这个 I 级主和弦还演奏了一个明显的 #11 音，所以会拥有一丝 Lydian 调式的奇特色彩。

练习 3.9 试对周杰伦的歌曲《你好吗》进行和声分析。

解 《你好吗》这首作品常被称为华语流行音乐的“和声天花板”。这种美誉并不是在说其和声写得多么复杂，而是在称赞这首歌曲能够在复杂的 Jazz 和声框架下，营造出非常优美且伤感的旋律线条，令人流连忘返。毕竟乐曲想写得复杂并非难事，但想同时保留乐曲的音乐性却难于登天。这需要创作者非常强大的旋律天分，和对复杂和声的极致感悟力。这首歌曲主要可以分为前奏 (Intro)、主歌 (Verse)、副歌 1 (Chorus 1)、副歌 2 (Chorus 2)，以及尾奏 (Outro) 五个部分，所有的和弦进行记录如下表 3.34 所示：

Intro 部分从 I 级和弦开始，但其实是把第 2 小节的 III 级当做临时主音，走了一个小调的 IV → V → I，所以第 1 小节的 VII 级和弦才会是奇特的变化属和弦形式。然后第 3 小节回到正常的 II → V → I 进行，旋律则采用模进的方式升调重复了一遍。接下来，同样是以 III 级当作临时主音，但走了一个小调的 II → V → I，且在临时的 V 级上采用了三全音代理，同理第 6 小节的 III^b7(13) 亦是如此。第 5、6 小节整体的和弦进行可以视作 IV → V → III → VI 的 Turnaround 变种，最后半终止停在 V7(^b9) 上。

Verse 部分先是常规的和弦进行，但中间也加入了临时 II → V → I 来增加离调色彩；第 5 小节往后，制造了一个低音的下行结构，并通过 K₄⁶ → V → I 完成终止式。

到 Verse 部分结束，全曲设计了三种方式走向不同的段落。接 Chorus 1 采用的是临时 II → V → I 接到 IV 级和弦。其中，VII^b/I 可以视作 I9sus；接 Chorus 2 则利用 VII 级属和弦构造临时 V → I，同时低音做了级进处理，升全音进入 C 大调的 IV 级和弦；最后一遍接 Outro，则用了一个色彩极其独特的过渡和弦 VII^bm/I (也可以视作 I7sus(^b9))，接到了 II 级和弦。常规来讲，这里其实更适合使用 II^bdim7，但相比于色彩已然足够暗淡的减七和弦，使用 VII^bm/I 在和弦进行里反倒更具有新鲜与刺激的听感。

两段 Chorus 部分所使用的基本都是前面提及过的和弦进行，唯独需要说明的是 Chorus 2 第 8 小节的转调，使用的是 III^bsus → III 的 Turnaround，刚好走到下方小三度的 V 级。这里 II/III 同样可以写作 III9sus。

Outro 部分也基本都是常规的和弦进行。第 5 小节的 IVm6 也是常用的离调和弦，

表 3.34: 周杰伦 - 你好吗和声分析

4/4 拍 I = A ^b		小节 1	小节 2	小节 3	小节 4
Intro		I maj9 → VII7(#9 ^b 13)	IIIIm9	IIIm9 → V7(^b 9)	Imaj7
		IV#∅ → IV9(#11)	IIIIm7 → III ^b 7(^b 13)	IIIm9	Vsus → V7(^b 9)
Verse		I → Vm7 → I7	IVmaj7 → IVm6	IIIIm7 → VIm7	IIIm7 → V7sus → V7
		Isus2 → VII ^b 6	IV/VI → IVm/VI ^b	I/V → IV/V	Iadd9 → (IV/V)
(接 Chorus 1) Vm7 → Vm7(add11) → VII ^b /I → I7					
(接 Chorus 2) VII7sus2 (转 I = C, V7sus2) → V → IV/V → Isus2/III					
(接 Outro) 第 8 小节改为: Iadd9 → VII ^b m/I					
Chorus 1		IVmaj7 → V/IV	IIIm7 → VIm7	IIIm7 → IV/V	Iadd9 → VII ^b /I → Iadd9
		IV#∅ → IV9(#11)	IIIIm7 → III ^b 9(add13)	IIIm9	IV/V → V
Chorus 2		IVmaj7 → V/IV	IIIm7 → VIm7	IIIm7 → IV/V	Iadd9 → VII ^b /I → Iadd9
		IV#∅ → VII7(#9 ^b 13)	IIIIm7 → III ^b 9(add13)	IIIm9	(接 Verse) II/III (转 I = A, IV/V) → V
Outro		IIIm7 → IVm6	I/V → VIm7	IIIm7 → V7sus	Iadd9
		IVm6/I	Iadd9		

注意这里如果按照和弦内音也可以写作 II∅，但从功能上讲，还是 IVm6 比较合适。

练习 3.10 试对王力宏的歌曲 Forever Love 进行和声分析。

解 王力宏是华语流行音乐领域不可多得的全能型创作歌手。许多作品大众耳熟能详，具有高度“抓耳”的旋律性；也有一些明显带有 Jazz 风格的复杂作品，虽偏冷门，却也不失艺术性。这首 Forever Love 可以说是王力宏最肆意挥洒才华的一首作品，旋律优美却又不失灵动，桥段（Bridge）部分的和声天马行空，情绪色彩层层叠加，堪称华语流行音乐的创作“教科书”。全曲可以分为主歌（Verse）、预副歌（Pre-Chorus）、副歌（Chorus）、以及桥段（Bridge）四个部分，所有的和弦进行记录如下表3.35所示：

歌曲起始有一个简短的 Intro，但和声部分 I → III → IV → IVm 的 Turnaround 与 Verse 部分相同，所以这里未单独列出。该 Turnaround 中，III 级和弦并未使用小和弦，而是使用了 I 级和弦的第一转位，色彩上与小和弦略有区别；在进行到 Verse 段落的 IV 级和弦时，还制造了一个小大七到小六的过渡。随后 Verse 段落第 9 小节往后的四个和弦颇具特色，先是低音在 VII 级进入属和弦，然后离调到 V 级小和弦，以及 VI 级增和弦上。再往后是 II → V 的进行，但 V 级上先是使用了增和弦，然后停留在了小和弦。虽然未使用属和弦的配置，但 Vm7 却刚好可以接到 Pre-Chorus 起始的 I 级属和弦。

表 3.35: 王力宏 - Forever Love 和声分析

4/4 拍 I = A		小节 1	小节 2	小节 3	小节 4
Verse	Imaj7	Iadd9/III	IVmaj7	(IVmmaj7) → IVm6(9)	
	Imaj7	Iadd9/III	IVmaj7	(IVmmaj7) → IVm6(9)	
	Vadd9/VII	V	Vm6/VII ^b	Vlaug7	
	IIm7	IIm7	Vaug7	Vm7	
Pre-Chorus	I/VII ^b	IV/VI	IVm/VI ^b	I/V	
	II/IV [#]	II7	IV/V	V7(^b 9 13)	
Chorus	IVmaj7	V/IV	IIIIm7 (Iadd9/III)	VIm7	
	IIm7	IV/V	Imaj7	I7/III → Vlaug7 → IV [#] 9([#] 11)	
	IVmaj7	V/IV	IIIIm7 → VI ^b dim	VIm7 → IV [#] ∅ (VII ^b /I)	
	IVmaj7	IV/V	IV(add9)	I	
Bridge	Amaj7	Dmaj7	Gmaj7	Cmaj7	
	Fmaj7	B ^b maj7	E ^b maj7 (转 I = B ^b , IVmaj7)	E ^b maj7	
	III7 → III7(^b 9)/V [#]	VIm7	IIaug7	Vmaj7	
	IV [#] 7(^b 9 ^b 13)	IV [#] 7(^b 9 ^b 13)	III ^b sus → VI ^b sus → Vsus → I7	I7	

上 (临时 II → V)。

Pre-Chorus 部分从 I7 (低音在 VII^b) 开始, 连续构造半音的低音下行, 走到 II 级后, 回到 V 级半终止 (V 级上后半段还采用了变化属和弦制造特殊听感)。

Chorus 部分原本是经典的 IV → V → IIIIm → VIIm → IIm → V → I, 但通过一些堪称范本的改编思路, 让这段普通的 Turnaround 大放异彩。首先, 第 2 小节原本的 V 级和弦, 低音做了 IV 级的保留; 第 3 小节的 III 级和弦, 原曲在不同的段落分别使用了 IIIIm7 和 Iadd9/III, 以做出一定的色彩区分; 第 7 小节回到 I 级和弦后, 第 8 小节内伴随旋律构造了一段具有离调感但却毫无违和的和弦进行返回 IV 级和弦; 之后在第 11 和 12 小节, 分别引入了 VI^bdim 和 IV[#]∅ 的过渡和弦, 以增加和声的流畅性; 最后采用变格终止回到 I 级和弦, 结束 Chorus 段落。

Bridge 部分开始便是连续 8 小节的四度上行, 无法用调性内的级数标记, 所以采用了原始的固定调和弦。第 7 小节开始, 可以视作提前进入了 B^b 大调。之后的和弦基本在调性内, 但也通过各种扩展音和过渡和弦丰富了和声色彩。到第 15 小节, 构造了一个具有小调调式的低音进行 (具体和弦极难分析, 这里均用 sus 标记) 走到 I7, 随后再次重复从 IV 级开始的 Chorus 高潮段落。最后歌曲结束前还有一小段 Outro, 但

基本用的都是 Chorus 部分的和声，所以这里也未单独列出。

练习 3.11 试对方大同的歌曲爱爱爱进行和声分析。

解 方大同的歌曲在华语流行音乐中独树一帜，具有非常强烈的律动特色。虽然节奏可以带来规范的秩序和人脑对循环规律的愉悦认识，但一味的单调重复也会形成千篇一律的乏味感。律动即通过各种方式解放并调动人的注意力，如节奏变化（长短结合、三连音）、力度变化（重音移位）、演奏法变化（连奏、断奏）等，即规律了，又好似没有，偶尔能虚晃一枪，带来些许新鲜感。在这方面，方大同是绝对的个中高手。但除了律动性以外，方大同对于和声的选择也是极具考量，许多歌曲不按常理出牌，就算使用固定的和声套路也总能整出点花活，许多巧思令人惊叹不已。这首爱爱爱便是其非常著名的一首代表性作品，全曲可以分为主歌（Verse）、预副歌（Pre-Chorus）、副歌（Chorus）、桥段 1（Bridge 1）、桥段 2（Bridge 2），以及尾奏（Outro）六个部分，所有的和弦进行记录如下表 3.36 所示：

表 3.36：方大同 - 爱爱爱和声分析

4/4 拍 I = A		小节 1	小节 2	小节 3	小节 4
Verse	Iadd9 (Isus2)	Vm7 → I7	IVmaj7 → IIIm7	IIIm7 → IV/V	
Pre-Chorus	VI ^b maj7 (转 I = C, IVmaj7)	IVmaj7	IIIm7	IIIm7 → III ^b m7	
	IIIm7	IIIm7	VIIIm7 (转 I = A, IIIm7)	IV/V	
Chorus	Iadd9	Vadd9/VII	VIIm11	Vm7 → I7	
	IVmaj7	IIIIm7	IIIm7	IV/V	
	Iadd9	Vadd9/VII	VII ^b sus2 (VII ^b 7)	VIaug7	
	VI ^b maj7	IV/V	Imaj9	Imaj9	
Bridge 1	I	IIIIm9	IIIm11	V13(^b 9)	
	I	-	IVmaj7	V	
Bridge 2	(Chorus 回 I 级) Imaj9	Imaj9 → IIIm7	VIIm7	Vm7 → I7	
	IVmaj7	IVmmaj7	IIIm7	VIIm7	
	IIIm7	IIIm7	IV/V	IV/V	
Outro	(Chorus 回 I 级) Imaj9	IVm/I	Imaj9	II ^b dim7	
	IIIm7 → IIIm7	IVmaj7 → IV/V	Imaj9	Imaj9	

歌曲开始，Intro 和 Verse 部分完全相同。虽然使用了常规的和弦进行，但却在第 3-4 小节通过断奏的方式短暂打散了整体的音乐结构，律动感十足。

随后 Pre-Chorus 部分直接借用平行小调的和弦进行了丝滑的转调，但后续和声更具有大调色彩，所以标注了 C 大调。到 II 级和弦后，并未直接通过 II → V → I 结束，而是再次借用平行小调的和弦，构造临时 II → V 转回了 A 大调。

Chorus 段落大体是低音下行的 Turnaround，但从第 11 小节往后，一直处于离调的边缘反复试探。第 11 小节两遍 Chorus 分别用了 $VII^{\flat}\text{sus}2$ 和 $VII^{\flat}7$ ，第 13 小节用了 $VI^{\flat}\text{maj}7$ ，还是均可以视作借用了平行小调的和弦；而前后整体的和弦进行则精心构造了半音的低音下行线条，在走到 V 级属和弦后顺利回到 I 级主和弦。

Bridge 1 部分是一段弦乐四重奏，大体上遵循了堆叠和声的书写方式，但也有短暂的多声织体对位呈现，如第 6 小节，所以并未标记出确切的和弦。

Bridge 2 部分则大量利用临时 $\text{II} \rightarrow \text{V}$ ，让整段音乐充满特殊听感，但却依然流畅。

Outro 部分，在游离到常见的 IV 级小和弦并返回 I 级后，构造了一个低音上行的和声结构，中间还穿插了 $\text{II}^{\flat}\text{dim}7$ 作为过渡，最后缓慢结束全曲。

练习 3.12 试对方大同的歌曲 Love Song 进行和声分析。

解 Love Song 作为方大同的另一首代表性作品，完全不像歌词中唱到的那样，“是一首简单的，不复杂也不难唱的那一种歌”，而更像是其自我调侃的一种“黑色幽默”。全曲主要可以分为前奏（Intro）、主歌（Verse）、预副歌（Pre-Chorus）、副歌（Chorus），以及桥段（Bridge）五个部分，所有的和弦进行记录如下表 3.37 所示：

表 3.37：方大同 - Love Song 和声分析

4/4 拍 I = C		小节 1	小节 2	小节 3	小节 4
Intro	IVmaj7	IIIIm7	III	VIImaj7	
	IVmaj7	IIIIm7 → VIIm7	IIImaj7		IV/V
Verse	IVmaj7	IIIIm7	IIIm7 → IV/V		Imaj7
Pre-Chorus	VI ^{flat} maj7	III ^{flat} maj7	IIIm9		IV/V
Chorus	Imaj7	III7(^{flat} 9)	VIIm7		Vm7 → I7
	IVmaj7	VII ^{flat} maj7	III ^{flat} maj7 (转 I = C [#] , IIImaj7)		IV/V
	Imaj7	III7(^{flat} 9)	VIIm7		Vm7 → I7
	IVmaj7	IVm7	IIIIm7		VI7
	IVmaj7 → IIIIm7	III ^{flat} maj7	II ^{flat} maj7		Imaj7
Bridge	VII ^{flat} maj7	VII ^{flat} maj7	Imaj7		I7
	VII ^{flat} maj7	VII ^{flat} maj7	Imaj7		Imaj7 → V/VII
	VII ^{flat} 9sus	VII ^{flat} 9sus	III ^{flat} maj7		III ^{flat} maj7
	IIIm9	IIIm9	IV/V		IV/V

Intro 部分是一段弦乐引入，从 IV 级开始，第 3 小节用了 III 级大和弦，第 7 小节用了 II 级大和弦，均具有一定离调色彩。

Verse 部分一直在重复 $\text{IV} \rightarrow \text{III} \rightarrow \text{II} \rightarrow \text{I}$ 的动机。到 Pre-Chorus 部分开始进行离调，其中 $VI^{\flat}\text{maj}7$ 和 $III^{\flat}\text{maj}7$ 均可以视作使用了平行小调相对应级数的和弦。

Chorus 部分大体也是常规的和弦进行，但也使用了一些调性外的和弦，如第 2 小节的 $III7(\flat 9)$ ，第 16 小节的 $VI7$ ，剩下的则还是使用了平行小调相对应级数的和弦。



唯一比较特殊的是第6小节的VII^bmaj7，并不能在平行小调中构建出，而是应当视为Mixodylian调式中的和弦。此外，在最后一遍Chorus进行到第7小节时，升了半音进入C[#]大调，依靠的就是III^bmaj7可以视作升半音后的II级和弦。

Bridge部分则是十分神奇的一个段落。首先是构造了VII^bmaj7和Imaj7的循环和声，旋律上则产生一种在Mixodylian和大调音阶内来回切换的感觉（第4小节在I7上格外突出了^b7音）。第9小节VII^b级使用了属和弦配置，可以视作后面III^b级的副属和弦。随后半音下行到II级小和弦，重回原来的调性，最后半终止结束。

3.4.4 影视游戏配乐篇章

练习3.13 试对电影哈利·波特(Harry Potter)中约翰·威廉姆斯(John Williams)的配乐，海德威主题曲(Hedwig's Theme)进行和声分析。

解 Harry Potter系列电影，对J.K.罗琳(J.K. Rowling)的原著小说做了相当精细化的还原，复刻了一个栩栩如生、绚烂多姿的魔法世界。其中John Williams为其所作的电影配乐功不可没，用宏大的管弦乐叙事将奇幻的魔法氛围进行了完美的具象化表达。悠扬而神秘的主题旋律早已深入人心，成为全世界万千影迷心中的特定文化符号。

由于Hedwig's Theme原曲相当复杂，各种变奏、转调，以及织体配器的改变，若想仔细剖析，最好还是对照原版总谱进行研习。所以这里仅挑选其中具有代表性的三个基础主题(ABC段)和一个桥段(Bridge)，所有的和弦进行记录如下表3.38所示：

表3.38: John Williams - Hedwig's Theme 和声分析

3/8 拍 I = e		小节 1	小节 2	小节 3	小节 4
<i>A</i>	Im	Im	Im	Im	Im
	Im	Immaj7(^b 5) → Im(^b 9) (Vm → V∅)	Im	Im	Im
	Im	Im	IIIIm/VII	II ^b m/VI	
	IVm/VI	II7(^b 9)/VI [#]	Im	Im	
<i>B</i>	Im	Im	Im(^b 6)	VI∅ (II/I)	
	Im	VI7 → VIImaj7 (II7/I → VI7/I)	Im	Im	
	Im	Im	IIIIm/VII	II ^b m/VI	
	Im(^b 6)/V	II7(^b 9)/VI [#]	Im (Idim)	Im	
<i>C</i> (2/2 拍)	Im → VII [#] m → Im	II ^b m → Im → VII [#] m → Im	IVm → III [#] m → IVm	Im → VII [#] m → Im	Im → VII [#] m (VIIm → V7)
	Im → VII [#] m → Im	IIIIm → II ^b m → Im → II ^b m	Im → VII [#] m → Im	Im → V7 (VIIm → V7)	
	Bridge (I = a)	Im	Im	Im	Im
		Im (转 I = c)	Im → V7	Im → V7	Im

乐曲开篇的 \mathcal{A} 段和 \mathcal{B} 段均由音高打击乐器钢片琴 (Celesta) 主奏, 音色空灵且泛音丰富。整体的和声围绕自然小调的 I 级和弦展开, 但在中间引入了许多非协和音和过渡音, 制造了具有悬疑色彩的离调效果。由于这些离调的部分基本均以音程关系呈现 (如 \mathcal{A} 段第 6 小节和 \mathcal{B} 段第 6 小节), 所以很难确切分析出其和弦, 这里也只是给出了其中一种可能的解释。随着乐曲的进行, 管弦乐器相继出现, \mathcal{A} 段和 \mathcal{B} 段的主旋律会反复响起, 但与开篇的钢片琴段落并不完全一致, 例如 \mathcal{A} 段第 6 小节和 \mathcal{B} 段第 6 小节, 后续的部分不仅和弦, 连旋律音都略微不同。当然, 管弦群奏的情况下, 和弦更易分析, 上述表格内也均做了记录。

到了 \mathcal{C} 段, 节拍变为 2/2 拍, 出现了一段以旋律音来引导的和声段落, 分别以柱式和弦与分解和弦的织体方式呈现, 和弦进行上大体相同。值得说明的是, 原曲的 \mathcal{C} 段柱式和弦部分为了突出旋律音, 使用了许多转位和弦。为避免和弦记号过于臃肿, 所以这里仅标记出了基本的和弦进行。

Bridge 段落基本也是建立在自然小调的 I 级和弦上, 只是到了第 6 小节直接进行了小三度的升调 (可以理解为变到了关系大调的平行小调上)。在后续部分, Bridge 段落的旋律还通过共同和弦进行了纯五度的升调, 这种手法在全曲中也多次出现。

练习 3.14 试对游戏超时空之轮 (Chrono Trigger) 中光田康典的配乐, 时之回廊 (Corridor of Time) 进行和声分析。

解 作为长期霸占各大游戏排行榜单首位的角色扮演类游戏 (RPG), Chrono Trigger 是游戏界经过时间检验、岁月洗礼的不朽名作。除开其本身的游戏素质和跌宕起伏的优秀剧情之外, 光田康典的游戏配乐 (横空出世的处女作) 也在其中扮演着举足轻重的作用。这首 Corridor of Time, 旋律优美, 线条绵长, 在配器上则奉行极简主义, 寥寥数笔也仿若勾勒出万千气象, 与游戏画面完美契合, 相得益彰, 恰如其分体现出一种时间缓慢流动的奇妙意象。全曲主要可以分为一个前奏 (Intro) 和两段主旋律 (\mathcal{A} \mathcal{B} 段), 所有的和弦进行记录 (级数采用关系大调视角) 如下表 3.39 所示:

表 3.39: 光田康典 - Corridor of Time 和声分析

4/4 拍 I = A	小节 1	小节 2	小节 3	小节 4	小节 5	小节 6	小节 7	小节 8
Intro		(N.C.)			IVmaj7	IVmaj7	VIm7	VIm7
\mathcal{A}	IVmaj7($\#4$)	IVmaj7	III m 7	III m 7	IVmaj7	IVmaj7	VIm7	VIm7
	IVmaj7	IVmaj7	III m 7	III m 7	IVmaj7	V	VIm7	VIm7
\mathcal{B}	IVmaj7	IVmaj7	VIm7	VIm7	IVmaj7	IVmaj7	VIm7	VIm7
	IVmaj7	IVmaj7	VIm7	VIm7	IVmaj7	IVmaj7	VIm7	VIm7

Intro 部分刚开始是一段非功能性的分解琶音织体, 且在音效上对左右声道做了类似 3D 环绕的处理, 有一种时钟指针在旋转的画面感。和声进入后, 逐渐确定 $\#$ 小调的调性; 若从关系大调视角来看, 则是 A 大调, 和弦从 IVmaj7 进行到 VIm7。

\mathcal{A} 段主旋律进入, 在 IV 级和弦上突出了特殊的 $\#4$ 音, 即 Lydian 调式的特征音,

体现出一种强烈的漂浮感。这也是为什么本首乐曲更适合采用关系大调视角来分析，因为 Lydian 调式刚好是自然大调的 IV 级模式。随后，和声不断在 IV → III、IV → VI 中切换，最后通过 IV → V → VI 完成终止式。

\mathcal{B} 段可以看作是一个过渡段，旋律线条被拉的很长，和声则依然延续 \mathcal{A} 段所使用的常规和弦。虽然简单，听感上却拥有更多想象空间。和声不断循环往复，仿佛时间从未停止。

练习 3.15 试对游戏女神异闻录 5 (Persona 5) 中目黑将司的配乐，Life Will Change 进行和声分析。

解 Persona 系列一直以先锋前卫的美术风格和音乐风格享誉游戏界，特别是其第 5 代作品，更是以“心灵怪盗团”为主题，构建出一个华丽与新潮的幻想世界，将玩家的游戏体验推向了前所未有的高度，是该系列游戏中具有划时代意义的集大成者。可以预见，哪怕是相当遥远的未来，这部游戏依旧可以作为一部标杆式的作品，屹立于游戏的历史长河中，甚至其本身可以说已经超越游戏的范畴，是当之无愧的艺术珍品。

Persona 5 中经典配乐数不胜数，目黑将司也无愧于“音乐鬼才”之名，各种风格都信手拈来，拿捏地恰到好处。其中，Life Will Change 作为游戏中怪盗团发布完预告信再次进入殿堂时的背景音乐，具有旋律突出、情绪激昂等特点，是受到广泛赞誉的一首著名游戏配乐作品。全曲主要分为四个基本段落：前奏 (Intro)、主歌 (Verse)、预副歌 (Pre-Chorus)，以及副歌 (Chorus)，所有的和弦进行记录如下表 3.40 所示：

表 3.40：目黑将司 - Life Will Change 和声分析

4/4 拍 I = f		小节 1	小节 2	小节 3	小节 4
Intro		Im	Im → II ^b	Im	Im → II ^b (Im)
Verse	Im7	III	IV	IV/V → V7sus → V7	
	Im7	III	IV	II∅ → V7	
Pre-Chorus	Im	Im	III6	III6	
	IV7	IV7	II∅	V7	
Chorus	Im	Im	III(6)	III(6)	
	IV	IV → (IV7)	Im → II ^b	IIm (II∅) → V(7)	
	Im	Im	III(6)	III(6)	
	IV	IV(7)	Im	Im	

Intro 部分上来就用吉他和鼓组构建出具有强烈 Funk 风格的律动感，随后贝斯加入，和声主要在小调的 I 级和弦上展开，但在偶数拍的最后一小节做了旋律动机整体升高半音的处理（并不能视作 Neapolitan 和弦，因为不具备其功能特质）。

随后 Verse 部分进入到一个 Im → III → IV → V7 的基础 Turnaround。这里 IV 级大和弦的运用具有相当明显的 Dorian 色彩，但在旋律上却并未突出 Dorian 调式的特征音，一定程度上模糊了乐曲的调性，整体呈现出一种奇异却顺畅的特殊听感。

Pre-Chorus 和 Chorus 部分的和声进行与 Verse 部分基本一致，只是将和弦改为了每两小节变换一次。此外，在 Chorus 第 7-8 小节，为了到达 V 级属和弦，临时做了一个 I → II^b → II → V 的级进处理。

全曲除了以上段落，在 Pre-Chorus 和 Chorus 之间，以及第一遍 Chorus 之后，还有两个单独的器乐段落。但前者只是在 Im 和弦上做了低音的半音下行处理，后者的和声也基本与 Chorus 保持一致，所以这里并未单独列出。

练习 3.16 试对游戏仙剑奇侠传三中骆集益的配乐，御剑江湖进行和声分析。

解 对于走过了漫长岁月的仙剑系列游戏来说，也许并没有能在世界的历史舞台上留下令人瞩目的成绩，但却从未影响其在广大华人玩家心目中的重要地位。毕竟，只有长期接受中国传统文化熏陶的人，才能深刻理解仙剑系列所蕴藏的极致古典浪漫。其中，仙剑三作为仙剑系列承前启后的一代经典作品，在一个更为广阔的“人神魔”世界观架构下，通过跌宕起伏的剧情设定、古色古香的画面环境、典雅质朴的行文风格，将仙与侠的精神内涵传达得淋漓尽致。进入游戏主界面，立刻响起的便是主题曲御剑江湖。伴随大气磅礴、荡气回肠的编曲，整首配乐所营造的氛围让玩家仿佛身临其境。从乐曲结构上分析，全曲主要可以分为两个段落（A/B 段），所有的和弦进行记录（级数采用关系大调视角）如下表 3.41 所示：

表 3.41：骆集益 - 御剑江湖和声分析

4/4 拍 I = E		小节 1	小节 2	小节 3	小节 4	小节 5	小节 6	小节 7	小节 8
A	VIm	V	IV	I	VIm	V	IV	V	
B	I	V	VIm	IIIIm	IV	IIIIm	IV	V	
	I	V	IV	IIIm	IIIm	VIm	IV	V	
	VIm	VIm	VIm	VIm					

A 段从 VI 级小和弦引入，第 4 小节回到自然大调的 I 级主和弦，第 8 小节以 V 级属和弦的半终止过渡到 B 段。随后乐曲进入到明亮的大调色彩中，但辗转过后最终还是停留在 VI 级小和弦上作为结尾。这种交替使用自然大调与其关系小调的作曲手法，模糊了乐曲的大小调属性，加之几乎完全构建在三和弦配置基础上的和声，给编曲预留了足够的发挥空间，通过中国民族乐器的完美演绎，可以呈现出缥缈婉转的丰富意象，是仙剑系列音乐中常用的和声化手段。

练习 3.17 试对电视剧仙剑奇侠传中麦振鸿的配乐，莫失莫忘进行和声分析。

解 电视剧仙剑奇侠传改编自游戏仙剑一。尽管为了扩充剧情，对游戏原作魔改之处较多，但剧集本身故事完整，人物个性饱满，情感充沛，对于广大仙剑迷来说仍不失为一代经典。最重要的，电视剧中的配乐并没有采用太多游戏中的曲目，几乎完全原创，且首首好听。许多音乐一响起，便能联想到剧中与配乐浑然一体的各种画面，以及当时看剧时深藏内心的那份感动。这首莫失莫忘也是剧中演到动人之处时常响起的配乐，全曲主要可以分为四个段落（A/B/C/D 段），所有的和弦进行记录（级数采用关

系大调视角) 如下表3.42所示:

表 3.42: 麦振鸿 - 莫失莫忘和声分析

4/4 拍 I = A ^b		小节 1	小节 2	小节 3	小节 4	小节 5	小节 6	小节 7	小节 8
\mathcal{A}		VIm	V	VIm	Vadd9				
\mathcal{B}		VIm	Vadd9	VIm	Vadd9	I	IIIm	I	V(6)
\mathcal{C}		VIm	Vadd9(6)	VIm	Vadd9	I	IIIm	I	I → (/VII)
\mathcal{D}		I	V/VII	IV	I	I	IV	V	VIm
(I = E)		V	IV	V	V				

\mathcal{ABC} 段的和声大体相同，都是从 VI 级小和弦引入，V 级属和弦半终止，或 I 级主和弦全终止。但相较上一首而言，这首配乐在 V 级和弦上加入了一些延伸音，以分解琶音的形式与旋律线条交相辉映，增加了乐曲的流畅度。

到了 \mathcal{D} 段，乐曲直接从 A^b 大调转入了 E 大调。这里转调的逻辑在于，A^b 大调的主音刚好是 E 大调的三音，所以尽管和弦上并未有重合，但旋律音的过渡足够自然。

3.4.5 Jazz 音乐篇章

练习 3.18 试对 Frank Churchill/Larry Morey 的 Jazz 标准曲 (Standard) Someday My Prince will Come 进行和声分析。

解 Someday My Prince will Come 的原曲是一首迪士尼 (Disney) 歌曲，因优美华丽的旋律线条，以及不落俗套的和声色彩而被众多 Jazz 乐手争相演奏，最终加入 Jazz Standard 之列。全曲主要可以分为两个基本段落 (\mathcal{AB} 段)，所有的和弦进行记录如下表 3.43 所示 (Jazz 音乐重在肆意挥洒的即兴演奏，和声方面一般标记出基本属性，延伸音和扩展音可根据实际情况随意改写):

表 3.43: Frank Churchill/Larry Morey - Someday My Prince will Come 和声分析

3/4 拍 I = B ^b		小节 1	小节 2	小节 3	小节 4	小节 5	小节 6	小节 7	小节 8
\mathcal{A}	Imaj7	III7(#5)	IVmaj7	VI7(#5)	IIIm7	VI7(#5)	II7	V7	
	IIIm7	IIdim	IIIm7	V7	IIIm7	IIdim	IIIm7	V7	
\mathcal{B}	Imaj7	III7(#5)	IVmaj7	VI7(#5)	IIIm7	VI7(#5)	II7	V7	
	Vm7	I7	IV	IV [#] dim	I/V	IIIm7/V → V7	I	I	

本曲 \mathcal{AB} 两个段落虽然使用的基本还是常规的和弦进行如 I → III → IV → VI、II → V → I 等，但在第 2、4、6 小节的 III 级和 VI 级上使用了属七和弦的配置，而让和声色彩甚至旋律发展都有了更多选择。这也是常见的一种 Jazz 化和声手段，毕竟 Jazz 音乐习惯对和弦进行延伸，但自然大调的 III 级和 VI 级小和弦若延伸至九和弦以上，必然会出现调性外的音，不如直接如 V 级属和弦一样，可以使用变化属和弦。



在演奏完一遍主旋律后，Jazz 音乐一般会进入到即兴的 solo 段落。这里结合章节3.2.4和附录H.2，以本曲 \mathcal{A} 段前8小节为例，对大调类型乐曲的 solo 中如何选择音阶做一点进阶分析。首先第1小节 I 级和弦上自然常规演奏 Ionian；第2小节由于使用的是 dominant7(\sharp 5)（也可写作 dominant7(\flat 13)），可供选择的音阶较多，如 Mixolydian \flat 6、Super Locrian(Altered)、H/W-dim 等，都不会太违和；第3小节虽然使用的是 maj7，但这里是调性内的 IV 级和弦，正确的选择应该是 Lydian（自然大调的 IV 级模式）；第4小节与第2小节类似，不做重复；第5小节为调性内的 II 级和弦，常规演奏 Dorian；第6小节与第4小节相同；最后第7-8小节的 II → V，均使用了 dominant7，可以演奏 Mixolydian，V 级上也可以进一步改为变化属和弦，演奏 Super Locrian(Altered)。

注意，上述音阶的选取只是一些常规方式。事实上，全曲还可以自由选择 B \flat 大调的 Major Blues、在 II → V 上选择对应的 Bebop（或在任意地方自由加入广义的环绕音），以及使用五声音阶等等。这也是 Jazz 音乐的即兴拥有无限可能的魅力所在。

练习 3.19 试对 Luiz Bonfá 的 Jazz 标准曲（Standard）Black Orpheus 进行和声分析。
解 Black Orpheus 作为 Jazz Standard 中一首著名的 Bossa Nova 曲目，节奏轻快，旋律略带忧伤，是一首很好听的小调乐曲。全曲主要可以分为两个基本段落（ $\mathcal{A}\mathcal{B}$ 段）和一个尾奏（Outro），所有的和弦进行记录如下表3.44所示：

表 3.44: Luiz Bonfá - Black Orpheus 和声分析

4/4 拍		小节 1	小节 2	小节 3	小节 4
	I = a				
\mathcal{A}	Im7	II \emptyset → V7(\flat 9)	Im7	II \emptyset → V7(\flat 9)	
	Im7	IVm7 → VII7	IIImaj7	III \sharp dim7	
	IVm7	VII7	III6	VImaj7	
	II \emptyset	V7(\flat 9)	Im7	II \emptyset → V7(\flat 9)	
\mathcal{B}	Im7	II \emptyset → V7(\flat 9)	Im7	II \emptyset → V7(\flat 9)	
	V \emptyset	I7(\flat 9)	IVm7	IVm7	
	IVm7 → /III	II \emptyset → V7(\flat 9)	Im7 → /VII	VImaj7	
	II \emptyset	V7(\flat 9)	Im7	II \emptyset → V7(\flat 9)	
Outro	(Im7) → IVm7 → Im7	IVm7 → Im7	IVm7 → Vm7	Im7	

\mathcal{A} 段前4小节先是演奏了小调的常规 II → V → I (V 级使用了变化属和弦)，随后以关系大调的 I 级为主音（小调为 III 级），走了一个临时 II → V → I (再次看到 IVm7)。在通过一个减七和弦进行过渡后，第 9 到 15 小节，构造了一个小调 IIIm → V → I → IV → VII \emptyset → III → VIIm 的 Turnaround (关系大调视角)，之后利用 II → V 顺利进入 \mathcal{B} 段。

\mathcal{B} 段的结构从第 5 小节开始发生些许变化。先是通过临时 II → V → I 走到 IVm7，随后构建低音下行进行到 II 级。在通过 II → V → I 走到 I 级主和弦后，再次构建低音下行来到 VImaj7，随后便可以四度上行回到 II → V → I 连接后续的 solo 段落。

Outro 部分先是重复了两遍小调的常规 IV → I 进行，然后四度上行，以自然小调的 IV → V → I 进行结束全曲。

接下来以本曲为例简要分析一下小调乐曲的即兴 solo。相比大调来说，由于小调有三种模式，所以在如何选择音阶上会更加困难。通常来讲，小调的和声进行是以自然小调来思考的，但在 V 级上为了制造更为明显的属主关系而倾向于使用属七和弦，堆叠至九和弦则为 $V7(\flat 9)$ ，从而引出和声小调的音阶概念。不过由于和声小调的即兴很容易带出偏离的“异域风情”，所以另一种在小调上选择音阶的惯用思考模式为使用 Jazz 旋律小调。以本曲中大量出现的 $II \rightarrow V \rightarrow I$ 为例，可以直接改写为 $II\emptyset \rightarrow V7(\text{alt}) \rightarrow I(6)$ ，此时在 II 级上可供选择的音阶有 Locrian $\sharp 2$ (Half-diminished) 或 Locrian，V 级上可供选择的音阶有 Super Locrian(Altered) 或 H/W-dim，I 级上可供选择的音阶即为 Jazz Minor。可以看到，如果选择 Locrian $\sharp 2$ (Half-diminished)（旋律小调的 V 级模式）、Super Locrian(Altered)（旋律小调的 VII 级模式）和 Jazz Minor（旋律小调的 I 级模式）的组合，则其实全部在 Jazz 旋律小调的框架下（只是不能视为同一个调性），从而更方便统一即兴 solo 时的乐句思维。

练习 3.20 试对 Erroll Garner 的 Jazz 标准曲 (Standard) Misty 进行和声分析。

解 在众多 Jazz Standard 中，Misty 是一首非常耐听，情绪色彩浓郁的著名作品，其渲染的氛围犹如雾里看花一般，令人沉迷。全曲可以分为四个基本段落 ($A B C D$ 段)，所有的和弦进行记录如下表 3.45 所示：

表 3.45: Erroll Garner - Misty 和声分析

4/4 拍 I = E \flat		小节 1	小节 2	小节 3	小节 4
A	Imaj7	Vm7 → I7	IVmaj7	IVm7 → VII \flat 7	
	Imaj7 → VIm7	IIm7 → V7	IIIIm7 → VI7	IIm7 → V7	
B	Imaj7	Vm7 → I7	IVmaj7	IVm7 → VII \flat 7	
	Imaj7 → VIm7	IIm7 → V7	I6 → VII \flat 9	Imaj7	
C	Vm7	I7($\flat 9$)	IVmaj7	IVmaj7	
	IV \sharp m7	VII7 → II7	IIIIm7 → VI7($\flat 9$)	IIm7 → V7	
D	Imaj7	Vm7 → I7	IVmaj7	IVm7 → VII \flat 7	
	Imaj7 → VIm7	IIm7 → V7	I6 → VIm7	IIm7 → V7	

$A B D$ 段前 6 小节完全相同，和声动机主要由 $I \rightarrow IV$ 和 $I \rightarrow VIm \rightarrow IIm \rightarrow V$ 两个基本 Turnaround 构成，但在其中还加入了许多临时进行的巧思。例如第 2 小节使用临时 $II \rightarrow V$ 接到第 3 小节的 $IVmaj7$ ，再在第 4 小节借用平行小调的 $IVm7$ 四度上行到 $VII\flat$ 级，随后利用 Backdoor 和弦进行回到 I 级主和弦。

$A B D$ 段第 7-8 小节略有不同。 A 段是使用了一个 $IIIIm \rightarrow VI \rightarrow IIm \rightarrow V$ 的四度上行进行（也可看作临时 $II \rightarrow V$ 嵌套）； B 段是经过了一个 Backdoor 和弦进行重新回到 I 级；而 D 段则是重复了一个 $I \rightarrow VIm \rightarrow IIm \rightarrow V$ 的 Turnaround。

C 段是一个中间段落，类似 Bridge 的功能。第 1 小节上来便从离调的 $Vm7$ 开始，构造了一个临时 $II \rightarrow V \rightarrow I$ 走到 $IVmaj7$ ，随后再是一段临时 $II \rightarrow V \rightarrow I$ ，不过这次是走到 $IIIIm7$ ，且 II 级上并未用调性内的 $II\emptyset$ ，而是使用了类似重属和弦的 $IIm7$ 。此外，



在回到临时的主和弦 IIIm7 之前，还引入了一个 Backdoor 和弦进行（第 6 小节的 II7）。最后的第 7-8 小节则是前面提及的 IIIm → VI → IIIm → V 进行。

练习 3.21 试对 Bill Withers 的歌曲 Just the Two of Us 进行和声分析。

解 严格意义上讲，Just the Two of Us 并不能算作是一首 Jazz Standard，其诞生的年代更偏后，具有明显 R&B 和 Soul 的曲风。但这首歌曲的和声写作手法带有浓厚的 Jazz 风格，所以也延伸出了各种 Jazz 演奏版本。这里主要还是以原歌曲的结构作为参考进行分析，全曲可以分为前奏（Intro）、主歌（Verse）、副歌（Chorus），以及桥段（Bridge）四个基本部分，所有的和弦进行记录（级数采用关系大调视角）如下表 3.46 所示：

表 3.46: Bill Withers - Just the Two of Us 和声分析

4/4 拍 I = A ^b	小节 1	小节 2	小节 3	小节 4
Intro	IVmaj7 → III7	VIm7 → Vm7 → I7	IVmaj7 → III7	VIm7
Verse	IVmaj7 → III7 → (IV [#])	VIm7 → Vm7 → I7	IVmaj7 → III7 → (IV [#])	VIm7
Chorus	IVmaj7 → III7	VIm7 → (V [#] m7) → Vm7 → I7	IVmaj7 → III7	VIm7
Bridge	IVmaj7 → III7sus	III ^b maj7 → II7sus	II ^b maj7 → I7sus	IVmaj7 → VII ^b 7

首先，这首歌曲具有明显的小调调性，但其和弦进行放在大调的级数关系中更易看清楚逻辑。Intro、Verse，以及 Chorus 部分基本均采用了相同的和声动机，即一个 IV → III → VIm 的 Turnaround（纯首调则为 VI → V → Im）。这里 III 级使用了调性外的变化属和弦，可以进一步加入 ^b9、^b13 等扩展音来增强乐曲的 Jazz 色彩；第 2 小节在进入到第二遍 IV → III → VIm 之前，引入了临时 II → V 以增加离调感；此外，Verse 和 Chorus 段落还在不同的地方加入了 V[#] 级的过渡和弦。所以整个和弦进行既顺畅又充满各种惊喜与变数。

Bridge 部分从 IVmaj7 开始，交替使用 maj7 和 sus，构建了一个半音的低音下行，在第 3 小节进行到 I7sus 后，连续四度上行停在一个 VII^b7 上结束。

3.4.6 和泉宏隆独奏特辑

单独列一节和泉宏隆独奏特辑，颇有“暗藏私心、夹带私货”之嫌疑。作为 Jazz Fusion 领域数一数二的乐队组合，T-Square 许多经典名曲均由当家键盘手和泉宏隆写就，这些乐曲后续也基本均发行了纯钢琴版本。和泉宏隆的创作特点在于，音乐线条大多简约而唯美，主旋律温润如玉，悠远绵长，中间段的自由 Jazz solo 却在特定的和声框架下显得游刃有余，肆意妄为，但仍不乏丰富的音乐性。相较于其他 Jazz 音乐中为了挥洒才情如狂风骤雨般喷薄而出的即兴 solo，和泉宏隆的乐句更富于歌唱性，并不会显得过于晦涩，仿佛每一条都经过精心设计，裹挟着听众的思绪，提供充盈的沉浸感，是真正平衡了乐曲复杂性与歌唱性的好作品。

和泉宏隆于2021年4月26日因新冠疫情的诱因引发心脏疾病而匆匆离世，享年62岁，音乐作品也永远定格于此。不论生命如何灿烂，终将败给时间。但，只要对音乐心怀热爱，这些留下的无数动人篇章仍将继续被一代代乐手们倾情演绎，是生命通过艺术载体所达到的另一种永恒存在的明证。

下面将在和泉宏隆众多经典乐曲中选取四首代表性作品进行和声记录（主要参考系列专辑 Izumi Hirotaka Complete Solo Piano Works 的版本）。为节省篇幅，本节不再对每首的和声手法做具体分析，而只留下全部的和弦进行，以便自行对照，对其创作思路一窥究竟。

练习3.22 试对和泉宏隆的乐曲 Twilight in Upper West 进行和声分析。

解 Twilight in Upper West 是一首抒情意味浓郁的乐曲，旋律优美，全曲弥漫着淡淡的忧伤情绪，好似具有些许小调的色彩，但其实整体的和声完全在大调的基调上，呈现出了极具反差的音乐效果。全曲主要分为四个基本段落：前奏（Intro）、主歌（Verse）、预副歌（Pre-Chorus）、副歌（Chorus），其中 Verse 部分包含 solo，Chorus 尾段略微不同，此外 Intro 部分同时也承担了间奏（Bridge）和尾奏（Outro）的角色，所有的和弦进行记录如下表3.47所示：

表3.47: 和泉宏隆 - Twilight in Upper West 和声分析

4/4 拍 I = B ^b		小节 1	小节 2	小节 3	小节 4
Intro		I/III → IV → III7/V [#]	I/III → IIIm → III7/V [#]	VImadd9 → VImadd9/V	II7(6)/IV [#] → IV/V → V (结尾接 I)
Verse (+solo)	Iadd9 → I/III	IVadd9 → V7	III/V [#] → VIm		V/VII → I → (I7)
	IV → V	III/V [#] → VIm7	IIIm(7) → I/III		IVmaj9 → VIm/V → V
	Iadd9 → I/III	IVadd9 → V	III/V [#] → VIm(11)		V/VII → I → I7
	IV → III11 → III7(^b 9)	VIm7 → II7	IIIm9		IIIm/V → V
Pre-Chorus	VI ^b maj7 → VII ^b	Im → Im/VII ^b	VI ^b maj7 → VII ^b /VI ^b	IVadd9/V → V	
	VI ^b maj7 → VII ^b	Im → Im/VII ^b	VI ^b maj7 → II ^b	IIIm7(11) → V	
	IV/V → V				
Chorus	I → IIIm → I/III	IV → IVmaj7/V → V [#] dim7	VImadd9 → VI ^b dim7 → I/V	II/IV → IV/V → V → IV/VI → V/VII	
	I → IIIm → I/III	IV → IVmaj7/V → V [#] dim7	VImadd9 → VI ^b dim7 → I/V	II/IV → IVm	
接 1	IIIm7 → VIm7	IIIm9 → IV/V			
接 2	IIIm7 → VIm7	IIIm9 → IV/V → V/IV	IIIm7 → V11 → V7(^b 9)	IIIm9 → IV/V	

练习3.23 试对和泉宏隆的乐曲 Omens of Love 进行和声分析。

解 Omens of Love 的原曲非常欢乐，具有振奋人心的情绪色彩，同时经改编后的吹奏

乐版本也广为流传，深受演奏者们的喜爱。但和泉宏隆的独奏钢琴版本，重新舒缓了节奏，将曲调整体进行了彻底的翻改，具有温暖治愈、却又蕴含些许伤感的情绪。全曲主要分为七个基本段落：前奏（Intro）、主歌1（Verse 1）、主歌2（Verse 2）、预副歌（Pre-Chorus）、副歌（Chorus）、尾奏1（Outro 1），以及尾奏2（Outro 2），其中 Verse 1 部分包含 solo，所有的和弦进行记录如下表3.48所示：

表 3.48: 和泉宏隆 - Omens of Love 和声分析

6/8 拍 I = B ^b		小节 1	小节 2	小节 3	小节 4
Intro	I	V/I	VIIm7/I	IVm6/I	
	I	V/I	IV/I	IVmmaj7/I → IVm6/I	
Verse 1 (+solo)	I	IIIm7	IVadd9	VIIm/V → III7/V [#]	
	VIm (2 → 1 → 7 → ^b 7)	II	IIIm7	(VI ^b 7) → V7	
Verse 2	I	IIIm7	IVadd9	IVmaj7/V → III7(^b 9)/V [#]	
	VIm (2 → 1 → 7 → ^b 7)	II7	IIIm7	(V7sus) → V	
Pre-Chorus	IVadd9	Vadd9/IV	IIIm7	VI7([#] 11) → VI7	
	IIIm7(11)	IIIm/V → II∅/V	Vadd9	Vmaj7	
Chorus	IIIm7	Iadd9/III	III → IV [#] m7 → III/V [#]	VIImadd9	
	IIIm7	I/III	IV	IV/V	
Outro 1	V				
	Iadd9	IIIm7	III∅	VI7(^b 13) → Vadd9/VII → VI/I [#]	
Outro 2	IIIm7	IIImmaj7/I [#] (I [#] aug)	IV/I	V/VII → V (VIIIm7 → III7)	
	VIImadd9	II∅/VI ^b	I/V	IV [#] ∅	
	IIIm7 → I/III → IV	IIIm7 → I/III → IV → IIIm7/V			
	I	V/I	IV/I	IVm/I (结尾接 I)	

练习 3.24 试对和泉宏隆的乐曲宝岛（Takarajima）进行和声分析。

解 Takarajima 可以说是和泉宏隆甚至 T-Square 乐队最为著名的作品。与 Omens of Love 类似，这首乐曲也被改编为吹奏乐的版本，是各大管乐团必备的经典演奏曲目。Takarajima 旋律线条独特，和声色彩丰富，solo 部分在偏 Jazz 风格的和声下具有高度的自由性。经和泉宏隆重新演绎的钢琴独奏版，在色彩情绪上多了一份克制，更加平静，而 solo 部分则大大增加，与原曲旋律结合在一起，呈现出令人惊叹的流畅性与歌唱性。全曲主要分为七个基本段落：前奏（Intro）、主歌（Verse）、副歌（Chorus），以

及间奏 (Bridge) solo、副歌 (Chorus) solo 和尾奏 (Outro) solo, 所有的和弦进行记录如下表3.49所示:

表 3.49: 和泉宏隆 - Takarajima 和声分析

4/4 拍 I = B ^b		小节 1	小节 2	小节 3	小节 4
Intro	IV ₆ ⁹ → III7(♭9)	VIm(add9,11) → VIm → Vm7 → I7(♭9)	IVmaj7 → V9	Imaj7	
	IV ₆ ⁹ → III7(♭9)	VIm(add9,11) → VIm → Vm7 → I7(♭9)	IVmaj7 → V7(♭9)	I → IV/I → I	
Verse	IV [#] ∅ → IVm6	IIIIm7 → VI7(♭9)	IIIm9 → IVm/V	Imaj7	
	VII∅ → III7	VIm(add9,11) → VIm → Imaj7/V	IV [#] ∅ → II7 (转 I = G, IV7)	IIIm7(11) → IIIIm7 → IVm7 → IIIm7/V	
Chorus	Imaj7(9) → IIIIm7 → (VII ^b 7)	VIm7 → Vm7 → I9(13) (I7(♭9))	IVmaj9 → V/IV	IIIm7 → VI7(♭9)	
	IIIm7 (IIIm11) → III7(♭9)	VIm → II7(13) → II7(♭13)	IIIm7	IIIm9 → IIIIm7 → IVmaj7 → IIIm7/V	
	Imaj9 → IIIIm7 → (VII ^b 7)	VIm7 → Vm7 → I9(13)	IVmaj7 → V/IV	IIIm7 → VI7	
	IIIm11 → III7(♭9)	VIm → II9(13)	IIIm11 → IV/V → V	VI ^b add9 → VII ^b	
I (转 I = B ^b , VI)					
Bridge solo	IV/V (IIIm7/V) → IVm/V (II∅/V)		IV/V (IIIm7/V) → IVm/V (II∅/V)		I/V
	IV6 → III7	VIm7 → Vm7 → I7	IVmaj7 → V7(♭9)	I(maj7)	
Chorus solo	I → IIIIm(7)	VIm(7) → Vm7 → I7	IV → V/IV	IIIm7 → VI7(♭9)	
	IIIm(7) → III7(♭9)	VIm → II7	IIIm(7)	V7sus → (V(7))	
Outro solo	IV/V → IVm/V	Iadd9/V	IIIm/V → II∅/V	I/V	
	IIIm7/V → II∅/V	Iadd9/V	IIIm/V → II∅/V	IV [#] ∅ → IVm7	
	IIIm7(11) → III ^b 7	IIIm	II ^b (#4)	Imaj9	
	IIadd9/I				

练习 3.25 试对和泉宏隆的乐曲 Forgotten Saga 进行和声分析。

解 Forgotten Saga 无论 T-Square 的乐队演奏版, 还是和泉宏隆的钢琴独奏版, 均展现出一种近乎极致的哀伤情绪。虽然全曲以大调写就, 但旋律中那娓娓道来的倾诉感, 将一点点的悲伤色彩逐渐聚集给听众, 如同一个巨大旋涡, 令人沉沦。全曲主要分为四个基本段落: 前奏 (Intro)、主歌 (Verse)、预副歌 (Pre-Chorus)、副歌 (Chorus), 其中 Verse 部分包含 solo, 此外 Intro 部分同时也承担了间奏 (Bridge) 和尾奏 (Outro)

的角色，所有的和弦进行记录如下表3.50所示：

表 3.50: 和泉宏隆 - Forgotten Saga 和声分析

4/4 拍 I = G	小节 1	小节 2	小节 3	小节 4
Intro	IVm6/I → Iadd9	IVm6/I → Iadd9	IVm6/I → Iadd9	IVm6/I → I
	IVm6/I → Iadd9	IVm6/I → Iadd9	IVm6/I → I	Vsus (结尾接 I)
Verse (+solo)	IVm6/I → Iadd9	IVm6/I → Isus → I → V/VII	VIm → IIIIm/V	IVadd9
	IIIIm → VIm	IIIIm → VIm	IIIm7	Vsus(add9) → V
	IVm6/I → Iadd9	IVm6/I → Isus → I → V/VII	VIm → IIIIm/V	IVmaj9
	I/V → III/V [#] (V [#] dim7)	VIIsus(add9) (VIm) → IVm/VI ^b	I/V → IV/V → IVm/V	IVm6/V → V
Pre-Chorus	IV6/V → III/V [#] (V [#] dim7)	VImadd9	IV6/V → V [#] dim	VIm → V/VI → VIm
	IV6/V → III/V [#]	VIIsus(add9) → I6/V	IV6 → I/III	IIIm7(11)
	Vsus(add9) → V			
Chorus	Iadd9 → IIIIm7 → Vm7 → I7(13) → I7(^b 13)	VImadd9	IVadd9 → IIIIm7	IIIm7 → IV/V → III/V [#]
	VIm → VII ^b 9	Iadd9 → IVmaj9 → IVm6	I/V → VIm(7)	II7(13) → II7(^b 13) → IV/V → IVm/V
	Imaj9 → IIIIm7 → Vm7 → I7(13) → I7(^b 13)	VImadd9	IVadd9 → III → IIIIsus/IV [#] → III/V [#]	IIImadd9 → IVm6/VI ^b
	I/V → IVadd9 VII ^b 9(13) → VII ^b 7	Iadd9/III → VII ^b 7	I/V → IV/V	IVm6/I → V

通过本节大量不同类型音乐的和声分析，进一步从实际乐曲中学习并总结了各类典型的和声写作手法。事实上，不论古典还是现代，和声理论还是均建立在一定的逻辑框架下，通过不断地变换基础形态，最终徐徐展开成复杂的和声画卷。基于此，为了浓缩本章平铺直叙的复杂和声知识，附录H.4以思维导图的形式，通过逻辑链路将知识要点进行串联呈现，基本完全梳理并汇总了本章所提及的所有和声进行手段，以供进一步查阅。

结论 本章在十二平均律的定律体系基础上，以一种独特的理工科思维串讲了传统音乐领域中重要的和声理论知识，具体包括：

- 介绍了调式音阶、音程、和弦、节奏与织体等基础乐理；
- 细致梳理了音乐中各种不同的调式音阶，以及即兴演奏中的音阶横向思维；



- 通过对 Voicing、Turnaround 和 Voice Leading 的介绍，进一步总结了和弦相关的进阶知识，并大量选取古典、流行、影视游戏配乐以及 Jazz 音乐中的经典作品进行了和声分析。

和声学是音乐创作的基石。在此之上，才催生出了音乐理论中各种后续知识如对位法、复调、四部和声以及配器法等。然而现如今，为了做出一首能够永久保存的出版级音乐作品，除了对和声需要有着深刻理解以外，还需要经过录音、编曲、混音、母带处理等各项复杂工序，每一项细分工种都将耗费无数心力才能做到极致。在科技革命的浪潮下，传统艺术领域的焕发新生正在逐渐酝酿当中。

也许当初的人们还在惊叹于曾经音乐巨匠们的丰功伟绩过于璀璨，为音乐故事即将写完而感到惶恐不安，殊不知计算机的飞速发展能为音乐世界带来翻天覆地的技术迭代，电子音乐也在逐渐为人类音乐史留下浓墨重彩的烙印。一场伟大的音乐文明变革已悄然来临。

第4章 数字音频

内容提要

- | | |
|--|---|
| <ul style="list-style-type: none">□ 声音录制与回放□ 卷积运算□ 连续时间的 Laplace 变换□ 离散时间的 z 变换□ 频率响应 | <ul style="list-style-type: none">□ 采样、量化、编码及传输□ 离散 Fourier 变换□ 快速 Fourier 变换□ 数字滤波器 |
|--|---|

人类文明历经数次工业革命，从蒸汽时代、电气时代，走到信息时代和现如今以人工智能为引领的时代，音乐也伴随着科技进步不断变换着其基础形态。前面的章节已经通过理论分析叙述了音乐的本质是声波。但若想要“保存”、“传递”甚至“处理”声波这种动态物质，仍非易事。得益于半导体技术的飞速发展，目前臻于完善的做法是通过集成电路与芯片技术，将声音作为载有信息的“信号”，借助电子元器件的载体，实现声音的转换、记录与音频处理。这便是本章要讲述的核心知识点。

需要说明的是，尽管音频技术具有浓厚的跨学科属性，但本着梳理基础理论的原则，本章并不具体叙述元器件的电路设计等偏实际应用方面的知识，而只关注为了完成音频信号处理所需要的底层逻辑与数学原理。

4.1 声音录制与回放

人们为了能够长久地保存和重新播放所演奏的音乐，走过了漫长的探索道路。过去百年间，许多声音录制与回放的精巧设备逐一问世，有些现在仍在使用，而有些随着市场需求的改变已经逐渐淘汰，淹没于历史的长河之中。

早期的“留声”设备是通过纯机械传导的方式实现声音录制与回放的。自从电气时代以来，所有此类设备都转向将声波化为具体的机械振动，通过电磁感应原理（详见附录E4）实现声-电切换（本质是能量形式的转换），将声音信息变为电信号进行传递。此时通电导体产生磁场，由于磁力相互作用（详见附录E2）可在易刻录但不易变形的介质上形成声波纹路来保存音乐；当需要回放时，再以类似的电磁作用反向将刻录的声波纹路变为电信号，通过转为机械振动将声音播放出去。

数字时代到来后，人们意识到，可以在信号传输过程中引入了关键的采样操作，将从声波中捕获到的连续信号转为特定点取样的离散信号进行存储；当需要回放声音时，再将离散信号复原为连续信号进行输出。尽管这种操作看似会丢失声音信息，但通过理论证明，只要满足一定采样率的条件，即可完美重现原本的声音——这也是本章后续要探讨的核心内容。

以上两部分对于声音录制与回放的描述，一般被划分为模拟（analog）和数字（digital）两类，分别代表连续型和离散型信号的处理模式。经过多年技术迭代，数字类设备因易于存储和处理已展现出无与伦比的优越性，当然模拟类设备也具有其独到之处（特别在音频领域，设备的细微不确定性会带来独特的声音质感），并不是说已完全被取代。

不论如何，大体来说，声音录制与回放均具有相似的实现过程，可总结为如下的链路图：

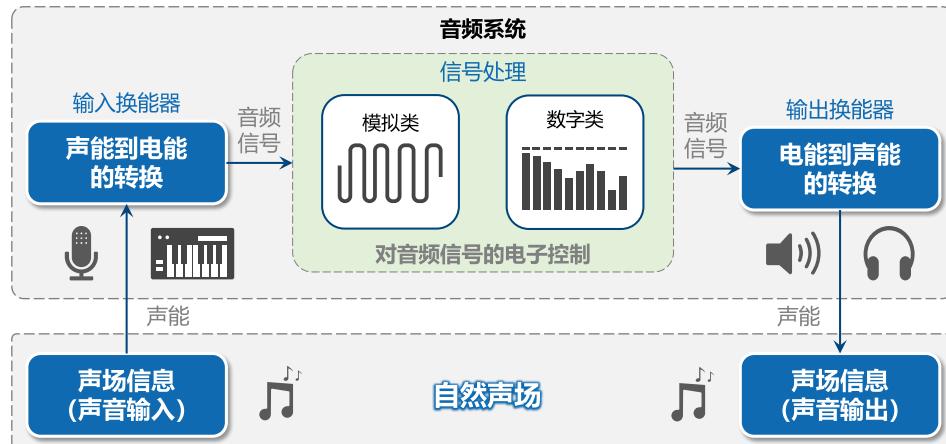


图 4.1：声音录制与回放的实现过程链路图

笔记 这里引出的“模拟”和“数字”术语，针对的是信号数值（函数因变量）的连续和离散，而非信号在时间轴上（函数自变量）的连续和离散。严格意义上讲，数字信号可以是连续时间信号，如例题2.3中的方波；而离散时间信号也必须经过“量化”（将信号幅值转化为有限个固定数值）处理才可称为数字信号。不过从实际应用角度考虑，由于基本上数字信号均需要经过“采样”到“量化”的过程（后续会详细介绍），所以将模拟等同于连续，数字等同于离散，也不会造成理解上的太大偏差。

4.1.1 换能器

音频系统从自然声场中获取声音信息，再将声音还原至自然声场。整个链路中最重要的无疑便是输入/输出换能器：

- 常见的输入换能器主要为话筒（其他特殊类输入换能器将会在后续介绍）。
 - 话筒一般被分为动圈式和电容式。动圈式话筒通过振膜振动带动线圈在磁场中切割磁感线来产生感应电流，进而转为电信号；而电容式话筒则需要供电，当振膜振动时，电容器的电容值发生改变，其上累计的电荷变化使得两端电压改变，同样转为电信号；
 - 相比动圈式话筒，电容式话筒没有线圈的负担，会更加灵敏，适用于精细化录音；反之，动圈式话筒对于环境因素的影响并不敏感，所以更适用于户外扩声；

- 常见的输出换能器主要为扬声器，也可细分为音响、耳机等设备。
 - 扬声器的换能方式大多采用电磁线圈方案。当电信号经过缠绕线圈产生磁场，与原有的永磁体产生力相互作用，最终带动相连接的振膜振动，将声音信号传递出去（进一步声学分析参见后续例题4.10）；
 - 扬声器一般会细分至高、中、低频设备，并且可以在不同位置进行摆放，组合起来形成完整的音响系统；
 - 相比于音响，耳机则不需要考虑声场在自由空间的传播对人耳听觉的影响，所以设计上更为简洁，且更方便携带，但也导致较难实现立体声效。

4.1.2 声音存储设备

在声音录制与回放过程中，需要存储介质。不同的声音储存介质，其物理原理各不相同，可归纳如下：

- 模拟类：**留声机、磁带、黑胶唱片等。
 - 留声机早期使用锡箔作为声音储存介质，后来换为蜡筒。留声机是利用唱针振动在介质上刻录声音。当需要回放时，唱针随着刻录波形的物理运动可反向将声音传播出去。最早留声机是纯机械结构，后来才引入电信号；
 - 磁带采用涂抹有颗粒状磁性材料的薄膜作为声音储存介质。磁带是通过磁头的磁性变化（线圈中的电信号引导产生磁场）将薄膜层磁化为磁信号来记录声音。当需要回放时，磁头随着磁化薄膜层的移动而产生磁性变化，进而通过电磁感应原理转为线圈中的电信号进行输出。此过程中，磁头可视作一种特殊的输入换能器；
 - 黑胶唱片使用虫胶或合成塑料作为声音储存介质。黑胶唱片机即为留声机的“升级版”，声音录制与回放原理基本相同，其所使用的唱针（另一端连接有放置在磁场中的金属导体）可通过电磁原理实现物理运动和电信号的双向变换。声音回放过程中，唱针同样可视作一种特殊的输入换能器；
 - 以上介绍的这些储存声音的材料虽然性能均较为稳固，但仍易受环境影响导致所记录的声音受到不同程度的干扰；
- 数字类：**光盘（CD, Compact Disc）、MP3 音频、流媒体等。
 - 由于数字类设备储存的是离散型信号，所以只需记录离散点的数据即可。一般来说，离散信号均是以最简单的二进制数进行保存的；
 - 光盘（CD）利用激光使盘面内层形成由无数个凹槽和凸起组成的旋转纹路，实现二进制数据的刻录与读取，其所使用的激光头也可视作输入换能器的一种；MP3 音频则是通过一种统一的音频编码方式，将录制的离散数据保存在硬盘存储设备中，再反向通过播放器解码实现声音播放；流媒体也类似，但其存储主要在云端，借助电线或光纤实现有线通信，或借助电磁波实现无线通信，最终抵达千家万户，在个人电子产品上进行播放。

4.1.3 电声乐器工作原理

电声乐器主要包括电吉他、电钢琴、电吹管、电子鼓等。与下一章要介绍的完全由电路组成的电子乐器（通过拾取演奏参数）不同，这里电声乐器主要指通过传统乐器的振动发声，利用拾音器完成声电转换，所以也是输入换能器的一种。

常规来说，传统乐器电声化只需添加一个话筒进行拾音即可。但大多数情形下，乐器中内嵌话筒并不方便，且容易产生啸叫（原理参见后续例题4.12）。所以从整体性上考虑，目前电声乐器主要采用如下两大类集成方式：

- **电磁式：**电吉他、电贝斯等。

- 电吉他和电贝司的拾音器由一组磁铁外包裹线圈组成。实际演奏时，铁磁性的琴弦振动让线圈附近的磁场发生改变，从而产生电磁感应现象，转化为线圈中的感应电流。注意，电吉他琴弦本身无法通过切割磁感线产生感应电流（不是闭合电路），其振动只是起到了“干扰”磁场的作用；

- **接触式：**电吹管、电子鼓等。

- 电吹管历史悠久，经过多年演化已经可以实现相当丰富且复杂的演奏技法。不过其主要的发声原理还是利用了气压传感器。这类传感器原理不尽相同，但无论何种类型，均可以将气息振动转化为电阻、电容或电压三者其一的变化，最终实现吹奏气息向电信号的转变；
- 电子鼓则是采用类似电箱吉他的压电传感器如压电陶瓷（压电材料受力后表面产生电荷，即压电效应）来实现电声化。当敲击鼓面时，薄膜或镲片的振动会带动压电传感器的振动，进而拾取声学振动转化为电信号。

除此之外，还有一些电声乐器无法完全划分在某一类型中。例如电钢琴的拾音器，既有电磁式的，也有接触式的。电磁式的大多利用了类似电吉他的实现手段，即通过按键敲击振动的金属部件，从而改变磁场来产生感应电流；而接触式的则也是采用了压电传感器来拾取琴弦振动的声学信号，进而转化为电信号。

4.2 信号与系统

上一节简要介绍了声音录制与回放的过程。从数学原理上讲，无论对信号采用何种变换，其传输链路均可抽象为一种描述系统输入输出关系的理论模型：对于**连续时间信号**（时间 t 的函数，一般用圆括号 (\cdot) 表示）来说，输入 $x(t)$ 经由**连续时间系统**的响应函数 $h(t)$ ，将会转变为输出 $y(t)$ ；对于**离散时间信号**（整数 n 的函数，一般用方括号 $[\cdot]$ 表示）来说，输入 $x[n]$ 经由**离散时间系统**的响应函数 $h[n]$ ，将会转变为输出 $y[n]$ 。具体数学描述如下：

$$\begin{aligned}y(t) &= \mathcal{T}\{x(t)\} = x(t) * h(t) \\y[n] &= \mathcal{T}\{x[n]\} = x[n] * h[n]\end{aligned}\tag{4.1}$$

其中，函数 \mathcal{T} 代表系统对信号的某种变换，符号 $*$ 为一种具体的数学运算，称作

线性卷积（将会在下一节详细介绍）。

上述模型转化为信号流程则如下图4.2所示：

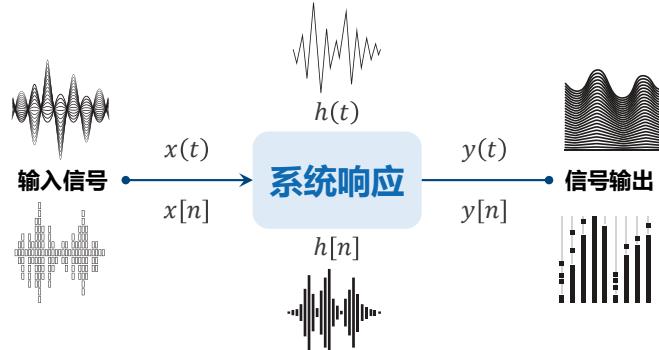


图 4.2: 信号链路的系统图

“信号”与“系统”，也构成了音频技术中最重要的两大核心内容。

下面首先对本章将会用到的连续和离散时间信号函数进行初步罗列（大多均已在前述章节中提前介绍）：

- 单位阶跃信号：

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad (4.2)$$

- sinc 信号：

$$\text{sinc}(t) = \frac{\sin \pi t}{\pi t} \quad (4.3)$$

- 矩形信号 (rect 函数)，其中 τ 为一固定参数：

$$\text{rect}(t) = \begin{cases} \frac{1}{\tau}, & |t| \leq \frac{\tau}{2} \\ 0, & |t| > \frac{\tau}{2} \end{cases} \quad (4.4)$$

- 指数信号，其中常数 a 一般为复数：

$$x(t) = e^{at} \quad (4.5)$$

- 当 a 均为实数时，信号 $x(t)$ 将会随着时间 t 的增加呈现指数增加 (a 为正实数) 或衰减 (a 为负实数)；
- 而当 a 为纯虚数时，信号 $x(t)$ 将会呈现周期性（可参考图2.1的几何表示）。特别形如 $x(t) = e^{j\omega_0 t}$ 的复指数信号，根据定理2.1介绍的 Euler 公式，其与正弦信号 $x(t) = \sin \omega_0 t$ 一样，均是周期为 $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ 的周期信号。

以上连续时间信号，均可以通过令 $t = nT_s$ (n 为整数， T_s 为所选定的时间间隔) 转化为相应的离散时间信号。这些离散时间信号大多与连续情形的信号特征类似，只是由连续函数转为了离散点组成的序列。但也有一些离散时间信号具有特殊的性质（如 $x[n] = e^{j\omega_0 n}$ ），具体将会在后续遇到时再做详细分析。

此外，还有一类信号需要单独进行介绍：

- 单位冲激信号 (Dirac 函数):

$$\delta(t) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \\ \delta(t) = 0, & t \neq 0 \end{cases} \quad (4.6)$$

也可以通过矩形信号 $\text{rect}(t)$ 或参考公式(2.171)的积分形式 (此时 τ 为任意积分参数) 定义为:

$$\delta(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \text{rect}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm j2\pi\tau t} d\tau \quad (4.7)$$

将 $\delta(t)$ 以时间间隔 T_s 进行周期叠加, 可得到冲激串信号 (其中 n 为整数):

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s) \quad (4.8)$$

- 单位脉冲 (抽样) 信号, 又称克罗内克 (Kronecker) 函数:

$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases} \quad (4.9)$$

注意, 单位脉冲信号 $\delta[n]$ 与单位冲击信号 $\delta(t)$ 形式类似, 但意义完全不同。

将 $\delta[n]$ 以时间间隔 T_s 进行周期叠加, 可得到脉冲串信号 (其中 k 为整数):

$$p[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n - kT_s] \quad (4.10)$$

 **笔记** 冲激串和脉冲串信号的自变量分别为 t 和 n , 为了表示成“一串”冲激或脉冲信号, 所以公式(4.8)和(4.10)才写为了求和形式。注意两者与常规离散时间函数的形式区别 (如例题2.5的离散 sinc 公式(2.159))。此外, 尽管单位冲激信号 $\delta(t)$ 和冲激串信号 $p(t)$ 只在固定的离散点处有取值 (其余处为零), 但仍应理解为连续时间信号。

接下来, 对本章将会用到的连续和离散时间系统的基本性质做如下约定:

性质 连续和离散时间系统的基本性质 (以下说明对连续和离散情形均适用):

1. 线性: 系统的输入输出之间满足叠加原理, 即有 (其中 α 和 β 为任意常数)

$$\begin{aligned} \mathcal{T}\{\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)\} &= \alpha \mathcal{T}\{x_1(t)\} + \beta \mathcal{T}\{x_2(t)\} = \alpha y_1(t) + \beta y_2(t) \\ \mathcal{T}\{\alpha x_1[n] + \beta x_2[n]\} &= \alpha \mathcal{T}\{x_1[n]\} + \beta \mathcal{T}\{x_2[n]\} = \alpha y_1[n] + \beta y_2[n] \end{aligned} \quad (4.11)$$

2. 时/移不变性: 系统的输入输出与时间 (或信号平移) 无关, 即有

$$\mathcal{T}\{x(t - t_0)\} = y(t - t_0), \quad \mathcal{T}\{x[n - k]\} = y[n - k] \quad (4.12)$$

一般连续时间系统中称作时不变性, 而离散时间系统中称作移不变性。

3. 因果性: 系统的输出只取决于当前和过去时刻, 而与未来时刻无关。即对于任意时间 t 和序列 n , 满足 $y(t) = \mathcal{T}\{x(t - \tau), \tau \geq 0\}$ 和 $y[n] = \mathcal{T}\{x[n - k], k \geq 0\}$ 。
4. 稳定性: 系统的输入输出均有界, 即信号绝对值 \leq 有限值。稳定系统也被称为 BIBO (Bounded Input-Bounded Output) 系统。

若满足第1.条和第2.条, 可称作线性时不变 (Linear Time Invariant, 简称 LTI) 或线性移不变 (Linear Shift Invariant, 简称 LSI) 系统。前者对应连续时间系统, 后者对应离散时间系统。事实上, LTI 或 LSI 系统, 一般也是因果和稳定系统。对于本书所涉

及的音频系统模型，基本按照完全满足以上性质来考虑。

此外，系统之间可以互联，以组成更加复杂的信号链路，主要形式包括串联（又称级联）、并联或反馈连接（不同系统之间的输入输出具有信息反馈）。

在实际物理环境中的系统，其实很难按照公式(4.1)和图4.2所示，抽离出具体的系统响应函数 $h(t)$ 或 $h[n]$ ，更多只能建立系统输入输出所满足的隐式表达式，在连续时间系统中表示为微分方程，而在离散时间系统中则表示为差分方程。为了更清晰了解以上两类方程如何刻画系统的输入输出关系，先用下面的例子进行简要说明。

例题 4.1 试分析如下图4.3所示的两类 RC 电路（ R 指代电阻， C 指代电容）的系统输入输出关系。

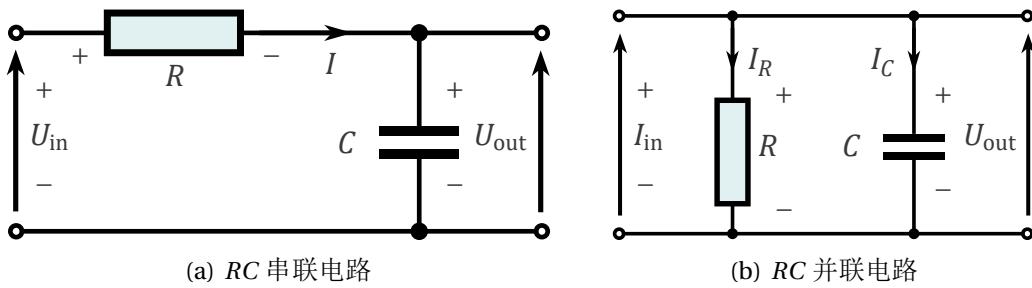


图 4.3: RC 电路系统示意图

解 在电路分析中，对于电阻元件，其两端的电势差（电压） U_R 和通过电阻元件 R 的电流 I_R 之间满足定理1.4的 Ohm 定律（ R 为电阻参数），如下：

$$U_R = I_R \cdot R \quad (4.13)$$

其中，电流的方向规定为从电阻的高电位端 (+) 流向低电位端 (-)。

而对于电容元件，其电容参数 C 定义为单位电压 U 下的电荷积累量 Q ，再结合附录F2中关于电流强度 I 的定义F2，可以得到电容元件两端电压 U_C 和电流 I_C 之间随时间 t 的数学关系：

$$C = \frac{Q}{U_C} \Rightarrow I_C = \frac{dQ}{dt} = C \frac{dU_C}{dt} \quad (4.14)$$

电容元件视为开路，只能储能和放能，所以电流的流向会使得电容元件一端储存正电荷 (+)，另一端储存负电荷 (-)，形成电势差（电压）。

考虑如图4.3(a)所示的 RC 串联电路（同一支路电流强度相同），将左端电源电动势（电流的方向规定为从正极 (+) 沿外部导线流向负极 (-)）所提供的总电压定义为系统输入，即 $x(t) = U_{in}$ ，电容元件两端的电压定义为系统输出（图中箭头只是示意。作为储能元件，参考方向与电源相同），即 $y(t) = U_{out}$ ，结合基尔霍夫（Kirchhoff）电压定律（KVL）：任一闭合电路回路各段电压的代数和恒等于零，可以得到如下系统输入输出关系的表达式：

$$U_{in} = U_R + U_{out} \Rightarrow RC \frac{dy}{dt}(t) + y(t) = x(t) \quad (4.15)$$

再考虑如图4.3(b)所示的 RC 并联电路（各个支路两端电压相同），将左端电源电动势引出的总电流定义为系统输入，即 $x(t) = I_{in}$ ，电容元件两端的电压定义为系统输

出，即 $y(t) = U_{\text{out}}$ ，电容元件两端的电压定义为系统输出电容元件两端的电压定义为系统输出，结合基尔霍夫（Kirchhoff）电流定律（KCL）：任一时刻流入节点的电流之和等于流出节点的电流之和，可以得到如下系统输入输出关系的表达式：

$$I_{\text{in}} = I_R + I_C \Rightarrow RC \frac{dy}{dt}(t) + y(t) = R \cdot x(t) \quad (4.16)$$

即，一阶微分方程(4.15)和(4.16)分别表示了图4.3(a)的 RC 串联电路和图4.3(b)的 RC 并联电路所满足的连续时间系统的输入输出关系。

考虑对一阶导数的向后差分格式 (T_s 为离散时间间隔)：

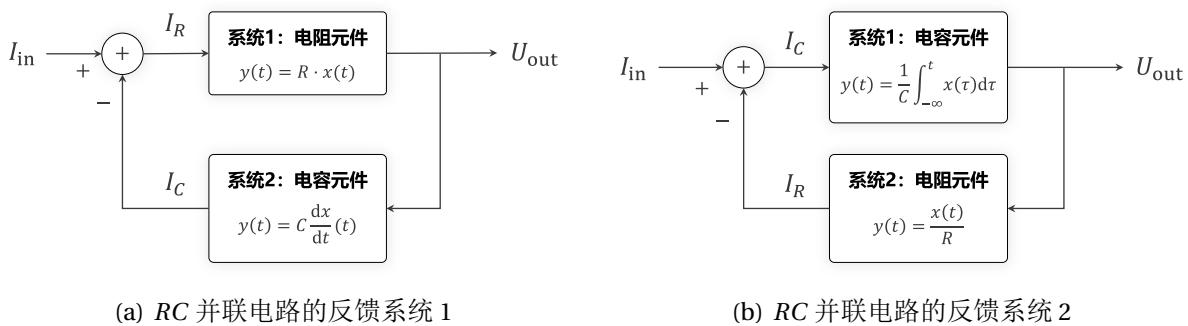
$$\frac{dy}{dt}(t) \approx \frac{y[n] - y[n-1]}{T_s} \quad (4.17)$$

可将一阶微分方程(4.15)和(4.16)分别转化为离散时间情形下的一阶差分方程：

$$y[n] - \frac{RC}{RC+1}y[n-1] = \frac{T_s}{RC+1}x[n] \quad (4.18)$$

$$y[n] - \frac{RC}{RC+T_s}y[n-1] = \frac{RT_s}{RC+T_s}x[n] \quad (4.19)$$

此外，对于图4.3(b)的 RC 并联电路，还可以拆解为两个子系统的互联组合。不过虽然该电路是并联结构，但考虑到其输入输出关系，此 RC 电路只能表示为如下图4.4所示的两类“电阻-电容”反馈系统：



(a) RC 并联电路的反馈系统 1

(b) RC 并联电路的反馈系统 2

图 4.4: RC 并联电路的两种反馈系统示意图

例题4.1所导出的微分方程和差分方程形式在 LTI/LSI 系统中是具有广泛性的。事实上，绝大多数音频系统的输入输出关系均可以表示为一类通用的线性常系数微分方程或差分方程，其形式如下：

定义 4.1 (线性常系数微分方程和差分方程的一般形式)

针对连续时间系统的线性常系数微分方程具有如下一般形式：

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k} \quad (4.20)$$

而针对离散时间系统的线性常系数差分方程则具有如下一般形式：

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] \quad (4.21)$$

其中， $k = 0, 1, 2, \dots$ ， M 和 N 分别为其相应的取值上限； a_k 和 b_k 是不同 k 值下的常系数。



这里先暂时给出以上两类方程的基本定义。关于方程的具体求解以及更进一步的系统分析，将会在后续的章节中逐步展开。

4.2.1 线性卷积

下面首先给出信号在系统中最基本的运算，即线性卷积的定义。

定义 4.2 (线性卷积)

连续形式（其中 T 为某时间段区间）：

$$(f * g)(T) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(T-t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(T-t)g(t)dt \quad (4.22)$$

离散形式（其中 N 为某离散点区间）：

$$(f * g)[N] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n]g[N-n] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[N-n]g[n] \quad (4.23)$$

即对于函数 f 和 g 在时间段 T 或离散点 N 区间内的线性卷积，需要将任一函数进行左右翻转，再向右平移 T 或 N 个单位，最后与另个函数对应相乘得到。



通过积分表达式的变量替换，易证公式(4.22)和(4.23)中函数 f 和 g 的对称性，即线性卷积满足交换律。

从定义4.2中了解到，线性卷积将两个函数结合，产生一个新的函数（自变量也发生了改变），其操作主要分为两步，首先是“翻转加平移”，即“卷积”中的“卷”，之后是函数的对应点相乘再相加，即“卷积”中的“积”。

以上只是从数学定义与计算方式上对线性卷积进行了解释，但其实际意义仍然略显抽象。下面结合离散时间系统输入输出的案例，对线性卷积进行进一步理解。

假设一个随机离散时间信号 $x[n]$ ，经过一个会对信号产生逐渐衰减影响的系统响应 $h[n]$ ，如下图4.5(a)中所示，考虑其输出 $y[n]$ 的具体形式。

由于信号逐个输入，最开始进入系统的信号，在经过一段时间后会衰减更为剧烈，而刚进入系统的信号，则只会轻微衰减。所以 $x[n]$ 和 $h[n]$ 的相互作用存在一种“错位”关系，如下图4.5(b)中所示。 $N=10$ 时刻， $x[0]$ 的输出将变为 $x[0]h[10]$ ， $x[1]$ 的输出将变为 $x[1]h[9]$ ，以此类推。最后这些对应点相乘再累加，即为 $N=10$ 时刻的输出信号总值，也就是两个函数 x 和 h 的线性卷积（自变量为 N ）。

显然，下图4.5(b)中的对应关系较为复杂，这里需要先将系统响应函数 $h[n]$ 进行翻转（对 $x[n]$ 操作亦可），变为 $h[-n]$ ，再向右平移 N 个单位，变为 $h[-(n-N)]$ ，即可得到与线性卷积定义4.2中一一对应的图形化表述，如下图4.5(c)中所示。

至于这里线性卷积的求和区间并非为定义4.2中的 $(-\infty, \infty)$ ，是由于限定输入信号 $x[n]$ 和系统响应 $h[n]$ 均存在起始点（起始点之前取值为零，满足因果性。详见后续定理4.1），所以线性卷积实际只仅限于二者的“交互区间”。

而对于连续时间系统输入输出的线性卷积含义，也可以根据以上分析延伸得到。由于离散时间信号和系统是经连续时间信号和系统抽样得来 ($t = nT_s$)，此时若将输入信号 $x(nT_s)$ 和系统响应 $h(nT_s)$ 考虑成连续时间的“阶跃梯形”函数，则可以对二者



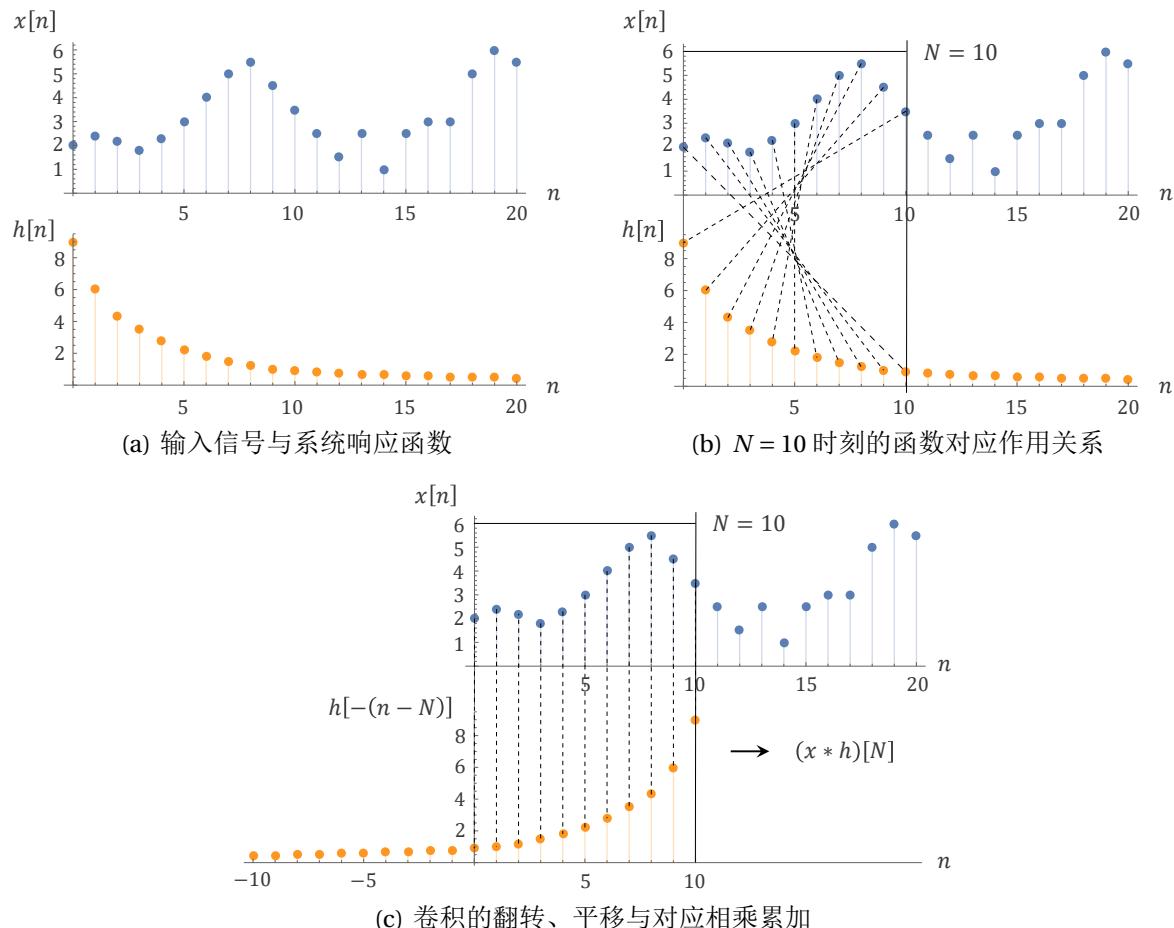


图 4.5: 线性卷积在信号与系统中的应用

采用类似离散形式的线性卷积运算（在每个时间间隔 T_s 内，卷积结果相同，所以需要乘以系数 T_s ）。当 $T_s \rightarrow 0$ 时， nT_s 趋向于连续时间 t ， $\Delta t = (n+1)T_s - nT_s = T_s$ 趋向于微元 dt ，且有

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \cdots \Delta t \xrightarrow{T_s \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots dt \quad (4.24)$$

该运算将趋向于连续时间的线性卷积，得到连续时间输出信号 $y(t)$ ，即

$$y(T) = \lim_{T_s \rightarrow 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) \cdot h(T - nT_s) \cdot T_s = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)h(T-t)dt \quad (4.25)$$

特别地，若对单位冲激信号 $\delta(t)$ （连续情形）或单位脉冲信号 $\delta[n]$ （离散情形）进行线性卷积，可以得到：

$$f(T) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(T-t)dt, \quad f[N] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[N]\delta[N-n] \quad (4.26)$$

以上两式也分别与 $\delta(t)$ （连续情形）和 $\delta[n]$ （离散情形）的固有数学性质，即对信号的“筛选抽取”性质相吻合（前述章节介绍过 Dirac 函数的性质公式(1.153)）。

结合线性卷积的定义4.2和上式(4.26)，对于信号的输入输出关系来说，当系统响应为单位冲激信号 $\delta(t)$ （连续情形）或单位脉冲信号 $\delta[n]$ （离散情形）时，输出信号即为输入信号；而当输入信号为单位冲激信号 $\delta(t)$ （连续情形）或单位脉冲信号 $\delta[n]$

(离散情形) 时, 输出信号即为系统响应。

笔记 需要留意的是, 线性卷积产生的新函数, 为 T 时刻或 N 时刻的信号输出累计值 (即自变量为累计时间段 T 或累计离散点 N)。但在实际使用中, 为保持形式的统一性, 对于输出信号一般还是采用 $y(t)$ 或 $y[n]$ 的写法 (对应替换卷积式中的其它参数)。

线性卷积涉及无穷区间积分和无穷项求和, 所以与 Fourier 变换一样, 存在数学上的收敛性问题。不过这里可以简单认为, 大多音频信号处理 (针对稳定系统) 的过程均满足线性卷积的要求。不满足要求的函数 (基本为周期函数), 也会被其他卷积运算如周期卷积或循环卷积所替代 (后续会逐一介绍)。

例题 4.2 试分析单位冲激响应在音频信号中的应用原理。

解 单位冲激响应, 即将单位冲激信号作为输入, 经系统响应所得到的输出信号 (这里为简化说明, 不区分连续和离散)。根据前述分析, 此时输出信号就是系统响应。

对于音频信号来说, 一个系统即代表了对声音的某种“附加色彩”, 如“音乐厅”、“小型室内”、“旷野”等。此时若采集一个在该系统环境下的单位冲激响应, 即可得到该系统环境的声音色彩特质。将其他任意声音 (干声) 作为输入, 与该单位冲激响应进行线性卷积, 即可生成附带有该系统环境声音色彩的声音 (湿声)。采集单位冲激响应的过程与所谓的“听音辨瓜”颇有类似之处。敲击西瓜的单位冲激响应即代表了西瓜的某些固有特性, 借此可分析西瓜的好坏。在音乐制作中, 常利用卷积运算作为增强混响的手段, 其原理便在于此。

信号与系统的理论知识枯燥而乏味, 但作用于音频信号领域, 却可以实现近乎无穷的声音变化, 带来丰富多彩的听觉体验。这种通过实践所带来的乐趣, 用再多的文字也无法描绘其万一。这里只好寥寥数语, 略作点缀, 实为遗憾。

线性卷积描述了 LTI/LSI 系统输入输出关系的基本运算, 自然暗含其本身便满足线性和时/移不变性两个数学性质。简要证明如下:

证明 以连续时间信号与系统为例 (离散时间信号与系统类似), 借用积分参数 τ , 结合线性卷积的定义 4.2, 直接计算, 有

- 线性:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{T}\{\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)\} &= [\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)] * h(t) \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} [\alpha x_1(\tau) + \beta x_2(\tau)] h(t - \tau) d\tau \\
 &= \alpha \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) h(t - \tau) d\tau + \beta \int_{-\infty}^{\infty} x_2(\tau) h(t - \tau) d\tau \\
 &= \alpha y_1(t) + \beta y_2(t)
 \end{aligned} \tag{4.27}$$

- 时/移不变性:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{T}\{x(t - t_0)\} &= x(t - t_0) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau - t_0) h(t - \tau) d\tau \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\xi) h(t - t_0 - \xi) d\xi = y(t - t_0)
 \end{aligned} \tag{4.28}$$

上式推导中, 令 $\xi = \tau - t_0$ 进行了变量替换。

而对于 LTI/LSI 系统的因果性和稳定性, 则还需要结合线性卷积关系式, 通过如

下判据进行约束：

定理 4.1 (LTI/LSI 系统因果性判据)

若一个 LTI/LSI 系统满足因果性，即对于任意时刻 t 和序列 n ，有

$$y(t) = \mathcal{T}\{x(t-\tau), \tau \geq 0\}, \quad y[n] = \mathcal{T}\{x[n-k], k \geq 0\} \quad (4.29)$$

则系统响应 $h(t)/h[n]$ 需要满足

$$h(t)/h[n] = 0, \quad t/n < 0 \quad (4.30)$$



证明 以连续时间信号与系统为例（离散时间信号与系统类似），由于信号由输入 $x(t)$ 到输出 $y(t)$ 的数学变换为线性卷积，所以借用积分参数 τ ，有

$$y(t) = \mathcal{T}\{x(t)\} = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau \quad (4.31)$$

考虑到线性卷积运算的对称性，这里以被积函数 $h(\tau)x(t-\tau)$ 为例（选择 $x(\tau)h(t-\tau)$ 也会得到相同的结果），结合系统输出 $y(t)$ 也需要满足因果性，所以只能接收 t 时刻及其之前的输入信号，则有

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^0 h(\tau)x(t-\tau)d\tau + \int_0^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau \quad (4.32)$$

上式中，对于 $\tau \in (-\infty, 0)$ ，明显 $x(t-\tau)$ 属于 t 时刻之后的“未来”信号，为了确保前一项恒为零，则需要满足

$$h(t) = 0, \quad t < 0 \quad (4.33)$$

考虑到上述推导前后结论均等价，所以该判据实际是 LTI/LSI 系统满足因果性的充分必要条件。

定理 4.2 (LTI/LSI 系统稳定性判据)

若一个 LTI/LSI 系统满足稳定性，即系统的输入输出均有界，则系统响应 $h(t)/h[n]$ 需要满足

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|d\tau < \infty, \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty \quad (4.34)$$

即 $h(t)$ 需要满足绝对可积， $h[n]$ 需要满足绝对可和。



证明 以连续时间信号与系统为例（离散时间信号与系统类似），先证充分性，假定 $h(t)$ 满足绝对可积，即

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|d\tau < \infty \quad (4.35)$$

若给定一个有界输入，即对于所有时刻 t ，均满足 $|x(t)| \leq R$ 。其中， R 为非无穷大数值界限。此时对线性卷积关系式两边同时取绝对值，有

$$\begin{aligned} |y(t)| &= |\mathcal{T}\{x(t)\}| = |x(t) * h(t)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau \right| \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)||x(t-\tau)|d\tau \leq R \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|d\tau \end{aligned} \quad (4.36)$$

上式表明，输出 $y(t)$ 也有界。

再证必要性，假定 $x(t)$ 为如下有界输入：

$$x(t) = \begin{cases} 0, & h(-t) = 0 \\ \frac{h^*(-t)}{|h(-t)|}, & h(-t) \neq 0 \end{cases} \quad (4.37)$$

其中, $h^*(-t)$ 为 $h(-t)$ 的复共轭函数 (也可以写作 $\overline{h(-t)}$)。很显然, $|x(t)| \leq 1$, 满足有界条件。此时对于输出 $y(t)$, 有

$$y(0) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x(-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|h(\tau)|^2}{|h(\tau)|} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau \quad (4.38)$$

若 $y(t)$ 也为有界输出，则必然满足

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau < \infty \quad (4.39)$$

换言之，若上式不满足，则总可以找到一些有界输入产生有界输出。即表明，只有系统输入输出均有界，才可以导出系统响应 $h(t)$ 满足绝对可积条件。

综上，该判据实际也是 LTI/LSI 系统满足稳定性的充分必要条件。

此外，作为信号与系统中的核心算法，卷积运算还具有一些其他应用和不同的数学形态。下面列举几个典型案例（仅做基本描述，不具体展开）：

- 两个独立随机变量 $X + Y$ 的联合概率分布列（离散型）或累积分布函数（连续型），即表示为线性卷积的形式。以掷骰子的离散随机变量情形为例，连续两次掷骰子（掷出 n 的概率分别 $f[n]$ 和 $g[n]$ ，其中 $n = 1, 2, \dots, 6$ ），和为 4 的所有情形如下图4.6所示：

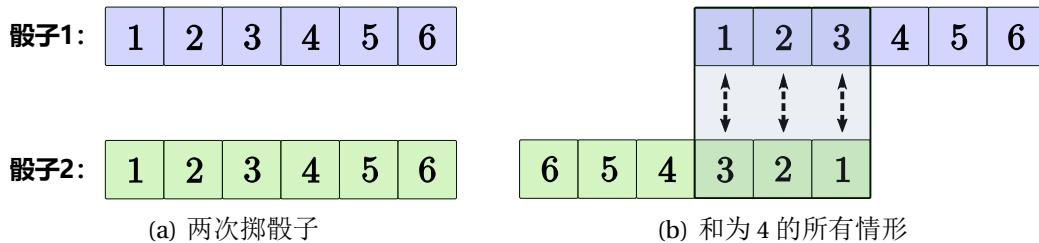


图 4.6: 掷骰子联合概率分布的卷积示意

此时，用联合概率分布列来表示，即为

$$f[1]g[3] + f[2]g[2] + f[3]g[1] = \sum_{n=1}^3 f[4-n]g[n] = (f * g)[4] \quad (4.40)$$

- 多项式的乘积运算，其系数即表示为线性卷积的形式。以两个多项式 $y_1(x) = f[0] + f[1]x + f[2]x^2$ 和 $y_2(x) = g[0] + g[1]x + g[2]x^2$ 为例，计算其乘积，并合并同类项后可以得到：

$$\begin{aligned} y_1(x) \cdot y_2(x) &= (f[0] + f[1]x + f[2]x^2)(g[0] + g[1]x + g[2]x^2) \\ &= (f * g)[0] + (f * g)[1] \cdot x + (f * g)[2] \cdot x^2 + \\ &\quad (f * g)[3] \cdot x^3 + (f * g)[4] \cdot x^4 \end{aligned} \tag{4.41}$$

- 离散时间信号的输入输出关系可以表示为线性卷积的矩阵运算形式。假设输入信号 $x[n]$ 表示为一个 M 点的序列 $\mathbf{x} = [x_0, x_1, \dots, x_{M-1}]^\top$, 系统响应 $h[n]$ 表示为

一个 N 点的序列 $\mathbf{h} = [h_0, h_1, \dots, h_{N-1}]^\top$, 则输出信号 $y[n]$ 将是一个 $L = M + N - 1$ 点的序列 $\mathbf{y} = [y_0, y_1, \dots, y_{L-1}]^\top$, 并且满足 (这里假设 $M < N$)

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{M-1} \\ \vdots \\ y_{N-1} \\ \vdots \\ y_{L-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_0 & 0 & \cdots & 0 \\ h_1 & h_0 & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ h_{M-1} & \cdots & h_1 & h_0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ h_{N-1} & \cdots & h_{N-M+1} & h_{N-M} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & h_{N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{M-1} \end{bmatrix} = \mathbf{H}\mathbf{x} \quad (4.42)$$

其中, \mathbf{H} 为系统响应序列 \mathbf{h} 的矩阵排布形式。

在信号与系统中, 卷积运算与章节2.2介绍的 Fourier 变换有着密切联系。对于连续时间信号和系统, 分别考察时域中信号的线性卷积和乘积在频域中的变换形式, 可以得到如下卷积定理:

定理 4.3 (连续时间的时域/频域卷积定理)

对于连续时间信号和系统中的任意函数在时域 t 和频域 f 中的形式, 如果

$$x(t) \xleftrightarrow{\text{CFT}} X(f), \quad h(t) \xleftrightarrow{\text{CFT}} H(f) \quad (4.43)$$

则有

$$x(t) * h(t) \xleftrightarrow{\text{CFT}} X(f)H(f), \quad x(t)h(t) \xleftrightarrow{\text{CFT}} X(f) * H(f) \quad (4.44)$$

证明 借用积分参数 τ , 结合定义2.2的 Fourier 变换, 有

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{x(t) * h(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \right] e^{-j2\pi f t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)e^{-j2\pi f t} dt \right] d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)e^{-j2\pi f(t-\tau)} dt \right] e^{-j2\pi f \tau} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)H(f)e^{-j2\pi f \tau} d\tau = X(f)H(f) \end{aligned} \quad (4.45)$$

对于 $x(t)h(t) \xleftrightarrow{\text{CFT}} X(f) * H(f)$ 的证明类似 (可先由右到左证明从卷积到乘积的逆变换), 具体计算过程从略。

上述定理表明: 对于连续时间信号和系统, 时域的线性卷积在频域中为乘积, 而时域的乘积在频域中则为线性卷积。

相对应地, 离散时间信号和系统也存在类似的时域/频域卷积定理, 不过需要在下一节阐述完离散时间 Fourier 变换 (DTFT) 后再进行介绍。

例题 4.3 试给出冲激串信号和矩形信号在时域的卷积, 并分析其在频域中的形式。

解 首先计算冲激串信号 $p(t)$ 和矩形信号 $\text{rect}(t)$ 在时域的卷积, 结合 Dirac 函数的性质



公式(1.153)进行构造，有

$$\begin{aligned}
 p(t) * \text{rect}(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\tau - nT_s) * \text{rect}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\tau - nT_s) \cdot \text{rect}(t - \tau) \right] d\tau \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \delta[(t - nT_s) - (\tau)] \cdot \text{rect}(t - \tau) d(\tau) \right] \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{rect}(t - nT_s)
 \end{aligned} \tag{4.46}$$

所以，冲激串信号和矩形信号的卷积为周期矩形信号。

继续分别考察上述信号在频域中的表示。其中矩形信号和周期矩形信号的 Fourier 变换已由前述章节中的例题2.6和2.7给出，分别为（其中 $f_s = 1/T_s$ ）

$$\mathcal{F}\{\text{rect}(t)\} = \text{sinc}(\tau f), \quad \mathcal{F}\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{rect}(t - nT_s)\right\} = f_s \text{sinc}(\tau f) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - nf_s) \tag{4.47}$$

而冲激串信号 $p(t)$ 的 Fourier 变换可根据引理2.2的周期函数的 Fourier 变换求得。首先计算 $F(n)$ 有

$$F(n) = \frac{1}{T_s} \int_{-\frac{T_s}{2}}^{\frac{T_s}{2}} \delta(t) e^{-j2\pi n f_0 t} dt = \frac{1}{T_s} = f_s \tag{4.48}$$

则冲激串信号 $p(t)$ 的 Fourier 变换为

$$P(f) = \mathcal{F}\{p(t)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n) \delta(f - nf_s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_s \cdot \delta(f - nf_s) \tag{4.49}$$

整理以上结果，则有

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s) &\xrightarrow{\text{CFT}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_s \cdot \delta(f - nf_s) \\
 \text{rect}(t) &\xrightarrow{\text{CFT}} \text{sinc}(\tau f)
 \end{aligned} \tag{4.50}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{rect}(t - nT_s) \xrightarrow{\text{CFT}} f_s \text{sinc}(\tau f) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - nf_s)$$

可以看到，左边列的时域函数，前两行的卷积为第三行；刚好对应右边列的频域函数，前两行的乘积为第三行。

下图4.7给出了冲激串信号和矩形信号的时域卷积，以及三者信号分别在频域中的变换（取 $\tau = 1, T_s = 5\tau, f_s = 0.2\tau$ ）：

需要说明的是，冲激串信号在纵轴上的坐标值理应为无穷大，这里为表示方便，采用了箭头进行示意，而纵轴的数值指代 δ 函数的乘积系数。例如图4.7(b)中的冲激串信号，幅值即为 $f_s = 0.2$ ；而图4.7(f)中的冲激串信号，幅值则为 sinc 函数。

4.2.2 离散时间 Fourier 变换 (DTFT)

前述章节2.2介绍的 Fourier 变换，是针对连续函数的。为了对本章的离散时间信号和系统进行频域分析，必然要在离散函数情形下导出类似的 Fourier 变换形式。回想当初连续时间 Fourier 变换 (CFT) 的导出过程，是从周期函数的 Fourier 级数开始的。所以这里也需要从周期函数的离散时间 Fourier 级数起步（直接从 Fourier 级数复指数展开开始更为简洁），一直推到最后的离散时间 Fourier 变换 (DTFT)。



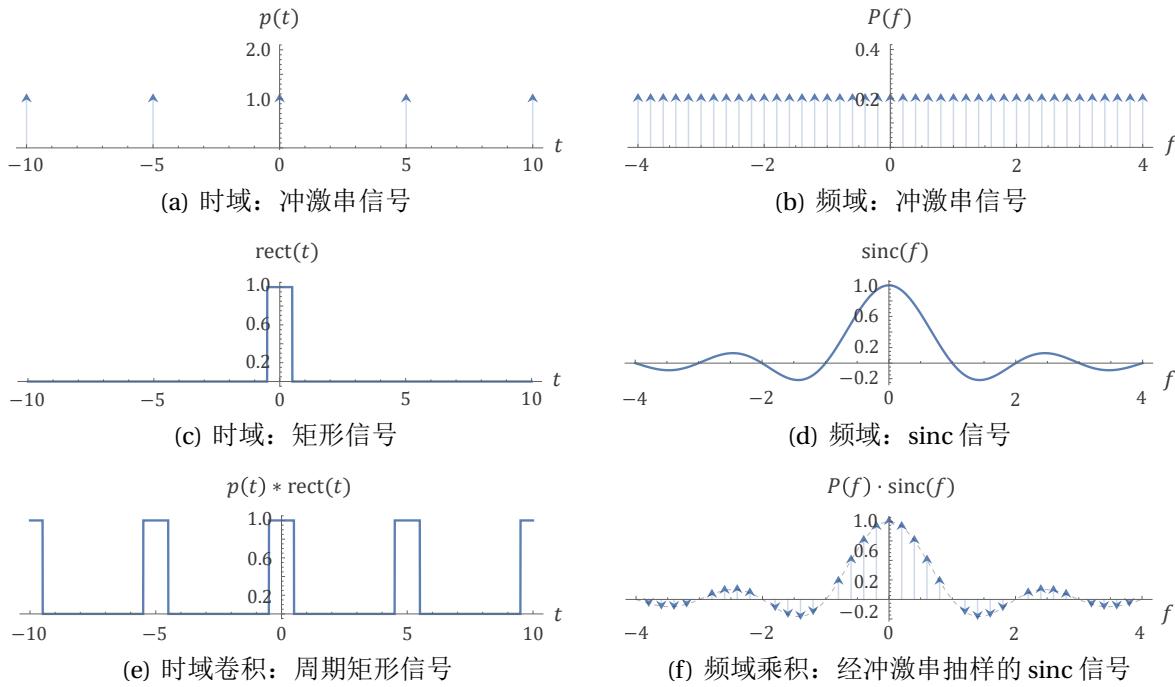


图 4.7: 时域卷积和频域乘积的信号示例

笔记 接下来的推导过程，符号体系将会较为复杂。为避免与频率符号 f/F 发生重复，相对应于前述章节中的 $f(t)$ ，下面将用 $x[n]$ 对离散时间函数进行描述。

定理 4.4 (离散时间 Fourier 级数)

在周期序列 N 内有界的离散时间周期函数 $x[n]$ 可以进行如下形式的展开：

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} X[k\Omega_0] e^{jk\Omega_0 n} \quad (4.51)$$

其中，

$$X[k\Omega_0] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-jk\Omega_0 n} \quad (4.52)$$

式中， Ω_0 为角频率，满足 $\Omega_0 = \frac{2\pi}{N}$ ； k 的取值为 $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 。此外，以上求和区间可在一个周期序列 N 内任选（这里仅采用了 $[0, N-1]$ ）。



证明 对于定理 2.4 的 Fourier 级数复指数展开中的公式(2.151)，令其中的自变量 $t = nT_s$ （注意此时对 n 的求和要替换为对 k 的求和），即可将连续时间周期函数的表达式改写为离散时间周期函数的表达式，有

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k\omega_0) e^{jk\omega_0 n T_s} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k\Omega_0] e^{jk\Omega_0 n} \quad (4.53)$$

其中，由于 T_s 为抽样时间间隔，上述公式中定义的 $\Omega_0 = \omega_0 T_s$ 存在如下变换：

$$\omega_0 t = \omega_0 n T_s = \Omega_0 n \quad (4.54)$$

所以 Ω_0 刚好为离散时间周期函数情形下的角频率。考虑到对应于离散时间周期函数的周期序列 N ，连续时间周期函数的周期 $T = NT_s$ ，且与角频率 ω_0 之间存在关系

$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$, 则离散时间周期函数的角频率 Ω_0 满足

$$\Omega_0 = \omega_0 T_s = \frac{2\pi}{T} T_s = \frac{2\pi}{N} \quad (4.55)$$

即离散时间周期函数的周期序列 N 与角频率 Ω_0 之间也存在与连续时间周期函数类似的关系。

从公式(4.53)上来看, 离散时间周期函数 $x[n]$ 已展开为一系列离散复指数周期函数的无穷级数形式。但与连续时间周期函数不同之处在于, 离散复指数周期函数 $e^{jk\Omega_0 n}$ 在不同的 k 取值情形下只存在有限个不同函数 (连续复指数周期函数 $e^{jn\omega_0 t}$ 会随着 n 取值增大而导致函数频率一直增大)。为了更直观认识这种区别, 下面利用与离散复指数周期函数性质类似的离散三角函数 $\cos[k\pi n]$ (即令 $\Omega_0 = \pi$), 观察其随着 k 值逐渐增大的函数图形, 如下图4.8所示:

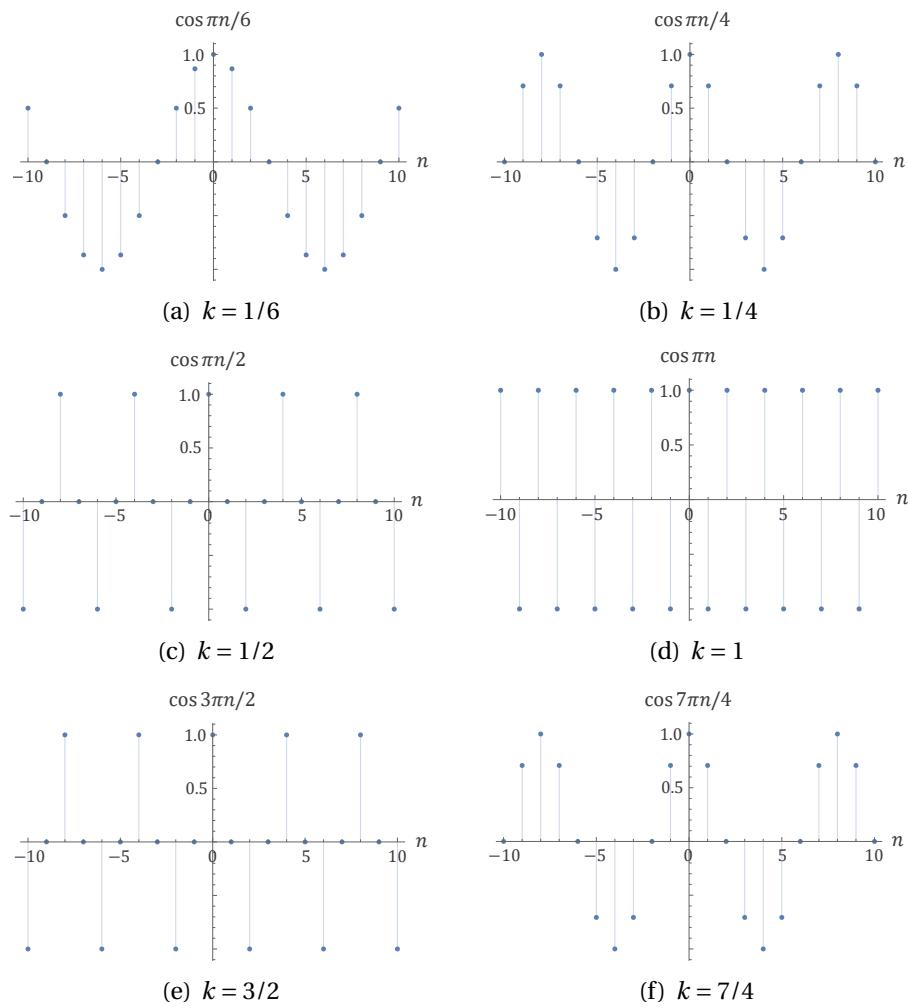


图 4.8: 不同 k 值情形下的 $\cos[k\pi n]$ 示意图

可以看到, 随着 k 值逐渐增大, 三角函数的频率也逐渐增大; 然而, 在 $k=1$ 达到最大频率后, 再增大 k 值, 三角函数的频率反而减小, 并且角频率相差 π 大小的函数图形完全相同 (对应余弦函数是偶函数的性质)。考虑到定理2.1介绍的 Euler 公式, 复指数周期函数既包含余弦函数的成分也包含正弦函数的成分, 所以不同 k 值下不同

的 $e^{jk\Omega_0 n}$ 实际只存在于一个周期序列 N 范围内，满足

$$e^{j(k+N)\Omega_0 n} = e^{j(k\Omega_0 + 2\pi)n} = e^{jk\Omega_0 n} \quad (4.56)$$

即 k 值相差一个周期序列 N 的离散复指数周期函数 $e^{jk\Omega_0 n}$ 完全相同。

基于此，公式(4.53)需要改写为

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} X[k\Omega_0] e^{jk\Omega_0 n} \quad (4.57)$$

注意，这里 k 的取值可以在一个周期序列 N 内任选，上式的 $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$ 只是其中之一的选择方式。

由于公式(4.57)已从无穷级数项变为了有限项的求和，所以此时 $X[k\Omega_0]$ 的表达式不能直接采用定理2.4中公式(2.152)的离散形式，而需要重新计算。

首先考察下离散复指数周期函数 $e^{jk\Omega_0 n}$ 关于 k 在一个周期序列 N 内的求和。当 $k = 0, \pm N, \pm 2N, \dots$ 时，由于相差一个周期序列 N 的 $e^{jk\Omega_0 n}$ 完全相同，所以

$$\sum_{k=0}^{N-1} e^{jk\Omega_0 n} = \sum_{k=0}^{N-1} e^0 = N \quad (4.58)$$

而对于其余 k 的取值情形，根据等比数列的求和公式（公比为 $e^{j\Omega_0 n}$ ）可得：

$$\sum_{k=0}^{N-1} e^{jk\Omega_0 n} = \frac{1 - e^{j\Omega_0 n N}}{1 - e^{j\Omega_0 n}} = \frac{1 - e^{j2\pi n}}{1 - e^{j\Omega_0 n}} = 0 \quad (4.59)$$

整理以上，即有

$$\sum_{k=0}^{N-1} e^{jk\Omega_0 n} = \begin{cases} N, & k = 0, \pm N, \pm 2N, \dots \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (4.60)$$

此时若对公式(4.57)两边同时乘以 $e^{-jm\Omega_0 n}$ (m 为类似 k 和 n 的整数)，并对 n 也在一个周期序列 N 内进行求和，有

$$\sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-jm\Omega_0 n} = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} X[k\Omega_0] e^{j(k-m)\Omega_0 n} = \sum_{k=0}^{N-1} X[k\Omega_0] \sum_{n=0}^{N-1} e^{j(k-m)\Omega_0 n} \quad (4.61)$$

根据公式(4.60)的性质，当 $k \neq m$ 时，上式最后的第二项求和全为零，仅当 $k = m$ 时为 N ，所以

$$\sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-jm\Omega_0 n} = \sum_{k=m}^{N-1} X[k\Omega_0] \cdot N = X[m\Omega_0] \cdot N \quad (4.62)$$

将上式等号右边的 N 移项至左边，并替换 m 为 k ，可最终计算得到：

$$X[k\Omega_0] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-jk\Omega_0 n} \quad (4.63)$$

 **笔记** 关于定理2.4中的公式(2.152)，有趣的是，如果直接对其采用 $t = nT_s$ 的离散化处理，一个周期 T 内的积分将转变为一个周期序列 N 内的求和，微元 dt 变为 $\Delta t = T_s$ ，同时将 n 替换为 k ，可得：

$$X[k\Omega_0] = \frac{1}{T} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-jk\omega_0 n} \Delta t = \frac{T_s}{T} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-jk\omega_0 n} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-jk\Omega_0 n} \quad (4.64)$$

该结果与定理4.4完全吻合。但根据前述证明过程可知，由于 $x[n]$ 的复指数展开已

从无穷级数项变为了有限项的求和，所以 $X[k\Omega_0]$ 并不能直接从公式(2.152)衍化得来。公式(4.64)只是一种数学格式上的巧合，不能视作严格证明。

此外，该定理还可以采用内积视角进行证明，具体参考附录I.6。

相比于定理2.2的 Fourier 级数和定理2.4的 Fourier 级数复指数展开所使用的无穷级数项求极限的方式，定理4.4的离散时间 Fourier 级数仅为有限项的求和，所以不存在数学上的收敛性问题，只需 $x[n]$ 本身有界即可。

通过定理4.4，则可以继续效仿章节2.2.2从 Fourier 级数到 Fourier 积分的推导思路，令离散时间周期函数 $x[n]$ 的周期序列 $N \rightarrow \infty$ ，将周期函数推广至非周期函数。

定理 4.5 (离散时间 Fourier 积分)

绝对可和的离散时间非周期函数 $x[n]$ 可以进行如下形式的展开：

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X[\Omega] e^{j\Omega n} d\Omega \quad (4.65)$$

其中，

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\Omega n} \quad (4.66)$$

$x[n]$ 的展开式中，积分区间可在一个周期 2π 内任选（这里仅采用了对称区间）。

证明 对于定理4.4中离散时间 Fourier 级数的表达式和各个参数，当 $N \rightarrow \infty$ 时， $n\Omega_0$ 趋向于连续频谱 Ω ， $\Delta\Omega = (k+1)\Omega_0 - k\Omega_0 = \Omega_0$ 趋向于微元 $d\Omega$ 。不过考虑到恒定关系式 $\Omega_0 = \frac{2\pi}{N}$ ，随着 N 逐渐增大， N 个逐渐缩小的区间 $\Delta\Omega$ 将会趋向于一个连续的 2π 区间，即（下式以对称区间为例，实际可以在一个 2π 周期内任选）

$$\sum_{k=1}^{N-1} \cdots \Delta\Omega \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} \cdots d\omega \quad (4.67)$$

此时 $x[n]$ 将变化为

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\Delta\Omega}{2\pi} \left[\sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-jk\Omega_0 n} \right] e^{jk\Omega_0 n} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\Omega n} \right]}_{X(\Omega)} e^{j\Omega n} d\Omega \quad (4.68)$$

 **笔记** 从以上证明过程可以看出，与定理2.5的 Fourier 积分复指数展开类似，系数 $\frac{1}{2\pi}$ 也只是依据约定俗成的写法，选择放在了 $x[n]$ 的表达式中。

定理4.5为离散时间非周期函数提供了“离散时间域-连续频域”的双向变换，构成了一组离散时间 Fourier 变换对。在时间域上， $x[n]$ 相对于序列 n 是非周期的；而在频域上，考虑到 $e^{j\Omega n}$ 相对于 Ω 存在周期性（周期为 2π ），所以 $X[\Omega]$ 相对于 Ω 则是周期的。上述定理中展开式(4.65)的积分区域为 2π ，也与此性质保持一致。

对比考察定理2.4的 Fourier 级数复指数展开和定理4.5的离散时间 Fourier 积分，会发现两者（包括公式形式）存在高度的统一性和对称性。总结来讲即为，连续时间周期函数对应离散频率非周期函数（定理2.4），而离散时间非周期函数对应连续频率周期函数（定理4.5）。

下表4.1重新将两个定理的公式进行了对照罗列，可以看出两者的相互联系。

表 4.1: Fourier 级数复指数展开和离散时间 Fourier 积分的对称关系

	定理2.4: 连续周期 → 离散非周期	定理4.5: 离散非周期 → 连续周期
时域	$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n\omega_0)e^{jn\omega_0 t}$	$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\Omega)e^{j\Omega n} d\Omega$
频域	$F(n\omega_0) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)e^{-jn\omega_0 t} dt$	$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega n}$

由于定理4.5的离散时间 Fourier 积分涉及到 $x[n]$ 的无穷项求和，所以也需要对其收敛性做出约束。与章节2.2.2中对无穷区间积分采用绝对可积类似，无穷项求和也需要对应采用绝对可和作为前置条件。

进一步，若 $x[n]$ 满足绝对可和条件，则根据定理4.5有

$$\infty > \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| \cdot |e^{-j\Omega n}| \geq \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega n} \right| = |X(\Omega)| \quad (4.69)$$

上式表明， $X(\Omega)$ 有界，进一步可推出 $X(\Omega)$ 在周期 2π 内必然满足可积条件。该必要条件也与定理2.4的前置条件（充分条件）形成完美的呼应。

例题 4.4 作为与例题2.5的对照，试求解离散 sinc 函数的离散时间 Fourier 积分。

解 利用定理4.5，若直接将离散 sinc 函数代入公式(4.66)，会发现无穷级数项的求解极为繁琐。这里结合例题2.5的结果，以及定理2.4和定理4.5的对称关系，若令连续频域函数 $X(\Omega)$ 为周期 rect 函数（周期为 2π ），很明显其在 2π 区间内满足可积条件，将 rect 函数的表达式(4.4)代入公式(4.65)，再结合公式(2.153)，经过计算则有

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{1}{\tau} e^{j\Omega n} d\Omega = -\frac{1}{2\pi\tau} \cdot \frac{j}{n} e^{j\Omega n} \Big|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin(n\tau/2)}{n\tau/2} \quad (4.70)$$

可以看到，所求得的离散时间函数刚好为离散 sinc 函数。即，验证了离散 sinc 函数的离散时间 Fourier 积分为周期 rect 函数。

与章节2.2.3中的论述类似，这里可以相应采用频率 $F = \frac{\Omega}{2\pi}$ 对定理4.5进行替换，最终得到如下通常意义上的离散时间 Fourier 变换（DTFT）。

定义 4.3 (离散时间 Fourier 变换 (DTFT))

满足绝对可和条件的函数，存在如下离散时间 Fourier 变换表达式：

$$\begin{cases} X(F) = \mathcal{F}\{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j2\pi Fn} \\ x[n] = \mathcal{F}^{-1}\{X(F)\} = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} X(F)e^{j2\pi Fn} dF \end{cases} \quad (4.71)$$

其中， $x[n]$ 为函数在离散时间域上的表达式， $X(F)$ 则为在连续频域上的表达式，且是周期为 1 的周期函数； $\mathcal{F}\{x[n]\}$ 被称为离散时间 Fourier 正变换， $\mathcal{F}^{-1}\{X(F)\}$ 则为离散时间 Fourier 逆变换，且积分区间可在一个周期 1 内任选（这里仅采用了对称区间）；变换对可用 $\xleftrightarrow{\text{DTFT}}$ 表示。

同样考察下此时 $X(F)$ 的物理含义。由于定理4.4中的 $X[k\Omega_0]$ 为无量纲的参数（具体参考附录I），而从定理4.4到定义4.3，对于 $x[n]$ 的表达式，只涉及 $X[k\Omega_0]$ 到 $X(F)dF$



的变化，即两者量纲相同，所以 $X(F)$ 也应当看作是某种“频率密度函数”。

考虑到引理2.2的周期函数 Fourier 变换，曾利用 Dirac 函数将周期函数也囊括进连续时间 Fourier 变换（CFT）的形式中。借鉴该思路，也可以得到如下离散时间情形下的周期函数 Fourier 变换：

引理 4.1 (周期函数的离散时间 Fourier 变换)

在周期序列 N 内有界的周期函数 $x[n]$ ，存在如下离散时间 Fourier 变换表达式：

$$X(F) = \mathcal{F}\{x[n]\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k] \delta(F - kF_0) \quad (4.72)$$

其中，

$$X[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi k F_0 n} \quad (4.73)$$

δ 函数为前述章节定义1.6介绍的 Dirac 函数， F_0 为周期函数的频率，满足 $F_0 = \frac{1}{N}$ ，
 k 的取值为 $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$



证明 仿照引理2.2的证明思路，先引入 $\delta[n]/\delta(F)$ 参与定义4.3的计算，但考虑到 $X(F)$ 必须是周期为 1 的周期函数，所以需要构造周期 $\delta(F)$ 函数

$$X(F) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(F - m), \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (4.74)$$

结合 $\delta[n]/\delta(F)$ 的性质公式(4.26)，计算离散时间 Fourier 正/逆变换（正变换满足绝对可和条件，逆变换在周期 1 内满足可积条件），可以得到如下特殊的离散时间 Fourier 变换对：

$$\delta[n] \xleftrightarrow{\text{DTFT}} 1, \quad 1 \xleftrightarrow{\text{DTFT}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(F - m) \quad (4.75)$$

同时还可从理论上分别给出 $\delta[n]$ 的另一种积分定义和周期 $\delta(F)$ 的另一种无穷级数定义：

$$\delta[n] = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{j2\pi Fn} dF, \quad \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(F - m) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi Fn} \quad (4.76)$$

根据定理4.4的离散时间 Fourier 级数，有

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} X[k \Omega_0] e^{jk \Omega_0 n} = \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j2\pi k F_0 n} \quad (4.77)$$

其中，

$$X[k] = X[k \Omega_0] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-jk \Omega_0 n} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi k F_0 n} \quad (4.78)$$

此时，直接对周期函数 $x[n]$ 进行离散时间 Fourier 变换，结合公式(4.76)的形式，可将本不符合条件的函数变换为利用周期 $\delta(F)$ 描述的形式：

$$\begin{aligned} X(F) &= \mathcal{F}\{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j2\pi k F_0 n} \right] e^{-j2\pi Fn} \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} X[k] \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi(F - kF_0)n} \right] = \sum_{k=0}^{N-1} X[k] \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(F - kF_0 - m) \right] \end{aligned} \quad (4.79)$$

考虑到 $X[k]$ 是周期序列为 N 的周期函数，上式可简化为

$$\begin{aligned} X(F) &= \mathcal{F}\{x[n]\} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^{N-1} X[k] \delta\left(F - \frac{k}{N} - m\right) \right] \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^{N-1} X[k] \delta\left(F - \frac{k + mN}{N}\right) \right] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^{N-1} X[k + mN] \delta\left(F - \frac{k + mN}{N}\right) \right] \quad (4.80) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k] \delta\left(F - \frac{k}{N}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k] \delta(F - kF_0) \end{aligned}$$

以上推导还可进一步延伸归纳出如下的离散时间 Fourier 变换对：

$$e^{j2\pi F_0 n} \xleftrightarrow{\text{DTFT}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(F - F_0 - m), \quad \delta[n - n_0] \xleftrightarrow{\text{DTFT}} e^{-j2\pi n_0 F} \quad (4.81)$$

 **笔记** 上述证明中，公式(4.80)的导出略显抽象，这里合适的方式是通过具体有限项的举例加深对该一般求和公式的理解。例如假定 $N = 3$ ，则有

$$X(F) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[X[0] \delta\left(F - \frac{0+3m}{3}\right) + X[1] \delta\left(F - \frac{1+3m}{3}\right) + X[2] \delta\left(F - \frac{2+3m}{3}\right) \right] \quad (4.82)$$

而 $X[k]$ 是周期序列为 3 的周期函数，即 $X[k] = X[k + 3m]$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ，所以当遍历 m 进行求和时，可以进行如下替换： $X[0] = X[0 + 3m]$, $X[1] = X[1 + 3m]$, $X[2] = X[2 + 3m]$ 。再将公式(4.82)中的各项逐一列出，则可找到表达式的规律，进而得到公式(4.80)的最后结果。

有了本节关于离散时间 Fourier 变换 (DTFT) 的基础，则可对应上一节的定理4.3，分析离散时间情形下卷积运算与 Fourier 变换的联系。对于离散时间信号和系统，分别考察时域中信号的线性卷积和乘积在频域中的变换形式，可以得到如下卷积定理：

定理 4.6 (离散时间的时域/频域卷积定理)

对于离散时间信号和系统中的任意函数在序列 n 和频域 F 中的形式，如果

$$x[n] \xleftrightarrow{\text{DTFT}} X(F), \quad h[n] \xleftrightarrow{\text{DTFT}} H(F) \quad (4.83)$$

则有

$$x[n] * h[n] \xleftrightarrow{\text{DTFT}} X(F)H(F), \quad x[n]h[n] \xleftrightarrow{\text{DTFT}} X(F) \circledast H(F) \quad (4.84)$$

其中，符号 \circledast 代表周期卷积，即两个周期相同的周期函数在一个周期内的线性卷积。



证明 借用求和参数 k ，结合定义4.3的离散时间 Fourier 变换，有

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{x[n] * h[n]\} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] \right) e^{-j2\pi Fn} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n-k] e^{-j2\pi Fn} \right) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n-k] e^{-j2\pi F(n-k)} \right] e^{-j2\pi Fk} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]H(F)e^{-j2\pi Fk} = X(F)H(F) \end{aligned} \quad (4.85)$$



对于 $x[n]h[n] \xrightarrow{\text{DTFT}} X(F) \circledast H(F)$ 的证明，这里采用由右到左的逆变换推导（正变换亦可），借用积分参数 τ ，结合周期卷积的定义，有

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{X(F) \circledast H(F)\} &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left[\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} X(\tau)H(F-\tau)d\tau \right] e^{j2\pi Fn} dF \\ &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} X(\tau) \left[\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} H(F-\tau)e^{j2\pi Fn} dF \right] d\tau \\ &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} X(\tau) \left[\int_{-\frac{1}{2}-\tau}^{\frac{1}{2}-\tau} H(F-\tau)e^{j2\pi(F-\tau)n} d(F-\tau) \right] e^{j2\pi\tau n} d\tau \\ &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} X(\tau)h[n]e^{j2\pi\tau n} d\tau = x[n]h[n] \end{aligned} \quad (4.86)$$

上述定理表明：对于离散时间信号和系统，时域的线性卷积在频域中为乘积，而时域的乘积在频域中则为周期卷积。

4.2.3 连续时间的 Laplace 变换

线性卷积给出了系统输入输出关系的基本数学描述，但该运算也存在着明显的缺陷：其一，卷积运算本身并不直观，特别在复杂的系统分析中将会面临大量的繁琐计算；其二，许多系统是基于真实物理模型来建立的，只能表现为微分方程和差分方程的形式，并不能抽离出显式的线性卷积关系式。所以，对信号与系统进行变换域分析，找寻其他视角下更为清晰明了的运算逻辑，是极其必要的。

在前述章节的介绍中，对于连续时间信号与系统，连续时间 Fourier 变换（CFT）已展现出优越的变换域运算潜质，不仅拥有像定理4.3介绍的将卷积变换为乘积的神奇特性，还具有较好的微分和积分性质（前面未介绍，将与本节的 Laplace 变换性质一起相应提及），可以将微分方程转化为更为简洁的代数方程形式。

但连续时间 Fourier 变换最大的问题在于，其只能处理一类受限的连续函数（在 $(-\infty, \infty)$ 范围内满足 Dirichlet 条件），如 $f(t) = t/t^2$ 等较为简单的初等函数也无法实现变换；另外，针对音频领域中更为常见的因果类信号与系统，也并不需要在整个 $(-\infty, \infty)$ 内进行积分。基于此，还需要对连续时间 Fourier 变换进行一定的改进。这便是本节要介绍的连续时间 Laplace 变换的研究动机。

对于第一个问题，为了能够处理更为广泛的一类连续函数，一个简单的想法即将待变换的函数 $f(t)$ 乘以一个衰减函数 $e^{-\sigma t}$ ，其中 σ 为实数，也被称作衰减因子。以 $\sigma > 0$ 为例，此时对于绝大多数初等函数 $f(t)$ 来说， $f(t)e^{-\sigma t}$ 在区间 $[0, \infty)$ 内均为持续衰减的，所以更容易满足 Dirichlet 条件中的绝对可积要求；

对于第二个问题，针对因果信号 $x(t)$ 和系统响应 $h(t)$ 来说，结合定理4.1有

$$x(t)/h(t) = 0, \quad t < 0 \quad (4.87)$$

所以，考虑因果类连续函数，可以利用单位阶跃信号 $u(t)$ ，统一消除 $t < 0$ 时刻的积分运算即可，由此衍化出如下完整的 Laplace 变换（LT）定义：

定义 4.4 (Laplace 变换 (LT))

对于连续函数 $f(t)$, 存在如下 Laplace 变换表达式:

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st}dt \quad (4.88)$$

其中, s 为复数, 满足 $s = \sigma + j\omega = \sigma + j2\pi f$, ω 仍然为角频率, f 为频率。 $\mathcal{L}\{f(t)\}$ 为 Laplace 变换, $f(t)$ 和 $F(s)$ 分别称作 Laplace 变换的原函数和象函数。

特别针对因果类连续函数, 区别于上述双边 Laplace 变换 (LT), 利用单位阶跃函数 $u(t)$, 存在如下单边 Laplace 变换 (u-LT):

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)u(t)e^{-st}dt = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt \quad (4.89)$$



与连续时间 Fourier 变换类似, Laplace 变换提供了一组“时间域-复频 (s) 域”的 Laplace 变换对 (可用 $\xrightarrow{\text{LT}}$ 或 $\xleftarrow{\text{u-LT}}$ 表示), 不仅基本完全保留了连续时间 Fourier 变换的性质, 还将待变换的连续函数限制大大降低, 可以更方便进行变换域分析。

 **笔记** 很明显, 有了 Laplace (正) 变换, 自然也存在 Laplace 逆变换。但是从系统分析的角度讲, Laplace 逆变换并未有太大实际意义, 反而会增加许多数学计算上的困难, 所以这里不做详细展开, 具体可参阅数学物理方法、信号与系统等书籍。

下面首先对 Laplace 变换的常用数学性质进行罗列, 所有性质也几乎完全适用于连续时间 Fourier 变换 (只需将 s 替换为 $j\omega$)。除此之外, 对于单边 Laplace 变换, 如有特殊形式, 将会单独给出 (否则与双边情形完全一致)。

性质 Laplace 变换的常用数学性质:

- 线性 (α 和 β 均为常数):

$$\mathcal{L}\{\alpha f_1 + \beta f_2\} = \alpha \mathcal{L}\{f_1\} + \beta \mathcal{L}\{f_2\} \quad (4.90)$$

- 时域/ s 域平移 (t_0 为任意实数, s_0 为任意复数):

$$f(t) \xrightarrow{\text{LT}} F(s) \Rightarrow f(t - t_0) \xrightarrow{\text{LT}} e^{-st_0} F(s), \quad e^{s_0 t} f(t) \xrightarrow{\text{LT}} F(s - s_0) \quad (4.91)$$

特别对于单边 Laplace 变换, 则为

$$f(t - t_0)u(t - t_0) \xrightarrow{\text{u-LT}} e^{-st_0} F(s), \quad t_0 > 0 \quad (4.92)$$

- 卷积定理:

$$f_1(t) \xrightarrow{\text{LT}} F_1(s), \quad f_2(t) \xrightarrow{\text{LT}} F_2(s) \Rightarrow f_1(t) * f_2(t) \xrightarrow{\text{LT}} F_1(s)F_2(s) \quad (4.93)$$

- 时域微分:

$$f(t) \xrightarrow{\text{LT}} F(s) \Rightarrow \frac{df(t)}{dt} \xrightarrow{\text{LT}} sF(s) \quad (4.94)$$

进一步, 可得:

$$f^{(n)}(t) \xrightarrow{\text{LT}} s^n F(s) \quad (4.95)$$

特别对于单边 Laplace 变换, 则为

$$\frac{df(t)}{dt} \xrightarrow{\text{u-LT}} sF(s) - f(0), \quad \dots, \quad f^{(n)}(t) \xrightarrow{\text{u-LT}} s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{(k)}(0) \quad (4.96)$$



- s 域微分：

$$f(t) \xleftrightarrow{\text{LT}} F(s) \Rightarrow t f(t) \xleftrightarrow{\text{LT}} -\frac{d}{ds} F(s) \quad (4.97)$$

进一步，可得：

$$t^n f(t) \xleftrightarrow{\text{LT}} (-1)^n F^{(n)}(s) \quad (4.98)$$

- 时域积分（ τ 为积分参数）：

$$f(t) \xleftrightarrow{\text{LT}} F(s) \Rightarrow \int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau \xleftrightarrow{\text{LT}} \frac{F(s)}{s} \quad (4.99)$$

特别对于单边 Laplace 变换，只需将上式积分下限替换为 0 即可。

证明 对以上数学性质逐一分析，有

- 线性：

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\alpha f_1 + \beta f_2\} &= \int_{-\infty}^{\infty} [\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)] e^{-st} dt \\ &= \alpha \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) e^{-st} dt + \beta \int_{-\infty}^{\infty} f_2(t) e^{-st} dt \\ &= \alpha \mathcal{L}\{f_1\} + \beta \mathcal{L}\{f_2\} \end{aligned} \quad (4.100)$$

- 时域/ s 域平移：

令 $\tau = t - t_0$ ，直接计算：

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f(t - t_0)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t - t_0) e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-s(\tau + t_0)} d\tau \\ &= e^{-st_0} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-s\tau} d\tau = e^{-st_0} F(s) \end{aligned} \quad (4.101)$$

以及

$$\mathcal{L}\{f(t)e^{s_0 t}\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{s_0 t} e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-(s-s_0)t} dt = F(s - s_0) \quad (4.102)$$

特别对于单边 Laplace 变换，由于积分区域从零开始，在时域平移时，为了保证待变换的积分区域不变，必须满足 $f(t - t_0) = 0, t < t_0$ ，所以需要将 $f(t - t_0)$ 改写为 $f(t - t_0)u(t - t_0)$ ，且 $t_0 > 0$ ，即只能向右平移。

- 卷积定理：可参考前述章节中连续时间的时域/频域卷积定理4.3，证明过程与公式(4.45)完全一致。

- 时域微分：

利用微积分中的分部积分法，有

$$\begin{aligned} \frac{df(t)}{dt} \xleftrightarrow{\text{LT}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} df(t) \\ &= f(t)e^{-st} \Big|_{-\infty}^{\infty} + s \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-st} dt \end{aligned} \quad (4.103)$$

考虑到 Laplace 变换的广义积分式(4.88)若想要收敛，其被积函数必须满足

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} f(t) e^{-st} = 0 \quad (4.104)$$

所以上式(4.103)可以化简为

$$\frac{df(t)}{dt} \xleftrightarrow{\text{LT}} s \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-st} dt = sF(s) \quad (4.105)$$



特别对于单边 Laplace 变换，则对应为

$$\frac{df(t)}{dt} \xrightarrow{\text{u-LT}} f(t)e^{-st}|_0^\infty + s \int_0^\infty f(t)e^{-st} dt = sF(s) - f(0) \quad (4.106)$$

n 阶导数的证明类似，只需继续迭代上述过程即可。

- s 域微分：

对 Laplace 变换表达式(4.88)两边同时求导，则有

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} F(s) &= \frac{d}{ds} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{d}{ds} (e^{-st}) dt \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} [tf(t)] e^{-st} dt = -\mathcal{L}\{tf(t)\} \end{aligned} \quad (4.107)$$

n 阶导数的证明类似，只需继续迭代上述过程即可。

- 时域积分：

这里可以通过和单位阶跃函数 $u(t)$ 的线性卷积关系，给出一种巧妙的证明。

首先计算单位阶跃函数 $u(t)$ 的 Laplace 变换：

$$\mathcal{L}\{u(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-st} dt = -\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_0^\infty = \frac{1}{s}, \quad \Re\{s\} > 0 \quad (4.108)$$

其中，符号 \Re 表示复数的实部，也常写作 Re 。

上式的积分，是考虑到 $e^{-st} = e^{-\sigma t}e^{-j\omega t}$ ，而复指数函数 $e^{-j\omega t}$ 可以视作复平面内模长为 1 的向量，所以为了保证 $\lim_{s \rightarrow \infty} e^{-st} = 0$ ，只需 σ ，即 s 的实部大于零即可。

随后，借用积分参数 τ ，对 $f(t)$ 和 $u(t)$ 进行线性卷积计算，有

$$u(t) * f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)u(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^t f(\tau)d\tau \quad (4.109)$$

由于 $u(t) \xrightarrow{\text{LT}} \frac{1}{s}$ ，所以根据前述 Laplace 变换的卷积定理有

$$u(t) * f(t) = \int_{-\infty}^t f(\tau)d\tau \xrightarrow{\text{LT}} \frac{1}{s} F(s) \quad (4.110)$$

特别对于单边 Laplace 变换，考虑到 $t < 0$ 的 $f(t)$ 不参与运算，所以只需将线性卷积公式(4.109)中的积分下限替换为 0 即可得证。

从以上数学性质的证明过程可以看到，Laplace 变换并非万能，其实也存在所谓收敛域（ROC）的要求，否则积分将会发散。下面继续通过几个实例加深对 Laplace 变换收敛域的认识。

例题 4.5 试求解 $t^n u(t)$, $-t^n u(-t)$, $e^{-at} u(t)$, $-e^{-at} u(-t)$ 的 Laplace 变换。其中， n 为任意整数， a 为任意复数。

解 结合 $u(t)$ 的 Laplace 变换式(4.108)，根据 s 域微分性质，有

$$t^n u(t) \xrightarrow{\text{LT}} (-1)^n \left(\frac{1}{s}\right)^{(n)} = \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad \text{ROC: } \Re\{s\} > 0 \quad (4.111)$$

上式考虑到 s 域微分性质的证明过程并未对收敛域有更多要求，所以 $t^n u(t)$ 的 Laplace 变换收敛域即为 $u(t)$ 的 Laplace 变换收敛域。

接下来计算 $u(-t)$ 的 Laplace 变换：

$$\mathcal{L}\{u(-t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} u(-t)e^{-st} dt = \int_{-\infty}^0 e^{-st} dt = -\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_{-\infty}^0 = -\frac{1}{s}, \quad \Re\{s\} < 0 \quad (4.112)$$



所以，根据 s 域微分性质，有

$$-t^n u(-t) \xrightarrow{\text{LT}} -(-1)^n \left(-\frac{1}{s} \right)^{(n)} = \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad \text{ROC: } \Re\{s\} < 0 \quad (4.113)$$

可以看到， $t^n u(t)$ 和 $-t^n u(-t)$ 的 Laplace 变换完全一样，只是收敛域不同。

继续根据 s 域平移性质，有

$$e^{-at} u(t) \xrightarrow{\text{LT}} \frac{1}{s - (-a)} = \frac{1}{s + a}, \quad \text{ROC: } \Re\{s\} > -\Re\{a\} \quad (4.114)$$

上式考虑到 s 域平移，其收敛域也将整体沿实数轴进行平移（虚数轴不影响），所以从 $\Re\{s\} > 0$ 变为了 $\Re\{s\} > 0 + \Re\{-a\} = -\Re\{a\}$ 。

对应地，直接计算：

$$-e^{-at} u(-t) \xrightarrow{\text{LT}} -\left(-\frac{1}{s - (-a)} \right) = \frac{1}{s + a}, \quad \text{ROC: } \Re\{s\} < -\Re\{a\} \quad (4.115)$$

即， $e^{-at} u(t)$ 和 $-e^{-at} u(-t)$ 的 Laplace 变换也完全一样，只是收敛域不同。

为了更为直观对收敛域进行描述，下图 4.9 给出了上述四类函数 Laplace 变换的收敛域在复频域内的表示（假定 a 的实部小于零）：

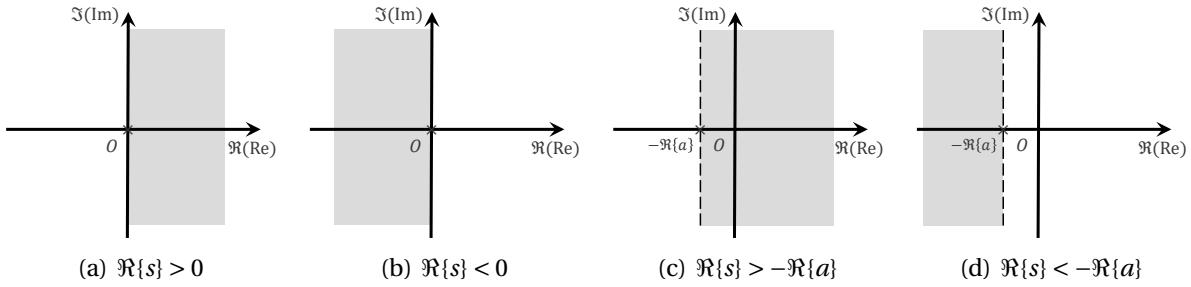


图 4.9: Laplace 变换收敛域示例

其中， $\Re(\text{Re})$ 代表实数轴， $\Im(\text{Im})$ 代表虚数轴，灰色区域即为对应的 Laplace 变换收敛域。考虑到收敛域的区域边界如实数轴上的 0 或 $-\Re\{a\}$ 均对应函数 Laplace 变换取无穷值的位置，所以单独用符号 \times 标记出。

进一步，若对以上四类函数求取单边 Laplace 变换，还可得到：

$$\begin{aligned} t^n u(t) &\xrightarrow{\text{u-LT}} \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad \text{ROC: } \Re\{s\} > 0, \quad -t^n u(-t) \xrightarrow{\text{u-LT}} 0 \\ e^{-at} u(t) &\xrightarrow{\text{u-LT}} \frac{1}{s + a}, \quad \text{ROC: } \Re\{s\} > -\Re\{a\}, \quad -e^{-at} u(-t) \xrightarrow{\text{u-LT}} 0 \end{aligned} \quad (4.116)$$

即，对于 $t^n u(t)$ 和 $e^{-at} u(t)$ 这类只在 s 平面坐标轴右端有取值的函数（因果函数）来说，单/双边 Laplace 变换完全相同；而对于 $-t^n u(-t)$ 和 $-e^{-at} u(-t)$ 等在 s 平面坐标轴左端有取值的函数来说，只有双边 Laplace 变换可以将其完全映射到变换域，单边 Laplace 变换将会丢失原有函数信息。

例题 4.5 表明，在变换域分析中，相比单边 Laplace 变换，双边 Laplace 变换更为完备；但双边 Laplace 变换也存在不足之处，即针对不同的时域函数，却可能导出相同的 s 域变换（只是收敛域不同），从而不易反推出原函数。所以，无论是结合真实音频系统的因果性，还是出于对数学形式上的考虑，均易采用单边 Laplace 变换对系统进

行变换域分析。本书后续不做特殊说明, Laplace 变换均指代单边 Laplace 变换。

Laplace 变换在连续时间信号与系统中应用广泛, 不仅可以将系统输入输出关系的显式表达: 线性卷积转化为乘积, 还可以将其隐式表达: 线性常系数微分方程转化为代数方程, 堪称巧夺天工。经变换后的系统响应 $h(t)$ 的 s 域形式 $H(s)$ (一般被称为系统函数或传递/转移函数) 很容易可以得到为

$$y(t) = x(t) * h(t) \Rightarrow H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} \quad (4.117)$$

由于 $H(s)$ 以分式呈现, 所以会存在分母为零导致取值无穷大, 或分子为零导致取值为零的两类极端情形, 前者的 s 值被称为极点 (在复频域中以符号 \times 标记, 如上图4.9), 后者的 s 值被称为零点 (在复频域中将以符号 \circ 标记)。极点和零点表征了系统的重要特性, 分析系统函数的极点和零点, 就可以更为了解系统, 从而通过配置系统输入, 或改变系统响应的参数, 达到控制输出信号的目的; 以及反过来通过获取输入输出的测试数据, 实现系统的模型参数辨识。

下面将进一步通过具体的例题进行说明。

例题 4.6 试通过 Laplace 变换对例题4.1中两类 RC 电路的连续时间系统输入输出关系进行分析。

解 回顾图4.3(a)所示的 RC 串联电路, 其连续时间系统输入输出关系表达式为

$$RC \frac{dy}{dt} + y(t) = x(t) \quad (4.118)$$

两边取 Laplace 变换, 有

$$RC \cdot [sY(s) - y(0)] + Y(s) = X(s) \quad (4.119)$$

考虑两类初始情况: 从零开始对电容充电和从最大电压开始对电容放电。

首先是充电阶段, 此时初始条件 $y(0) = 0$, 根据 s 域的系统输入输出关系 $Y(s) = X(s)H(s)$, 可以直接导出系统传递函数 $H(s)$ 的表达式:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{1 + RC \cdot s} = \frac{\frac{1}{RC}}{s + \frac{1}{RC}} \quad (4.120)$$

根据例题4.5的分析, 易知对于因果信号 (本例后续均省略 $u(t)$), 有

$$e^{-at} \xleftrightarrow{u-LT} \frac{1}{s+a}, \quad \text{ROC: } \Re\{s\} > -\Re\{a\} \quad (4.121)$$

所以假设此时用电源的恒定电压 U_0 作为输入, 对电容进行充电, 则有

$$x(t) = U_0 = U_0 \cdot e^0 \xleftrightarrow{u-LT} U_0 \cdot \frac{1}{s}, \quad \text{ROC: } \Re\{s\} > 0 \quad (4.122)$$

进一步与 $H(s)$ 合并, 可知:

$$Y(s) = X(s)H(s) = U_0 \cdot \frac{\frac{1}{RC}}{s(s + \frac{1}{RC})} = U_0 \cdot \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{1}{RC}} \right) \quad (4.123)$$

化简至此, 根据该 s 域函数的形式即可反推出时域的原函数:

$$Y(s) = U_0 \cdot \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{1}{RC}} \right) \xleftrightarrow{u-LT} y(t) = U_0 \cdot \left(1 - e^{-\frac{1}{RC}t} \right), \quad \text{ROC: } \Re\{s\} > 0 \quad (4.124)$$

考虑到不同 s 域函数的线性组合, 其收敛域应当取交集 (显然应该选择范围更小

的收敛域), 所以得到上式 Laplace 变换的收敛域为 $\Re\{s\} > 0$ 。

可以看到, 随着时间推移, 一开始电容充电过程非常迅速, 然后逐渐减缓, 最终电压将收敛于恒定值 U_0 。

接下来是放电阶段, 此时初始条件 $y(0) = U_0$, 且整个过程无系统输入, 即 $x(t) = 0$, 则方程(4.119)将变为

$$RC \cdot [sY(s) - U_0] + Y(s) = 0 \quad (4.125)$$

进一步推导, 有

$$Y(s) = \frac{U_0}{s + \frac{1}{RC}} \xrightarrow{\text{u-LT}} y(t) = U_0 \cdot e^{-\frac{1}{RC}t}, \quad \text{ROC: } \Re\{s\} > -\frac{1}{RC} \quad (4.126)$$

可以看到, 放电阶段基本是充电阶段的相反过程, 一开始放电非常迅速, 然后逐渐减缓, 最终电压释放完毕, 回归初始零值。

基于上述分析会发现, 无论充电还是放电阶段, 参数 RC 均非常关键, 不仅表征了系统 $H(s)$ 的极点和收敛域, 还出现在最终原函数的时域表达式中。若令 $\tau = RC$, 根据量纲分析易知其具有时间的量纲, 所以 τ 也被称作时间常数。通过改变数值 τ , 即可改变系统响应, 让系统输入输出关系朝着所预设的方向发展; 此外, 也可以通过实验测得充电完成的稳态时间 (一般认为经过 5τ 即达到稳定, 此时 $1 - e^{-5} = 99.3\%$), 反过来计算出时间常数, 进而获取系统辨识的结果。

下图给出了充电和放电两个阶段电容电压值随时间的函数图 (令 $U_0 = 1, RC = 1$), 可以更清晰看出整体电压值的变化趋势:

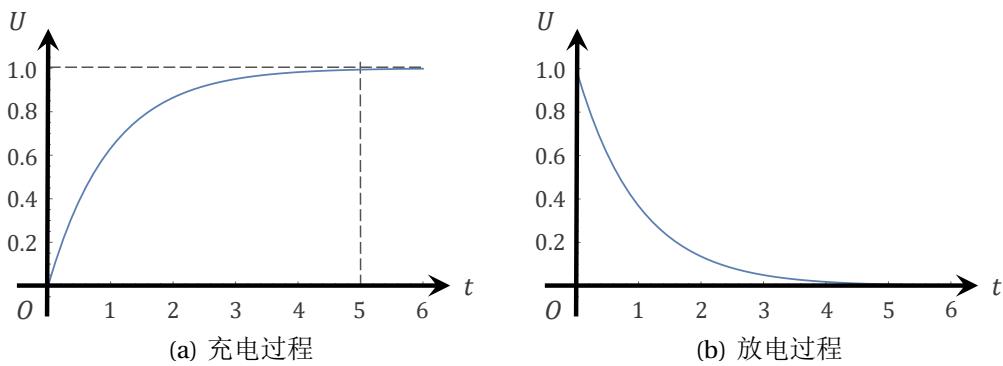


图 4.10: RC 串联电路电容电压变化曲线

而针对图4.3(b)所示的 RC 并联电路, 其连续时间系统输入输出关系表达式为

$$RC \frac{dy}{dt}(t) + y(t) = R \cdot x(t) \quad (4.127)$$

很明显其与 RC 串联电路的微分方程(4.118)大同小异, 后续分析也几乎相同, 这里不做赘述。

例题4.6所分析的两类充/放电情形在连续时间信号与系统中是具有普适性的, 前者被称作零状态响应, 指代初始的输出状态为零, 需要依靠施加输入激励的响应; 后者被称作零输入响应, 指代输入信号恒为零, 完全依靠非零初始输出状态的响应。实际上, 若对前述定义4.1中表征连续时间信号与系统的线性常系数微分方程一般形式(4.20)进

行 Laplace 变换，有

$$\mathcal{L} \left\{ \sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} \right\} = \sum_{k=0}^N a_k \cdot \mathcal{L} \left\{ \frac{d^k y(t)}{dt^k} \right\} = Y(s) \cdot \sum_{k=0}^N a_k s^k - \sum_{k=1}^N a_k \sum_{i=0}^{k-1} s^{k-i-1} y^{(i)}(0) \quad (4.128)$$

$$\mathcal{L} \left\{ \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k} \right\} = \sum_{k=0}^M b_k \cdot \mathcal{L} \left\{ \frac{d^k x(t)}{dt^k} \right\} = X(s) \cdot \sum_{k=0}^N b_k s^k \quad (4.129)$$

上两式考虑到 $x(t)$ 为因果信号，单/双边 Laplace 变换相同，而 $y(t)$ 则不一定（零输入响应的非零初始输出状态源于 $t < 0$ 时刻），所以分别采用了不同的时域微分。

将上两式代回公式(4.20)，整理后可以得到：

$$Y(s) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k s^k}{\sum_{k=0}^N a_k s^k} X(s) + \frac{\sum_{k=1}^N a_k \sum_{i=0}^{k-1} s^{k-i-1} y^{(i)}(0)}{\sum_{k=0}^N a_k s^k} \quad (4.130)$$

该式以一种统一的形式，描述了 s 域情形下以线性常系数微分方程表征的系统输入输出关系。当为零状态响应时， $y^{(i)}(0) = 0$ ，导致后一项为零，此时前一项 $X(s)$ 的系数即为系统传递函数 $H(s)$ ；当为零输入响应时， $X(s) = 0$ ，导致前一项为零，此时后一项即为输出信号的 Laplace 变换 $Y(s)$ 。在实际情况中，也会遇到两者同时存在的可能，此时被称作全响应，需要利用叠加原理，通过公式(4.130)的完整形式求解。

另外，公式(4.130)还表明，以线性常系数微分方程表征的连续时间信号与系统，在 s 域情形下均以有理分式呈现，即只包含整式和真分式。该性质也为导出信号与系统的原函数提供了数学上的便捷。

 **笔记** 事实上，单边 Laplace 变换的积分下限更为严格的写法应当为 $t = 0^-$ ，这样才能对应于微分方程所使用的初始条件为“正式输入进入之前的时刻”（只有零输入响应）。而公式(4.129)中，与双边 Laplace 变换相同，并未含有 $x^{(i)}(0)$ 项，也是因为这里实际是 0^- 时刻，仍未有正式的因果输入信号（在 $t = 0^+$ 时刻才引入，如例题4.6中零状态响应的 $x(t) = U_0$ ）。此外，后续将会看到， $t = 0^-$ 的积分下限约定，还保证了在 $t = 0$ 时可以包含 $\delta(t)$ 及其导数等一类奇异函数项。不过，绝大多数情况下，零时刻前后并不会引起太大歧义，所以本书正文部分并未严格区分 0 和 0^- 的写法。

最后，综合前面所讲，还可以利用 Laplace 变换对 LTI 系统的因果性和稳定性进行判别。首先针对因果性，已经明确了定理4.1的 LTI 系统因果性判据，在此基础上可以利用 Laplace 变换给出另一种等效描述：

定理 4.7 (基于 Laplace 变换的 LTI 系统因果性判据)

一个在 s 域以有理分式呈现的 LTI 系统满足因果性的充分必要条件为：系统传递函数 $H(s)$ 的收敛域位于 s 平面坐标轴最右边极点的右半平面（可不包含 ∞ 处）。 

证明 公式(4.130)描述了在 s 域以有理分式呈现的 LTI 系统输入输出关系。若为因果系统，则因果输入将产生因果输出，公式(4.130)的第二项为零，此时单/双边 Laplace 变换相同。但无论是否含有第二项，均可以通过公式(4.130)导出系统传递函数 $H(s)$ ，并

改写为如下“整式 + 真分式”的统一形式：

$$H(s) = \frac{b_M s^M + \dots + b_1 s + b_0}{a_N s^N + \dots + a_1 s + a_0} = \sum_{n=0}^{M-N} C_n s^n + \frac{\beta_{N-1} s^{N-1} + \dots + \beta_1 s + \beta_0}{s^N + \alpha_{N-1} s^{N-1} + \dots + \alpha_1 s + \alpha_0} \quad (4.131)$$

其中，前一项涉及 s 的 n 次方的线性组合， C_n 为各项系数。若 $M < N$ 时该项不存在；后一项则严格满足分子阶次小于分母阶次， α 和 β 为对应各项系数。

为了考察 LTI 系统的因果性，根据定理 4.1，即 $h(t) = 0, t < 0$ ，所以需要利用双边 Laplace 变换计算 $H(s)$ 对应的完整原函数，以便分析其时域取值是否满足要求。

首先是公式(4.131)的前一项，考虑到

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-st} dt = 1, \text{ ROC: 全部 } s \text{ 域} \quad (4.132)$$

而根据时域微分性质，有

$$\delta^{(n)}(t) \xrightarrow{\text{LT}} s^n \cdot 1 = s^n, \text{ ROC: 除去 } \infty \text{ 处的全部 } s \text{ 域} \quad (4.133)$$

注意，上式考虑到时域微分性质的证明过程并未对收敛域有更多要求，只是增加了 s^n 项，在这里会引入一个额外的 $s \rightarrow \infty$ 处的极点，所以尽管尚不清楚 $\delta(t)$ 导数项的定义（也并不打算展开描述，具体可参阅信号与系统相关书籍），其双边 Laplace 变换收敛域仍为全部 s 域，只是需要去除 ∞ 处。

回到公式(4.131)的前一项， s^n 的线性组合，自然收敛域也为除去 ∞ 处的全部 s 域；且由于 $\delta(t) = 0, t \neq 0$ ，其导数 $\delta^{(n)}(t)$ 必然满足因果性要求。

接下来计算公式(4.131)后一项的原函数，根据部分分式展开法，假设分母关于 s 的 N 次多项式有 r 个 ξ_i 重根 a_i ，则有

$$\frac{\beta_{N-1} s^{N-1} + \dots + \beta_1 s + \beta_0}{s^N + \alpha_{N-1} s^{N-1} + \dots + \alpha_1 s + \alpha_0} = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{\xi_i} \frac{A_{ij}}{(s - a_i)^j} \quad (4.134)$$

其中， A_{ij} 为 N 个待定系数，可以通过比较系数法求得。

上式明显具有指数形式的原函数。但结合例题 4.5 可知，只有在明确其收敛域后才可以导出唯一的原函数；而若满足因果性，则指数型函数的 Laplace 变换收敛域均为其极点的右半平面。再结合 s 域微分性质，有

$$t^n e^{a_i t} u(t) \xrightarrow{\text{LT}} (-1)^n \left(\frac{1}{s - a_i} \right)^{(n)} = \frac{n!}{(s - a_i)^{n+1}}, \text{ ROC: } \Re\{s\} > \Re\{a_i\} \quad (4.135)$$

上式同样考虑到 s 域微分性质的证明过程并未对收敛域有更多要求，所以其收敛域仍然为指数型函数的 Laplace 变换收敛域。

将上式代回公式(4.134)，可以得到：

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{\xi_i} \frac{A_{ij}}{(s - a_i)^j} \xrightarrow{\text{LT}} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{\xi_i} A_{ij} \frac{t^{j-1}}{(j-1)!} e^{a_i t} u(t), \text{ ROC: } \Re\{s\} > \max(\Re\{a_i\}) \quad (4.136)$$

其中， \max 函数指代取最大值，对上式来说即，满足因果性的指数型函数的线性组合，其 Laplace 变换收敛域应当取交集，为最右边极点的右半平面。

综合以上，考虑到上述推导前后结论均等价，则本定理得证，该判据为 LTI 系统满足因果性的充分必要条件。

接下来，针对稳定性，也已经明确了定理 4.2 的 LTI 系统稳定性判据，在此基础上

可以利用 Laplace 变换给出另一种等效描述：

定理 4.8 (基于 Laplace 变换的 LTI 系统稳定性判据)

一个在 s 域以有理分式呈现的 LTI 系统满足稳定性的充分必要条件为：

1. 系统传递函数 $H(s)$ 的分子阶次不大于分母阶次，即 $M \leq N$ ；
2. 系统传递函数 $H(s)$ 的收敛域包含 $\Re\{s\} = 0$ ，即虚数轴。



证明 根据前述定理 4.7 的证明过程可知，以有理分式呈现的系统传递函数 $H(s)$ 均可以改写为如公式(4.131)的形式，并且将导出 $\delta(t)$ 及其导数和指类型函数两类原函数。由于根据定理 4.2，LTI 系统满足稳定性的条件为系统响应 $h(t)$ 需满足

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau < \infty \quad (4.137)$$

而 $\delta(t)$ 及其导数和指类型函数的数学性质天差地别，所以需要分别考察这两类函数是否满足绝对可积条件。

首先是第一项的 $\delta^{(n)}(t)$ 部分，若 $n=0$ ，很明显 $\delta(t)$ 满足绝对可积（积分为 1）。事实上，根据章节 4.2.1 的线性卷积关系，当系统响应为单位冲激信号 $\delta(t)$ 时，输出信号即为输入信号，自然有界输入将导出有界输出，系统满足稳定性条件；但是，若 $n \geq 1$ 时，有界输入将导出包含单位冲激信号相关的无界输出。以 $n=1$ 为例，由于 $\delta'(t) \xrightarrow{\text{LT}} s^2$ ，此时考虑恒定的有界输入信号 $x(t) = u(t) \xrightarrow{\text{LT}} \frac{1}{s}$ ，则输出信号 $y(t)$ 为 $s^2 \cdot \frac{1}{s} = s \xrightarrow{\text{LT}} \delta(t)$ ，不满足系统稳定性条件。

所以，对于公式(4.131)中的第一项，满足稳定性的条件等效于仅包含 s 的零次项，此时系统传递函数 $H(s)$ 的分子阶次不大于分母阶次，即 $M \leq N$ 。

接下来是第二项的指类型原函数部分，这里根据其收敛域的要求，划分为右边函数 ($t \geq 0$) 和左边函数 ($t < 0$) 两类来讨论。

对于满足因果性的右边函数来说，考察每一项指类型原函数的绝对可积，有

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| A_{ij} \frac{t^{j-1}}{(j-1)!} e^{a_i t} u(t) \right| dt = \frac{A_{ij}}{(j-1)!} \int_0^{\infty} \left| t^{j-1} e^{a_i t} \right| dt = \frac{A_{ij}}{(j-1)!} \int_0^{\infty} t^{j-1} e^{a_i t} dt \quad (4.138)$$

上式推导中最后的被积函数，是一类典型的反常积分案例，也与附录章节 G 中的 Γ 函数(G.1)形式相同，是一个在 $j > 0, a_i < 0$ 情形下积分收敛的函数（这里不做详细证明，可参阅数学分析相关书籍）。再结合公式(4.136)中关于因果指类型函数线性组合的 Laplace 变换收敛域 ROC: $\Re\{s\} > \max(\Re\{a_i\})$ ，可以得到此时满足稳定性的条件为系统传递函数 $H(s)$ 最右边的极点在 s 域的左半平面。

至于非因果的左边函数，由于与右边函数是完全对称的结构，易知此时满足稳定性的条件为系统传递函数 $H(s)$ 最左边的极点在 s 域的右半平面。

合并起来，即无论 LTI 系统是否因果，其满足稳定性的条件等效于系统传递函数 $H(s)$ 的收敛域包含 $\Re\{s\} = 0$ ，即虚数轴。

综合以上，考虑到上述推导前后结论均等价，则本定理得证，该判据为 LTI 系统满足稳定性的充分必要条件。



笔记 鉴于绝对可积刚好是连续时间 Fourier 变换的前置条件，对应 Laplace 变换中的



$\Re\{s\} = \sigma = 0$ 。但定理4.8却不能直接通过连续时间 Fourier 变换的收敛性质证明，因为绝对可积只是连续时间 Fourier 变换的充分非必要条件。

4.2.4 离散时间的 z 变换

在离散时间信号与系统中，存在一种与连续情形对应的变换域分析方法，称作 z 变换。由于离散时间的 z 变换几乎等同于连续时间的 Laplace 变换，所以这里不必再赘述 z 变换的研究动机，并且据此可知，若想要给出 z 变换的定义，存在两条技术途径，一是将 Laplace 变换离散化，二是对离散时间 Fourier 变换（DTFT）进行改进。

若从 Laplace 变换开始推导，可以借鉴章节4.2.1中对于线性卷积的分析思路，对公式(4.24)反其道而行之，先将连续函数 $x(t)$ （这里沿用章节4.2.2中离散时间 Fourier 变换的符号体系）考虑成连续自变量的“阶跃梯形”函数 $x(nT_s)$ （ n 为整数， T_s 为所选定的时间间隔），再消去时间间隔 $\Delta t = T_s$ ，即可化为离散函数 $x[n]$ 的表达式。对于 Laplace 变换来说，则对应转换为如下形式：

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st} dt \xrightarrow{t=nT_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s)e^{-snT_s} \Delta t \rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] (e^{\sigma T_s} \cdot e^{j\Omega})^{-n} \quad (4.139)$$

上式最后一步，是将 $s = \sigma + j\omega$ 拆解，并结合章节4.2.2中连续/离散周期函数的角频率关系式 $\omega t = \Omega n \Rightarrow \Omega = \omega T_s$ 进行了化简。写为该公式结构的主要原因在于，不同于连续情形的 $e^{j\omega t}$ ，离散情形的 $e^{j\Omega n}$ 随着角频率 Ω 的增加而呈现出周期性，所以不宜采用与 Laplace 变换完全相同的方式，在指数项上将频域改写为复频域；而是将 $e^{\sigma T_s}$ 提取出来，作为单位模长复指数 $e^{j\Omega}$ 的系数。

若令 $r = e^{\sigma T_s}$ ，继续对上式最后一步进行推导，有

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] (e^{\sigma T_s} \cdot e^{j\Omega})^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] (r \cdot e^{j\Omega})^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n} \quad (4.140)$$

其中， $z = r \cdot e^{j\Omega}$ ，是一个覆盖整个复频域取值的参数。其模长为 r （满足 $r > 0$ ）。这便是 z 变换定义的由来。

此外，还有一种将 Laplace 变换离散化的方法，即利用冲激串信号 $p(t)$ 的“筛选抽取”性质，对连续时间信号 $x(t)$ 进行“抽样”（不能用 $p[n]$ ，因为自变量不同），可以得到某种理想抽样信号 $x_s(t)$ ，有

$$x_s(t) = x(t) \cdot p(t) = x(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) \cdot \delta(t - nT_s) \quad (4.141)$$

尽管 $x_s(t)$ 在时域上难以给出一种具象化理解（可参考例题4.3中的图4.7），但上式的连续时间形式明显适用于 Laplace 变换，且通过对求和的每一项进行积分也可以刚好消去 $\delta(t)$ ，得到离散函数 $x[n]$ 的对应项。

所以，结合 $\delta(t) \xrightarrow{\text{LT}} 1$ 与时域平移性质，对 $x_s(t)$ 进行 Laplace 变换，有（也可以利用 Dirac 函数的性质公式(1.153)得到）：

$$\mathcal{L}\{x_s(t)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) \cdot \mathcal{L}\{\delta(t - nT_s)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) \cdot e^{-snT_s} \quad (4.142)$$

之后的推导则与前述分析完全相同。



若从离散时间 Fourier 变换 (DTFT) 开始推导, 根据定义4.3的描述, 离散时间函数 $x[n]$ 在频域上的表示为

$$\mathcal{F}\{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j2\pi Fn} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega n} \quad (4.143)$$

但上式成立需要 $x[n]$ 满足绝对可和, 所以为了能够处理更为广泛的一类离散函数, 这里需要对后面的指数项进行改写。考虑到 $e^{-j\Omega n}$ 只是在复频域单位圆上的周期函数, 所以为其配上模长 r , 变换为 $(r \cdot e^{j\Omega})^{-n} = z^{-n}$ (其中 z 为任意复频域参数), 即可在一定程度上牵制各类离散函数 $x[n]$, 让 $x[n] \cdot z^{-n}$ 整体满足无穷级数求和的收敛条件。这便是从离散时间 Fourier 变换视角推导出 z 变换定义的过程。

由于以上分析均建立在整个 $(-\infty, \infty)$ 时域区间上, 同样地, 若考虑因果类离散函数, 可以利用单位阶跃序列 $u[n]$, 统一消除 $n = -1, -2, \dots$ 时刻的求和运算即可, 由此衍化出如下完整的 z 变换 (ZT) 定义:

定义 4.5 (z 变换 (ZT))

对于离散函数 $x[n]$, 存在如下 z 变换表达式:

$$X(z) = \mathcal{Z}\{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} \quad (4.144)$$

其中, z 为复数, 满足 $z = r \cdot e^{j\Omega} = r \cdot e^{j2\pi F}$, Ω 仍然为角频率, F 为频率。 $\mathcal{Z}\{x[n]\}$ 为 z 变换, $x[n]$ 和 $X(z)$ 分别称作 z 变换的原函数和象函数。

特别针对因果类离散函数, 区别于上述双边 z 变换 (ZT), 利用单位阶跃序列 $u[n]$, 存在如下单边 z 变换 (u-ZT):

$$X(z) = \mathcal{Z}\{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]u[n]z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n} \quad (4.145)$$



与离散时间 Fourier 变换类似, z 变换提供了一组“时间域-复频 (z) 域”的 z 变换对 (可用 $\xrightarrow{\text{ZT}}$ 或 $\xleftarrow{\text{u-ZT}}$ 表示), 不仅基本完全保留了离散时间 Fourier 变换的性质, 还将待变换的离散函数限制大大降低, 可以更方便进行变换域分析。

笔记 很明显, 有了 z (正) 变换, 自然也存在 z 逆变换。但是从系统分析的角度讲, z 逆变换并未有太大实际意义, 反而会增加许多数学计算上的困难, 所以这里不做详细展开, 具体可参阅数字信号处理、信号与系统等书籍。

下面首先对 z 变换的常用数学性质进行罗列, 所有性质也几乎完全适用于离散时间 Fourier 变换 (只需将 z 替换为 $e^{j\Omega}$)。除此之外, 对于单边 z 变换, 如有特殊形式, 将会单独给出 (否则与双边情形完全一致)。

性质 z 变换的常用数学性质:

- 线性 (α 和 β 均为常数):

$$\mathcal{Z}\{\alpha x_1 + \beta x_2\} = \alpha \mathcal{Z}\{x_1\} + \beta \mathcal{Z}\{x_2\} \quad (4.146)$$

- 时域平移 (k 为任意整数):

$$x[n] \xrightarrow{\text{ZT}} X(z) \Rightarrow x[n-k] \xrightarrow{\text{ZT}} z^{-k} X(z) \quad (4.147)$$



特别对于单边 z 变换，则需要分为左移和右移两种情况。假定 $k \geq 1$ ，则有

$$\begin{aligned} x[n-k] &\xleftrightarrow{\text{ZT}} z^{-k} \left(X(z) + \sum_{n=-k}^{-1} x[n] z^{-n} \right) \\ x[n+k] &\xleftrightarrow{\text{ZT}} z^k \left(X(z) - \sum_{n=0}^{k-1} x[n] z^{-n} \right) \end{aligned} \quad (4.148)$$

- 卷积定理：

$$x_1[n] \xrightarrow{\text{ZT}} X_1(z), \quad x_2[n] \xrightarrow{\text{ZT}} X_2(z) \Rightarrow x_1[n] * x_2[n] \xrightarrow{\text{ZT}} X_1(z)X_2(z) \quad (4.149)$$

- 指数加权（ z 域尺度变换。 z_0 为任意复数）：

$$x[n] \xrightarrow{\text{ZT}} X(z) \Rightarrow z_0^n x[n] \xrightarrow{\text{ZT}} X\left(\frac{z}{z_0}\right) \quad (4.150)$$

- 线性加权（ z 域微分）：

$$x[n] \xrightarrow{\text{ZT}} X(z) \Rightarrow nx[n] \xrightarrow{\text{ZT}} -z \frac{d}{dz} X(z) \quad (4.151)$$

进一步，可得：

$$n^k x[n] \xrightarrow{\text{LT}} -z \frac{d}{dz} \left[-z \frac{d}{dz} \dots \left(-z \frac{d}{dz} X(z) \right) \right] = (-1)^k \left(z \frac{d}{dz} \right)^k X(z) \quad (4.152)$$

- 时域累加（ k 为求和参数）：

$$x[n] \xrightarrow{\text{ZT}} X(z) \Rightarrow \sum_{k=-\infty}^n x[k] \xrightarrow{\text{ZT}} \frac{1}{1-z^{-1}} X(z) \quad (4.153)$$

特别对于单边 z 变换，只需将上式求和下限替换为0即可。

证明 对以上数学性质逐一分析，有

- 线性：

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\{\alpha x_1 + \beta x_2\} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\alpha x_1[n] + \beta x_2[n]) z^{-n} \\ &= \alpha \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1[n] z^{-n} + \beta \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2[n] z^{-n} \\ &= \alpha \mathcal{Z}\{x_1\} + \beta \mathcal{Z}\{x_2\} \end{aligned} \quad (4.154)$$

- 时域平移：

令 $m = n - k$ ，直接计算：

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\{x[n-k]\} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n-k] z^{-n} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] z^{-m} z^{-k} \\ &= z^{-k} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] z^{-m} = z^{-k} X(z) \end{aligned} \quad (4.155)$$

特别对于单边 z 变换，假定 $k \geq 1$ ，首先考虑左移情形，令 $m = n - k$ ，有

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\{x[n-k]\} &= \sum_{n=0}^{\infty} x[n-k] z^{-n} = \sum_{m=-k}^{-1} x[m] z^{-m} z^{-k} \\ &= z^{-k} \left(\sum_{m=0}^{\infty} x[m] z^{-m} + \sum_{m=-k}^{-1} x[m] z^{-m} \right) \\ &= z^{-k} \left(X(z) + \sum_{n=-k}^{-1} x[n] z^{-n} \right) \end{aligned} \quad (4.156)$$

再考虑右移情形，令 $m = n + k$ ，有

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}\{x[n+k]\} &= \sum_{n=0}^{\infty} x[n+k]z^{-n} = \sum_{m=k}^{\infty} x[m]z^{-m}z^k \\ &= z^k \left(\sum_{m=0}^{\infty} x[m]z^{-m} - \sum_{m=0}^{k-1} x[m]z^{-m} \right) \\ &= z^k \left(X(z) - \sum_{n=0}^{k-1} x[n]z^{-n} \right)\end{aligned}\quad (4.157)$$

特别指出，相比单边 Laplace 变换，单边 z 变换的时域平移描述更为完整，主要原因在于，与 z 变换密切相关的线性常系数差分方程即是以时域平移的形式呈现，且相比双边 z 变换的简洁公式，单边 z 变换等式右边多出来的余项也是 z 的代数式，较易求解（单边 Laplace 变换也可以写为类似的完整形式，但并不常用，且多出来的余项也并不易积分）。

- 卷积定理：可参考前述章节中离散时间的时域/频域卷积定理4.6，证明过程与公式(4.85)完全一致。
- 指数加权（ z 域尺度变换）：

$$\mathcal{Z}\{z_0^n x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} z_0^n x[n]z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \left(\frac{z}{z_0}\right)^{-n} = X\left(\frac{z}{z_0}\right) \quad (4.158)$$

- 线性加权（ z 域微分）：

$$\frac{d}{dz}X(z) = \frac{d}{dz} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} \right] = -z^{-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} nx[n]z^{-n} \quad (4.159)$$

所以有

$$-z \frac{d}{dz}X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} nx[n]z^{-n} = \mathcal{Z}\{nx[n]\} \quad (4.160)$$

n 阶导数的证明类似，只需继续迭代上述过程即可。

- 时域累加：

这里同样可以通过单位阶跃序列 $u[n]$ ，给出一种类似的证明。

首先计算单位阶跃序列 $u[n]$ 的 z 变换：

$$\mathcal{Z}\{u[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u[n]z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = \frac{1-z^{-n}}{1-z^{-1}} \xrightarrow{|z|>1} \frac{1}{1-z^{-1}} \quad (4.161)$$

上式的求和，是利用了等比数列的求和公式，并考虑无穷级数求和的收敛条件，对 z 的取值进行了约束。

随后，借用求和参数 k ，对 $x[n]$ 和 $u[n]$ 进行线性卷积计算，有

$$u[n] * x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]u[n-k] = \sum_{k=-\infty}^n x[k] \quad (4.162)$$

由于 $u[n] \xrightarrow{\text{ZT}} \frac{1}{1-z^{-1}}$ ，所以根据前述 z 变换的卷积定理有

$$u[n] * x[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k] \xrightarrow{\text{ZT}} \frac{1}{1-z^{-1}} X(z) \quad (4.163)$$

特别对于单边 z 变换，考虑到 $n = -1, -2, \dots$ 的 $x[n]$ 不参与运算，所以只需将线性卷积公式(4.162)中的求和下限替换为 0 即可得证。



从以上数学性质的证明过程可以看到, z 变换也并非万能, 若不满足收敛域 (**ROC**) 的要求, 无穷级数求和将会发散。在复变函数论中, 专门有一类罗朗 (Laurent) 级数, 探讨与 z 变换形式对应的数学收敛问题。不过对于本节所描述的内容, 可以不用过分严谨, 只需继续通过几个实例加深对 z 变换收敛域的认识即可。

例题 4.7 试求解 $(n+1)u[n]$, $-(n+1)u[-n-1]$, $a^n u[n]$, $-a^n u[-n-1]$ 的 z 变换。其中, a 为任意复数。

解 结合 $u[n]$ 的 z 变换式(4.161), 根据线性加权 (z 域微分) 性质, 有

$$nu[n] \xrightarrow{\text{ZT}} z \left(\frac{1}{1-z^{-1}} \right)' = \frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}, \quad \text{ROC: } |z| > 1 \quad (4.164)$$

上式考虑到线性加权 (z 域微分) 性质的证明过程并未对收敛域有更多要求, 所以 $nu[n]$ 的 z 变换收敛域即为 $u[n]$ 的 z 变换收敛域。

再利用时域平移性质, 有

$$(n+1)u[n+1] = (n+1)u[n] \xrightarrow{\text{ZT}} \frac{1}{(1-z^{-1})^2} = \left(\frac{z}{z-1} \right)^2, \quad \text{ROC: } |z| > 1 \quad (4.165)$$

上式的收敛域同理; 此外, 由 $(n+1)u[n+1]$ 到 $(n+1)u[n]$ 的变换颇为巧妙, 主要是考虑到当 $n=-1$ 时, $(n+1)=0$, 两者结果均为 0; 而当 $n=-2,-3,\dots$ 或 $n=0,1,\dots$ 时, 两者结果也相同。

进一步, 如若重复以上步骤, 还可得到:

$$\begin{aligned} \frac{(n+k)!}{n!} u[n] &= (n+k)(n+k-1)\cdots(n+1)u[n] \\ &\xrightarrow{\text{ZT}} \frac{k!}{(1-z^{-1})^{k+1}} = k! \left(\frac{z}{z-1} \right)^{k+1}, \quad \text{ROC: } |z| > 1 \end{aligned} \quad (4.166)$$

接下来计算 $u[-n-1]$ 的 z 变换:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\{u[-n-1]\} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} u[-n-1]z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} z^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} z^n \\ &= \frac{z(1-z^n)}{1-z} \xrightarrow{|z|<1} \frac{z}{1-z} = -\frac{1}{1-z^{-1}} \end{aligned} \quad (4.167)$$

所以, 同样根据线性加权 (z 域微分) 和时域平移性质, 有

$$-(n+1)u[-n-1] \xrightarrow{\text{ZT}} \frac{1}{(1-z^{-1})^2} = \left(\frac{z}{z-1} \right)^2, \quad \text{ROC: } |z| < 1 \quad (4.168)$$

进一步, 如若重复以上步骤, 还可得到:

$$\begin{aligned} -\frac{(n+k)!}{n!} u[-n-1] &= -(n+k)(n+k-1)\cdots(n+1)u[-n-1] \\ &\xrightarrow{\text{ZT}} \frac{k!}{(1-z^{-1})^{k+1}} = k! \left(\frac{z}{z-1} \right)^{k+1}, \quad \text{ROC: } |z| < 1 \end{aligned} \quad (4.169)$$

可以看到, $(n+1)u[n]$ 和 $-(n+1)u[-n-1]$ 的 z 变换完全一样, 只是收敛域不同。

继续根据指数加权 (z 域尺度变换) 性质, 有

$$a^n u[n] \xrightarrow{\text{ZT}} \frac{1}{1-(a^{-1}z)^{-1}} = \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a}, \quad \text{ROC: } |z| > |a| \quad (4.170)$$

上式考虑到指数加权 (z 域尺度变换), 其收敛域也将整体进行尺度变换, 所以从



$|z| > 1$ 变为了 $|\frac{z}{a}| > 1 \Rightarrow |z| > |a|$ 。

对应地，直接计算：

$$-a^n u[-n-1] \xrightarrow{\text{ZT}} \frac{1}{1-(a^{-1})z^{-1}} = \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a}, \quad \text{ROC: } |z| < |a| \quad (4.171)$$

即， $a^n u[n]$ 和 $-a^n u[-n-1]$ 的 z 变换也完全一样，只是收敛域不同。

为了更为直观对收敛域进行描述，下图 4.11 给出了上述四类函数 z 变换的收敛域在复频域内的表示（假定 a 为实数，且 $0 < a < 1$ ）：

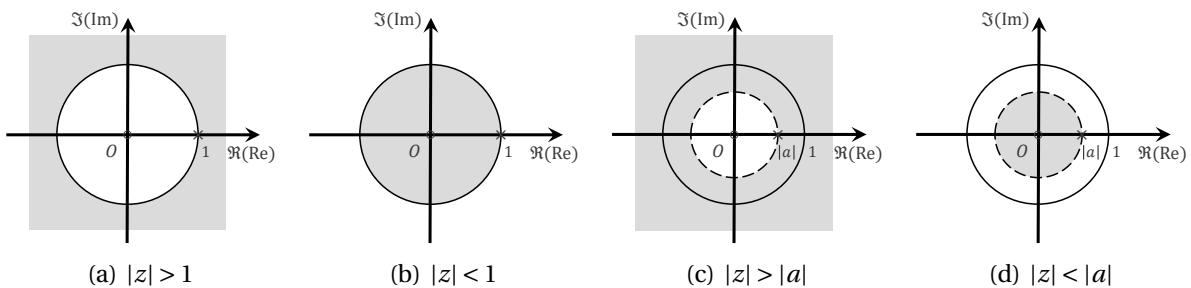


图 4.11: z 变换收敛域示例

可以看到，与 Laplace 变换不同， z 变换的收敛域均为平面圆的内侧或外侧；其中，单位圆用实线单独表示；极/零点也分别在图中进行了标记。

进一步，若对以上四类函数求取单边 z 变换，还可得到：

$$(n+1)u[n] \xrightarrow{\text{u-ZT}} \frac{1}{(1-z^{-1})^2} = \left(\frac{z}{z-1}\right)^2, \quad \text{ROC: } |z| > 1, \quad -(n+1)u[-n-1] \xrightarrow{\text{u-ZT}} 0$$

$$a^n u[n] \xrightarrow{\text{u-ZT}} \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a}, \quad \text{ROC: } |z| > |a|, \quad -a^n u[-n-1] \xrightarrow{\text{u-ZT}} 0 \quad (4.172)$$

即，对于 $(n+1)u[n]$ 和 $a^n u[n]$ 这类只在 z 平面坐标轴右端有取值的函数（因果函数）来说，单/双边 z 变换完全相同；而对于 $-t^n u(-t)$ 和 $-e^{-at} u(-t)$ 等在 z 平面坐标轴左端有取值的函数来说，只有双边 z 变换可以将其完全映射到变换域，单边 z 变换将会丢失原有函数信息。

 **笔记** 需指出，不同于 Laplace 变换中利用 $u(t)$ 和 $u(-t)$ 来区分左/右边函数， z 变换采用的是“非对称”的 $u[n]$ 和 $u[-n-1]$ ，主要原因在于两者不同的积分/求和数学结构，以及原本因果/非因果的划分即为 $t/n \geq 0$ 和 $t/n < 0$ 。对于离散时间情形，自然非因果的取值为 $-1, -2, \dots$ ，并不包括 $n=0$ 。

例题 4.7 表明，在变换域分析中，相比单边 z 变换，双边 z 变换更为完备；但双边 z 变换也存在不足之处，即针对不同的时域函数，却可能导出相同的 z 域变换（只是收敛域不同），从而不易反推出原函数。所以，与 Laplace 变换相同，本书后续不做特殊说明， z 变换均指代单边 z 变换。

z 变换在离散时间信号与系统中应用广泛，不仅可以将系统输入输出关系的显式表达：线性卷积转化为乘积，还可以将其隐式表达：线性常系数差分方程转化为代数方程，同样精妙绝伦。经变换后的系统传递函数 $H(z)$ 很容易可以得到为

$$y[n] = x[n] * h[n] \Rightarrow H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} \quad (4.173)$$

其结构与连续情形的 Laplace 变换中的系统传递函数 $H(s)$ 完全一致。考虑到本章主要即描述数字音频相关知识，后续还会遇到许多离散时间情形的变换域分析，所以这里不再单独列举实例，直接对前述定义4.1中表征离散时间信号与系统的线性常系数差分方程一般形式(4.21)进行 z 变换，获取一般化结果，有

$$\mathcal{Z} \left\{ \sum_{k=0}^N a_k y[n-k] \right\} = \sum_{k=0}^N a_k \cdot \mathcal{Z} \{y[n-k]\} = Y(z) \cdot \sum_{k=0}^N a_k z^{-k} - \sum_{k=1}^N a_k \sum_{i=-k}^{-1} y[i] z^{-i} \quad (4.174)$$

$$\mathcal{Z} \left\{ \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] \right\} = \sum_{k=0}^M b_k \cdot \mathcal{Z} \{x[n-k]\} = X(z) \cdot \sum_{k=0}^N b_k z^{-k} \quad (4.175)$$

上两式考虑到 $x[n]$ 为因果信号，单/双边 z 变换相同，而 $y[n]$ 则不一定（零输入响应的非零初始输出状态源于 $n = -1, -2, \dots$ 时刻），所以分别采用了不同的时域平移。

将上两式代回公式(4.21)，整理后可以得到：

$$Y(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} X(z) + \frac{\sum_{k=1}^N a_k \sum_{i=-k}^{-1} y[i] z^{-i}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} \quad (4.176)$$

该式以一种统一的形式，描述了 z 域情形下以线性常系数差分方程表征的系统输入输出关系。当为零状态响应时，过去时刻的 $y[i] = 0, i = -1, \dots, -k$ ，导致后一项为零，此时前一项 $X(z)$ 的系数即为系统传递函数 $H(z)$ ；当为零输入响应时， $X(z) = 0$ ，导致前一项为零，此时后一项即为输出信号的 z 变换 $Y(z)$ 。在实际情况中，也会遇到两者同时存在的可能，即全响应，需要利用叠加原理，通过公式(4.176)的完整形式求解。

另外，公式(4.176)还表明，以线性常系数差分方程表征的连续时间信号与系统，在 z 域情形下同样均以有理分式呈现，即只包含整式和真分式。该性质也为导出信号与系统的原函数提供了数学上的便捷。

最后，综合前面所讲，也可以利用 z 变换对 LSI 系统的因果性和稳定性进行判别。首先针对因果性，已经明确了定理4.1的 LSI 系统因果性判据，在此基础上可以利用 z 变换给出另一种等效描述：

定理 4.9 (基于 z 变换的 LSI 系统因果性判据)

一个在 z 域以有理分式呈现的 LSI 系统满足因果性的充分必要条件为：系统传递函数 $H(z)$ 的收敛域位于 z 平面坐标轴最外层极点所在的圆形区域外。



证明 这里同样先从公式(4.176)导出系统传递函数 $H(z)$ ，并改写为如下“整式 + 真分式”的统一形式（以 z^{-1} 来构建有理函数，后续找寻原函数更为方便）：

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_M z^{-M}}{a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_N z^{-N}} = \sum_{k=0}^{M-N} C_k z^{-k} + \frac{\beta_0 + \beta_1 z^{-1} + \dots + \beta_{N-1} z^{-(N-1)}}{1 + \alpha_1 z^{-1} + \dots + \alpha_N z^{-N}} \quad (4.177)$$

其中，前一项涉及 z^{-1} 的 n 次方的线性组合， C_n 为各项系数。若 $M < N$ 时该项不存在；后一项则严格满足分子阶次小于分母阶次， α 和 β 为对应各项系数。

为了考察 LTI 系统的因果性，根据定理4.1，即 $h[n] = 0, n < 0$ ，所以需要利用双边 z 变换计算 $H(z)$ 对应的完整原函数，以便分析其时域取值是否满足要求。

首先是公式(4.177)的前一项，考虑到

$$\mathcal{Z}\{\delta[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n]z^{-n} = 1, \text{ ROC: 全部 } z \text{ 域} \quad (4.178)$$

而根据时域平移性质，有

$$\delta[n-k] \xrightarrow{\text{ZT}} z^{-k} \cdot 1 = z^{-k}, \text{ ROC: 全部 } z \text{ 域} \quad (4.179)$$

注意，上式考虑到时域平移性质的证明过程并未对收敛域有更多要求，只是增加了 z^{-k} 项，在这里会引入一个额外的 $z \rightarrow \infty$ 处的零点，但对收敛域并不影响，所以 $\delta[n-k]$ 的双边 z 变换收敛域仍为全部 z 域。

回到公式(4.177)的前一项， z^{-k} 的线性组合，自然收敛域也为全部 z 域；且由于 k 的取值为 $0, 1, \dots, M-N$ ，所以这里要么不产生平移，要么是右移，即 $\delta[n-k]$ 必然满足因果性要求。

接下来计算公式(4.177)后一项的原函数，根据部分分式展开法，假设分母关于 z 的 N 次多项式有 r 个 ξ_i 重根 a_i ，则有

$$\frac{\beta_0 + \beta_1 z^{-1} + \dots + \beta_{N-1} z^{-(N-1)}}{1 + \alpha_1 z^{-1} + \dots + \alpha_N z^{-N}} = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{\xi_i} \frac{B_{ij}}{(1-a_i z^{-1})^j} \quad (4.180)$$

其中， B_{ij} 为 N 个待定系数，可以通过比较系数法求得。

上式明显具有指数形式的原函数。但结合例题4.7可知，只有在明确其收敛域后才可以导出唯一的原函数；而若满足因果性，则指类型函数的 z 变换收敛域均为其极点所在的圆形区域外。再结合时域平移性质及迭代公式(4.166)，有

$$\frac{(n+k)!}{n!} a_i^n u[n] \xrightarrow{\text{ZT}} \frac{k!}{(1-a_i z^{-1})^{k+1}}, \text{ ROC: } |z| > |a_i| \quad (4.181)$$

上式可以从公式(4.166)出发，利用指数加权 (z 域尺度变换) 得到，所以其收敛域也将整体进行尺度变换，由 $|z| > 1$ 变为了 $|z| > |a_i|$ 。

将上式代回公式(4.180)，可以得到：

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{\xi_i} \frac{B_{ij}}{(1-a_i z^{-1})^j} \xrightarrow{\text{ZT}} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{\xi_i} B_{ij} \frac{(n+j-1)!}{n!(j-1)!} a_i^n u[n], \text{ ROC: } |z| > \max(|a_i|) \quad (4.182)$$

其中， \max 函数指代取最大值，对上式来说即，满足因果性的指类型函数的线性组合，其 z 变换收敛域应当取交集，为最外层极点所在的圆形区域外。

综合以上，考虑到上述推导前后结论均等价，则本定理得证，该判据为 LTI 系统满足因果性的充分必要条件。

接下来，针对稳定性，也已经明确了定理4.2的 LSI 系统稳定性判据，在此基础上可以利用 z 变换给出另一种等效描述：

定理 4.10 (基于 z 变换的 LSI 系统稳定性判据)

一个在 z 域以有理分式呈现的 LSI 系统满足稳定性的充分必要条件为：系统传递函数 $H(z)$ 的收敛域包含 $|z|=1$ ，即单位圆。



证明 根据前述定理4.9的证明过程可知，以有理分式呈现的系统传递函数 $H(z)$ 均可以

改写为如公式(4.177)的形式，并且将导出 $\delta[n-k]$ 和指数型函数两类原函数。由于根据定理4.2，LSI 系统满足稳定性的条件为系统响应 $h[n]$ 需满足

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty \quad (4.183)$$

而 $\delta[n-k]$ 和指数型函数的数学性质天差地别，所以需要分别考察这两类函数是否满足绝对可和条件。

首先是第一项的 $\delta[n-k]$ 部分，很明显满足绝对可和（求和为 1）。

接下来是第二项的指数型原函数部分，这里根据其收敛域的要求，划分为右边函数 ($n = 0, 1, \dots$) 和左边函数 ($n = -1, -2, \dots$) 两类来讨论。

对于满足因果性的右边函数来说，考察每一项指数型原函数的绝对可积，有

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| B_{ij} \frac{(n+j-1)!}{n!(j-1)!} a_i^n u[n] \right| &= \frac{B_{ij}}{(j-1)!} \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{(n+j-1)!}{n!} a_i^n \right| \\ &= \frac{B_{ij}}{(j-1)!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+j-1)!}{n!} |a_i^n| \end{aligned} \quad (4.184)$$

上式推导中最后的求和函数，是一类典型的幂级数求和案例，可以利用微积分中的 d'Alembert 判别法，即比值审敛法来判定级数的收敛性。

令 $\lambda_n = \frac{(n+j-1)!}{n!} |a_i^n|$ ，可知其为正项级数，计算

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+j}{n+1} |a_i| = |a_i| \quad (4.185)$$

根据比值审敛法，当 $|a_i| < 1$ 时，级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n$ 收敛。再结合公式(4.182)中关于因果指数型函数线性组合的 z 变换收敛域 ROC: $|z| > \max(|a_i|)$ ，可以得到此时满足稳定性的条件为系统传递函数 $H(z)$ 最外层的极点在 z 域的单位圆内。

至于非因果的左边函数，尽管与右边函数并非完全对称，但收敛域完全相反，易知此时满足稳定性的条件为系统传递函数 $H(z)$ 最内层的极点在 z 域的单位圆外。

合并起来，即无论 LSI 系统是否因果，其满足稳定性的条件等效于系统传递函数 $H(s)$ 的收敛域包含 $|z| = 1$ ，即单位圆。

综合以上，考虑到上述推导前后结论均等价，则本定理得证，该判据为 LSI 系统满足稳定性的充分必要条件。

 **笔记** 鉴于绝对可和刚好是离散时间 Fourier 变换的前置条件，对应 z 变换中的 $|z| = r = 1$ 。但定理4.10却不能直接通过离散时间 Fourier 变换的收敛性质证明，因为绝对可和只是离散时间 Fourier 变换的充分非必要条件。

4.2.5 频率响应

在音频乃至整个信号与系统领域，均需要探究一个 LTI/LSI 系统对不同频率信号的响应情况，从而提前了解系统在各个频率分量上的输出表现。根据前述章节的变换域分析基础，接下来可以直接导出频率响应的理论模型。

在连续/离散时间信号与系统中，分别用单一频率的复指数函数 $e^{j\omega t}$ 和 $e^{j\Omega n}$ 作为

试探信号，结合线性卷积关系式，计算对应的系统输出，有

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{j\omega(t-\tau)} d\tau = \left(\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \right) e^{j\omega t} = H(j\omega) e^{j\omega t} \quad (4.186)$$

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] e^{j\Omega(n-k)} = \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] e^{-j\Omega k} \right) e^{j\Omega n} = H(e^{j\Omega}) e^{j\Omega n} \quad (4.187)$$

上两式表明，单一频率的复指数信号可以视作系统的特征函数，输入输出具有完全相同的信号频率，只是相差一个复系数。对于连续时间系统来说，复系数 $H(j\omega)$ 刚好为系统响应函数 $h(t)$ 的连续时间 Fourier 变换 (CFT)，也可以考虑成系统传递函数 $H(s)$ ，令 $s=j\omega$ 后的特殊情形（所以自变量写作 $j\omega$ ）；而对于离散时间系统来说，复系数 $H(e^{j\Omega})$ 则刚好为系统响应函数 $h[n]$ 的离散时间 Fourier 变换 (DTFT)，也可以考虑成系统传递函数 $H(z)$ ，令 $z=e^{j\Omega}$ 后的特殊情形（所以自变量写作 $e^{j\Omega}$ ）。这种数学结构上的精妙设计，为系统频率响应的分析带来了极大的便利。

进一步，以连续时间信号与系统为例（离散时间信号与系统类似），若令

$$H(j\omega) = |H(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)} \quad (4.188)$$

其中， $|H(j\omega)|$ 为复平面上 $H(j\omega)$ 的模长， $\varphi(\omega)$ 为幅角，也可以表示成 $\angle H(j\omega)$ 。

考虑单一的余弦输入信号 $x(t) = \cos \omega t = \Re\{e^{j\omega t}\}$ ，以及根据线性卷积的线性性质，可以得到如下复信号输入输出关系：

$$\begin{aligned} y(t) &= [\Re\{x(t)\} + j \cdot \Im\{x(t)\}] * h(t) = \Re\{x(t)\} * h(t) + j \cdot \Im\{x(t)\} * h(t) \\ &= \Re\{y(t)\} + j \cdot \Im\{y(t)\} \end{aligned} \quad (4.189)$$

即实部输入对应实部输出，虚部输入对应虚部输出，则有

$$y(t) = \Re\{H(j\omega) e^{j\omega t}\} = |H(j\omega)| \cdot \Re\{e^{j[\omega t + \varphi(\omega)]}\} = |H(j\omega)| \cdot \cos[\omega t + \varphi(\omega)] \quad (4.190)$$

同理，若考虑任意相位 θ 的余弦信号 $x(t) = \cos(\omega t + \theta)$ ，则系统输出为

$$y(t) = |H(j\omega)| \cdot \cos[\omega t + \theta + \varphi(\omega)] \quad (4.191)$$

所以，在 LTI/LSI 系统中，任意单一频率的输入信号将导出相同频率的输出信号，多出的复系数 $H(j\omega)$ 和 $H(e^{j\Omega})$ ，其模长代表信号幅值的增益或衰减（倍数），其幅角代表信号相位的提前或延迟。

正是由于如此多良好的数学性质， $H(j\omega)$ 和 $H(e^{j\Omega})$ 即被定义为 LTI/LSI 系统的频率响应，可以完全描述系统输入输出的频率关系。

 **笔记** 频率响应的导出，需要 $h(t)/h[n]$ 分别具备连续/离散时间 Fourier 变换的条件，等价于 LTI/LSI 系统满足稳定性；反之若系统不稳定，则无法构建频率响应关系。

定义 4.6 (频率响应)

在满足稳定性要求的 LTI/LSI 系统中，分别令系统传递函数 $H(s)/H(z)$ 中的 $s=j\omega$ 和 $z=e^{j\Omega}$ ，即可得到对应的频率响应 $H(j\omega)$ 和 $H(e^{j\Omega})$ 。

其中，模长 $|H(j\omega)|$ 和 $|H(e^{j\Omega})|$ 称作幅频响应，幅角 $\angle H(j\omega)$ 和 $\angle H(e^{j\Omega})$ 称作相频响应，分别代表输入输出信号的幅值变化和相位变化，而频率将保持不变。



例题 4.8 试分析线性卷积、Fourier 变换和频率响应之间数学结构的关联。

解 以连续时间信号与系统为例（离散时间信号与系统类似），根据连续时间 Fourier 变换（CFT）的定义2.2，将输入信号 $x(t)$ 写为

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi f t} df = \int_{-\infty}^{\infty} [X(f) df] e^{j2\pi f t} \quad (4.192)$$

上式的写法即将 $x(t)$ 视作一系列单一频率的复指数函数 $e^{j2\pi f t}$ （即 $e^{j\omega t}$ ）的线性组合（积分转为无穷项的求和），每一项的系数为 $X(f) df$ 。

同理可将输出信号 $y(t)$ 写为上式类似的结构，并考虑到系统输入输出关系 $y(t) = x(t) * h(t)$ 和时域卷积定理4.3，可知：

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} [Y(f) df] e^{j2\pi f t} = \int_{-\infty}^{\infty} [X(f) H(f) df] e^{j2\pi f t} \quad (4.193)$$

上式同样可以将 $y(t)$ 视作一系列单一频率的复指数函数 $e^{j2\pi f t}$ 的线性组合。对比公式(4.192)和(4.193)，并结合线性卷积的线性性质，进一步有

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t) * h(t) = \left(\int_{-\infty}^{\infty} [X(f) df] e^{j2\pi f t} \right) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} [X(f) df] \cdot [e^{j2\pi f t} * h(t)] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [X(f) H(f) df] e^{j2\pi f t} \end{aligned} \quad (4.194)$$

上式严格成立，所以对于每一项单一频率的复指数输入信号 $e^{j2\pi f t}$ ，均只能对应频率不会发生变化，只是系数扩大了 $H(f)$ （即 $H(j\omega)$ ）倍的输出信号。而 $H(f)$ 由时域卷积定理4.3得到，即为系统响应函数 $h(t)$ 的连续时间 Fourier 变换。

所以，频率响应表达式刚好为系统响应函数 $h(t)/h[n]$ 的 Fourier 变换，从原理上讲是必然的结果。

根据以上分析可以总结出：系统响应函数 $h(t)/h[n]$ 反映了系统的时域特性，而频率响应函数 $H(j\omega)/H(e^{j\Omega})$ 则反映了系统的频域特性。系统的这种时/频对应关系，与信号是完全一致的，均由 Fourier 变换建立相互联系。

在实际计算中，想要直接化为类似公式(4.188)的结构是较为困难的，所以为了得到幅频响应和相频响应的具体表达式，一般还是利用复数域的几何关系，通过下两式来获取（以连续情形为例）：

$$|H(j\omega)| = \sqrt{\Re\{H(j\omega)\}^2 + \Im\{H(j\omega)\}^2} \quad (4.195)$$

$$\angle H(j\omega) = \varphi(\omega) = \arctan \frac{\Im\{H(j\omega)\}}{\Re\{H(j\omega)\}} \quad (4.196)$$

性质 幅频响应和相频响应的基本数学性质：

1. 在实数轴上，幅频响应相对于自变量 ω/Ω 为偶函数，相频响应则为奇函数；
2. 特别针对离散时间系统，其频率响应相对于自变量 Ω 还是周期为 2π 的周期函数，幅频响应与相频响应同理。

证明 以离散时间信号与系统为例（连续时间信号与系统类似），结合公式(4.187)，将频率响应 $H(e^{j\Omega})$ 展开为实部和虚部，有

$$H(e^{j\Omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] e^{-j\Omega k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] \cos \Omega k - j \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] \sin \Omega k \quad (4.197)$$



所以

$$\Re\{H(e^{j\Omega})\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] \cos \Omega k, \quad \Im\{H(e^{j\Omega})\} = - \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] \sin \Omega k \quad (4.198)$$

可以看出, $\Re\{H(e^{j\Omega})\}$ 为 Ω 的偶函数, 而 $\Im\{H(e^{j\Omega})\}$ 为 Ω 的奇函数; 进一步根据公式(4.195)和(4.195)可知, 幅频响应为 Ω 的偶函数, 而相频响应为 Ω 的奇函数。

特别针对离散时间系统, 由于 $e^{j\Omega k}, \cos \Omega k, \sin \Omega k$ 相对于 Ω 还是周期为 2π 的周期函数, 所以其频率相应、幅频/相频响应也均是周期为 2π 的周期函数。

基于以上性质, 想要具体了解一个系统的幅频/相频响应情况, 只需考察其频率大于零的部分即可 (对于离散时间系统, 可以进一步缩小为 $[0, \pi]$)。

例题 4.9 试分析例题4.1中两类 RC 电路的幅频响应和相频响应。

解 根据例题4.6的求解, 图4.3(a)所示的 RC 串联电路的系统传递函数 $H(s)$ 为

$$H(s) = \frac{\frac{1}{RC}}{s + \frac{1}{RC}} = \frac{1}{1 + \tau s}, \quad \text{ROC: } \Re\{s\} > -\frac{1}{\tau} \quad (4.199)$$

其中, $\tau = RC$ 为时间常数。可以看到, 该 $H(s)$ 明显满足定理4.8的稳定性条件。

对上式令 $s = j\omega$, 可得到图4.3(a)所示的 RC 串联电路的频率响应 $H(j\omega)$:

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + j\tau\omega} = \frac{1}{1 + (\tau\omega)^2} - j \frac{\tau\omega}{1 + (\tau\omega)^2} \quad (4.200)$$

根据公式(4.195)和(4.195), 计算出其幅频响应和相频响应分别为

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\tau\omega)^2}} \quad (4.201)$$

$$\angle H(j\omega) = \varphi(\omega) = -\arctan(\omega\tau) \quad (4.202)$$

令时间常数 $\tau = 1$, 分别绘制出幅频曲线和相频曲线图, 如下:

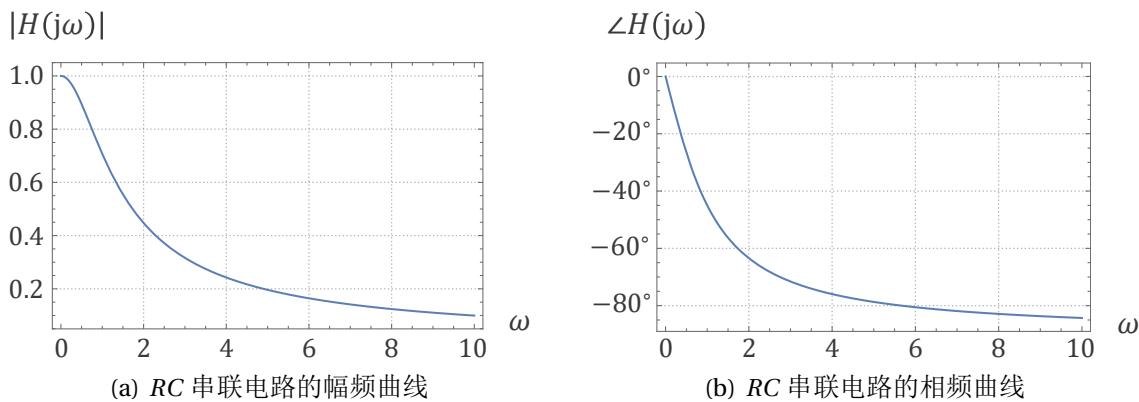


图 4.12: RC 串联电路的频率响应曲线图

可以看到, 上图其实并不能反映出足够的有效信息。结合章节1.7.3中的定理1.5, 以及章节2.3关于频率与音高认知的分析, 这里更适合将自变量 ω 转换为对数形式 $\lg \omega$, 此时相差 10 倍的 (角) 频率将以线性尺度呈现; 特别针对幅频曲线, 由于纵轴为输入输出的幅度比值, 也很容易联想到采用对数形式进行转换, 用类似定义1.7中声强/声压级的方式计算出 dB 值。

对于连续时间系统的频率响应，对数频率-对数幅值的幅频曲线，以及对数频率-线性相位的相频曲线，也被统一称作伯德（Bode）图¹。

下图重新以 Bode 图的形式绘制了上述幅频曲线和相频曲线，可以看到不同计算方式下曲线之间的差异：

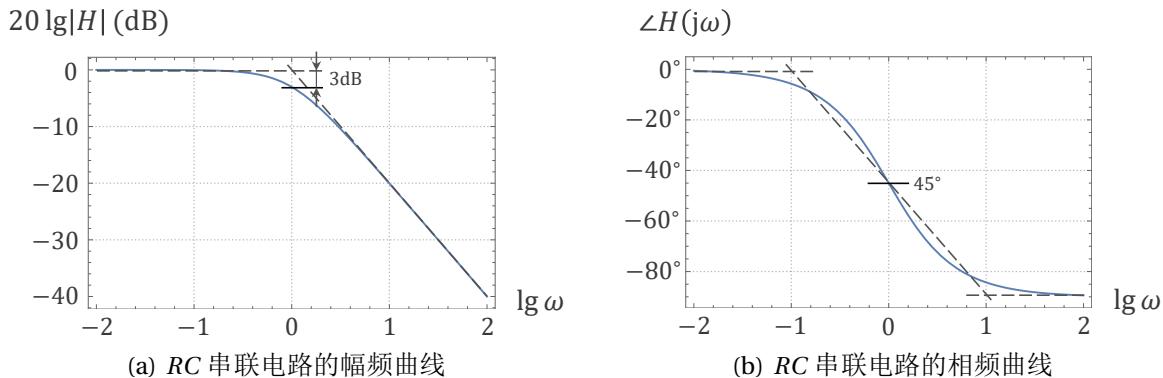


图 4.13: RC 串联电路的频率响应 Bode 图

图4.13(a)表明，当（角）频率小于1时，幅值（增益比）基本一直稳定在0 dB，即输入输出持平；当越过 $\omega=1$ 处后，则开始急剧衰减，体现出明显的高频抑制效果。

一般来说，对于公式(4.201)，可以采用如下线性函数拟合：

$$20 \lg |H(j\omega)| = -10 \lg [(\omega\tau)^2 + 1] \approx \begin{cases} -10 \lg 1 = 0, & \omega \leq \frac{1}{\tau} \\ -20 (\lg \omega + \lg \tau), & \omega \geq \frac{1}{\tau} \end{cases} \quad (4.203)$$

在 $\omega=\frac{1}{\tau}$ 的转折频率处，上式的误差只有 $10 \lg 2 \approx 3$ dB。

再分析图4.13(b)，当（角）频率小于0.1和大于10时，相位变化分别基本稳定在 0° 和 90° ；而0.1到10的区间内，则大致呈现出线性递减的趋势。结合公式(4.191)可知，线性相位也是一种理想化的相频模型，可以实现信号的无失真延迟传输（例如假使 $\varphi(\omega) = -\omega t_0$, $|H(j\omega)| = 1$ ，则刚好满足 $y(t) = x(t - t_0)$ 。离散情形也类似）。

一般来说，对于公式(4.202)，也可以采用如下线性函数拟合：

$$\angle H(j\omega) = \varphi(\omega) \approx \begin{cases} 0, & \omega \leq \frac{0.1}{\tau} \\ -\frac{\pi}{4} [\lg(\omega\tau) + 1], & \frac{0.1}{\tau} \leq \omega \leq \frac{10}{\tau} \\ -\frac{\pi}{2}, & \omega \geq \frac{10}{\tau} \end{cases} \quad (4.204)$$

在 $\omega=\frac{1}{\tau}$ 的对称点处，上式无误差，对应相位延迟为 45° 。

整体来看，如图4.3(a)所示的 RC 串联电路，是一类典型的低通滤波器。通过调整时间常数 τ ，还可以改变其频率响应性质，滤除特定的高频区间。

而针对图4.3(b)所示的 RC 并联电路，根据例题4.6的分析，很明显其系统传递函数与 RC 串联电路的大同小异，频率响应也几近相同，这里不做赘述。

¹离散时间系统中，考虑到频率响应是周期为 2π 的周期函数，尽管纵轴的幅值变化也常采用对数（dB）来描述，但一般横轴仍沿用原始的线性频率。

从该例题还可提炼总结出：当 LTI/LSI 系统带有电容等类似“容器”性质的组件时，均可以起到“缓冲”信息的作用，具有滤除高频信号的功能。再进一步抽象类比，人生亦是如此。尽管人类作为系统并非线性时不变，但以上结论仍具有普适的借鉴意义：正所谓“宰相肚里能撑船”，只有海纳百川，心胸宽广，在面对变幻莫测、高速迭代的现实世界，才能做到泰然自若，波澜不惊。

例题 4.10 试通过频率响应分析音响系统的工作原理。

解 音响系统作为常见的输出换能器，其基本电-声转换原理已在章节 4.1 进行简要介绍。特别对于高保真（HIFI）或监听等类型音箱，为了能够最大限度地还原和重现真实的声音，需要在消音室等“纯净”环境的测试条件下，做到“平等对待”尽量宽广的频段声音信号；从频率响应上来看，即幅频曲线要尽可能“平直”，不能出现平衡度的扭曲，否则听感上将出现音染或失真。

然而，事实上完美的系统是不存在的，所以音响系统需要结合各类滤波器（参见后续章节 4.4.3）和均衡器（参见后续章节 6.1.1）组件的级联（串联），来补偿扬声器的频率响应特性。具体来说，当不同的系统级联时，上一时刻的输出信号即为下一时刻的输入信号，对于单一频率的输入输出信号，可以得到如下频率响应关系式：

$$x_n(t) = y_{n-1}(t) = H_{n-1}(j\omega) \cdot x_{n-1}(t) \quad (4.205)$$

对上式不断迭代至 $n=1$ ，并结合公式(4.188)，有

$$\begin{aligned} y_n(t) &= H_n(j\omega) \cdot x_n(t) = [H_n(j\omega) H_{n-1}(j\omega) \cdots H_1(j\omega)] \cdot x_1(t) \\ &= |H_n(j\omega)| |H_{n-1}(j\omega)| \cdots |H_1(j\omega)| e^{j[\varphi_n(\omega) + \varphi_{n-1}(\omega) + \cdots + \varphi_1(\omega)]} \cdot x_1(t) \end{aligned} \quad (4.206)$$

上式表明，级联系统的输入输出频率响应，其幅值为累乘关系，相位为累加关系；再结合 Bode 图主要采用对数幅值，累乘变为累加，所以无论为何种级联形式，均可以用简单的线性相加来计算其整体的频率响应特性。

以上分析主要针对单一的全频扬声器单元。鉴于物理因素制约，固定尺寸的全频音箱实际很难覆盖完整的频率动态范围，所以音响系统普遍采用扬声器的分频组合，让输入信号通过所设定的滤波器，划分为不同频段的信号通道，再发送给相应的扬声器单元分别进行输出。为了能够对每个扬声器单元单独处理，绝大多数音响系统均采用并联型分频结构，此时不同扬声器单元的频率响应可以视作不同区间的独立函数，合并在一起将分段函数组成最终完整平滑的幅频曲线。

音响系统发展至今，在高频延展方面已不再是问题，可以做到远远超出人耳听觉上限的 20 kHz；但低频下潜仍然困难重重。究其原因，主要在于如章节 1.7.3 所述，人耳对低频声音的灵敏度逐渐下降，所以必须施加更大的声压变化来产生足够的响度。而根据章节 1.7.1 中的公式(1.255)或(1.262)可知，声压变化 dp 与气体体积变化 dV 成正比，所以需要设计更大的箱体尺寸，承载足够功率的磁路系统，推动等效振动质量更大的振膜，产生足够的冲程来推动更多的空气体积。俗话说“底大一级压死人”，这便是小尺寸音箱，低频下潜能力均较为有限的根源所在。

需指出，以上关于音响系统的低音表现是围绕物理声学所做出的判断，而非如耳

机或音箱的响度补偿，采用均衡器等电声学方式增大音量来达到类似低频增强的效果。只需实际亲身感受一下两者的差别，便会知道，通过电声学手段拉高低频，虽然可以在一定程度上补偿低音的缺失，但更多只会带来一种音量很猛的“轰头”感；而通过物理声学手段实现的大尺寸低音单元，则可以释放出自然、宽松的低频声音，同时具有充足的爆发力和能量感。

最后，前面关于音响系统的频率响应分析，只探讨了幅频曲线，对相频曲线似乎并无要求。事实上，关于人耳究竟能否分辨出声音相位的差异，一直存在较大的争议。不过对于本书所涉及的“乐音”领域，从前述章节2.3等也可粗略看出，相位并不是影响音响系统听音效果的关键因素，所以这里并未做详细探讨。

在章节4.2.3和4.2.4中，已经分别明确了极点在LTI/LSI系统稳定性中的重要作用（零点与系统稳定性不相关）。本节将在此基础上，进一步剖析极/零点在频率响应中的综合特性。首先，由于频率响应即为系统传递函数 $H(s)/H(z)$ 在 $s = j\omega$ 和 $z = e^{j\Omega}$ 处的特例，所以可以很直观得到如下结论：

性质 频率响应中极/零点的基本性质：

- 极点反映了 LTI/LSI 系统对某些特定频率的放大作用（针对不稳定系统），即对于极点处的输入频率，频率响应趋于无穷，系统将表现出强烈的响应（对应系统的自然频率，或固有频率，具体详见后续例题4.11）；
- 零点则反映了 LTI/LSI 系统对某些特定频率的抑制作用，即对于零点处的输入频率，频率响应为零，系统输出将不包含这些频率成分。

特别对于以有理分式呈现的系统传递函数 $H(s)/H(z)$ ，还可以根据其所有极/零点的分布，借助复平面的几何关系，大致了解幅频响应和相频响应的变化趋势。

具体来说，在连续时间信号与系统中，先从公式(4.130)导出系统传递函数 $H(s)$ ，再通过因式分解，可将其转化为如下形式：

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k s^k}{\sum_{k=0}^N a_k s^k} = C_0 \frac{(s - \alpha_1)(s - \alpha_2) \cdots (s - \alpha_M)}{(s - \beta_1)(s - \beta_2) \cdots (s - \beta_N)} \quad (4.207)$$

其中， C_0 为常系数， $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_M$ 为 M 个零点， $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_N$ 为 N 个极点。

对于上式中每一项连乘项，根据几何关系，均可以转化为复平面上从该极/零点指向 s 点的向量。当 $s = j\omega$ 时（即 s 点位于虚数轴上），若令 $j\omega - \alpha_i = r_i e^{j\varphi_i}$, $j\omega - \beta_j = d_j e^{j\phi_j}$ ，则可以得到此时频率响应 $H(j\omega)$ 的表达式：

$$\begin{aligned} H(j\omega) &= H(s)|_{s=j\omega} = C_0 \frac{(r_1 e^{j\varphi_1})(r_2 e^{j\varphi_2}) \cdots (r_M e^{j\varphi_M})}{(d_1 e^{j\phi_1})(d_2 e^{j\phi_2}) \cdots (d_N e^{j\phi_N})} \\ &= C_0 \frac{r_1 r_2 \cdots r_M}{d_1 d_2 \cdots d_N} e^{j[(\varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_M) - (\phi_1 + \phi_2 + \cdots + \phi_N)]} \end{aligned} \quad (4.208)$$

假定 $C_0 > 0$ ，可进一步推出幅频响应 $|H(j\omega)|$ 为

$$|H(j\omega)| = C_0 \frac{r_1 r_2 \cdots r_M}{d_1 d_2 \cdots d_N} = C_0 \frac{\text{零点到 } j\omega \text{ 的长度乘积}}{\text{极点到 } j\omega \text{ 的长度乘积}} \quad (4.209)$$

相频响应 $\angle H(j\omega)$ 为

$$\begin{aligned}\angle H(j\omega) &= (\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_M) - (\phi_1 + \phi_2 + \dots + \phi_N) \\ &= \text{零点到 } j\omega \text{ 的角度之和} - \text{极点到 } j\omega \text{ 的角度之和}\end{aligned}\quad (4.210)$$

若 $C_0 < 0$, 上两式中幅频响应 $|H(j\omega)|$ 将会增加一个负号, 相频响应 $\angle H(j\omega)$ 则会增加一个附加相位 π (根据相位定义, $[0, 2\pi]$ 内有 $-1 = e^{j\pi}$)。

而在离散时间信号与系统中, 也可以先从公式(4.176)导出系统传递函数 $H(z)$, 再通过因式分解, 将其转化为如下形式:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} = C_0 z^{N-M} \frac{(z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \cdots (z - \alpha_M)}{(z - \beta_1)(z - \beta_2) \cdots (z - \beta_N)} \quad (4.211)$$

同理, C_0 为常系数, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_M$ 为 M 个零点, $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_N$ 为 N 个极点。

对于上式中每一项连乘项, 根据几何关系, 也可以转化为复平面上从该极/零点指向 z 点的向量 (特别对于 z^{N-M} 项, 则为从原点指向 z 点的向量)。当 $z = e^{j\Omega}$ 时 (即 z 点位于单位圆上), 若令 $e^{j\Omega} - \alpha_i = r_i e^{j\varphi_i}$, $e^{j\Omega} - \beta_j = d_j e^{j\phi_j}$, 则可以得到此时频率响应 $H(e^{j\Omega})$ 的表达式:

$$\begin{aligned}H(e^{j\Omega}) &= H(z)|_{z=e^{j\Omega}} = C_0 e^{j(N-M)\Omega} \frac{(r_1 e^{j\varphi_1})(r_2 e^{j\varphi_2}) \cdots (r_M e^{j\varphi_M})}{(d_1 e^{j\phi_1})(d_2 e^{j\phi_2}) \cdots (d_N e^{j\phi_N})} \\ &= C_0 \frac{r_1 r_2 \cdots r_M}{d_1 d_2 \cdots d_N} e^{j[(N-M)\Omega + (\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_M) - (\phi_1 + \phi_2 + \dots + \phi_N)]}\end{aligned}\quad (4.212)$$

假定 $C_0 > 0$, 可进一步推出幅频响应 $|H(e^{j\Omega})|$ 为

$$|H(e^{j\Omega})| = C_0 \frac{r_1 r_2 \cdots r_M}{d_1 d_2 \cdots d_N} = C_0 \frac{\text{零点到 } e^{j\Omega} \text{ 的长度乘积}}{\text{极点到 } e^{j\Omega} \text{ 的长度乘积}} \quad (4.213)$$

相频响应 $\angle H(e^{j\Omega})$ 为

$$\begin{aligned}\angle H(e^{j\Omega}) &= (N - M)\Omega + (\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_M) - (\phi_1 + \phi_2 + \dots + \phi_N) \\ &= \text{原点到 } e^{j\Omega} \text{ 的角度的 } (N - M) \text{ 倍} + \\ &\quad \text{零点到 } e^{j\Omega} \text{ 的角度之和} - \text{极点到 } e^{j\Omega} \text{ 的角度之和}\end{aligned}\quad (4.214)$$

同理, 若 $C_0 < 0$, 上两式中幅频响应 $|H(e^{j\Omega})|$ 将会增加一个负号, 相频响应 $\angle H(e^{j\Omega})$ 则会增加一个附加相位 π 。

下图4.14展示了以上理论分析的图形化表示。图4.14(a)首先描述了 s/z 域中的基本向量关系, 然后图4.14(b)和4.14(c)分别反映了 s 域和 z 域中随 ω/Ω 变化的各向量变化趋势。在 s 域中, 随着 ω 增大, $j\omega$ 点沿虚数轴逐渐上移, 此时所有极/零点处的向量也会随之改变, 通过其模长和幅角的变化, 再结合公式(4.209)和(4.210), 可大致给出连续情形的幅频曲线和相频曲线走向; 而在 z 域中, 随着 Ω 增大, $e^{j\Omega}$ 点则沿单位元旋转, 此时所有极/零点处的向量也会随之改变, 同理通过其模长和幅角的变化, 再结合公式(4.213)和(4.214), 可大致给出离散情形的幅频曲线和相频曲线走向。另外, 根据几何关系还可轻易看出, 离散情形的频率响应是周期为 2π 的周期函数。

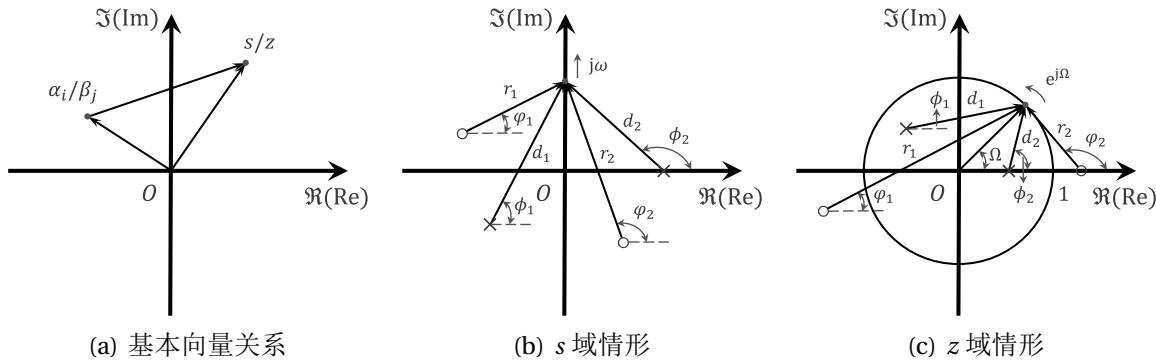


图 4.14: 频率响应与极/零点的几何关系示意图

笔记 以上关于频率响应与极/零点的几何分析，也完全适用于重极/零点和 $\alpha_i/\beta_j=0$ 的情形。事实上，离散情形的表达式(4.211)中， z^{N-M} 即为原点处的重极/零点向量，当然具体为极点还是零点取决于 M 与 N 的大小。

例题 4.11 试分析 LTI/LSI 系统在固有频率（自然频率）处产生的共振现象。

解 这里以最简单的单自由度无阻尼弹性系统为例进行说明。前述章节1.2.1曾介绍过弹簧振子一维振动所满足的 Hooke 定律，若此时将弹性力 $F_T(t)$ 视作外力，则其与弹簧振子的运动位移 $u(t)$ 方向相反（即位移增大为拉伸力，位移减小为压缩力），有

$$F_T(t) = -k \cdot u(t) \quad (4.215)$$

再根据附录B的 Newton 第二定律和 d'Alembert 原理，可以建立其与外部施加力 $F(t)$ 所满足的动力学平衡方程（假定加速度沿外部施加力方向为正）：

$$F_T + F(t) + F_I = F_T + F(t) - ma = F_T + F(t) - m \frac{d^2 u}{dt^2}(t) = 0 \quad (4.216)$$

对于该振动系统，将外部输入力作为系统输入，即 $x(t) = F(t)$ ，而振动位移为系统输出，即 $y(t) = u(t)$ ，联立上两式，可得该 LTI 系统所满足的微分方程形式为

$$m \frac{d^2 y}{dt^2}(t) + k \cdot y(t) - x(t) = 0 \quad (4.217)$$

上式为一类典型的二阶线性常系数微分方程。

首先考察下该系统的零输入响应特性。此时 $x(t)=0$ ，即没有外部施加力作用；若非零初始输出状态为 $y(0)=u_0$, $y'(0)=0$ ，即弹性系统最初被拉伸至 u_0 处，且速度为零，对上式(4.217)两边取 Laplace 变换，有

$$m \cdot [s^2 Y(s) - s \cdot y(0) - y'(0)] + k Y(s) - X(s) = (ms^2 + k) Y(s) - ms \cdot u_0 = 0 \quad (4.218)$$

若令 $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ ，进一步推导可得：

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{ms \cdot u_0}{ms^2 + k} = \frac{s \cdot u_0}{s^2 + \omega_0^2} = \frac{u_0}{2} \left(\frac{1}{s + j\omega_0} + \frac{1}{s - j\omega_0} \right) \\ \stackrel{\text{u-LT}}{\longleftrightarrow} y(t) &= \frac{u_0}{2} (e^{-j\omega_0 t} + e^{j\omega_0 t}) = u_0 \cos \omega_0 t, \quad \text{ROC: } \Re\{s\} > 0 \end{aligned} \quad (4.219)$$

上式表明，在不施加外部输入力的情况下，只借助零时刻之前积累的弹性位移，单自由度无阻尼弹性系统将会永无止境地以角频率 ω_0 振动下去，不会收敛，也不会

发散。所以，参数 ω_0 被定义为系统的自然频率，或固有频率，表征了一个系统振动状态的基本性质。

再考察下该系统的零状态响应特性。此时 $y(0) = 0, y'(0) = 0$ ，即弹性系统最初位移和速度均为零，同理对公式(4.217)两边取 Laplace 变换，有

$$(ms^2 + k)Y(s) - X(s) = 0 \quad (4.220)$$

可得其系统传递函数 $H(s)$ 为

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{ms^2 + k} = \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{s^2 + \omega_0^2} = \frac{j}{2m\omega_0} \left(\frac{1}{s+j\omega_0} - \frac{1}{s-j\omega_0} \right) \\ \xleftrightarrow{\text{u-LT}} h(t) &= \frac{j}{2m\omega_0} (e^{-j\omega_0 t} - e^{j\omega_0 t}) = \frac{\omega_0}{k} \sin \omega_0 t, \quad \text{ROC: } \Re\{s\} > 0 \end{aligned} \quad (4.221)$$

即，该系统响应函数 $h(t)$ 表现为一个基本的振荡形态。另外从上式可知，该系统其实并不满足定理4.8的稳定性条件（极点在虚数轴上，收敛域并不包含虚数轴），是一个不稳定系统。不过，若仍然考虑此时系统的频率响应，令 $s=j\omega$ ，计算其在极点的取值，有

$$s^2 + \omega_0^2|_{s=j\omega} = -\omega^2 + \omega_0^2 = 0 \Rightarrow \omega = \pm \omega_0 \quad (4.222)$$

可以发现，刚好在固有频率（自然频率）处²，系统的频率响应趋于无穷，无法收敛，这也是为什么频率响应的构建必须满足系统稳定性要求的原因。

为了进一步分析这种不稳定频率响应的表现形式，令此时外部输入力为

$$x(t) = F_0 \cos \omega_0 t \xleftrightarrow{\text{u-LT}} X(s) = \frac{F_0}{2} \left(\frac{1}{s+j\omega_0} + \frac{1}{s-j\omega_0} \right), \quad \text{ROC: } \Re\{s\} > 0 \quad (4.223)$$

即输入信号采用与系统固有频率相同的简谐振动模式。再结合系统传递函数 $H(s)$ 的表达式(4.221)，计算系统输出 $y(t)$ ，有

$$\begin{aligned} Y(s) &= X(s)H(s) = \frac{F_0 \cdot j}{4m\omega_0} \left[\frac{1}{(s+j\omega_0)^2} - \frac{1}{(s-j\omega_0)^2} \right] \\ \xleftrightarrow{\text{u-LT}} y(t) &= \frac{F_0 \cdot j}{4m\omega_0} [t e^{-j\omega_0 t} - t e^{j\omega_0 t}] = \frac{F_0 \omega_0 t}{2k} \sin \omega_0 t, \quad \text{ROC: } \Re\{s\} > 0 \end{aligned} \quad (4.224)$$

上式在求解重极点形式的原函数时，用到了章节4.2.3中公式(4.135)的结论。可以看到，当外部输入力以固有频率施加时，系统并不会直接崩溃，而是在简谐振动的基础上添加了线性增长项 t ，让系统输出逐渐趋于无穷的不稳定状态。这便是现实生活中，共振现象的产生缘由。

在离散时间信号与系统中，也存在类似的情形。若直接对连续时间系统响应函数 $h(t)$ 的表达式(4.221)采用 $t = nT_s$ 的离散化处理，结合频率关系式(4.54)，可得此时离散时间系统响应函数 $h[n]$ 为

$$h[n] = \frac{\Omega_0}{kT_s} \sin \Omega_0 n \quad (4.225)$$

考虑到根据例题4.7的分析，易知

$$a^n \xleftrightarrow{\text{u-ZT}} \frac{1}{1 - az^{-1}}, \quad \text{ROC: } |z| > |a| \quad (4.226)$$

²从数学上讲， $-\omega_0$ 也适用于公式(4.219)，只是实际来说，一般只关注频率大于零的部分。

所以，对 $h[n]$ 求取 z 变换，可得离散时间系统传递函数 $H(z)$ 为

$$\begin{aligned} h[n] &= \frac{\Omega_0}{kT_s} \sin \Omega_0 n = \frac{j\Omega_0}{2kT_s} (e^{-j\Omega_0 n} - e^{j\Omega_0 n}) \\ \xrightarrow{u-ZT} H(z) &= \frac{j\Omega_0}{2kT_s} \left(\frac{1}{1 - e^{-j\Omega_0} \cdot z^{-1}} - \frac{1}{1 - e^{j\Omega_0} \cdot z^{-1}} \right), \quad \text{ROC: } |z| > 1 \end{aligned} \quad (4.227)$$

将对应的外部输入力也离散化，有

$$x[n] = F_0 \cos \Omega_0 n \xrightarrow{u-ZT} X(z) = \frac{F_0}{2} \left(\frac{1}{1 - e^{-j\Omega_0} \cdot z^{-1}} + \frac{1}{1 - e^{j\Omega_0} \cdot z^{-1}} \right), \quad \text{ROC: } |z| > 1 \quad (4.228)$$

则此时系统输出 $y[n]$ 可计算得到为

$$\begin{aligned} Y(z) = X(z)H(z) &= \frac{F_0 \cdot j\Omega_0}{4kT_s} \left[\frac{1}{(1 - e^{-j\Omega_0} \cdot z^{-1})^2} - \frac{1}{(1 - e^{j\Omega_0} \cdot z^{-1})^2} \right] \\ \xrightarrow{u-ZT} y[n] &= \frac{F_0 \cdot j\Omega_0}{4kT_s} [(n+1)e^{-j\Omega_0 n} - (n+1)e^{j\Omega_0 n}] \\ &= \frac{F_0 \Omega_0 (n+1)}{2kT_s} \sin \Omega_0 n, \quad \text{ROC: } |z| > 1 \end{aligned} \quad (4.229)$$

同理，上式在求解重极点形式的原函数时，用到了章节4.2.4中公式(4.181)的结论。可以看到，在离散情形下，当外部输入力以固有频率施加时，系统也并不会直接崩溃，而是在简谐振动的基础上添加了线性增长项 $(n+1)$ ，让系统输出逐渐趋于无穷的不稳定状态。

下图4.15分别给出了以上连续/离散时间输出信号 $y(t)$ 的示意图，可以观察到这种逐渐发散的函数变化：

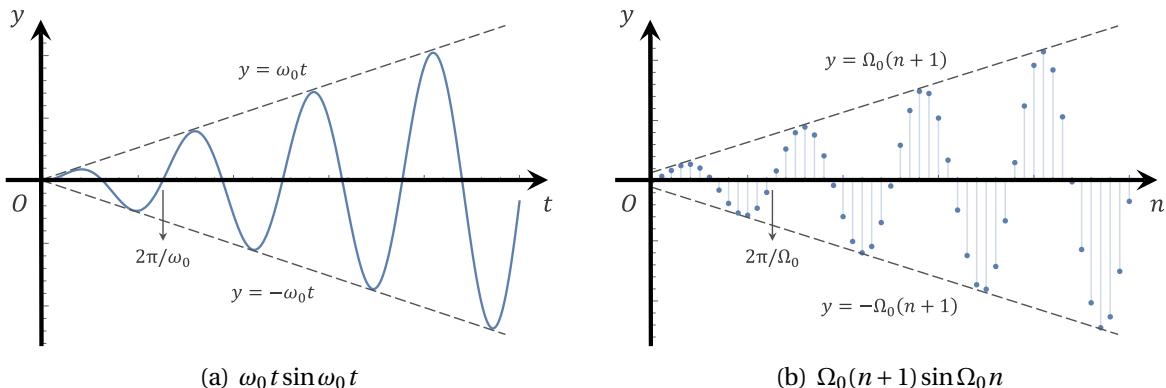


图 4.15: LTI/LSI 系统在共振点处的输出信号示意图

从上述例题4.11中可以发现，尽管系统并不严格满足稳定性条件，但根据系统传递函数 $H(s)/H(z)$ 的表达式(4.221)和(4.227)，只要有界输入信号不包含 ω_0/Ω_0 的固有频率成分，即不产生重极点导致共振，则系统输出只会由一些模长为 1 的复指数函数或三角函数（如 $e^{j\omega_0 t}/e^{j\Omega_0 n}$, $\sin \omega_0 t / \sin \Omega_0 n$ ）以及与输入信号对应的有界函数（如常数项）组成（具体说明详见下述定理4.11证明），即为有界输出。这类只在特定情况下不满足 LTI/LSI 稳定性条件的特殊稳定状态，被称作**临界稳定**。

推广来讲，对于一类以微分方程和差分方程表征的 LTI/LSI 系统，可以通过如下定理判断是否满足临界稳定性条件：

定理 4.11 (LTI/LSI 系统临界稳定性判据)

一个在 s 域和 z 域以有理分式呈现的 LTI/LSI 系统满足临界稳定性的充分必要条件为：

1. s 域中, $H(s)$ 的分子阶次不大于分母阶次, 即 $M \leq N$;
2. 在 s 平面的虚数轴和 z 平面的单位圆上仅存在一阶极点, 剩余极点全部在此类极点所对应的收敛域外侧。



证明 首先, 根据定理4.8的稳定性判据, s 域中, 若 $H(s)$ 的分子阶次大于分母阶次, 即 $M > N$, 则系统无论如何将产生包含单位冲激信号相关的无界输出, 所以临界稳定仍然需要满足 $M \leq N$ 。

其次, 若在 s 平面的虚数轴和 z 平面的单位圆上仅存在一阶极点, 根据前述分析, 系统传递函数 $H(s)/H(z)$ 会存在两类情况: 形如 $\frac{1}{s}$ 和 $\frac{1}{1-z^{-1}}$ 的单极点情形, 以及形如 $\left(\frac{1}{s+j\omega_0} \pm \frac{1}{s-j\omega_0}\right)$ 和 $\left(\frac{1}{1-e^{-j\Omega_0 \cdot z^{-1}}} \pm \frac{1}{1-e^{j\Omega_0 \cdot z^{-1}}}\right)$ 的共轭极点情形; 前者在时域对应一个非零恒定数值 (如 $u(t)/u[n]$), 后者对应一个等幅振荡 (如 $e^{j\omega_0 t}/e^{j\Omega_0 n}, \sin\omega_0 t/\sin\Omega_0 n$)。若此时输入信号引入重极点, 无论哪种情况, 根据公式(4.135)和(4.181), 输出信号均将引入线性增长项 (t^n 和 $\frac{(n+k)!}{n!}$), 导致无界输出。所以, LTI/LSI 系统本身不能在 s 平面的虚数轴和 z 平面的单位圆上存在重极点 (系统将不满足绝对可积/可和), 且输入信号也不能引入重极点 (产生共振)。

而当输入信号有界 (如常数项), 在计算输出信号时, 通过部分分式展开, 将分为“输入信号 + 系统响应”两部分原函数, 前者仍然有界, 后者也只存在非零恒定数值或等幅振荡两种有界情况。这便是所谓的临界稳定状态。

最后, 针对剩余的极点, 对于满足因果性的右边函数来说, 收敛域外侧即为 s 平面的虚数轴左边和 z 平面的单位圆内部, 根据定理4.8和定理4.10的描述, 表征这些极点的指数型原函数, 刚好完全满足绝对可积/可和要求; 至于非因果的左边函数, 由于与右边函数是完全对称的结构, 易知表征这些 s 平面虚数轴右边和 z 平面单位圆外部极点的指数型原函数, 也完全满足绝对可积/可和要求。

综合以上, 将所有部分合并, 其线性组合必然也满足绝对可积/可和要求, 且考虑到上述推导前后结论均等价, 则本定理得证。

例题 4.12 试通过理论分析解释音频“啸叫”的基本原理。

解 在话筒-扬声器系统中, 一个较为常见的现象是音频“啸叫”。为了了解该问题背后的根源, 下图4.16(a)绘制了其基本结构。可以看到, 话筒拾取的声音信号, 经由电声系统的音频放大器, 将通过扬声器发声; 而扬声器所发出的声音又将反过来经由空气传播被话筒进行拾取。这种由输入到输出的正向通路和输出到输入的反馈通路组成的闭合回路系统, 也被称作闭环系统, 或反馈系统。

将以上分析表示成具体的数学模型, 则如下图4.16(b)所示。首先是正向通路的系统 1: 放大器。根据章节4.2.1中关于线性卷积的描述, 当系统响应为单位冲激信号 $\delta(t)$ 时, 输出信号即为输入信号; 再考虑经由音频放大器的信号放大倍数 K_1 , 可知系统 1

的系统响应 $h_1(t)$ 为

$$h_1(t) = K_1 \cdot \delta(t) \xrightarrow{u-LT} H_1(s) = K_1, \text{ ROC: 全部 } s \text{ 域} \quad (4.230)$$

其次是反馈通路的系统 2: 空气衰减。由于空气中声音传播存在时滞效应, 结合章节4.2.1中线性卷积的时不变性质, 系统响应需要添加时域平移; 再考虑经由空气衰减的信号衰减倍数 K_2 , 可知系统 2 的系统响应 $h_2(t)$ 为

$$h_2(t) = \frac{1}{K_2} \cdot \delta(t - t_0) \xrightarrow{u-LT} H_2(s) = \frac{1}{K_2} e^{-st_0}, \text{ ROC: 全部 } s \text{ 域} \quad (4.231)$$



图 4.16: 话筒-扬声器音频反馈系统示意图

对于此类典型的反馈系统, 为了求解输入输出的整体系统响应 $h(t)$, 这里将话筒输入信号 $x(t)$ 拆解为系统 1 的输入信号 $\tilde{x}(t)$ 和系统 2 的输出信号 $e(t)$, 分别对两个系统进行输入输出关系的构建, 有

$$Y(s) = \tilde{X}(s)H_1(s), \quad E(s) = Y(s)H_2(s) \quad (4.232)$$

所以

$$x(t) = \tilde{x}(t) + e(t) \Rightarrow X(s) = \tilde{X}(s) + E(s) = \frac{Y(s)}{H_1(s)} + Y(s)H_2(s) \quad (4.233)$$

进一步可推出:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{H_1(s)}{1 + H_1(s)H_2(s)} = \frac{K_1}{1 - \frac{K_1}{K_2}e^{-st_0}} \quad (4.234)$$

需要说明的是, 以上求得的系统传递函数 $H(s)$ 并不是有理分式, 不太容易导出原函数, 也无法采用定理4.8对系统稳定性进行判断。尽管在自动控制原理等书籍中存在一些其他处理方法, 但这里可以简化处理, 只分析系统“不稳定”的条件。此时根据“系统响应 $h(t)$ 绝对可积 (系统稳定) \Rightarrow 存在连续时间 Fourier 变换 (Laplace 变换收玫域包含 $\Re\{s\} = 0$)”的逻辑关系, 可得到“Laplace 变换收玫域不包含 $\Re\{s\} = 0 \Rightarrow$ 系统不稳定”的结论。

对于本例题的音频因果系统来说, 首先假设 $\Re\{s\} = \sigma_0$ 在收敛域内, 有

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|e^{-\sigma_0 t} dt = \int_0^{\infty} |h(t)|e^{-\sigma_0 t} dt < \infty \quad (4.235)$$

再考虑其右侧的某条线 $\Re\{s\} = \sigma_0 + \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$), 可知:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} |h(t)|e^{-(\sigma_0 + \varepsilon)t} dt &= \int_0^{\infty} |h(t)|e^{-\sigma_0 t} e^{-\varepsilon t} dt \leq \int_0^{\infty} e^{-\varepsilon t} dt \cdot \int_0^{\infty} |h(t)|e^{-\sigma_0 t} dt \\ &= \int_0^{\infty} |h(t)|e^{-\sigma_0 t} dt < \infty \end{aligned} \quad (4.236)$$

上式表明，只要 $\Re\{s\} = \sigma_0$ 在收敛域内，则对于因果系统， $\Re\{s\} > \sigma_0$ 的全部 s 域也都在收敛域内；此外，考虑到极点必不包含在收敛域内，换言之，即收敛域只能在极点的右半平面。而通过计算系统传递函数 $H(s)$ 表达式(4.234)的极点，有

$$1 - \frac{K_1}{K_2} e^{-s t_0} = 0 \Rightarrow s = \frac{1}{t_0} \ln \frac{K_1}{K_2} \quad (4.237)$$

根据前述分析，系统不稳定的前置条件为收敛域不包含 $\Re\{s\} = 0$ ，等价于极点在 s 域虚数轴及其右半平面，所以可得：

$$\Re\{s\} = \frac{1}{t_0} \ln \frac{K_1}{K_2} \geq 0 \Rightarrow K_1 \geq K_2 \quad (4.238)$$

即当衰减倍数 K_2 小于等于放大倍数 K_1 时，该音频系统将失去稳定性。特别针对极点位于虚数轴的临界稳定情况，计算其频率响应，有

$$1 - \frac{K_1}{K_2} e^{-s t_0} \Big|_{s=j\omega} = 0 \Rightarrow e^{-j\omega t_0} = \cos \omega t_0 - j \sin \omega t_0 = \frac{K_2}{K_1} \quad (4.239)$$

进一步可推出：

$$K_1 = K_2, \quad \omega = \frac{n\pi}{t_0}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (4.240)$$

上式的结论与实际音频情况也相吻合。当话筒向扬声器靠拢，空气衰减倍数 K_2 将逐渐减小，变化至 $K_1 = K_2$ 的临界稳定状态时，哪怕微小的声压波动被话筒捕获，也会在特定的频点处被扬声器无限放大至发散，直到尖锐刺耳，从而使得这种回授音转变为音频“啸叫”的现象。

————后续未写完(T_T)，待更新!!————



4.3 数模转换

例题 4.13 试给出连续时间信号 $x(t)$ 到离散时间信号 $x(n)$ 的数学模型。

解 为了对连续时间信号 $x(t)$ 进行“抽样”，需要用到冲激串信号 $p(t)$ （不能用 $p(n)$ ，因为自变量不同）的“筛选抽取”性质，此时可以得到某种理想抽样信号 $x_s(t)$ ，有

$$x_s(t) = x(t) \cdot p(t) = x(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) \cdot \delta(t - nT_s) \quad (4.241)$$

上式的形式与例题2.7的公式(2.176)类似，说明理想抽样信号 $x_s(t)$ 也可以视作某种“密度函数”。对其每一项进行积分，即可得到离散信号 $x(n)$ 的对应项。

考虑到绝大多数模拟-数字转换器的实现思路均是将 $x(t)$ 在任意点 $t = nT_s$ 处的值积分为 $x(nT_s)$ ，所采用的单位冲激信号更像是一种格外“瘦长”的 rect 信号（对应公式(4.7)的定义），且积分后已做了归一化处理，所以尽管数学意义上并不严格成立，但依旧可以“近似”认为上式(4.141)得到的理想抽样信号 $x_s(t)$ 即为离散时间信号 $x(n)$ 。

4.3.1 采样定理

4.3.2 信号量化

4.3.3 信号编码

4.3.4 信息传输

4.4 数字信号处理

4.4.1 离散 Fourier 变换 (DFT)

从定义2.2介绍的 Fourier 变换表达式(2.163)可以看出，“时间域-频域”的转换主要看信号本身的复杂程度。若信号较为复杂，则此时积分变换不易求解。

Fourier 变换在音频技术领域用途广泛，因为大量的声音均需要做频谱分析，然而对于音频处理来说，不可能每一次转换都通过上述理论公式进行求解，所以这便引出了本节的离散 Fourier 变换，缩写简称为 DFT。

定义 4.7 (离散 Fourier 变换)

存在如下 Fourier 变换表达式：

$$\begin{cases} X_k = \mathcal{F}[x_n] = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-jk\Omega_0 n} \\ x_n = \mathcal{F}^{-1}[X_k] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X_k e^{jk\Omega_0 n} \end{cases} \quad (4.242)$$

其中， $x[n]$ 为函数在时间域上的表达式， $X(F)$ 则为在频域上的表达式； $\mathcal{F}[x[n]]$

被称为 Fourier 正变换, $\mathcal{F}^{-1}[X(F)]$ 则为 Fourier 逆变换。



4.4.2 快速 Fourier 变换（FFT）

4.4.3 数字滤波器



第5章 声音合成

电子音乐将过去的音乐彻底的颠覆，借助科学和计算机的力量，人类在一个虚拟的“0和1”的世界里，构建出了大自然完全不能产生的“非自然声音”。而这些声音极大的促进了现代音乐的发展，带来了音乐上颠覆性的听觉感受，具有无穷无尽的可挖掘空间。

5.1 电子音乐概述

5.2 减法合成原理

谈到电子音乐，其发展与计算机科学、信息论等学科密切相关。电子音乐的处理手段，并不善于模仿真实乐器的声音；其真正重要的作用是——创造全新的，自然界不存在的声音。

这里以目前主流的减法合成器为例，展示下音色设计的全过程，流程图如下图5.1所示：

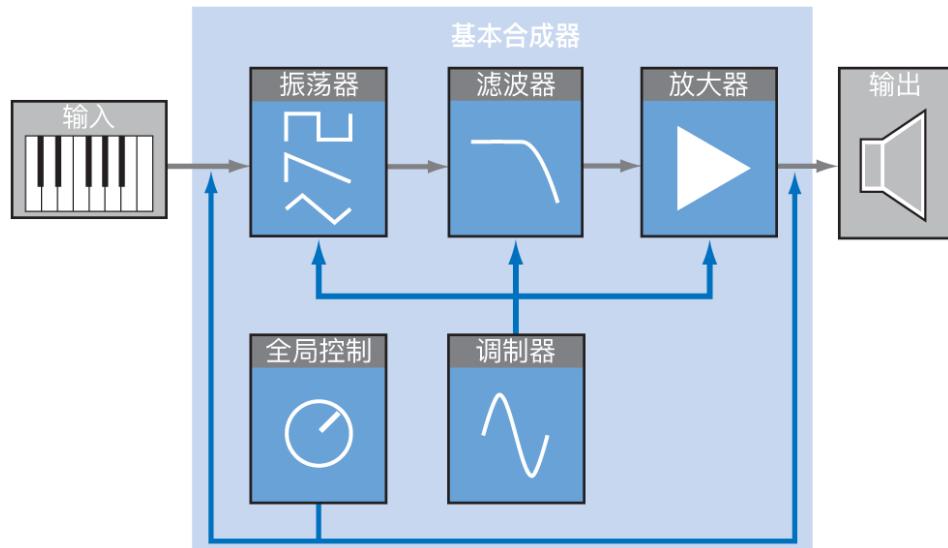
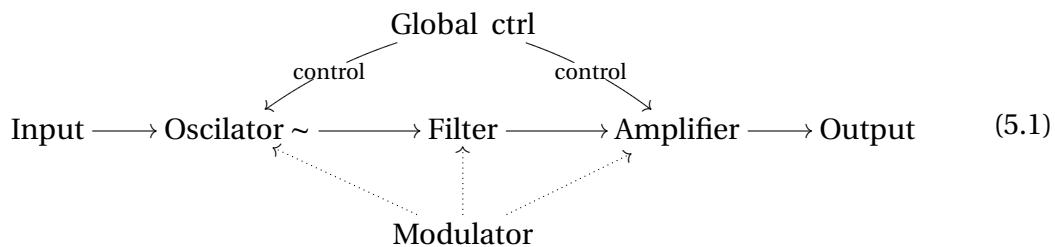


图 5.1：减法合成工作原理（图片来源：Logic Pro 使用手册：减法合成器组件）



一个减法合成器一般拥有三个基础模块，且逻辑链路为线性流程，具体如下：

1. 振荡器（Oscillator）：提供输入的波形，一个减法合成器可能有多个 Osc 模块，且提供的波形也各种各样，目的是提供谐波更为丰富的声音；
2. 滤波器（Filter）：对输入波形进行滤波，一般都是采用低通滤波（Low Pass），剔除高频“刺耳”的声音；一般有两个优化参数分别是：截止频率（cut off）和共振频率（resonance）；
3. 放大器（Amplifier）：通过 ADSR（起音 (attack)、衰减 (decay)、保持 (sustain)、释音 (release)）的包络发生器来控制声音，对声音的听感改变起到决定性作用。

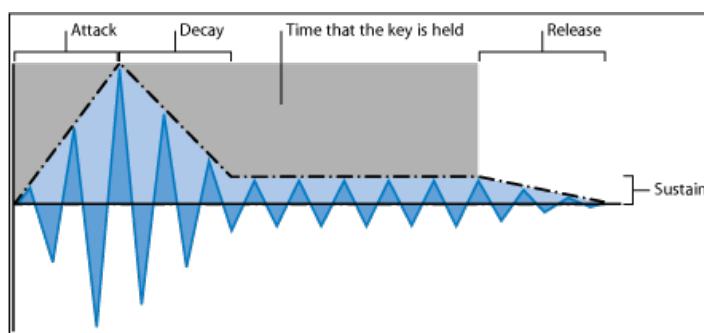


图 5.2: ADSR 原理（图片来源：Logic Pro 使用手册：减法合成器组件）

除此之外，一个减法合成器一般还会有两个特殊模块：

- 全局控制（Global control）：影响合成器声音的整体特性，如一般键盘界面左边都会带一个弯音轮和一个调制轮；
- 调制器（Modulators）：制作生动、有机音色的关键要素，一般通过低频振荡器（low frequency oscillator, LFO）来实现；LFO 可以作用于任何参数上，为音色改变添砖加瓦，带来动态变化，例如可以作用在音高（pitch）、音量（level）、截止频率（cut off）等等..

5.3 FM 合成原理

5.4 音色设计

5.4.1 合成器的设计逻辑

5.4.2 声音调制

5.5 数字音频工作站（DAW）

5.5.1 MIDI 协议

5.5.2 乐器采样与演奏技法（Articulation）

5.5.3 软音源（Sample Library）

5.5.4 编曲过程

第 6 章 音乐的未完待续

6.1 音频效果器

6.1.1 EQ 类

6.2 物理建模合成

6.3 人工智能音乐

6.4 尾声：后记

远超预期的写作

分章节叙述写作过程

与和泉宏隆 jazz 作品的共鸣

永恒的热爱

参考文献

- [1] 周明儒. 数学与音乐. 高等教育出版社, 2015.
- [2] 王杰. 音乐与数学. 北京大学出版社, 2019.
- [3] 梁进. 音乐和数学：谜一般的关系. 上海科学技术出版社, 2022.
- [4] Guerino Mazzola, Maria Mannone, and yan Peng. 冷酷的数学和炙热的音乐：为音乐理论家的数学引导. 上海教育出版社, 2023.
- [5] 许琛. 算法与音乐分析. 文化艺术出版社, 2023.
- [6] Barry Parker. 美妙的振动：音乐中的物理学. 商务印书馆, 2023.
- [7] Pupa Gilbert and Willy Haeberli. 艺术中的物理学. 清华大学出版社, 2011.
- [8] 武际可. 音乐中的科学. 高等教育出版社, 2012.
- [9] 龚振雄. 音乐声学：音响·乐器·计算机音乐·MIDI·音乐厅声学原理及应用. 电子工业出版社, 1995.
- [10] 韩宝强. 音的历程：现代音乐声学导论. 中国文联出版社, 2003.
- [11] 邓志勇 and 王岱威. 音乐声学导论. 首都师范大学出版社, 2019.
- [12] David M. Howard and Jamie A.s. Angus. 音乐声学与心理声学. 第 4 版. 人民邮电出版社, 2014.
- [13] Jürgen Meyer. 音乐声学与音乐演出. 第 5 版. 人民邮电出版社, 2012.
- [14] Curtis Roads. 计算机音乐教程（上下册）. 人民音乐出版社, 2011.
- [15] Charles Dodge and Thomas A. Jerse. *Computer Music: synthesis, composition and performance*. Second Edition. Cengage Learning, 1997.
- [16] Peter Manning. *Electronic and Computer Music*. Fouth Edition. Oxford University Press, 2013.
- [17] 李伟等. 音频音乐与计算机的交融——音频音乐技术. 复旦大学出版社, 2019.
- [18] 李伟等. 音频音乐与计算机的交融——音频音乐技术 2. 复旦大学出版社, 2022.
- [19] Ethan Winer. 音频手册：发烧友与录音师必备音频技术指南. 人民邮电出版社, 2015.
- [20] Glen M. Ballou. 音频工程师手册. 第 5 版. 人民邮电出版社, 2024.
- [21] 谢明. 数字音频技术及应用. 机械工业出版社, 2017.
- [22] Ken C. Pohlmann. 数字音频技术. 人民邮电出版社, 2013.

- [23] 安栋 and 杨杰. 数字音频技术. 上海音乐学院出版社, 2011.
- [24] Miller Puckette. 电子音乐技术. 人民邮电出版社, 2011.
- [25] 黄忱宇. 电子音乐与计算机音乐基础理论. 华文出版社, 2005.
- [26] Martin Russ. 声音合成与采样技术. 人民邮电出版社, 2011.
- [27] Andy Farnell. 设计声音. 人民邮电出版社, 2017.
- [28] 朴泰弘. 音乐的数字信号处理. 上海音乐出版社, 2014.
- [29] Dave Benson. *Music: A Mathematical Offering*. Cambridge University Press, 2007.
- [30] Gareth Loy. *Musimathics: The Mathematical Foundations of Music*. Vol. 1. The MIT Press, 2006.
- [31] Gareth Loy. *Musimathics: The Mathematical Foundations of Music*. Vol. 2. Cambridge University Press, 2007.
- [32] Arthur H. Benade. *Fundamentals of Musical Acoustics*. Courier Corporation, 1990.
- [33] Neville H. Fletcher and Thomas D. Rossing. *The Physics of Musical Instruments*. Springer-Verlag New York Inc, 1991.
- [34] 朗道 and E. M. 粟弗席兹. 理论物理学教程. 第六卷: 流体动力学. 第五版. 高等教育出版社, 2013.
- [35] 庄礼贤, 尹协远, and 马晖扬. 流体力学. 第2版. 中国科学技术大学出版社, 2009.
- [36] 朗道 and E. M. 粟弗席兹. 理论物理学教程. 第七卷: 弹性理论. 第五版. 高等教育出版社, 2011.
- [37] 徐芝纶. 弹性力学. 第4版. 高等教育出版社, 2006.
- [38] 朱滨. 弹性力学. 中国科学技术大学出版社, 2008.
- [39] 匡震邦. 非线性连续介质力学. 上海交通大学出版社, 2002.
- [40] John William Strutt Baron Rayleigh. *The theory of sound*. Vol. 1. Macmillan, 1896.
- [41] John William Strutt Baron Rayleigh. *The theory of sound*. Vol. 2. Macmillan, 1896.
- [42] Philip McCord Morse. *Vibration and sound*. McGraw-Hill New York, 1948.
- [43] Philip McCord Morse. 振动与声. 科学出版社, 1974.
- [44] 马大猷. 现代声学理论基础. 科学出版社, 2004.
- [45] 马大猷 and 沈嵘. 声学手册. 修订版. 科学出版社, 2004.
- [46] 杜功焕, 朱哲民, and 龚秀芬. 声学基础. 第三版. 南京大学出版社, 2012.
- [47] 张海澜. 理论声学. 高等教育出版社, 2007.
- [48] 程建春. 声学原理(上下卷). 第二版. 科学出版社, 2019.

- [49] 何琳 et al. 声学理论与工程应用. 科学出版社, 2006.
- [50] 沈勇. 扬声器系统的理论与应用. 国防工业出版社, 2011.
- [51] 山本武夫. 扬声器系统. 国防工业出版社, 2010.
- [52] Don Davis and Eugene Patronis Jr. 音响系统工程. 第三版. 人民邮电出版社, 2010.
- [53] F. Alton Everest and Ken C. Pohlmann. 声学手册：声学设计与建筑声学使用指南. 第7版. 人民邮电出版社, 2024.
- [54] Floyd E. Toole. 声音的重现：音箱与房间的声学与心理声学. 第3版. 人民邮电出版社, 2023.
- [55] 钟锡华. 电磁学通论. 北京大学出版社, 2014.
- [56] David J. Griffiths. *Introduction to Electrodynamics*. Fifth Edition. Cambridge University Press, 2024.
- [57] David J. Griffiths. 电动力学导论. 原书第3版. 机械工业出版社, 2014.
- [58] J. D. Jackson. 经典电动力学（上下册）. 原书第二版. 人民教育出版社, 1979.
- [59] 秦曾煌 and 姜三勇. 电工学（上下册）. 第七版. 高等教育出版社, 2009.
- [60] James W. Nilsson and Susan A. Riedel. 电路. 第十版. 电子工业出版社, 2015.
- [61] Charles K. Alexander and Matthew N. O. Sadiku. 电路基础. 原书第6版. 机械工业出版社, 2019.
- [62] Allan V. Oppenheim, Alan S. Willsky, and S. Hamid Nawab. 信号与系统. 第二版. 电子工业出版社, 2020.
- [63] B. P. Lathi. 线性系统与信号. 第2版. 西安交通大学出版社, 2006.
- [64] 徐守时, 谭勇, and 郭武. 信号与系统: 理论、方法和应用. 第3版. 中国科学技术大学出版社, 2019.
- [65] 郑君里, 应启珩, and 杨为理. 信号与系统（上下册）. 第三版. 高等教育出版社, 2011.
- [66] 吴大正 et al. 信号与线性系统分析. 第5版. 高等教育出版社, 2019.
- [67] 秦树人等. 机械测试系统原理与应用. 科学出版社, 2006.
- [68] Allan V. Oppenheim and W. Schafer Ronald. 离散时间信号处理. 第三版. 电子工业出版社, 2015.
- [69] John G. Proakis and Dimitris G. Manolakis. 数字信号处理——原理、算法与应用. 第五版. 电子工业出版社, 2023.
- [70] Sanjit K. Mitra. 数字信号处理——基于计算机的方法. 第四版. 电子工业出版社, 2020.

- [71] Steven W. Smith. 实用数字信号处理：从原理到应用. 人民邮电出版社, 2010.
- [72] 胡广书. 数字信号处理理论、算法与实现. 第四版. 清华大学出版社, 2023.
- [73] Udo Zölzer. 数字音频信号处理. 原书第3版. 清华大学出版社, 2023.
- [74] Richard H. Hoppin. 中世纪音乐. 上海音乐出版社, 2018.
- [75] Allan W. Atlas. 文艺复兴音乐：1400-1600年的西欧音乐. 上海音乐出版社, 2024.
- [76] John Walter Hill. 巴洛克音乐：1580-1750年的西欧音乐. 上海音乐出版社, 2022.
- [77] Philip G. Downs. 古典音乐：海顿、莫扎特与贝多芬的时代. 上海音乐出版社, 2012.
- [78] Leon Plantinga. 浪漫音乐：十九世纪欧洲音乐风格史. 上海音乐出版社, 2016.
- [79] Robert P. Morgan. 二十世纪音乐：现代欧美音乐风格史. 上海音乐出版社, 2014.
- [80] 上和弦. 好和弦系列课程即日起停更【乐理教程】.<https://www.bilibili.com/video/BV1Xs411374a>. 2018.
- [81] 阿欣. 法国爵士钢琴阿欣.<https://space.bilibili.com/392355503>. 2019.
- [82] 音频应用. 音频应用官方网站.<http://www.audiobar.cn>. 2022.
- [83] 伊·杜波夫斯基 et al. 和声学教程（上下册）增订重译版. 人民音乐出版社, 2008.
- [84] Arnold Schoenberg. 勋伯格和声学. 上海音乐出版社, 2007.
- [85] Théodore Dubois. 对位与赋格教程（上下册）. 人民音乐出版社, 2001.
- [86] Kent Kennan. 对位法. 第四版. 上海音乐出版社, 2022.
- [87] Hector Louis Berlioz. 配器法（上下卷）. 人民音乐出版社, 1978.
- [88] Samuel Adler. 配器法教程（上下册）. 第三版. 中央音乐学院出版社, 2010.
- [89] Mark Levine. *The Jazz Theory Book*. Sher Music, 1995.
- [90] Mark Levine. 爵士乐宝典. 上海音乐出版社, 2017.
- [91] Mark Levine. *The Jazz Piano Book*. Sher Music, 2005.
- [92] Russ Hepworth-Sawyer. 唱片诞生始末：从创作到发售. 人民邮电出版社, 2015.
- [93] Gary Davis and Ralph Jones. 扩声手册. 第2版. 人民邮电出版社, 2021.
- [94] Ray A. Rayburn. 传声器手册：*John Eargle*的传声器设计与应用指南. 第3版. 人民邮电出版社, 2019.
- [95] David Miles Huber and Robert E. Runstein. 现代录音技术. 第7版. 人民邮电出版社, 2013.
- [96] Bruce Bartlett and Jenny Bartlett. 实用录音技术. 第7版. 人民邮电出版社, 2022.

- [97] Andrea Pejrolo and Richard DeRosa. 现代音乐人编曲手册：传统管弦乐配器和MIDI音序制作必备指南. 第2版. 人民邮电出版社, 2022.
- [98] Roey Izhaki. 混音指南. 第4版. 人民邮电出版社, 2024.
- [99] Alexander U. Case. 灵活的混音：针对多轨混音的专业音频技巧. 人民邮电出版社, 2013.
- [100] Bob Katz. 母带处理：母带制作技术与艺术. 第2版. 人民邮电出版社, 2017.
- [101] Rick Snoman. 电子舞曲手册. 第2版. 人民邮电出版社, 2019.
- [102] Hilary Wyatt and Tim Amyes. 电影电视声音后期制作. 第3版. 人民邮电出版社, 2010.
- [103] Vance Dickason. 扬声器系统设计手册. 第7版修订. 人民邮电出版社, 2014.
- [104] Ray Alden. 扬声器系统设计与制作进阶. 修订版. 人民邮电出版社, 2014.
- [105] Bob McCarthy. 音响系统设计与优化. 第2版. 人民邮电出版社, 2017.
- [106] Douglas Self. 音频功率放大器设计手册. 第六版. 人民邮电出版社, 2016.
- [107] Tomlinson Holman. 多声道环绕声技术. 第二版. 人民邮电出版社, 2011.
- [108] Philip Newell. 录音室设计手册. 第3版. 人民邮电出版社, 2015.
- [109] Dave Swallow. 现场扩声：演出混音宝典. 人民邮电出版社, 2012.
- [110] 黄克智, 薛明德, and 陆明万. 张量分析. 第3版. 清华大学出版社, 2020.
- [111] 谢锡麟. 现代张量分析及其在连续介质力学中的应用. 复旦大学出版社, 2014.
- [112] R. P. Feynman, R. B. Leighton, and M. Sands. 费恩曼物理学讲义：新千年版. 第1卷. 上海科学技术出版社, 2013.
- [113] R. P. Feynman, R. B. Leighton, and M. Sands. 费恩曼物理学讲义：新千年版. 第2卷. 上海科学技术出版社, 2013.

附录 A 相关数学基础

A.1 一元函数的 Taylor 展开

在微积分中，Taylor 展开是应用较为广泛的一种数学手段。但实际使用时，常容易陷入概念模糊、公式复杂难记等问题中，所以这里还是对其作一简要介绍。另外，Taylor 展开确实可以很复杂，但涉及到音乐相关领域，一般只会用到一元函数的 Taylor 展开。

定理 A.1 (泰勒 (Taylor) 展开式)

若函数 $f(x)$ 连续且具有 n 阶导数，则有

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \quad (\text{A.1})$$



证明 首先对于任意连续函数，可以考虑 n 次多项式拟合（这也是 Taylor 展开动机的精髓），如下：

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n \quad (\text{A.2})$$

对上式进行连续求导得：

$$\begin{aligned} f'(x) &= a_1 + 2 \cdot a_2 x + \dots + n \cdot a_n x^{n-1} \\ f''(x) &= 1 \cdot 2 \cdot a_2 + \dots + (n-1)(n) \cdot a_n x^{n-2} \\ &\dots\dots \\ f^{(n)}(x) &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot (n) a_n \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

令 $x = 0$ ，可得下面被称为 n 次多项式的麦克劳林 (Maclaurin) 公式：

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \quad (\text{A.4})$$

显然，多项式拟合也可以以 $(x - x_0)$ 的幂次展开，即写为

$$f(x) = A_0 + A_1(x - x_0) + A_2(x - x_0)^2 + \dots + A_n(x - x_0)^n \quad (\text{A.5})$$

再按上述方法进行求解，便可得到 Taylor 展开的表达式。

取 Taylor 展开的一阶展开式，会发现其与下述一元微分的概念很相似：

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = f'(x) \cdot \Delta x + o(\Delta x) \quad (\text{A.6})$$

其中， $o(\Delta x)$ 为 Δx 的高阶小量。所以，对于 Taylor 展开而言，当 x 与 x_0 较为接近时，可用下述近似来替代：

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) \quad (\text{A.7})$$

A.2 梯度、散度与旋度

为方便理解, 本节先给出常用的 Cartesian 坐标系下梯度、散度与旋度的定义。之后附录 D.3 会将其推广至更具一般性的有限维曲线坐标系 (非单位正交基)。

A.2.1 方向导数

梯度、散度与旋度来源于场论, 要理解以上概念, 首先需给出方向导数的定义 (以下推导均在 Cartesian 坐标系下展开):

定义 A.1 (方向导数)

若函数 $f = f(x, y, z)$ 在点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 处可微, $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ 为任意单位方向 e 相对于 Cartesian 坐标系的方向余弦, 即 $e = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$, 则函数 f 在点 M_0 处沿 e 方向的方向导数存在, 且有

$$\frac{\partial f}{\partial e} \Big|_{M_0} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial f}{\partial z} \cos \gamma \quad (\text{A.8})$$



注意, e 应为向量, 但在方向导数的定义中使用的是标量, 所以这里公式中仅用非黑体的 e 表示其模, 即 $\|e\|$ 。

证明 由假设 $f(x, y, z)$ 在点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 可微分, 故根据全微分的定义有

$$\begin{aligned} f(M_0 + \Delta M) - f(M_0) &= \frac{\partial f}{\partial x}(M_0) \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(M_0) \Delta y + \frac{\partial f}{\partial z}(M_0) \Delta z \\ &\quad + o\left(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}\right) \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

其中 $o\left(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}\right)$ 的意义为 $\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}$ 的高阶小量。

由于

$$\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2} = \|e\| \quad (\text{A.10})$$

$$\Delta x = \|e\| \cdot \cos \alpha, \quad \Delta y = \|e\| \cdot \cos \beta, \quad \Delta z = \|e\| \cdot \cos \gamma$$

代入上式, 两边除以 $\|e\|$, 再令 $\|e\| \rightarrow 0$ 取极限即可证明公式 (A.8)。

A.2.2 梯度

根据方向导数的定义, 可以演化出梯度的概念。引入哈密顿 (Hamilton) 算子 ∇ (念作 Nabla, 所以也称为 Nabla 算子), 其在 Cartesian 坐标系下具有如下形式:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \quad (\text{A.11})$$

即运算符 ∇ 兼具向量和微分运算两者的功能。

考虑到

$$\nabla f(M_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(M_0) \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(M_0) \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}(M_0) \mathbf{k} \quad (\text{A.12})$$



则方向导数可以表示为两个向量的点积：

$$\frac{\partial f}{\partial e} \Big|_{M_0} = \nabla f(M_0) \cdot \mathbf{e} \quad (\text{A.13})$$

其中， $\nabla f(M_0)$ 称为 f 在点 M_0 处的梯度，也可记为 $\text{grad } f(M_0)$ 。可以看到，梯度为向量。即，梯度的作用是把标量场变为向量，描述方向。

根据方向导数的点积形式(A.13)可知，只有当单位方向 \mathbf{e} 指向梯度向量 $\nabla f(M_0)$ 的方向时，方向导数 $\frac{\partial f}{\partial e} \Big|_{M_0}$ 取最大值 $\|\nabla f(M_0)\|$ 。即梯度具有如下性质：

性质 梯度的方向是使得方向导数取得最大值的方向（指向导数增加最大的方向），梯度的模就是方向导数的最大值；同时梯度方向也正好沿着 f 的等值面（使得函数值相同的坐标点的集合）在这点的法线方向，即梯度向量与等值面垂直。

A.2.3 散度

散度在形式上与梯度类似，但含义区别较大。一个向量场 $\mathbf{A}(M)$ 在点 M_0 处的散度，计作 $\text{div } \mathbf{A}(M_0)$ ，主要用来描述 \mathbb{R}^3 空间区域 Ω （体积为 V ，边界的光滑闭曲面用 $\partial\Omega$ 表示）中穿过闭合面积 S 的通量对体积的变化率，其数学表达式如下：

$$\text{div } \mathbf{A} = \lim_{\Delta\Omega \rightarrow M_0} \left(\frac{1}{\Delta V} \iint_{\partial\Omega} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \right) \quad (\text{A.14})$$

其中，向量 \mathbf{S} 的方向指代闭曲面 $\partial\Omega$ 的外法向。

根据微积分中 **Gauss** 公式的向量形式，可将上述面积分转换为体积分：

$$\iint_{\partial\Omega} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{A}) dV \quad (\text{A.15})$$

代入原式可知：

$$\text{div } \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A} \quad (\text{A.16})$$

即，向量场的散度为 **Hamilton** 算子与该向量场的点积。散度运算与梯度运算相反，其作用是把向量变为标量。

在 Cartesian 坐标系下，将向量场 \mathbf{A} 展开成分量形式：

$$\mathbf{A} = P(x, y, z) \mathbf{i} + Q(x, y, z) \mathbf{j} + R(x, y, z) \mathbf{k} \quad (\text{A.17})$$

则在任一点 $M(x, y, z)$ 处向量场 \mathbf{A} 的散度为

$$\text{div } \mathbf{A} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \quad (\text{A.18})$$



笔记 通量和散度，分别从宏观整体和微观局部的角度描述了向量场的性质。

A.2.4 旋度

旋度的推导也可采用类似散度的方式，但需要做更进一步说明。

首先定义下环量面密度：一个向量场 $\mathbf{A}(M)$ 在任一曲面 Σ 上的点 M_0 处沿其法向

量 \mathbf{S} 方向（单位向量记作 \mathbf{n} ）的环量流密度，计作 μ_n ，主要用来描述 \mathbb{R}^3 空间中曲面区域 Σ 沿其边界光滑闭曲线 $\partial\Sigma$ （切向量为 \mathbf{l} ，满足右手螺旋定则）的环量对面积的变化率，其数学表达式如下：

$$\mu_n = \lim_{\Delta\Sigma \rightarrow M_0} \left(\frac{1}{\Delta S} \oint_{\partial\Sigma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \right) \quad (\text{A.19})$$

根据微积分中 **Stokes** 公式的向量形式，可将上述线积分转换为面积分：

$$\oint_{\partial\Sigma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \iint_{\Sigma} (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} = \iint_{\Sigma} [(\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n}] dS \quad (\text{A.20})$$

代入原式可知：

$$\mu_n = (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n} \quad (\text{A.21})$$

与方向导数类似，也可将环量面密度视作**方向旋量**。此时可以引申出向量场 $\mathbf{A}(M)$ 在点 M_0 处**旋度**的概念，记为 $\text{rot}\mathbf{A}(M_0)$ ，或 $\text{curl}\mathbf{A}(M_0)$ ，其数学表达式为

$$\text{rot}\mathbf{A}(M_0) = \nabla \times \mathbf{A} \quad (\text{A.22})$$

在 Cartesian 坐标系下，与散度类似，旋度可进一步按照向量场的分量进行展开：

$$\text{rot}\mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \quad (\text{A.23})$$

可以看到，旋度为**向量**。即，旋度的作用是把向量场变为另一个向量，描述**旋量**。同梯度类似，根据方向旋量的点积形式可以轻易得出如下性质：

性质 旋度的方向是使得方向旋量取得最大值的方向（指向旋量增加最大的方向），旋度的模就是方向旋量的最大值。

 **笔记** 环量和旋度，也分别从宏观整体和微观局部的角度描述了向量场的性质。

附录 B 相关力学基础

B.1 Newton 第二定律

首先引入质点的概念：质点就是有质量但不存在体积或形状（或其大小形状不起显著作用）的点，是物理学的一个理想化模型。基于此，可以给出如下动力学基本定律中的 Newton 第二定律：

定理 B.1 (牛顿 (Newton) 第二定律)

质点的动量（质量 m 与速度 \mathbf{v} 的乘积）对时间 t 的改变率等于作用于质点上的力 \mathbf{F} ，即

$$\frac{d(m\mathbf{v})}{dt} = \mathbf{F} \quad (\text{B.1})$$

当质点质量为常量时（宏观物体远低于光速运动时），第二定律可表示为

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \quad (\text{B.2})$$

即质点加速度 \mathbf{a} 的大小与其所受作用力的大小成正比，与其质量成反比，方向与力的方向相同。



Newton 第二定律阐述的是自然界的一种本征物理性质，即“如果一个物体在作加速运动，那一定有力作用在这个物体上”，是一种“发现式”的理论。若不从理论上解释，可能一般只会认为力是人类对于肌肉推拉的一种“感觉”。正是因为有了理论上的支撑，才可以说成“力是加速度作用在物体上的某种表现形式”。

B.2 d'Alembert 原理

定理 B.2 (达朗贝尔 (d'Alembert) 原理)

考虑一个质量为 m 的非自由质点以加速度 \mathbf{a} 运动的情形。作用于该质点上的合力为 \mathbf{F}_N ，并引入惯性力 $\mathbf{F}_I = -m\mathbf{a}$ ，则可以把质点的动力学方程转化为如下静力学平衡方程的形式：

$$\mathbf{F}_N + \mathbf{F}_I = 0 \quad (\text{B.3})$$



可以看到，质点的 d'Alembert 原理与 Newton 第二定律并无区别。这样做的原因主要在于，当受力分析较为复杂时，通过引入惯性力 \mathbf{F}_I ，使得受力分析和建立平衡方程时更为清晰直观。

另外，惯性力并没有作用在质点上，对质点来说只能当作一个虚加的力。

B.3 守恒定律

仍然以质点为例，结合 Newton 第二定律，考察力在时间上的作用效应，有

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{t} = m\mathbf{a} \cdot d\mathbf{t} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot d\mathbf{t} = d(m\mathbf{v}) \quad (\text{B.4})$$

所以，力在时间上的累积，表现为动量的变化率，这也与 Newton 第二定律本身保持一致。该结论被称作动量定理。

再考察力在空间上的作用效应，有

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = m\mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} dt \right) = m d\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = d\left(\frac{1}{2}m\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}\right) = d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) \quad (\text{B.5})$$

其中， \mathbf{r} 为质点的矢径， v^2 为 $\|\mathbf{v}\|^2$ 的简写。由于力在空间上的位移具有做功的物理含义，所以 $\frac{1}{2}mv^2$ 可视作质点的动能，即力在空间上的累积，表现为动能的变化率。该结论被称作动能定理。

考虑到第一章中定理 1.2 关于势能的描述，力 \mathbf{F} 在保守场内做功等于势能 U 的减少，即有

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -dU \quad (\text{B.6})$$

联立公式(B.5)和(B.6)，并两边同时进行积分（从 M_0 点移动到 M 点），可知：

$$\int_{\widehat{M_0 M}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = E - E_0 = -(U - U_0) \Rightarrow E + U = E_0 + U_0 \quad (\text{B.7})$$

其中， E, E_0 和 U, U_0 分别定义为 M 和 M_0 点处的动能和势能。上式表明，若质点仅位于保守场内，且没有其他外力施加，则其动能和势能之和保持不变。在物理学中，动能和势能之和统称为机械能。

将质点扩展成质点系，结合内力与外力的相互作用，即可进一步将上述定理应用于任意物体或物体系统。

定理 B.3 (机械能守恒定律)

对于作用于任意物体上的力，若只有保守力做功，外力和内力均不做功，则物体的动能和势能可以实现相互转换，但整体机械能（动能 + 势能）保持恒定不变。



附录 C 相关热力学基础

热力学是一门很复杂的学科，因为会涉及到大量单个粒子（原子和分子）的统计规律性。本附录部分仅讨论与基础声学相关的必要概念，不会涉及太多热力学的核心知识，如热力学三大定律等。

另外，声音在空气中的传播可视作是在理想气体中进行的。这是一种假想气体（气体粒子间距足够大，其相互作用可忽略不计），但在工程上许多气体性质都接近于理想气体，所以可以作此简化。

C.1 气体分子动理论

大量气体粒子无规律的撞击运动产生动能，从统计学的角度可以用一种宏观的方式来描述：气体粒子运动越剧烈，说明其平均动能越大，反映在表现现象上即温度越高。所以温度可以用气体粒子的平均动能来定义。

对微观粒子的撞击运动做进一步详细分析，可以建立气体分子动理论的基础关系式，具体如下：

假定气体粒子（质量为 m ）的速度为 \mathbf{v} ，在垂直撞击面（假定面积为 A ）上的速度分量设为 v_x 。这样粒子在一次撞击中的动量改变量为 $2mv_x$ ；接下来要考虑在单位时间内，有多少粒子进行了撞击。假设在体积 V 中有 N 个粒子，则单位体积内的粒子数为 $n = N/V$ 。由于在单位时间内能够进行撞击的粒子必须在体积 $A \cdot v_x dt$ 内才行，所以，理论上单位时间内一共有 $nv_x Adt$ 个粒子进行了撞击。根据 Newton 第二定律，力即为单位时间内的动量变化量，可求得力的大小为

$$F = \frac{nv_x Adt \cdot 2mv_x}{dt} = 2nA \cdot mv_x^2 \quad (\text{C.1})$$

则压强 p 为

$$p = \frac{F}{A} = 2nmv_x^2 \quad (\text{C.2})$$

从统计学上考虑，并非所有粒子速度都相同，所以需要取平均（用 $\langle v_x^2 \rangle$ 表示）；且只有一半粒子是朝撞击的正方向，所以只取一半数量；再考虑到在 Cartesian 坐标系下， $\langle v_x^2 \rangle$ 可从概率上转化为总速率 $\langle v^2 \rangle$ ，则有

$$p = nm\langle v_x^2 \rangle = nm \cdot \frac{1}{3} \langle v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 \rangle = \frac{2}{3} n \left\langle \frac{1}{2} m v^2 \right\rangle \quad (\text{C.3})$$

上式中 $\left\langle \frac{1}{2} m v^2 \right\rangle$ 可视为气体粒子的平均动能。将 $n = N/V$ 代入上式，可进一步得到

$$pV = \frac{2}{3} N \left\langle \frac{1}{2} m v^2 \right\rangle \quad (\text{C.4})$$

结论 从上式可以看到，在相同温度（气体粒子平均动能）、相同压力下，相同体积的气体含有相同数量的气体粒子。这是一个很有意思的结论。

C.2 理想气体状态方程

根据分子气体动理论，可给出如下理想气体状态方程：

定理 C.1 (理想气体状态方程)

理想气体的三个基本状态参数（压强 p 、体积 V 和温度 T ）存在如下关系：

$$pV = NRT \quad (\text{C.5})$$

其中， N 常采用物质的量，单位是 mol（由于气体粒子数量较大，所以换了个量纲）； R 为摩尔气体常数，国标中取值为 $8.314 \text{ J/(K}\cdot\text{mol)}$ 。

上式也可用 $N \text{ mol}$ 物质的质量 m 来替换^a：

$$pV = mR_g T \quad (\text{C.6})$$

此时， R_g 常被称为气体常数，与摩尔气体常数 R 的关系为 $R = \frac{m}{N} R_g$ ，其中 $\frac{m}{N}$ 为摩尔质量，即单位摩尔数的气体质量，不同元素的气体摩尔质量数值不同。

^a注意与气体分子动理论里的单个粒子质量区分开，这里为避免符号过多，所以采用了相同符号。 

考虑单位质量的物质，其体积用 v 表示¹，则有 $v = \frac{V}{m}$ 。公式 (C.6) 可变换为

$$pv = R_g T \quad (\text{C.7})$$

对上式两端进行微分则有

$$d(pv) = R_g \cdot dT \Rightarrow dp \cdot v + dv \cdot p = \frac{p v}{T} \cdot dT \Rightarrow \frac{dp}{p} + \frac{dv}{v} = \frac{dT}{T} \quad (\text{C.8})$$

上式最后得到的具有一定数学结构美的微分形式在热力学公式推导中具有非常重要的作用。

C.3 理想气体的比热容

对两种不同的物质进行加热，其温度变化不尽相同，这是一种很常规的认识。对物质“进行加热”传递的是热量，用严谨的方式描述即为：热力系统与外界之间依靠温差传递的能量（所以单位也为焦耳），用 Q 表示（单位质量的热量用 q ），符号约定为“吸热为正，放热为负”。

物理学中用热容的概念来定义“加热物质使其温度升高的难易程度”，单位质量的热容称为比热容，其基本公式如下：

$$c = \frac{Q}{m \Delta T} \quad (\text{C.9})$$

¹注意与速度区分开，这里符号确实使用的一样，只不过速度一般会采用矢量写法。



可以看到，比热容越大，物质越难加热。

由于热量与功量都是过程量（需经过一段时间达到）而不是状态量，所以在微元过程中传递的热量需要用 δQ 和 δq 来表示，以示区别；另外，气体物质在加热时还会产生压强和体积的变化，所以需要进一步定义定压比热容（压强一定） c_p 和定容比热容（体积一定） c_v ：

$$\begin{aligned} c_p &= \left. \frac{\delta q}{dT} \right|_p \\ c_v &= \left. \frac{\delta q}{dT} \right|_v \end{aligned} \quad (C.10)$$

在定压情况下对气体物质进行加热，此时体积增大还需要对外做功，所以 $c_p > c_v$ ；对于固体和液体来说，可视作不分定压和定容的情形，所以 $c_p = c_v$ 。

尽管比热容可以看到是温度的函数，但一般情况下无论物质是固体液体还是气体，均可将比热容视作是物质的一种固定特性，即为常数。

附录 D 曲线坐标系

D.1 基础理论

由于曲线坐标系中的局部坐标基不一定是单位正交基，且可能会随坐标发生改变，所以在表示空间中任意向量的坐标分量时会遇到麻烦。例如以 \mathbb{R}^3 空间中的向量 \mathbf{p} 为例，在 Cartesian 坐标系下展开，则有

$$\mathbf{p} = p_x \mathbf{i} + p_y \mathbf{j} + p_z \mathbf{k} \quad (\text{D.1})$$

当要计算向量 \mathbf{p} 在 x 轴上的分量时，仅需通过计算式 $p_x = \mathbf{p} \cdot \mathbf{i}$ 即可。

但是，很明显在曲线坐标系中无法这样操作。为此，引入对偶的两种局部基向量（可以在 \mathbb{R}^n 空间中），称为协变基向量 \mathbf{g}_i 与逆变基向量 \mathbf{g}^j ，满足

$$\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}^j = \delta_i^j, \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (\text{D.2})$$

其中， δ_i^j 称为克罗内克（Kronecker）符号，满足

$$\delta_i^j = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (\text{D.3})$$

此时，可以将空间中任意向量表示为协变基的形式或逆变基的形式。例如 Euclidean \mathbb{R}^3 空间中的向量 \mathbf{p} 可以表示为

$$\mathbf{p} = p^i \mathbf{g}_i, \quad \mathbf{p} = p_j \mathbf{g}^j \quad (\text{D.4})$$

则两种表示方式的坐标分量（ p^i 被称为逆变分量， p_j 被称为协变分量）可以通过如下计算式给出：

$$p^i = \mathbf{p} \cdot \mathbf{g}^i, \quad p_j = \mathbf{p} \cdot \mathbf{g}^j \quad (\text{D.5})$$

当然，协变基向量与逆变基向量也可以互相分解，如下

$$\mathbf{g}_i = g_{ij} \mathbf{g}^j, \quad \mathbf{g}^i = g^{ij} \mathbf{g}_j \quad (\text{D.6})$$

其中，

$$g_{ij} = \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j, \quad g^{ij} = \mathbf{g}^i \cdot \mathbf{g}^j \quad (\text{D.7})$$

所以，通过 g_{ij} 和 g^{ij} 可以完成指标的升降。

考虑到

$$\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}^j = \delta_i^j = g_{ik} \mathbf{g}^k \cdot \mathbf{g}^j = g_{ik} g^{kj} \quad (\text{D.8})$$

转成矩阵形式可以写为

$$[g_{ij}] \left[g^{ij} \right] = \mathbf{I} \quad (\text{D.9})$$

其中， \mathbf{I} 表示单位矩阵（用正体表示，区分子单位张量 \mathbf{I} ）。上式表明， g_{ij} 和 g^{ij}

所形成的矩阵互逆，所以两者之间可以通过简单的计算相互转换。

在实际应用中，协变基向量 \mathbf{g}_i 一般通过求解矢径 \mathbf{r} 对坐标（依照约定俗成的方式写成上标 x^i ，与逆变分量无关）的微分来导出：

$$d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^i} dx^i = \mathbf{g}_i dx^i \quad (\text{D.10})$$

即定义协变基向量 \mathbf{g}_i 为矢径对坐标的偏导数。

在得到协变基向量后，可以计算出度量分量 g_{ij} ，通过取逆运算得到度量分量 g^{ij} ，最后导出逆变基向量的表达式。

另外，由于在曲线坐标系中，线元的长度度量可以通过如下方式给出：

$$ds^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j dx^i dx^j = g_{ij} dx^i dx^j = g^{ij} dx_i dx_j \quad (\text{D.11})$$

所以， g_{ij} 和 g^{ij} 两者具有度量线元的性质，分别被称为度量张量的协变分量和逆变分量（线元 $d\mathbf{r}$ 是向量，所以关于坐标的微分 dx^i 才可进行指标升降）。

例题 D.1 柱坐标系可以表示为如下向 Cartesian 坐标系的映射关系（微分同胚）：

$$\mathbf{X}(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^3 \ni \mathbf{x} = \begin{bmatrix} r \\ \theta \\ z \end{bmatrix} \mapsto \mathbf{X}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad (\text{D.12})$$

试求柱坐标系下 \mathbf{g}_i 与 g_{ij} 的表达式（用 Cartesian 坐标表示）。

解 考察上述映射关系的雅可比 (Jacobi) 矩阵，有

$$\mathbf{J} = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)} = \left[\frac{\partial X^i}{\partial x^j} \right] = \begin{bmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{D.13})$$

根据协变基向量 \mathbf{g}_i 的定义

$$\mathbf{g}_i = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial x^i} \quad (\text{D.14})$$

再结合 \mathbf{X} 的表达式，可知：

$$[\mathbf{g}_r \ \mathbf{g}_\theta \ \mathbf{g}_z] = \begin{bmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{D.15})$$

进一步，根据 g_{ij} 的定义，可将其写成矩阵形式，如下：

$$[g_{ij}] = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_r \cdot \mathbf{g}_r & \mathbf{g}_r \cdot \mathbf{g}_\theta & \mathbf{g}_r \cdot \mathbf{g}_z \\ \mathbf{g}_\theta \cdot \mathbf{g}_r & \mathbf{g}_\theta \cdot \mathbf{g}_\theta & \mathbf{g}_\theta \cdot \mathbf{g}_z \\ \mathbf{g}_z \cdot \mathbf{g}_r & \mathbf{g}_z \cdot \mathbf{g}_\theta & \mathbf{g}_z \cdot \mathbf{g}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{D.16})$$

例题 D.2 球坐标系可以表示为如下向 Cartesian 坐标系的映射关系（微分同胚）：

$$\mathbf{X}(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^3 \ni \mathbf{x} = \begin{bmatrix} r \\ \theta \\ \phi \end{bmatrix} \mapsto \mathbf{X}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} r \sin \theta \cos \phi \\ r \sin \theta \sin \phi \\ r \cos \theta \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad (\text{D.17})$$

试求球坐标系下 \mathbf{g}_i 与 g_{ij} 的表达式（用 Cartesian 坐标表示）。



解 考察上述映射关系的雅可比 (Jacobi) 矩阵, 有

$$\mathbf{J} = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \phi)} = \left[\frac{\partial X^i}{\partial x^j} \right] = \begin{bmatrix} \sin\theta \cos\phi & r \cos\theta \cos\phi & -r \sin\theta \sin\phi \\ \sin\theta \sin\phi & r \cos\theta \sin\phi & r \sin\theta \cos\phi \\ \cos\theta & -r \sin\theta & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{D.18})$$

则有

$$[\mathbf{g}_r \ \mathbf{g}_\theta \ \mathbf{g}_\phi] = \begin{bmatrix} \sin\theta \cos\phi & r \cos\theta \cos\phi & -r \sin\theta \sin\phi \\ \sin\theta \sin\phi & r \cos\theta \sin\phi & r \sin\theta \cos\phi \\ \cos\theta & -r \sin\theta & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{D.19})$$

进一步, 根据 g_{ij} 的定义, 可将其写成矩阵形式, 如下:

$$[g_{ij}] = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_r \cdot \mathbf{g}_r & \mathbf{g}_r \cdot \mathbf{g}_\theta & \mathbf{g}_r \cdot \mathbf{g}_\phi \\ \mathbf{g}_\theta \cdot \mathbf{g}_r & \mathbf{g}_\theta \cdot \mathbf{g}_\theta & \mathbf{g}_\theta \cdot \mathbf{g}_\phi \\ \mathbf{g}_\phi \cdot \mathbf{g}_r & \mathbf{g}_\phi \cdot \mathbf{g}_\theta & \mathbf{g}_\phi \cdot \mathbf{g}_\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad (\text{D.20})$$

当选定的坐标系采用单位正交基 (如 Cartesian 坐标系) 时, 会发现指标可以不分上下 (这里利用 Cartesian 坐标系下 $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ 的基向量表示法做一简要说明), 如下:

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}^j = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = g_{ij} = \delta_{ij} \quad (\text{D.21})$$

D.2 Edington 张量

Cartesian 坐标系下向量的叉积运算一般采用行列式表示。据此可推广引入混合积 (其物理意义为三个基向量张成的平行六边形体积。当采用右手系时, 该计算大小为正值) 在标准正交基情形下的分量计算式。假设 Cartesian 坐标系下存在向量 $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$, $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$, $\mathbf{w} = (w_x, w_y, w_z)$, 则根据点积与叉积的分量计算式有

$$[\mathbf{u} \ \mathbf{v} \ \mathbf{w}] = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \\ = \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_x & v_x & w_x \\ u_y & v_y & w_y \\ u_z & v_z & w_z \end{vmatrix} \quad (\text{D.22})$$

上式虽然较为直观, 但不利于进行指标运算, 这里定义置换符号, 也被称作列维-奇维塔 (Levi-Civita) 符号 e_{ijk} (注意置换符号可以不区分上下标, 只是依照哑指标的配对约定给出两种形式), 满足

$$e_{ijk} = e^{ijk} = \begin{cases} 1, & i, j, k \text{ 顺序排列: 如 } 123, 231, 312 \\ -1, & i, j, k \text{ 逆序排列: 如 } 321, 213, 132 \\ 0, & i, j, k \text{ 非序排列: 其他} \end{cases} \quad (\text{D.23})$$

则公式(D.22)可简化为如下指标形式:

$$[\mathbf{u} \ \mathbf{v} \ \mathbf{w}] = e_{ijk} u_i v_j w_k \quad (\text{D.24})$$

在曲线坐标系中, 向量的叉积运算无法直接用其坐标分量的行列式给出, 需引入

置换张量，或爱丁顿（Eddington）张量： ϵ_{ijk} ，其等于 \mathbb{R}^3 空间中，三个局部坐标基（协变基向量） $(\mathbf{g}_i, \mathbf{g}_j, \mathbf{g}_k)$ 的混合积：

$$\epsilon_{ijk} = [\mathbf{g}_i \ \mathbf{g}_j \ \mathbf{g}_k] = (\mathbf{g}_i \times \mathbf{g}_j) \cdot \mathbf{g}_k = \mathbf{g}_i \cdot (\mathbf{g}_j \times \mathbf{g}_k) = \sqrt{g} e_{ijk} \quad (D.25)$$

其中，符号 \sqrt{g} 的含义需要稍作说明：

根据公式(D.22)，将三个协变基向量 $(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3)$ 用标准正交基的分量形式来表示，然后考虑到线性代数中的基本关系式 $\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{B})$ ，可以证明：

$$\det(\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j) = \begin{vmatrix} \mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{g}_1 & \mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{g}_2 & \mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{g}_3 \\ \mathbf{g}_2 \cdot \mathbf{g}_1 & \mathbf{g}_2 \cdot \mathbf{g}_2 & \mathbf{g}_2 \cdot \mathbf{g}_3 \\ \mathbf{g}_3 \cdot \mathbf{g}_1 & \mathbf{g}_3 \cdot \mathbf{g}_2 & \mathbf{g}_3 \cdot \mathbf{g}_3 \end{vmatrix} = [\mathbf{g}_1 \ \mathbf{g}_2 \ \mathbf{g}_3]^2 \quad (D.26)$$

由于

$$1 = \det(\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j) = [\mathbf{g}_1 \ \mathbf{g}_2 \ \mathbf{g}_3] [\mathbf{g}^1 \ \mathbf{g}^2 \ \mathbf{g}^3] \quad (D.27)$$

所以可以通过下式来定义 \sqrt{g} ：

$$[\mathbf{g}_1 \ \mathbf{g}_2 \ \mathbf{g}_3] = \frac{1}{[\mathbf{g}^1 \ \mathbf{g}^2 \ \mathbf{g}^3]} = \sqrt{g} \quad (D.28)$$

同时有

$$\det(g_{ij}) = \det(\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j) = g \quad (D.29)$$

进一步，可给出上指标的 Eddington 张量定义：

$$\epsilon^{ijk} = [\mathbf{g}^i \ \mathbf{g}^j \ \mathbf{g}^k] = (\mathbf{g}^i \times \mathbf{g}^j) \cdot \mathbf{g}^k = \mathbf{g}^i \cdot (\mathbf{g}^j \times \mathbf{g}^k) = \frac{1}{\sqrt{g}} e^{ijk} \quad (D.30)$$

所以，当遇到曲线坐标系下的叉积运算时，可直接计算，例如：

$$\mathbf{g}_i \times \mathbf{g}_j = \epsilon_{ijk} \mathbf{g}^k, \quad \mathbf{g}^i \times \mathbf{g}^j = \epsilon^{ijk} \mathbf{g}_k \quad (D.31)$$

定理 D.1 (Eddington 张量同 Kronecker 符号之间的关系)

Eddington 张量与 Kronecker 符号之间存在如下关系：

$$\epsilon^{ijk} \epsilon_{rst} = e^{ijk} e_{rst} = \det \begin{pmatrix} \delta_r^i & \delta_s^i & \delta_t^i \\ \delta_r^j & \delta_s^j & \delta_t^j \\ \delta_r^k & \delta_s^k & \delta_t^k \end{pmatrix} = \delta_{rst}^{ijk} \quad (D.32)$$

上式的 δ_{rst}^{ijk} 定义为广义 Kronecker 符号。将其指标进行缩并，则可得到

$$\epsilon^{ijk} \epsilon_{ist} = e^{ijk} e_{ist} = \delta_s^j \delta_t^k - \delta_s^k \delta_t^j = \delta_{st}^{jk} \quad (D.33)$$

证明 首先根据 Eddington 张量的定义有 $\epsilon^{ijk} = \frac{1}{\sqrt{g}} e^{ijk}$ ， $\epsilon_{rst} = \sqrt{g} e_{rst}$ 。考虑到置换符号也可以写作单位正交基的混合基（注意这里为保持与 Eddington 张量计算的统一，也区分了上下标），则有

$$e^{ijk} = [\mathbf{e}^i \ \mathbf{e}^j \ \mathbf{e}^k]_{\mathbb{R}^3} = \begin{vmatrix} \delta_1^i & \delta_2^i & \delta_3^i \\ \delta_1^j & \delta_2^j & \delta_3^j \\ \delta_1^k & \delta_2^k & \delta_3^k \end{vmatrix} \quad (D.34)$$

同理，有

$$\epsilon_{rst} = [\mathbf{e}_r \ \mathbf{e}_s \ \mathbf{e}_t]_{\mathbb{R}^3} = \begin{vmatrix} \delta_r^1 & \delta_s^2 & \delta_t^3 \\ \delta_r^1 & \delta_s^2 & \delta_t^3 \\ \delta_r^1 & \delta_s^2 & \delta_t^3 \end{vmatrix} \quad (\text{D.35})$$

根据线性代数中的基本关系式 $\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A})\det(\mathbf{B})$ 可得：

$$\begin{aligned} \epsilon^{ijk}\epsilon_{rst} &= e^{ijk}e_{rst} = \begin{vmatrix} \delta_1^i & \delta_2^i & \delta_3^i \\ \delta_1^j & \delta_2^j & \delta_3^j \\ \delta_1^k & \delta_2^k & \delta_3^k \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \delta_r^1 & \delta_s^2 & \delta_t^3 \\ \delta_r^1 & \delta_s^2 & \delta_t^3 \\ \delta_r^1 & \delta_s^2 & \delta_t^3 \end{vmatrix} \\ &= \det \left[\begin{pmatrix} \delta_1^i & \delta_2^i & \delta_3^i \\ \delta_1^j & \delta_2^j & \delta_3^j \\ \delta_1^k & \delta_2^k & \delta_3^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_r^1 & \delta_s^2 & \delta_t^3 \\ \delta_r^1 & \delta_s^2 & \delta_t^3 \\ \delta_r^1 & \delta_s^2 & \delta_t^3 \end{pmatrix} \right] = \det \begin{pmatrix} \delta_r^i & \delta_s^i & \delta_t^i \\ \delta_r^j & \delta_s^j & \delta_t^j \\ \delta_r^k & \delta_s^k & \delta_t^k \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{D.36})$$

进一步则有

$$\begin{aligned} \epsilon^{ijk}\epsilon_{ist} &= e^{ijk}e_{ist} = \det \begin{pmatrix} \delta_i^i & \delta_s^i & \delta_t^i \\ \delta_i^j & \delta_s^j & \delta_t^j \\ \delta_i^k & \delta_s^k & \delta_t^k \end{pmatrix} \\ &= 3\left(\delta_s^j\delta_t^k - \delta_s^k\delta_t^j\right) + \delta_s^i\left(\delta_t^j\delta_i^k - \delta_t^k\delta_i^j\right) + \delta_t^i\left(\delta_i^j\delta_s^k - \delta_i^k\delta_s^j\right) \\ &= 3\left(\delta_s^j\delta_t^k - \delta_s^k\delta_t^j\right) + \delta_s^k\delta_t^j - \delta_s^j\delta_t^k + \delta_s^k\delta_t^j - \delta_s^j\delta_t^k = \delta_s^j\delta_t^k - \delta_s^k\delta_t^j \end{aligned} \quad (\text{D.37})$$

D.3 曲线坐标系下的 Hamilton 算子

在曲线坐标系下定义 Hamilton 算子，需要先回到方向导数的概念。Cartesian 坐标系下一个任意的 \mathbf{l} 方向（单位向量）可以定义为

$$\mathbf{l} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) = \lim_{l \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta x}{l}, \frac{\Delta y}{l}, \frac{\Delta z}{l} \right) \quad (\text{D.38})$$

相对应曲线坐标系下，一个任意的 \mathbf{l} 方向可以通过如下对矢径 \mathbf{r} 的微分关系给出：

$$\mathbf{l} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial l} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial l} = \mathbf{g}_i \frac{\partial x^i}{\partial l} \quad (\text{D.39})$$

根据附录 A.2 中关于梯度 grad 的定义，即梯度 $\nabla(\bullet)$ 与单位向量 \mathbf{l} 的点积为方向导数（注意需要区分梯度运算 $\nabla(\bullet)$ 和 Hamilton 算子 ∇ 本身），有

$$\frac{\partial}{\partial l}(\bullet) = \nabla(\bullet) \cdot \mathbf{l} = \nabla(\bullet) \cdot \left(\mathbf{g}_i \frac{\partial x^i}{\partial l} \right) \quad (\text{D.40})$$

考虑到

$$\frac{\partial}{\partial l}(\bullet) = \frac{\partial(\bullet)}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial l} = \left(\mathbf{g}^j \frac{\partial}{\partial x^j}(\bullet) \right) \cdot \left(\mathbf{g}_i \frac{\partial x^i}{\partial l} \right) \quad (\text{D.41})$$

结合公式(D.40)和(D.41)，可给出如下 Hamilton 算子的定义：

$$\nabla = \mathbf{g}^i \nabla_i = \mathbf{g}^i \frac{\partial}{\partial x^i} \quad (\text{D.42})$$

上式中 ∇_i 为协变算子，是根据 Hamilton 算子延伸出的算符。另外注意这里只是

依照约定俗成的方式，将 \mathbf{g}^i 写在了微分项左边。事实上不论左右均不影响具体计算。

Hamilton 算子的指标也可以进行升降运算，如下：

$$\nabla = \mathbf{g}^i \nabla_i = g^{ij} \mathbf{g}_j \nabla_i = \mathbf{g}_j g^{ji} \nabla_i = \mathbf{g}_j \nabla^j \quad (\text{D.43})$$

上式用到了 g^{ij} 关于指标的对称性（根据其定义可知）。

接下来可以根据上述 Hamilton 算子的定义给出推广的梯度、散度和旋度运算。

以二阶张量 $\Phi = \Phi^{ij} \mathbf{g}_i \mathbf{g}_j$ 为例（张量的简要定义可参阅章节1.5），可引出如下左梯度和右梯度运算的表达式（以下均为先微分运算，再向量运算）：

$$\nabla \Phi = \mathbf{g}^l \frac{\partial \Phi}{\partial x^l} = \mathbf{g}^l \frac{\partial (\Phi^{ij} \mathbf{g}_i \mathbf{g}_j)}{\partial x^l}, \quad \Phi \nabla = \frac{\partial \Phi}{\partial x^l} \mathbf{g}^l = \frac{\partial (\Phi^{ij} \mathbf{g}_i \mathbf{g}_j)}{\partial x^l} \mathbf{g}^l \quad (\text{D.44})$$

可以看到，尽管对于常规的标量函数的梯度运算来说，并不区分左右梯度，但对于张量函数来说，左梯度和右梯度运算是不同的。

对于散度运算来说，也可引出如下左散度和右散度运算的表达式：

$$\nabla \cdot \Phi = \mathbf{g}^l \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x^l} = \mathbf{g}^l \cdot \frac{\partial (\Phi^{ij} \mathbf{g}_i \mathbf{g}_j)}{\partial x^l}, \quad \Phi \cdot \nabla = \frac{\partial \Phi}{\partial x^l} \cdot \mathbf{g}^l = \frac{\partial (\Phi^{ij} \mathbf{g}_i \mathbf{g}_j)}{\partial x^l} \cdot \mathbf{g}^l \quad (\text{D.45})$$

可以看到，尽管对于常规的向量函数的散度运算来说，并不区分左右散度，但对于张量函数来说，左散度和右散度运算是不同的。

对于旋度运算来说，当张量函数的底空间为 \mathbb{R}^3 时，也可引出如下左旋度和右旋度运算的表达式：

$$\nabla \times \Phi = \mathbf{g}^l \times \frac{\partial \Phi}{\partial x^l} = \mathbf{g}^l \times \frac{\partial (\Phi^{ij} \mathbf{g}_i \mathbf{g}_j)}{\partial x^l}, \quad \Phi \times \nabla = \frac{\partial \Phi}{\partial x^l} \times \mathbf{g}^l = \frac{\partial (\Phi^{ij} \mathbf{g}_i \mathbf{g}_j)}{\partial x^l} \times \mathbf{g}^l \quad (\text{D.46})$$

旋度运算较为特殊性，哪怕是常规的向量函数的旋度运算，也需要区分左右旋度。

考虑一种特殊情况，当曲线坐标系采用有限维单位正交基（如 Cartesian 坐标系）时，不分上下标，Hamilton 算子的指标形式可简化为

$$\nabla = \mathbf{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (\text{D.47})$$

D.4 基向量关于坐标的偏导数

由于在曲线坐标系下，所采用的基向量会随坐标发生变化，即所谓“运动标架”，所以需要考察下基向量关于坐标的偏导数。一般曲线坐标系下基向量的偏导数运算，需要引入克里斯托费尔（Christoffel）符号，其具体定义如下：

定义 D.1 (克里斯托费尔 (Christoffel) 符号)

第一类 Christoffel 符号：

$$\Gamma_{ij}^k(\mathbf{x}) \triangleq \left(\frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial x^j}(\mathbf{x}), \mathbf{g}^k(\mathbf{x}) \right)_{\mathbb{R}^m} \quad (\text{D.48})$$

第二类 Christoffel 符号：

$$\Gamma_{ij,k}(\mathbf{x}) \triangleq \left(\frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial x^j}(\mathbf{x}), \mathbf{g}_k(\mathbf{x}) \right)_{\mathbb{R}^m} \quad (\text{D.49})$$



其中，括号内表示两个向量的点积。可以看到，Christoffel 符号是具有三个指标的分量，用以表示曲线坐标系下基向量偏导数的逆变分量或协变分量。

两类 Christoffel 符号也可以通过度量分量进行指标升降，如下：

$$\Gamma_{ij}^k(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial x^j}(\mathbf{x}), \mathbf{g}^k(\mathbf{x}) \right) = \left(\frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial x^j}(\mathbf{x}), g^{ks} \mathbf{g}_s(\mathbf{x}) \right) = g^{ks} \Gamma_{ij,s} \quad (\text{D.50})$$

由于

$$\frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial x^j} = \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial x^i \partial x^j} = \frac{\partial \mathbf{g}_j}{\partial x^i} \quad (\text{D.51})$$

所以，Christoffel 符号关于指标 ij 对称。

根据上述定义，曲线坐标系下协变基向量关于坐标的偏导数可表示为

$$\frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial x^j} = \Gamma_{ij}^k \mathbf{g}_k, \quad \frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial x^j} = \Gamma_{ij,k} \mathbf{g}^k \quad (\text{D.52})$$

逆变基向量关于坐标的偏导数也可通过其与协变基向量的对偶关系给出。由于

$$\mathbf{g}^i \cdot \mathbf{g}_k = \delta_k^i \quad (\text{D.53})$$

上式两边同时对坐标 x^j 求导，则有

$$\frac{\partial \mathbf{g}^i}{\partial x^j} \cdot \mathbf{g}_k = -\mathbf{g}^i \cdot \frac{\partial \mathbf{g}_k}{\partial x^j} = -\Gamma_{jk}^i \quad (\text{D.54})$$

由此可求得：

$$\frac{\partial \mathbf{g}^i}{\partial x^j} = -\Gamma_{jk}^i \mathbf{g}^k \quad (\text{D.55})$$

此时，任意张量函数对坐标的偏导数可以通过如下方式给出（还是以二阶张量 $\Phi = \Phi_{ij} \mathbf{g}_i \mathbf{g}_j$ 为例。注意，张量分量在所在项中可任意变换位置，但基向量不行）：

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial x^l} &= \frac{\partial (\Phi^{ij} \mathbf{g}_i \mathbf{g}_j)}{\partial x^l} = \frac{\partial \Phi^{ij}}{\partial x^l} \mathbf{g}_i \mathbf{g}_j + \Phi^{ij} \frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial x^l} \mathbf{g}_j + \Phi^{ij} \mathbf{g}_i \frac{\partial \mathbf{g}_j}{\partial x^l} \\ &= \frac{\partial \Phi^{ij}}{\partial x^l} \mathbf{g}_i \mathbf{g}_j + \Phi^{ij} \Gamma_{il}^k \mathbf{g}_k \mathbf{g}_j + \Phi^{ij} \mathbf{g}_i \Gamma_{jl}^k \mathbf{g}_k \\ &= \left(\frac{\partial \Phi^{ij}}{\partial x^l} + \Gamma_{kl}^i \Phi^{kj} + \Gamma_{kl}^j \Phi^{ik} \right) \mathbf{g}_i \mathbf{g}_j \end{aligned} \quad (\text{D.56})$$

上式最后一步后两项更换了哑指标，从而得到了统一的基向量表达式。令

$$\nabla_l \Phi^{ij} = \frac{\partial \Phi^{ij}}{\partial x^l} + \Gamma_{kl}^i \Phi^{kj} + \Gamma_{kl}^j \Phi^{ik} \quad (\text{D.57})$$

则可以进一步简化为

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x^l} = \nabla_l \Phi^{ij} \mathbf{g}_i \mathbf{g}_j \quad (\text{D.58})$$

其中， $\nabla_l \Phi^{ij}$ 被称为张量分量的协变导数， ∇_l 则为前述的协变算子。对于不同的张量，其协变导数的具体表达式不尽相同，但均可以采用统一的方式进行符号运算。

例如，对于上一节介绍的梯度、散度和旋度运算的推广形式，有

$$\nabla \Phi = \mathbf{g}^l \frac{\partial \Phi}{\partial x^l} = \nabla_l \Phi^{ij} \mathbf{g}^l \mathbf{g}_i \mathbf{g}_j \quad (\text{D.59})$$

$$\Phi \nabla = \frac{\partial \Phi}{\partial x^l} \mathbf{g}^l = \nabla_l \Phi^{ij} \mathbf{g}_i \mathbf{g}_j \mathbf{g}^l \quad (\text{D.60})$$

可以看到，梯度运算使得张量的阶数增加一阶。

$$\nabla \cdot \Phi = \mathbf{g}^l \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x^l} = \nabla_l \Phi^{ij} \mathbf{g}^l \cdot \mathbf{g}_i \mathbf{g}_j = \nabla_i \Phi_{ij} \mathbf{g}_j \quad (\text{D.61})$$

$$\Phi \cdot \nabla = \frac{\partial \Phi}{\partial x^l} \cdot \mathbf{g}^l = \nabla_l \Phi^{ij} \mathbf{g}_i \mathbf{g}_j \cdot \mathbf{g}^l = \nabla_j \Phi_{ij} \mathbf{g}_i \quad (\text{D.62})$$

可以看到，散度运算使得张量的阶数减少一阶。

$$\begin{aligned} \nabla \times \Phi &= \mathbf{g}^l \times \frac{\partial \Phi}{\partial x^l} = \nabla_l \Phi^{ij} \mathbf{g}^l \times \mathbf{g}_i \mathbf{g}_j \\ &= \nabla_l \Phi_{ij} g^{ls} \mathbf{g}_s \times \mathbf{g}_i \mathbf{g}_j = \nabla_l \Phi_{ij} g^{ls} \epsilon_{sip} \mathbf{g}_p \mathbf{g}_j \end{aligned} \quad (\text{D.63})$$

$$\begin{aligned} \Phi \times \nabla &= \frac{\partial \Phi}{\partial x^l} \times \mathbf{g}^l = \nabla_l \Phi^{ij} \mathbf{g}_i \mathbf{g}_j \times \mathbf{g}^l \\ &= \nabla_l \Phi_{ij} g^{ls} \mathbf{g}_i \mathbf{g}_j \times \mathbf{g}_s = \nabla_l \Phi_{ij} g^{ls} \epsilon_{jsp} \mathbf{g}_i \mathbf{g}_p \end{aligned} \quad (\text{D.64})$$

可以看到，旋度运算不会带来张量阶数阶数的改变。

定理 D.2 (Christoffel 符号的计算方法)

Christoffel 符号可通过度量分量进行计算：

$$\Gamma_{ij,k}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right) (\mathbf{x}) \quad (\text{D.65})$$



证明 由于

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}(\mathbf{x}) &= \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\mathbf{g}_i(\mathbf{x}), \mathbf{g}_j(\mathbf{x}) \right)_{\mathbb{R}^m} = \left(\frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial x^k}(\mathbf{x}), \mathbf{g}_j(\mathbf{x}) \right)_{\mathbb{R}^m} + \left(\mathbf{g}_i(\mathbf{x}), \frac{\partial \mathbf{g}_j}{\partial x^k}(\mathbf{x}) \right)_{\mathbb{R}^m} \\ &= \Gamma_{ki,j}(\mathbf{x}) + \Gamma_{kj,i}(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (\text{D.66})$$

同理有

$$\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}(\mathbf{x}) = \Gamma_{ij,k}(\mathbf{x}) + \Gamma_{ik,j}(\mathbf{x}), \quad \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}(\mathbf{x}) = \Gamma_{jk,i}(\mathbf{x}) + \Gamma_{ji,k}(\mathbf{x}) \quad (\text{D.67})$$

令上两式相加再减去第一式，并利用 Christoffel 符号的对称性，可证得：

$$\Gamma_{ij,k}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}(\mathbf{x}) + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}(\mathbf{x}) - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}(\mathbf{x}) \right) \quad (\text{D.68})$$

例题 D.3 试给出 \mathbb{R}^3 空间中正交曲线坐标系下所有 27 个 Christoffel 符号的表达式。

其中，正交代表该曲线坐标系下的度量分量满足

$$[g_{ij}] = \begin{bmatrix} g_{11} & 0 & 0 \\ 0 & g_{22} & 0 \\ 0 & 0 & g_{33} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad (\text{D.69})$$

即只有对角线上的元素不为零。

解 由于正交曲线坐标系下，度量分量 g_{ij} 中许多项为零。所以这里分成几种情况讨论。

首先考虑 $i \neq j \neq k$ 的情形，易知：

$$\Gamma_{12,3} = \Gamma_{21,3} = \Gamma_{13,2} = \Gamma_{31,2} = \Gamma_{23,1} = \Gamma_{32,1} = 0 \quad (\text{D.70})$$

当 $i = j = k$ 时有

$$\Gamma_{ii,i} = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ii}}{\partial x^i} \quad (\text{D.71})$$

所以

$$\Gamma_{11,1} = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{11}}{\partial x^1}, \quad \Gamma_{22,2} = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{22}}{\partial x^2}, \quad \Gamma_{33,3} = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{33}}{\partial x^3} \quad (\text{D.72})$$

当 $i = j \neq k$ 时有

$$\Gamma_{ii,k} = -\frac{1}{2} \frac{\partial g_{ii}}{\partial x^k} \quad (\text{D.73})$$

所以

$$\begin{aligned} \Gamma_{11,2} &= -\frac{1}{2} \frac{\partial g_{11}}{\partial x^2}, & \Gamma_{11,3} &= -\frac{1}{2} \frac{\partial g_{11}}{\partial x^3}, & \Gamma_{22,1} &= -\frac{1}{2} \frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} \\ \Gamma_{22,3} &= -\frac{1}{2} \frac{\partial g_{22}}{\partial x^3}, & \Gamma_{33,1} &= -\frac{1}{2} \frac{\partial g_{33}}{\partial x^1}, & \Gamma_{33,2} &= -\frac{1}{2} \frac{\partial g_{33}}{\partial x^2} \end{aligned} \quad (\text{D.74})$$

当 $i = k \neq j$ 时有

$$\Gamma_{ij,i} = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ii}}{\partial x^j} \quad (\text{D.75})$$

所以,

$$\begin{aligned} \Gamma_{12,1} &= \Gamma_{21,1} = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{11}}{\partial x^2}, & \Gamma_{13,1} &= \Gamma_{31,1} = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{11}}{\partial x^3}, & \Gamma_{21,2} &= \Gamma_{21,2} = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} \\ \Gamma_{23,2} &= \Gamma_{32,2} = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{22}}{\partial x^3}, & \Gamma_{31,3} &= \Gamma_{13,3} = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{33}}{\partial x^1}, & \Gamma_{32,3} &= \Gamma_{32,3} = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{33}}{\partial x^2} \end{aligned} \quad (\text{D.76})$$

当 $i \neq j = k$ 时有

$$\Gamma_{ij,j} = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{jj}}{\partial x^i} \quad (\text{D.77})$$

由于 Christoffel 符号的对称性, 该类别所有取值已全部包含在上一情形中。据此, 正交曲线坐标系下所有 27 个 Christoffel 符号均全部给出。

在实际曲线坐标系下的计算过程中, 还经常会遇到二阶协变导数的情形。这里也对其做一简要说明。仍旧以二阶张量 $\Phi = \Phi_{ij} \mathbf{g}_i \mathbf{g}_j$ 为例, 根据前述左梯度的定义有

$$\begin{aligned} \nabla(\nabla\Phi) &= \mathbf{g}^p \frac{\partial}{\partial x^p} \left(\mathbf{g}^q \frac{\partial \Phi}{\partial x^q} \right) = \mathbf{g}^p \left[-\Gamma_{ps}^q \mathbf{g}^s \frac{\partial \Phi}{\partial x^q} + \mathbf{g}^q \frac{\partial}{\partial x^p} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x^q} \right) \right] \\ &= \mathbf{g}^p \mathbf{g}^q \left[\frac{\partial}{\partial x^p} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x^q} \right) - \Gamma_{pq}^s \frac{\partial \Phi}{\partial x^s} \right] \end{aligned} \quad (\text{D.78})$$

上式第二步中, 对展开后的第一项做了一次指标更换, 从而统一了表达式。

上式也可采用协变算子来表示, 有

$$\begin{aligned} \nabla(\nabla\Phi) &= \mathbf{g}^p \frac{\partial \left(\nabla_q \Phi^{ij} \mathbf{g}^q \mathbf{g}_i \mathbf{g}_j \right)}{\partial x^p} = \left(\nabla_p \nabla_q \Phi^{ij} \right) \mathbf{g}^p \mathbf{g}^q \mathbf{g}_i \mathbf{g}_j \\ &= \mathbf{g}^p \mathbf{g}^q \left[\nabla_p \left(\nabla_q \Phi^{ij} \right) \mathbf{g}_i \mathbf{g}_j \right] \end{aligned} \quad (\text{D.79})$$

联立公式(D.78)和(D.79), 则可得到:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^p} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x^q} \right) &= \nabla_p \left(\nabla_q \Phi^{ij} \right) \mathbf{g}_i \mathbf{g}_j + \Gamma_{pq}^s \frac{\partial \Phi}{\partial x^s} \\ &= \left[\nabla_p \left(\nabla_q \Phi^{ij} \right) + \Gamma_{pq}^s \nabla_s \Phi^{ij} \right] \mathbf{g}_i \mathbf{g}_j \end{aligned} \quad (\text{D.80})$$

其中, $\nabla_p (\nabla_q \Phi^{ij}) + \Gamma_{pq}^s \nabla_s \Phi^{ij}$ 被称为张量分量的二阶协变导数。

可以看到, 二阶协变导数无法像一阶协变导数那样, 用协变算子来完全表示, 需要注意区分。



D.5 正交曲线坐标系

正交曲线坐标系下常用单位正交基 \mathbf{e}_i 作为基向量，即有（下式指标不求和）

$$\mathbf{g}_i = h_i \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij} \quad (\text{D.81})$$

其中， h_i 定义为拉梅（Lamé）系数，满足（下式指标不求和）

$$h_i = \sqrt{\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_i} = \sqrt{g_{ii}} \quad (\text{D.82})$$

根据基向量与度量分量的关系，有（下式第二等式后指标不求和）

$$\mathbf{g}_i = g_{ij} \mathbf{g}^j = g_{ii} \mathbf{g}^i = h_i^2 \mathbf{g}^i \quad (\text{D.83})$$

则逆变基向量也可以转化为单位正交基，即有（下式指标不求和）

$$\mathbf{g}^i = \frac{1}{h_i^2} \mathbf{g}_i = \frac{1}{h_i} \mathbf{e}_i \quad (\text{D.84})$$

上述单位正交基的表示法也被称为非完整系。值得注意的是，一个向量在两种坐标系中进行变换时，需要考虑到向量分量的关系，具体如下（以向量 \mathbf{A} 为例）：

$$\mathbf{A} = A^i \mathbf{g}_i = A_i \mathbf{g}^i = A^i h_i \mathbf{e}_i = \frac{A_i}{h_i} \mathbf{e}^i \quad (\text{D.85})$$

结合上一节例题D.3给出的 \mathbb{R}^3 空间中正交曲线坐标系下的所有 Christoffel 符号，此时基向量关于坐标的偏导数表达式可以得到进一步简化（下述定理中指标不求和）。

定理 D.3 (单位正交基关于坐标的偏导数)

\mathbb{R}^3 空间中，正交曲线坐标系下的单位正交基 \mathbf{e}_i 关于坐标的偏导数满足

$$\frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial x_j} = \frac{1}{h_i} \frac{\partial h_j}{\partial x_i} \mathbf{e}_j, \quad i \neq j \quad (\text{D.86})$$

$$\frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial x_i} = -\frac{1}{h_i} \frac{\partial h_i}{\partial x_j} \mathbf{e}_j - \frac{1}{h_k} \frac{\partial h_i}{\partial x_k} \mathbf{e}_k, \quad i \neq j \neq k \quad (\text{D.87})$$

证明 首先根据公式(D.69)，对其矩阵形式取逆，可得到 g^{ij} 的矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} g^{ij} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{g_{11}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{g_{22}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{g_{33}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{h_1}\right)^2 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{h_2}\right)^2 & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{1}{h_3}\right)^2 \end{bmatrix} \quad (\text{D.88})$$

当 $i \neq j$ 时（此时指标求和）有

$$\frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial x^j} = \Gamma_{ij,k} \mathbf{g}^k \quad (\text{D.89})$$

根据上一节例题D.3中的分析，此时只有 $i = k \neq j$ 和 $i \neq j = k$ 两类情形的 Christoffel 符号取值不为零，所以上式(D.89)的右端可以展开为（下式指标不求和）

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij,k} \mathbf{g}^k &= \Gamma_{ij,i} \mathbf{g}^i + \Gamma_{ij,j} \mathbf{g}^j = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ii}}{\partial x^j} \mathbf{g}^i + \frac{\partial g_{jj}}{\partial x^i} \mathbf{g}^j \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial h_i^2}{\partial x^j} \mathbf{g}^i + \frac{\partial h_j^2}{\partial x^i} \mathbf{g}^j \right) = h_i \frac{\partial h_i}{\partial x^j} \mathbf{g}^i + h_j \frac{\partial h_j}{\partial x^i} \mathbf{g}^j \end{aligned} \quad (\text{D.90})$$

将逆变基向量转化为协变基向量，并考虑到正交曲线坐标系下度量分量只有 $g_{ii} = h_i$ 取值不为零，则有（下式指标不求和）

$$\begin{aligned}\Gamma_{ij,k}\mathbf{g}^k &= h_i \frac{\partial h_i}{\partial x^j} g^{ii} \mathbf{g}_i + h_j \frac{\partial h_j}{\partial x^i} g^{jj} \mathbf{g}_j = \frac{1}{h_i} \frac{\partial h_i}{\partial x^j} \mathbf{g}_i + \frac{1}{h_j} \frac{\partial h_j}{\partial x^i} \mathbf{g}_j \\ &= \frac{\partial h_i}{\partial x^j} \mathbf{e}_i + \frac{\partial h_j}{\partial x^i} \mathbf{e}_j\end{aligned}\quad (\text{D.91})$$

而公式(D.89)的左端有（下式指标不求和）

$$\frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial x^j} = \frac{\partial(h_i \mathbf{e}_i)}{\partial x^j} = h_i \frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial x^j} + \frac{\partial h_i}{\partial x^j} \mathbf{e}_i \quad (\text{D.92})$$

结合公式(D.91)和(D.92)可得（下式指标不求和）：

$$\frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial x^j} = \frac{1}{h_i} \frac{\partial h_j}{\partial x^i} \mathbf{e}_j, \quad i \neq j \quad (\text{D.93})$$

当 $i = j$ 时（此时指标求和）有

$$\frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial x^i} = \Gamma_{ii,k} \mathbf{g}^k \quad (\text{D.94})$$

此时也只有 $i = j = k$ 和 $i = j \neq k$ 两类情形，但需要注意上式(D.94)右端进行展开时， i 和 j 要视作两种不同取值情况来考虑（下式指标不求和）：

$$\begin{aligned}\Gamma_{ij,k} \mathbf{g}^k &= \Gamma_{ii,i} \mathbf{g}^i + \Gamma_{ii,j} \mathbf{g}^j + \Gamma_{ii,k} \mathbf{g}^k = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ii}}{\partial x^j} \mathbf{g}^i - \frac{\partial g_{ii}}{\partial x^j} \mathbf{g}^j - \frac{\partial g_{ii}}{\partial x^k} \mathbf{g}^k \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial h_i^2}{\partial x^j} \mathbf{g}^i - \frac{\partial h_i^2}{\partial x^j} \mathbf{g}^j - \frac{\partial h_i^2}{\partial x^k} \mathbf{g}^k \right) = h_i \left(\frac{\partial h_i}{\partial x^j} \mathbf{g}^i - \frac{\partial h_i}{\partial x^j} \mathbf{g}^j - \frac{\partial h_i}{\partial x^k} \mathbf{g}^k \right) \\ &= \frac{1}{h_i} \frac{\partial h_i}{\partial x^i} \mathbf{g}_i - \frac{h_i}{(h_j)^2} \frac{\partial h_i}{\partial x^i} \mathbf{g}_j - \frac{h_i}{(h_k)^2} \frac{\partial h_i}{\partial x^k} \mathbf{g}_k \\ &= \frac{\partial h_i}{\partial x_i} \mathbf{e}_i - \frac{h_i}{h_j} \frac{\partial h_i}{\partial x_j} \mathbf{e}_j - \frac{h_i}{h_k} \frac{\partial h_i}{\partial x_k} \mathbf{e}_k\end{aligned}\quad (\text{D.95})$$

而公式(D.94)的左端有（下式指标不求和）

$$\frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial x^i} = \frac{\partial(h_i \mathbf{e}_i)}{\partial x^i} = h_i \frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial x^i} + \frac{\partial h_i}{\partial x^i} \mathbf{e}_i \quad (\text{D.96})$$

结合公式(D.95)和(D.96)可得（下式指标不求和）：

$$\frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial x^i} = -\frac{1}{h_j} \frac{\partial h_i}{\partial x_j} \mathbf{e}_j - \frac{1}{h_k} \frac{\partial h_i}{\partial x_k} \mathbf{e}_k, \quad i \neq j \neq k \quad (\text{D.97})$$

接下来，结合定理D.3，利用 Lamé 系数，可给出正交曲线坐标系下用单位正交基表示的梯度、散度和与旋度运算计算式。

首先是梯度运算，这里采用常规的 \mathbb{R}^3 空间中标量函数 f 的梯度为例：

$$\operatorname{grad} f = \nabla f = \mathbf{g}^i \frac{\partial f}{\partial x^i} = \frac{\mathbf{e}_i}{h_i} \frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\mathbf{e}_1}{h_1} \frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\mathbf{e}_2}{h_2} \frac{\partial f}{\partial x_2} + \frac{\mathbf{e}_3}{h_3} \frac{\partial f}{\partial x_3} \quad (\text{D.98})$$

然后是散度运算，这里考虑常规的 \mathbb{R}^3 空间中向量函数 $\mathbf{A} = \tilde{A}_i \mathbf{e}_i$ 的散度，有

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A} &= \frac{\mathbf{e}_i}{h_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x_i} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{h_1 h_2 h_3}{h_i} \tilde{A}_i \right) \right] \\ &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} (\tilde{A}_1 h_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial x_2} (\tilde{A}_2 h_1 h_3) + \frac{\partial}{\partial x_3} (\tilde{A}_3 h_1 h_2) \right]\end{aligned}\quad (\text{D.99})$$

为以示区别，上面用 \tilde{A}_i 表示非完整系下的向量分量。

最后是旋度运算，同样考虑常规的 \mathbb{R}^3 空间中向量函数 $\mathbf{A} = \tilde{A}_i \mathbf{e}_i$ 的旋度：

$$\operatorname{rot} \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A} = \frac{\mathbf{e}^i}{h_i} \times \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x^i} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \mathbf{e}_1 & h_2 \mathbf{e}_2 & h_3 \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ h_1 \tilde{A}_1 & h_2 \tilde{A}_2 & h_3 \tilde{A}_3 \end{vmatrix} \quad (\text{D.100})$$

注意上两式关于散度和旋度运算的推导其实颇为繁琐，这里省略了不少步骤。

进一步，可得到 Laplace 算子的表达式，如下：

$$\begin{aligned} \nabla^2 f &= \nabla \cdot \nabla f = \operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{h_1 h_2 h_3}{h_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \right] \right\} \\ &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial f}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial f}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial f}{\partial x_3} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{D.101})$$

 **笔记** 事实上，关于上面的散度与旋度运算，确实有更简洁的求解方法，且适用于一般曲线坐标系。这里先引入 \sqrt{g} 对坐标的导数，由于 $\sqrt{g} = (\mathbf{g}_1 \times \mathbf{g}_2) \cdot \mathbf{g}_3$ ，则有

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x^i} &= \left(\frac{\partial \mathbf{g}_1}{\partial x^i} \times \mathbf{g}_2 \right) \cdot \mathbf{g}_3 + \left(\mathbf{g}_1 \times \frac{\partial \mathbf{g}_2}{\partial x^i} \right) \cdot \mathbf{g}_3 + (\mathbf{g}_1 \times \mathbf{g}_2) \cdot \frac{\partial \mathbf{g}_3}{\partial x^i} \\ &= \left(\Gamma_{1i}^k \mathbf{g}_k \times \mathbf{g}_2 \right) \cdot \mathbf{g}_3 + \left(\mathbf{g}_1 \times \Gamma_{2i}^k \mathbf{g}_k \right) \cdot \mathbf{g}_3 + (\mathbf{g}_1 \times \mathbf{g}_2) \cdot \Gamma_{3i}^k \mathbf{g}_k \\ &= (\Gamma_{1i}^1 \mathbf{g}_1 \times \mathbf{g}_2) \cdot \mathbf{g}_3 + (\mathbf{g}_1 \times \Gamma_{2i}^2 \mathbf{g}_2) \cdot \mathbf{g}_3 + (\mathbf{g}_1 \times \mathbf{g}_2) \cdot \Gamma_{3i}^3 \mathbf{g}_3 \\ &= \Gamma_{ji}^j [(\mathbf{g}_1 \times \mathbf{g}_2) \cdot \mathbf{g}_3] = \Gamma_{ji}^j \sqrt{g} \end{aligned} \quad (\text{D.102})$$

从而可得到

$$\Gamma_{ji}^j = \Gamma_{ij}^j = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x^i} \quad (\text{D.103})$$

根据散度运算的定义，则有

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{A} &= \nabla \cdot \mathbf{A} = \nabla_i A^i = \frac{\partial A^i}{\partial x^i} + \Gamma_{ij}^i A^j \\ &= \frac{\partial A^i}{\partial x^i} + A^j \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x^j} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial (\sqrt{g} A^i)}{\partial x^i} \end{aligned} \quad (\text{D.104})$$

同理根据旋度运算的定义，则有

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{A} &= \nabla \times \mathbf{A} = \nabla_i A_j \mathbf{g}^i \times \mathbf{g}^j = \epsilon^{ijk} \nabla_i A_j \mathbf{g}_k \\ &= \frac{1}{\sqrt{g}} \begin{vmatrix} \mathbf{g}_1 & \mathbf{g}_2 & \mathbf{g}_3 \\ \nabla_1 & \nabla_2 & \nabla_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (\text{D.105})$$

考虑到

$$\epsilon^{ijk} \nabla_i A_j = \epsilon^{ijk} \left(\partial_i A_j - \Gamma_{ij}^m A_m \right) = \epsilon^{ijk} \partial_i A_j - \epsilon^{ijk} \Gamma_{ij}^m A_m \quad (\text{D.106})$$

由于 ϵ^{ijk} 关于指标 ij 反对称，而 Γ_{ij}^m 关于指标 ij 对称，所以上式第二项为零，则旋度运算可简化为

$$\operatorname{rot} \mathbf{A} = \epsilon^{ijk} \partial_i A_j \mathbf{g}_k = \frac{1}{\sqrt{g}} \begin{vmatrix} \mathbf{g}_1 & \mathbf{g}_2 & \mathbf{g}_3 \\ \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix} \quad (\text{D.107})$$

在正交曲线坐标系下有

$$\sqrt{g} = [\mathbf{g}_1 \ \mathbf{g}_2 \ \mathbf{g}_3] = h_1 h_2 h_3 [\mathbf{e}_1 \ \mathbf{e}_2 \ \mathbf{e}_3] = h_1 h_2 h_3 \quad (\text{D.108})$$

同时根据公式(D.85)建立上述完整坐标系与非完整系下向量分量的关系, 如下:

$$A^i = \frac{1}{h_i} \tilde{A}_i, \quad A_i = h_i \tilde{A}_i \quad (\text{D.109})$$

将上两式代回公式(D.104)和(D.105), 即可得到同样的正交曲线坐标系下用单位正交基表示的散度和与旋度运算计算式(D.99)和(D.100)。

例题 D.4 试给出柱坐标系和球坐标系下的梯度、散度、旋度运算, 以及 Laplace 算子的表达式。

解 结合例题D.1和D.2中所给出的结果, 以及上述正交曲线坐标系下的梯度、散度、旋度, 和 Laplace 算子的计算式, 分别以标量函数 f 的梯度、向量函数 $\mathbf{A} = \tilde{A}_i \mathbf{e}_i$ 的散度, 以及向量函数 $\mathbf{A} = \tilde{A}_i \mathbf{e}_i$ 的旋度进行计算可得:

1. 柱坐标系:

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{e}_z \\ \nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tilde{A}_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{A}_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tilde{A}_z}{\partial z} \\ \nabla \times \mathbf{A} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{A}_z}{\partial \theta} - \frac{\partial \tilde{A}_\theta}{\partial z} \right) \mathbf{e}_r + \left(\frac{\partial \tilde{A}_r}{\partial z} - \frac{\partial \tilde{A}_z}{\partial r} \right) \mathbf{e}_\theta + \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tilde{A}_\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{A}_r}{\partial \theta} \right] \mathbf{e}_z \\ \nabla^2 f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{array} \right. \quad (\text{D.110})$$

2. 球坐标系:

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \mathbf{e}_\phi \\ \nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tilde{A}_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\tilde{A}_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \tilde{A}_\phi}{\partial \phi} \\ \nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\tilde{A}_\phi \sin \theta) - \frac{\partial \tilde{A}_\theta}{\partial \phi} \right] \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \tilde{A}_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r} (r \tilde{A}_\phi) \right] \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r \tilde{A}_\theta) - \frac{\partial \tilde{A}_r}{\partial \theta} \right] \mathbf{e}_\phi \\ \nabla^2 f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} \end{array} \right. \quad (\text{D.111})$$

附录 E 补充证明（指标形式）

E.1 物质导数

定义1.1中介绍的物质导数的矢量形式在有限维曲线坐标系下的张量场也同样适用。比如可以很方便地转换到柱坐标系或球坐标系，可以对向量场进行求导，也可以对张量场进行求导。下面是对该证明的简要记录：

证明 \mathbb{R}^n 空间中质点的矢径 \mathbf{r} 可视作隐含时间 t 的函数，即

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}[x^1(t), x^2(t), \dots, x^n(t)] \quad (\text{E.1})$$

则质点的速度可以通过如下方式进行计算：

$$\mathbf{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dx^i} \frac{dx^i}{dt}(t) = \frac{\partial x^i}{\partial t} \cdot \mathbf{g}_i = \dot{x}^i(t) \mathbf{g}_i(t) \quad (\text{E.2})$$

其中， \dot{x}^i 为坐标分量的导数， \mathbf{g}_i 为坐标的局部基向量（即协变基向量），其几何意义为沿着坐标线上点 x^i 的切向量。

根据物质导数两部分分量的描述，可以计算得到物质导数的矢量表达式如下：

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial x^i}{\partial t} \cdot \frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial t} + \left(\frac{\partial x^i}{\partial t} \mathbf{g}_i \right) \cdot \left(\mathbf{g}^j \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \quad (\text{E.3})$$

上式用到了附录D.1中介绍的协变基向量 \mathbf{g}_i 与逆变基向量 \mathbf{g}^j 的对偶关系。

E.2 势能与势函数

定义1.2中介绍的势能与势函数中的关系式在有限维曲线坐标系下也同样适用。下面是对该证明的简要记录：

证明 这里主要考虑公式(1.69)中恒定功 W 与势函数 φ 之间的积分关系证明：

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \nabla \varphi \cdot d\mathbf{r} = \left(\mathbf{g}^i \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \right) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^j} dx^j \right) = \left(\mathbf{g}^i \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \right) \cdot \left(\mathbf{g}_j dx^j \right) = \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} dx^i = d\varphi \quad (\text{E.4})$$

上式用到了附录D.3中介绍的曲线坐标系下 Hamilton 算子的运算表达式。

之后的论述与定义1.2的后续一致。

E.3 体积应变

定义1.5中介绍的体积应变的矢量形式在有限维曲线坐标系下也同样适用。但该证明在纯曲线坐标系下会遇到对协变导数的复杂运算，所以这里仅对非曲线坐标系，即认为基向量（仍沿用 \mathbf{g}_i 的表示法）不随坐标发生变化的情形，进行简要证明记录：

证明 考虑 \mathbb{R}^3 空间(其实也可以直接推广至 \mathbb{R}^n 空间, 这里稍微简化点)中物体的位移情况, 一点 $P(x^1, x^2, x^3)$ 变成了点 $\tilde{P}(\tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \tilde{x}^3)$, 两点间的相对位移是矢量 $\mathbf{u} = [u^1, u^2, u^3]^\top$ 。则此时可以构建出一个初始状态到当前状态的微分同胚关系, 如下:

$$\begin{cases} \tilde{x}^1 = x^1 + u^1(x^1, x^2, x^3) \\ \tilde{x}^2 = x^2 + u^2(x^1, x^2, x^3) \\ \tilde{x}^3 = x^3 + u^3(x^1, x^2, x^3) \end{cases} \quad (\text{E.5})$$

考察上式的 Jacobi 矩阵, 有

$$\mathbf{J} = \frac{\partial(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})}{\partial(x, y, z)} = \left[\frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j} \right] = \begin{bmatrix} 1 + \frac{\partial u^1}{\partial x^1} & \frac{\partial u^1}{\partial x^2} & \frac{\partial u^1}{\partial x^3} \\ \frac{\partial u^2}{\partial x^1} & 1 + \frac{\partial u^2}{\partial x^2} & \frac{\partial u^2}{\partial x^3} \\ \frac{\partial u^3}{\partial x^1} & \frac{\partial u^3}{\partial x^2} & 1 + \frac{\partial u^3}{\partial x^3} \end{bmatrix} \quad (\text{E.6})$$

考虑到小变形假设, 则上式 Jacobi 矩阵的行列式可计算为

$$\begin{aligned} \mathbf{J} = \left| \frac{\partial(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})}{\partial(x, y, z)} \right| &= 1 + \frac{\partial u^1}{\partial x^1} + \frac{\partial u^2}{\partial x^2} + \frac{\partial u^3}{\partial x^3} + \dots + o\left(\frac{\partial u^i}{\partial x^i}\right) \\ &\approx 1 + \frac{\partial u^1}{\partial x^1} + \frac{\partial u^2}{\partial x^2} + \frac{\partial u^3}{\partial x^3} = 1 + \frac{\partial u^i}{\partial x^i} \end{aligned} \quad (\text{E.7})$$

现在计算初始状态在空间区域 Ω 的体积分, 则有

$$\Delta V = \iiint_{\Omega} dV = \iiint_{\Omega} d(x^1, x^2, x^3) \quad (\text{E.8})$$

根据微积分中多重积分的积分换元关系 (基于 Jacobi 矩阵), 当前状态在变化后空间区域 $\tilde{\Omega}$ 的体积分为

$$\begin{aligned} \Delta V + \tilde{V} &= \iiint_{\Omega} d(\tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \tilde{x}^3) = \iiint_{\Omega} \left| \frac{\partial(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})}{\partial(x, y, z)} \right| d(x^1, x^2, x^3) \\ &= \Delta V + \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial u^i}{\partial x^i} \right) d(x^1, x^2, x^3) \end{aligned} \quad (\text{E.9})$$

此时, 体积应变可表示为

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\tilde{V}}{\Delta V} &= \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\Delta V} \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial u^i}{\partial x^i} \right) d(x^1, x^2, x^3) \right] \\ &= \frac{\partial u^i}{\partial x^i} = \mathbf{g}^i \cdot \frac{\partial}{\partial x^i} (u^j \mathbf{g}_j) = \nabla \cdot \mathbf{u} \end{aligned} \quad (\text{E.10})$$

E.4 场论关系式 (向量部分)

首先引入体积形态下协变算子可交换次序的定理:

引理 E.1 (体积形态下协变算子可交换次序)

以二阶张量 $\Phi = \Phi_{ij} \mathbf{g}_i \mathbf{g}_j$ 为例, 有

$$\nabla_p \nabla_q \Phi^{ij} = \nabla_q \nabla_p \Phi^{ij} \quad (\text{E.11})$$



证明 根据附录D.4中关于二阶协变导数的定义，即公式(D.80)，可直接计算：

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^p \partial x^q}(\mathbf{x}) &= \frac{\partial}{\partial x^p} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x^q} \right)(\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial x^p} \left(\nabla_q \Phi^{ij} \mathbf{g}_i \mathbf{g}_j \right)(\mathbf{x}) \\ &= \left[\nabla_p \left(\nabla_q \Phi^{ij} \right) + \Gamma_{pq}^s \nabla_s \Phi^{ij} \right] \mathbf{g}_i \mathbf{g}_j\end{aligned}\quad (\text{E.12})$$

同理有

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^q \partial x^p}(\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial x^q} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x^p} \right)(\mathbf{x}) = \left[\nabla_q \left(\nabla_p \Phi^{ij} \right) + \Gamma_{qp}^s \nabla_s \Phi^{ij} \right] \mathbf{g}_i \mathbf{g}_j \quad (\text{E.13})$$

根据张量场的微分学，体积形态下张量函数的偏导数与微积分中多元函数微分学类似（详见一般张量分析书籍。注意其仅在 Euclidean 空间适用，Riemann 空间等非欧空间并不适用），满足

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^p \partial x^q}(\mathbf{x}) = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^q \partial x^p}(\mathbf{x}) \quad (\text{E.14})$$

结合公式(E.12)和(E.13)的展开表达式，再考虑到 Christoffel 符号关于指标 ij 的对称性，故有

$$\nabla_p \nabla_q \Phi^{ij} = \nabla_q \nabla_p \Phi^{ij} \quad (\text{E.15})$$

引理1.2介绍的场论恒等式(1.65)在 \mathbb{R}^3 空间曲线坐标系下的张量场也同样适用。下面是对该证明的简要记录：

证明 考虑标量场 φ （其实也可直接推广至张量场，这里稍微简化点），直接计算：

$$\nabla \times (\nabla \varphi) = \nabla \times \left(\mathbf{g}^j \nabla_j \varphi \right) = \left(\mathbf{g}^i \times \mathbf{g}^j \right) (\nabla_i \nabla_j \varphi) = \epsilon^{ijk} \mathbf{g}_k (\nabla_i \nabla_j \varphi) \quad (\text{E.16})$$

根据附录D.2的介绍，Edington 张量 ϵ^{ijk} 关于指标 ij 反对称，而根据引理E.1有 $\nabla_i \nabla_j = \nabla_j \nabla_i$ ，故可知：

$$\nabla \times (\nabla \varphi) = 0 \quad (\text{E.17})$$

引理1.7介绍的场论恒等式(1.139)在 \mathbb{R}^3 空间曲线坐标系下的张量场也同样适用。下面是对该证明的简要记录：

证明 考虑向量场 \mathbf{A} （其实也可直接推广至张量场，这里稍微简化点），直接计算：

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla \cdot \left[\left(\mathbf{g}^j \times \mathbf{g}^i \right) \nabla_j A_i \right] = \left[\mathbf{g}^k \ \mathbf{g}^j \ \mathbf{g}^i \right] \nabla_k \nabla_j A_i = \epsilon^{kji} \nabla_k \nabla_j A_i \quad (\text{E.18})$$

由于 ϵ^{kji} 关于指标 kj 反对称，而 $\nabla_i \nabla_j = \nabla_j \nabla_i$ ，故有

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0 \quad (\text{E.19})$$

引理1.9介绍的场论恒等式(1.163)在 \mathbb{R}^3 空间曲线坐标系下的张量场也同样适用。下面是对该证明的简要记录：

证明 考虑向量场 \mathbf{u} （其实也可直接推广至张量场，这里稍微简化点），从等式右边的 $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{u})$ 开始计算：

$$\begin{aligned}\nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) &= \mathbf{g}_l \times \nabla^l \left(\epsilon^{ijk} \nabla_i u_j \mathbf{g}_k \right) = \epsilon_{lks} \epsilon^{ijk} \left(\nabla^l \nabla_i u_j \right) \mathbf{g}^s = \epsilon_{slk} \epsilon^{ijk} \left(\nabla^l \nabla_i u_j \right) \mathbf{g}^s \\ &= \left(\delta_s^i \delta_l^j - \delta_l^i \delta_s^j \right) \nabla^l \nabla_i u_j \mathbf{g}^s = \nabla^j \nabla_i u_j \mathbf{g}^i - \nabla^i \nabla_i u_j \mathbf{g}^j \\ &= \nabla_i \left(\nabla^j u_j \right) \mathbf{g}^i - \nabla^i \nabla_i u_j \mathbf{g}^j = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) - \nabla^2 \mathbf{u}\end{aligned}\quad (\text{E.20})$$

上式推导利用了附录D.2介绍的 Eddington 张量同 Kronecker 符号之间的关系。

根据上述推导，还可将其一般化，得到如下向量恒等式：

引理 E.2 (叉积运算恒等式)

\mathbb{R}^3 空间中任意向量场 $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ 之间存在如下关系式：

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C} \quad (\text{E.21})$$

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C} = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{C} \cdot \mathbf{B})\mathbf{A} \quad (\text{E.22})$$



证明 直接计算：

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) &= A^l \mathbf{g}_l \times (\epsilon^{ijk} B_i C_j \mathbf{g}_k) = \epsilon_{lks} \epsilon^{ijk} (A^l B_i C_j) \mathbf{g}^s = \epsilon_{slk} \epsilon^{ijk} (A^l B_i C_j) \mathbf{g}^s \\ &= (\delta_s^i \delta_l^j - \delta_l^i \delta_s^j) A^l B_i C_j \mathbf{g}^s = A^j B_i C_j \mathbf{g}^i - A^i B_i C_j \mathbf{g}^j \\ &= (A^j C_j) B_i \mathbf{g}^i - (A^i B_i) C_j \mathbf{g}^j = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C} \end{aligned} \quad (\text{E.23})$$

根据叉积运算性质，结合公式(E.21)，有

$$(\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \times \mathbf{A} = -\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} \quad (\text{E.24})$$

对上式将向量 \mathbf{B} 替换为向量 \mathbf{A} 、向量 \mathbf{C} 替换为向量 \mathbf{B} 、向量 \mathbf{A} 替换为向量 \mathbf{C} ，即可得到公式(E.22)。

引理1.10介绍的含 **Hamilton 算子** 的函数积的微分运算式在 \mathbb{R}^3 空间曲线坐标系下的张量场也同样适用。下面是对该证明的简要记录：

证明 对于任意标量场 φ 和向量场 \mathbf{A} 向量场（其实也可直接推广至张量场，这里稍微简化点），如果采用协变导数的推导方式证明公式(1.164)和(1.165)，还需要提前引入协变导数也满足类似微积分中函数积的微分运算法则这一性质。但除此之外，还有一种可以不使用协变导数的证明方法，以公式(1.164)为例：

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\varphi \mathbf{A}) &= \mathbf{g}^i \cdot \frac{\partial(\varphi \mathbf{A})}{\partial x^i} = \mathbf{g}^i \cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \mathbf{A} + \varphi \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x^i} \right) = \left(\mathbf{g}^i \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \right) \cdot \mathbf{A} + \varphi \mathbf{g}^i \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x^i} \right) \\ &= (\nabla \varphi) \cdot \mathbf{A} + \varphi (\nabla \cdot \mathbf{A}) \end{aligned} \quad (\text{E.25})$$

公式(1.165)同理，除了将散度运算换为旋度运算，其余证明过程完全一致。

引理1.11介绍的含 **Laplace 算子** 的基本关系式(1.180)在有限维曲线坐标系下的张量场也同样适用。下面是对该证明的简要记录：

证明 考虑向量场 \mathbf{u} （其实也可直接推广至张量场，这里稍微简化点），直接计算：

$$\nabla \cdot (\nabla^2 \mathbf{u}) = \nabla_l \mathbf{g}^l \cdot (\nabla^i \nabla_i u^j \mathbf{g}_j) = \nabla_j \nabla^i \nabla_i u^j = \nabla^i \nabla_i (\nabla_j u^j) = \nabla^2 (\nabla \cdot \mathbf{u}) \quad (\text{E.26})$$

引理1.12介绍的含 **Laplace 算子** 的基本关系式(1.187)在 \mathbb{R}^3 空间曲线坐标系下的张量场也同样适用。下面是对该证明的简要记录：

证明 考虑向量场 \mathbf{u} （其实也可直接推广至张量场，这里稍微简化点），直接计算：

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla^2 \mathbf{u}) &= \nabla_l \mathbf{g}^l \times (\nabla^i \nabla_i u_j \mathbf{g}^j) = \epsilon^{ljk} \nabla_l \nabla^i \nabla_i u_j \mathbf{g}_k \\ &= \nabla^i \nabla_i (\epsilon^{ljk} \nabla_l u_j \mathbf{g}_k) = \nabla^2 (\nabla \times \mathbf{u}) \end{aligned} \quad (\text{E.27})$$

E.5 场论关系式（张量部分）

引理1.4介绍的向量值映照的微分关系可以适用于任意有限维曲线坐标系。下面是对该证明的简要记录：

证明 直接计算：

$$d\mathbf{u} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x^i} dx^i = \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x^i} \mathbf{g}^i \right) \cdot (\mathbf{g}_j dx^j) = \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x^i} \mathbf{g}^i \right) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^j} dx^j \right) = (\mathbf{u} \nabla) \cdot d\mathbf{r} \quad (\text{E.28})$$

定义1.4介绍的角速度张量中，公式(1.109)可以适用于任意 \mathbb{R}^3 空间的曲线坐标系。下面是对该证明的简要记录：

证明 Cartesian 坐标系下，根据公式(1.108)，反对称张量 $\boldsymbol{\Omega}$ 的分量可用置换符号 ϵ_{ijk} 来完全表示，如下：

$$\Omega_{ij} = -\epsilon_{ijk} \omega_k \quad (\text{E.29})$$

一般曲线坐标系下，反对称张量 $\boldsymbol{\Omega}$ 可推广至用置换张量 ϵ_{ijk} 来完全表示（这里采用协变基向量），如下：

$$\boldsymbol{\Omega} = \Omega^{ij} \mathbf{g}_i \mathbf{g}_j = -\epsilon^{ijk} \omega_k \mathbf{g}_i \mathbf{g}_j \quad (\text{E.30})$$

则有

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{r} &= \left(-\epsilon^{ijk} \omega_k \mathbf{g}_i \mathbf{g}_j \right) \cdot r_s \mathbf{g}^s = \left(-\epsilon^{ijk} \omega_k \mathbf{g}_i \right) r_j = \epsilon^{ikj} \omega_k r_j \mathbf{g}_i \\ &= \left(\omega_k \mathbf{g}^k \right) \times \left(r_j \mathbf{g}^j \right) = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \end{aligned} \quad (\text{E.31})$$

引理1.5介绍的张量迹运算的基本关系式可以适用于任意有限维曲线坐标系。下面是对该证明的简要记录：

证明 直接计算：

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \nabla + \nabla \mathbf{u} &= \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x^i} \mathbf{g}^i + \mathbf{g}^i \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x^i} = \nabla_i u^j \mathbf{g}_j \mathbf{g}^i + \nabla_i u^j \mathbf{g}^i \mathbf{g}_j \\ &= \nabla_j u^i \mathbf{g}_i \mathbf{g}^j + \nabla_i u^j g^{is} g_{jl} \mathbf{g}_s \mathbf{g}^l \\ &= (\nabla_j u^i + \nabla^s u_l) \mathbf{g}_i \mathbf{g}^j \end{aligned} \quad (\text{E.32})$$

所以

$$\text{tr}(\mathbf{u} \nabla + \nabla \mathbf{u}) = \nabla_j u^j + \nabla^s u_s = 2 \nabla_i u^i = 2 \mathbf{g}^i \cdot \frac{\partial}{\partial x^i} (u^j \mathbf{g}_j) = 2 \nabla \cdot \mathbf{u} \quad (\text{E.33})$$

可以看到，引理1.5在曲线坐标系下成立的条件是，张量 $\mathbf{u} \nabla + \nabla \mathbf{u}$ 所使用的基向量为 $\mathbf{g}_i \mathbf{g}^j$ ，此时其所形成矩阵的迹才满足 $\text{tr}(\mathbf{u} \nabla + \nabla \mathbf{u}) = 2 \nabla \cdot \mathbf{u}$ 。

引理1.6介绍的含 Hamilton 算子的张量运算式可以适用于任意有限维曲线坐标系。下面是对该证明的简要记录：

证明 单位张量 \mathbf{I} 可写作 $\mathbf{I} = \delta_{ks} \mathbf{g}_k \mathbf{g}_s$ ，则有

$$\nabla \cdot [(\nabla \cdot \mathbf{u}) \mathbf{I}] = \left(\mathbf{g}^j \cdot \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \left(\nabla_i u^i \delta_{ks} \mathbf{g}_k \mathbf{g}_s \right) = \nabla_j \nabla_i u^i \delta_k^j \delta_{ks} \mathbf{g}_s = \nabla_j \nabla_i u^i \mathbf{g}^j = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) \quad (\text{E.34})$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{u} \nabla) = \left(\mathbf{g}^l \cdot \frac{\partial}{\partial x^l} \right) \left(\nabla_j u^i \mathbf{g}_i \mathbf{g}^j \right) = \nabla_i \nabla_j u^i \mathbf{g}^j = \nabla_j \nabla_i u^i \mathbf{g}^j = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) \quad (\text{E.35})$$



$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\nabla \mathbf{u}) &= \left(\mathbf{g}^l \cdot \frac{\partial}{\partial x^l} \right) \left(\nabla_i u^j \mathbf{g}^i \mathbf{g}_j \right) = \left(\mathbf{g}^l \cdot \frac{\partial}{\partial x^l} \right) \left(\nabla_i u^j g^{is} \mathbf{g}_s \mathbf{g}_j \right) \\ &= \nabla_l \nabla_i u^j g^{il} \mathbf{g}_j = \nabla_l \nabla^l u^j \mathbf{g}_j = \nabla^2 \mathbf{u}\end{aligned}\quad (\text{E.36})$$

E.6 广义 Gauss 公式

引理1.3介绍的广义高斯（Gauss）公式可以适用于任意有限维曲线坐标系下的张量场。这里仅采用 Cartesian 坐标系下二阶张量场的方式做一记录。

证明 利用微积分中 Gauss 公式的原型（ \mathbf{A} 为任意向量场）：

$$\oint_{\partial\Omega} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \oint_{\partial\Omega} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS = \iiint_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{A}) dV \quad (\text{E.37})$$

其分量形式为

$$\oint_{\partial\Omega} A_s n_s dS = \iiint_{\Omega} \frac{\partial A_s}{\partial x^s} dV \quad (\text{E.38})$$

由于

$$\mathbf{n} \odot \Phi = n_s \Phi_{ij} \mathbf{e}_s \odot \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = n_t \delta_{ts} \Phi_{ij} \mathbf{e}_s \odot \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \quad (\text{E.39})$$

则有

$$\begin{aligned}\oint_{\partial\Omega} (\mathbf{n} \odot \Phi) dS &= \oint_{\partial\Omega} n_t \delta_{ts} \Phi_{ij} \mathbf{e}_s \odot \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j dS = \left[\oint_{\partial\Omega} (\delta_{ts} \Phi_{ij}) n_t dS \right] \mathbf{e}_s \odot \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \\ &= \left[\iiint_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x^t} (\delta_{ts} \Phi_{ij}) dV \right] \mathbf{e}_s \odot \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \\ &= \iiint_{\Omega} \frac{\partial \Phi_{ij}}{\partial x^s} \mathbf{e}_s \odot \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j dV \\ &= \iiint_{\Omega} (\nabla \odot \Phi) dV\end{aligned}\quad (\text{E.40})$$

其中，由于 $\mathbf{e}_s \odot \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$ 均为单位基，所以可以在积分表达式中自由移动。

E.7 广义 Stokes 公式

引理2.1介绍的广义 Stokes 公式可以适用于任意有限维曲线坐标系下的张量场。这里仅采用 Cartesian 坐标系下二阶张量场的方式做一记录。

证明 利用微积分中 Stokes 公式的原型（ \mathbf{A} 为任意向量场）：

$$\oint_{\partial\Sigma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \oint_{\partial\Sigma} \mathbf{A} \cdot \mathbf{t} dl = \iint_{\Sigma} (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} = \iint_{\Sigma} (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n} dS \quad (\text{E.41})$$

其分量形式为

$$\oint_{\partial\Sigma} A_s t_s dl = \iint_{\Sigma} \left(e_{qsp} \frac{\partial A_s}{\partial x^q} \mathbf{e}_p \right) \cdot n_k \mathbf{e}_k dS = \iint_{\Sigma} n_p e_{pqk} \frac{\partial A_s}{\partial x^q} dS \quad (\text{E.42})$$

由于

$$\mathbf{t} \odot \Phi = t_s \Phi_{ij} \mathbf{e}_s \odot \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = t_t \delta_{ts} \Phi_{ij} \mathbf{e}_s \odot \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \quad (\text{E.43})$$

则有

$$\begin{aligned} \oint_{\partial\Sigma} \mathbf{t} \odot \Phi dl &= \oint_{\partial\Sigma} t_t \delta_{ts} \Phi_{ij} \mathbf{e}_s \odot \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j dl = \left[\oint_{\partial\Sigma} (\delta_{ts} \Phi_{ij}) t_t dl \right] \mathbf{e}_s \odot \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \\ &= \left[\iint_{\Sigma} n_p e_{pqk} \frac{\partial}{\partial x^q} (\delta_{ts} \Phi_{ij}) dS \right] \mathbf{e}_s \odot \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \\ &= \left[\iint_{\Sigma} n_p e_{pqk} \frac{\partial}{\partial x^q} (\Phi_{ij}) dS \right] \mathbf{e}_s \odot \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \\ &= \iint_{\Sigma} n_p e_{pqk} \mathbf{e}_s \odot \frac{\partial \Phi}{\partial x^q} dS \\ &= \iint_{\Sigma} (\mathbf{n} \times \mathbf{e}_q) \odot \frac{\partial \Phi}{\partial x^q} dS \\ &= \iint_{\Sigma} (\mathbf{n} \times \nabla) \odot \Phi dS \end{aligned} \quad (\text{E.44})$$

需要说明的是，该公式中的 $(\mathbf{n} \times \nabla) \odot \Phi$ ，应当理解为先对 Hamilton 算子 ∇ 做向量运算（不包含微分运算），再对张量场 Φ 做包含 Hamilton 算子成分的微分运算。

E.8 薄膜振动方程的一般化推导

章节2.1.3中关于平面薄膜振动方程的推导方法，也可以推广至任意曲线坐标系。

注意，该推导过程中的具体项若全部展开，将会极其繁琐，这里仅列出基本思路，不做严格证明，不过可以通过具体案例（如极坐标系）验证该推导过程的一般性。

首先根据定义2.1，不采用 Monge 形式，而是构建任意曲面参数 (ξ, η) 向 Cartesian 坐标 (x, y, z) 的微分同胚关系：

$$\Sigma(\mathbf{x}_{\Sigma}) : \mathbb{R}^2 \ni \mathbf{x}_{\Sigma} = \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} \rightarrow \Sigma(\mathbf{x}_{\Sigma}) = \begin{bmatrix} x(\xi, \eta) \\ y(\xi, \eta) \\ z = u(\xi, \eta) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad (\text{E.45})$$

求解曲面上沿 x 和 y 方向参数曲线的切向量 Σ_{ξ} 和 Σ_{η} （即协变基向量 \mathbf{g}_i ）：

$$\Sigma_{\xi} = \mathbf{g}_{\xi} = \frac{\partial \Sigma}{\partial \xi}(\xi, \eta) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \xi} \end{bmatrix}, \quad \Sigma_{\eta} = \mathbf{g}_{\eta} = \frac{\partial \Sigma}{\partial \eta}(\xi, \eta) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \eta} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (\text{E.46})$$

此时曲面单位法向量 \mathbf{n} 为

$$\mathbf{n} = \frac{\boldsymbol{\Sigma}_\xi \times \boldsymbol{\Sigma}_\eta}{|\boldsymbol{\Sigma}_\xi \times \boldsymbol{\Sigma}_\eta|} \quad (\text{E.47})$$

接下来，在应用广义 Stokes 公式对薄膜微元进行线面积分转换时，会发现 Hamilton 算子 ∇ 不太容易在 \mathbb{R}^3 空间中的任意曲面参数情形进行既定坐标系下的分量式展开，所以这里需要提前对引理2.1进行进一步扩展。

推论 E.1 (内蕴形式广义 Stokes 公式)

对于 \mathbb{R}^3 空间中曲面形态上的张量场 Φ ，存在如下线积分到面积分的转化：

$$\oint_{\partial\Sigma} (\mathbf{t} \odot \Phi) d\mathbf{l} = \iint_{\Sigma} (\mathbf{n} \times \nabla_\Sigma) \odot \Phi dS \quad (\text{E.48})$$

其中， \odot 表示任意许可的运算，包括点积、叉积和张量积。

符号 ∇_Σ 为曲面 Hamilton 算子，区别于 \mathbb{R}^3 空间中的 Hamilton 算子 ∇ ，这里 ∇_Σ 指代根据曲面参数 \mathbf{x}_Σ 构建局部坐标基所形成的双参数 Hamilton 算子。



证明 在 \mathbb{R}^3 空间中的曲面形态上，沿曲面参数构建局部坐标基，从几何意义上讲刚好为 $(\boldsymbol{\Sigma}_x, \boldsymbol{\Sigma}_y, \mathbf{n})$ 。此时 \mathbb{R}^3 空间中的 Hamilton 算子 ∇ 可以拆解为如下形式：

$$\nabla = \nabla_\Sigma + \mathbf{n} \frac{\partial}{\partial x^n} \quad (\text{E.49})$$

其中， x^n 指代沿单位法向量 \mathbf{n} 方向的坐标参数。

将上式代回引理2.1中的广义 Stokes 公式，则可得到：

$$\oint_{\partial\Sigma} (\mathbf{t} \odot \Phi) d\mathbf{l} = \iint_{\Sigma} \left[\mathbf{n} \times \left(\nabla_\Sigma + \mathbf{n} \frac{\partial}{\partial x^n} \right) \right] \odot \Phi dS = \iint_{\Sigma} (\mathbf{n} \times \nabla_\Sigma) \odot \Phi dS \quad (\text{E.50})$$

由于曲面 Hamilton 算子 ∇_Σ 仅涉及沿曲面坐标线的变化率而与沿法向量 \mathbf{n} 方向的变化率无关，所以称曲面形态下的广义 Stokes 公式为内蕴形式广义 Stokes 公式。

在曲线坐标系下，曲面 Hamilton 算子 ∇_Σ 的表达形式为

$$\nabla_\Sigma = \mathbf{g}^i \frac{\partial}{\partial x^i} = \mathbf{g}^\xi \frac{\partial}{\partial \xi} + \mathbf{g}^\eta \frac{\partial}{\partial \eta} \quad (\text{E.51})$$

可以看到，为了给出曲面 Hamilton 算子 ∇_Σ 的具体表达式，还需要提前计算出逆变基向量 \mathbf{g}^i 。具体方法如下：

1. 计算度量张量的协变分量矩阵：

$$[g_{ij}] = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_\xi \cdot \mathbf{g}_\xi & \mathbf{g}_\xi \cdot \mathbf{g}_\eta \\ \mathbf{g}_\eta \cdot \mathbf{g}_\xi & \mathbf{g}_\eta \cdot \mathbf{g}_\eta \end{bmatrix} \quad (\text{E.52})$$

2. 计算度量张量的逆变分量矩阵（对矩阵求逆运算可以通过伴随矩阵来求解）：

$$[g^{ij}] = [g_{ij}]^{-1} \quad (\text{E.53})$$

3. 考虑到 $\mathbf{g}^i = g^{is} \mathbf{g}_s$ ，可以构造矩阵格式如下，对逆变基向量 \mathbf{g}^i 进行统一计算：

$$[\mathbf{g}^\xi \ \mathbf{g}^\eta] = [\mathbf{g}_\xi \ \mathbf{g}_\eta] [g^{ij}] \quad (\text{E.54})$$

有了曲面 Hamilton 算子 ∇_Σ 的表达式，则可以根据推论E.1给出薄膜振动时任意边

界区域 $\partial\Sigma$ 上合力 \mathbf{F}_N 的大小：

$$\mathbf{F}_N = T \oint_{\partial\Sigma} (\mathbf{t} \times \mathbf{n}) \, dl = T \iint_{\Sigma} (\mathbf{n} \times \nabla_{\Sigma}) \times \mathbf{n} \, dS \quad (\text{E.55})$$

即薄膜单位面积上的合力为 $T \cdot [(\mathbf{n} \times \nabla_{\Sigma}) \times \mathbf{n}]$ 。

特别针对“微扰动”情形的薄膜振动，可以进一步计算得到（忽略关于函数 $u(\xi, \eta)$ 偏导数的高阶项）：

$$T \cdot [(\mathbf{n} \times \nabla_{\Sigma}) \times \mathbf{n}] = (T \cdot \nabla^2 u) \mathbf{k} \quad (\text{E.56})$$

注意，上式中的 ∇ 是降维后使用曲面参数 (ξ, η) 构造的二维平面 Hamilton 算子，本来与曲面 Hamilton 算子无关，但在“微扰动”情形下，可以视作 $\nabla^2 u \approx \nabla_{\Sigma}^2 u$ 。

而针对“一般扰动”情形¹（关于函数 $u(\xi, \eta)$ 偏导数的高阶项需要保留），则不能进行形如公式(E.56)的进一步化简（可以采用例如轴对称圆模情形进行反证）。

之后动力学方程的推导过程，则与前述章节内容完全一致。

正是因为有了以上描述，才可以完全明确薄膜振动方程矢量形式的一般性。当遇到其他任意曲面参数时，无论是微扰动还是一般扰动情形，均具有相应的统一计算方法。例如极坐标系下的微扰动情形，可以直接应用附录D.5最后部分计算好的柱坐标系下的 Laplace 算子展开形式（极坐标系是柱坐标系的二维形式），进行后续的运算求解（无须计算曲面 Hamilton 算子）。

¹考虑到薄膜在张紧形态下与弦一样并不能视为简单的弹性体模型，其形变产生的应力相比张力来说基本可以忽略不计，所以薄膜可能产生各种形变状态，但一般仍将张力 T 的大小视为常数进行处理。

附录 F 相关电磁学基础

电磁学作为 19 世纪物理学最重要的科学发现，奠定了第二次工业革命的理论基础。本附录系统且高度凝练了相关知识体系，包括力-电-磁的相互转换，以及电磁波的成因，借此为本书论述的电声设备收音-发声原理提供理论依据。

F.1 静电场

万物由原子组成，原子核外的电子以某种方式（如摩擦生电）在原子之间发生转移即产生电现象。此时原子失去平衡，变为带电粒子（约定电子带负电，失去电子的原子则带正电），也被称为电荷，电荷的移动即产生电流。

定理 E.1 (库仑 (Coulomb) 定律)

真空中处于静止的两个点电荷之间存在力相互作用。力 F 的大小与两个电荷所带电量 q_1 和 q_2 的乘积成正比，与相互之间距离 r 的平方成反比，即

$$F \propto \frac{q_1 q_2}{r^2} \quad (\text{E.1})$$

通过实验得到比例系数，并根据力的方向改写为矢量表达式，则有

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{\|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\|^2} \mathbf{e}_{12} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{\|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\|^3} \quad (\text{E.2})$$

其中， ϵ_0 为真空中的介电常数， \mathbf{F}_{12} 为电荷 1 向电荷 2 施加的力， \mathbf{e}_{12} 为电荷 1 指向电荷 2 的单位向量，与两个点电荷的矢径 \mathbf{r}_1 和 \mathbf{r}_2 满足关系式 $\mathbf{e}_{12} = \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{\|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\|}$ 。

Coulomb 定律是通过实验总结的电学基本规律，是物理现象的本质解释。

电荷分正电荷与负电荷，所以公式(E2)中的电荷带电量 q_1 和 q_2 可正可负，计算出的矢量力 \mathbf{F}_{12} 也刚好符合电荷“同性相斥、异性相吸”的性质，为正时是斥力（与 \mathbf{e}_{12} 方向一致），为负时是吸力（与 \mathbf{e}_{12} 方向相反）。同时可验证 $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$ ，即两者刚好组成一对相互作用力。

公式(E2)中出现 π 主要是为了计算方便，也可以提前直观理解为：任意电荷会在空间的“四面八方”对另一电荷产生力作用，所以需要用到球体计算时的参数 π 。基于该分析，电荷的这种全空间作用性质，还可进一步引出电场和电场强度的概念。

定义 E.1 (电场与电场强度)

矢径为 \mathbf{r}_0 处的点电荷在其周围空间产生静电场。此时 \mathbf{r} 处的电场强度 \mathbf{E} 为

$$\mathbf{E} = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|^3} \quad (\text{E.3})$$

其中， q_0 为该点电荷的带电量。



即，电场强度可以理解为单位电量的检验电荷在该静电场中所受的力。

根据场强叠加原理（实验结论，场强具有线性叠加性质），不同的 \mathbf{r}_i 取值对应不同的点电荷带电量 q_i ，所产生的场强进行叠加，可以扩展为 \mathbb{R}^3 空间区域 Ω_0 （体积为 V_0 ）中自变量矢径 \mathbf{r}_0 的函数，此时 \mathbf{r} 处的电场强度 \mathbf{E} 可以转化为如下的积分形式：

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n q_i \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i\|^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\Omega_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|^3} d\mathbf{q} \quad (\text{F.4})$$

以体电荷为例，有

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\Omega_0} \rho(\mathbf{r}_0) \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|^3} dV_0 \quad (\text{F.5})$$

其中， $\rho(\mathbf{r}_0)$ 为自变量 \mathbf{r}_0 处的电荷密度。

定理 E.2 (静电场的 Gauss 定理)

\mathbb{R}^3 空间区域 Ω_0 （体积为 V_0 ）中自变量矢径 \mathbf{r}_0 处的电荷（总带电量为 q_0 ）所产生的静电场，在同一空间任意区域 Ω （体积为 V ，边界的光滑闭曲面用 $\partial\Omega$ 表示）中穿过闭合面积 S 的电场强度通量（简称电通量） Φ_e 可计算为

$$\Phi_e = \iint_{\partial\Omega} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (\text{F.6})$$

其中，向量 \mathbf{S} 的方向指代闭曲面 $\partial\Omega$ 的外法向， q 为其内所包裹的总电荷量。



证明 先证明固定矢径 \mathbf{r}_0 处的点电荷情形。利用定义 1.6 介绍的 Dirac 函数，可以将区域 Ω 中的电荷密度 $\rho(\mathbf{r})$ 写为

$$\rho(\mathbf{r}) = q_0 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \quad (\text{F.7})$$

根据定义 E.1，结合微积分中 Gauss 公式的向量形式，有

$$\Phi_e = \iint_{\partial\Omega} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{E}) dV = \iiint_{\Omega} \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \left(\nabla \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|^3} \right) dV \quad (\text{F.8})$$

考虑到引理 1.8 证明过程中的 Dirac 函数公式 (1.162)，可知：

$$\nabla \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|^3} = 4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \quad (\text{F.9})$$

则有

$$\frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \left(\nabla \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|^3} \right) = \frac{q_0\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)}{\epsilon_0} = \frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0} \quad (\text{F.10})$$

代回公式 (F.8)，则可得到：

$$\Phi_e = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_{\Omega} \rho(\mathbf{r}) dV = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (\text{F.11})$$

下面证明体电荷情形，即利用公式 (F.5) 作为电场强度的计算式，根据上述类似的推导过程，结合 Dirac 函数的性质公式 (1.153)，有（注意 ∇ 仅作用于 \mathbf{r} 上）

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \nabla \cdot \iiint_{\Omega_0} \rho(\mathbf{r}_0) \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|^3} dV_0 = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_{\Omega_0} \rho(\mathbf{r}_0) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) dV_0 = \frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0} \quad (\text{F.12})$$

之后的推导与点电荷情形完全相同。



上述定理的证明过程可直接得到如下引理：

引理 E.1 (静电场 Gauss 定理微分形式)

对于静电场中任意一点，其电场强度 \mathbf{E} 满足

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (\text{E.13})$$

其中， ρ 为该点的电荷密度。



考察静电场力的势能（简称电势）变化，可以得到其做功与路径无关的结论。

定理 E.3 (静电场的环路定理)

单位检验电荷在静电场中沿闭合路径移动一周，做功为零：

$$\oint_{\partial\Sigma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (\text{E.14})$$

其中， $\partial\Sigma$ 为 \mathbb{R}^3 空间中曲面区域 Σ 沿其边界的光滑闭曲线， \mathbf{l} 为其切向量。



证明 先证明固定矢径 \mathbf{r}_0 处的点电荷情形。根据定义 1.2 的势能与势函数描述，静电场中，从 a 到 b 点，电势的减少量 $\Delta U = U_a - U_b$ ，等于单位检验电荷所做的功，有

$$U_a - U_b = \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \int_a^b \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|^3} \cdot d\mathbf{r} = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \int_a^b \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|^3} \cdot d(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \quad (\text{E.15})$$

考虑沿矢径 \mathbf{r} 方向的单位向量 $\mathbf{e}_r = \frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|}$ 的向量运算 $\mathbf{e}_r \cdot d\mathbf{r}$ ，转化为球坐标系视角，结合附录 D.1 中关于球坐标系下的协变基向量表达式(D.19)，有

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_r \cdot d\mathbf{r} &= \mathbf{e}_r \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^i} dx^i \right) = \mathbf{e}_r \cdot \left(\mathbf{g}_i dx^i \right) = \mathbf{e}_r \cdot \left(\mathbf{e}_i \|\mathbf{g}_i\| dx^i \right) \\ &= \mathbf{e}_r \cdot (\mathbf{e}_r dr + \mathbf{e}_\theta r d\theta + \mathbf{e}_\varphi r \sin\theta d\varphi) = dr \end{aligned} \quad (\text{E.16})$$

所以公式(E.15)继续化为

$$U_a - U_b = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \int_a^b \frac{1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|^2} d\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\| = -\frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|} \Big|_a^b \quad (\text{E.17})$$

以上说明，点电荷情形下的静电场中，电势的减少（单位检验电荷所做的功）只与起始位置有关，而与路径无关，由此得到闭合环路做工为零的结论（可以通过构造闭合的往返路径来证明）。

体电荷情形的证明同理，具体证明过程从略。

笔记 定理 E.3 还有一种间接但更为简单的证明方法。以点电荷情形为例（体电荷情形类似），利用引理 1.8 证明过程中的 Dirac 函数公式(1.162)，可将电场强度 \mathbf{E} 改写为

$$\mathbf{E} = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(-\nabla \frac{1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|} \right) = -\nabla \left(\frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|} \right) \quad (\text{E.18})$$

上式表明，静电场中任意一点的电场强度 \mathbf{E} 可以写作某个标量函数的梯度。根据定理 1.1 的保守场/有势场的性质，即可得到定理 E.3 的静电场的环路定理。

性质 静电场是保守场/有势场，场内处处旋度为零，即满足 $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ 。

若静电场中存在电介质（绝缘体，不导电），其内部会出现极化现象，产生极化电荷 q' （真空中的电荷可对应称为自由电荷），以及附加场强 \mathbf{E}' 。定义极化强度矢量 \mathbf{P} ，用以辅助描述穿出单位面积的极化电荷量（具体微观原理为单位体积的偶极矩之

和, 这里不做具体展开), 满足 $\mathbf{P} \cdot d\mathbf{S} = -dq'$, 进一步得到任意闭合曲面内极化强度矢量的通量等于该闭合曲面内极化电荷的减少量, 即有

$$\iint_{\partial\Omega} \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S} = -q' \quad (\text{F19})$$

令前述真空中的静电场强为 $\bar{\mathbf{E}}$, 根据电场叠加原理, 总场强 $\mathbf{E} = \bar{\mathbf{E}} + \mathbf{E}'$, 结合定理E2的静电场的 Gauss 定理, 有

$$\iint_{\partial\Omega} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{\partial\Omega} (\bar{\mathbf{E}} + \mathbf{E}') \cdot d\mathbf{S} = \frac{q + q'}{\epsilon_0} = \frac{q}{\epsilon_0} - \frac{1}{\epsilon_0} \iint_{\partial\Omega} \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S} \quad (\text{F20})$$

定义电位移矢量 $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$ (真空情形 $\mathbf{P} = 0$), 上式可变换为

$$\iint_{\partial\Omega} (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) \cdot d\mathbf{S} = \iint_{\partial\Omega} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = q \quad (\text{F21})$$

上式表明, 电介质存在的静电场中, 通过任意闭合曲面的电位移通量, 仍然等于其内包裹的自由电荷总量 (与极化电荷量无关)。

对于绝大多数各向同性的电介质, 实验表明, 其极化强度矢量 \mathbf{P} 与总场强 \mathbf{E} 存在线性关系, 此时电位移矢量 \mathbf{D} 可进一步化简为

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \epsilon_r \epsilon_0 \mathbf{E} = \epsilon \mathbf{E} \quad (\text{F22})$$

其中, ϵ_r 为电介质的相对介电常数, ϵ 为绝对介电常数。

总结来讲, 无论是否存在电介质, 与静电场性质相关的方程组可罗列如下:

$$\left\{ \begin{array}{l} \iint_{\partial\Omega} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_{\Omega} \rho dV = q \leftrightarrow \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \\ \oint_{\partial\Sigma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \leftrightarrow \nabla \times \mathbf{E} = 0 \\ \mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \epsilon \mathbf{E} \end{array} \right. \quad (\text{F23})$$

F.2 恒定磁场

恒定电流产生恒定磁场。磁场是对恒定电流之间相互作用力的一种具象化描述。永久磁铁的磁场也是恒定磁场 (可以看作是由分子尺度上的等效电流所引起的)。

定义 F.2 (电流强度)

令 Δt 时间内通过截面 Σ 的电荷总量为 ΔQ , 定义通过该面的电流强度 (简称电流) I 为

$$I = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{dQ}{dt} \quad (\text{F24})$$

由于点电荷带电量 q 在截面 Σ 上的积分即为电荷总量 Q , 上述定义也可改写为

$$I = \frac{1}{dt} \left(\iint_{\Sigma} dq \right) = \iint_{\Sigma} \frac{dq}{dt} \Rightarrow dI = \frac{dq}{dt} \quad (\text{F25})$$



定义 E3 (电流密度)

定义电流密度 \mathbf{j} , 描述单位时间流过垂直于电荷移动方向上单位面积 dS_{\perp} 的电荷量及其方向, 即有

$$\mathbf{j} = \frac{dq}{dt \cdot dS_{\perp}} = \frac{dq}{dt \cdot dS_{\perp}} \cdot \frac{dl}{dl} = \frac{dq}{dV} \mathbf{v} = \rho \mathbf{v} \quad (\text{F26})$$

其中, dl 为电荷移动方向的长度微元, $dV = dS_{\perp} \cdot dl$ 为单位体积, ρ 为该点的电荷密度, v 为其速度。



根据以上定义, 可知电流 I 和电流密度 \mathbf{j} 存在如下关系:

$$\mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = \frac{\rho dV}{dt} = \frac{dq}{dt} = dI \Rightarrow \iint_{\Sigma} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = I \quad (\text{F27})$$

其中, 向量 \mathbf{S} 的方向指代截面 Σ 的外法向。

上式表明, 电流 I 可以视作电流密度 \mathbf{j} 穿过任意截面 Σ 的通量。

定理 E.4 (安培 (Ampere) 定律)

真空中处于恒定的两段电流元之间存在力相互作用。力 F 的大小与两段线电流元 $I_1 dl_1$ 和 $I_2 dl_2$ 的乘积成正比, 与相互之间距离 r 的平方成反比, 即

$$dF \propto \frac{I_1 dl_1 \cdot I_2 dl_2}{r^2} \quad (\text{F28})$$

通过实验得到比例系数, 并根据力的方向改写为矢量表达式, 则有

$$d\mathbf{F}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I_2 dl_2 \times (I_1 dl_1 \times \mathbf{e}_{12})}{\|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\|^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I_2 dl_2 \times [I_1 dl_1 \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)]}{\|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\|^3} \quad (\text{F29})$$

其中, μ_0 为真空中的磁导率, \mathbf{F}_{12} 为电流元 1 向电流元 2 施加的力, \mathbf{e}_{12} 为电流元 1 指向电流元 2 的单位向量, 与两段电流元的矢径 \mathbf{r}_1 和 \mathbf{r}_2 满足关系式 $\mathbf{e}_{12} = \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{\|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\|}$ 。



Ampere 定律也是通过实验总结的电学基本规律, 其所指出恒定电流之间的相互作用力, 被定义为磁力(或 Ampere 力)。可以看到, Ampere 定律的公式形式与 Coulomb 定律高度一致, 但两次叉积运算并不直观, 这里附加两点说明以便加深认知:

1. 电流元的相互作用力永远垂直于其本身的矢量方向(线电流元即 Idl);
2. 同向电流元相互排斥, 异向电流元相互吸引。

根据以上描述, 加上使用右手定则判断叉积向量方向, 可以明确电流元之间相互作用力的具体方向。更进一步, 与静电场一样, 电流元的这种全空间作用性质, 还可进一步引出磁场和磁感应强度的概念。

定理 E.5 (毕奥-萨伐尔 (Biot-Savart) 定律)

矢径为 \mathbf{r}_0 处的电流元在其周围空间产生恒定磁场。此时 \mathbf{r} 处的磁感应强度 \mathbf{B} 为

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I_0 dl_0 \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|^3} \quad (\text{F30})$$

其中, $I_0 dl_0$ 为矢径 \mathbf{r}_0 处的线电流元矢量。



磁感应强度同样可以理解为单位电流元在该恒定磁场中所受的力, 但受力方向与

磁感应强度矢量垂直（满足右手定则）。

性质 关于判断磁感应强度矢量方向的 Ampere 定则（右手螺旋定则）：

- 右手指向通电直导线的电流方向，四指缠绕方向为其产生的磁场方向；
- 四指沿通电线圈的电流方向握紧，大拇指所指方向为其产生的磁场方向。

与电场叠加原理类似，磁场也具有线性叠加性质。若将线电流元（单位面积的电荷流量用 q 表示）转化为电流密度 \mathbf{j} 表示的体电流元：

$$Id\mathbf{l} = \frac{dq}{dt}d\mathbf{l} = \left(\frac{dq}{dV} \mathbf{v} \right) dV = \mathbf{j} dV \quad (\text{E31})$$

则 \mathbf{r} 处的磁感应强度 \mathbf{B} 可以转化为如下的积分形式：

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\Omega_0} \mathbf{j}(\mathbf{r}_0) \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|^3} dV_0 \quad (\text{E32})$$

其中， $\mathbf{j}(\mathbf{r}_0)$ 为 \mathbb{R}^3 空间区域 Ω_0 （体积为 V_0 ）中自变量 \mathbf{r}_0 处的电荷密度。

定理 E.6 (恒定磁场的 Gauss 定理)

\mathbb{R}^3 空间中的恒定磁场，在同一空间任意区域 Ω （体积为 V ，边界的光滑闭曲面用 $\partial\Omega$ 表示）中穿过穿过闭合面积 S 的磁感应强度通量（简称磁通量）为

$$\Phi_m = \iint_{\partial\Omega} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (\text{E33})$$

其中，向量 \mathbf{S} 的方向指代闭曲面 $\partial\Omega$ 的外法向。



证明 以体电流元表示的磁感应强度情形为例，相比静电场的 Gauss 定理，这里想直接对公式(E33)进行求解不容易。受公式(F18)的启发，结合引理1.8证明过程中的 Dirac 函数公式(1.162)和引理1.10介绍的含 Hamilton 算子的函数积的微分运算式(1.165)，并考虑到此时 ∇ 算子不作用于 $\mathbf{j}(\mathbf{r}_0)$ ，可将公式(E32)改写为

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\Omega_0} \mathbf{j}(\mathbf{r}_0) \times \left(-\nabla \frac{1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|} \right) dV_0 = \nabla \times \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\Omega_0} \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}_0)}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|} dV_0 \right) \quad (\text{E34})$$

上式表明，恒定磁场中任意一点的磁感应强度 \mathbf{B} 可以写作某个向量函数的旋度。根据定理1.2的管型场/无源场的性质，可知磁感应强度 \mathbf{B} 的散度为零。

利用微积分中 Gauss 公式的向量形式，所以有

$$\Phi_m = \iint_{\partial\Omega} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{B}) dV = 0 \quad (\text{E35})$$

性质 恒定磁场是管型场/无源场，场内处处散度为零，即满足 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ 。

定理 E.7 (Ampere 环路定理)

\mathbb{R}^3 空间中的恒定磁场，磁感应强度 \mathbf{B} 在曲面区域 Σ 沿其边界光滑闭曲线 $\partial\Sigma$ （切向量为 \mathbf{l} ）进行环路积分，其值等于通过该曲面区域 Σ 的电流总和 I 的 μ_0 倍：

$$\oint_{\partial\Sigma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I \quad (\text{E36})$$



证明 以体电流元表示的磁感应强度情形为例，利用引理E.2的叉积运算恒等式(E.21)，

计算磁感应强度 \mathbf{B} 的旋度，有

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\Omega_0} \nabla \times \left(\mathbf{j}(\mathbf{r}_0) \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|^3} \right) dV_0 \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\Omega_0} \left[\left(\nabla \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|^3} \right) \mathbf{j}(\mathbf{r}_0) - (\nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}_0)) \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|^3} \right] dV_0\end{aligned}\quad (\text{F37})$$

考虑到此时 ∇ 算子不作用于 $\mathbf{j}(\mathbf{r}_0)$ ，有 $\nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}_0) = 0$ ，再结合引理 1.8 证明过程中的 Dirac 函数公式(1.162)和 Dirac 函数的性质公式(1.153)，可知：

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\Omega_0} \left(\nabla \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|^3} \right) \mathbf{j}(\mathbf{r}_0) dV_0 = \mu_0 \iiint_{\Omega_0} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \mathbf{j}(\mathbf{r}_0) dV_0 = \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}) \quad (\text{F38})$$

利用微积分中 Stokes 公式的向量形式，所以有

$$\oint_{\partial\Sigma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \iint_{\Sigma} (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{S} = \mu_0 \iint_{\Sigma} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = \mu_0 I \quad (\text{F39})$$

其中，向量 \mathbf{S} 的方向指代闭曲面 Σ 的外法向。

上述定理的证明过程可直接得到如下引理：

引理 E.2 (Ampere 环路定理微分形式)

对于恒定磁场中任意一点，其磁感应强度 \mathbf{B} 满足

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} \quad (\text{F40})$$

其中， \mathbf{j} 为该点的电流密度。



若恒定磁场中存在磁介质（泛指一切物质），其内部会出现磁化现象，产生磁化电流 I' （真空中的电流可对应称为传导电流），以及附加磁感应强度 \mathbf{B}' 。定义磁化强度矢量 \mathbf{M} ，用以辅助描述任意闭合曲线 $\partial\Sigma$ （切向量为 \mathbf{l} ）中环路积分得到的磁化电流量（具体微观原理为单位体积的分子磁矩之和，这里不做具体展开），满足

$$\oint_{\partial\Sigma} \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l} = I' \quad (\text{F41})$$

令前述真空中的磁感应强度为 $\bar{\mathbf{B}}$ ，根据磁场叠加原理，总磁感应强度 $\mathbf{B} = \bar{\mathbf{B}} + \mathbf{B}'$ ，结合定理 E.7 的 Ampere 环路定理，有

$$\oint_{\partial\Sigma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \oint_{\partial\Sigma} (\bar{\mathbf{B}} + \mathbf{B}') \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 (I + I') = \mu_0 I + \mu_0 \oint_{\partial\Sigma} \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l} \quad (\text{F42})$$

定义磁场强度矢量 \mathbf{H} 满足 $\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M})$ （真空情形 $\mathbf{M} = 0$ ），上式可变换为

$$\oint_{\partial\Sigma} \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \right) \cdot d\mathbf{l} = \oint_{\partial\Sigma} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I \quad (\text{F43})$$

上式表明，磁介质存在的恒定磁场中，对磁场强度进行环路积分，仍然等于通过该包裹曲面的传导电流总量（与磁化电流量无关）。

对于绝大多数各向同性的磁介质，实验表明，其磁化强度矢量 \mathbf{M} 与磁场强度矢量 \mathbf{H} 存在线性关系，此时总场强 \mathbf{B} 可进一步化简为

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \mu_r \mu_0 \mathbf{H} = \mu \mathbf{H} \quad (\text{F44})$$

其中， μ_r 为磁介质的相对磁导率， μ 为绝对磁导率。



总结来讲，无论是否存在磁介质，与恒定磁场性质相关的方程组可罗列如下：

$$\left\{ \begin{array}{l} \oint_{\partial\Omega} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \leftrightarrow \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \oint_{\partial\Sigma} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \oint_{\Sigma} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = I \leftrightarrow \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} \\ \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \mu \mathbf{H} \end{array} \right. \quad (\text{F45})$$

E.3 Lorentz 力

考虑电磁场耦合的复合矢量场 $\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) + \mathbf{B}(\mathbf{r})$ ，代入体积形态表示的电场强度公式(F5)和磁感应强度公式(F32)，并结合引理E1的静电场 Gauss 定理微分形式(F13)和引理E2的 Ampere 环路定理微分形式(F40)，可以得到：

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) + \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\Omega_0} \rho(\mathbf{r}_0) \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|^3} dV_0 + \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\Omega_0} \mathbf{j}(\mathbf{r}_0) \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|^3} dV_0 \\ &= \frac{1}{4\pi} \iiint_{\Omega_0} \bar{\nabla} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}_0) \left(\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|^3} \right) dV_0 + \frac{1}{4\pi} \iiint_{\Omega_0} \bar{\nabla} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}_0) \times \left(\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|^3} \right) dV_0 \quad (\text{F46}) \\ &= \frac{1}{4\pi} \iiint_{\Omega_0} \bar{\nabla} \cdot \mathbf{u}(\mathbf{r}_0) \left(\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|^3} \right) dV_0 + \frac{1}{4\pi} \iiint_{\Omega_0} \bar{\nabla} \times \mathbf{u}(\mathbf{r}_0) \times \left(\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|^3} \right) dV_0 \end{aligned}$$

其中， $\bar{\nabla}$ 是作用于 \mathbb{R}^3 空间区域 Ω_0 （体积为 V_0 ）中自变量矢径 \mathbf{r}_0 的 Hamilton 算子。上式与定理1.3的 Helmholtz 分解形成呼应（电场强度 \mathbf{E} 为无旋场，磁感应强度 \mathbf{B} 为无散场），并与 Helmholtz 分解的定量化公式(1.177)具有完全统一的形式，是数学原理在真实物理世界中完美映射的体现。

进一步考察带电粒子在复合电磁场中的受力现象，可引出如下定义：

定义 E.4 (洛伦兹 (Lorentz) 力)

电磁场中的运动带电粒子受到力 \mathbf{F} 的作用，定义为洛伦兹 (Lorentz) 力，满足

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (\text{F47})$$

其中， q 为带电粒子的电荷量， \mathbf{v} 为带电粒子的运动速度。



Lorentz 力实际是通过实验发现的基本物理规律，但也可以通过定理E4的 Ampere 定律进行导出，具体证明过程如下：

证明 带电粒子在电场中的受力 $\mathbf{F}_e = q\mathbf{E}$ 可根据 Coulomb 定律直接得到，这里主要考虑磁场中的受力 \mathbf{F}_m 。当带电粒子处于运动状态时，结合定理E4的 Ampere 定律和定理E5的 Biot-Savart 定律，电流元 1 向电流元 2 施加的力 \mathbf{F}_{12} 可转化为

$$d\mathbf{F}_{12} = I_2 d\mathbf{l}_2 \times d\mathbf{B} \Rightarrow d\mathbf{F}_2 = I_2 d\mathbf{l}_2 \times \mathbf{B} \quad (\text{F48})$$

其中，为了得到电流元 2 在完整场强中所受的力，将电流元 1 所产生单位磁感应强度进行了积分。随后，将上式的下标均去掉，结合体电流元转换公式(E31)，再次进

行积分，可得到任意带电粒子在磁场中所受的完整力 \mathbf{F}_m ，如下：

$$d\mathbf{F}_m = Id\mathbf{l} \times \mathbf{B} = \mathbf{j} dV \times \mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{F}_m = \iiint_{\Omega} \rho v dV \times \mathbf{B} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (\text{E49})$$

其中， Ω 为带电粒子所包裹的区域，体积为 V 。

将电场力 \mathbf{F}_e 和磁场力 \mathbf{F}_m 相加，即可得到 Lorentz 力的完整表达形式(E47)。

从以上推导可以看到，恒定磁场中的 Ampere 力和 Lorentz 力，分别从宏观和微观的角度描述了磁力现象。

F.4 电磁感应

电可以产生磁，一个直观的想法即磁感应也可反向产生电。

定理 E8 (法拉第 (Faraday) 电磁感应定律)

任意回路中，磁通量 Φ_m 随时间 t 的改变会产生感应电动势 \mathcal{E} ，且满足

$$\mathcal{E} = \oint_{\partial\Sigma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi_m}{dt} = -\iint_{\Sigma} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \quad (\text{E50})$$

其中， $\partial\Sigma$ 为 \mathbb{R}^3 空间中曲面区域 Σ 沿其边界的光滑闭曲线， \mathbf{l} 为其切向量， \mathbf{S} 指代闭曲面 Σ 的外法向。



Faraday 电磁感应定律可以通过一些基本假设，利用数学推导得出其定量表达式，但这里还是将其视作与前述定理类似的基本物理现象的归纳总结。

根据 Faraday 电磁感应定律的描述，磁通量的改变可以有两种方式，一种是磁场本身随时间发生变化，另一种是电流回路发生变化（产生切割磁感线现象），前者被称作感生电动势，后者被称作动生电动势。

为了更形象化总结 Faraday 电磁感应定律，可以采用楞次 (Lenz) 定律的描述，即感应电流的产生，总是要“阻碍”其产生的原因。事实上，这也是电磁现象能量守恒的一种表现。此外，Lenz 定律可以较方便地判断感应电流的方向。

利用微积分中 Stokes 公式的矢量形式，公式(E50)可进一步变化为：

$$\oint_{\partial\Sigma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \iint_{\Sigma} (\nabla \times \mathbf{E}) d\mathbf{S} = -\iint_{\Sigma} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \Rightarrow \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (\text{E51})$$

由于静电场的旋度处处为零，所以公式(E50)和(E51)也可作为对电场强度 \mathbf{E} 的一种统一描述（其旋度只对应磁场变化的部分）。

F.5 Maxwell 方程组

自此，关于电磁学的相关理论已基本阐述完毕，目前还只剩下最后一块遗漏之处。从公式(E51)可以看到，静电场与变化的磁场均囊括在内，相对应地，具有相同形式的公式(E45)第二式却只有恒定磁场，而没有变化的电场。



对公式(F45)的第二式（以微分形式为例）两边求散度，结合引理1.7的场论恒等式(1.139)，会得到一个不够完备的关系式：

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad (\text{F52})$$

考虑到与章节1.4中流体的连续性方程(1.49)相同，电荷流动也可以推导出：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{v} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad (\text{F53})$$

根据上式，对于静电场来说，电荷密度 ρ 不随时间发生变化，所以电流密度 \mathbf{j} 的散度确实为零。但如果是变化的电场，则必须要对公式(F45)的第二式进行改写。

利用公式(F23)的第一式（微分形式），可将公式(F53)变换为

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \quad (\text{F54})$$

所以，为了抵消公式(F52)中 $\nabla \cdot \mathbf{j}$ 带来的不合理性，只需将公式(F45)的第二式（微分形式）改写为下式即可：

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \mathbf{j}_d = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (\text{F55})$$

其中，加入的新项 \mathbf{j}_d 被称为位移电流密度，其对应曲面区域 Σ 内进行积分后的电流项 I_d 被称为位移电流。

综上所述，可以得到如下被称作麦克斯韦（Maxwell）方程组的电磁学统一理论：

定义 F.5 (麦克斯韦 (Maxwell) 方程组)

积分形式 (Ω, Σ 等符号体系与前述保持一致)：

$$\left\{ \begin{array}{l} \iint_{\partial\Omega} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = q \\ \oint_{\partial\Sigma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \iint_{\Sigma} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \\ \iint_{\partial\Omega} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \\ \oint_{\partial\Sigma} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \iint_{\Sigma} \left(\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S} \end{array} \right. \quad (\text{F56})$$

微分形式：

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \end{array} \right. \quad (\text{F57})$$

其中，

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}, \quad \mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) \quad (\text{F58})$$



Maxwell 方程组的积分形式，从宏观层面描述电磁场特征，采用的视角为矢量在某区域内的通量和环量；而微分形式，则从微观层面描述电磁场特征，采用的视角为矢量在某点处的散度和旋度。

 **笔记** 与 Maxwell 方程组相互配合的还有一组介质方程，分别描述了介质的电磁性质：**D-E** 极化关系、**B-H** 磁化关系，以及 **j-E** 导电关系。前两者已在前述进行介绍（注意不是公式(E58)，该公式普遍成立，与介质性质无关），对于各向同性介质，分别满足 $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ 和 $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ ；而最后一个 **j-E** 导电关系，其实是前述章节定理1.4介绍的电路中 Ohm 定律（恒定条件下通过导体的电流与其两端电势差成正比）的微分形式，在均匀导电介质中满足 $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$ ，其中 σ 为电导率。

E.6 电磁波

Maxwell 方程组以极其精简的方式，给出了电磁学相关的所有知识内容，理论上可以解决一切电磁学问题。作为典型案例，下面将直接通过对 Maxwell 方程组进行变换，导出电磁波的表达形式。

在自由空间（没有电荷和传导电流）中，以各向同性介质为例，Maxwell 方程组的微分形式(E57)可化为

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{B} = \epsilon \mu \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{array} \right. \quad (\text{E59})$$

对上式第二式再求旋度，结合引理1.9的场论恒等式(1.163)，可得：

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\nabla^2 \mathbf{E} \quad (\text{E60})$$

同时，根据公式(E59)的第二式和第四式，有

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{B} = -\epsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad (\text{E61})$$

联立上两式，可以得到形如章节1.4和1.5中的波动方程：

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = c^2 \cdot \nabla^2 \mathbf{E} \quad (\text{E62})$$

从公式(E59)的第四式开始再求旋度，同理可得：

$$\frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = c^2 \cdot \nabla^2 \mathbf{B} \quad (\text{E63})$$

其中，公式(E62)和(E63)中的波速 c 均为

$$c = \sqrt{\frac{1}{\epsilon \mu}} \quad (\text{E64})$$

公式(E62)和(E63)表明，若存在一定激励，电场或磁场将会在自由空间中以波动

的形式向远处进行传递，同时变化的电场产生磁场，变化的磁场又产生电场，如此交织往复，形成“永不消逝的电波”。

例题 F.1 试计算真空中的电磁波波速。

解 根据前述推导，真空情形下，极化强度矢量 \mathbf{P} 和磁化强度矢量 \mathbf{M} 均为零，相对应的电磁波波速计算式(F64)将会变为

$$c = \sqrt{\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}} \quad (\text{F65})$$

国际单位制(SI制)中，真空中的介电常数 $\epsilon_0 = 8.854187817 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2$ ，真空中的磁导率 $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2$ ，代入上式可得真空中的电磁波波速 $c \approx 2.99792458 \times 10^8 \text{ m/s}$ 。此结果与真空中测得的光速一致，说明光是一种电磁波。

例题 F.2 试分析平面电磁波模型的相关特征。

解 这里采用 Cartesian 坐标系做一简要记录。将电磁波考虑成与章节1.6.2相同的平面波情形，即波动行为只依赖于单一直线方向的影响，对 \mathbb{R}^3 空间的 d'Alembert 行波解公式(1.229)进行简化，结合弦振动无穷级数形式的一般解公式(2.23)，采用正向传播的单一频率正弦波特解(单色波)进行构造(电磁波的初始激励大多为固定频率的周期信号)，有

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 \sin \left[\frac{\omega_e}{c} (\mathbf{m} \cdot \mathbf{r} - ct) + \varphi_e \right], \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}_0 \sin \left[\frac{\omega_m}{c} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} - ct) + \varphi_m \right] \quad (\text{F66})$$

其中， \mathbf{E}_0 和 \mathbf{B}_0 分别为与电场强度 \mathbf{E} 和磁感应强度 \mathbf{B} 同向或反向的常向量，两者的模长 $\|\mathbf{E}_0\|$ 和 $\|\mathbf{B}_0\|$ 可视作振幅；单位常向量 \mathbf{m} 和 \mathbf{n} 指代两者波的传播方向； ω_e, φ_e 和 ω_m, φ_m 分别代表两者波的角频率和初始相位。

考虑到公式(F59)的第一式和第三式，电场强度 \mathbf{E} 和磁感应强度 \mathbf{B} 的散度均为零，根据章节1.6.2的论述可知 $\mathbf{m} \cdot \mathbf{E} = 0$ 和 $\mathbf{n} \cdot \mathbf{B} = 0$ ，即两者均为横波。

将公式(F66)代回公式(F59)的第二式，结合引理1.10介绍的含 Hamilton 算子的函数积的微分运算式(1.165)，有

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} &= \nabla \sin \left[\frac{\omega_e}{c} (\mathbf{m} \cdot \mathbf{r} - ct) + \varphi_e \right] \times \mathbf{E}_0 \\ &= \frac{\omega_e}{c} \cos \left[\frac{\omega_e}{c} (\mathbf{m} \cdot \mathbf{r} - ct) + \varphi_e \right] [(\mathbf{m} \cdot \mathbf{i}) \mathbf{i} + (\mathbf{m} \cdot \mathbf{j}) \mathbf{j} + (\mathbf{m} \cdot \mathbf{k}) \mathbf{k}] \times \mathbf{E}_0 \\ &= \frac{\omega_e}{c} \cos \left[\frac{\omega_e}{c} (\mathbf{m} \cdot \mathbf{r} - ct) + \varphi_e \right] \mathbf{m} \times \mathbf{E}_0 \end{aligned} \quad (\text{F67})$$

而

$$-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \omega_m \cos \left[\frac{\omega_m}{c} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} - ct) + \varphi_m \right] \mathbf{B}_0 \quad (\text{F68})$$

上两式恒相等，所以

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{m} = \mathbf{n}, \quad \omega_e = \omega_m, \quad \varphi_e = \varphi_m \\ \frac{1}{c} \mathbf{m} \times \mathbf{E}_0 = \mathbf{B}_0 \Rightarrow \frac{1}{c} \mathbf{m} \times \mathbf{E} = \mathbf{B} \end{array} \right. \quad (\text{F69})$$

同理，若将公式(F66)代回公式(F59)的第四式，还可得到：

$$\mathbf{n} \times \mathbf{B}_0 = -\frac{1}{c} \mathbf{E}_0 \Rightarrow \mathbf{n} \times \mathbf{B} = -\frac{1}{c} \mathbf{E} \quad (\text{F70})$$

即，电磁波的传播方向、频率和初始相位均相同，振动幅值成比例，满足 $\|E_0\| = c\|\mathbf{B}_0\|$ ，且电场强度 \mathbf{E} 、磁感应强度 \mathbf{B} ，以及电磁波传播方向 \mathbf{m} 或 \mathbf{n} 两两垂直，构成右手系。

将以上描述绘制成波形图，则如下图E1所示：

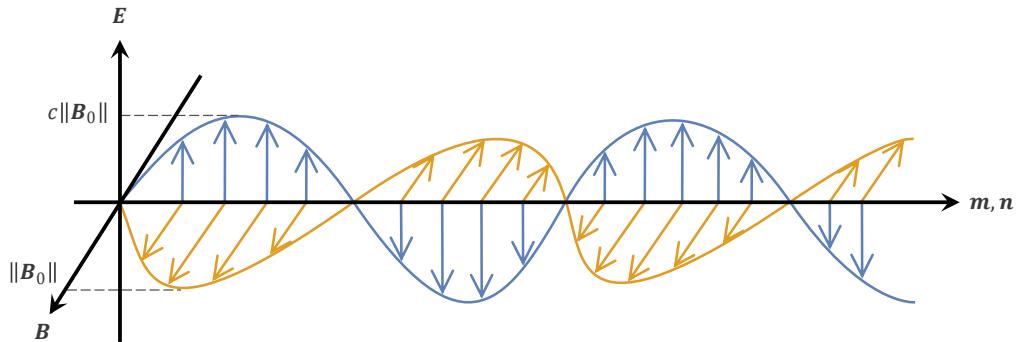


图 E.1：平面电磁波传播示意图

附录 G 特殊函数相关

G.1 Gamma 函数

为了后续需要，首先给出 Γ (Gamma) 函数的定义及其基本性质。

定义 G.1 (Γ 函数的定义及其性质)

在区间 $(0, \infty)$ 上， Γ 函数被定义为

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt \quad (G.1)$$

其满足如下基本性质：

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \quad (G.2)$$



证明 根据 Γ 函数的定义，其性质可通过分部积分法直接证明：

$$\begin{aligned} \Gamma(x+1) &= \int_0^\infty e^{-t} t^x dt = - \int_0^\infty t^x d(e^{-t}) \\ &= -t^x e^{-t} \Big|_{t=0}^\infty + x \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt = x\Gamma(x) \end{aligned} \quad (G.3)$$

进一步，根据

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} dt = 1 \quad (G.4)$$

可得到重要的递推公式：

$$\Gamma(n+1) = n!, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (G.5)$$

所以， Γ 函数可看作阶乘运算在实数或复数域的拓展。当定义域取正整数时， $\Gamma(n+1)$ 即为阶乘 $n!$ 。

 **笔记** 需指出， Γ 函数在 $(-\infty, 0]$ 上没有定义（积分不收敛，详见数学分析相关书籍）。

G.2 Bessel 方程

在许多实际物理问题中，所建立的微分方程并非为常系数的方程，此时的求解将会非常困难，解的形式也无法用初等函数进行表示。贝塞尔 (Bessel) 函数即为求解 Bessel 方程时所建立的一类特殊函数。

定义 G.2 (Bessel 方程)

在区间 $(0, \infty)$ 上，如下微分方程：

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - \nu^2) y = 0 \quad (G.6)$$

被定义为 ν 阶 Bessel 方程。其中， ν 为任意非负常数，不一定为整数。



对变系数微分方程的求解，通常的方法是采用幂级数解法，即令

$$y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \quad (\text{G.7})$$

代回原微分方程，通过待定系数法给出无穷级数形式的通解。

但是，若采用公式(G.7)的构造形式代回方程(G.6)，阶数 ν 的存在会给方程的求解带来麻烦。此时合适的方法是改写为如下广义幂级数的构造形式：

$$y(x) = x^\rho \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+\rho} \quad (\text{G.8})$$

其中 ρ 为待定常数。

再次将改写后的公式(G.8)代回方程(G.6)，可以得到：

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (k+\rho)(k+\rho-1) x^{k+\rho} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k (k+\rho) x^{k+\rho} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+\rho+2} - \sum_{k=0}^{\infty} a_k \nu^2 x^{k+\rho} = 0 \quad (\text{G.9})$$

重新整理上式，并将 x 的同次幂合并，则有

$$\sum_{k=0}^{\infty} [(k+\rho)^2 - \nu^2] a_k x^{k+\rho} + \sum_{k=2}^{\infty} a_{k-2} x^{k+\rho} = 0 \quad (\text{G.10})$$

上式需恒等于零，所以 x 各次幂的系数均为零，可以导出：

$$\begin{cases} a_0 (\rho^2 - \nu^2) = 0, & k=0 \\ a_1 [(\rho+1)^2 - \nu^2] = 0, & k=1 \\ a_k [(\rho+k)^2 - \nu^2] + a_{k-2} = 0, & k \geq 2 \end{cases} \quad (\text{G.11})$$

由于总可以通过调整 ρ 让 a_0 不为零，所以根据上式中的第一项可知 $\rho = \pm \nu$ 。这两个根刚好对应方程(G.6)的两个解。

G.3 第一类 Bessel 函数

首先考虑 $\rho = \nu$ 的情形。将其代入公式(G.11)的后两式可逐个计算出 a_k 的表达式（除 a_0 以外）：

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_k = -\frac{a_{k-2}}{k(k+2\nu)}, & k=2,3,\dots \end{cases} \quad (\text{G.12})$$

根据上述迭代关系，当 k 为奇数时，有 $a_k = 0$ ；而当 k 为偶数时，可通过变量替换 $k = 2m$ ，由递推关系得到：

$$a_{2m} = \frac{(-1)^m}{2^{2m} m! (1+\nu)(2+\nu)(3+\nu)\cdots(m+\nu)} a_0 \quad (\text{G.13})$$

将 ρ 和 a_{2m} 的关系式一起代入(G.8)，可得到 Bessel 方程(G.6)的一个特解：

$$y = a_0 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2^{2m} m! (1+\nu)(2+\nu)(3+\nu)\cdots(m+\nu)} x^{2m+\nu} \quad (\text{G.14})$$

上式中的 a_0 为一个任意常数，可以取其为

$$a_0 = \frac{1}{2^\nu \Gamma(\nu+1)} \quad (\text{G.15})$$

此时公式(G.14)中 2 和 x 的幂次数相同, 可以合并同类项; 同时, 根据 Γ 函数的基本性质, 即关系式(G.2):

$$\begin{aligned}\Gamma(1+\nu)[(1+\nu)(2+\nu)\cdots(m+\nu)] &= \Gamma(2+\nu)[(2+\nu)(3+\nu)\cdots(m+\nu)] \\ &= \cdots = \Gamma(m+\nu) \cdot (m+\nu) = \Gamma(m+\nu+1)\end{aligned}\quad (\text{G.16})$$

最终公式(G.14)可写成一种简洁形式, 一般用 $J_\nu(x)$ 表示:

$$J_\nu(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\Gamma(m+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\nu} \quad (\text{G.17})$$

该特解 $J_\nu(x)$ 被称为 ν 阶 **Bessel 函数**。由上式易知, $J_0(0) = 1$, $J_\nu(0) = 0 (\nu > 0)$ 。

当 ν 取值为零和正整数时, 即 $\nu = n (n = 0, 1, 2, \dots)$, 利用 Γ 函数的递推公式(G.5), 可得到整数阶的 Bessel 函数表达式:

$$J_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(m+n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+n} \quad (\text{G.18})$$

为方便直观理解, 这里给出 n 阶 Bessel 函数的坐标曲线, 如下图G.1所示:

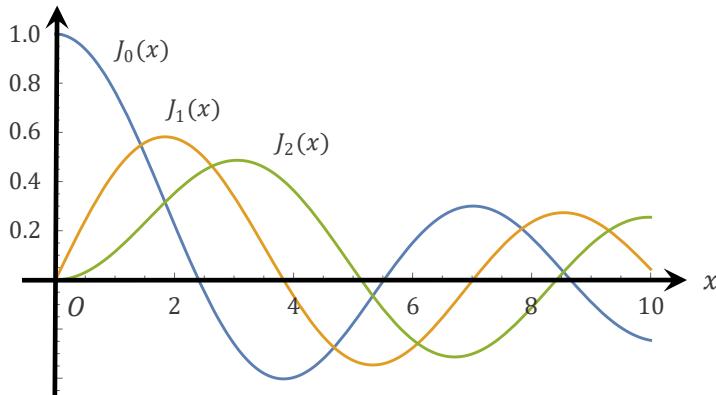


图 G.1: n 阶 Bessel 函数的坐标曲线

可以看到, n 阶 Bessel 函数均呈现出类似带“衰减”特征的三角函数图形, 且具有无穷多个零点。

继续考虑 $\rho = -\nu$ 的情形, 只需将公式(G.17)中 ν 替换为 ν 即可得到 Bessel 方程(G.6)的另一个特解:

$$J_{-\nu}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\Gamma(m-\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m-\nu} \quad (\text{G.19})$$

$J_{\pm\nu}(x)$ 统称为第一类 **Bessel 函数**。

G.4 第二类 Bessel 函数

第一类 Bessel 函数给出了两个 Bessel 方程(G.6)的特解 $J_\nu(x)$ 和 $J_{-\nu}(x)$ 。接下来需要考虑两者的线性相关性, 以决定如何最终给出 Bessel 方程(G.6)的通解。

当 ν 为整数时, 根据公式(G.19)可写出:

$$J_{-n}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\Gamma(m-n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m-n} \quad (\text{G.20})$$

由于当 $m-n+1 \leq 0$ 时, Γ 函数发散, 可理解为 $\Gamma(m-n+1) \rightarrow \infty$, 即有 $\frac{1}{\Gamma(m-n+1)} \rightarrow 0$ 。因此, 实际上只有从 $m=n$ 开始, 上式的求和才有非零数值:

$$J_{-n}(x) = \sum_{m=n}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma(m-n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m-n} \quad (\text{G.21})$$

令 $m=k+n$, 再结合 Γ 函数的递推关系式(G.5), 则上式可变换为

$$\begin{aligned} J_{-n}(x) &= (-1)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+n)! \Gamma(k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n} \\ &= (-1)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n} \end{aligned} \quad (\text{G.22})$$

考虑上式与公式(G.18)的关系可知:

$$J_n(x) = (-1)^n J_{-n}(x) \quad (\text{G.23})$$

说明整数阶情形下, $J_n(x)$ 与 $J_{-n}(x)$ 线性相关。

为了找到另一个与 $J_v(x)$ 线性无关的特解 (无论 v 是否为整数), 通常会引入如下诺依曼 (Neumann) 函数 $N_v(x)$:

$$N_v(x) = \frac{J_v(x) \cos v\pi - J_{-v}(x)}{\sin v\pi} \quad (\text{G.24})$$

根据上式的构造可以看出, 整数阶的 Neumann 函数 $N_n(x)$ 应当理解为 $v \rightarrow n$ 时, $N_v(x)$ 的极限。

Neumann 函数一般也被称为第二类 Bessel 函数, 用 $Y_v(x)$ 表示。

综上, v 阶 Bessel 方程(G.6)的通解可由两个线性无关的特解 $J_v(x)$ 和 $Y_v(x)$ 组成, 其通解的形式可写为

$$y(x) = AJ_v(x) + BY_v(x) \quad (\text{G.25})$$

其中, A 和 B 为积分常数, 由微分方程的边界条件确定。

同样为方便理解, 这里给出第二类 Bessel 函数 $Y_n(x)$ 的坐标曲线, 如下图G.2所示:

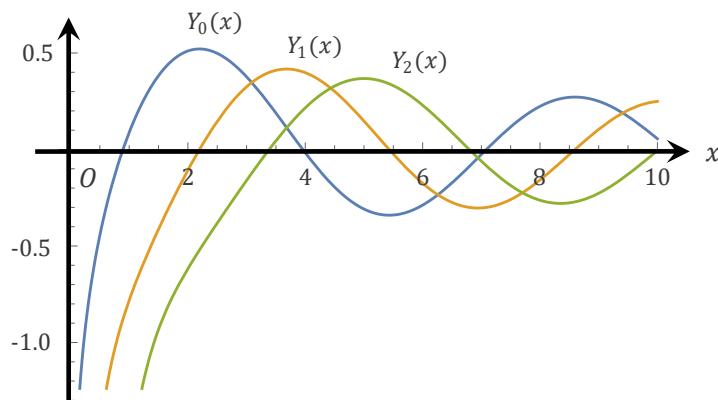


图 G.2: n 阶第二类 Bessel 函数的坐标曲线

 **笔记** 第二类 Bessel 函数的构造方式看上去神乎其技, 若要追根溯源, 需要从微分方程的朗斯基 (Wroński) 行列式开始讨论。这部分内容可参阅专门的数学物理方法书籍, 这里不做具体展开。

G.5 修正 Bessel 函数

原则上讲，前述两类 Bessel 函数并未规定自变量不能是复数。但从实用角度来说，自变量为纯虚数的 Bessel 函数可以单独做一探讨，由如下方式引出。

Bessel 方程(G.6)存在一种常见的变种，其方程形式如下：

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} - (x^2 + v^2) y = 0 \quad (\text{G.26})$$

其中 x 为实数。若令 $t = jx$ ，则有 $x = -jt$ ，再根据如下关系式：

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{-j \cdot dt} = j \frac{dy}{dt} \\ \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = j \frac{d}{dt} \left(j \frac{dy}{dt} \right) = -\frac{d^2 y}{dt^2} \end{cases} \quad (\text{G.27})$$

代回原方程(G.26)可转化为前述介绍的 v 阶贝塞尔方程(G.6)，故方程(G.26)也被称为修正 Bessel 方程（或虚宗量 Bessel 方程）。

由于 v 阶贝塞尔方程(G.6)的其中一个特解为第一类 Bessel 函数 $J_v(x)$ ，所以根据变量替换易知修正 Bessel 方程(G.26)的其中一个特解为 $J_v(jx)$ 。

但是 $J_v(jx)$ 的形式为复数，对于实系数方程(G.26)来说，在物理上并不方便进行探讨，所以希望能通过某种方式构造出相对应的实数解。

当第一类 Bessel 函数的自变量为纯虚数 jx (x 为实数) 时，根据公式(G.17)可以求得函数值也为复数：

$$J_v(jx) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma(m+v+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+v} = j^v \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m! \Gamma(m+v+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+v} \quad (\text{G.28})$$

此时根据上式的结构可以构建一个修正 Bessel 方程(G.26)的实数解，如下：

$$I_v(x) = j^{-v} J_v(jx) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m! \Gamma(m+v+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+v} \quad (\text{G.29})$$

$I_v(x)$ 被称为第一类修正 Bessel 函数（或第一类虚宗量 Bessel 函数）。

可以明显看出，当 x 和 v 均为实数时， $I_v(x)$ 的函数值也为实数。另外由上式易知， $I_0(0) = 1$, $I_v(0) = 0 (v > 0)$ 。

进一步分析，对于整数阶的第一类修正 Bessel 函数 $I_n(x)$ 来说，结合关系式(G.23)可以得到：

$$I_{-n}(x) = j^n J_{-n}(jx) = \frac{j^n}{(-1)^n} J_n(jx) = \frac{j^{2n}}{(-1)^n} [j^{-n} J_n(jx)] = I_n(x) \quad (\text{G.30})$$

即 $I_n(x)$ 和 $I_{-n}(x)$ 两者线性相关，同样不能构成修正 Bessel 方程(G.26)的通解。

所以，需要仿照上一节类似的做法，继续定义与 $I_v(x)$ 线性无关（无论 v 是否为整数）的第二类修正 Bessel 函数（或第二类虚宗量 Bessel 函数），如下：

$$K_v(x) = \frac{\pi}{2 \sin v\pi} [I_{-v}(x) - I_v(x)] \quad (\text{G.31})$$

同理，根据上式的构造可以看出，整数阶的第二类修正 Bessel 函数 $K_n(x)$ 应当理解为 $v \rightarrow n$ 时， $K_v(x)$ 的极限。

下图G.3给出了 $x > 0$ 情形下，两类修正 Bessel 函数 $I_n(x)$ 和 $K_n(x)$ 的坐标曲线。可



以看到, $I_n(x)$ 是单调递增函数, 而 $K_n(x)$ 是单调递减函数。

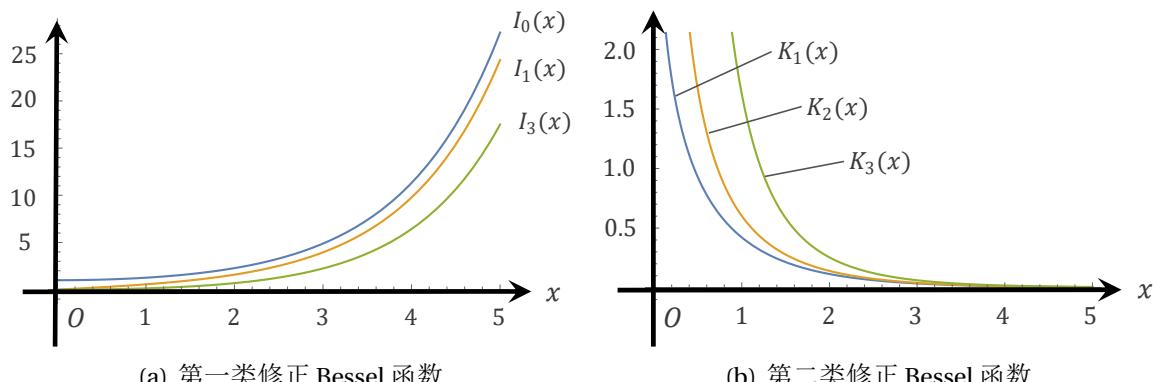


图 G.3: 两类修正 Bessel 函数的坐标曲线

附录 H 和声理论相关

H.1 和声可视化

在和声理论中，通常以十二音体系为基准对音乐进行调律。12 这个数字的公约数¹较多，除了 1 和自己以外，还包括 2, 3, 4, 6 四个。所以在实际选取单音进行音阶、和弦或音程关系的构建时，十二平均律框架下将会产生许多具有对称结构的组合。

下图H.1将十二平均律的单音按顺序进行环绕表示，分别给出了以 2, 3, 4, 6 为单音间隔所构建出的音阶、和弦或音程关系的可视化结果，可以明显看出这些情形下音阶、和弦与音程关系的对称性。

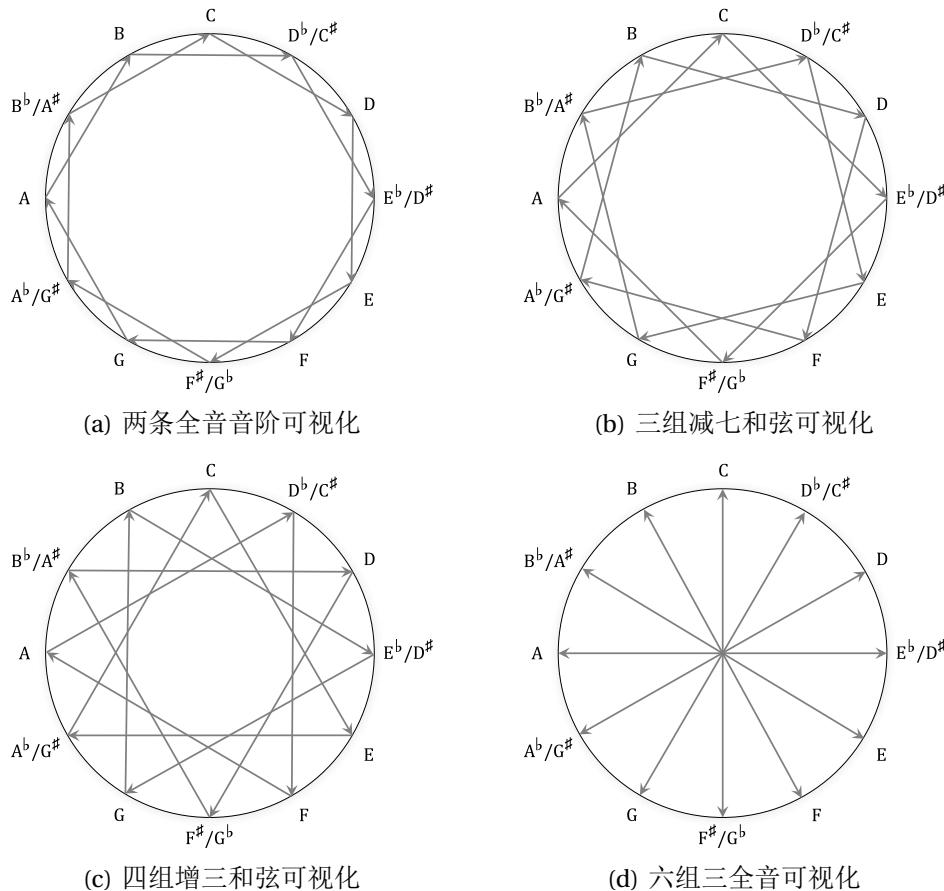


图 H.1: 十二音体系下的和声对称性

无论音阶、和弦，还是音程关系，在选取构建音时，都大概率不会让音与音之间的间隔完全相同，但也存在图H.1中所示的四种特例：

¹约数也称为因数，指能将一个整数整除的整数。

1. 全音音阶：以2个半音为间隔，挑选出6个音所构建出的音阶，组成正六边形。按半音进行旋转，单从构建音角度来分析，总共只有两种不同的可能；
2. 减七和弦：以3个半音为间隔，挑选出4个音所构建出的和弦，组成正方形。按半音进行旋转，单从构建音角度来分析，总共只有三种不同的可能；
3. 增三和弦：以4个半音为间隔，挑选出3个音所构建出的和弦，组成等边三角形。按半音进行旋转，单从构建音角度来分析，总共只有四种不同的可能；
4. 三全音：以6个半音为间隔，挑选出2个音所构建出的音程关系，组成直线。按半音进行旋转，单从构建音角度来分析，总共只有六种不同的可能。

可以进行验证，十二音体系下，无论通过其他何种方式所构建出的单音组合，均不会具备以上四种特例的对称性质。

除此以外，根据减七和弦衍化出的两类减音阶：Whole-Half减音阶和Half-Whole减音阶，也具有类似的对称性。为简化说明，下图H.2给出了由C为起始音的减七和弦所构造出的两类减音阶可视化结果。

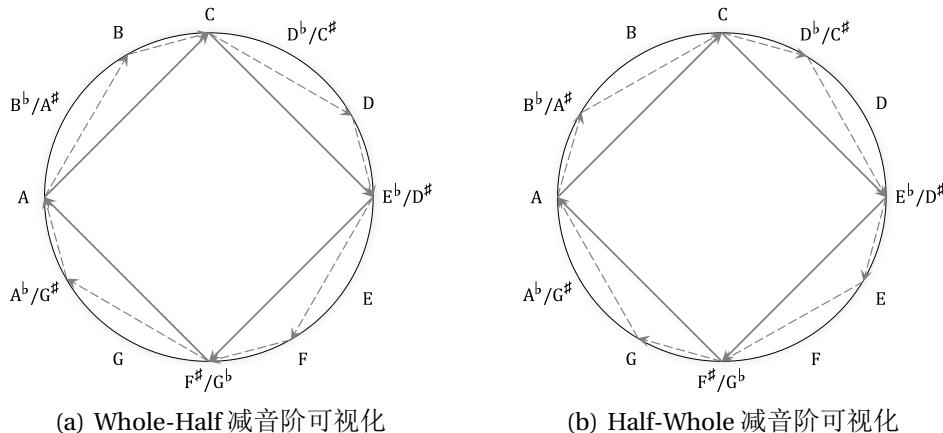


图 H.2: 两种减音阶与减七和弦的对照关系

可以看到，无论是Whole-Half减音阶还是Half-Whole减音阶，均可以视作减七和弦的某种“扩展”，无非是将3个半音的间隔拆解为“2+1”或者“1+2”的组合。所以尽管减音阶本身并不具备完全的对称性，但与减七和弦相同，如果按半音进行旋转，单从构建音角度来分析，总共只有三种不同的可能。

按照上述逻辑进一步分析，增三和弦或三全音也可以基于这种“扩展”方式进行拆解。不过对于增三和弦而言，4个半音的间隔如果拆解为“2+2”的组合，那本身便是全音音阶；而如果拆解为“1+3”的组合，又并没有这种常用的音阶或和弦。三全音的情形亦是如此。

H.2 常用调式音阶汇总对比

下表H.1给出了本书提及的所有调式音阶在十二平均律中的位置对比。其中，每一个半音对应一个方格，到7音后进入循环（即7音与下一个1音相连，而 $\flat 7$ 音和下

一个 1 音之间会空一个方格)，可以对不同调式音阶的音程关系有一个更清晰直观的认知。

表 H.1: 常用调式音阶及不同的音程关系对比

Ionian	1		2		3	4		5		6		7
Dorian	1		2	$\flat 3$		4		5		6	$\flat 7$	
Phrygian	1	$\flat 2$		$\flat 3$		4		5	$\flat 6$		$\flat 7$	
Phrygian Dominant	1	$\flat 2$			3	4		5	$\flat 6$		$\flat 7$	
Lydian	1		2		3		$\sharp 4$	5		6		7
Mixolydian	1		2		3	4		5		6	$\flat 7$	
Aeolian	1		2	$\flat 3$		4		5	$\flat 6$		$\flat 7$	
Locrian	1	$\flat 2$		$\flat 3$		4	$\flat 5$		$\flat 6$		$\flat 7$	
和声小调	1		2	$\flat 3$		4		5	$\flat 6$			7
中国五声音阶	1		2		3			5		6		
平调子五声音阶	1		2	$\flat 3$				5	$\flat 6$			
阴旋五声音阶	1		2	$\flat 3$				5		6		
东南亚五声音阶	1				3	4		5				7
印度五声音阶	1				3	4		5			$\flat 7$	
Jazz Minor	1		2	$\flat 3$		4		5		6		7
Dorian $\flat 2$ (Phrygian $\sharp 6$)	1	$\flat 2$		$\flat 3$		4		5		6	$\flat 7$	
Lydian Augmented($\sharp 5$)	1		2		3		$\sharp 4$		$\sharp 5$			7
Lydian Dominant($\flat 7$)	1		2		3		$\sharp 4$	5		6	$\flat 7$	
Mixolydian $\flat 6$	1		2		3	4		5	$\flat 6$		$\flat 7$	
Locrian $\sharp 2$ (Half-diminished)	1		2	$\flat 3$		4	$\flat 5$		$\flat 6$		$\flat 7$	
Super Locrian(Altered)	1	$\flat 2$		$\flat 3$	$\flat 4$		$\flat 5$		$\flat 6$		$\flat 7$	
W/H-dim	1		2	$\flat 3$		4	$\flat 5$		$\flat 6$	6		7
H/W-dim	1	$\flat 2$		$\flat 3$	3		$\flat 5$	5		6	$\flat 7$	
Whole-tone	1		2		3		$\sharp 4$		$\sharp 5$		$\sharp 6$	
Bebop Dorian	1		2	$\flat 3$	$\flat 4$	4		5		6	$\flat 7$	
Bebop Dominant	1		2		3	4		5		6	$\flat 7$	7
Bebop Major	1		2		3	4		5	$\flat 6$	6		7
Bebop Minor	1		2	$\flat 3$		4		5	$\flat 6$	6		7
Minor Blues	1			$\flat 3$		4	$\sharp 4$	5			$\flat 7$	
Major Blues	1		2	$\sharp 2$	3			5		6		

H.3 级数和弦的功能属性汇总

下表H.2给出了七个级数和弦的功能属性汇总，可同时适用于大调和小调调式。另外，当在小调中讨论和弦进行时（统一用大调级数表示），为了让 $D \rightarrow T$ 的倾向更明



显，将采用和声小调的属和弦（对于关系大调来说，即 III_m 变为 III）：

表 H.2: 级数和弦的功能属性汇总

级数和弦	功能属性	应用场景	Turnaround 示例
I	T	乐曲的起始与结束	I → ⋯ → I
V	D	解决到主和弦	V → I
IV	S	直接接到主和弦	IV → I
		接到属和弦	IV → V → I
		作为起始和弦	IV → V → (III _m) → VI _m
VI _m	T & S	替代主和弦	VI _m → IV → I → V
		衔接主/下属和弦	I → VI _m → IV → V
III _m	D & T	小调的属和弦	VI _m → V → IV → III
		衔接主/下属和弦	I → III _m → IV → V
II _m	S	下属功能，比 IV 更深沉	II _m → V → I
VII∅	D	属功能，但常用于小调的下属	VII∅ → III → VI _m

H.4 和声逻辑思维导图

和声理论的基础逻辑，即构造和弦“流动”的“倾向性”，由此引出两条基本线路：功能和声与非功能和声。

功能和声需要构建强烈的从“紧张”到“释放”的过程，所以最根本的和弦进行即为 V → I（属 → 主），只是和弦的使用上会产生不同的色彩（古典、流行、Jazz 等）；在此基础上，引入下属和弦（IV 级和弦），构建和弦进行的缓冲区域。至此，产生了三类基础的功能和弦：主（I）、下属（S）和属（D）。其余级数和弦均可囊括在这三大类功能和弦中，进一步衍申出各类和弦进行的变种。

除此之外，在功能和声中，为了增加和弦进行的“刺激感”，一般会使用“离调”和“转调”的手法。离调又可简单分为副属和弦、代理和弦与调式转换和弦三类。副属和弦即构造临时的属 → 主，由此产生调性外的新和弦（如临时 II → V → I）；代理和弦即通过各种逻辑原理（如无根音、三全音、共同音等），用其他色彩更突出的和弦取代原有的和弦；调式转换和弦即根据不同调式的顺接和弦可以相互转换（如 C 大调和 c 小调），完成和弦替代。转调主要是通过一定的和声手法（如硬转、通过旋律的共同音转，或构造临时 V → I 转等）将调性完全转到其他调上（如升降 Key 和同主音大小调转换）。

非功能和声相比功能和声，其主要目的并非在构造“倾向性”，一般是为了展示其他的和声色彩，比如调式音阶色彩、模进、分解琶音织体，或者就是为了强调十二音体系的“公平性”。但这些手法大多远离了人类传统认知里对音乐“好听”的理解，主要服务于其他特殊的乐曲写作目的（如场景刻画等）。

下图 H.3 展示了上述和声逻辑的全流程思维导图：



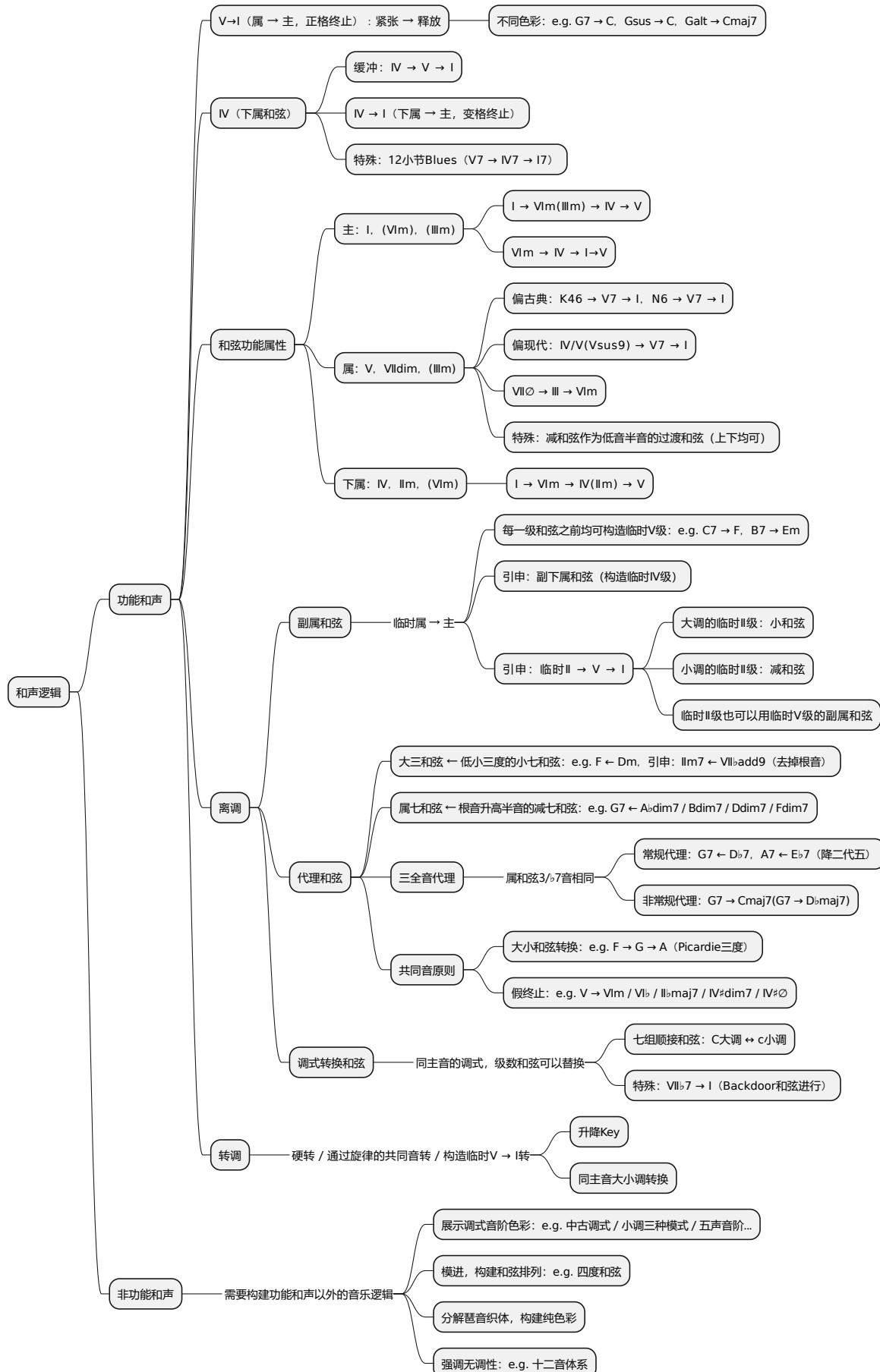


图 H.3: 和声逻辑思维导图

附录 I 信号系统的内积视角

在信号与系统中，存在一种特殊的内积视角。特别针对变换域分析，可以以一种统一且极其精简的方式，得到 Fourier 变换相关的一系列结果。

I.1 线性空间的内积

定义 I.1 (线性空间的内积)

实数域的线性空间 X 上可以引入内积

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \ni \{x, y\} \mapsto \langle x, y \rangle \in \mathbb{R} \quad (\text{I.1})$$

满足

1. 非负性： $\langle x, x \rangle \geq 0, \forall x \in X$ 且 $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ；
2. 对称性： $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle, \forall x, y \in X$ ；
3. 线性： $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ 。



基于以上定义，可以进一步在线性空间上定义范数： $\|x\| \triangleq \sqrt{\langle x, x \rangle}$ 。

内积定义的动机在于，无论线性空间中的任何量，都希望通过一种对自身的统一运算得到一类绝对非负的实数（后续会看出此类实数所代表的几何含义）。

I.2 向量内积

在线性代数中， \mathbb{R}^n 空间的向量 $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^\top$ 和 $y = [y_1, y_2, \dots, y_n]^\top$ 的向量内积（正文部分均表述为“点积”）定义为

$$\langle x, y \rangle = x \cdot y = x^\top y = y^\top x = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n = \sum_{i=1}^n x_i y_i \quad (\text{I.2})$$

显然，向量内积符合定义 I.1。

考察向量的范数 $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$ ，其刚好具有模长的几何意义。该范数也被称为 **Euclidean 长度**。

定理 I.1 (向量内积几何关系式)

若 x 和 y 分别为 \mathbb{R}^n 空间中的两个非零向量， θ 为他们之间的夹角，则有

$$\langle x, y \rangle = \|x\| \|y\| \cos \theta \quad (\text{I.3})$$



证明 \mathbb{R}^n 空间中，向量 x, y 和 $y - x$ 刚好构成一个三角形，根据余弦定理有

$$\|y - x\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\|x\| \|y\| \cos \theta \quad (\text{I.4})$$

进一步推导，则可得到：

$$\begin{aligned}\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| \cos \theta &= \frac{1}{2} \left[\|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 - (\mathbf{y} - \mathbf{x})^\top (\mathbf{y} - \mathbf{x}) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 - (\mathbf{y}^\top \mathbf{y} - \mathbf{y}^\top \mathbf{x} - \mathbf{x}^\top \mathbf{y} + \mathbf{x}^\top \mathbf{x}) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 - (\|\mathbf{y}\|^2 - 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \|\mathbf{x}\|^2) \right] = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle\end{aligned}\quad (I.5)$$

根据定理I.1，可以引出投影向量的概念。假设向量 \mathbf{y} 在向量 \mathbf{x} 上具有投影向量，定义为 \mathbf{y}_p ，满足 $\mathbf{y} - \mathbf{y}_p \perp \mathbf{x}$ ，此时向量 \mathbf{x} ， $\mathbf{y} - \mathbf{y}_p$ 和 \mathbf{y} 形成直角三角形，则投影向量 \mathbf{y}_p 可以表示为如下形式：

$$\mathbf{y}_p = \|\mathbf{y}\| \cos \theta \cdot \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} = \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{\|\mathbf{x}\|^2} \mathbf{x} = \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} \mathbf{x} \quad (I.6)$$

特别地，当 $\mathbf{y} \perp \mathbf{x}$ 时， $\cos \theta = 0$ ， $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$ ，投影向量 $\mathbf{y}_p = 0$ ，称此时的向量 \mathbf{x} 和 \mathbf{y} 满足正交性。

此外，根据线性代数中的描述，一个 \mathbb{R}^n 空间中的向量 \mathbf{y} ，可以被 n 个线性无关（一组向量中任意一个向量都不能由其它几个向量线性表示）的 n 维基向量唯一表达，且系数分别为在这一组基向量上的投影分量。假设基向量为 $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n\}$ ，则向量 \mathbf{y} 可以表示为

$$\mathbf{y} = \frac{\langle \mathbf{x}_1, \mathbf{y} \rangle}{\langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1 \rangle} \mathbf{x}_1 + \frac{\langle \mathbf{x}_2, \mathbf{y} \rangle}{\langle \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_2 \rangle} \mathbf{x}_2 + \dots + \frac{\langle \mathbf{x}_n, \mathbf{y} \rangle}{\langle \mathbf{x}_n, \mathbf{x}_n \rangle} \mathbf{x}_n = \sum_{i=1}^n \frac{\langle \mathbf{x}_i, \mathbf{y} \rangle}{\langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_i \rangle} \mathbf{x}_i \quad (I.7)$$

构造基向量最简单的方式即采用正交基向量（满足线性无关且正交性可以简化许多运算），如 Cartesian 坐标系下的标准正交基 $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ 。

I.3 函数内积

根据向量内积，可以完全推广至函数内积。首先考虑离散型自变量的函数 $f[n]$ 和 $g[n]$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 的内积，仿照向量内积，可给出如下定义：

$$\langle f[n], g[n] \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n]g[n] \quad (I.8)$$

而对于连续型自变量的函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的内积，可以借鉴章节4.2.1中对于线性卷积的分析思路，将 $f[n]$ 和 $g[n]$ 考虑成连续自变量的“阶跃梯形”函数 $f(n\Delta x)$ 和 $g(n\Delta x)$ (n 和 $n+1$ 之间相差 Δx)，则可以对二者采用类似离散形式的函数内积运算（在每个区间间隔 Δx 内，内积结果相同，所以需要乘以系数 Δx ）。当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时，该运算将趋向于连续自变量的函数内积，即

$$\langle f(x), g(x) \rangle = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n\Delta x) \cdot g(n\Delta x) \cdot \Delta x = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)dx \quad (I.9)$$

若函数本身有界或为周期函数，则上述内积运算式(I.8)和(I.9)的求和区间和积分区间将由 ∞ 变为具体数值。

从以上分析得知，函数内积明显也符合定义I.1，且可以构建与向量内积类似的“广义几何特征”，如下：



定理 I.2 (函数内积几何关系式)

若 f 和 g 分别为 \mathbb{R}^n 空间中的两个非零离散/连续函数, θ 为他们之间的“广义夹角”, 则有

$$\langle f, g \rangle = \|f\| \|g\| \cos \theta \quad (\text{I.10})$$



证明 以连续型自变量的函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 为例 (离散型自变量的函数类似), \mathbb{R}^n 空间中, 函数 f , g 和 $g-f$ 刚好构成一个“广义三角形”, 根据余弦定理有

$$\|g-f\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2 - 2\|f\|\|g\| \cos \theta \quad (\text{I.11})$$

考虑到函数内积的定义公式(I.9), 可知

$$\begin{aligned} \|g-f\|^2 &= \langle g-f, g-f \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} (g-f)^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} (f^2 + g^2 - 2fg) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f^2(x) dx + \int_{-\infty}^{\infty} g^2(x) dx - 2 \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x) dx \\ &= \|f\|^2 + \|g\|^2 - 2\langle f, g \rangle \end{aligned} \quad (\text{I.12})$$

将上式代回公式(I.11), 则可得到:

$$\langle f, g \rangle = \|f\| \|g\| \cos \theta \quad (\text{I.13})$$

进一步, 也可以仿照上一节向量内积的做法, 利用投影关系将一个函数表示为一组“线性无关”函数的线性相加之和。此时用正交关系来构造最为方便:

对于离散型自变量的函数 $f[n]$ 来说, 只需寻找一组基函数 $\varphi_1[n], \varphi_2[n], \dots$ (这里以无限个为例, 也可以是有限个), 满足

$$\langle \varphi_i[n], \varphi_j[n] \rangle = \begin{cases} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi_i[n] \varphi_j[n] = 0, & i \neq j \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi_i[n] \varphi_j[n] \neq 0, & i = j \end{cases} \quad (\text{I.14})$$

而对于连续型自变量的函数 $f(x)$ 来说, 则为

$$\langle \varphi_i(x), \varphi_j(x) \rangle = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx = 0, & i \neq j \\ \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx \neq 0, & i = j \end{cases} \quad (\text{I.15})$$

再利用类似公式(I.7)的构造方法, 即可将任意函数 $f[n]$ 和 $f(x)$ 拆解为

$$f[n] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{\langle \varphi_i[n], f[n] \rangle}{\langle \varphi_i[n], \varphi_i[n] \rangle} \varphi_i[n], \quad f(x) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{\langle \varphi_i(x), f(x) \rangle}{\langle \varphi_i(x), \varphi_i(x) \rangle} \varphi_i(x) \quad (\text{I.16})$$

I.4 复数域的内积

前面所有关于内积的分析均建立在实数域范围内。对于复数域, 则还需要做一些细微调整¹。考虑任意复数 $y = a + bj$ (其中 a 和 b 为常数), 若对其自己求内积, 有

¹复数域的内积, 这里只进行与本书内容相关的知识介绍, 不做详细开展, 进一步的系统化描述可参阅高等代数相关书籍中关于酉 (Unitary) 空间的说明。

$\langle y, y \rangle = y^2 = a^2 - b^2$, 该结果并不能完全满足定义I.1中的非负性。

为了与内积的定义相协调, 这里只需考虑成 y 与 y 的共轭复数 $y^* = a - bj$ (也可以写作 \bar{y}) 之间的内积, 此时 $\langle y, y \rangle = y \cdot y^* = a^2 + b^2 \geq 0$, 即可完美解决复数域内积的非负性问题。复数域的内积也被称作埃尔米特 (Hermite) 内积。

以连续型自变量的函数内积为例, 假设此时 $f(x)$ 为复数域函数, 如 $e^{jx} = \cos x + j \sin x$, 则计算其与自己的内积 (e^{jx} 是周期为 2π 的周期函数, 这里积分区域改为 $[0, 2\pi]$) 时需要替换为

$$\langle f(x), f(x) \rangle = \int_0^{2\pi} f(x) f^*(x) dx = \int_0^{2\pi} e^{jx} e^{-jx} dx = 2\pi \quad (I.17)$$

不过, 当实数域扩充到了复数域后, 特别针对不同的向量/函数求内积, 也不再满足定义I.1中的对称性, 而需要调整为共轭对称性。例如假定 $y_1 = a_1 + b_1j$, $y_2 = a_2 + b_2j$, 则有 (本书约定, 复数域的内积, 是将后一个向量/函数转为共轭)

$$\begin{aligned} \langle y_1, y_2 \rangle &= y_1 \cdot y_2^* = (a_1 + b_1j) \cdot (a_2 - b_2j) = a_1 a_2 + b_1 b_2 - (a_1 b_2 - a_2 b_1)j \\ \langle y_2, y_1 \rangle &= y_2 \cdot y_1^* = (a_2 + b_2j) \cdot (a_1 - b_1j) = a_1 a_2 + b_1 b_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)j \end{aligned} \quad (I.18)$$

即满足 $\langle y_1, y_2 \rangle = \langle y_2, y_1 \rangle^*$ 。

上述结论对于进一步构建复数域向量/函数的投影关系来说, 会造成不小的困难。首先, 如果按照定理I.1和定理I.2的证明来推导, 结合复数域内积的共轭对称性, 则复数域的向量/函数内积几何关系式将会变为:

$$\Re \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| \cos \theta, \quad \Re \langle f, g \rangle = \|f\| \|g\| \cos \theta \quad (I.19)$$

其中, 符号 \Re 表示复数的实部, 也常写作 Re 。

虽然这种定义满足广义的“余弦定理”, 但其只对内积结果的实部进行了约束, 与向量/函数的正交性质并不完全相符 (两个复数域向量/函数满足正交性, 应当内积结果完全为零), 所以存在数学上的不严谨性。

此外, 在高等代数中, 还有另一种定义, 即采用内积的模长来描述, 如下:

$$\|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle\| = \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| \cos \theta, \quad \|\langle f, g \rangle\| = \|f\| \|g\| \cos \theta \quad (I.20)$$

但以上公式也并不具备某种具象化的复数域向量/函数内积的几何含义。

不论如何, 由于复数域的抽象性, 事实上很难用一种完全统一的数学框架来构建复数域向量/函数的投影关系。这里相对合理的办法, 还是采用正交基作为基函数 (注意, 利用投影关系将向量/函数展开为基向量/函数的线性组合, 并非要求基向量一定正交), 利用数学原理来导出一种不依赖几何性质的完备内积关系式:

定理 I.3 (复数域向量/函数内积关系式)

假设 x 为复数域内的任一向量/函数, 可以利用一组两两正交的复数域非零基向量/函数 φ_i (这里以无限个为例, 也可以是有限个), 对其进行展开:

$$x = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{\langle x, \varphi_i \rangle}{\langle \varphi_i, \varphi_i \rangle} \varphi_i \quad (I.21)$$

其中, i 的取值为 $0, \pm 1, \pm 2, \dots$



证明 将向量/函数 x 写作正交的非零基向量/函数 φ_n 的线性组合 (其中 α_i 为系数):

$$x = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \alpha_i \varphi_i \quad (\text{I.22})$$

再用非零基向量/函数 φ_n 对其两边同时做内积 (注意复数域的内积顺序不可交换), 结合基向量/函数的正交性质, 则有

$$\langle x, \varphi_n \rangle = \left\langle \sum_{i=-\infty}^{\infty} \alpha_i \varphi_i, \varphi_n \right\rangle = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \alpha_i \langle \varphi_i, \varphi_n \rangle = \alpha_n \langle \varphi_n, \varphi_n \rangle \Rightarrow \alpha_n = \frac{\langle x, \varphi_n \rangle}{\langle \varphi_n, \varphi_n \rangle} \quad (\text{I.23})$$

将上式求得的系数 α_i 代回公式(I.22), 即可得到:

$$x = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{\langle x, \varphi_i \rangle}{\langle \varphi_i, \varphi_i \rangle} \varphi_i \quad (\text{I.24})$$

I.5 卷积的内积视角

章节4.2.1介绍的线性卷积定义4.2可以通过内积视角进行构建。这里先从单位冲激信号 $\delta(t)$ (连续情形) 或单位脉冲信号 $\delta[n]$ (离散情形) 的线性卷积表达式(4.26)开始。考虑离散型自变量函数 $f[N]$ 的线性展开式, 令基函数

$$\varphi_i[N] = \delta[N - i], \quad i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (\text{I.25})$$

可以发现其满足函数正交性的要求, 即

$$\langle \varphi_i(x), \varphi_j(x) \rangle = \begin{cases} \sum_{N=-\infty}^{\infty} \delta[N - i] \delta[N - j] = 0, & i \neq j \\ \sum_{N=-\infty}^{\infty} \delta[N - i] \delta[N - j] = 1, & i = j \end{cases} \quad (\text{I.26})$$

根据公式(I.16), 可将 $f[N]$ 展开为

$$\begin{aligned} f[N] &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\langle \varphi_n[N], f[N] \rangle}{\langle \varphi_n[N], \varphi_n[N] \rangle} \varphi_n[N] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{N=-\infty}^{\infty} f[N] \delta[N - n] \right) \delta[N - n] \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n] \delta[N - n] \end{aligned} \quad (\text{I.27})$$

相对应地, 考虑连续型自变量函数 $f(T)$ 的线性展开式, 这里需要利用 $\delta(t)$ 和 $\text{rect}(t)$ 的函数关系式(4.7), 构造极限表达式。令基函数

$$\varphi_i(T) = \text{rect}(T - iT_s) \cdot T_s, \quad i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (\text{I.28})$$

其中 T_s 为时间间隔, 这里将其也考虑成 $\text{rect}(T)$ 在 T 轴上的“宽度”, 即原本定义中的参数 τ 。此时一系列基函数在时间轴上“紧密排列”, 同时可以发现也满足函数正交性的要求, 即

$$\langle \varphi_i(T), \varphi_j(T) \rangle = \begin{cases} T_s^2 \int_{-\infty}^{\infty} \text{rect}(T - iT_s) \text{rect}(T - jT_s) dT = 0, & i \neq j \\ T_s^2 \int_{-\infty}^{\infty} \text{rect}(T - iT_s) \text{rect}(T - jT_s) dT = T_s, & i = j \end{cases} \quad (\text{I.29})$$

根据公式(I.16), 当 $T_s \rightarrow 0$ 时, nT_s 趋向于连续时间 t , $\Delta t = (n+1)T_s - nT_s = T_s$ 趋



向于微元 dt , 且有

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \cdots \Delta t \xrightarrow{T_s \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots dt, \quad \text{rect}(T) \xrightarrow{T_s \rightarrow 0} \delta(T) \quad (\text{I.30})$$

此时 $f(T)$ 可展开为

$$\begin{aligned} f(T) &= \lim_{T_s \rightarrow 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\langle \varphi_n(T), f(T) \rangle}{\langle \varphi_n(T), \varphi_n(T) \rangle} \varphi_n(T) \\ &= \lim_{T_s \rightarrow 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_s} \left[T_s \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \text{rect}(T - nT_s) f(T) dt \right] \cdot \text{rect}(T - iT_s) \cdot T_s \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \delta(T-t) f(t) dt \right] \delta(T-t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(T-t) dt \end{aligned} \quad (\text{I.31})$$

上述公式(I.27)和(I.31)即通过内积视角重新得到了表达式(4.26)。

进一步, 利用信号的变换关系, 若令

$$\mathcal{T}\{\delta[N]\} = g[N], \quad \mathcal{T}\{\delta(T)\} = g(T) \quad (\text{I.32})$$

根据 LTI/LSI 系统的线性和时/移不变性质, 对 $\delta[N]$ 平移 n 个单位再乘以系数 $f[n]$, 而对 $\delta(T)$ 平移 t 个单位再乘以系数 $f(t)$, 并结合公式(I.27)和(I.31), 可以得到:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}\{f[N]\} &= \mathcal{T}\left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n] \delta[N-n] \right\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n] g[N-n] = (f * g)[N] \\ \mathcal{T}\{f(T)\} &= \mathcal{T}\left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta[T-t] dt \right\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) g(T-t) dt = (f * g)(T) \end{aligned} \quad (\text{I.33})$$

上两式即定义4.2中的线性卷积一般形式。

 **笔记** 事实上, 表达式(4.26)并不需要经过内积运算的复杂操作, 可直接根据 $\delta(t)$ (连续情形) 和 $\delta[n]$ (离散情形) 的“筛选抽取”性质得到。这里利用内积视角重新推导了卷积运算, 一方面是加强对卷积“线性组合”认知的理解, 另一方面也是为了提供信号与系统中系统化阐述内积视角的一类案例。

此外, 内积视角还为卷积运算的量纲分析提供了思路。如果从定义本身来看, 信号与系统中的卷积是信号与系统响应函数的某种乘积运算, 其结果不应该为另一个信号函数 (量纲对不上)。但如果将卷积理解为一组基函数信号的线性组合, 而系数是通过内积之比来计算 (无量纲), 则前后量纲将完全吻合。

I.6 Fourier 变换的内积视角

章节2.2.3介绍的连续时间 Fourier 变换 (CFT) 和章节4.2.2介绍的离散时间 Fourier 变换 (DTFT), 也可以通过内积视角进行构建, 而且相较于正文中的推导过程, 这里的推导会更加简便且统一。

首先是定理2.2介绍的 Fourier 级数。考虑周期为 T 的连续时间周期函数 $f(t)$ 的线性展开式, 构造三类基函数 $1, \cos n\omega_0 t, \sin n\omega_0 t$, 其中 $n = 1, 2, 3, \dots$, $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$, 可以发现两两均满足函数正交性的要求 (同公式(2.122))。此时若令

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)] \quad (\text{I.34})$$

即将 $f(t)$ 写成三类基函数的线性组合，则上式三项的系数，根据公式(I.16)，可以分别在一个周期 T 内用对应的内积进行计算，如下：

$$\frac{a_0}{2} = \frac{\langle 1, f(t) \rangle}{\langle 1, 1 \rangle} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt \quad (I.35)$$

$$a_n = \frac{\langle \cos(n\omega_0 t), f(t) \rangle}{\langle \cos(n\omega_0 t), \cos(n\omega_0 t) \rangle} = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt \quad (I.36)$$

$$b_n = \frac{\langle \sin(n\omega_0 t), f(t) \rangle}{\langle \sin(n\omega_0 t), \sin(n\omega_0 t) \rangle} = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin(n\omega_0 t) dt \quad (I.37)$$

接下来是定理2.4介绍的 **Fourier 级数复指数展开**。该定理与上述用三角函数表示的 Fourier 级数类似，只是将基函数变为了复指数函数 $e^{jn\omega_0 t}$ ，很明显其也满足函数正交性的要求（注意对复数域函数求内积需要使用共轭复数），即

$$\langle e^{jm\omega_0 t}, e^{jn\omega_0 t} \rangle = \begin{cases} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{j(m-n)\omega_0 t} dt = 0, & m \neq n \\ \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{j(m-n)\omega_0 t} dt = T, & m = n \end{cases} \quad (I.38)$$

若将 $f(t)$ 写成上述复指数基函数的线性组合，即

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n\omega_0) e^{jn\omega_0 t} \quad (I.39)$$

则其中的系数 $F(n\omega_0)$ 可根据定理I.3用内积进行计算，如下：

$$F(n\omega_0) = \frac{\langle f(t), e^{jn\omega_0 t} \rangle}{\langle e^{jn\omega_0 t}, e^{jn\omega_0 t} \rangle} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \quad (I.40)$$

继续分析定理4.4介绍的 **离散时间 Fourier 级数**。考虑周期序列为 N 的离散时间周期函数 $x[n]$ 的线性展开式，构造复指数基函数 $e^{jk\Omega_0 n}$ ，其中 $n = 1, 2, 3, \dots$ ， $\Omega_0 = \frac{2\pi}{N}$ ，可以发现其也满足函数正交性的要求（参考公式(4.60)的证明），即

$$\langle e^{jk\Omega_0 n}, e^{jl\Omega_0 n} \rangle = \begin{cases} \sum_{n=0}^{N-1} e^{j(k-l)\Omega_0 n} = 0, & k \neq l \\ \sum_{n=0}^{N-1} e^{j(k-l)\Omega_0 n} = N, & k = l \end{cases} \quad (I.41)$$

若将 $x[n]$ 写成上述复指数基函数的线性组合（注意不同 k 值下不同的 $e^{jk\Omega_0 n}$ 只存在于一个周期序列 N 范围内），即

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} X[k\Omega_0] e^{jk\Omega_0 n} \quad (I.42)$$

则其中的系数 $X[k\Omega_0]$ 可根据定理I.3用内积进行计算，如下：

$$X[k\Omega_0] = \frac{\langle x[n], e^{jk\Omega_0 n} \rangle}{\langle e^{jk\Omega_0 n}, e^{jk\Omega_0 n} \rangle} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-jk\Omega_0 n} \quad (I.43)$$

对于非周期信号来说，定理2.5的 **Fourier 积分复指数展开**和定理4.5的 **离散时间 Fourier 积分**，只需沿用正文部分由周期到非周期的延拓方法即可得到，进一步构建出定义2.2的 **连续时间 Fourier 变换**和定义4.3的 **离散时间 Fourier 变换**。

 **笔记** 相比于正文中关于 Fourier 变换的一系列定理描述，采用内积视角来分析，也会

对其中的量纲关系更为明晰。例如 Fourier 级数中的 a_0, a_n, b_n , Fourier 级数复指数展开中的 $F(n\omega_0)$, 还有离散时间 Fourier 级数中的 $X[k\Omega_0]$, 均为无量纲的系数。



术语索引

A

- Aeolian 调式, 143
- Ampere 定律, 282
- Ampere 定则, 283
- Ampere 环路定理, 283
- Ampere 环路定理微分形式, 284
- Ampere 力, 282

B

- Bebop 音阶, 150
- Bessel 方程, 118
- Bessel 函数, 118
- BIBO 系统, 187
- Biot-Savart 定律, 282
- Blues 音阶, 151
- Bode 图, 226

C

- Cartesian 坐标系, 19, 21
- CD (Compact Disc), 184
- Celtic 音乐, 141
- Chladni 图形, 83
- Christoffel 符号, 261
- Coulomb 定律, 278

D

- d'Alembert 判别法, 222
- d'Alembert 行波解, 49
- d'Alembert 原理, 8
- 单边 Laplace 变换, 205
- 单边 z 变换, 215
- Dirac 函数, 38
- Dirichlet 条件, 87
- Dorian 调式, 140

E

- Eddington 张量 (置换张量), 259
- Einstein 求和约定, 5
- Euclidean 长度, 302
- Euclidean 空间, 5
- Euler 方程, 18
- Euler 公式, 63

F

- Faraday 电磁感应定律, 286
- Flamenco 音乐, 142
- Fourier 变换对, 94
- Fourier 变换, 85
- Fourier 积分, 91
- Fourier 积分复指数展开, 95
- Fourier 级数, 85
- Fourier 级数复指数展开, 93

G

- Γ (Gamma) 函数, 291
- Gauss 公式向量形式, 17
- Gauss 公式向量形式推论, 18
- 广义 Gauss 公式, 27
- 广义 Hooke 定律, 32
- 广义 Kronecker 符号, 259
- 广义 Stokes 公式, 75

H

- Hamilton 算子, 17
- Helmholtz 分解, 37
- Helmholtz 音高记号法, 125
- Helmholtz 运动, 111
- 恒定磁场 Gauss 定理, 283
- Hermite 内积, 305

Hooke 定律, 9

I

Ionian 调式, 140

J

Jacobi 矩阵, 257

Jazz 旋律小调音阶, 148

静电场 Gauss 定理, 279

静电场 Gauss 定理微分形式, 280

K

Kirchhoff 电流定律 (KCL), 189

Kirchhoff 电压定律 (KVL), 188

Kronecker 符号, 256

Kronecker 函数, 187

MP3 音频, 184

L

Lamé 常数, 33

Lamé 系数, 265

Laplace 变换, 204

Laplace 变换对, 205

Laplace 场, 43

Laplace 逆变换, 205

Laplace 算子, 22

Laplace 正变换, 205

Laurent 级数, 218

Lenz 定律, 286

Levi-Civita 符号 (置换符号), 258

连续时间 Fourier 变换 (CFT), 96

离散 Fourier 变换, 236

离散时间 Fourier 变换, 201

离散时间 Fourier 变换对, 200

离散时间 Fourier 积分, 200

离散时间 Fourier 级数, 197

Locrian 调式, 144

Lorentz 力, 285

LSI 系统, 187

LTI 系统, 187

Lydian 调式, 142

M

Maclaurin 公式, 247

Maxwell 方程组, 287

Mersenne 公式, 105

Mixolydian 调式, 143

Monge 形式, 73

N

Nabla 算子, 248

Neapolitan 和弦, 141

Neapolitan 六和弦, 133

内蕴形式广义 Stokes 公式, 276

Neumann 函数, 294

Newton 第二定律, 8

O

Ohm 定律, 58

P

Phrygian 调式, 141

Picardie 三度, 155

Poisson 比, 33

R

RC 并联电路, 188

RC 串联电路, 188

RC 电路, 188

rect 函数, 92

Riemann 积分, 91

Riemann 空间, 5

S

sgn 函数, 83

双边 Laplace 变换, 205

双边 z 变换, 215

sinc 函数, 93

Stokes 公式向量形式, 21

T

Taylor 展开, 10

U

Unitary 空间, 304

W

Wroński 行列式, 294

X

修正（虚宗量）Bessel 方程, 120

修正（虚宗量）Bessel 函数, 120

Y

Young 模量, 33

Z

z 变换, 214

z 变换对, 215

周期函数 Fourier 变换, 97

周期函数离散时间 Fourier 变换, 202

周期 rect 函数, 94

z 逆变换, 215

z 正变换, 215

