БАЛТИЙСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. ИММАНУИЛА КАНТА

Ю. И. Попов

ЛЕКЦИИ ПО АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

Рекомендовано кафедрой фундаментальной математики
в качестве учебного пособия

Калининград
2013

УДК 514(075.3)
ББК 22.141.0я721
П58

Рецензенты

Р. А. Александрова, канд. пед. наук,
профессор кафедры педагогики и информационных технологий
Высшей школы педагогики БФУ им. И. Канта
Т. П. Фунтикова, канд. физ.-мат. наук, доцент,
зав. кафедрой гуманитарных наук Калининградского института экономики

Попов Ю. И.
П58 Лекции по аналитической геометрии : учеб. пособие / БФУ им. И. Канта. — Калининград, 2013. — 211 с.

Представлены учебные материалы, соответствующие программе (тематическому плану) курса аналитической геометрии для студентов I курса Института прикладной математики и информационных технологий БФУ им. И. Канта.

УДК 514(075.3)
ББК 22.141.0я721

Глава I
ВЕКТОРЫ И ОПЕРАЦИИ НАД НИМИ

§ 1. Линейные операции над векторами

1. Основные понятия

Отрезок называется направленным, если принимается во внимание порядок, в котором заданы его концы.

Вектором называется направленный отрезок.

На рисунке направление вектора обычно обозначают стрелкой. Если начало вектора находится в точке А, конец — в точке В, то вектор обозначается символом $\overrightarrow{AB}$ или $\vec{a}$ (рис. 1.1):

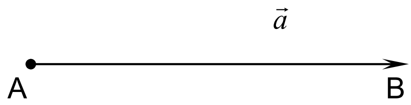


Рис. 1.1

В целях общности изложения удобнее рассматривать каждую точку как частный случай направленного отрезка, начало и конец которого совпадают, т. е. $\vec{O} = \overrightarrow{AA}$ — нулевой направленный отрезок или нуль-вектор.

***Длиной ненулевого вектора $\overrightarrow{AB}$ называется длина отрезка AB*. Длина нулевого вектора равна 0, т. е.**

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = AB, \ \left|\vec{0}\right| = 0.$$

$$\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow [AB) \uparrow\uparrow [CD),$$
$$\overrightarrow{AB} \downarrow\uparrow \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow [AB) \downarrow\uparrow [CD).$$

Два вектора $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ равны тогда и только тогда, когда они равны по длине и сонаправлены, т. е.

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \begin{cases} \left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{CD}\right|, \\ \overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}. \end{cases}$$

Лемма. $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$.

***Два вектора равные по длине и противоположно направленные* называются *противоположными*.**

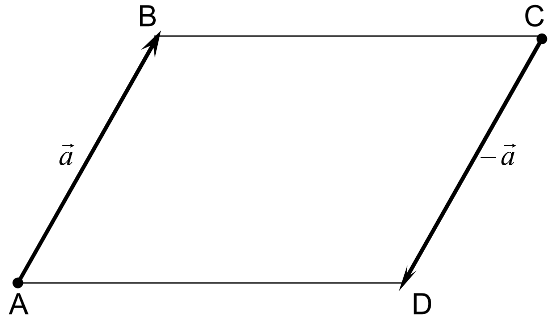


Рис. 1.2

На рис. 1.2 векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ противоположные, т. е. $\overrightarrow{AB}\downarrow\uparrow\overrightarrow{CD}$ и $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$. Если $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, то $\overrightarrow{CD} = -\vec{a}$. Очевидно, что $\overrightarrow{BA}=-\vec{a}$. Вектором, противоположным вектору $\overrightarrow{BA}$, является $\overrightarrow{AB}$, поэтому — $(-\vec{a}) = \vec{a}$.

***Вектором, противоположным нуль-вектору, является нуль-вектор*.**

Пример. Какие из указанных на рис. 1.3 векторов являются равными, а какие противоположными?

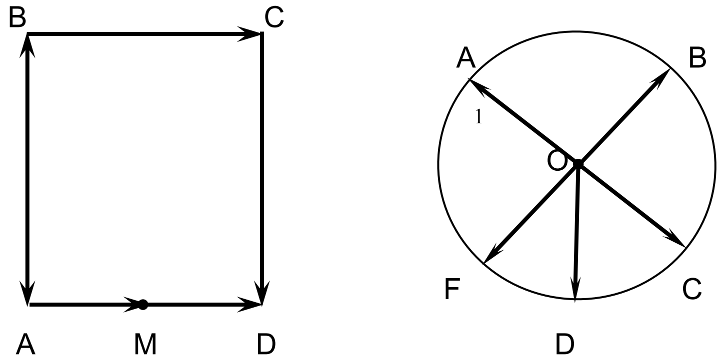


Рис. 1.3

Вектор называется единичным или ортом, если его длина равна единице.

Вектор, точка приложения которого может быть выбрана произвольно, называется ***свободным***. В дальнейшем будем рассматривать свободные векторы.

Векторы $\vec{a}$ ***и*** $\vec{b}$ ***называются коллинеарными, если существует прямая, которой они параллельны, т. е.*** $\vec{a}\|\vec{b} \Leftrightarrow (\vec{a}\,\|\,l;\ \vec{b}\,\|\,l)$.

Отметим, что если из двух векторов, по крайней мере, один нулевой, то эти векторы коллинеарны, т. е. нуль-вектор $\vec{0}$ считается коллинеарным любому вектору.

2. Сложение и вычитание векторов

Пусть даны векторы $\vec{a}$ ***и*** $\vec{b}$***. От какой-нибудь точки А отложим вектор*** $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$***, затем от точки В отложим вектор*** $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$***. Вектор*** $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$ ***называется суммой векторов*** $\vec{a}$ ***и*** $\vec{b}$ ***и обозначается так:*** $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$ ***(рис. 1.4).***

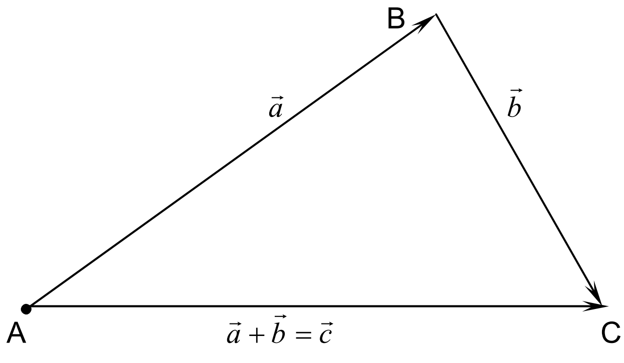


Рис. 1.4

○ Покажем, что вектор $\vec{c}$ определяется с помощью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ однозначно, независимо от выбора точки А, от которой откладывается вектор $\vec{a}$. Пусть вместо точки А взята другая точка A_1 и выполнено аналогичное построение: $\overrightarrow{A_1B_1}=\vec{a}$, $\overrightarrow{B_1C_1}=\vec{b}$. Докажем что $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{A_1C_1}$.

Так как

$$(\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_1B_1}, \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{B_1C_1}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(\underset{\text{(лемма)}}{\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{BB_1},\ \overrightarrow{BB_1} - \overrightarrow{CC_1}}) \Leftrightarrow \overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{CC_1} \underset{\text{(лемма)}}{\Rightarrow} \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A_1C_1}\ . \bullet$$

Заметим, что для нахождения суммы двух *неколлинеарных* векторов приходится строить треугольник (∆ABC). Поэтому указанное правило сложения векторов в *общем случае* называется *правилом треугольника*.

Это правило можно сформулировать так: **для любых точек A, B, C справедливо равенство**

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}\ . \tag{1.1}$$

а). Применим это правило к точкам A, B, A, получим:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} \Leftrightarrow \vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}\,. \tag{1.2}$$

б). Аналогично, для трех точек A, B, B

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \vec{a} + \vec{0} = \vec{a}\ . \tag{1.3}$$

в). Правило треугольника применим к точкам A, A, B:

$$\overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}\ . \tag{1.4}$$

Если слагаемые векторы не коллинеарны, то для построения их суммы можно пользоваться другим способом — *правилом параллелограмма* (рис. 1.5)

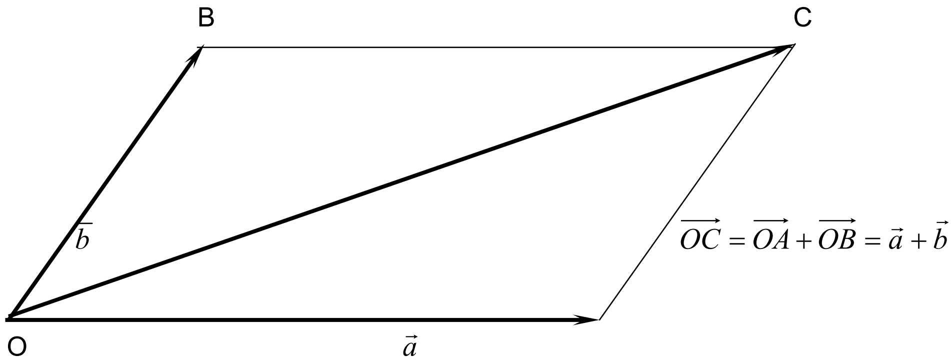


Рис. 1.5

Для $\forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ справедливы равенства (законы):

1) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (переместительный или коммуникативный)

2) $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ (сочетательный или ассоциативный законы).

Правило многоугольника. Пусть даны $n(n\geq 3)$ векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$. От произвольной точки О плоскости отложим последовательно векторы $\overrightarrow{OA_1}=\vec{a}_1$, $\overrightarrow{A_1A_2}=\vec{a}_2$, …, $\overrightarrow{A_{n-1}A_n}=\vec{a}_n$. Вектор $\overrightarrow{OA_n}=\vec{s}$ называется суммой векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ и обозначается $\vec{S}=\vec{a}_1+\vec{a}_2+\dots+\vec{a}_n$.

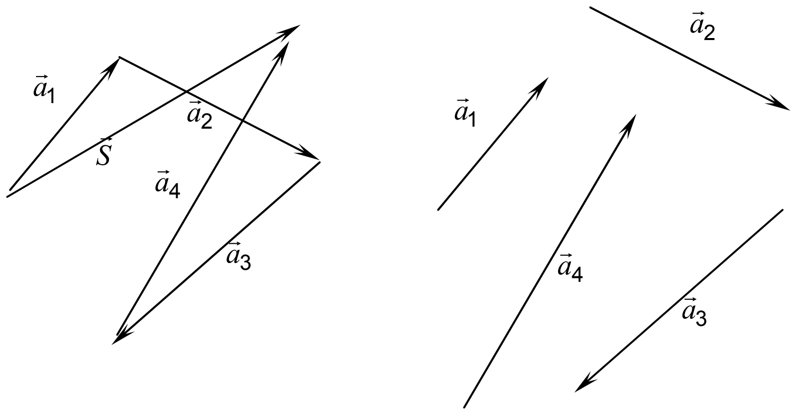


Рис. 1.6

Разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется такой вектор $\vec{x}$, что

$$\vec{b}+\vec{x}=\vec{a}. \tag{1.5}$$

Докажем, что разность любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ существует и определяется однозначно.

○ 1) Составим (построим) вектор $\vec{x}=\vec{a}+(-\vec{b})$.

Докажем, что вектор $\vec{a}+(-\vec{b})$ удовлетворяет уравнению (1.5):

$$\vec{b}+(\vec{a}+(-\vec{b}))=\vec{b}+((-\vec{b})+\vec{a})+\vec{a})=(\vec{b}+(-\vec{b}))+\vec{a}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}.$$

2) Теперь докажем, что вектор $\vec{x}$ определяется однозначно. Допустим, что существует $\vec{y}$ такой, что

$$\vec{b}+\vec{y}=\vec{a}. \tag{1.6}$$

Из (1.5) и (1.6) следует

$$\vec{b}+\vec{x}=\vec{b}+\vec{y} \tag{1.7}$$

Прибавим к обеим частям равенства (1.7) вектор $(-\vec{b})$, получим

$$(-\vec{b})+(\vec{b}+\vec{x})=(-\vec{b})+(\vec{b}+\vec{y}) \Leftrightarrow ((-\vec{b})+\vec{b})+\vec{x}=$$

$$=((-\vec{b})+\vec{b})+\vec{y} \Leftrightarrow \vec{0}+\vec{x}=\vec{0}+\vec{y} \Leftrightarrow \vec{x}=\vec{y}. \bullet$$

Разность векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается так: $\vec{a}-\vec{b}$. Тогда

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b}). \tag{1.8}$$

Из формулы (1.1) в силу определения (1.5) имеем

$$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}. \tag{1.9}$$

Правило вычитания векторов: Для любых трех точек A, B, C плоскости выполняется равенство (1.9).

Из формулы (1.1) и (1.9) следует правило:

«***Слагаемое в векторном равенстве можно переносить из одной части равенства в другую, меняя его знак на противоположный***».

3. Умножение вектора на число

Произведением вектора $\vec{a}$ на действительное число λ называется вектор $\vec{p}$, который удовлетворяет условиям:

a) $|\vec{p}|=|\lambda||\vec{a}|$, где $|\lambda|$ — модуль числа λ.

b) $\vec{p}\uparrow\uparrow\vec{a}$, если $\lambda \geq 0$,

$\vec{p}\downarrow\uparrow\vec{a}$, если $\lambda < 0$.

Обозначение: $\vec{p}=\lambda\vec{a}$.

Из условия а) определения следует, что $\vec{p}=\vec{0}$ тогда и только тогда, когда $\lambda = 0$ или $\vec{a}=\vec{0}$, т.е. $\lambda\cdot\vec{0}=\vec{0}$, $0\cdot\vec{a}=\vec{0}$.

Для произвольных чисел α, β и векторов $\vec{a},\vec{b}$ справедливы следующие свойства:

1). $1\cdot\vec{a}=\vec{a}$, $(-1)\cdot\vec{a}=-\vec{a}$,

2). $\alpha(\beta\vec{a})=(\alpha\beta)\cdot\vec{a}$ (ассоциативный закон),

3). $\alpha(\vec{a}+\vec{b})=\alpha\vec{a}+\alpha\vec{b}$ (I дистрибутивный закон относительно сложения векторов),

4) $(\alpha+\beta)\vec{a}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{a}$ (II дистрибутивный закон относительно сложения чисел).

§2. Признаки коллинеарности и компланарности векторов

Теорема 1. Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны и $\vec{a}\neq\vec{0}$, то существует единственное число β такое, что

$$\vec{b}=\beta\vec{a}. \tag{2.1}$$

○ I. Сначала докажем существование числа β, удовлетворяющего равенству (2.1). Так как $\vec{a}\,||\,\vec{b}\Rightarrow(\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}\vee\vec{a}\downarrow\uparrow\vec{b})$.

1). Рассмотрим случай $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$. Положим $\beta=\dfrac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$ и введем вектор $\vec{b}_1=\dfrac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}\vec{a}$. Докажем, что $\vec{b}_1=b$. Действительно, имеем

$$\left.\begin{array}{ll}\text{a)} & |\vec{b}_1|=\dfrac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}\cdot|\vec{a}|=|\vec{b}|,\\ \text{b)} & (\vec{b}_1\uparrow\uparrow\vec{a};\;\; \vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b})\Rightarrow\vec{b}_1\uparrow\uparrow\vec{b}\end{array}\right\}\Rightarrow\vec{b}_1=\vec{b}.,$$

Значит, число β удовлетворяет равенству (2.1)

2). Пусть теперь $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$. Рассмотрим число $\beta=-\dfrac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$ и вектор $\vec{b}_2=-\dfrac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}\vec{a}$.

Находим, что

$$\left.\begin{array}{l} a)\ \ |\vec{b}_2| = \dfrac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}\cdot|\vec{a}| = |\vec{b}|, \\ b)\ \ (\vec{b}_2 \downarrow\uparrow \vec{a};\ \vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}) \Rightarrow \vec{b}_2 \uparrow\uparrow \vec{b} \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{b}_2 = \vec{b},$$

т. е. число $\beta = -\dfrac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$ удовлетворяет в этом случае равенству (2.1).

II. Докажем теперь, что число β, удовлетворяющее условию (2.1), определяется однозначно. Предположим, что каким-то другим способом нашли число γ такое, что

$$\vec{b} = \gamma\vec{a}\ . \tag{2.2}$$

Из равенства (2.1) и (2.2) следует, что

$$\beta\vec{a} = \gamma\vec{a} \Leftrightarrow (\beta-\gamma)\vec{a} = \vec{0} \Leftrightarrow \beta-\gamma = 0 \Leftrightarrow \beta = \gamma \text{ , так как } \vec{a} \neq \vec{0}\ . \bullet$$

Теорема 2. (Признак коллинеарности векторов). Два ненулевых вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда существует (единственное) число β такое, что $\vec{b} = \beta\vec{a}$, т. е.

$$\vec{a} \,||\, \vec{b} \Leftrightarrow \vec{b} = \beta\vec{a}\ . \tag{2.3}$$

○ **Необходимость. Пусть** $\vec{a} \,||\, \vec{b}$. По теореме 4 следует, что $\vec{b} = \beta\vec{a}$, причем β — единственное число.

Достаточность. Если $\vec{b} = \beta\vec{a} \Rightarrow \vec{b} \,||\, \vec{a}$ по определению операции умножения вектора на число. •

Будем говорить, что вектор $\vec{a}$ параллелен плоскости ω, если он параллелен некоторой прямой, лежащей в этой плоскости.

Очевидно, если вектор $\vec{a} \,||\, \omega$, то $\vec{a}$ параллелен любой плоскости, параллельной плоскости ω.

Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ называются компланарными, если существует плоскость, которой они параллельны.

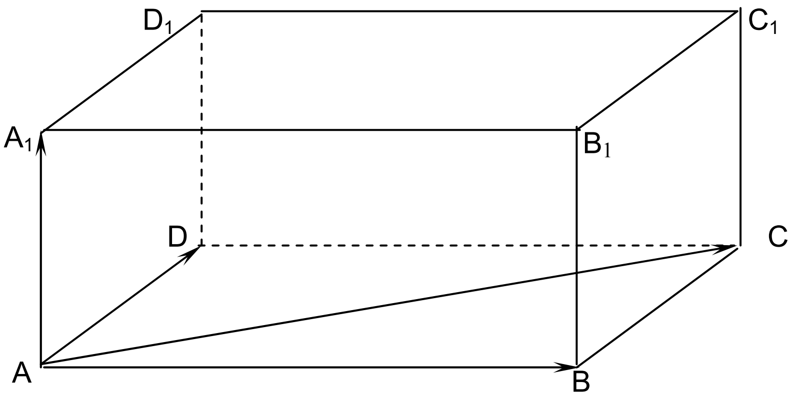


Рис. 1.7

$\overrightarrow{A_1B_1}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AC}$ — компланарны,

$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AA_1}$ — не компланарны

$\overrightarrow{A_1D_1}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ — компланарны.

Теорема 3. Если векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны, а векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны, то существуют единственные числа α и β такие, что

$$\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}. \tag{2.4}$$

○ 1). Сначала докажем существование чисел α и β, удовлетворяющих равенству (2.4).

Отложим от некоторой точки O векторы $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$. Эти векторы компланарны, поэтому точки O, A, B, C лежат в одной плоскости, причем точки O, A и B не лежат на одной прямой (векторы $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ не коллинеарны).

Если точка C лежит на прямой OB, то векторы $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ и $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ коллинеарны, поэтому по теореме 1 следует $\vec{c} = \beta\vec{b} \Leftrightarrow \vec{c} = 0\vec{a} + \beta\vec{b}$. Таким образом, имеет место равенство (2.4). Рассмотрим случай, когда точка C не лежит на прямой OB (рис. 1.8).

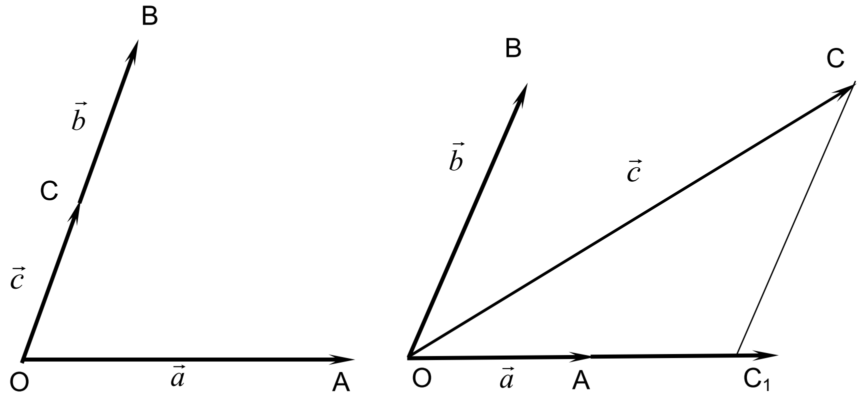


Рис. 1.8

Проведем прямую $\overrightarrow{CC_1} \parallel \overrightarrow{OB}$, где C_1 — точка прямой ОА. По правилу треугольника $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OC_1} + \overrightarrow{C_1C}$. Но $\overrightarrow{OC_1} \parallel \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{CC_1} \parallel \overrightarrow{OB}$, поэтому существуют числа α и β такие, что $\overrightarrow{OC_1} = \alpha\vec{a}$, $\overrightarrow{CC_1} = \beta\vec{b}$ (теорема 1). Следовательно, $\overrightarrow{OC} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$, т. е. имеет место равенство (2.4).

2). Докажем, что числа α и β, удовлетворяющие равенству (2.4), определяются однозначно. Предположим, что существуют числа α_1 и β_1 такие, что

$$\vec{c} = \alpha_1\vec{a} + \beta_1\vec{b}\,. \tag{2.5}$$

Из равенств (2.4) и (2.5) получаем

$$(\alpha - \alpha_1)\vec{a} + (\beta - \beta_1)\vec{b} = \vec{0}\,. \tag{2.6}$$

Мы утверждаем, что $\alpha - \alpha_1 = 0$ и $\beta - \beta_1 = 0$. В самом деле, если, например, допустить, что $\alpha - \alpha_1 \neq 0$, то из равенства (2.6) находим $\vec{a} = \dfrac{\beta_1 - \beta}{\alpha - \alpha_1}\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$, что невозможно, так как по условию теоремы $\vec{a} \nparallel \vec{b}$.

Итак, $\alpha = \alpha_1$, $\beta = \beta_1$ и единственность разложения (2.4) доказана. •

Верно и обратное утверждение.

Теорема 4. Если векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ таковы, что $\vec{a} \nparallel \vec{b}$ и $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$ (2.4), то они компланарны.

○ Отложим от некоторой точки O пространства вектор $\overrightarrow{OA} = \alpha\vec{a}$, затем от точки A вектор $\overrightarrow{AB} = \beta\vec{b}$. Так как $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$, то

$$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = \overrightarrow{OB}. \tag{2.7}$$

Из (2.4) и (2.7) следует, что $\overrightarrow{OB} = \vec{c}$. Через точки O, A и B проходит плоскость ω = (AOB) (рис. 1.9).

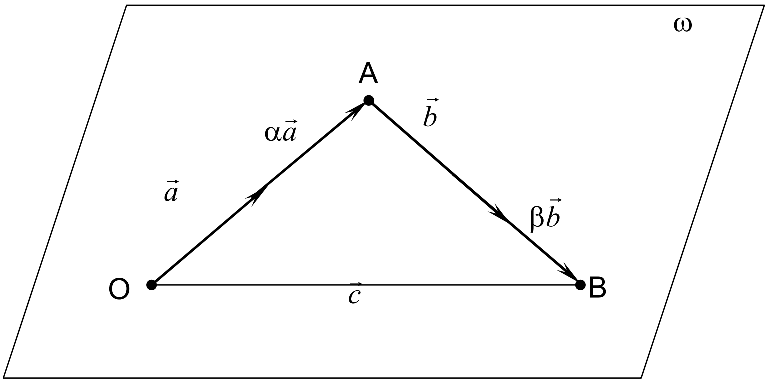


Рис. 1.9

Так как $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$, то из равенств $\overrightarrow{OA} = \alpha\vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \beta\vec{b}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{c}$ следует, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ параллельны плоскости ω, т. е. они компланарны. ●

Теоремы 3 и 4 определяют соответственно необходимое и достаточное условия компланарности трех векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, среди которых, по крайней мере, два не коллинеарны.

Теорема 5. (Признак компланарности векторов). Пусть векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ таковы, что $\vec{a} \nparallel \vec{b}$.

Для того чтобы векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ были компланарны, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (2.4).

§ 3. Линейная зависимость векторов

Пусть дана система векторов

$$\vec{a}_1,\ \vec{a}_2,\ \dots,\ \vec{a}_n. \qquad (3.1)$$

Условимся в следующей терминологии. Линейную комбинацию

$$\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \dots\lambda_n\vec{a}_n \qquad (3.2)$$

назовем ***тривиальной***, если все ее коэффициенты λ_1, λ_2,,λ_n равны нулю. В этом случае комбинация всегда равна $\vec{0}$. Если в соотношении (3.2) хотя бы один коэффициент отличен от нуля, то эта комбинация называется ***нетривиальной***.

Система (3.1), состоящая из *n* векторов, называется линейно зависимой, если существует нетривиальная линейная комбинация этих векторов равна $\vec{0}$, т. е.

$$\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \dots + \lambda_n\vec{a}_n = \vec{0},\ \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \dots + \lambda_n^2 \neq 0. \qquad (3.3)$$

Если равенство (3.3) справедливо только тогда, когда **линейная комбинация** (3.2) **тривиальна,** то система векторов (3.1) называется **линейно независимой.**

При $n = 1$ имеем систему, состоящую из одного вектора. Очевидно, что такая система будет линейно независима тогда и только тогда, когда вектор системы ненулевой.

Рассмотрим некоторые свойства системы линейно зависимых (независимых) векторов.

Свойство 1. При n > 1 система векторов (3.1) линейно зависима тогда и только тогда, когда хотя бы один из них является линейной комбинацией остальных векторов этой системы.

○ Пусть система (1) линейно зависима, т. е. в равенстве (3.3) одно из чисел $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ отлично от нуля. Пусть $\lambda_k \neq 0$ (*k* — одно из чисел 1,2,…,*n*). Равенство (3.3) перепишем в виде

$$\vec{a}_k = -\frac{\lambda_1}{\lambda_k}\vec{a}_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_k}\vec{a}_2 - \dots - \frac{\lambda_{k-1}}{\lambda_k}\vec{a}_{k-1} - \frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k}\vec{a}_{k+1} - \dots - \frac{\lambda_n}{\lambda_k}\vec{a}_n.$$

Итак, вектор $\vec{a}_k$ является линейной комбинацией остальных векторов системы (3.1).

Обратно, пусть в системе (3.1) вектор $\vec{a}_k$ является линейной комбинацией остальных векторов, т. е.

$$\begin{aligned}&\vec{a}_k = \lambda_1\vec{a}_1 + \ldots + \lambda_{k-1}\vec{a}_{k-1} + \lambda_{k+1}\vec{a}_{k+1} + \ldots + \lambda_n\vec{a}_n \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \lambda_1\vec{a}_1 + \ldots + \lambda_{k-1}\vec{a}_{n-1} + (-1)\vec{a}_k + \lambda_{k+1}\vec{a}_{k+1} + \ldots + \lambda_n\vec{a}_n = \vec{0}.\end{aligned} \tag{3.4}$$

Таким образом нетривиальная комбинация векторов (3.4) равна $\vec{0}$, т. е. согласно определению векторы системы (3.1) линейно зависимы. •

Свойство 2. Если часть (подсистема) данной системы векторов (3.1) линейно зависима, то и вся система (3.1) линейно зависима.

Действительно, пусть система из m ($m<n$) векторов $\vec{a}_1,\vec{a}_2,...,\vec{a}_m$ линейно зависима, т. е.

$$\beta_1\vec{a}_1 + \beta_k\vec{a}_2 + \ldots + \overset{\neq 0}{\beta_k}\,\vec{a}_k + \ldots + \beta_m\vec{a}_m = \vec{0},$$

где, например, $\beta_k \neq 0$. Тогда имеем следующую нетривиальную комбинацию векторов системы (3.1) равную нулевому вектору:

$$\beta_1\vec{a}_1 + \beta_k\vec{a}_2 + \ldots + \overset{\neq 0}{\beta_k}\,\vec{a}_k + \ldots + \beta_m\vec{a}_m + 0\cdot\vec{a}_{m+1} + \ldots + 0\cdot\vec{a}_n = \vec{0}.$$

Значит, система векторов (3.1) также линейно зависима. •

Свойство 3. Если в системе векторов (3.1) имеется нуль-вектор, то система (3.1) линейно зависима.

○ Занумеруем векторы системы в таком порядке $\vec{0},\vec{a}_2,\vec{a}_3,...,\vec{a}_n$. Для доказательства 3-го свойства достаточно предъявить пример нетривиальной комбинации этих векторов равной нуль-вектору:

$$1\cdot\vec{0} + 0\cdot\vec{a}_2 + 0\cdot\vec{a}_3 + \ldots + 0\cdot\vec{a}_n = \vec{0}. \bullet$$

Свойство 4. Если система векторов (3.1) линейно независима, то любая ее подсистема также линейно независима.

○ Доказательство проведем методом от противного. Итак, пусть найдется линейно зависимая подсистема данной системы векторов (3.1). Тогда по свойству 2 вся система векторов (3.1) будет линейно зависима, что противоречит условию. Отсюда следует, что допущение неверно и, следовательно, свойство 4 справедливо. •

Выясним геометрическую интерпретацию линейной зависимости системы, состоящей из трех векторов.

Теорема 6. Система из двух векторов $\{\vec{a},\vec{b}\}$ линейно зависима тогда и только тогда, когда эти векторы коллинеарны.

○ Пусть система векторов $\{\vec{a},\vec{b}\}$ линейно зависима. По свойству 1 хотя бы один из векторов линейно выражается через другой. Пусть, например, $\vec{b}=\alpha\vec{a}$. В силу теоремы 8 векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны.

Докажем достаточное условие. Допустим, что $\vec{a}\,||\,\vec{b}$. Если $\vec{a}=\vec{0}$, то по свойству 3 система векторов $\{\vec{a},\vec{b}\}$ линейно зависима. Если $\vec{a}\neq\vec{0}$, тогда в силу теоремы 1 имеем $\vec{b}=\alpha\vec{a}\Leftrightarrow\alpha\vec{a}+(-1)\vec{b}=\vec{0}$, т.е. система векторов $\{\vec{a},\vec{b}\}$ линейно зависима. •

Теорема 7. Система векторов $\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\}$ линейно зависима тогда и только тогда, когда эти векторы компланарны.

○ Пусть система векторов $\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\}$ линейно зависима. По свойству 1 имеем, например,

$$\vec{c}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}. \tag{3.5}$$

Если $\vec{a}\,||\,\vec{b}$, то из соотношения (3.5) находим, что все три вектора $\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\}$ коллинеарны и, следовательно, компланарны. Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны, то согласно теореме 5 векторы $\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\}$ компланарны.

Докажем обратное утверждение. Пусть $\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\}$ компланарны. Если $\vec{a}\,||\,\vec{b}$, то по теореме 6 векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ линейно зависимы. Отсюда по свойству 2 система $\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\}$ линейно зависима. Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны, то по теореме 3 о компланарных векторах $\vec{c}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}$. Тогда в силу свойства 2 система векторов $\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\}$ линейно зависима. •

§ 4. Координаты векторов и точек в пространстве и на плоскости

1. Предварительно докажем теорему о разложении вектора по трем некомпланарным векторам.

Теорема 8. Если векторы $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ не компланарны, то для любого вектора $\vec{p}$ существуют единственные числа α, β, γ такие, что

$$\vec{p}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}\,. \tag{4.1}$$

○ Докажем сначала существование чисел α, β и γ, удовлетворяющих равенству (4.1). Отложим от некоторой точки *O* пространства векторы $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$, $\overrightarrow{OP}=\vec{p}$. Так как векторы $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ не компланарны, то точки *O, A, B, C* не лежат в одной плоскости.

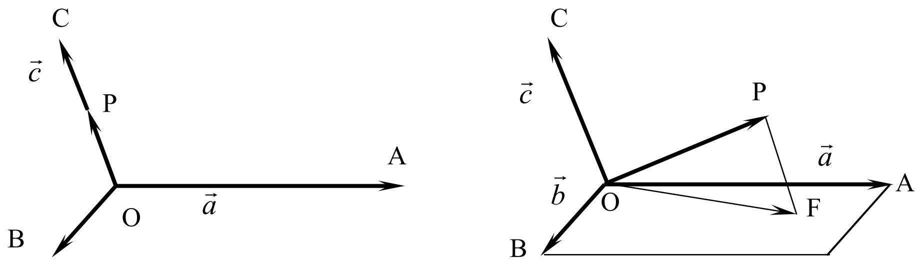


Рис. 1.10

а) Если точка P лежит на прямой OC (рис. 1.10), то векторы $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ и $\overrightarrow{OP}=\vec{p}$ коллинеарны, поэтому по теореме 2 следует

$$\vec{p}=\gamma\vec{c}\Leftrightarrow\vec{p}=0\cdot\vec{a}+0\cdot\vec{b}+\gamma\vec{c}\,.$$

Итак, мы получим равенство вида (4.1). Аналогично рассматриваются случаи, когда точка P лежит на прямой OB (или OA).

б) Пусть точка P лежит, например, в плоскости AOC (в плоскости AOB или BOC). Тогда векторы $\overrightarrow{OP}=\vec{p}$, $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ компланарны.

По теореме 5 получим

$$\vec{p} = \alpha\vec{a} + \gamma\vec{c} \Leftrightarrow \vec{p} = \alpha\vec{a} + 0 \cdot \vec{b} + \gamma\vec{c} ,$$

т. е. равенство вида (4.1).

в) Наконец, рассмотрим случай, когда точка P не лежит ни в одной из плоскостей AOB, AOC, BOC (рис. 1.10).

Проведем через точку P прямую PF||OC, где F — точка пересечения этой прямой с плоскостью AOB. Так как векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\overrightarrow{OF}$ компланарны, то по теореме 5 существуют числа α и β такие, что $\overrightarrow{OF} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$. С другой стороны, векторы $\overrightarrow{FP}$ и $\vec{c}$ коллинеарны и поэтому $\overrightarrow{FP} = \gamma\vec{c}$ (теорема 2).

По правилу треугольника сложения векторов

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{FP} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} .$$

Итак, разложение вида (4.1) существует.

Докажем теперь, что числа α, β, γ в равенстве (4.1) определяются однозначно. Пусть существуют числа α_1, β_1, γ_1 такие, что

$$\vec{p} = \alpha_1\vec{a} + \beta_1\vec{b} + \gamma_1\vec{c} . \qquad (4.2)$$

Из равенств (4.1) и (4.2) получаем

$$(\alpha - \alpha_1)\vec{a} + (\beta - \beta_1)\vec{b} + (\gamma - \gamma_1)\vec{c} = \vec{0} . \qquad (4.3)$$

В равенстве (4.3) $\alpha - \alpha_1 = 0$, $\beta - \beta_1 = 0$, $\gamma - \gamma_1 = 0$. Действительно, если допустить противное, т. е., например, $(\alpha - \alpha_1) \neq 0$, то из равенства (4.3) получим

$$\vec{a} = \frac{\beta_1 - \beta}{\alpha - \alpha_1}\vec{b} + \frac{\gamma_1 - \gamma}{\alpha - \alpha_1}\vec{c} . \qquad (4.4)$$

Из равенства (4.4) в силу теоремы 8 следует, что векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарны. Получили противоречие с условием. Итак, $\alpha - \alpha_1 = 0$, $\beta - \beta_1 = 0$, $\gamma - \gamma_1 = 0$ и, следовательно, единственность разложения (4.1) доказана. •

◎ **Упорядоченная тройка некомпланарных векторов $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ называется аффинным базисом векторов пространства. Упоря-**

доченная тройка попарно перпендикулярных и единичных векторов (ортов) называется прямоугольным декартовым базисом векторов пространства (рис. 1.11).

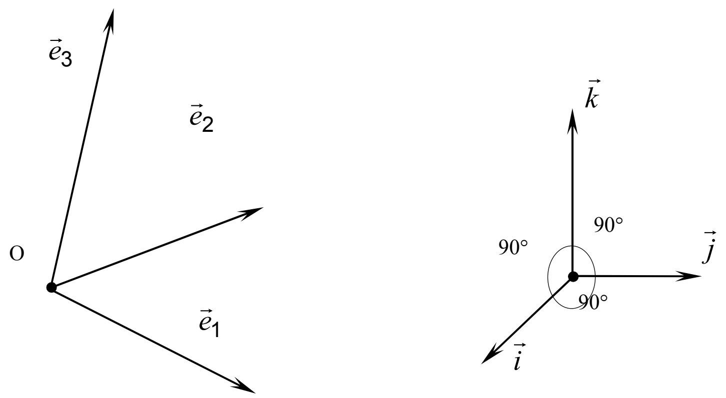


Рис. 1.11

$\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ — аффинный базис; $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ — прямоугольный декартов базис или **ортонормированный базис**.

Введем понятие координат вектора в данном базисе. Пусть $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ аффинный базис пространства, $\vec{p}$ — произвольный вектор пространства. По теореме 8 вектор $\vec{p}$ можно разложить по векторам $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, т.е представить $\vec{p}$ в виде

$$\vec{p} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3 . \tag{4.5}$$

Коэффициенты *x, y, z* в разложении вектора $\vec{p}$ по аффинному базису $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ называются аффинными координатами вектора $\vec{p}$ в этом базисе (или относительно этого базиса). Число *x* называется первой координатой, *y* — второй, *z* — третьей координатой вектора $\vec{p}$.

Коэффициенты x, y, z в разложении

$$\vec{p} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \tag{4.6}$$

вектора $\vec{p}$ по ортонормированному базису $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ называются декартовыми координатами вектора $\vec{p}$ в базисе $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.

Ортонормированный базис $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ есть частный случай аффинного базиса $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$. Если вектор $\vec{p}$ в данном базисе имеет координаты *x, y, z,* то кратко это будем записывать так:

$$\vec{p} = (x, y, z) \text{ или } \vec{p}\,(x, y, z).$$

Отметим, что базисные векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ в базисе $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ имеют координаты:

$$\vec{e}_1 = (1,0,0),\ \vec{e}_2 = (0,1,0),\ \vec{e}_3 = (0,0,1).$$

Аналогично вводятся координаты векторов на плоскости.

Упорядоченная пара неколлинеарных векторов $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ называется аффинным базисом векторов плоскости.

Упорядоченная пара единичных и перпендикулярных векторов называется прямоугольным декартовым базисом или ортонормированным базисом векторов на плоскости.

Коэффициенты в разложении

$$\vec{a} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 \text{ (или } \vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j}\text{)} \tag{4.7}$$

вектора $\vec{a}$ по аффинному базису (декартовому базису) называются соответственно аффинными (декартовыми) координатами вектора $\vec{a}$ в этом базисе.

Обозначение:

$$\vec{a} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 \Leftrightarrow \vec{a} = (x, y). \tag{4.8}$$

Теорема 9. Какова линейная зависимость векторов

$$\vec{p} = \beta_1\vec{a}_1 + \beta_2\vec{a}_2 + \ldots + \beta_n\vec{a}_n, \tag{4.9}$$

такова и линейная зависимость их соответствующих координат.

○ Пусть относительно декартового базиса $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ заданы векторы $\vec{p} = (p_1, p_2, p_3)$, $\vec{a}_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{a}_2 = (x_2, y_2, z_2)$, …, $\vec{a}_n = (x_n, y_n, z_n)$. Разложим эти векторы по векторам базиса $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ и, подставив в равенство (4.9), получим

$$\begin{aligned}&\vec{p} = \beta_1(x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}) + \beta_2(x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}) + \ldots + \\ &+\beta_n(x_n\vec{i} + y_n\vec{j} + z_n\vec{k}) = (\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \ldots + \beta_n x_n)\vec{i} + \\ &+(\beta_1 y_1 + \beta_2 y_2 + \ldots + \beta_n y_n)\vec{j} + (\beta_1 z_1 + \beta_2 z_2 + \ldots + \beta_n z_n)\vec{k}.\end{aligned} \tag{4.10}$$

С другой стороны,

$$\vec{p} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\ . \tag{4.11}$$

Сравнивая разложения (4.10), (4.11) вектора $\vec{p}$ по базису и учитывая, что эти разложения определяются единственным образом, приходим к следующей системе

$$\begin{cases} x = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \ldots + \beta_n x_n, \\ y = \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2 + \ldots + \beta_n y_n, \\ z = \beta_1 z_1 + \beta_2 z_2 + \ldots + \beta_n z_n. \end{cases} \tag{4.12}$$

Из соотношений (4.5) и (4.12) следует утверждение теоремы 9. •

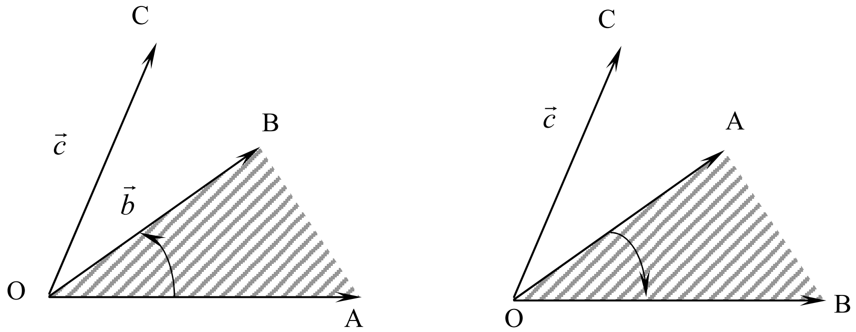
Теорема 10. Для того, чтобы векторы $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, заданные координатами в базисе $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ были коллинеарны, необходимо и достаточно, чтобы их координаты были пропорциональны.

○ Если один из векторов $\vec{a}$ или $\vec{b}$ нулевой, то утверждение очевидно, поэтому рассмотрим случай, когда $\vec{a} \neq 0$ и $\vec{b} \neq 0$. В силу теорем 2 и 9 получаем цепочку эквивалентных предложений:

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} = \lambda\vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = \lambda b_1, \\ a_2 = \lambda b_2, \\ a_3 = \lambda b_3. \end{cases} \bullet \tag{4.13}$$

Пусть дана упорядоченная тройка некомпланарных векторов $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$. Будем говорить, что эта тройка векто-

ров ($\vec a,\vec b,\vec c$) образует тройку векторов правой ориентации (левой ориентации), если кратчайший поворот от $\overrightarrow{OA}$ к $\overrightarrow{OB}$ в плоскости (*AOB*) совершается против часовой стрелки (по часовой стрелке) (предполагается, что мы смотрим на плоскость (*AOB*) из точки *C*) (рис. 1.12).



Правая тройка векторов Левая тройка векторов

Рис. 1.12

При циклической перестановке векторов данной тройки ($\vec a,\vec b,\vec c$) ее ориентация не меняется:

($\vec a,\vec b,\vec c$),($\vec b,\vec c,\vec a$),($\vec c,\vec a,\vec b$) — правые (левые) тройки векторов, если ($\vec a,\vec b,\vec c$) — правая (левая) тройка векторов.

Геометрический образ, состоящий из фиксированной точки и аффинного базиса $\{\vec e_1,\vec e_2,\vec e_3\}$ называется аффинной системой координат $\{O,\vec e_1,\vec e_2,\vec e_3\}$ в пространстве. Точка О называется началом координат, а векторы $\vec e_1,\vec e_2,\vec e_3$ — координатными векторами ($\vec e_1$ — первый координатный вектор; $\vec e_2$ — второй, а $\vec e_3$ — третий).

Прямоугольная декартова система координат $\{O,\vec i,\vec j,\vec k\}$ состоит из фиксированной точки О и ортонормированного базиса $\{\vec i,\vec j,\vec k\}$. Точка О — начало координат, векторы $\vec i,\vec j,\vec k$ — координатные векторы (рис. 1.13).

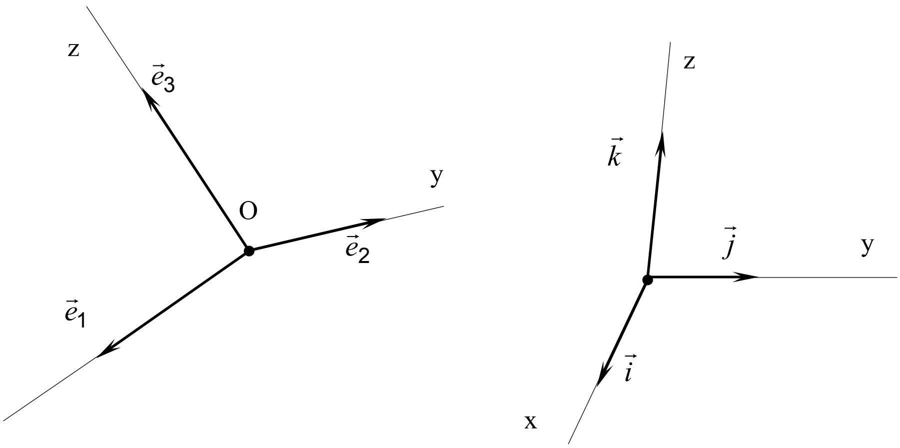


Рис. 1.13

Направленные прямые, проходящие через начало координат и параллельные координатным векторам, называются **координатными осями**. Положительные направления координатных осей определяются координатными векторами. Оси, параллельные векторам $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ (или векторам $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$), называются соответственно осями абсцисс, ординат и аппликат и обозначаются так: Ox, Oy, Oz. Плоскости, определяемые осями Ox и Oy, Ox и Oz, Oy и Oz называются координатными плоскостями и обозначаются соответственно через Oxy, Oxz, Oyz.

Пусть $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ аффинная система координат, а M — произвольная точка пространства. **Вектор OM называется радиус-вектором точки M.**

Координаты x, y, z вектора $\overrightarrow{OM}$ в базисе $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ называются аффинными координатами точки M в системе координат $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, т. е.

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3 \Leftrightarrow M(x, y, z)\,. \qquad (4.13)$$

Для построения точки M(x,y,z) по ее координатам в системе $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ воспользуемся формулой (4.13).

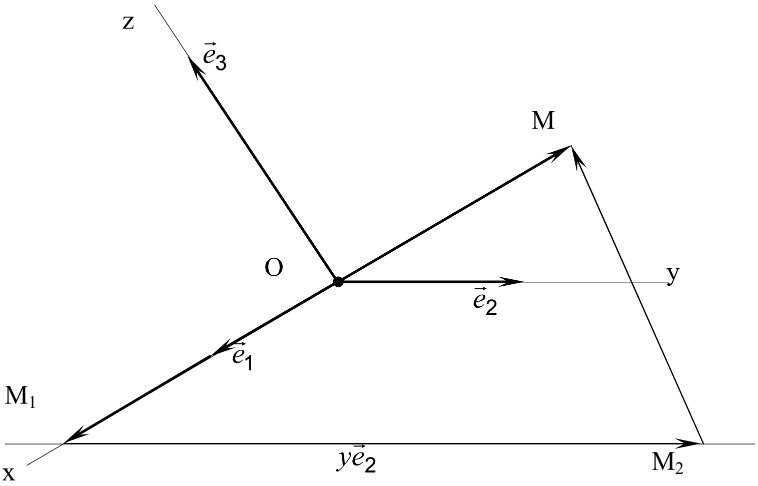


Рис. 1.14

От начала координат отложим вектор $\overrightarrow{OM_1} = x\vec{e}_1$, затем от точки M_1 отложим вектор $M_1M_2 = y\vec{e}_2$ и наконец, от точки M_2 отложим $\overrightarrow{M_2M} = z\vec{e}_3$ (рис. 1.14). По правилу многоугольника

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{M_1M_2} + \overrightarrow{M_2M} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3 .$$

Таким образом, M — искомая точка. Ломаную OM_1M_2M называют координатной ломаной точки M.

○ Другой способ построения точки M по ее координатам в системе $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ основан на правиле параллелепипеда сложения трех векторов. От начала координат отложим векторы $\overrightarrow{OM_1} = x\vec{e}_1$, $\overrightarrow{OM_2} = y\vec{e}_2$, $\overrightarrow{OM_3} = z\vec{e}_3$.

Строим параллелепипед, сторонами которого являются отрезки OM_1, OM_2, OM_3 (рис. 1.15). Очевидно, что

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2} + \overrightarrow{OM_3} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3 ,$$

т. е. точка M искомая. •

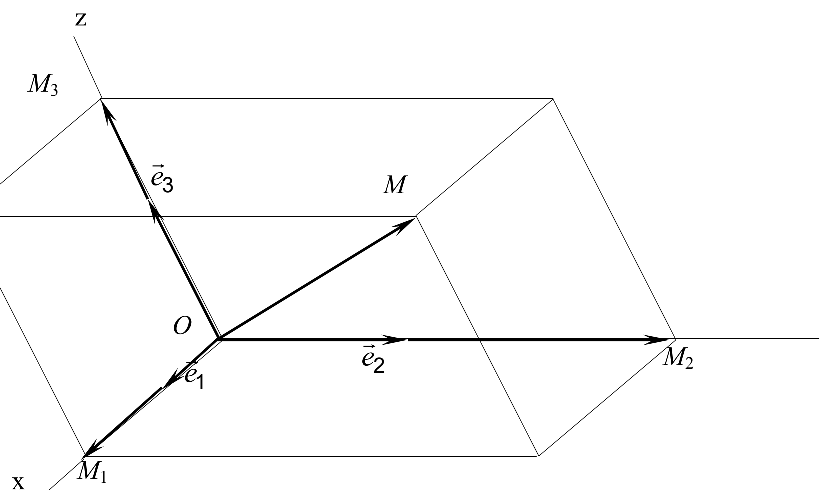


Рис. 1.15

Координаты x, y, z вектора $\overrightarrow{OM}$ в базисе $\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ называются прямоугольными декартовыми координатами (в дальнейшем кратко «декартовыми координатами») точки *M* в системе координат $\{O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$.

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{M_1M_2} + \overrightarrow{M_2M} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \Leftrightarrow M(x,y,z),$$

т. е. (x,y,z) — декартовы координаты точки M относительно декартовой системы координат $\{O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ пространства.

Аналогично введем координаты точек на плоскости. Пусть $\{O,\vec{e}_1,\vec{e}_2\}$ — аффинная система координат, а *M* — произвольная точка плоскости (рис. 1.16).

Координаты *x, y* вектора $\overrightarrow{OM}$ в базисе $\{\vec{e}_1,\vec{e}_2\}$ называются аффинными координатами точки *M* в системе $\{O,\vec{e}_1,\vec{e}_2\}$.

Координаты *x, y* вектора $\overrightarrow{OM}$ в базисе $\{\vec{i},\vec{j}\}$ называются прямоугольными декартовыми координатами (в дальнейшем кратко «декартовыми координатами») точки *M* в системе $\{O,\vec{i},\vec{j}\}$.

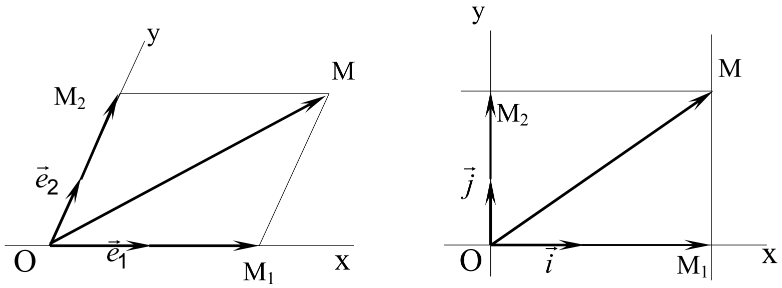


Рис. 1.16

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 \Leftrightarrow M(x,y). \tag{4.14}$$

Для построения точки $M(x,y)$ по ее координатам в системе $\{O,\vec{e}_1,\vec{e}_2\}$ воспользуемся формулой (4.14). От начала координат отложим вектор $\overrightarrow{OM_1} = x\vec{e}_1$, затем от точки M_1 отложим вектор $\overrightarrow{M_1M} = y\vec{e}_2$ (рис. 1.16). По правилу треугольника сложения векторов

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{M_1M} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 .$$

Таким образом, M — искомая точка. Ломаную OM_1M **называют координатной ломаной точки *M*.**

Другой способ построения точки $M(x,y)$ по ее координатам в системе $\{O,\vec{e}_1,\vec{e}_2\}$ основан на правиле параллелограмма сложения векторов (§ 1).

§ 5. Проекция вектора на ось

На плоскости параллельной проекцией точки A на ось l называется точка A_1 — точка пересечения оси l с прямой, проведенной через точку A параллельно вектору $\vec{p}$, задающему направление проектирования.

Параллельной проекцией вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось *l* называется координата вектора $\overrightarrow{A_1B_1}$ относительно базиса оси *l*, где A_1 и B_1 — параллельные проекции соответственно точек *A* и *B* на ось *l* (рис. 1.17).

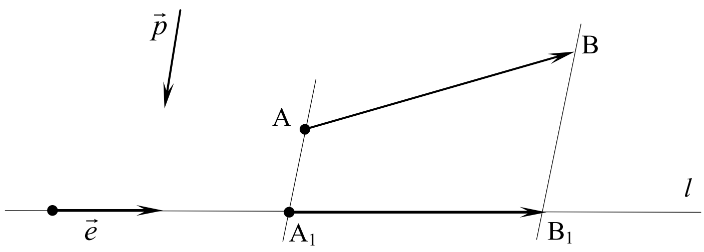


Рис. 1.17

Согласно определению имеем

$$\overrightarrow{A_1B_1} = x\vec{e} \overset{def}{\Leftrightarrow} x = пр._l\overrightarrow{AB} = пр._{\vec{e}}\overrightarrow{AB}\,.$$

Если $\vec{p} \perp l$ и базис $\vec{e}$ оси *l* декартов, т. е. $|\vec{e}| = 1$, то проекция вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось *l* называется ортогональной (рис. 1.18).

$$\overrightarrow{A_1B_1} = x\vec{i} \overset{def}{\Leftrightarrow} x = орт.пр._l\overrightarrow{AB} = пр._l\overrightarrow{AB}\,.$$

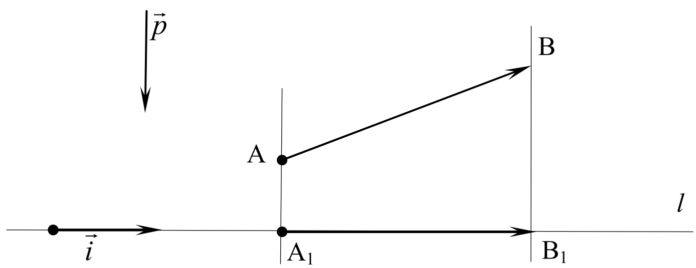


Рис. 1.18

В пространстве направление проектирования задания двумя неколлинеарными векторами (рис. 1.19).

Из определения проекции вектора на ось *l* вытекает, что каждая координата вектора есть проекция этого вектора на ось, определяемую соответствующим базисным вектором.

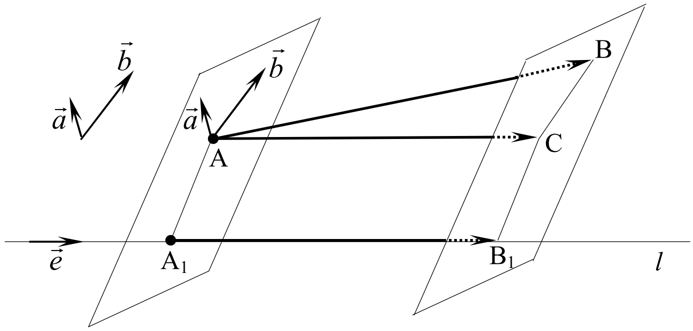


Рис. 1.19

При этом направление проектирования задается двумя другими базисными векторами, если проектирование ведется (рассматривается) в пространстве, или другим базисным вектором, если проектирование рассматривается на плоскости (рис. 1.20).

$$\overrightarrow{OA_1} = x\vec{e}_1 \Leftrightarrow x_1 = np._{\vec{e}_1} OA\,,\ \overrightarrow{OA_1} = x\vec{i} \Leftrightarrow x = opm.np._{\vec{i}}\overrightarrow{OA}$$

$$\overrightarrow{OA_2} = x_2\vec{e}_2 \Leftrightarrow x_2 = np._{\vec{e}2} OA\,,\ \overrightarrow{OA_2} = y\vec{j} \Leftrightarrow y = opm.np._{\vec{j}}\overrightarrow{OA}\,,$$

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2\,,\ \overrightarrow{OA_3} = x\vec{k} \Leftrightarrow z = opm.np._{\vec{k}}\overrightarrow{OA}\,,$$

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\ .$$

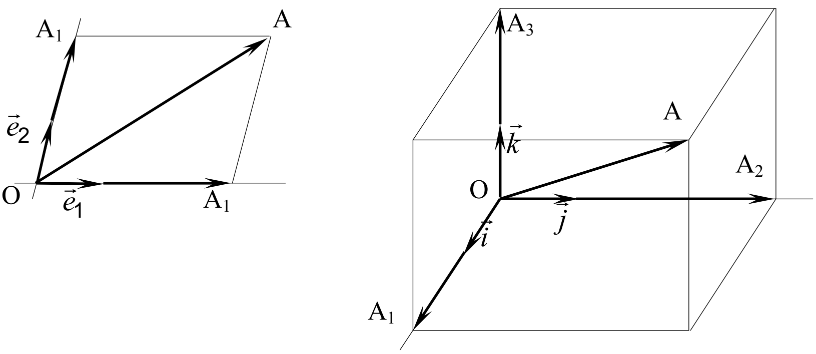


Рис. 1.20

Теорема 11. Проекция суммы векторов на ось равна сумме проекций слагаемых векторов на ось (рис. 1.21).

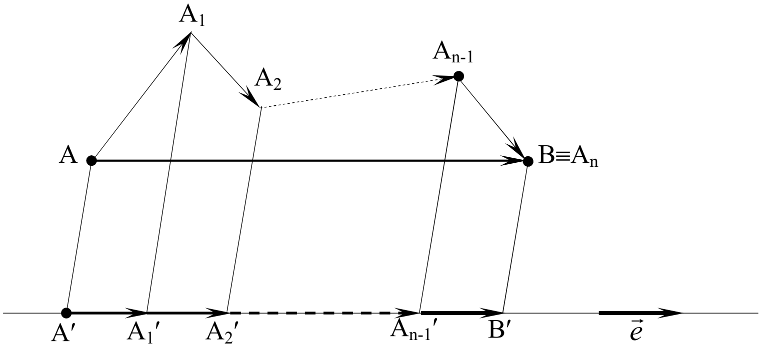


Рис. 1.21

$$\bigcirc\ \overrightarrow{AB} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \ldots + \vec{a}_n .$$

$$\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{A'A'_1} + A'_1A'_2 + \ldots + \overrightarrow{A'_{n-1}B'} . \qquad (5.1)$$

Разложим векторы $\overrightarrow{A'B'}$, $\overrightarrow{A'A'_1}$, $A'_1A'_2$, …, $\overrightarrow{A'_{n-1}B'}$ по базису $\vec{e}$ оси *l* и подставим разложения в равенство (5.1), получим

$$x\vec{e} = x_1\vec{e} + x_2\vec{e} + \ldots + x_n\vec{e} \Leftrightarrow x\vec{e}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)\vec{e} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = x_1 + x_2 + \ldots + x_n \Leftrightarrow np._l\vec{a}_1 + np._l\vec{a}_2 + \ldots + np._l\vec{a}_n . \bullet$$

Теорема 12. Ортогональная проекция вектора $\vec{a}$ на ось *l* равна произведению модуля вектора $\vec{a}$ на косинус угла между положительным направлением оси *l* и $\vec{a}$ (рис. 1.22), т.е.

$$opm.np._l\vec{a} = |\vec{a}|\cos(\widehat{\vec{a},\vec{i}}\ ) . \qquad (5.2)$$

$$\bigcirc\ \overrightarrow{A_1B_1} = x\vec{i} \Leftrightarrow \left|\overrightarrow{A_1B_1}\right| = |x|\cdot\left|\vec{i}\right| = |x| .$$

С другой стороны,

$$|x| = |\, opm.np._l\overrightarrow{AB}\,| = \left|\overrightarrow{A_1B_1}\right| = |AC| . \qquad (5.3)$$

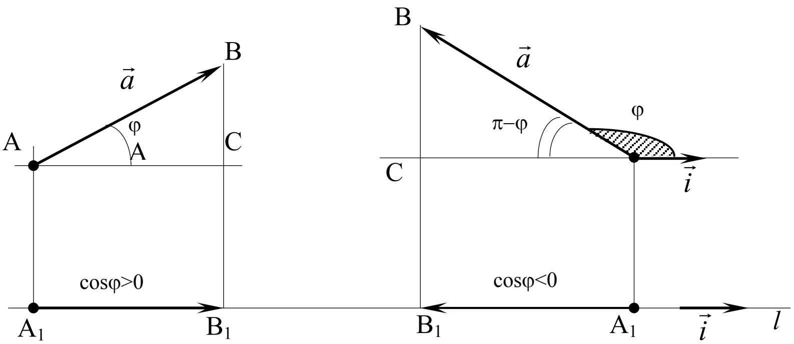


Рис. 1.22

Из ΔACB находим

$$\left|AC\right| = \left|AB\right| \cdot |\cos B\hat{A}C| = \left|\vec{a}\right| \cdot |\cos(\widehat{\vec{a},\vec{i}})|. \tag{5.4}$$

Подставим значение $|AC|$ в равенство, получим

$$|x| = |\vec{a}| \cdot |cos(\widehat{\vec{a},\vec{i}})|. \tag{5.5}$$

Так как числа x и $cos(\widehat{\vec{a},\vec{i}})$ одного знака в обоих рассматриваемых случаях, то из равенства (5.5) следует

$$x = орт.пр._l\vec{a} = |\vec{a}| \cdot cos(\widehat{\vec{a},\vec{i}}). \bullet$$

§ 6. Скалярное произведение векторов

1. Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — нулевые векторы. Отложим от произвольной точки O векторы $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ и рассмотрим лучи OA и OB (рис. 1.23).

◎ *Углом между вектрами* $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется угол между лучами *OA* и *OB*, т. е. угол *AOB*, если эти лучи не совпадают. Если лучи *OA* и *OB* совпадают, то угол между ними считается равным нулю.

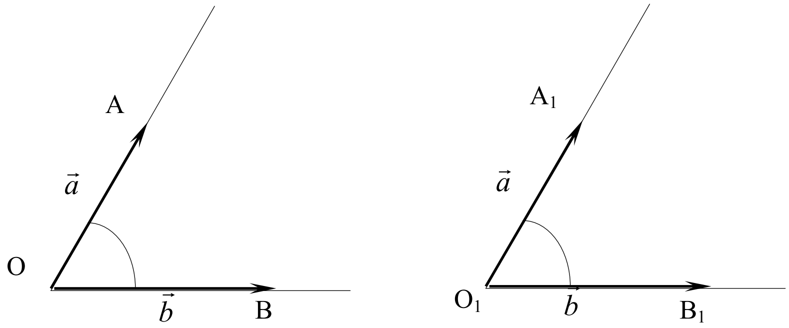


Рис. 1.23

Угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается так: $(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$. Так как два угла, стороны которых сонаправлены, равны, то угол ***между данными векторами не зависит от выбора точки*** *O* (рис. 1.23).

Два ненулевых вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются ***взаимно перпендикулярными***, если $(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=\dfrac{\pi}{2}$. Обозначение: $\vec{a}\perp\vec{b}$.

Условимся считать, что нуль-вектор перпендикулярен любому вектору пространства. Итак, для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имеем $0\le(\widehat{\vec{a},\vec{b}})\le\pi$.

2. Скалярным произведением двух ненулевых векторов называется число, равное произведению их длин на косинус угла между ними.

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}}). \qquad (6.1)$$

Свойства скалярного произведения

Свойство 1. **Скалярное произведение коммутативно (переместительный закон), т. е.**

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}. \qquad (6.2)$$

$$\circ\ \vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=|\vec{b}||\vec{a}|\cos(\widehat{\vec{b},\vec{a}})=\vec{b}\cdot\vec{a}\ .\ \bullet$$

Свойство 2. **Скалярное произведение ассоци-ативно относительно операции умножения вектора на число (подчиняется сочетательному закону), т. е.**

$$(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})\ . \qquad (6.3)$$

○ а) Пусть λ > 0, тогда $\lambda\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{a},(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=(\widehat{\lambda\vec{a},\vec{b}}),|\lambda|=\lambda$.

$$(\lambda\vec{a})\vec{b}=|\lambda\vec{a}||\vec{b}|\cos(\widehat{\lambda\vec{a},\vec{b}})=|\lambda||\vec{a}||\vec{b}|\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})\ .$$

в) Если λ < 0, то |λ| = – λ, $\lambda\vec{a}\downarrow\uparrow\vec{a},\quad (\widehat{\vec{a},\vec{b}})=\varphi,\quad (\widehat{\lambda\vec{a},\vec{b}})=\pi-\varphi$.

$$(\lambda\vec{a})\vec{b}=|\lambda||\vec{a}||\vec{b}|\cos(\widehat{\lambda\vec{a},\vec{b}})=-\lambda|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\pi-\varphi)=$$
$$=\lambda|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b}).\ \bullet$$

Свойство 3. **Скалярный квадрат вектора равен квадрату модуля, т. е.**

$$\vec{a}^2=|\vec{a}|^2\ . \qquad (6.4)$$

$$\circ\ \vec{a}^2\overset{def}{=}\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|\cdot|\vec{a}|\cos(\widehat{\vec{a},\vec{a}})=|\vec{a}|^2\ .\ \bullet$$

Свойство 4. Скалярное произведение двух ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда эти векторы перпендикулярны, т. е.

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=0\Leftrightarrow\vec{a}\perp\vec{b}\ . \qquad (6.5)$$

$$\circ\ \vec{a}\vec{b}=0\Leftrightarrow|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=0\Leftrightarrow\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=0\Leftrightarrow\vec{a}\perp\vec{b}\ .\ \bullet$$

Свойство 5. **Скалярное произведение двух векторов равно произведению модуля одного из них на ортогональную проекцию другого на ось, определяемую первым выбранным вектором, т. е.**

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot орт.пр._{\vec{a}}\vec{b}=|\vec{b}|\cdot(орт.пр._{\vec{b}}\vec{a})\ . \qquad (6.6)$$

○ $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\widehat{\vec{b},\vec{i}})=|\vec{a}|(орт.пр._{\vec{a}}\vec{b})$. •

Свойство 6. **Скалярное произведение подчиняется дистрибутивному закону (распределительному закону), т. е.**

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}\,. \tag{6.7}$$

○ $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=|\vec{a}|\cdot(орт.пр._{\vec{a}}(\vec{b}+\vec{c}))=|\vec{a}|(орт.пр._{\vec{a}}\vec{b}+орт.пр._{\vec{a}}\vec{c})=$

$=|\vec{a}|(орт.пр._{\vec{a}}\vec{b})+|\vec{a}|(орт.пр._{\vec{a}}\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$. •

Теорема 13. Скалярное произведение векторов $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ **и** $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$**, заданных в ортонормированном базисе, равно сумме произведений их соответствующих координат, т. е.**

$$\vec{a}\vec{b}=a_1a_2+a_2b_2+a_3b_3\,. \tag{6.8}$$

Так как векторы $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ попарно перпендикулярны, то

$$\vec{i}\vec{j}=\vec{j}\vec{k}=\vec{i}\vec{k}=0\,. \tag{6.9}$$

Учитывая (6.9) и свойства 2,3,6 скалярного произведения векторов, получим

$$\begin{aligned}\vec{a}\vec{b}&=(a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k})(b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3k)=\\&=a_1b_1\vec{i}^{\,2}+a_2b_2\vec{j}^{\,2}+a_3b_3\vec{k}^{\,2}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3.\ \bullet\end{aligned}$$

Следствие 1. $|a|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\,.$ (6.10)

○ $|a|^2=\hat{a}\cdot\vec{a}=a_1^2+a_2^2+a_3^2\Rightarrow|a|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$. •

Следствие 2. **Косинус угла между ненулевыми векторами** $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ **и** $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$**, заданными в ортогональном базисе, вычисляется по формуле**

$$\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}. \tag{6.11}$$

○ Действительно, по формуле (6.1) находим $\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = \dfrac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$. Подставив сюда значения $\vec{a}\vec{b}, |\vec{a}|, |\vec{b}|$ из формулы (6.8), (6.10), получим (6.11). •

Скалярное произведение двух векторов находит широкое применение в различных разделах физики, в частности, в механике. Рассмотрим следующий пример. Пусть материальная точка *M* под действием силы $\vec{F}$ переместилась из точки M_1 в точку M_2 по прямолинейному пути (рис. 1.24).

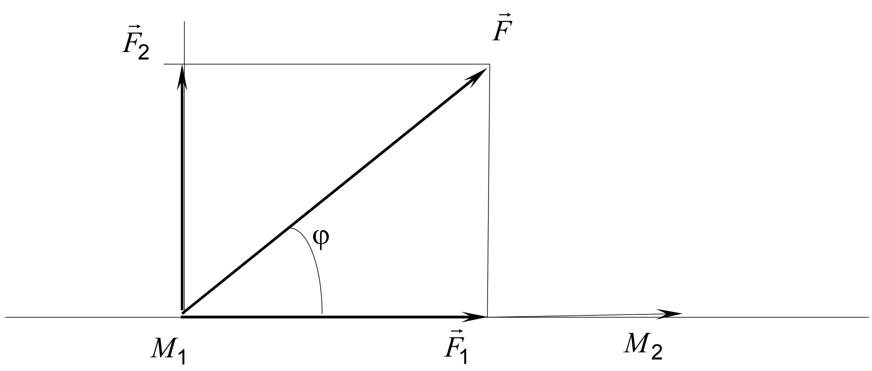


Рис. 1.24

Как известно из физики, работа силы $\vec{F}$ при перемещении на величину $|M_1M_2| = |\vec{S}|$ по прямолинейному пути вычисляется по формуле

$$A = |\vec{F}_1| \cdot |\vec{S}| = \left(|\vec{F}_1| cos\left(\widehat{\vec{F}_1\vec{S}}\right) \right) \cdot |\vec{S}| = |\vec{F}_1| \cdot |\vec{S}| cos\left(\widehat{\vec{F}_1\vec{S}}\right) = \vec{F} \cdot \vec{S}.$$

Следовательно, **работа постоянной силы** $\vec{F}$, действующей на материальную точку при прямолинейном перемещении $\overrightarrow{M_1M_2}$, равна скалярному произведению векторов $\vec{F}$ и $\vec{S}$.

§ 7. Векторное произведение векторов

Векторным произведением неколлинеарных упорядоченных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (взятых в данном порядке), называется вектор $\vec{p}$, удовлетворяющей следующим условиям:

1°. $|\vec{p}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin(\widehat{\vec{a},\vec{b}}),$

2°. $\vec{p} \perp \vec{a}, \ \ \vec{p} \perp \vec{b},$

3°. Упорядоченная тройка векторов ($\vec{a},\vec{b},\vec{p}$) имеет правую ориентацию (или ту же ориентацию, что и тройка ($\vec{i},\vec{j},\vec{k}$) безисных векторов).

Векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается [$\vec{a},\vec{b}$].

Векторное произведение коллинеарных векторов считается равным нуль-вектору.

Свойства векторного произведения векторов

Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — неколлинеарные векторы. От некоторой точки *A* пространства отложим вектры $\overrightarrow{AD} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$ и построим параллелограмм *ABCD* так, чтобы отрезки *AD* и *AB* были смежными сторонами параллелограмма *ABCD* (рис. 1.25).

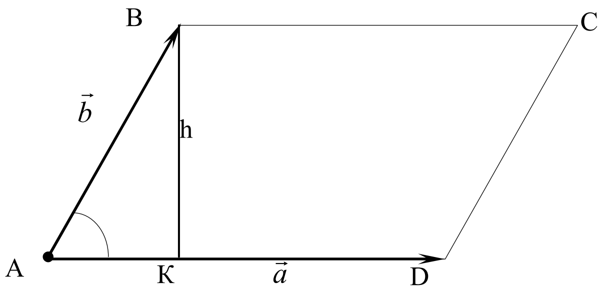


Рис. 1.25

Параллелограмм *ABCD* назовем параллелограммом, построенным на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$. В зависимости от выбора точки *A* на данных векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ можно построить бесконечное множество параллелограммов, но все они конгруентны друг другу (наложимы друг на друга), поэтому имеют одну и ту же площадь.

Свойство 1. Модуль векторного произведения векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ численно равен площади параллелограмма, построенного на этих векторах.

○ Пусть *ABCD* — параллелограмм, построенный на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (рис. 1.25). *BK* = *h* — высота параллелограмма. Из Δ*ABK* находим

$$h = AB \cdot \sin B\hat{A}D = \left|\vec{b}\right| \cdot \sin(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b}).$$

Пусть $\vec{p} = [\vec{a}, \vec{b}]$. Имеем

$$S_{ABCD} = AD \cdot h = |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \sin(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b}) = |\vec{p}|. \bullet$$

Свойство 2. Скалярный множитель можно выносить из под знака векторного произведения (вносить под знак векторного произведения), т. е.

$$[\lambda\vec{a}, \vec{b}] = \lambda[\vec{a}, \vec{b}]. \tag{7.1}$$

○ а) Пусть $\lambda > 0$, тогда

$$\lambda\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{a},\ (\lambda\,\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b}) = (\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b}),\ |\lambda| = \lambda. \tag{7.2}$$

В силу определения векторного произведения векторов с учетом соотношений (7.2), получим:

1а) $\left(|\vec{p}| = \lambda|\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| sin(\lambda\,\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b}),\ |\vec{q}| = |\vec{a}|\left|\vec{b}\right| sin(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b}) \right) \Rightarrow |\vec{p}| = \lambda|\vec{q}|$,

2а) $\left(\vec{q} \perp \vec{a}, \vec{q} \perp \vec{b};\ \vec{p} \perp \lambda\vec{a};\ \vec{p} \perp \vec{b}\right)$,

3а) Упорядоченные тройки векторов ($\lambda\vec{a}, \vec{b}, \vec{p}$) и ($\vec{a}, \vec{b}, \vec{q}$) правой ориентации, т. е. $\vec{p} \uparrow\uparrow \vec{q}$.

Таким образом, $\vec{p} = \lambda\vec{q} \Leftrightarrow [\lambda\vec{a}, \vec{b}] = \lambda[\vec{a}, \vec{b}]$. •

○ b) Пусть теперь $\lambda < 0$. В этом случае

$$\lambda\vec{a} \downarrow\uparrow \vec{a}, (\lambda\,\vec{a}\hat{,}\vec{b}) = \pi - \varphi, \quad \varphi = (\vec{a}\hat{,}\vec{b}), \quad |\lambda| = -\lambda. \tag{7.3}$$

С учетом определения вектроного произведения и соотношений (7.3) находим:

1b) $\begin{pmatrix} |\vec{p}| = |\lambda\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\sin(\lambda\,\vec{a}\hat{,}\vec{b}) = -\lambda|\vec{a}||\vec{b}|\sin(\pi - \varphi) = -\lambda|\vec{a}||\vec{b}|\sin(\vec{a},\vec{b}) \\ |\vec{q}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin(\vec{a},\vec{b}). \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\Rightarrow |\vec{p}| \equiv -\lambda|\vec{q}|.$$

2b) $\left(\vec{p} \perp \lambda\vec{a}, \vec{p} \perp \vec{b};\ \ \vec{q} \perp \vec{a};\ \ \vec{q} \perp \vec{b}\right)$,

3b) Упорядоченные тройки векторов ($\lambda\vec{a}, \vec{b}, \vec{p}$) и ($\vec{a}, \vec{b}, \vec{q}$) противоположной риентации, т. е. $\vec{p} \downarrow\uparrow \vec{q}$.

Отсюда вытекает, что $\vec{p} = \lambda\vec{q} \Leftrightarrow \left[\lambda\vec{a}, \vec{b}\right] = \lambda\left[\vec{a}, \vec{b}\right]$. •

Свойство 3. Векторное произведение антикоммутативно.

$$\left[\vec{a}, \vec{b}\right] = -\left[\vec{b}, \vec{a}\right]. \tag{7.4}$$

○ Построив векторы $\vec{p} = \left[\vec{a}, \vec{b}\right]$ и $\vec{q} = \left[\vec{b}, \vec{a}\right]$. (рис. 1.26), убеждаемся, что $\vec{p} = -\vec{q}$. •

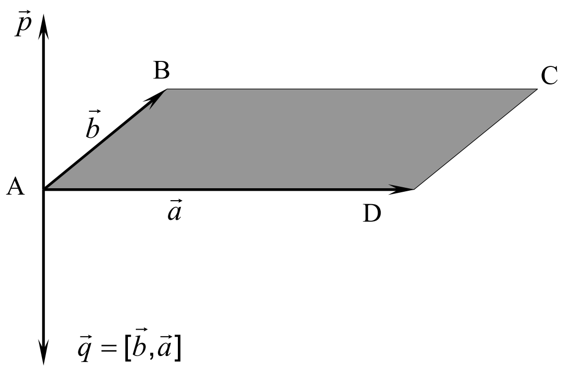


Рис. 1.26

Свойство 4. Векторное произведение подчиняется дистрибутивному закону:

$$[\vec{a}+\vec{b},\vec{c}]=[\vec{a},\vec{c}]+[\vec{b},\vec{c}]\,. \tag{7.5}$$

○ a) Если хотя бы один из векторов $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ нулевой, то равенство (7.5) очевидно выполняется.

b) Пусть теперь $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ — ненулевые векторы и $\vec{a}\,||\,\vec{b} \Leftrightarrow \vec{b}=\lambda\vec{a}$. Преобразуем правую часть (7.5) с учетом свойства 2 и условия $\vec{b}=\lambda\vec{a}$:

$$[\vec{a}+\vec{b},\vec{c}]=[\vec{a}+\lambda\vec{a},\vec{c}]=[(1+\lambda)\vec{a},\vec{c}]=(1+\lambda)[\vec{a},\vec{c}]\,. \tag{7.6}$$

Затем преобразуем выражение

$$[\vec{a},\vec{c}]+[\vec{e},\vec{c}]=[\vec{a},\vec{c}]+[\lambda\vec{a},\vec{c}]=[\vec{a},\vec{c}]+\lambda[\vec{a},\vec{c}]=(1+\lambda)[\vec{a},\vec{c}]\,. \tag{7.7}$$

Правые части соотношений (7.6) и (7.7) равны. Значит, равны и левые части, т. е. формула (7.5) справедлива и в этом случае.

c) Рассмотрим случай, когда векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны. От произвольной точки O пространства отложим $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, от точки A отложим вектор $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$. По правилу треугольника сложения векторов $\overrightarrow{OB}=\vec{a}+\vec{b}$. Пусть ΔOA_1B_1 — ортогональная проекция ΔOAB на произвольную плоскость ω, проходящую через точку O.

Пусть $\overrightarrow{OE}=\vec{e}$ — орт, причем $\vec{e}\perp\omega$ (рис. 1.27).

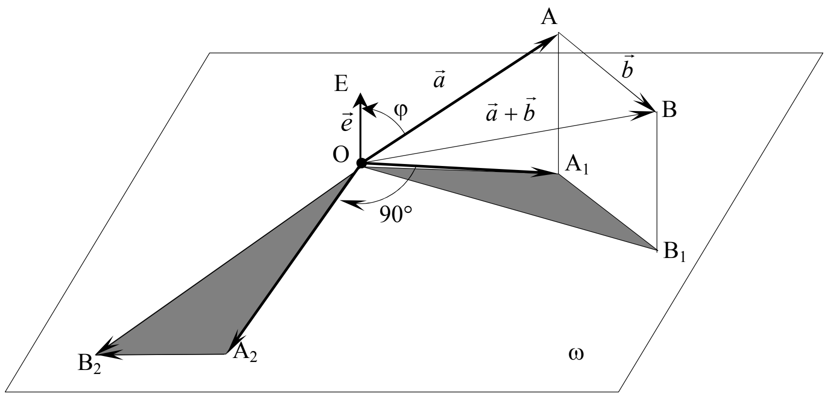


Рис. 1.27

Повернем ΔOA_1B_1 в плоскости ω на 90° по часовой стрелке (если смотреть из точкиE на плоскость ω).

В результате получим ΔOA_2B_2. Предварительно дакажем, что

$$\overrightarrow{OA_2} = [\vec{a}, \vec{e}]. \tag{7.8}$$

Для этого достаточно проверить справедливость условий 1°—3° определения векторного произведения векторов. Действительно, имеем

1°. $|\overrightarrow{OA_2}| = |OA_2| = |OA_1| = |OA| \cos(\frac{\pi}{2} - \varphi) = |\vec{a}| \cdot |\vec{e}| \sin(\widehat{\vec{a}, \vec{e}})$, где $\varphi = (\widehat{\vec{a}, \vec{e}})$;

2°. $\big((OA_2) \perp (OE), (OA_2) \perp (OA_1)\big) \Rightarrow (OA_2 \perp (OA)$.

$\big((OA_2) \perp (OE), (OA_2) \perp (OA)\big) \Rightarrow \big(\overrightarrow{OA_2} \perp \vec{e}, \overrightarrow{OA_2} \perp \vec{a}\big)$.

3°. Упорядоченная тройка векторов ($\vec{a}, \vec{e}, \overrightarrow{OA_2}$) имеет правую ориентацию. Таким образом, из 1—3 следует, что формула (7.8) справедлива.

По правилу треугольника сложения векторов

$$\overrightarrow{OB_2} = \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{A_2B_2}. \tag{7.9}$$

В силу формулы (7.8) соотношение (7.9) приводим к виду

$$[\vec{a} + \vec{b}, \vec{e}] = [\vec{a}, \vec{e}] + [\vec{b}, \vec{e}]. \tag{7.10}$$

Умножим обе части равенства (7.9) на $|\vec{c}|$ и, учитывая, что $\vec{c} = |\vec{c}|\vec{e}$, получим

$$[\vec{a} + \vec{b}, |\vec{c}|\vec{e}] = [\vec{a}, |\vec{c}|\vec{e}] + [\vec{b}, |\vec{c}|\vec{e}] \Leftrightarrow [\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{a}, \vec{c}] + [\vec{b}, \vec{c}]. \bullet$$

Выражение векторного произведения векторов через координаты сомножителей

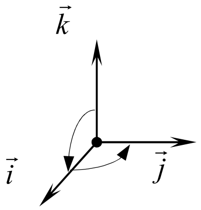
Теорема 14. Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы в ортонормированном базисе {$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$} своими координатами, т.е.

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3), \ \vec{b} = (b_1, b_2, b_3),$$

то векторное произведение [$\vec{a}, \vec{b}$] определяется по формуле

$$[\vec{a},\vec{b}] = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}; - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}. \qquad (7.11)$$

○ Предварительно составим таблицу векторных произведений базисных векторов $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.



$$\begin{aligned} &[\vec{\mathrm{i}}, \vec{\mathrm{j}}] = \vec{0}, \quad [\vec{\mathrm{i}},\vec{\mathrm{j}}] = \vec{\mathrm{k}}, \quad [\vec{\mathrm{i}},\vec{\mathrm{k}}] = -\vec{\mathrm{j}}, \\ &[\vec{\mathrm{j}},\vec{\mathrm{i}}] = -\mathrm{k}, \quad [\vec{\mathrm{j}},\vec{\mathrm{j}}] = \vec{0}, \quad [\vec{\mathrm{j}},\vec{\mathrm{k}}] = \vec{\mathrm{i}}, \\ &[\vec{\mathrm{k}},\vec{\mathrm{i}}] = \vec{\mathrm{j}}, \quad [\vec{\mathrm{k}},\vec{\mathrm{j}}] = -\vec{\mathrm{i}}, \quad [\vec{\mathrm{k}},\vec{\mathrm{k}}] = 0. \end{aligned} \qquad (7.12)$$

Найдем векторное произведение $[\vec{a},\vec{b}]$ векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, используя свойства векторного произведения и таблицу (7.12):

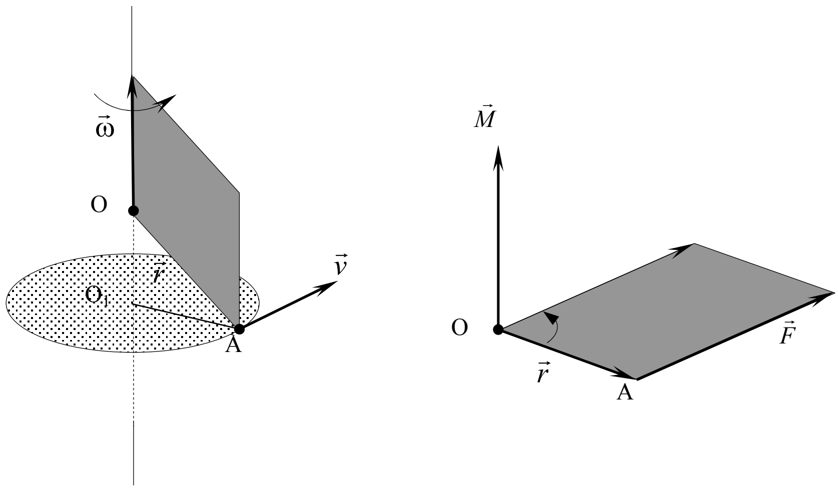
$$\begin{aligned} &[\vec{a},\vec{b}] = [\vec{a}_1\vec{i} + \vec{a}_2\vec{j} + \vec{a}_3\vec{k},\ \vec{b}_1\vec{i} + \vec{b}_2\vec{j} + \vec{b}_3\vec{k}] = a_1 b_2 \vec{k} - a_1 b_3 \vec{j} - \\ &- a_2 b_1 \vec{k} + a_2 b_3 \vec{i} + a_3 b_1 \vec{j} - a_3 b_2 \vec{i} = \\ &= (a_2 b_3 - a_3 b_2)\vec{i} + (a_3 b_1 - a_1 b_3)\vec{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\vec{k} = \\ &= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \bar{k} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Пример. Пусть заданы два вектора $\vec{a} = (1;-5;2)$ и $\vec{b} = (-1;12;0)$ относительно ортонормированного базиса $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Найти векторное произведение $[\vec{a},\vec{b}]$.

По формуле (7.11) получаем

$$[\vec{a},\vec{b}] = \left(\begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 12 & 0 \end{vmatrix}; - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 12 \end{vmatrix} \right) = (-24;-2;7). \ \bullet$$

Реальным прообразом понятия векторного произведения являются известные в механике понятия линейной скорости $\vec{v}$ точки твердого тела, вращающегося вокруг оси и момент $\vec{M}$ силы $\vec{F}$ относительно точки (рис. 1.28).



$\vec{v} = [\vec{\omega}, \vec{r}]$ $\qquad\qquad$ $\overrightarrow{M} = [\vec{r}, \overrightarrow{F}]$

Рис. 1.28

$\vec{\omega}$ — вектор угловой скорости вращения твердого тела, $\overrightarrow{OA} = \vec{r}$ — радиус-вектор точки *A*, *O* — начало неподвижной системы координат в пространстве.

§ 8. Смешанное произведение векторов

Смешанным произведением упорядоченной тройки векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ называется скалярное произведение вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{p}$, где $\vec{p} = [\vec{b}, \vec{c}]$, т. е.

$$\vec{a} \cdot \vec{p} \overset{def}{=} \vec{a} \cdot [\vec{b}, \vec{c}]\,. \tag{8.1}$$

Т е о р е м а 15. Смешанное произведение $\vec{a} \cdot [\vec{b}, \vec{c}]$ упорядоченной тройки векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ равно определителю третьего порядка, составленному из координат векторов-сомножителей, заданных в ортонормированном базисе {$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$}.

○ Пусть относительно базиса $\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ заданы три упорядоченных вектора $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$, $\vec{c}=(c_1,c_2,c_3)$. Найдем по формуле (7.11) векторное произведение

$$\vec{p}=[\vec{b},\vec{c}]=\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}\vec{k} \tag{8.2}$$

и затем скалярное произведение

$$\vec{a}\cdot\vec{p}\overset{def}{=}\vec{a}\cdot[\vec{b},\vec{c}]=a_1\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}-a_2\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix}+a_3\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}. \bullet \tag{8.3}$$

Теорема 16. Квадратные скобки в смешанном призведении можно рассматривать произвольным образом, т. е.

$$\vec{a}\cdot[\vec{b},\vec{c}]=[\vec{a},\vec{b}]\vec{c}\ . \tag{8.4}$$

$$○\ \vec{a}\cdot[\vec{b},\vec{c}]=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}=\vec{c}\cdot[\vec{a},\vec{b}]=[\vec{a},\vec{b}]\cdot\vec{c}\ . \bullet$$

Из свойств (8.3), (8.4) смешанного произведения получили

$$\vec{a}\cdot[\vec{b},\vec{c}]=[\vec{a},\vec{b}]\cdot\vec{c}\overset{def}{=}(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}. \tag{8.5}$$

Таким образом, из (8.5) следует, что *свойства смешанного произведения трех векторов $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ есть соответствующие свойства строк (столбцов) определителя третьего порядка (8.5), составленного из координат этих векторов*.

Например. 1). **При перемене мест любых двух строк** (столбцов) определителя местами знак определителя **меняется на противоположный**.

Соответствующее свойство для смешанного произведения таково:

1) **При перемене мест любых двух векторов-сомножителей смешанного произведения знак его меняется на противоположный**, т. е., например,

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\,) = -\,(\vec{a},\vec{c},\vec{b}\,). \tag{8.6}$$

○ $(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\,) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = -\,(\vec{a},\vec{c},\vec{b}\,)$. •

2) **Определитель равен нулю, если одна из его строк есть линейная комбинация двух других.**

Соответствующее свойство для смешанного произведения:

2*). **Смешанное произведение равно нулю, если один из векторов его является линейной комбинацией двух других**, т. е., например, если $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$, то $(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\,) = 0$.

○ $(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\,) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ \alpha a_1 + \beta b_1 & \alpha a_2 + \beta b_2 & \alpha a_3 + \beta b_3 \end{vmatrix} =$

$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ \alpha a_1 & \alpha a_2 & \alpha a_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ \beta b_1 & \beta b_2 & \beta b_3 \end{vmatrix} = 0.$ •

Теорема 17. (Признак компланарности векторов).

Векторы $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ компланарны тогда и только тогда, когда $(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\,) = 0$.

○ Необходимость. Пусть векторы $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ компланарны. Тогда в силу теоремы 5 имеем $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$. Отсюда по свойству 2*) $(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\,) = 0$.

Достаточность. Пусть теперь $(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\,) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$. Отсюда следует, что одна из строк определителя есть линейная комбинация двух других. Например, $c_i = \alpha a_i + \beta b_i \Leftrightarrow \vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$, т. е. векторы $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ (теорема 5) компланарны. •

Теорема 18. Объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$, равен модулю смешанного произведения ($\vec{a},\vec{b},\vec{c}$), т.е. $V_{пар-ма} = |\vec{a},\vec{b},\vec{c}\,|$.

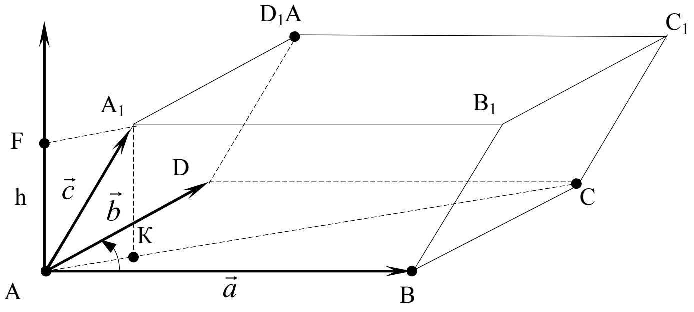


Рис. 1.29

○ Рассмотрим параллелепипед AC_1, построенный на трех упорядоченных некомпланарных векторах $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ (рис. 1.29). Пусть $\vec{p}=[\vec{a},\vec{b}]$, тогда площадь $S_{осн.}$ онования параллелепипеда AC_1 (площадь параллелограмма $ABCD$) равна

$$S_{осн.} \stackrel{def}{=} S_{ABCD} = \left|[\vec{a},\vec{b}]\right| = \left|\vec{p}\right| .$$

Высота параллелепипеда $h = A_1K = AF = |\,орт.пр._{\vec{p}}\vec{c}\,|$. Таким образом,

$$V \stackrel{def}{=} V_{пар-да} = S_{осн.}\cdot h = |\,\vec{p}\,|\left|орт.пр._{\vec{p}}\vec{c}\right| = |\,\vec{p}\cdot\vec{c}\,| = |\,(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\,)\,|$$

или в координатной форме

$$V = mod\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} . \bullet$$

Глава II
ЛИНИИ ПЕРВОГО И ВТОРОГО ПОРЯДКА НА ПЛОСКОСТИ

§ 1. Формулы преобразования декартовой системы координат

1. Рассмотрим на плоскости две декартовы системы координат $\{O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ и $\{O^*,\vec{i}^*,\vec{j}^*,\vec{k}^*\}$. Первую систему назовем старой, а вторую — новой. Пусть *M* — произвольная точка плоскости, которая в старой системе имеет координаты (x,y), а в новой системе — (x^*,y^*). Задача преобразования координат состоит в следующем: выразить координаты (x,y) точки *M* в старой системе через координаты (x^*,y^*) той же точки в новой системе.

Зададим новую систему координат относительно старой (рис. 2.1).

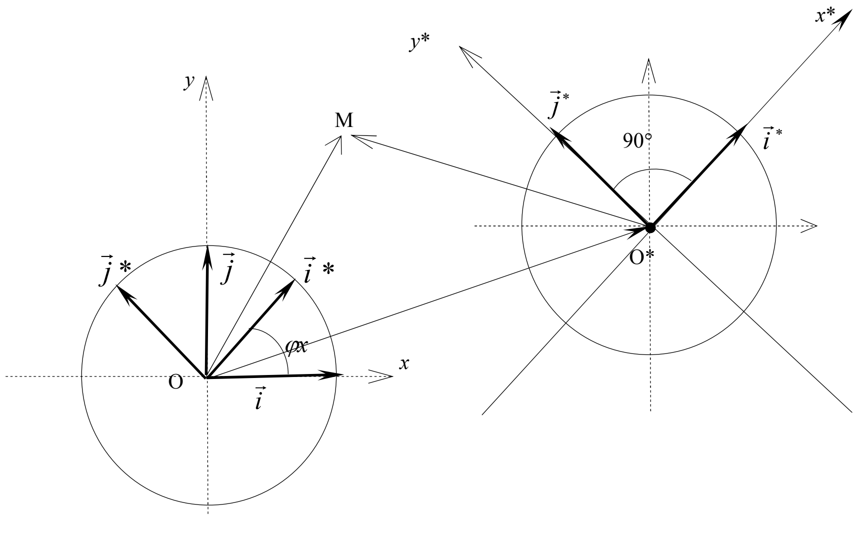


Рис. 2.1

$$\begin{cases} \overrightarrow{OO^*} = x_o\vec{i} + y_o\vec{j}, \quad \vec{i}^* = \cos\varphi\cdot\vec{i} + \sin\varphi\cdot\vec{j}, \\ \vec{j}^* = \cos(\varphi+90^\circ)\vec{i} + \sin(\varphi+90^\circ)\vec{j} = -\sin\varphi\cdot\vec{i} + \cos\varphi\cdot\vec{j}. \end{cases} \tag{1.1}$$

По правилу треугольника сложения векторов

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO^*} + \overrightarrow{O^*M} .$$

С учетом (1.1) распишем формулу (1.2):

$$x\vec{i} + y\vec{j} = x_o\vec{i} + y_o\vec{j} + x^*\vec{i}^* + y^*\vec{j}^* =$$

$$= x_o\vec{i} + y_o\vec{j} + x^*(cos\varphi \cdot \vec{i} + sin\varphi \cdot \vec{j}) + y^*(-sin\varphi \cdot \vec{i} + cos\kappa \cdot \vec{j}) =$$

$$= (x^* cos\varphi - sin\varphi \cdot y^* + x_o)\vec{i} + (x^* sin\varphi + y^* cos\varphi + y_o)\vec{j}. \qquad (1.3)$$

Так как разложение вектора $\overrightarrow{OM}$ по базису $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ однозначно, то

$$\begin{cases} x = x^* cos\varphi - y^* sin\varphi + x_o, \\ y = x^* sin\varphi + y^* cos\varphi + y_o. \end{cases} \qquad (1.4)$$

Формулы (1.4) называются *формулами преобразования декартовой системы координат*.

Определитель системы (1.4)

$$\Delta = \begin{vmatrix} cos\varphi & -sin\varphi \\ sin\varphi & cos\varphi \end{vmatrix} = 1. \qquad (1.5)$$

Это означает, что системы одинаково ориентированны (на рис. 2.1 обе системы правой ориентации). Если системы противоположно ориентированы, то $\vec{j}^* = (sin\varphi; -cos\varphi)$ и формулы преобразования (1.4) примут вид:

$$\begin{cases} x = x^* cos\varphi + y^* sin\varphi + x_o, \\ y = x^* sin\varphi - y^* cos\varphi + y_o. \end{cases} \qquad (1.6)$$

и $\Delta = -1$.

2. Рассмотрим два частных случая преобразования декартовой системы координат.

А. *Параллельный перенос д.с.к.* В этом случае $\vec{i}^* = \vec{i}$, $\vec{j}^* = \vec{j}$ и матрица перехода от базиса $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ к базису $\{\vec{i}^*, \vec{j}^*\}$ примет вид $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, а формулы (1.4) запишутся так

$$\begin{cases} x = x^* + x_o, \\ y = y^* + y_o. \end{cases} \tag{1.7}$$

Б. *Поворот д.с.к.* В этом случае начало О старой системы совпадает с началом О* новой декартовой системы координат, т. е. О*≡О. Следовательно, $x_o = 0$. $y_o = 0$.

Если обе системы одинаково ориентированы, то формулы поворота получаем из (1.4) (при $x_o = y_o = 0$):

$$\begin{cases} x = x^* \cos\varphi - y^* \sin\varphi, \\ y = x^* \sin\varphi + y^* \cos\varphi. \end{cases} \tag{1.8}$$

Если системы координат противоположно ориентированы, то при $x_o = y_o = 0$ из формул (1.6) получаем

$$\begin{cases} x = x^* \cos\varphi + y^* \sin\varphi, \\ y = x^* \sin\varphi - y^* \cos\varphi. \end{cases} \tag{1.9}$$

Геометрическая интерпретация формул (1.9) такова: сначала происходит поворот исходной системы координат $\{O, \vec{i}, \vec{j}\}$ на угол φ, а затем зеркальное отражение в оси *Ox** (относительно новой оси абсцисс).

3. Понятие линии. Первоначальная классификация линий на плоскости.

2.1. *Линией на плоскости* называется множество всех точек плоскости, координаты (*x,y*) каждой из которых удовлетворяют уравнению

$$F(x,y) = 0 \tag{1.10}$$

2.2. Если функция $F(x,y)$ в формуле (1.10) представляет собой многочлен, то линия (1.10) называется *алгебраической*, в противном случае линия (1.10) называется не алгебраической.

В основу первоначальной классификации алгебраических линий положим такие признаки уравнений (1.10), которые не меняются при переходе от одной декартовой (аффинной) системы координат к другой. Можно показать, что при переходе от одной д.с.к. к другой по формулам (1.4) или (1.6) многочлен $F(x,y)$ переходим в многочлен и степень многочлена не меняется. Степень многочлена $F(x,y)$ называется ***порядком линии***, определяемой уравнением (1.10).

Примерами алгебраических линий являются $x+y=0$, $x=0$, $x^2+y^2=1$, $y=kx+b$ и т. д.

Примерами неалгебраических линий являются, например, такие: $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=tgx$, $y=ctgx$, $y=a^x$, $y=e^x$, $y=\log_a x$, $y=\lg x$ и т. д.

Итак, алгебраические линии классифицируются по их порядку (степени многочлена $F(x,y)$ в (1.10)):

— линии первого порядка ($x+y=0, x-y=0, x=1$),

— линии второго порядка ($x^2+y^2=0,\quad x^2+y^2=1,\quad x^2-y^2=0$),

— линии третьего порядка ($x^3-y^3=0,\quad x^2y-y^2x=0$) и т. д.

4. Примером алгебраической линии второго порядка является окружность.

▨ 2.3. **Множество всех точек плоскости, каждая из которых равноудалена от фиксированной точки C называется окружностью. Точка C называется центром окружности (рис. 2.2).**

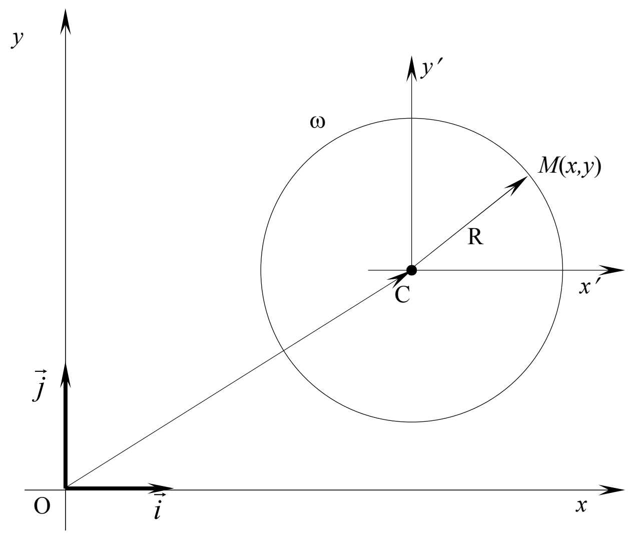


Рис. 2.2

Пусть относительно некоторой декартовой системы координат $\{O,\vec{i},\vec{j}\}$ задана точка C(a,b) — центр окружности радиуса *OM* = *R*.

$$M \in \omega \Leftrightarrow |\overrightarrow{CM}| = R \Leftrightarrow \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} = R \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-a)^2+(y-b)^2 = R^2. \qquad (1.11)$$

Уравнение (1.11) называется общим уравнением окружности. Совершим параллельный перенос декартовой системы координат в точку *C*(*a,b*). Тогда *C*(*a,b*) ≡ *O*(0,0). Отсюда следует, что *a* = 0; *b* = 0. Уравнение (1.11) окружности примет вид (1.12):

$$x^2+y^2=R^2. \qquad (1.12)$$

Дальнейшее упрощение невозможно, так как при повороте на произвольный угол φ (1.8) из формулы (1.12) получим

$$(x^*\cos\varphi - y^*\sin\varphi)^2+(x^*\sin\varphi + y^*\cos\varphi)^2 = R^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^{*2}+y^{*2}=R^2, \qquad (1.13)$$

т. е. уравнение окружности не меняется.

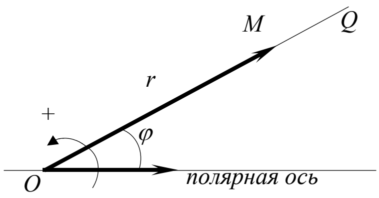
Уравнение (1.12) называется каноническим (простейшим) уравнением окружности.

§ 2. Полярная система координат

1. Аффинная система координат дает удобный, но не единственный способ определять положение точек плоскости при помощи чисел.

▨ 2.4. **Геометрический образ $\{O,\vec{i}\}$, состоящий из фиксированной точки О и единичного вектора $\vec{i}$ называется полярной системой координат.**

Точка *O* называется полюсом, а прямая, проходящая через точку *O* параллельно $\vec{i}$, называется полярной осью системы координат $\{O,\vec{i}\}$ (рис. 2.3).



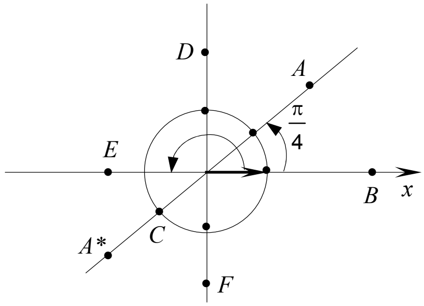


Рис. 2.3

Пусть точка *M* — произвольная точка плоскости. Обозначим через *r* — расстояние от точки *O* до точки *M*, а через φ — направленный угол $(\widehat{\vec{i},\overrightarrow{OM}})$, т. е. $r=|\overrightarrow{OM}|$, $\varphi=(\widehat{\vec{i}\,\overrightarrow{OM}})$. Если точка *M* совпадает с точкой *O*, то *r* = 0, а угол φ — неопределенный. Числа *r* и φ однозначно определяют положение точки *M* на плоскости. Действительно, зная φ, сначала построим луч *OQ*, на котором лежит точка *M*, а затем на этом луче от его начала отложим отрезок *OM* длиной *r* (рис. 2.3).

▨ **2.5. Числа *r* и φ называются *полярными координатами* точки *M* в полярной системе $\{O,\vec{i}\}$. Число *r* называется полярным радиусом или первой полярной координатой точки *M*, а число φ — полярным углом или второй полярной координатой этой точки.**

Если точка M имеет полярные координаты *r* и φ, то коротко пишут так: *M*(*r*,φ). Например, точки *A, B, C, D, E, F* на рис. 2.3 имеют полярные координаты $A(2;\frac{\pi}{4})$, $B(2;0)$, $C(1;-\frac{3\pi}{4})$, $D(\frac{3}{2};\frac{\pi}{2})$, $E(2;\pi)$, $F(2;-\frac{\pi}{2})$.

Заметим, что полярный радиус *r* любой точки не отрицателен, т. е. $r\geq 0$, а полярный угол φ точки изменяется в пределах $-\pi<\varphi\leq\pi$.

2. К каждой полярной системе координат $O\vec{i}$ можно присоединить положительно ориентированную прямоугольную декартову систему координат $\{O\vec{i},\vec{j}\}$, началом которой служит полюс *O*, первым координатным вектором — вектор $\vec{i}$ и $(\widehat{\vec{i},\vec{j}})=\frac{\pi}{2}$ (рис. 2.4)

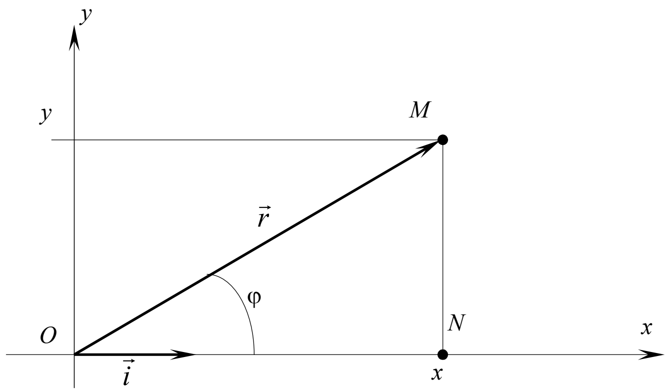


Рис. 2.4

Пусть *M*(*x,y*) и *M*(*r*,φ). Установим зависимость между декартовыми координатами точки *M* и ее полярными координатами. Из Δ*ONM* находим

$$x = r\,cos\varphi\ ,\ \ y = sin\varphi\ . \tag{2.1}$$

Зная полярные координаты (r,φ) точки *M* по формулам (2.1) находим декартовы координаты (*x,y*) точки *M*, т.е. формулы (2.1) — это формулы перехода от полярной системы координат к декартовой. Разрешая уравнения (2.1) относительно r,φ, получим формулы перехода от декартовой системы координат к полярной:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}\ ,\ \ cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\ ,\ \ sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\ . \tag{2.2}$$

3. Из определения полярных координат следует, что не любая пара действительных чисел является полярными координатами точки (так как $r = |\vec{OM}| \geq 0$; $-\pi < \varphi \leq \pi$). Например, на плоскости не существует точки с полярными координатами (-5;$\frac{\pi}{2}$). Это обстоятельство приводит к определенным трудностям при решении ряда конкретных задач в различных положениях. Чтобы устранить такое неудобство, обобщим понятие полярных координат так, чтобы в данной полярной системе $\{O,\vec{i}\}$ любая упорядоченная пара действительных чисел определяла на плоскости некоторую точку.

Пусть (r,φ) — произвольная пара действительных чисел, а $\{O,\vec{i}\}$ — данная полярная система координат.

1). Если $r \geq 0$ и $-\pi < \varphi \leq \pi$, то этой парой определяется точка с полярными координатами (r,φ) так как было указано в п.1.

2). Если $r \geq 0$, $\varphi > \pi \vee \varphi \leq -\pi$, то выразим $\varphi = \varphi_0 + 2\pi k$, где k — целое число такое, что $-\pi < \varphi_0 \leq \pi$. Будем считать в этом случае, что пара (r,φ_0) определяет точку M(r,φ), т.е. $M(r,\varphi) \equiv M(r,\varphi_0)$.

3). Если $r < 0$, то будем считать, что пара (r,φ) определяет точку M, которая симметрична точке $M^*(|r|;\varphi)$ относительно точки O. Например, пара $(-2;\frac{\pi}{4})$ определяет точку A^*, симметричную точке $A(2;\frac{\pi}{4})$ относительно полюса O. Построения 1)—3) называются обобщенными полярными координатами точки M(r,φ), т.к. позволяют построить в системе $\{O,\vec{i}\}$ точку, координатами которой является любая пара действительных чисел.

§ 3. Различные способы задания прямой на плоскости

1. *Уравнение прямой, заданной начальной точкой и направляющим вектором*.

2.6. Любой ненулевой вектор $\vec{p}$, параллельный данной прямой, называется ее направляющим вектором.

Прямая имеет бесконечное множество направляющих векторов, однако любые два из них *коллинеарны*, так как они параллельны одной прямой.

Пусть на плоскости выбрана аффинная система координат $\{O\vec{e}_1\vec{e}_2\}$ и в этой системе задана точка $M_0(x_0,y_0)$ и направляющий вектор $\vec{p} = (p_1 p_2)$ прямой l, проходящей через точку M_0 (начальная точка прямой l). Точкой M_0 и $\vec{p} \,||\, l$ прямая l определяется однозначно (так как через точку M_0 проходит одна и только одна прямая, параллельная данной AB ($\overrightarrow{AB} = \vec{p}$)).

Точка $M(x,y)$ плоскости принадлежит прямой l тогда и только тогда, когда $\vec{M_0M} \parallel \vec{p}$ (рис. 2.5).

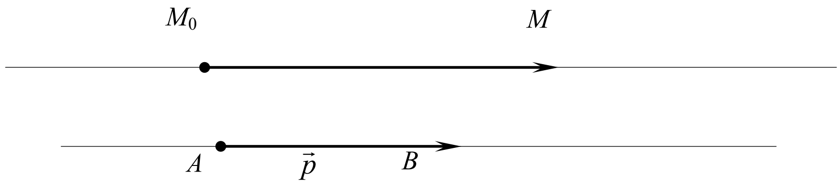


Рис. 2.5

Итак,

$$\vec{M_0M} \parallel \vec{p} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 \\ p_1 & p_2 \end{vmatrix} = 0 \tag{3.1}$$

или

$$p_2(x-x_0)-p_1(y-y_0)=0 \tag{3.2}$$

или

$$\frac{x-x_0}{p_1}=\frac{y-y_0}{p_2}, \text{ если } p_1 \neq 0, p_2 \neq 0 . \tag{3.3}$$

Уравнение (3.3) называется каноническим уравнением прямой.

Пример. 1. Найти канонические уравнения прямой, если ее направляющий вектор $\vec{p}=(-1;5)$, а начальная точка $M_0(1;-3)$.

○ По формуле (3.3) получаем

$$\frac{x-1}{-1}=\frac{y+3}{5} \Leftrightarrow 5x+y-2=0 . \bullet$$

2. *Уравнение прямой, заданной двумя точками*.

Пусть на плоскости заданы две точки $M_0(x_0,y_0)$ и $M_1(x_1,y_1)$ относительно аффинной системы координат $\{O\vec{e}_1\vec{e}_2\}$ (рис. 2.6).

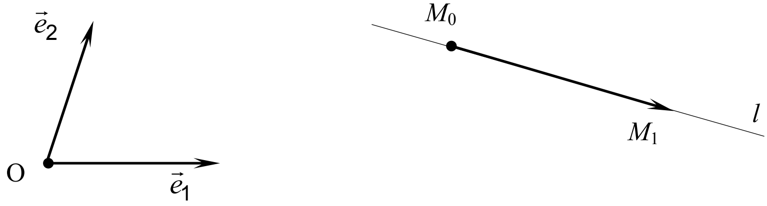


Рис. 2.6

Известно, что через две точки можно провести одну и только одну прямую $M_0M_1 \overset{def}{=} l$. Вектор $\vec{p} = \overrightarrow{M_0M_1} = (x_1 - x_0; y_1 - y_0)$ — является направляющим вектором прямой *l*. По формуле (3.1) уравнение прямой имеет вид

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \end{vmatrix} = 0. \tag{3.4}$$

Если $x_1 - x_0 \neq 0,\quad y_1 - y_0 \neq 0$, то уравнение (3.4) можно представить в виде

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}. \tag{3.5}$$

Пример 2. Написать уравнение прямой, заданной двумя точками $M_0(-2;-3),\quad M_1(1;5)$.

○ По формуле (3.5) имеем

$$\frac{x+2}{1+2} = \frac{y+3}{5+3} \Leftrightarrow \frac{x+2}{3} = \frac{y+3}{8} \Leftrightarrow 8x - 3y + 7 = 0. \bullet$$

3. Уравнение прямой, заданной начальной точкой и нормальным вектором.

2.7. Вектор $\overrightarrow{AB} \perp l$, если $(AB) \perp l$. (рис. 2.7).

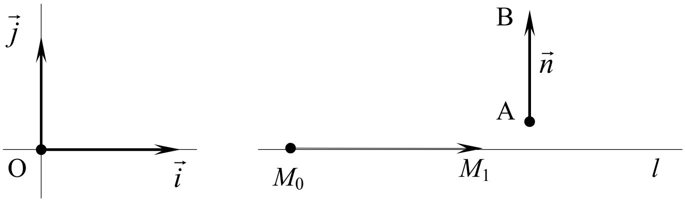


Рис. 2.7

▨ 2.8. **Любой ненулевой вектор $\vec{n}$, перпендикулярный прямой *l*, называется ее нормальным вектором**. Прямая в ее начальной точкой M_0 и нормальным вектором $\vec{n}$ определяется однозначно.

Пусть в декартовой системе координат $\{O,\vec{i},\vec{j}\}$ задана точка $M_0(x_0,y_0)$ и нормальный вектор $\vec{n}=(A,B)$ прямой l (рис.4.7). Точка $M(x,y)\in l$ тогда и только тогда, когда

$$\overrightarrow{M_0M}\perp\vec{n}\Leftrightarrow\overrightarrow{M_0M}\cdot\vec{n}=0\Leftrightarrow A(x-x_0)+B(y-y_0)=0.$$

Итак, уравнение

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0 \tag{3.6}$$

есть уравнение прямой, заданной ее начальной точкой $M_0(x_0,y_0)$ и нормальным вектором $\vec{n}=(A,B)$.

Пример 3. **Найти уравнение прямой по начальной точке $M_0(2;-1)$ и ее нормальному вектору $\vec{n}=(3;-5)$.**

○ По формуле (3.6) находим

$$3(x-2)-5(y+1)=0\Leftrightarrow 3x-5y-11=0.\ \bullet$$

4. *Параметрические уравнения прямой*.

Пусть прямая l задана начальной точкой $M_0(x_0,y_0)$ и направляющим вектором $\vec{p}=(p_1,p_2)$ относительно произвольной (аффинной) системы координат $\{O\vec{e}_1\vec{e}_2\}$.

$$M(x,y)\in l\Leftrightarrow\overrightarrow{M_0M}\parallel\vec{p}\Leftrightarrow\overrightarrow{M_0M}=t\vec{p}\Leftrightarrow\begin{cases}x-x_0=tp_1\\ y-y_0=tp_2\end{cases}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=tp_1+x_0,\\ y=tp_2+y_0.\end{cases} \tag{3.7}$$

Уравнения (3.7) называются параметрическими уравнениями прямой, а *t* — ее параметром. Смысл этого задания (3.7) заключается в том, что точку (x,y) на прямой мы задаем одним числом — ее параметром t. Выясняется геометрический смысл понятия «начальная точка M_0»: при $t=0$ из (3.7) следует, что $M(x,y)\equiv M_0(x_0,y_0)$, т.е. M_0 — начало отсчета на прямой ($t=0$).

Пример 4. Найти параметрические уравнения прямой, если задана двумя точками $M_1(2;-3)$, $M_2(-4;-5)$.

○ Найдем направляющий вектор $\vec{p}$ прямой:

$$\vec{p}=\overrightarrow{M_1M_2}=(-6;-2).$$

Если в качестве начальной точки взять M_1, то параметрические уравнения прямой имеют вид:

$$\begin{cases} x=-6t+2, \\ y=-2t-3. \end{cases} \bullet$$

5. *Уравнение прямой в отрезках*.

Пусть прямая *l* не проходит через начало *O*(0.0) прямоугольной декартовой системы координат и отсекает на осях координат отрезки *OA* (на оси *Ox*) и *OB* (на оси *Oy*) (рис. 2.8).

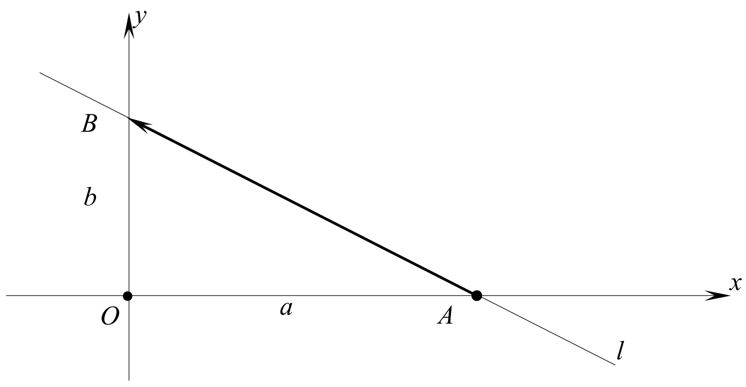


Рис. 2.8

Пусть $|OA|=|a|$, $|OB|=|b|$, тогда $A(a,0)$, $B(0,b)$. Примем точку *A* за начальную точку прямой *l*, а вектор $\overrightarrow{AB}\overset{def}{\equiv}\vec{n}=(-a;b)$ за направляющий вектор прямой *l.* Тогда по формуле (3.1))или (3.4) находим уравнение прямой *l*:

$$\begin{vmatrix} x-a & y-0 \\ -a & b \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow bx-ab+ay=0 \Leftrightarrow \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1. \qquad (3.8)$$

Уравнение (3.8) называется уравнением прямой в отрезках.

Пример 5. Написать уравнение прямой *l*, заданной графически (рис. 2.9).

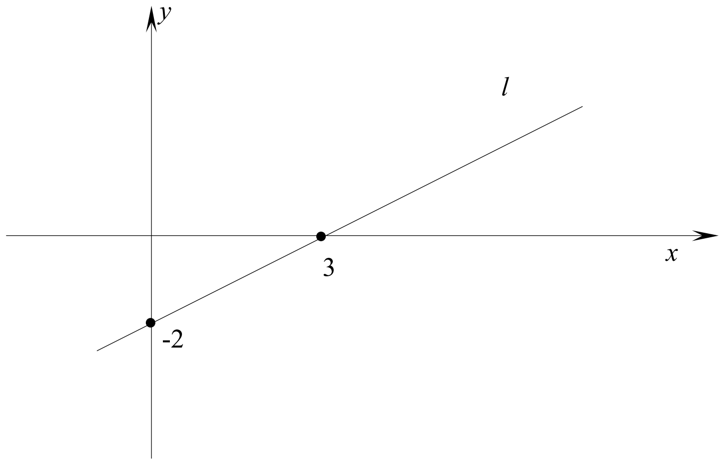


Рис. 2.9

○Зададим уравнение прямой *l* в отрезках:

$$\frac{x}{-2}+\frac{y}{3}=1 \Leftrightarrow 3x-2y+6=0 . \bullet$$

6. *Задание прямой по ее начальной точке и угловому коэффициенту*.

Пусть вектор $\vec{a}=(a_1,a_2)$ задан в аффинной системе координат $\{O\vec{e}_1\vec{e}_2\}$.

▨ 2.9. Угловым коэффициентом вектора $\vec{a}$ называется число $k=\dfrac{a_2}{a_1}$.

Если $a_1=0$, то $k=\infty$ и $\vec{a}\,||\,\vec{e}_2$ (параллелен оси *Oy*).

Лемма 1. Векторы $\vec{a}=(a_1,a_2)$ и $\vec{b}=(b_1,b_2)$ коллинеарны тогда и только тогда, когда их угловые коэффициенты равны.

$$\circ\ \vec{a}\,||\,\vec{b} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow \frac{a_2}{a_1}=\frac{b_2}{b_1} \Leftrightarrow k_1=k_2 . \bullet$$

Угловой коэффициент *k* вектора $\vec{a}=(a_1,a_2)$ имеет простой геометрический смысл, если вектор $\vec{a}$ задан относительно декартовой системы координат (рис. 2.10).

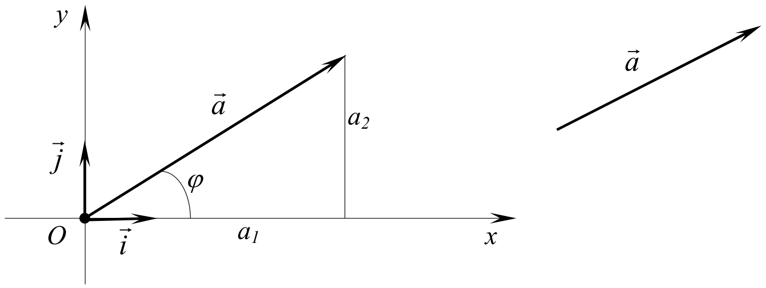


Рис. 2.10

$$k=\frac{a_2}{a_1}=tg\varphi\text{, где } \varphi=(\widehat{\vec{a},\vec{i}}).$$

Согласно лемме 1 вводим определение.

▨ 2.10. Угловым коэффициентом прямой называется угловой коэффициент любого ее направляющего вектора.

Теперь ясно, что по начальной точке $M_0(x_0,y_0)$ и угловому коэффициенту *k* прямая *l*, заданная относительно декартовой (аффинной) системы координат, определяется однозначно. Действительно, в этом случае прямая определяется начальной точкой $M_0(x_0,y_0)$ и направляющим вектором $\vec{p}=1;k)$:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 \\ 1 & k \end{vmatrix}=0$$

или

$$k(x-x_0)=y-y_0 \Leftrightarrow y=k(x-x_0)+y_0\,. \qquad (3.9)$$

Пример 6. **Написать уравнение прямой, зная ее угловой коэффициент $k=-2$ и начальную точку M_0 (5;8).**

○ Так как $k=-2$, то направляющий вектор прямой имеет вид $\vec{p}=(1;-2)$. Уравнение прямой запишем так

$$\begin{vmatrix} x-5 & y-8 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow -2x+10-y+8=0 \Leftrightarrow 2x+y-18=0\,. \bullet$$

7. *Общее уравнение прямой*.

В предыдущих пунктах мы показали, что уравнение любой прямой в аффинной (декартовой) системе координат является уравнением первой степени, т. е. может быть записано в виде

$$Ax+By+C=0\,, \tag{3.10}$$

где числа *A* и *B* одновременно не равны нулю.

Таким образом, прямая является алгебраической линией первого порядка.

Докажем обратное утверждение.

Теорема 2.1. Линия на плоскости, заданная в аффинной системе координат уравнением первой степени

$$Ax+By+C=0\,, \tag{3.10}$$

есть прямая. Вектор (–*B;A*) является направляющим вектором этой прямой.

○ Пусть γ — линия, заданная уравнением (3.10), а $M_0(x_0,y_0)$ некоторая ее точка, т. е. точка, координаты которой удовлетворяют уравнению (3.10):

$$Ax_0+By_0+C=0\,. \tag{3.11}$$

Такая точка всегда существует, так как *A* и *B* одновременно не равны нулю. Определив из равенства (3.11) *C* и подставив его в уравнение (3.10), получим уравнение линии γ в виде

$$Ax+By-Ax_0-By_0=0 \Leftrightarrow A(x-x_0)-(-B)(y-y_0)=0\,. \tag{3.12}$$

Уравнение (3.12) имеет в точности вид (3.2) и, следовательно, определяет прямую, проходящую через точку $M_0(x_0,y_0)$ с направляющим вектором $\vec{p}=(-B;A)$. •

§ 4. Расстояние от точки до прямой на плоскости

Пусть в декартовой системе координат задана точка $M_0(x_0,y_0)$ и прямая *l*: $Ax+By+C=0$ (рис. 2.11).

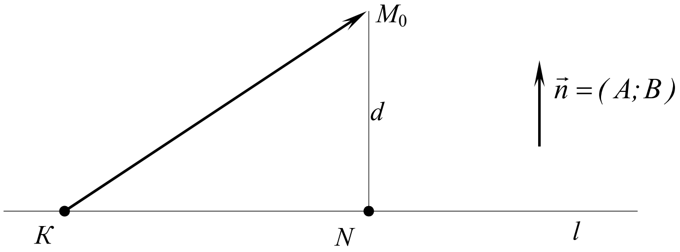


Рис. 2.11

Найдем расстояние $d = M_0N$ от точки M_0 до прямой l. Возьмем произвольную точку

$$K(x_k; y_k) \in l \Leftrightarrow Ax_k + By_k + C = 0 \Leftrightarrow -Ax_k - By_k = C \qquad (4.1)$$

$$d = |\, opm.np._{\vec{n}} \overrightarrow{KM_0} \,| = \frac{|\,\overrightarrow{KM_0} \cdot \vec{n}\,|}{|\,\vec{n}\,|} = \frac{|\,A(x_0 - x_k) + B(y_0 - y_k)\,|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \qquad (4.2)$$

С учетом соотношения (4.1) из формулы (4.2) окончательно получаем

$$d = \frac{|\,Ax_0 + By_0 + C\,|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \qquad (4.3)$$

Пример 7. Найти расстояние от начала координат до прямой $2x + 3y - 13 = 0$.

○ По формуле (4.3) находим

$$d = \frac{|\,2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 - 13\,|}{\sqrt{4+9}} = \frac{13}{\sqrt{13}} = \sqrt{13}. \bullet$$

§ 5. Угол между двумя пересекающимися прямыми на плоскости

Рассмотрим на плоскости две пересекающиеся прямые: $l_1 \cap l_2 = 0$. Пусть $\vec{p}_1 \,||\, l_1$, $\vec{p}_2 \,||\, l_2$, $\alpha = (\widehat{\vec{p}_1, \vec{p}_2})$, $\varphi = (\widehat{l_1, l_2})$ (рис. 2.12).

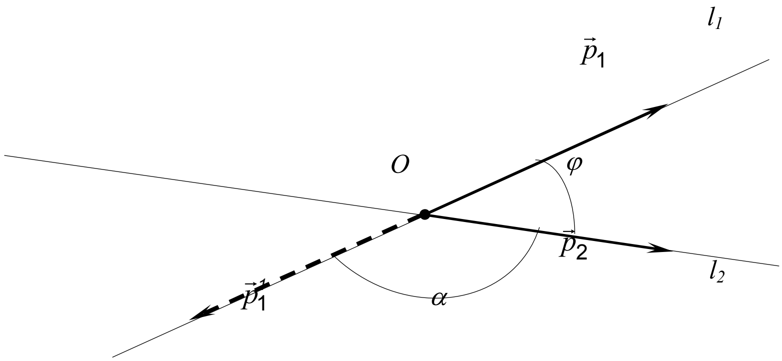


Рис. 2.12

Под углом φ между прямыми l_1, l_2 берется меньший по величине угол среди двух пар вертикальных углов, образованных этими прямыми.

При возможных расположениях направляющих векторов $\vec{p}_1 \| l_1$ и $\vec{p}_2 \| l_2$ имеются лишь две связи между углами α и φ ($0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$):

$$\left[\begin{array}{l}\varphi = \alpha, \\ \varphi + \alpha = \pi\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\cos\alpha = \cos\varphi, \\ \cos\alpha = \cos(\pi - \varphi) = -\cos\varphi\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos\varphi = |\cos\alpha| \Leftrightarrow \cos\varphi = \frac{|\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2|}{|\vec{p}_1| \cdot |\vec{p}_2|}. \tag{5.1}$$

Пример 8. Найти угол между двумя прямыми $l_1:\ 2x - 3y - 3 = 0$ и $l_2:\ 2x + y - 7 = 0$.

○ Найдем направляющие векторы прямых:

$$\vec{p}_1 = (3;2) \| l_1 \text{ и } \vec{p}_2 = (-1;2) \| l_2 .$$

Теперь найдем угол между прямыми $\alpha = (\widehat{l_1, l_2})$:

$$\cos\alpha = \frac{|-3+4|}{\sqrt{4+9} \cdot \sqrt{4+1}} = \frac{1}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{65}} \Rightarrow \alpha = \arccos\frac{1}{\sqrt{65}} . \bullet$$

§ 6. Эллипс

▨ 2.11. **Пусть на плоскости зафиксированы две точки F_1 и F_2, где $|F_1F_2| = 2c$. Множество всех точек плоскости, для каждой из которых сумма расстояний до точек F_1 и F_2 есть величина постоянная равная 2a, где**

$$2a > 2c \Leftrightarrow a > c, \tag{6.1}$$

называется эллипсом.

Точки F_1 и F_2 называются фокусами эллипса, а расстояние между ними $2c$ — фокальным расстоянием. Если M — точка данного эллипса γ, то отрезки F_1M и F_2M называются фокальными радиусами точки M. Их длины также называются фокальными радиусами точки M.

○ Найдем уравнение эллипса γ в прямоугольной системе координат $\{O\,\vec{i}\,\vec{j}\}$, где O — середина отрезка F_1F_2, а $\vec{i} \uparrow\uparrow \overrightarrow{OF_2}$ (рис. 2.13).

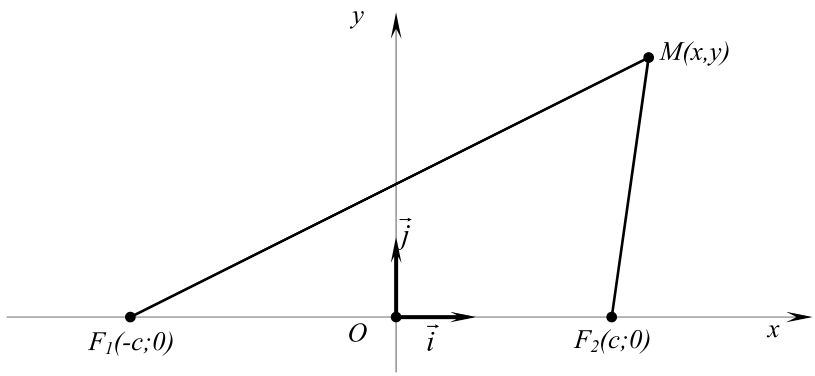


Рис. 2.13

Выбранная таким образом система координат называется ***канонической***, относительно которой $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$, $M(x,y)$. Фокальные радиусы произвольной точки $M(x,y) \in \gamma$ равны:

$$F_1M = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}\,,\ F_2M = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\,. \tag{6.2}$$

По определению эллипса $F_1M + F_2M = 2a$, поэтому

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a. \tag{6.3}$$

Запишем уравнение (6.3) в виде $\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$ и, возводя его в квадрат и приводя подобные члены, получим $a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - xc$. Снова возводя в квадрат, после несложных преобразований находим

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{6.4}$$

где

$$b^2 = a^2 - c^2. \tag{6.5}$$

Итак, доказано, что координаты любой точки *M(x,y)*$\in\gamma$ удовлетворяют уравнению (6.4). **Докажем обратное утверждение: каждая точка M, координаты которой удовлетворяют уравнению (6.4), принадлежит эллипсу γ, т. е.** $F_1\widetilde{M} + F_2\widetilde{M} = 2a$. Подставив в формулы (6.2) значение y^2 из уравнения (6.4) и учитывая равенство (6.5), получим:

$$F_1\widetilde{M} = \sqrt{\left(a + \frac{c}{a}x\right)^2} = \left|a + \frac{c}{a}x\right|, \quad F_2\widetilde{M} = \sqrt{\left(a - \frac{c}{a}x\right)^2} = \left|a - \frac{c}{a}x\right|.$$

Из уравнения (6.4) следует, что $|x| \le a$, и так как $0 < \frac{c}{a} < 1$, то $a + \frac{c}{a}x > 0$, $a - \frac{c}{a}x > 0$, поэтому окончательно имеем

$$F_1\widetilde{M} = a + \frac{c}{a}x; \quad F_2\widetilde{M} = a - \frac{c}{a}x. \tag{6.6}$$

Следовательно, $F_1\widetilde{M} + F_2\widetilde{M} = 2a$, т. е. $\widetilde{M} \in \gamma$. •

Итак, уравнение (6.4) является уравнением *эллипса*. **Оно называется *каноническим уравнением эллипса*.** Эллипс — алгебраическая линия второго порядка.

2. ***Геометрические свойства эллипса***.

a). Если $\widetilde{M}(x,y)\in\gamma$, то *x,y* удовлетворяют уравнению (6.4), поэтому $x^2\le a^2,\ y^2\le b^2 \Leftrightarrow -a\le x\le 0;\ -b\le y\le b$ (*), т. е. все точки эллипса принадлежат прямоугольнику (*), ограниченному прямыми $x=\pm a,\ y=\pm b$.

b). В уравнение (6.4) переменные *x,y* входят в четной степени, поэтому

$$(x;y)\in\gamma \Rightarrow (-x;y)\in\gamma \wedge (x;-y)\in\gamma \wedge (-x;-y)\in\gamma\ .$$

Это значит, что эллипс — фигура симметричная относительно осей координат *Ox,Oy*, так и относительно начала координат *O*.

c). В первой четверти $(x\ge 0;\ y\ge 0)$ из уравнения (6.4) находим

$$y=b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\ . \tag{6.7}$$

Построив эту линию (6.7) в первой четверти и, симметрично отражая ее в осях координат, получим эллипс (рис. 2.14).

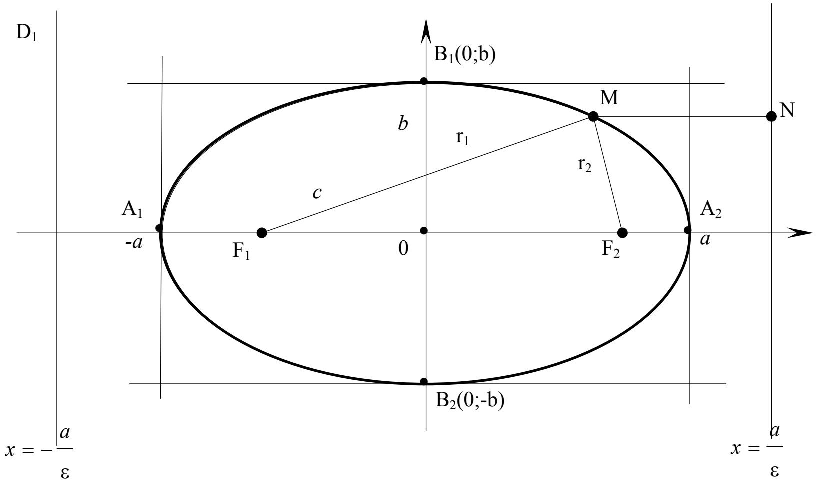


Рис. 2.14

Точки $A_1(-a;0)$, $A_2(a;0)$, $B_1(0;b)$, $B_2(0;-b)$ называются вершинами эллипса. Отрезки A_1A_2, B_1B_2 называются соответственно большой и малой осями эллипса. Очевидно, $OA_1 = OA_2 = a$, $OB_1 = OB_2 = b$. Эти числа *a* и *b* (так же как и отрезки OA_1, OB_1) называются соответственно большой и малой полуосями эллипса. В частности, если $a = b$, то из (6.4) получим $x^2+y^2=a^2$, т. е. окружность частный случай эллипса (с = 0).

2.12. Число $\varepsilon = \dfrac{c}{a} < 1$ называется эксцентриситетом эллипса.
Фокальные радиусы точки *M* можно в силу (6.6) записать в виде

$$r_1 = F_1M = a + \varepsilon x; \;\; r_2 = F_2M = a - \varepsilon x \,. \qquad (6.8)$$

2.13. Прямые $x = -\dfrac{a}{\varepsilon}$ и $x = \dfrac{a}{\varepsilon}$ называются директрисами эллипса.

Теорема 2.2 (Директориальное свойство эллипса).

Отношение расстояния от точки *M* эллипса до фокуса к расстоянию этой точки *M* до соответствующей директрисы есть величина постоянная равная эксцентриситету ε (эллипса).

○ Рассмотрим, например, правую директрису $d_2(x = \dfrac{a}{\varepsilon})$ и правый фокус $F_2(c;0)$ эллипса (рис. 2.14). Надо доказать, что

$$\frac{MF_2}{MN} = \varepsilon \,. \qquad (6.8)$$

Так как $N \in d_2 \Rightarrow N(\dfrac{a}{\varepsilon}; y)$. Найдем

$$MN = \sqrt{(x - \frac{a}{\varepsilon})} = \left|\frac{a}{\varepsilon} - x\right| = \frac{|a - \varepsilon x|}{\varepsilon} = \frac{a - \varepsilon x}{\varepsilon} \,.$$

Значит, в силу формулы (6.7)

$$\frac{MF_2}{MN} = \frac{a - \varepsilon x}{\left(\dfrac{a - \varepsilon x}{\varepsilon}\right)} = \varepsilon \,. \; \bullet$$

§ 7. Гипербола

2.14. Пусть на плоскости зафиксированы две точки F_1 и F_2, причем $F_1F_2 = 2C$. Гиперболой называется множество всех точек плоскости, модуль разности расстояний каждой из которых до данных точек F_1 и F_2 есть величина постоянная, равная 2*a*, где

$$0 < 2a < 2c \Leftrightarrow 0 < a < c \,. \qquad (7.1)$$

Если M — точка данной гиперболы γ, то отрезки F_1M и F_2M называются *фокальными радиусами* точки M. Их длины также называются *фокальными радиусами* точки M.

Найдем уравнение гиперболы γ в декартовой системе координат $\{O,\vec{i},\vec{j}\}$, где O — середина отрезка F_1F_2, а $\vec{i}\uparrow\uparrow\overrightarrow{OF_2}$. Выбранная таким образом система координат называется канонической (рис. 2.15).

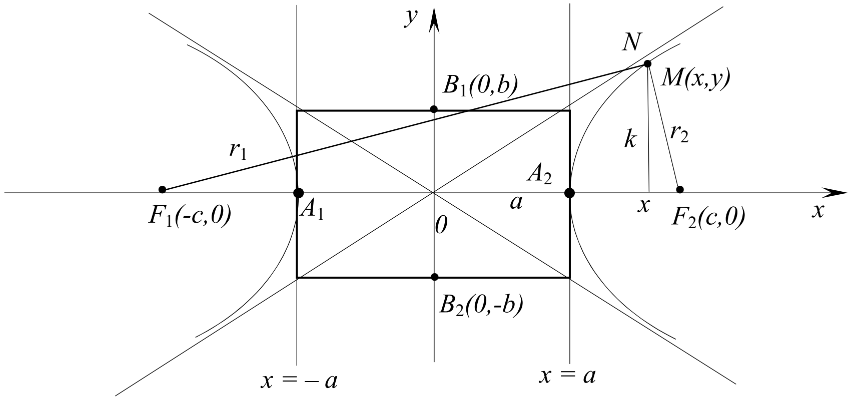


Рис. 2.15

Фокусы F_1 и F_2 гиперболы имеют координаты $F_1(c;0)$, $F_2(-c;0)$, поэтому фокальные радиусы $F_1M = r_1$ и $F_2M = r_2$ точки $M(x,y)$ вычисляются по формулам

$$r_1 = F_1M = \sqrt{(x+c)^2+y^2}\ ,\ r_2 = F_{2_1}M = \sqrt{(x-c)^2+y^2}\ . \qquad (7.2)$$

По определению гиперболы $|F_1M - F_2M| = 2a$, поэтому

$$\left|\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right| = 2a\,.$$

Запишем это уравнение в виде

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = \sqrt{(x-c)^2+y^2} \pm 2a\,.$$

Возводя его в квадрат и приводя подобные члены, получаем

$$\pm a\sqrt{(x-c)^2+y^2} = xc - a^2\,. \qquad (7.3)$$

Снова возводя в квадрат уравнение (7.3), после элементарных преобразований находим

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \tag{7.4}$$

где

$$b^2=c^2-a^2. \tag{7.5}$$

Итак, доказано, что координаты любой точки гиперболы γ удовлетворяют уравнению (7.4). **Докажем обратное утверждение: каждая точка $\widetilde{M}$, координаты которой удовлетворяют уравнению (7.4), принадлежит гиперболе γ, т. е.** $\left|F_1\widetilde{M}-F_2\widetilde{M}\right|=2a$. Подставив в формулы (7.2) значение y из уравнения (7.4) и учитывая равенство (7.5), получим

$$F_2\widetilde{M}=\left|\frac{c}{a}x-a\right|,\ F_1\widetilde{M}=\left|\frac{c}{a}x+a\right|.$$

Из уравнения (7.4) следует, что $|x|\ge a$ и, так как эксцентриситет $\varepsilon=\frac{c}{a}>1$, то

$$\left.\begin{array}{r}
r_2=F_2\widetilde{M}=\dfrac{c}{a}x-a=\varepsilon x-a,\, r_1=F_1\widetilde{M}=\dfrac{c}{a}x+a=\varepsilon x+a,\\
\textit{если}\ x>0\\
r_1=F_1\widetilde{M}=\dfrac{c}{a}x-a=-\varepsilon x-a,\, r_2=F_2\widetilde{M}=-\dfrac{c}{a}x+a=-\varepsilon x+a,\\
\textit{если}\ x<0
\end{array}\right\} \tag{7.6}$$

Следовательно, $\left|F_1\widetilde{M}-F_2\widetilde{M}\right|=2a$, т. е. $\widetilde{M}\in\gamma$. Итак, уравнение (7.4) является уравнением гиперболы γ. Оно называется каноническим уравнением гиперболы. •

2. *Геометрические свойства гиперболы.*

а). Если $M(x,y)\in\gamma$, то (x,y) удовлетворяют уравнению (7.4), поэтому $x^2\ge a^2$. Следовательно, либо $x\ge a$, либо $x\le -a$. Значит, внутри полосы, образуемой прямыми $x=a$ и $x=-a$, нет точек гиперболы γ.

b). Так как переменные *x,y* входят в уравнение (4.7) в четной степени, то гипербола — фигура, симметричная относительно осей координат и начала *O* координат. Точка *O* называется центром гиперболы, ось симметрии, проходящая через фокусы, — первой или фокальной осью симметрии, а перпендикулярная к ней ось, проходящая через центр, — второй или мнимой осью симметрии. Фокальная ось симметрии пересекает гиперболу в двух точках $A_1(a;0)$, $A_2(-a;0)$, которые называются вершинами гиперболы, а отрезок A_1A_2 — действительной осью. Числа *a* и *b* называются соответственно действительной и мнимой полуосями гиперболы.

c). Прямые $y=\frac{b}{a}x$ и $y=-\frac{b}{a}x$ называются асимтотами гиперболы. Выясним, как расположены ветви гиперболы относительно ее асимптот. Пусть $M(x,y)$ — произвольная точка гиперболы γ (рис. 2.15), лежащая в первой четверти, $N(x,y_{ac})$ — точка асимптоты $y_{ac}=\frac{b}{a}x$. Найдем длину отрезка *MN*:

$$MN=y_{kp}-y_{ac}=\frac{b}{a}x-\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}=\frac{b}{a}(x-\sqrt{x^2-a^2})=$$
$$=\frac{ab}{x+\sqrt{x^2-a^2}}>0.$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}MN=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{ab}{x+\sqrt{x^2-a^2}}=0$, т.е. точка *M* неограниченно приближается к асимптоте.

Построив гиперболу в первой четверти, т.е. линию $y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$. $x\ge a$, а затем, симметрично отражая эту линию относительно осей координат, получим гиперболу (рис.4.22).

d). **Теорема 2.3. (Директориальное свойство эллипса).**

1. *Отношение расстояния от точки M гиперболы до фокуса к расстоянию этой точки M до соответствующей директрисы есть величина постоянная, равная эксцентриситету ε гиперболы*.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 2.

§ 8. Парабола

2.15. *Параболой называется множество всех точек плоскости, расстояние каждой из которых до данной точки F равно расстоянию до данной прямой d, не проходящей через точку F. Точка F называется фокусом параболы, а прямая d — директрисой*.

Расстояние от фокуса до директрисы называется *фокальным параметром* параболы и обозначается через *p*.

Очевидно, $p = FD$, где *D* — проекция точки *F* на прямую *d* (рис. 2.16).

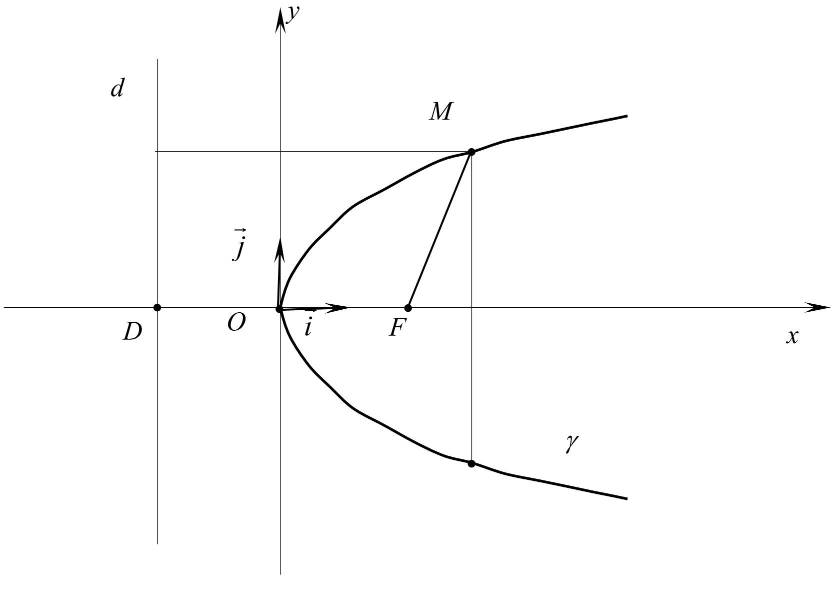


Рис. 2.16

○ Найдем уравнение параболы γ в декартовой системе координат $\{O,\vec{i},\vec{j}\}$, где *O* — середина отрезка *DM*, а $\vec{i} \uparrow\uparrow \overrightarrow{OF}$. Выбранная таким образом система координат называется *канонической*. В этой системе координат фокус *F* имеет координаты $\left(\frac{p}{2};0\right)$, а директриса *d* — уравнение $x+\frac{p}{2}=0$. Пусть $M(x,y)$ — произвольная точка плоскости. Вычислим *MF* и расстояние $\rho(M,d)$:

$$MF = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}, \ \rho(M,d) = \left|x + \frac{p}{2}\right|. \tag{8.1}$$

Если $M \in \gamma$, то $MF = \rho(M,d)$, поэтому

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \left|x + \frac{p}{2}\right| \Leftrightarrow y^2 = 2px. \tag{8.2}$$

Итак, доказано, что координаты любой точки параболы γ удовлетворяют уравнению (8.2).

Докажем обратное утверждение: каждая точка *M*, координаты которой удовлетворяют уравнению (8.2), принадлежит параболе γ, т. е. $FM = \rho(M,d)$.

Подставляя в первую из формул (8.1) значение y^2 из (8.2), получим

$$MF = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + 2px} = \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2} = \left|x + \frac{p}{2}\right|.$$

Следовательно, $FM = \rho(M,d)$, т. е. $M \in \gamma$. •

Уравнение (8.2) *называется каноническим уравнением параболы*.

2. Используем каноническое уравнение (8.2) параболы γ для изучения ее геометрических свойств. Из уравнения (8.2) следует, что все точки параболы γ принадлежат полуплоскости $x \geq 0$. Если $M(x,y) \in \gamma$, то $M(x,-y) \in \gamma$, т. е. прямая *OF* является осью симметрии параболы. Точка *O* пересечения этой оси с параболой называется *вершиной* параболы.

Оси выбранной системы координат имеют только одну общую точку с параболой — *ее вершину*. Докажем, что любая другая прямая *l*, проходящая через точку *O*, пересекает параболу в двух точках.

Действительно, зададим прямую *l* уравнением $y = kx$. Подставив значение *y* в уравнение (8.2) получаем: $k^2x^2 = 2px \Leftrightarrow (k^2x - 2p)x = 0$. При $k \neq 0$ прямая *l* имеет две общие точки с параболой: *O*(0,0) и $M\left(\frac{2p}{k^2}; \frac{2p}{k}\right)$. Следовательно, парабола не имеет асимптот.

Глава III
ПЛОСКОСТЬ И ПРЯМАЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

§ 1. Различные способы задания плоскости в пространстве

3.1. Два неколлинеарных вектора $(\vec{p} \nparallel \vec{q})$ параллельных плоскости ω называются направляющими векторами плоскости ω.

1. Уравнение плоскости, заданной начальной точкой M_0 и направляющими векторами.

Пусть в аффинной системе координат $\{O\bar{e}_1\bar{e}_2\bar{e}_3\}$ задана точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и два неколлинеарных вектора $\vec{p} = (p_1, p_2, p_3)$ и $\vec{q} = (q_1, q_2, q_3)$. Проведем через точку M_0 две прямые $p \parallel \vec{p}$ и $q \parallel \vec{q}$. Плоскость ω, проходящая через эти прямые, определяется единственным образом. Задача: написать уравнение этой плоскости ω (рис. 3.1).

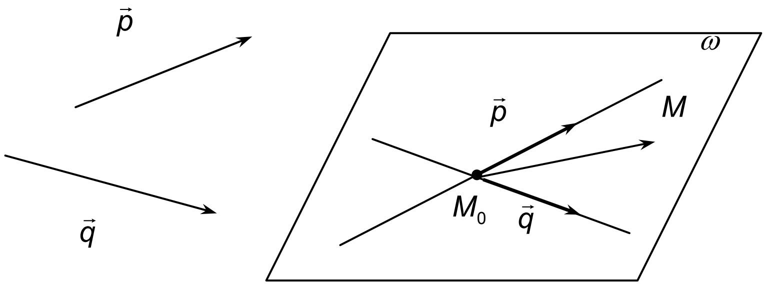


Рис. 3.1

Точка $M(x, y, z)$ пространства принадлежит ω тогда и только тогда, когда векторы $\overrightarrow{M_0M}, \vec{p}, \vec{q}$ компланарны:

$$\left(\overrightarrow{M_0M}, \vec{p}, \vec{q}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{vmatrix} = 0. \quad (1.1)$$

Уравнение (1.1) — уравнение плоскости ω, проходящей через точку M_0 и имеющей направляющие векторы $\vec{p}$ и $\vec{q}$.

2. Уравнение плоскости, заданной тремя точками.

Как известно, через три точки M_0, M_1, M_2, не лежащие на одной прямой, можно провести одну и только одну плоскость. Задача: найти уравнение этой плоскости, если точки заданы своими координатами $M_0\left(x_0, y_0, z_0\right)$, $M_1\left(x_1, y_1, z_1\right)$, $M_2\left(x_2, y_2, z_2\right)$ относительно аффинной системы координат. Так как векторы $\overrightarrow{M_0M_1} \overset{def}{=} \vec{p}$ $\overrightarrow{M_0M_2} \overset{def}{=} \vec{q}$ не коллинеарны (рис. 3.2), то они являются **направляющими векторами** исходной плоскости ω. Таким образом, задание свелось к пункту 1:

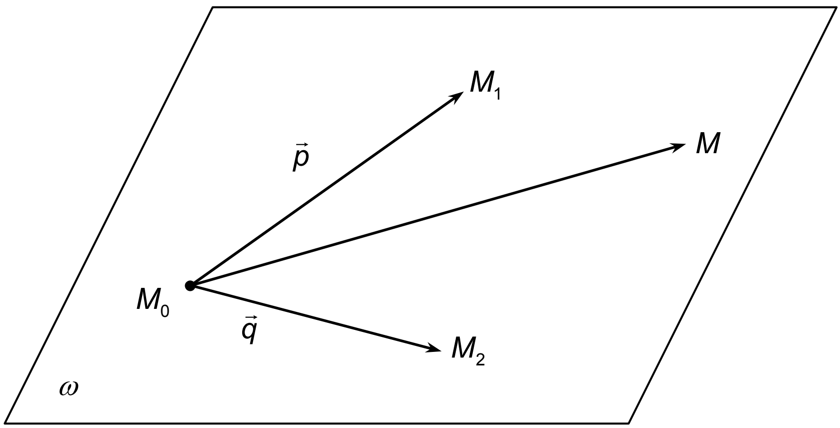


Рис. 3.2

$$M \in \omega \Leftrightarrow \left(M_0\overrightarrow{M}_1, \vec{p}, \vec{q}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0. \qquad (1.2)$$

Пример 1. Написать уравнение плоскости ω по трем точкам $M_0\left(1; -1; 2\right), M_1\left(2; 3; -1\right), M_2\left(0; 5; -2\right)$.

○ Найдем направляющие векторы плоскости:

$$\vec{p} = \overrightarrow{M_0M_1} = \left(1; 4; -3\right), \vec{q} = \overrightarrow{M_0M_2} = \left(1; 6; -4\right).$$

Уравнение плоскости ω можно найти, используя формулу (1.1) или (1.2). Имеем

$$\omega : \begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-2 \\ 1 & 4 & -3 \\ -1 & 6 & -4 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2(x-1)+7(y+1)+10(z-2)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x+7y+10z-15=0. \bullet$$

3. Уравнение плоскости, заданной начальной точкой M_0 и нормальным вектором.

▨ 3.2. Вектор $\overrightarrow{AB} \overset{def}{=} \vec{n}$ называется нормальным вектором плоскости ω, если $(AB) \perp \omega$ или если $\overrightarrow{AB}$ параллелен какой-либо прямой $\ell \perp \omega$ (рис. 3.3).

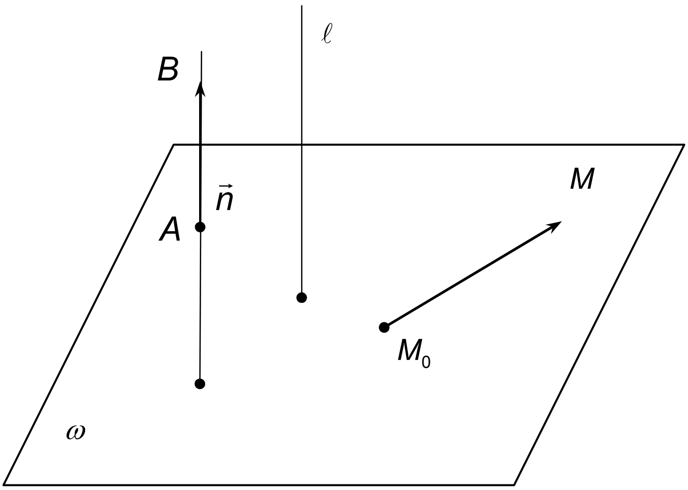


Рис. 3.3

Начальной точкой $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и нормальным вектором $\vec{n} = (A, B, C)$, заданными в некоторой декартовой системе координат, плоскость ω определяется единственным образом. Найдем уравнение этой плоскости:

$$M(x, y, z) \in \omega \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M} \perp \vec{n} \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0. \quad (1.3)$$

Уравнение (1.3) — есть уравнение плоскости, заданной начальной точкой $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и нормальным вектором $\vec{n} = (A, B, C)$.

Пример 2. Написать уравнение плоскости и по ее начальной точке $M_0(-1; 2; 3)$ **и нормальному вектору** $\vec{n} = (3; -5; 1)$.

○ Воспользуемся формулой (1.3):

$$\omega: 3(x+1) - 5(y-2) + 1(z-3) = 0 \Leftrightarrow 3x - 5y + z + 10 = 0. \bullet$$

4. Параметрические уравнения плоскости.

Пусть в аффинной системе координат плоскость ω задана начальной точкой $(M_0 \in \omega)$ и направляющими векторами $\vec{p} = (p_1, p_2, p_3)$ и $\vec{q} = (q_1, q_2, q_3)$ (см. п. 1). Точка $M(x, y, z)$ принадлежит плоскости ω тогда и только тогда, когда векторы $\overrightarrow{M_0M}, \vec{p}, \vec{q}$ компланарны:

$$\overrightarrow{M_0M} = u\vec{p} + v\vec{q}, \tag{1.4}$$

или

$$\begin{cases} x - x_0 = up_1 + vq_1 \\ y - y_0 = up_2 + vq_2 \\ z - z_0 = up_3 + vq_3 \end{cases}, \Leftrightarrow \begin{cases} x = up_1 + vq_1 + x_0, \\ y = up_2 + vq_2 + y_0, \\ z = up_3 + vq_3 + z_0. \end{cases} \tag{1.5}$$

Уравнения (1.5) называются **параметрическими уравнениями** плоскости ω, а u и v — **параметрами.**

5. Общее уравнение плоскости.

1. Любую плоскость ω в пространстве можно задать начальной точкой $M_0(M_0 \in \omega)$ и **направляющими векторами** $\vec{p}, \vec{q}$, т.е. задать плоскость уравнением (1.1). Разложив определитель (1.1) по элементам первой строки, получим уравнение плоскости ω в виде

$$Ax + By + Cz + D = 0. \tag{1.6}$$

Так как векторы $\vec{p} \nparallel \vec{q}$, то в уравнении (1.6) коэффициенты A, B, C не равны одновременно нулю.

Значит, уравнение (1.6) — **уравнение первой степени.** Другими словами: **любая плоскость есть поверхность первого порядка.** Верно и обратное утверждение: **любая поверхность первого порядка (1.6) есть плоскость.**

Лемма 2. (Лемма о параллельности вектора и плоскости).

Пусть в афинной системе координат задана плоскость ω уравнением (1.6) и вектор $\vec{k}=(k_1, k_2, k_3)$. Для того чтобы вектор $\vec{k}$ был параллелен плоскости ω, необходимо и достаточно, чтобы

$$Ak_1 + Bk_2 + Ck_3 = 0. \tag{1.7}$$

○ От некоторой точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ плоскости ω отложим вектор $\overline{M_1M_2} = \vec{K}$ и обозначим через (x_2, y_2, z_2) координаты точки M_2 (рис. 3.4).

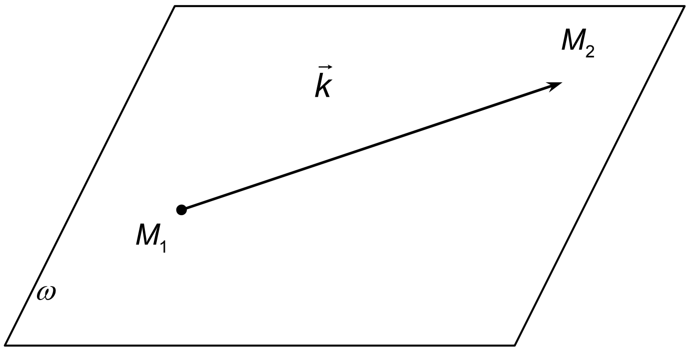


Рис. 3.4

Тогда

$$k_1 = x_2 - x_1, k_2 = y_2 - y_1, k_3 = z_2 - z_1. \tag{1.8}$$

Так как $M_1 \in \omega,$ то

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0. \tag{1.9}$$

Пусть вектор $\vec{k} \parallel \omega.$ Тогда точка $M_2 \in \omega,$ поэтому

$$Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D = 0. \tag{1.10}$$

Из равенств (1.9) и (1.10) следует, что

$$A(x_2 - x_1) + B(y_2 - y_1) + C(z_2 - z_1) = 0. \tag{1.11}$$

С учетом соотношений (1.8), получим (1.7).

Итак, если $\vec{k} \parallel \omega,$ то равенство (1.7) выполняется. Обратно, пусть выполняется равенство (1.7).

Подставив в (1.7) значения k_1, k_2, k_3 из равенства (1.8), получаем равенство (1.11). Сложив равенства (1.9) и (1.11), приходим к равенству (1.10). Таким образом, $M_2 \in \omega$, т.е. вектор $\vec{k} \parallel \omega$. •

6. Уравнение плоскости в отрезках.

Пусть плоскость $\vec{k} \parallel \omega$, не проходит через начало (точку О) декартовой системы координат и пересекает координатные оси соответственно в точках $A(a;o;o), B(o;b;o), C(o;o;c)$, где $OA = |a|, OB = |b|$; $OC = |c|$. Уравнение плоскости ω находим по формуле (1.2):

$$\begin{vmatrix} x-a & y-0 & z-0 \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (x-a)bc + acy + abz = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1. \quad (1.12)$$

Уравнение (1.12) называется «уравнением плоскости в отрезках».

Пример 13. Написать уравнение плоскости, если плоскость β пересекает оси координат в точкаха A, B, C соответственно (см. рис. 3.5).

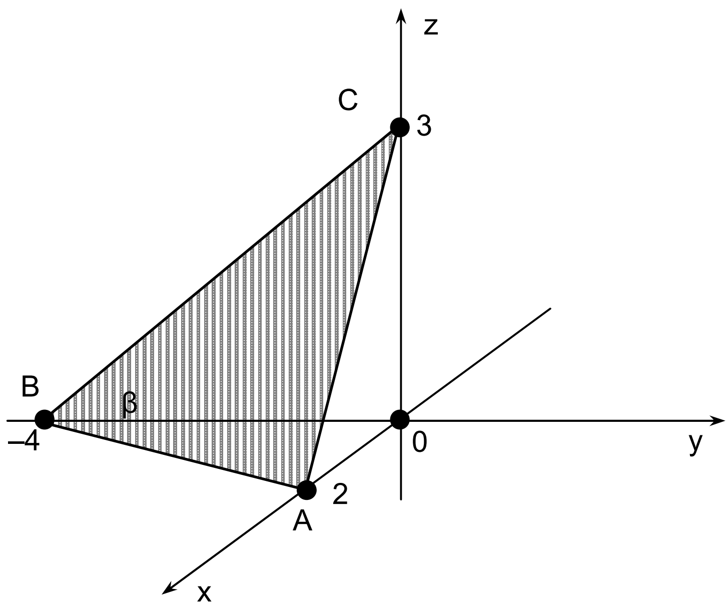


Рис. 3.5

○ Уравнение плоскости β запишем по формуле (1.12):

$$\frac{x}{2}+\frac{y}{-4}+\frac{z}{3}=1 \Leftrightarrow 6x+3y+4z-12=0. \bullet$$

§ 2. Различные способы задания прямой в пространстве

1. Канонические уравнения прямой.

Положение прямой d в пространстве определяется однозначно, если даны: направляющий вектор прямой d и некоторая ее точка. Пусть в аффинной системе координат $\left\{O,\vec{e},\vec{e}_2,\vec{e}_3\right\}$ задана точка $M_0\left(x_0,y_0,z_0\right)\in d$ и вектор $\vec{p}=\left(p_1,p_2,p_3\right)\|\,d$ (рис. 3.6).

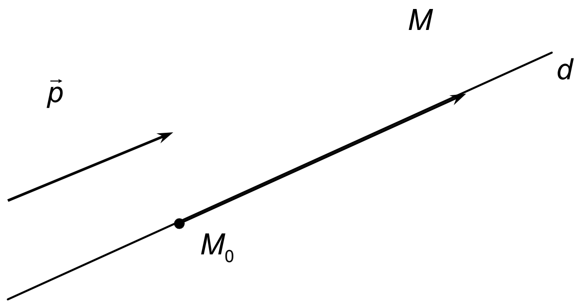


Рис. 3.6

Очевидно, точка $M\left(x,y,z\right)$ лежит на прямой d тогда и только тогда, когда векторы $\overrightarrow{M_0M}$ и $\vec{p}$ коллинеарны:

$$M\in\ell \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M}\,\|\,\vec{p} \Leftrightarrow \frac{x-x_0}{p_1}=\frac{y-y_0}{p_2}=\frac{z-z_0}{p_3}. \tag{2.1}$$

Если одна из координат вектора $\vec{p}$ равна нулю, например, $p_3=0$, $p_1\neq 0$, $p_2\neq 0$, то условие коллинеарности векторов (2.1) примет вид

$$\frac{x-x_0}{p_1}=\frac{y-y_0}{p_2},\; z-z_0=0. \tag{2.2}$$

Аналогично, если равны нулю две координаты вектора $\vec{p}$, например, $p_2 = p_3 = 0, p_1 \neq 0,$ то из (2.2) получаем

$$y - y_0 = 0, z - z_0 = 0. \tag{2.3}$$

В этом случае прямая d параллельная оси Ox или совпадает с осью Ox (если $y_0 = z_0 = 0$).

Уравнения (2.1), (2.2), (2.3) называются **каноническими уравнениями прямой.**

Пример 4. Написать канонические уравнения прямой, заданной двумя точками $M_0(-3; 2; 0)$ **и** $M_1(1; -1; -5)$.

○ Найдем направляющий вектор $\vec{p}$ прямой:

$$\vec{p} = \overrightarrow{M_0M_1} = (4; -3; -5).$$

Канонические уравнения прямой запишем по формуле (2.1):

$$\frac{x+3}{4} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z}{-5}. \bullet$$

2. Уравнения прямой, заданной двумя точками.

Найдем уравнения прямой d, которая проходит через две точки $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2),$ заданные в системе координат $\{O, \vec{e}_1\, \vec{e}_2\, \vec{e}_3\}$. В этом случае вектор $\vec{p} = \overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ — направляющий вектор прямой d, так как $\overrightarrow{M_1M_2} \,||\, d$. Выберем точку M_1 за начальную точку прямой d. Таким образом, задание 2 прямой свелось к заданию 1 (см. п.1):

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \tag{2.4}$$

или

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}, z - z_1 = 0, (z_2 - z_1 = 0), \tag{2.5}$$

или

$$y - y_1 = 0, z - z_1 = 0, \begin{pmatrix} y_2 - y_1 = 0 \\ z_2 - z_1 = 0 \end{pmatrix}. \tag{2.6}$$

3. Уравнения прямой, заданной двумя плоскостями.

Прямую d зададим, как линию пересечения двух плоскостей, т.е. системой двух линейных уравнений

$$d:\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, & (\alpha) \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0, & (\beta) \end{cases} \tag{2.7}$$

где ранг матрицы $\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}$ равен двум.

Для того чтобы найти канонические уравнения прямой d (2.7), надо знать координаты какой—нибудь точки M_0 этой прямой и некоторого направляющего вектора $\vec{p}\,||\,d$. Точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$ выбираем так, чтобы ее координаты удовлетворяли системе (2.7). Для нахождения координат направляющего вектора воспользуемся леммой 3.

Лемма 3. Если в аффинной системе координат прямая задана уравнениями (2.7), то вектор

$$\vec{p}=\left(\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}\right) \tag{2.8}$$

является направляющим вектором этой прямой.

○ Пусть $d=\alpha\cap\beta$. По лемме 2 (о параллельности вектора и плоскости) вектор $\vec{p}\,||\,\alpha$ и $\vec{p}\,||\,\beta$ (непосредственной подстановкой координат вектора $\vec{p}$, по формуле (1.7) убеждаемся в этом) и, следовательно, $\vec{p}\,||\,d$. Вектор $\vec{p}\neq\vec{0}$, так как в системе (2.7) коэффициенты при x, y, z не пропорциональны. Таким образом, вектор $\vec{p}$ — направляющий вектор прямой d . ●

Пример 5. Написать канонические уравнения прямой, которая в аффинной системе координат задана системой уравнений:

$$d:\begin{cases} x-y+3z-12=0, & (\alpha) \\ 3x+y-2z+5=0. & (\beta) \end{cases} \tag{2.9}$$

являются направляющим вектором этой прямой.

○ Сначала выберем какую-нибудь точку на прямой d. В данном случае коэффициенты, например, при x и y не пропорциональны, поэтому, полагая $z_0 = 3$, найдем из (2.9), что $x_0 = 1; y_0 = -2$. Итак, $M_0(1; -2; 3)$ — начальная точка на прямой d. Координаты направляющего вектора $\vec{p}$ прямой d найдем по формуле (2.8) (лемма 3):

$$\vec{p} = \left(\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \right) = (-1; 11; 4).$$

Замечание. По формуле (1.7) легко проверить что $\vec{p} \parallel \alpha$ и $\vec{p} \parallel \beta$, т.е. $\vec{p} \parallel d$.

Таким образом, канонические уравнения прямой d, заданной системой (2.9), имеют вид:

$$\frac{x-1}{-1} = \frac{y+2}{11} = \frac{z-3}{4}. \bullet$$

4. Параметрические уравнения прямой.

Выберем какую-нибудь аффинную систему координат и зададим прямую d направляющим вектором $\vec{p} = (p_1, p_2, p_3)$ и точкой $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

Точка $M(x, y, z)$ пространства лежит на прямой d тогда и только тогда, когда

$$\overline{M_0M} \parallel \vec{p} \Leftrightarrow \overline{M_0M} = t\vec{p} \Leftrightarrow \begin{cases} x - x_0 = tp_1, \\ y - y_0 = tp_2, \\ z - z_0 = tp_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = tp_1 + x_0, \\ y = tp_2 + y_0, \\ z = tp_3 + z_0. \end{cases} \qquad (2.10)$$

Уравнения (2.10) называются параметрическими уравнениями прямой, а t — параметром прямой.

Пример 6. Найти параметрические уравнения прямой, заданной двумя точками $M_0(1; 2; 3)$ $M_1(-1; 2; 6)$.

○ Определим направляющий вектор $\vec{p}$ прямой:

$$\vec{p} = \overline{M_0M_1} = (-2; 0; 3).$$

Пусть $M_0(1;2;3)$ — начальная точка прямой.

Тогда параметрические уравнения искомой прямой запишем по формуле (2.10):

$$\begin{cases} x = -2t + 1, \\ y = 2, \\ z = 3t + 3. \bullet \end{cases}$$

5. Задание прямой проектирующими плоскостями.

Лемма 4. Ненулевые векторы $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ **и** $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ **коллинеарные тогда и только тогда, когда**

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} = 0. \quad (2.11)$$

○ $\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{b} = t\vec{a} \Leftrightarrow b_1 = ta_1, b_2 = ta_2, b_3 = ta_3$. Отсюда и следует (2.11). ●

Зададим прямую d начальной точкой $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и направляющим вектором $\vec{p} = (p_1, p_2, p_3)$, относительно декартовой системы координат $\{O, \vec{i}\ \vec{j}\ \vec{k}\}$.

$$M(x, y, z) \in d \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{p} \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M} = t\vec{p} \quad (2.12)$$

В силу леммы 4 условие (2.12) можно записать в виде $(p_1 \neq 0, p_2 \neq 0, p_3 \neq 0)$:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 \\ p_1 & p_2 \end{vmatrix} = 0, (2.13a), \begin{vmatrix} y - y_0 & z - z_0 \\ p_2 & p_3 \end{vmatrix} = 0, \quad (2.13b)$$

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & z - z_0 \\ p_1 & p_3 \end{vmatrix} = 0. \quad (2.23c)$$

Дадим геометрическую интерпретацию уравнению (2.13a). Уравнение (2.13a) линейное, т.е. оно задает плоскость α. Плоскость α проходит через прямую d, т.к. координаты каждой точки прямой d удовлетворяют уравнению (2.13*a*). В уравнении (2.13**a**) отсутствуют переменная *z*, т.е. эта плоскость (α) параллельна оси *OZ*. Таким образом, плоскость α (2.13*a*) проектирует (ортогонально) прямую d на плоскость *XOY*, параллельно прямой *OZ*.

Аналогично, получаем, что плоскость (2.13b) проектирует ортогонально прямую d на плоскость YOZ, а плоскость (2.13c) — проектирует прямую d ортогонально на плоскость XOZ. Плоскости (2.13a), (2.13b), (2.13c) называются проектирующими плоскостями. Прямая d можно задать любыми двумя из них, третье уравнение будет следствием первых двух. Задание прямой уравнениями (2.13) называется заданием прямой d проектирующими плоскостями.

§ 3. Формулы для вычисления расстояний между основными геометрическими объектами в пространстве

1. Расстояние между двумя различными точками.

Пусть в декартовой системе координат $\left\{O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k}\right\}$ заданы две точки $M_1\left(x_1, y_1, z_1\right)$ и $M_2\left(x_2, y_2, z_2\right)$. Расстояние между точками M_1 и M_2 есть длина вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$:

$$M_1M_2 = \left|\overrightarrow{M_1M}\right| = \sqrt{\left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2 + \left(z_2 - z_1\right)^2}. \qquad (3.1)$$

2. Расстояние от точки до плоскости.

Найдем расстояние от точки $M_0\left(x_0, y_0, z_0\right)$ до плоскости $\omega: Ax + By + {}$ ${}+Cz + D = 0,$ заданных в декартовой системе координат (рис. 3.7).

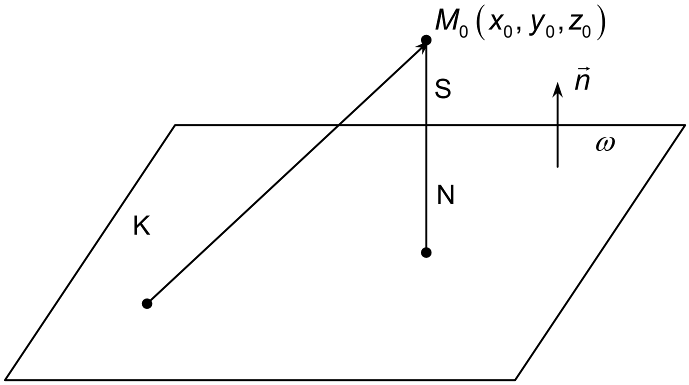


Рис. 3.7

Точка

$$K(x_k, y_k, z_k) \in \omega \Leftrightarrow Ax_k + By_k + Cz_k + D = 0 \Leftrightarrow D = -Ax_k + By_k + Cz_k. \quad (3.2)$$

Учитывая, что $\vec{n} = (A; B; C)$ — нормальный вектор плоскости, $\overrightarrow{KM_0} = (x_0 - x_k; y_0 - y_k; z_0 - z_k)$, а также соотношение (3.2), находим

$$\rho(M_0, \omega) = M_0N = \left| орт.пр._{\vec{n}} \overrightarrow{K_0M} \right| = \frac{\left| \overrightarrow{KM_0} \bullet \vec{n} \right|}{|\vec{n}|} =$$

$$= \frac{\left| A(x_0 - x_k) + B(y_0 - y_k) + C(z_0 - z_k) \right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} =$$

$$= \frac{\left| Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Итак, расстояние от точки до плоскости находится по формуле

$$\rho(M_0, \omega) = \frac{\left| Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \quad (3.3)$$

3. Расстояние от точки до прямой в пространстве.

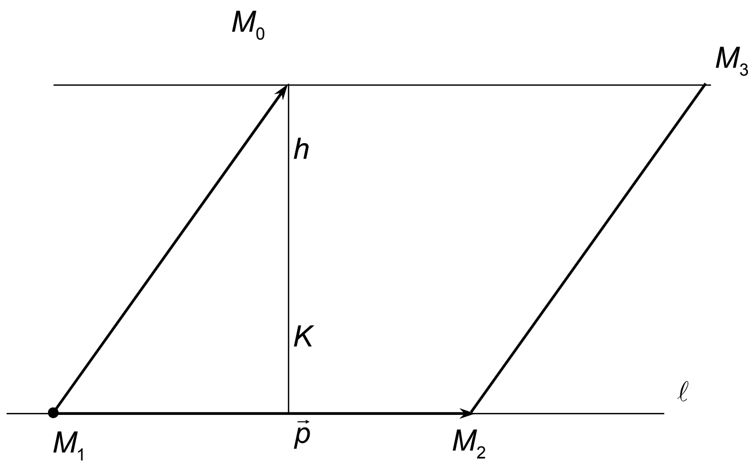


Рис. 3.8

Пусть прямая ℓ задана начальной точкой $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и направляющим вектором $\vec{p} = (p_1, p_2, p_3)$, а точка $M_0(x_0, y_0, z_0) \notin \ell$ (рис. 3.8).

На векторах $\vec{p}=\overrightarrow{M_1M_2}$ и $\overrightarrow{M_1M_0}$ строим параллелограмм $M_0M_1M_2M_3$. Высота $M_0K=h$ этого параллелограмма и есть расстояние от точки M_0 до прямой ℓ:

$$\rho\left(M_0,\ell\right)\overset{def}{=}M_0K=\frac{S_{пар.}}{\left|\vec{p}\right|}=\frac{\left|\left[\overrightarrow{M_1M_0},\vec{p}\right]\right|}{\sqrt{p_1^2+p_2^2+p_3^2}}. \tag{3.4}$$

4. Расстояние между скрещивающимися прямыми.

Относительно декартовой системы координат $\left\{O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right\}$ прямую ℓ_1 зададим начальной точкой $M_1\left(x_1,y_1,z_1\right)$ и направляющим вектором $\vec{p}=\left(p_1,p_2,p_3\right)$, а прямую ℓ_2 — начальной точкой $M_2\left(x_2,y_2,z_2\right)$ и вектором $\vec{q}=\left(q_1,q_2,q_3\right)\,||\,\ell_2$. Пусть прямые ℓ_1 и ℓ_2 — скрещивающиеся прямые $\left(\ell_1\dot{-}\ell_2\right)$.

На векторах $\overrightarrow{M_1M_2},\vec{p}$ и $\vec{q}$ строим параллелепипед (прямые $\ell_1\,\ell_2$ лежат в параллельных плоскостях) (рис. 3.9).

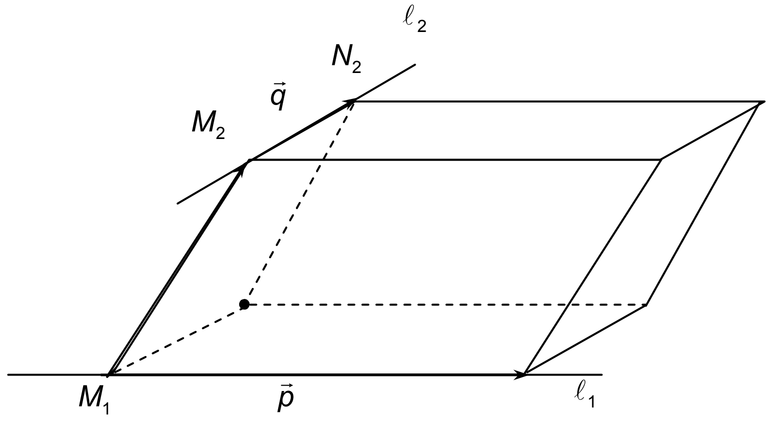


Рис. 3.9

Расстояние между $\ell_1\dot{-}\ell_2$ есть расстояние между параллельными плоскостями (α и β), в которых они лежат, т. е. равно высоте параллелепипеда NM_2 (рис. 3.9):

$$h=\frac{V_{пар.}}{S_{осн.}}=\frac{\left|\left(\overrightarrow{M_1M_2},\,\vec{p}_1,\,\vec{p}_2\right)\right|}{\left\|\left[\vec{p}_1,\,\vec{p}_2\right]\right\|}. \tag{3.5}$$

Пример 7. В декартовой системе координат дана плоскость $\omega: 2x-y+\sqrt{5}z-3=0$. **Найти расстояние от начала координат до плоскости** ω.

○ Начало координат O имеет координаты (0, 0, 0). По формуле (3.3) получим:

$$\rho(O,\omega)=\frac{\left|2\bullet 0-0+\sqrt{5}\bullet 0-3\right|}{\sqrt{4+1+5}}=\frac{3}{\sqrt{10}}=\frac{3\sqrt{10}}{10}.\bullet$$

Пример 8. Найти расстояние от точки $M_0(2;0;-1)$ **до прямой** $\ell: \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z+3}{1}$.

○ Подставляя координаты точки M_0 в канонические уравнения прямой, убеждаемся, что точка $M_0 \notin \ell$ (рис. 3.10).

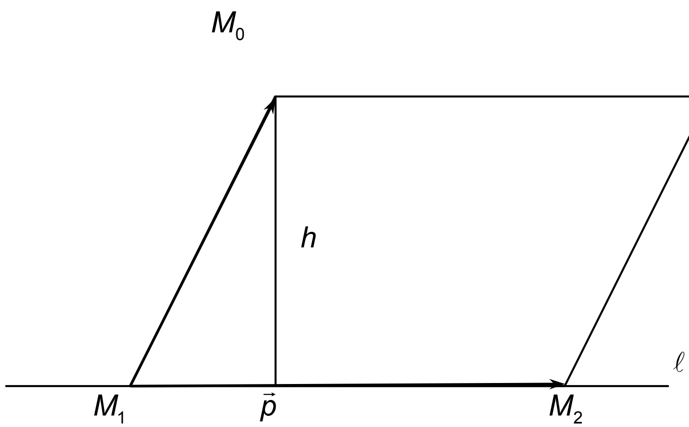


Рис. 3.10

Расстояние h от точки M_0 до прямой ℓ находим по формуле (3.4). Найдем координаты вектора $\overrightarrow{M_1M_0}$, где $M_1(1;2;-3)$:

$$\overrightarrow{M_1M_0}=(x_0-x_1,\,y_0-y_1,\,z_0-z_1)=(1;-2;2).$$

Далее последовательно вычисляем:

a) Координаты векторного произведения $\left[\overrightarrow{M_1M_0}, \vec{p}\right]$:

$$\left.\begin{aligned}&\overrightarrow{M_1M_0} = (1; -2; 2)\\ &\vec{p} = (2; -2; 1)\end{aligned}\right\} \Rightarrow \left[\overrightarrow{M_1M_0}, \vec{p}\right] = \left(\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}; -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}\right) = (2; 3; 2).$$

b) Длину вектора $\left[\overrightarrow{M_1M_0}; \vec{p}\right]$ и длину вектора $\vec{p}$:

$$S_{пар.} = \left|\left[\overrightarrow{M_1M_0}; \vec{p}\right]\right| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 2^2} = \sqrt{17},$$

$$|\vec{p}| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2} = 3.$$

c) Наконец, по формуле (3.4) находим

$$\rho(M_0, \ell) = \frac{S_{нар.}}{|\vec{p}|} = \frac{\sqrt{17}}{3}. \bullet$$

Пример 9. Вычислить расстояние между скрещивающимися прямыми

$$\ell_1 : x = 3 + 2t,\ y = 7 - 2t,\ z = 1 + 3t;$$
$$\ell_2 : x = 5 + 4t,\ y = 8, \qquad z = 2 - 6t.$$

○ Прямая ℓ_1 имеет направляющий вектор $\vec{p}_1 = (2; -2; 3)$ и начальную точку $M_1(3; 7; 1)$, а прямая ℓ_2 — направляющий вектор $\vec{p}_2 = (4; 0; -6)$ и начальную точку $M_2(5; 8; 2)$. Найдем координаты вектора $\overrightarrow{M_1M_2} = (2; 1; 1)$. Расстояние между прямыми ℓ_1 и ℓ_2 находим по формуле (3.5). Для чего последовательно вычисляем:

a) Смешанное произведение векторов $\left(\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{p}_1, \vec{p}_2\right)$:

$$\left(\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{p}_1, \vec{p}_2\right) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 6 & 0 & 5 \\ 4 & 0 & -6 \end{vmatrix} = 56. \qquad (3.6)$$

Условие (3.6) означает, что прямые $\ell_1 \dot{-} \ell_2$ и $V_{пар.}$, построенного на векторах $\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{p}_1, \vec{p}_2$, равен $V_{пар.} = \left|\left(\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{p}_1, \vec{p}_2\right)\right| = 56$.

b) $\left.\begin{array}{l} b)\ \vec{p}_1 = (2;-2;3) \\ \vec{p}_2 = (4;0;-6) \end{array}\right\} \Rightarrow [\vec{p}_1, \vec{p}_2] = \left(\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 0 & -6 \end{vmatrix}; -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -6 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} \right) = (12; 24; 8).$

c) $S_{пар.} \overset{def}{=} S_{осн.} = \left\| [\vec{p}_1, \vec{p}_2] \right\| = \sqrt{12^2 + 24^2 + 8^2} = 28.$

d) По формуле (3.5) находим $h = \dfrac{V_{пар.}}{S_{осн.}} = \dfrac{56}{28} = 2.$ •

§ 4. Формулы для вычисления углов между прямыми, между прямой и плоскостью, между плоскостями

1. Угол между прямыми в пространстве.

a) Если прямые ℓ_1 и ℓ_2 пересекаются, то они лежат в одной плоскости. Поэтому угол $\varphi = \left(\ell_1 \hat{,} \ell_2\right)$ вычисляется по формуле (III. 5.1):

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2|}{|\vec{p}_1| \bullet |\vec{p}_2|}, \tag{4.1}$$

где $\vec{p}_1 \,||\, \ell_1, \vec{p}_2 \,||\, \ell_2$.

Вывод формулы (4.1) такой же, как в § 5 (глава III).

b) Если прямые ℓ_1 и ℓ_2 скрещивающиеся $(\ell_1 \dot{-} \ell_2)$, то угол между ними определяется как угол между пересекающимися прямимы ℓ_1^* и ℓ_2^*, где, $\ell_1^* \,||\, \ell_1, \ell_2^* \,||\, \ell_2$, т.е. определяется по формуле (4.1).

2. Угол между прямой и плоскостью.

5.3. Углом между прямой d и плоскостью ω называется угол между прямой d и ее проекцией d_1 на плоскость ω (рис. 3.11) Пусть $\vec{p} \,||\, d, \vec{n} \perp \omega, \varphi = \left(\widehat{d, d_1}\right), \theta = \left(\widehat{\vec{n}, \vec{p}}\right)$. В силу определения угол φ между прямой и плоскостью меняется на отрезке: $0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$.

При возможных расположениях векторов $\vec{p}$ и $\vec{n}$ имеются только две связи между величинами φ и θ:

$$\left[\begin{array}{l}\varphi+\theta=\dfrac{\pi}{2},\\ \varphi+\dfrac{\pi}{2}=\theta\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\cos\theta=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\varphi\right)=\sin\varphi,\\ \cos\theta=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\varphi\right)=-\sin\varphi\end{array}\right. \Leftrightarrow \sin\varphi=\left|\cos\theta\right|.$$

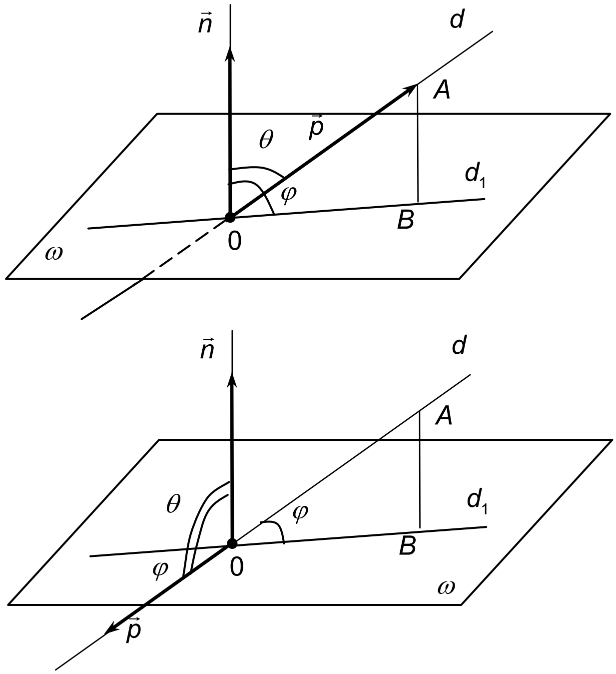


Рис. 3.11

Итак,

$$\sin\varphi=\left|\cos\theta\right|=\left|\cos\left(\widehat{\vec{n},\vec{p}}\right)\right|=\frac{\left|\vec{n}\bullet\vec{p}\right|}{\left|\vec{n}\right|\bullet\left|\vec{p}\right|}. \tag{4.2}$$

В частности, если прямая $d\perp\omega$, то $\vec{n}\,||\,\vec{p}$, а если $d\,||\,\omega$, то $\vec{n}\perp\vec{p}\Leftrightarrow\vec{n}\bullet\vec{p}=0\Leftrightarrow\sin\varphi=0\Rightarrow\varphi=0$.

3. Угол между плоскостями.

5.4. Углом между пересекающимися плоскостями α и β называется меньшей из двух пар вертикальных двугранных углов, образованных этими плоскостями.

Величина двугранного угла — есть величина любого его линейного угла.

Пусть $d = \alpha \,||\, \beta$ — прямая, по которой пересекаются плоскости α и β. Через точку $O \in d$ проведем плоскость $\gamma \perp d$. Пусть $\gamma \cap \alpha = \ell_1$, $\gamma \cap \beta = \ell_2$.

Согласно определению угол $\varphi = \left(\widehat{\ell_1, \ell_2}\right)$ есть угол между данными плоскостями (рис. 3.12).

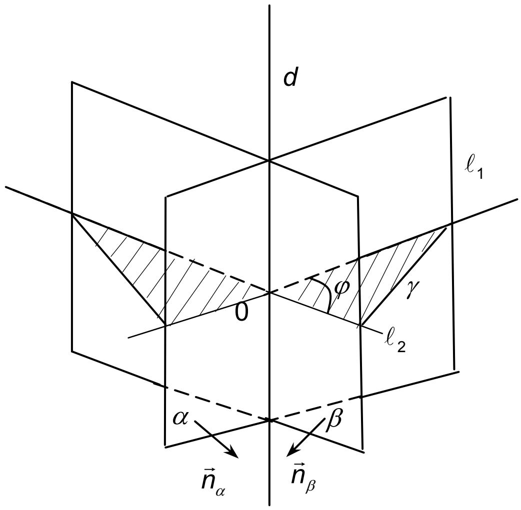


Рис. 3.12

Обозначим через $\vec{n}_\alpha$ — нормальный вектор плоскости α, т.е. $\vec{n}_\alpha \perp \alpha$; через $\vec{n}_\beta$ — нормальный вектор плоскости β, т.е. $\vec{n}_\beta \perp \beta$. Отсюда следует, что $\vec{n}_\alpha \perp \ell_1, \vec{n}_\beta \perp \ell_2$ (рис. 3.13).

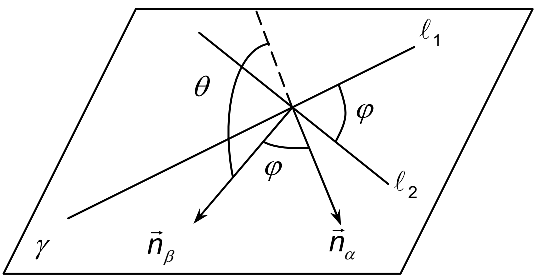


Рис. 3.13

Обозначим через $\varphi=\left(\widehat{\ell_1,\ell_2}\right),\theta=\left(\widehat{\vec{n}_\alpha,\vec{n}_\beta}\right)$, тогда при любом выборе направлений векторов $\vec{n}_\alpha,\vec{n}_\beta$ имеются лишь две связи между углами φ и θ:

$$\left[\begin{array}{l}\varphi=\theta,\\ \varphi+\theta=\pi\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\cos\theta=\cos\varphi,\\ \cos\theta=\cos(\pi-4)=-\cos\varphi\end{array}\right.\Leftrightarrow\cos\varphi=|\cos\theta|.$$

Итак,

$$\cos\varphi=|\cos\theta|=\cos\left(\widehat{\vec{n}_\alpha,\vec{n}_\beta}\right)=\frac{|\vec{n}_\alpha\bullet\vec{n}_\beta|}{|\vec{n}_\alpha|\bullet|\vec{n}_\beta|}.\bullet \tag{4.3}$$

Пример 10. В декартовой системе координат даны прямые

$$\ell_1:\frac{x-1}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{-1}\text{ и }\ell_2:\begin{cases}x+y+z=0,\\ x-z=0.\end{cases}$$

Вычислить угол между ними.

○ Предварительно вычислим координаты направляющих векторов этих прямых: $\vec{p}_1=(2;-1;-1)\,||\,\ell_1,\vec{p}_2=(1;-2;1)\,||\,\ell_2$. Пусть φ — величина угла между прямыми. По формуле (4.1) находим

$$\cos\varphi=\frac{|2+2-1|}{\sqrt{4+1+1}\bullet\sqrt{1+4+1}}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}\Rightarrow\varphi=60^0.\bullet$$

Пример 11. Найти угол между прямой $\ell:x=8-t,y=2+t,$ $z=1+2t$ **и плоскостью** $\alpha:2x-y-z+1=0.$

○ Вектор $\vec{n}=(2;-1;-1)$ — нормальный вектор плоскости $\alpha,\vec{p}=(-1;1;2)$ — направляющий вектор прямой ℓ. Пусть φ — величина угла между прямой ℓ и плоскостью α, тогда по формуле (4.2) получим

$$\sin\varphi=\frac{|\vec{n}\bullet\vec{p}|}{|\vec{n}|\bullet|\vec{p}|}=\frac{|-2-1-2|}{\sqrt{4+1+1}\bullet\sqrt{1+1+4}}=\frac{5}{\sqrt{6}\bullet\sqrt{6}}=\frac{5}{6}\Rightarrow\varphi=\arcsin\frac{5}{6}.\bullet$$

Пример 12. Найти угол φ **между плоскостями** $\alpha:2x-y+3z-1=0$ и $\beta:2x+y+2z+5=0$.

○ Вектор $\vec{n}_1 = (2; -1; 3)$ и $\vec{n}_2 = (2; 1; 2)$ — нормальные векторы соответственно плоскостей α и β. По формуле (4.3) вычисляем

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{|4-1+6|}{\sqrt{4+1+9} \cdot \sqrt{4+1+4}} = \frac{9}{\sqrt{14 \cdot 3}} = \frac{3}{\sqrt{14}} = \frac{3\sqrt{14}}{14} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi = \arccos\frac{3\sqrt{14}}{14}. \bullet$$

§ 5. Взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве

1. Взаимное расположение двух прямых.

Пусть в пространстве заданы прямые: d_1 — начальной точкой M_1 и направляющим вектором $\vec{p}_1$ и прямая d_2 — начальной точкой M_2 и направляющим вектором $\vec{p}_2$ (рис. 3.14).

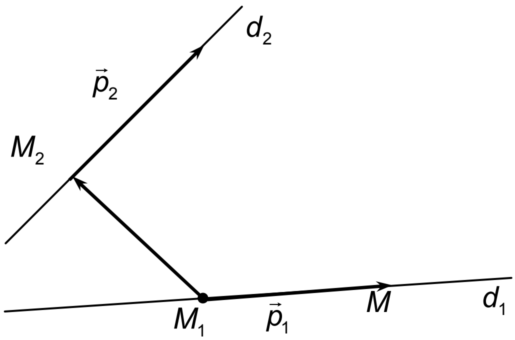


Рис. 3.14

Оказывается, что по векторам $\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{p}_1, \vec{p}_2$ можно определить взаимное расположение данных прямых. Возможны четыре случая: 1) прямые скрещиваются, 2) прямые пересекаются, 3) прямые параллельны, 4) прямые совпадают. Рассмотрим каждый из этих случаев в отдельности. Заметим, что прямые d_1 и d_2 лежат в одной плоскости (рис. 3.14) тогда только тогда, когда векторы $\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{p}_1, \vec{p}_2$ компланарны и, значит, имеет место равенство.

$$\left(\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{p}_1, \vec{p}_2\right) = 0. \tag{5.1}$$

1. Как известно, две прямые называются скрещивающимися, если они не лежат в одной плоскости (т. е. не существует плоскости, содержащей каждую из этих прямых). Следовательно, **для того чтобы данные прямые d_1 и d_2 были скрещивающимися, необходимо и достаточно, чтобы для них выполнялись неравенство**

$$\left(\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{p}_1, \vec{p}_2\right) \neq 0. \tag{5.2}$$

2. Пусть прямые d_1 и d_2 лежат в одной плоскости, и, следовательно для них выполняется условие (5.1). Эти прямые пересекаются тогда и только тогда, когда их направляющие векторы не коллинеарны.

Итак, прямые d_1 и d_2 пересекаются тогда и только тогда, когда

$$\left(\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{p}_1, \vec{p}_2\right) = 0, \quad \vec{p}_1 \nparallel \vec{p}_2. \tag{5.3}$$

3. Прямые d_1 и d_2, лежащие в одной плоскости, параллельны, если они не имеют общих точек. Это будет только в том случае, когда векторы $\vec{p}_1$ и $\vec{p}_2$ коллинеарны, а $\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{p}_1$ не коллинеарны. Итак, **прямые d_1 и d_2 параллельны тогда и только тогда**, когда векторы $\vec{p}_1$ и $\vec{p}_2$ **коллинеарны**, но векторы $\vec{p}_1$ и $\overrightarrow{M_1M_2}$ **не коллинеарны**:

$$\vec{p}_1 \,||\, \vec{p}_2, \overrightarrow{M_1M_2} \nparallel \vec{p}_1 \text{ (или } \overrightarrow{M_1M_2} \nparallel \vec{p}_2\text{)}. \tag{5.4}$$

4. Ясно, что **прямые d_1 и d_2 совпадают тогда и только тогда, когда векторы $\vec{p}_1$, $\vec{p}_2$ и $\overrightarrow{M_1M_2}$ попарно коллинеарны**:

$$\vec{p}_1 \,||\, \vec{p}_2 \,||\, \overrightarrow{M_1M_2}. \tag{5.5}$$

Пример 13. Выяснить взаимное расположение двух прямых, заданных в аффинной системе координат каноническими уравнениями:

$$d_1: \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{3}, \quad d_2: \frac{x-5}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-8}{4}. \tag{5.6}$$

○ Находим по уравнениям (5.6) точки прямых d_1 и d_2 и их направляющие векторы:

$$d_1 : M_1(2;-1;1), \quad \vec{p}_1 = (1;2;3)$$
$$d_2 : M_2(5;2;8), \quad \vec{p}_2 = (2;1;4).$$

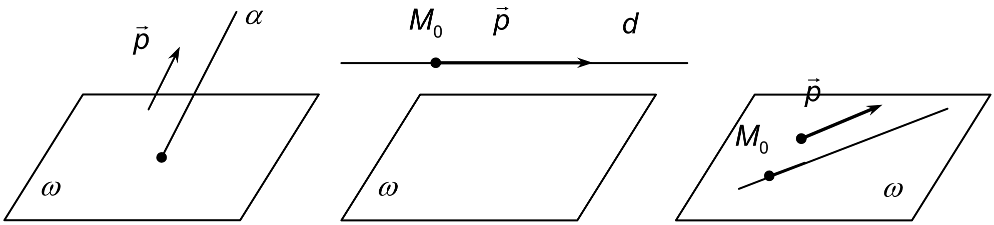
Находим $\overrightarrow{M_1M_2} = (3;3;7)$ и вычисляем смешанные произведение векторов $\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{p}_1, \vec{p}_2$:

$$\left(\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{p}_1, \vec{p}_2\right) = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -3 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -2 \end{vmatrix} = 0.$$

Значит, данные прямые лежат в одной плоскости. При этом $\vec{p}_1 \nparallel \vec{p}_2$. Итак, выполняются условия (5.3), т. е. прямые d_1 и d_2 пересекаются. ●

2. Взаимное расположение прямой и плоскости.

Возможны следующие случаи их взаимного расположения (рис. 3.15).



a *b* *c*

Рис. 3.15

a) Прямая d пересекает плоскость ω тогда и только тогда, когда направляющий вектор $\vec{p}$ прямой не параллелен плоскости ω, т. е. когда

$$Ap_1 + Bp_2 + Cp_3 \neq 0. \tag{5.7}$$

b) Прямая $d \parallel \omega$ тогда и только тогда, когда вектор $\vec{p} \parallel \omega$ и точка M_0 не лежит в этой плоскости (рис. 29b):

$$\begin{cases} Ap_1 + Bp_2 + Cp_3 = 0, \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0. \end{cases} \tag{5.8}$$

c) Аналогично, прямая d лежит в плоскости ω тогда и только тогда, когда выполняются равенства:

$$\begin{cases} Ap_1 + Bp_2 + Cp_3 = 0, \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0. \end{cases} \qquad (5.9)$$

Пример 14. Выяснить взаимное расположение прямой и плоскости, заданных в аффинной системе координат уравнениями:

$$d : \frac{x}{10} = \frac{y+1}{-4} = \frac{z-3}{-6}; \quad \omega : 3x + 6y + z - 8 = 0.$$

○ По каноническим уравнениям прямой находим точку $M_0\left(0; -1; 3\right) \in d$ и направляющий вектор $\vec{p} = \left(10; -4; -6\right) \parallel d$. Вычисляем последовательно

$$Ap_1 + Bp_2 + Cp_3 = 3{\bullet}10 + 6\left(-4\right) + 1\left(-6\right) = 0,$$
$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 3{\bullet}0 + 6\left(-1\right) + 1{\bullet}3 - 8 = -11 \neq 0.$$

Таким образом, выполнены условия (5.8), т. е. прямая и плоскость параллельны.

3. Взаимное расположение двух плоскостей.

Пусть в некоторой аффинной системе координат заданы две плоскости ω_1 и ω_2 своими уравнениями:

$$(5.12): \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \left(\omega_1\right)(5.10) \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \left(\omega_2\right)(5.11) \end{cases}$$

Выясним взаимное расположение плоскостей ω_1 и ω_2.

Так как координаты каждой общей точки плоскостей ω_1 и ω_2 являются решением системы уравнений (5.12) и обратно (т. е. каждое решение системы уравнений (5.12) является координатами общей точки плоскостей ω_1 и ω_2), то вопрос о взаимном расположении двух плоскостей ω_1 и ω_2 сводится к исследованию системы линейных уравнений (5.10) и (5.11).

Обозначим через r и R соответственно ранги матриц

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} \text{ и } \overline{A} = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{pmatrix}.$$

Ясно, что $r \le R$, причем по теореме Кронекера — Капелли система уравнений (5.10) и (5.11) совместна тогда и только тогда, когда $r = R$. Таким образом, плоскости ω_1 и ω_2 имеют хотя бы одну общую точку тогда и только тогда, когда $r = R$.

Возможны следующие случаи:

1. $R = 1$. Это означает, что строки матрицы $\bar{A}$ пропорциональны (как и матрицы А), т. е. уравнения (5.10) и (5.11) отличаются друг от друга только коэффициентом пропорциональности. Другими словами: уравнения (5.10) и (5.11) задают одну и ту же плоскость, т. е. **плоскости ω_1 и ω_2 совпадают.**

2. $R = r = 2$. Тогда плоскости ω_1 и ω_2 различны (они не могут совпадать, так как $R > 1$) и имеют хотя бы одну общую точку (теорема Кронекера — Капелли), т. е. **плоскости пересекаются по прямой.**

3. $R = 2, r = 1$. По теореме Кронекера — Канелли система (5.12) несовместна, поэтому **плоскости ω_1 и ω_2 не имеют общих точек, т. е. $\omega_1 \parallel \omega_2$.**

Глава IV
ИЗУЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА ПО КАНОНИЧЕСКИМ УРАВНЕНИЯМ [1]

§ 1. Поверхности второго порядка. Метод сечений

1. Напомним, что *уравнением поверхности* в некоторой системе координат в пространстве называется уравнение

$$F(x, y, z)=0, \tag{1}$$

которому удовлетворяют координаты любой точки поверхности и не удовлетворяют координаты ни одной точки, не принадлежащей этой поверхности. Так, в аффинной системе координат уравнение первой степени $Ax+By+Cz+D=0$ есть уравнение плоскости. В прямоугольной системе координат уравнение $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$ есть уравнение сферы с центром $C(a, b, c)$ радиуса r.

Все поверхности подразделяются на два больших класса: алгебраические и неалгебраические (или трансцендентные). Поверхность S называется *алгебраической*, если в какой-нибудь аффинной системе координат ее уравнение можно записать в виде (1), в котором $F(x, y, z)$ — многочлен относительно x, y, z, т. е. алгебраическая сумма конечного множества членов вида $ax^py^qz^r$, где коэффициент a — действительное число, отличное от нуля, а p, q и r — неотрицательные целые числа. Число $p + q + r$ называется *степенью члена* $ax^py^qz^r$, где $a\neq 0$. *Степенью многочлена* называется наивысшая из степеней его членов.

Порядком алгебраической поверхности называют степень ее уравнения в какой-либо аффинной системе координат (т. е. степень многочлена $F(x, y, z)$ в уравнении (1) этой поверхности). Можно доказать, что свойство поверхности быть алгебраической, а также порядок не зависят от выбора аффинной системы координат. Доказательство этого утверждения аналогично доказательству соответствующей теоремы для алгебраических линий, поэтому мы его опускаем. Все поверхности первого порядка являются плоскостями. Сфера является примером поверхности второго порядка.

В этой главе будут изучены поверхности второго порядка. *Поверхностью второго порядка называется множество всех точек пространства, координаты которых в какой-либо аффинной системе координат удовлетворяют уравнению второй степени*:

$$\begin{aligned} &a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + \\ &+ 2a_{10}x + 2a_{20}y + 2a_{30}z + a_{00} = 0. \end{aligned} \tag{2}$$

где a_{11}, a_{22}, …, a_{00} — *действительные числа, причем не все коэффициенты при членах второй степени равны нулю*.

Мы не будем исследовать общее уравнение (2) поверхности второго порядка, а рассмотрим лишь основные типы таких поверхностей, используя их простейшие (так называемые канонические) уравнения. При этом для изучения формы поверхности часто будем прибегать к методу сечений, который описан в следующем пункте.

2. *Метод сечений* применим к любой поверхности, а не только к поверхности второго порядка. При этом оказывается удобно пользоваться прямоугольной системой координат. Сущность метода сечений состоит в следующем.

Пусть поверхность S задана в прямоугольной системе координат уравнением (1). Поверхность S пересекаем плоскостями, параллельными координатным плоскостям (или самими координатными плоскостями), и находим линии пересечения поверхности с этими плоскостями. По виду этих линий и выносится суждение о форме поверхности S. Применение метода сечений основано на следующей теореме.

Теорема 1. Пусть в прямоугольной системе координат $O\vec{i}\vec{j}\vec{k}$ заданы поверхность S уравнением (1) и плоскость σ, параллельная плоскости Oxy или совпадающая с ней, уравнением z = h. Если поверхность S пересекается с плоскостью σ по линии γ, то проекция линии γ на плоскость Oxy в системе координат $O\vec{i}\vec{j}$ имеет уравнение

$$F(x, y, h) = 0. \tag{3}$$

○ Пусть γ' — проекция линии γ на плоскость Oxy (рис. 4.1). Докажем, что на плоскости Oxy координаты любой точки линии γ' удовлетворяют уравнению (3), а координаты точки плоскости Oxy, не лежащей на линии γ', не удовлетворяют этому уравнению.

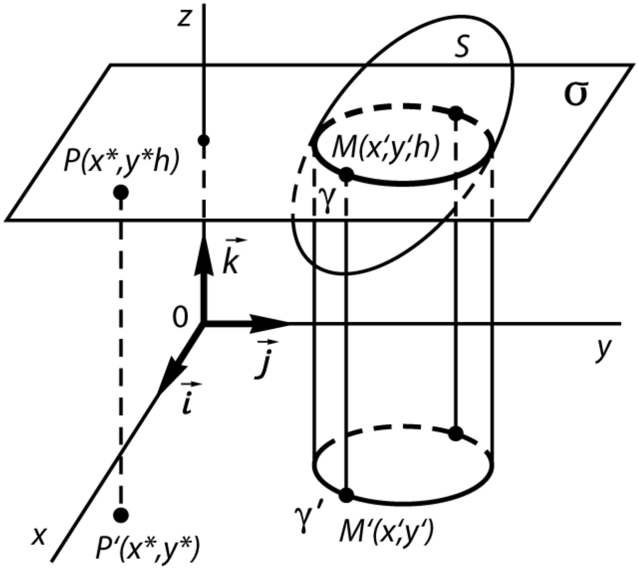


Рис. 4.1

Возьмем произвольную точку M' линии γ', которая в системе координат $O\vec{i}\vec{j}$ на плоскости Oxy имеет координаты x', y'. Эта же точка в системе координат $O\vec{i}\vec{j}\vec{k}$ в пространстве имеет координаты (x', y', 0). Так как точка M' лежит на кривой γ', то она является проекцией некоторой точки M кривой γ. Ясно, что точка M в пространстве имеет координаты M (x', y', h) (см. рис. 4.1). Но точка M лежит и на поверхности S, поэтому координаты точки M удовлетворяют уравнению (1): F(x',y',h) = 0. Мы получили, что координаты произвольной точки M', лежащей на линии γ', удовлетворяют уравнению (3).

Возьмем теперь на плоскости Oxy произвольную точку P'(x*, y*), не лежащую на линии γ'. Проведем через точку P' прямую с направляющим вектором $\vec{k}$ и обозначим через P точку пересечения этой прямой с плоскостью σ. Так как точка P' имеет в пространстве координаты (x*, y*, 0), то точка P имеет координаты (x*, y*, h). Но точка P' не лежит на кривой γ', поэтому точка P не может лежать на кривой γ. Следовательно, координаты точки P не удовлетворяют уравнению (3) поверхности S: F(x*, y*, h) $\neq$ 0. Значит, если точка плоскости Oxy не лежит на линии γ', то ее координаты не удовлетворяют уравнению (3). ●

Следствие. Линия γ пересечения поверхности S с плоскостью σ, параллельной плоскости Oxy, равна проекции γ' этой линии на плоскость Oxy.

○ В самом деле, параллельный перенос на вектор $\vec{p} = -h\vec{k}$ переводит каждую точку $M \in \gamma$ в соответствующую точку $M' \in \gamma'$. Следовательно, существует движение, которое совмещает линию γ с линией γ', а это значит, что эти линии равны. ●

§ 2. Поверхности вращения

1. *Поверхность, которая вместе с каждой своей точкой содержит всю окружность, полученную вращением этой точки вокруг некоторой фиксированной прямой d, называется поверхностью вращения*[1] (рис. 4.2). Прямая d, вокруг которой производится вращение, называется *осью вращения*. Вращение точки вокруг оси происходит в плоскости, перпендикулярной оси. В сечении поверхности вращения плоскостями, перпендикулярными оси вращения, получаются окружности, которые называются *параллелями*. Плоскости, проходящие через ось вращения, пересекают поверхность вращения по линиям, называемым меридианами.

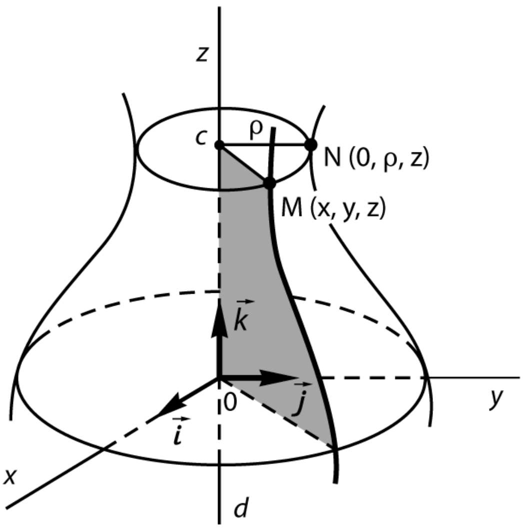


Рис. 4.2

[1] Если точка M лежит на прямой d, то «окружность», полученная вращением точки M вокруг прямой d, имеет нулевой радиус и состоит из самой точки M.

2. Поверхность вращения может быть образована следующим образом. Пусть в плоскости σ даны прямая d и линия γ (рис. 4.3). Поверхность, образованная вращением линии γ вокруг прямой d, есть поверхность вращения с осью вращения d, Каждая точка линии γ, вращаясь вокруг прямой d, образует параллель этой поверхности.

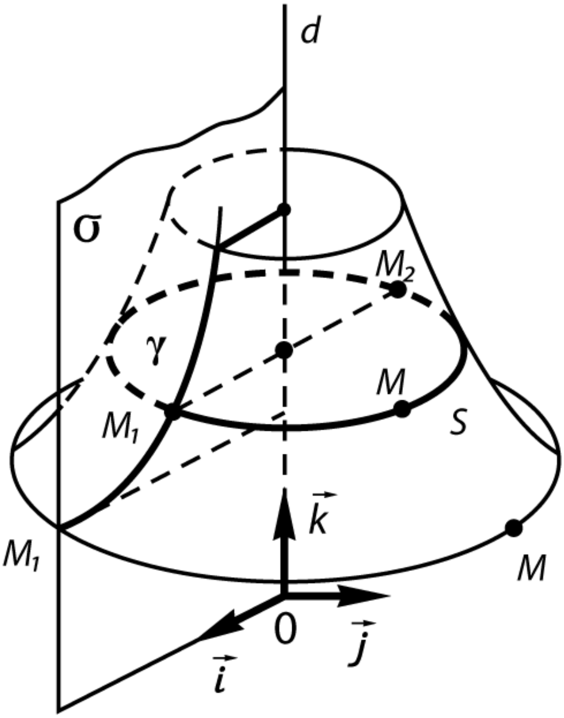


Рис. 4.3

Докажем теорему, которая позволяет найти уравнение поверхности вращения по уравнению линии γ на плоскости σ.

Теорема 2. В прямоугольной системе координат $O\vec{i}\vec{j}\vec{k}$ уравнение

$$\mathbf{S:}\ x^2 + y^2 = f^2(z) \qquad (1)$$

есть уравнение поверхности вращения, образованной вращением вокруг оси Oz линии, заданной уравнениями:

$$\gamma\mathbf{: x = f(z), y = 0.} \qquad (2)$$

○ Пусть S — поверхность вращения, образованная вращением вокруг оси Oz линии γ, заданной уравнениями (2) (рис. 4.3) Докажем, что уравнение (1) является уравнением поверхности S.

Возьмем произвольную точку M (x_1,y_1,z_1) пространства и проведем через, нее плоскость, перпендикулярную оси Oz. Обозначим через M_0 точку пересечения этой плоскости с осью Oz. Окружность ω этой плоскости с центром M_0 и радиусом M_0M пересекает плоскость Oxz в двух точках, которые обозначим через M_1 и M_2 (рис. 4.4). Отрезки M_0M_1, M_0M_2 и M_0M — радиусы окружности ω, поэтому они равны друг другу. Так как $M_0M = \sqrt{x_1^2+y_1^2}$, то точки M_1 и M_2 имеют координаты

$$M_1(\sqrt{x_1^2+y_1^2},0,z_1),\quad M_2(-\sqrt{x_1^2+y_1^2},0,z_1).$$

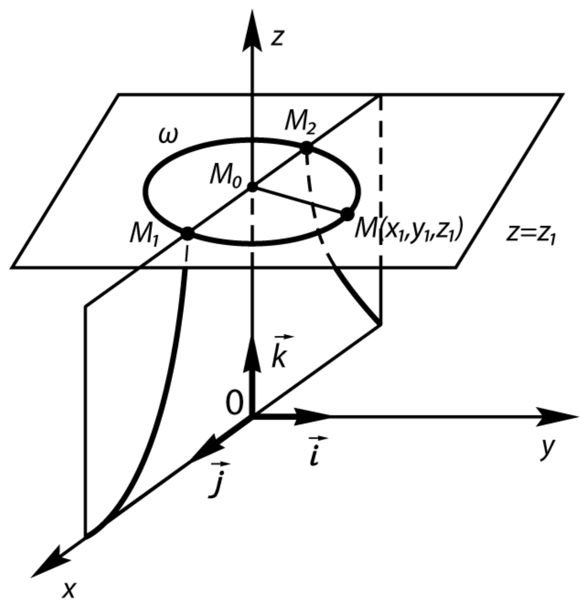


Рис. 4.4

Если точка M принадлежит поверхности S, то ω — параллель поверхности, причем одна из точек M_1 или M_2 принадлежит линии γ (см. рис. 4.3), следовательно, $\sqrt{x_1^2+y_1^2}=f(z_1)$ или $-\sqrt{x_1^2+y_1^2}=f(z_1)$. Возведя соответствующее уравнение в квадрат, получаем: $x_1^2+y_1^2=f^2(z_1)$.

Пришли к выводу, что если $M \in S$, то координаты точки M удовлетворяют уравнению (1).

Если точка M не принадлежит поверхности S, то ни одна из точек M_1 и M_2 не принадлежит линии γ, т.е. $\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \neq f(z_1)$ и $-\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \neq f(z_1)$. Отсюда следует, что $x_1^2 + y_1^2 \neq f^2(z_1)$, т.е. координаты точки M не удовлетворяют уравнению (1). ●

Итак, доказано, что уравнение (1) определяет поверхность S.

З а м е ч а н и е. Аналогично можно убедиться в том, что в прямоугольной системе координат уравнение $z^2+y^2 = g^2(x)$ определяет поверхность вращения, образованную вращением вокруг оси Ox линии, заданной уравнениями $y = g(x)$, $z = 0$, а уравнение $x^2 + z^2 = h^2(y)$ определяет поверхность, образованную вращением вокруг оси Oy линии, заданной уравнениями: $x = h(y)$, $z = 0$.

***Пример* 1. В плоскости Oxz прямоугольной системы координат Oxyz дана окружность $x^2 + z^2 = r^2$ с центром в начале координат радиуса r. Написать уравнение поверхности S, образованной вращением этой окружности вокруг оси Oz**.

Р е ш е н и е. Сначала получим уравнения вида. (2) линии γ, от вращения которой вокруг оси Oz образуется поверхность. Из уравнения данной окружности находим: $x = \pm\sqrt{r^2 - z^2}$.

Здесь знаку «+» соответствует одна полуокружность, а знаку «–» — другая полуокружность данной окружности. Ясно, что при вращении вокруг оси Oz каждой из этих полуокружностей получается та же поверхность, что и при вращении всей окружности.

Поэтому в качестве линии γ можно взять одну из указанных полуокружностей, например полуокружность, заданную уравнениями:

$$x = \sqrt{r^2 - z^2}, \; y = 0.$$

По доказанной теореме уравнение поверхности S имеет вид (1):

$$x^2 + y^2 = (\sqrt{r^2 - z^2})^2, \text{ или } x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

Таким образом, поверхностью S является сфера радиуса r с центром в начале координат. ●

Заметим, что доказанная теорема верна и в том случае, когда в уравнениях (2) функция f(r) является постоянной. Рассмотрим пример.

Пример **2. В плоскости Oxz прямоугольной системы координат Oxz дана прямая x = a, параллельная оси Oz. Написать уравнение поверхности, образованной вращением этой прямой вокруг оси Oz**.

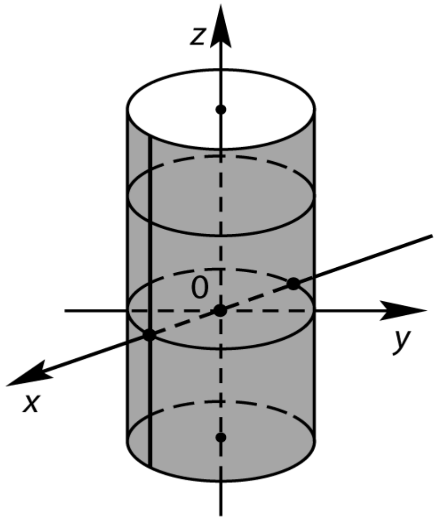


Рис. 4.5

Р е ш е н и е. В данном случае уравнения (2) имеют вид: x = a, y = 0. По доказанной теореме поверхность вращения определяется уравнением $x^2 + y^2 = a^2$. Эта поверхность, как известно из школьного курса геометрии, называется *цилиндром вращения* (или *прямым круговым цилиндром*). Она изображена на рисунке 4.5. ●

§ 3. Цилиндрические поверхности

1. *Поверхность, обладающая тем свойством, что вместе с каждой точкой M она содержит всю прямую, проходящую через M, параллельную данному* *<u>ненулевому вектору</u>* $\vec{p}$*, называется цилиндрической поверхностью или цилиндром*. Прямые, параллельные вектору $\vec{p}$ и принадлежащие цилиндрической поверхности, называются образующими этой поверхности.

Цилиндрическая поверхность может быть образована следующим образом. Пусть γ — некоторая линия, а $\vec{p}$ — ненулевой вектор. Поверхность, образованная всеми прямыми, каждая из которых проходит через некоторую точку линии γ параллельно вектору $\vec{p}$, будет цилиндрической. В этом случае линия γ называется *направляющей* этой поверхности (рис. 4.6).

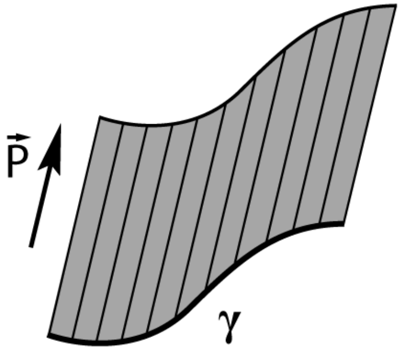


Рис. 4.6

Докажем следующую теорему.

Теорема 3. ***Пусть в пространстве дана прямоугольная система координат*** $O\vec{i}\vec{j}\vec{k}$ ***и в плоскости*** **Oxy** ***в системе координат*** $O\vec{i}\vec{j}$ ***задана линия*** γ ***своим уравнением***

$$\gamma\text{: } \mathbf{F(x,y) = 0.} \qquad (1)$$

Тогда уравнение (1) определяет в пространстве цилиндрическую поверхность S с направляющей линией γ и образующими, параллельными вектору $\vec{k}$.

○ Возьмем произвольную точку $M(x_1,y_1,z_1)$ пространства и рассмотрим прямую с направляющим вектором $\vec{k}$, проходящую через эту точку. Эта прямая пересекает плоскость Oxy в некоторой точке M_1, которая в системе $O\vec{i}\vec{j}\vec{k}$ имеет координаты $(x_1,\ y_1,\ 0)$. Эта же точка M_1 на плоскости Oxy в системе $O\vec{i}\vec{j}$ имеет координаты $(x_1,\ y_1)$.

Если M — точка поверхности S, то прямая MM_1 является образующей поверхности S, поэтому точка M_1 лежит на кривой γ. Отсюда следует, что координаты $(x_1,\ y_1)$ точки M_1 удовлетворяют уравнению (1) линии γ: $F(x_1,y_1) = 0$. Полученное равенство означает, что координаты точки $M(x_1,\ y_1,\ z_1)$ удовлетворяют уравнению (1).

Если точка M не принадлежит поверхности S, то точка M_1 не лежит на кривой γ, поэтому ее координаты $(x_1,\ y_1)$ не удовлетворяют уравнению линии γ: $F(x_1,\ y_1) \neq 0$. Полученное неравенство означает, что координаты, точки $M\ (x_1,\ y_1,\ z_1)$ не удовлетворяют уравнению (1).

Итак, доказано, что уравнение (1) есть уравнение цилиндрической поверхности с направляющей линией γ и образующими, параллельными оси Oz (одной из образующих будет служить сама ось Oz, если $O \in \gamma$). ●

З а м е ч а н и е. Аналогично можно убедиться в том, что если уравнение $G(x,z) = 0$ в плоскости Oxz в системе $O\vec{i}\vec{j}$ определяет линию γ', то это же уравнение в пространстве определяет цилиндрическую поверхность, для которой линия γ' служит направляющей, а образующие параллельны оси Oy.

Точно так же, если уравнение H(y, z) = 0 в плоскости Oyz в системе $O\vec{j}\vec{k}$ определяет линию γ'', то это же уравнение в пространстве определяет цилиндрическую поверхность с направляющей γ'' и образующими, параллельными оси *Ox.*

2. Если уравнение (1) является уравнением второй степени относительно x и *y* (т. е. если γ — линия второго порядка), то цилиндрическая поверхность с направляющей γ и образующими, параллельными вектору $\vec{k}$, является цилиндрической поверхностью второго порядка (короче, цилиндром второго порядка). Этот цилиндр называется *эллиптическим, гиперболическим, параболическим* в зависимости от того, является ли его направляющая (1) эллипсом, гиперболой или параболой.

Возможен также случай, когда направляющая γ цилиндрической поверхности распадается на прямые d_1 и d_2 (пересекающиеся, параллельные или слившиеся). Проведя через каждую точку линии γ прямую, параллельную вектору $\vec{k}$, мы получим плоскости σ_1 и σ_2, проходящие через прямые d_1 и d_2 и параллельные вектору $\vec{k}$. В этом случае мы скажем, что цилиндр второго порядка распадается на пару плоскостей σ_1 и σ_2.

Если прямоугольную систему координат $O\vec{i}\vec{j}\vec{k}$ выбрать так, чтобы образующие цилиндрической поверхности второго порядка были параллельны вектору $\vec{k}$, а направляющая γ в системе $O\vec{i}\vec{j}$ имела каноническое уравнение, то указанные выше цилиндрические поверхности определяются следующими уравнениями:

$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ — эллиптический цилиндр (рис. 4.7);

$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ — гиперболический цилиндр (рис. 4.8);

$y^2=2px$ — параболический цилиндр (рис. 4.9);

$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=0$ — цилиндр, распавшийся на пару пересекающихся по оси Oz плоскостей (рис. 4.10);

$x^2-a^2=0,\ a\neq 0$ — цилиндр, распавшийся на пару параллельных плоскостей (рис. 4.11);

$x^2 = 0$ — цилиндр, представляющий собой пару совпавших плоскостей.

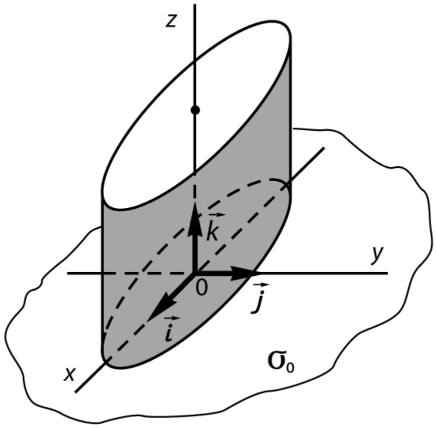


Рис. 4.7

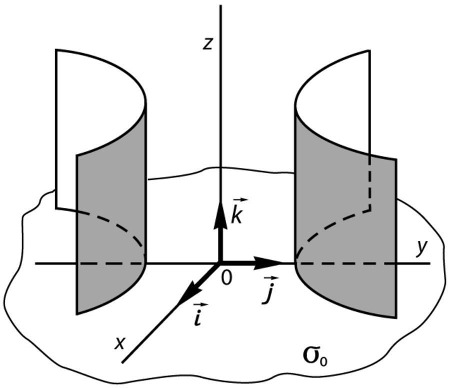


Рис. 4.8

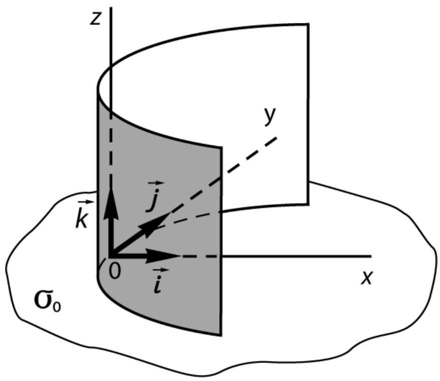


Рис. 4.9

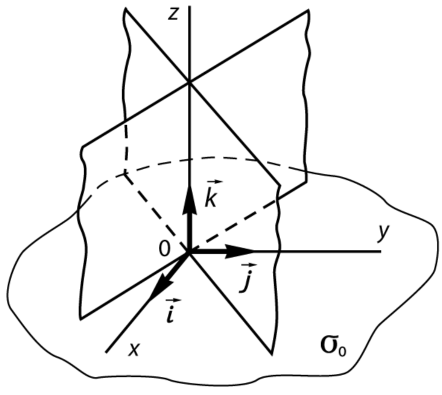


Рис. 4.10

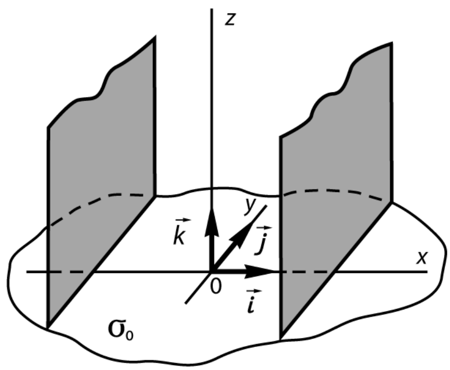


Рис. 4.11

Эти уравнения называются *каноническими уравнениями* соответствующих цилиндрических поверхностей второго порядка.

Замечание. Если в каноническом уравнении эллиптического цилиндра a = b, то направляющей цилиндра служит окружность $x^2 + y^2 = a^2$, лежащая в плоскости Oxy. В этом случае поверхность является цилиндром вращения (см. § 2, пример 2, рис. 4.5).

§ 4. Конические поверхности второго порядка. Конические сечения

1. Определение. Конической поверхностью или конусом с вершиной в точке M_0 называется поверхность, которая обладает тем свойством, что вместе с каждой своей точкой M, отличной от точки M_0, эта поверхность содержит прямую M_0M.

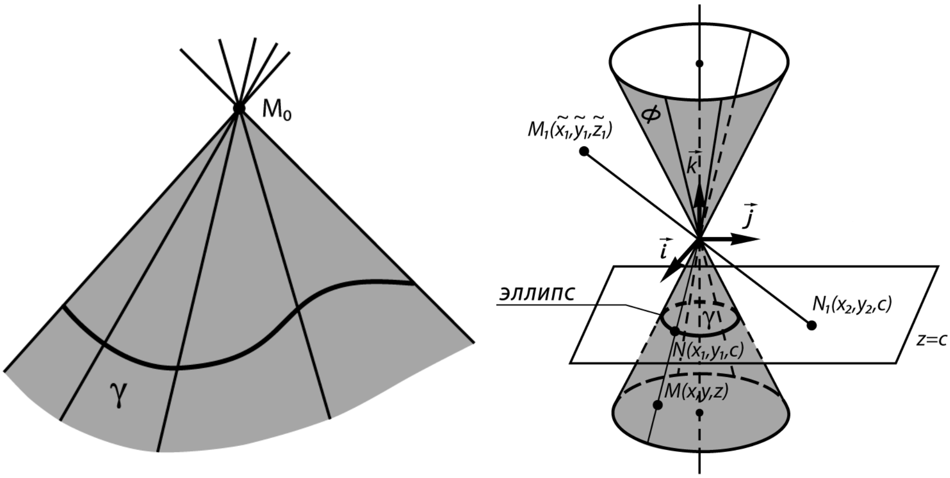
Прямые, проходящие через вершину конуса и лежащие на нем, называются *образующими* этого конуса. Отметим, что из определения конуса вовсе не следует, что он имеет единственную вершину. Например, плоскость является конической поверхностью, каждая точка которой может быть принята в качестве вершины.

Коническую поверхность можно получить следующим образом. Рассмотрим в пространстве линию γ и точку M_0, не лежащую на линии γ. Поверхность, образованная всеми прямыми, каждая из которых проходит через точку M_0 и через некоторую точку линии γ, является конической поверхностью с вершиной M_0 (рис. 4.12а). В этом случае линия γ называется *направляющей*. На рисунке 4.12б изображена коническая поверхность Ф с вершиной в начале прямоугольной системы координат $O\vec{i}\vec{j}\vec{k}$, направляющей которой служит эллипс γ:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad z = c, \quad (c \neq 0). \tag{1}$$

Найдем уравнение этой конической поверхности. Пусть точка M (x, y, z), отличная от точки O, принадлежит конусу Ф. Тогда прямая OM пересечет направляющую γ в некоторой точке $N(x_1, y_1, c)$. Так как $\overrightarrow{OM} \neq \vec{0}$ и векторы $\overrightarrow{ON}$ и $\overrightarrow{OM}$ коллинеарны, то найдется такое вещественное число t, что $\overrightarrow{ON} = t\overrightarrow{OM}$, или в координатах:

$$x_1 = tx,\ y_1 = ty,\ c = tz.$$



а *б*

Рис. 4.12

Отсюда, учитывая, что $z \neq 0$ (так как $c \neq 0$), находим: $x_1 = \dfrac{cx}{z}$, $y_1 = \dfrac{cy}{z}$. Подставив полученные выражения x_1, y_1 в первое из равенств (1), после очевидных преобразований найдем:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0. \qquad (2)$$

Заметим, что этому уравнению удовлетворяют и координаты точки О (0,0,0) — вершины конуса. Таким образом, координаты любой точки конуса Ф удовлетворяют уравнению (2).

Возьмем теперь какую-нибудь точку $M_1(x_1,y_1,z_1)$, не принадлежащую конусу Ф (см. рис.4.12б). Точка M_1 не совпадает с точкой О, поэтому если $z_1 = 0$, то $x_1 \neq 0$ иди $y_1 \neq 0$. Отсюда следует, что координаты точки M_1 не удовлетворяют уравнению (2). Рассмотрим случай, когда $z_1 \neq 0$. Прямая OM_1 пересечет плоскость $z = c$ в некоторой точке N_1 (x_2, y_2, c). Как и выше, мы находим:

$$x_2 = \frac{cx_1}{z_1},\ y_2 = \frac{cy_1}{z_1}. \qquad (3)$$

По условию $M_1 \notin \Phi$ и поэтому точка N_1 не лежит на эллипсе γ. Отсюда следует, что числа x_2, y_2, c не удовлетворяют системе (1), т. е. $\frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} \neq 1$. Подставляя сюда вместо x_2, y_2 их выражения по формулам (3), получим:

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} - \frac{z_1^2}{c^2} \neq 0 .$$

Итак, если точка M_1 не принадлежит конусу Φ, то ее координаты не удовлетворяют уравнению (2).

Мы доказали, что уравнение (2) и есть уравнение конуса Φ. Это уравнение есть уравнение второй степени, поэтому конус Φ называется конусом второго порядка. Уравнение (2) называется *каноническим уравнением конической поверхности второго порядка*.

2. В случае, когда направляющая (1) конической поверхности второго порядка является окружностью, т. е. когда $a = b$. уравнение (2) принимает вид:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 . \qquad (4)$$

Поверхность, определяемая этим уравнением в прямоугольной системе координат, называется *круговой конической поверхностью* или *круговым конусом* (рис. 4.13). Как легко заметить, эта поверхность образована при вращении вокруг оси Oz прямой, лежащей в плоскости Oxz и заданной в системе координат $O\vec{i}\vec{k}$ уравнением $x = \frac{a}{c}z$. Все образующие круговой конической поверхности составляют один и тот же угол α_0 с плоскостью Oxy, где $\operatorname{tg}\alpha_0 = \frac{c}{a}$ (рис. 4.13).

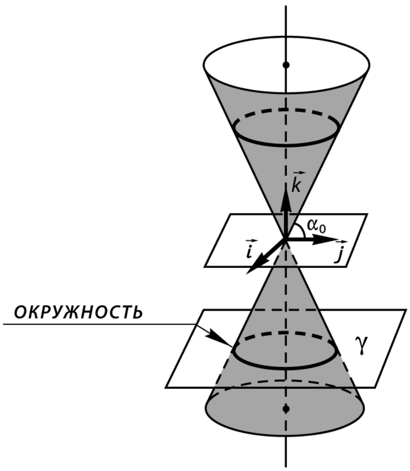
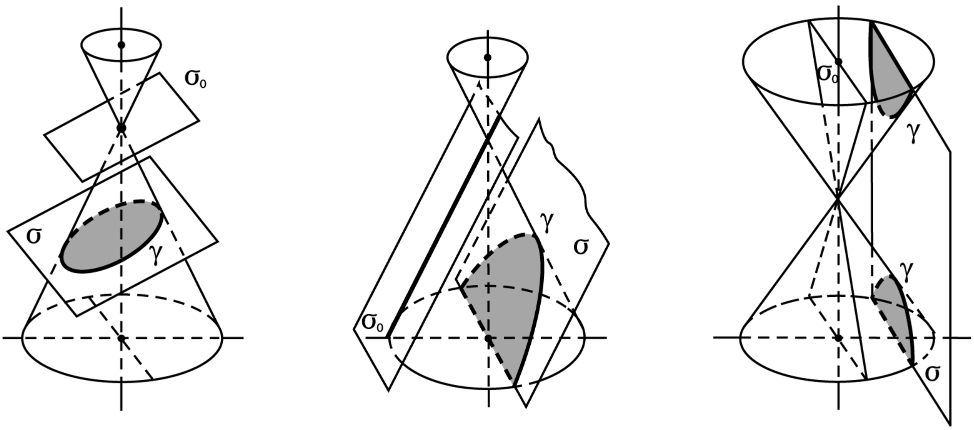


Рис. 4.13

3. Рассмотрим сечения круговой конической поверхности (4) различными плоскостями. Возможны три случая.

а) Плоскость сечения параллельна координатной плоскости Oxy или совпадает с ней. В этом случае она имеет уравнение z = h, поэтому по теореме о сечениях проекция сечения на плоскость Oxy определяется уравнением $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}=\frac{h^2}{c^2}$ или $x^2+y^2=r^2$, где $r=\frac{a|h|}{c}$. Если $h\neq 0$, то этим уравнением определяется окружность радиуса r с центром в начале координат, а если h = 0 – начало координат (рис. 4.13). Таким образом, любая плоскость, параллельная плоскости Oxy, пересекает круговой конус (4) по окружности.

б) Плоскость сечения σ_0 проходит через вершину конуса и образует с плоскостью Oxy угол α, где $0<\alpha\leq\frac{\pi}{2}$. Из наглядно геометрических соображений ясно, что возможны три случая: а) если $\alpha<\alpha_0$, то плоскость σ_0, кроме вершины, не имеет других общих точек с круговым конусом (плоскость σ_0 на рис. 4.14а); б) если $\alpha=\alpha_0$, то плоскость σ_0 и круговой конус имеют одну и только одну общую образующую. В этом случае говорят, что плоскость σ_0 касается конуса по образующей (плоскость σ_0 на рис. 4.14б); если $\alpha>\alpha_0$, то плоскость σ_0 и круговой конус имеют две общие образующие (плоскость σ_0 на рис. 4.14в).



а *б* *в*

Рис. 4.14

Итак, плоскость σ_0, проходящая через вершину конуса, либо не имеет ни одной общей точки с круговым конусом, кроме вершины, либо касается конуса, либо пересекает конус по двум образующим.

в) Плоскость сечения σ не проходит через вершину конуса и образует с плоскостью Oxy угол α, где $0 < \alpha \le \frac{\pi}{2}$. Можно доказать, что в этом случае кривая γ пересечения плоскости σ с круговым конусом есть эллипс, парабола или гипербола (рис. 4.14, а, б и в).

Коническим сечением называется линия, по которой пересекается круговой конус с произвольной плоскостью, не проходящей через вершину. Таким образом, коническими сечениями являются эллипс, гипербола и парабола.

§ 5. Эллипсоид

Эллипсоидом называется поверхность, которая в некоторой прямоугольной системе координат определяется уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \qquad (1)$$

Это уравнение называется *каноническим уравнением* эллипсоида. Положительные числа a, b, c называются *полуосями эллипсоида.*

Если $a \neq b$, $b \neq c$, $c \neq a$, то эллипсоид называется *трехосным.* Так как в уравнении (1) x, y, z входят только в четных степенях, то эллипсоид, заданный уравнением (1), симметричен относительно координатных плоскостей, начала координат и осей координат. Центр симметрии эллипсоида называется его *центром,* а оси симметрии — его *осями.* Каждая из осей пересекает эллипсоид в двух точках, которые называются его *вершинами.* У трехосного эллипсоида шесть вершин: $A_1(a.0,0)$, $A_2(-a,0,0)$, $B_1(0,b,0)$, $B_2(0,-b,0)$,$C_1(0,0,c)$, $C_2(0,0,-c)$.

Найдем промежутки изменения координат точек эллипсоида. Из уравнения (1) следует, что $\frac{x^2}{a^2} \le 1$, $\frac{y^2}{b^2} \le 1$ и $\frac{z^2}{c^2} \le 1$. Поэтому $-a \le x \le a$, $-b \le y \le b$, $-c \le z \le c$.

Отсюда следует, что все точки эллипсоида (за исключением его вершин) лежат внутри прямоугольного параллелепипеда с измерениями $2a$, $2b$, $2c$, грани которого параллельны координатным плоскостям и вершины эллипсоида служат центрами симметрии этих граней (рис. 4.15).

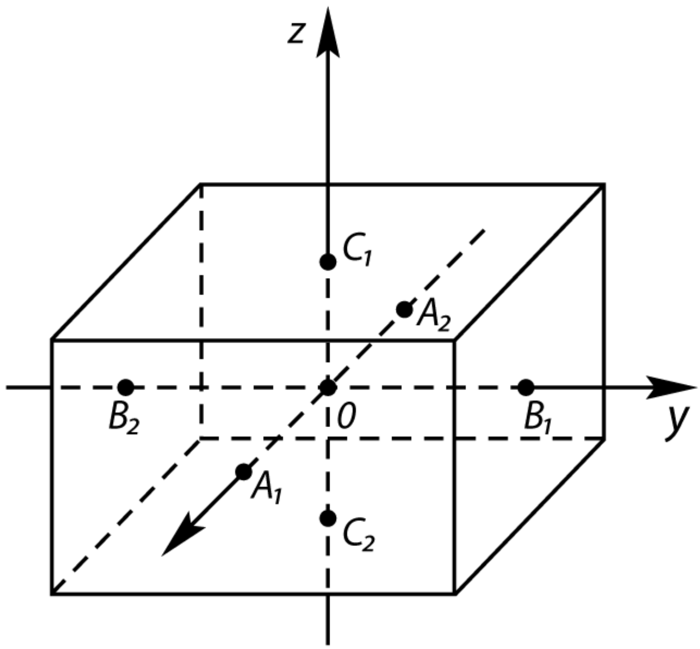


Рис. 4.15

2. Изучим форму эллипсоида методом сечений (теорема 1 из § 1). Если эллипсоид, заданный уравнением (1) в прямоугольной системе координат $O\vec{i}\vec{j}\vec{k}$, пересечь плоскостью $z = h$ то проекция сечения на плоскость Oxy в системе координат $O\vec{i}\vec{j}$ имеет уравнение

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{h^2}{c^2}. \qquad (2)$$

Возможны следующие три случая.

1) $|h| < c$. В этом случае в сечении мы получим эллипс, центр которого лежит на оси Oz (плоскость σ_1 на рис. 4.16). В самом деле, проекция сечения на плоскость Oxy имеет уравнение

$$\frac{x^2}{a^2\left(1-\frac{h^2}{c^2}\right)}+\frac{y^2}{b^2\left(1-\frac{h^2}{c^2}\right)}=1.$$

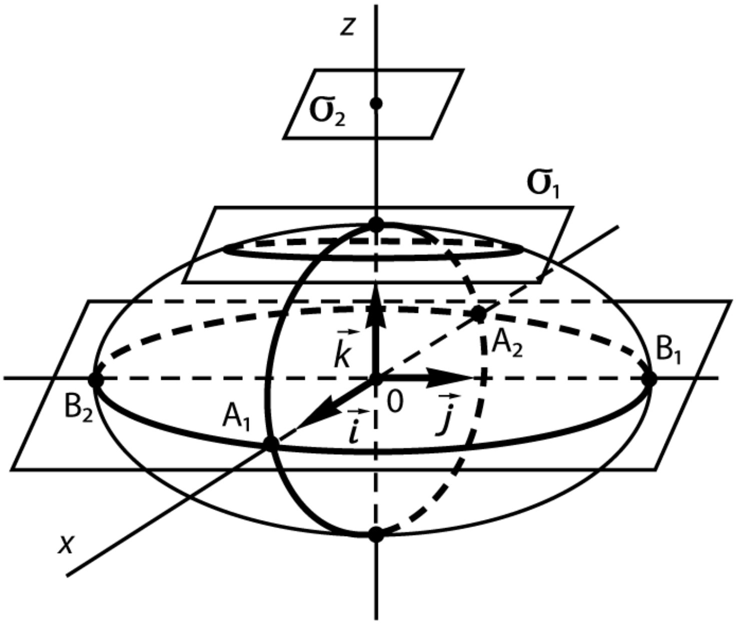


Рис. 4.16

Это уравнение определяет эллипс с полуосями $a^*=a\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}$, $b^*=b\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}$. При уменьшении |h| полуоси a*, b* возрастают и при |h| = 0 имеем: a* = a, b* = b. Следовательно, плоскость Oxy пересекает эллипсоид (1) по эллипсу $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

2) |h| = c. Уравнение (2) принимает вид: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$. Кривая на плоскости Oxy представляет собой две мнимые прямые, пересекающиеся в вещественной точке (0,0). Плоскость z = h имеет с эллипсоидом лишь одну общую точку — вершину эллипсоида (плоскости σ_2 и σ_3 на рис. 4.16).

3) $|h| > c$. Уравнение (2) есть уравнение мнимого эллипса. Плоскость $z = h$ не имеет с эллипсоидом общих точек (плоскость σ_4 на рис. 4.16).

Аналогично можно показать, что сечение эллипсоида (1) плоскостью $x = h$ или $y = h$ является эллипсом, вершиной эллипсоида или пустым множеством.

Мы получили достаточно полное представление о форме эллипсоида. Поверхность изображена на рисунке 4.16.

3. Если две полуоси эллипсоида равны, например $a = b$, то он называется эллипсоидом вращения и имеет каноническое уравнение:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{3}$$

Пользуясь результатами § 75, заключаем, что поверхность, определяемая уравнением (3), действительно образована вращением эллипса:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

лежащего в плоскости Oxz (или вращением одной из его половин, симметричных относительно Oz) вокруг оси Oz.

Если все три оси эллипсоида равны: $a = b = c$, то он представляет собой сферу: $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$. Следовательно, сфера есть частный случай эллипсоида.

Докажем, что *любой трехосный эллипсоид можно получить из некоторого эллипсоида вращения с помощью сжатия к плоскости, проходящей через ось вращения*. В самом деле, пусть данный трехосный эллипсоид F в прямоугольной системе координат $Oijk$ имеет уравнение (1). Рассмотрим эллипсоид вращения G, который в этой же системе координат задан уравнением (3), и применим к поверхности G сжатие пространства к плоскости Oxz с коэффициентом сжатия $k=\frac{b}{a}$.

Аналитическое выражение этого сжатия запишется так:

$$x'=x,\ \ y'=\frac{b}{a}y,\ \ z'=z\,. \tag{4}$$

При этом сжатии эллипсоид вращения G, заданный уравнением (3), перейдет в новую поверхность G', которая в системе координат $O\vec{i}\,\vec{j}\,\vec{k}$ определяется уравнением

$$\frac{x^{12}}{a^2}+\frac{y^{12}}{b^2}+\frac{z^{12}}{c^2}=1. \tag{5}$$

Это уравнение получается из уравнения (3), если в нем заменить x, y, z их выражениями по формулам (4). Сравнивая уравнения (5) и (1), мы заключаем, что G' совпадает с эллипсоидом F.

Теперь докажем, что любой эллипсоид вращения в свою очередь получается из некоторой сферы с помощью сжатия к плоскости, проходящей через центр сферы. В самом деле, пусть данный эллипсоид вращения G в прямоугольной системе координат $O\vec{i}\,\vec{j}\,\vec{k}$ имеет уравнение (3). Рассмотрим сферу S, которая в той же системе координат задана уравнением $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$. Применим к этой сфере сжатие пространства к плоскости Oxy с коэффициентом $k=\frac{c}{a}$: $x'=x$, $y'=y$, $z'=\frac{c}{a}z$. Проведя рассуждения, аналогичные проделанным выше, получим, что сфера S переходит в поверхность S', которая в системе координат $O\vec{i}\,\vec{j}\,\vec{k}$ определяется уравнением (3). Таким образом, поверхность S' совпадает с эллипсоидом вращения G.

Учитывая вышесказанное, мы приходим к выводу, что любой трехосный эллипсоид (1) можно получить из некоторой сферы с помощью последовательного сжатия к двум взаимно перпендикулярным плоскостям симметрии этой сферы.

§ 6. Гиперболоиды

Различают однополостные и двуполостные гиперболоиды.

1. *Однополостным гиперболоидом* называется поверхность, которая в некоторой прямоугольной системе координат определяется уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1. \tag{1}$$

Это уравнение называется *каноническим уравнением* однополостного гиперболоида.

Так как в уравнении (1) x, y и z входят в четных степенях, то поверхность симметрична относительно плоскостей координат, осей координат (оси поверхности) и начала координат (центр поверхности). Две оси Ox и Oy пересекают поверхность в точках A_1 (a,0,0), A_2 (–a,0,0) и B_1(0,b,0), B_2(0,–b,0). Эти оси называются *действительными осями* однополостного гиперболоида, а указанные точки — его вершинами. Третья ось симметрии (ось Oz) не имеет общих точек с однополостным гиперболоидом и называется его *мнимой осью*. Положительные числа a, b, c называются *полуосями однополостного гиперболоида*.

2. Исследуем вопрос о пересечении однополостного гиперболоида с прямыми, проходящими через его центр. Всякая такая прямая может быть определена точкой O (0,0,0) некоторым направляющим вектором $\vec{p}\,(p_1, p_2, p_3)$ и, значит, имеет параметрические уравнения:

$$x = p_1t,\ y = p_2t,\ z = p_3t. \qquad (2)$$

Найдем значения параметра t для точек пересечения этой прямой с однополостным гиперболоидом (1). Для этого надо выражения для x, y, z по формулам (2) подставить в уравнение (1). Получим уравнение

$$Pt^2 - 1 = 0. \qquad (3)$$

где

$$P = \frac{p_1^2}{a^2} + \frac{p_2^2}{b^2} - \frac{p_3^2}{c^2}.$$

Возможны три случая.

1) P > 0. В этом случае уравнение (3) имеет два действительных корня: $t_1 = \frac{1}{\sqrt{P}}$, $t_2 = -\frac{1}{\sqrt{P}}$, и, значит, прямая пересекает однополостный гиперболоид в двух точках, которые симметричны относительно центра поверхности.

2) P = 0. Уравнение (3) не имеет решений, поэтому прямая (2) не пересекает поверхности. Такая прямая называется *асимптотой* поверхности (1) (она проходит через центр поверхности и не имеет с ней общих точек).

3) $P < 0$. Уравнение (3) имеет мнимые комплексно-сопряженные корни, поэтому прямая (2) не пересекает поверхность (1) (говорят, что прямая (2) пересекает поверхность (1) в комплексно-сопряженных точках).

Возникает вопрос: как расположены все асимптоты поверхности (1)? Каждая асимптота проходит через центр поверхности, а ее направляющий вектор $\vec{p}(p_1, p_2, p_3)$ удовлетворяет условию:

$$\frac{p_1^2}{a^2} + \frac{p_2^2}{b^2} - \frac{p_3^2}{c^2} = 0.$$

Точка M (x, y, z) принадлежит асимптоте тогда и только тогда, когда вектор $\overrightarrow{OM}(x,\ y,\ z)$ коллинеарен направляющему вектору $\vec{p}(p_1,p_2,p_3)$ асимптоты, т. е. когда существует такое t, что $x = tp_1$, $y = tp_2$, $z = tp_3$. Найдем отсюда значения p_1 и p_2, p_3 и подставим в предыдущее равенство

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0. \qquad (4)$$

Как известно (см. § 4), это уравнение определяет коническую поверхность, которая называется *асимптотическим конусом однополостного гиперболоида* (1). Вершиной этого конуса служит центр поверхности (1).

Можно доказать, что если прямая OM, где O — вершина асимптотического конуса, проходит внутри этого конуса, то для этой прямой $P < 0$, поэтому согласно предыдущему выводу она не имеет с поверхностью (1) общих точек. Если же прямая ON проходит вне конуса, то $P > 0$, поэтому она пересекает поверхность (1) в двух и только в двух точках, симметричных относительно точки O.

3. Пусть однополостный гиперболоид в прямоугольной системе координат $O\vec{i}\vec{j}\vec{k}$ определяется уравнением (1). Изучим форму поверхности методом сечений. Если поверхность пересечь плоскостью $z = h$, то проекция сечения на плоскость Oxy в системе координат $O\vec{i}\vec{j}$ имеет уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{h^2}{c^2}. \qquad (5)$$

Это уравнение определяет эллипс с полуосями $a^* = \frac{a}{c}\sqrt{c^2 + h^2}$, $b^* = \frac{b}{c}\sqrt{c^2 + h^2}$. При h = 0 получим эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (сечение поверхности (1) плоскостью Oxy), который называется *горловым* эллипсом однополостного гиперболоида.

При неограниченном возрастании |h| полуоси a*, b* эллипса (5) неограниченно возрастают, а следовательно, неограниченно возрастают и полуоси эллипса, полученного в сечении поверхности (1) плоскостью z = h. Уравнения этого эллипса (равного эллипсу(5)), имеют вид:

$$\frac{x^2}{(a^*)^2} + \frac{y^2}{(b^*)^2} = 1, \ z = h.$$

Если поверхность (1) пересечь плоскостью x = h, то проекция этого сечения на плоскость Oyz в системе координат $O\vec{j}\vec{k}$ имеет уравнение

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{h^2}{a^2}. \qquad (6)$$

Здесь рассмотрим три случая.

1) h < a. В этом случае $1 - \frac{h^2}{a^2} > 0$, уравнение (6) определяет гиперболу с мнимой осью Oz. В сечении получим равную ей гиперболу с мнимой осью, параллельной оси Oz,

2) |h| = a. Уравнение (6) принимает вид:

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

Это уравнение определяет пару прямых, пересекающихся в начале координат. Поэтому каждая из плоскостей x = a, x = – a пересекает поверхность (1) по паре прямых, пересекающихся на оси Ox.

3) |h|>a. В этом случае $1 - \frac{h^2}{a^2} < 0$, уравнение (6) определяет гиперболу с мнимой осью Oy. В сечении имеем равную ей гиперболу с мнимой осью, параллельной оси Oy.

Аналогичный результат мы получим и при пересечении поверхности (1) плоскостью y = h.

Однополостный гиперболоид изображен на рисунке 4.17.

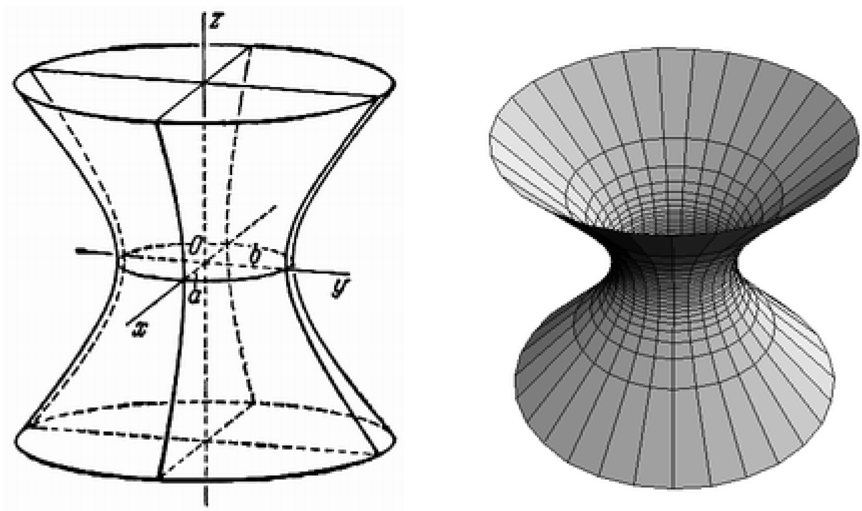


Рис. 4.17

4. Если уравнение (1) a = b, то получим уравнение поверхности в виде

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1, \tag{7}$$

которая называется *однополостным гиперболоидом вращения*. Как легко видеть, эта поверхность образована вращением гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{8}$$

вокруг оси Oz (вокруг мнимой оси гиперболы). Асимптотический конус поверхности (7) определяется уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=0.$$

Это есть конус вращения, образованный вращением асимптот гиперболы (8) (т. е. прямой $x=\frac{a}{c}z$ или $x=-\frac{a}{c}z$ вокруг оси Oz).

Докажем, что *любой однополостный гиперболоид можно получить из некоторого однополостного гиперболоида вращения с помощью сжатия к плоскости, проходящей через ось вращения*.

В самом деле, пусть данный однополостный гиперболоид F в прямоугольной системе координат $O\vec{i}\vec{j}\vec{k}$ имеет уравнение (1). Рассмотрим однополостный гиперболоид вращения G, который в той же системе координат задан уравнением (7), и применим к поверхности G сжатие пространства к плоскости Oxz с коэффициентом сжатия

$$k = \frac{b}{a}: \quad x' = x,\ y' = \frac{b}{a}y,\ z' = z.$$

При этом сжатии, как нетрудно убедиться, поверхность G переходит в поверхность G', которая в системе координат $O\vec{i}\vec{j}\vec{k}$ определяется уравнением (1). Таким образом, поверхность G' совпадает с данным однополостным гиперболоидом F.

5) *Двуполостным гиперболоидом* называется поверхность, которая в некоторой прямоугольной системе координат определяется уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1. \qquad (9)$$

Это уравнение называется *каноническим уравнением двуполостного гиперболоида*.

Из уравнения (9) следует, что поверхность симметрична относительно плоскостей координат, осей координат (оси поверхности) и начала координат (центр поверхности). Ось Oz пересекает поверхность в двух точках $C_1(0,0,c)$ и $C_2(0,0,-c)$, называемых *вершинами двуполостного гиперболоида*; сама эта прямая называется вещественной осью. Оси симметрии Ox и Oy не имеют с поверхностью (9) общих точек и называются *мнимыми осями* этой поверхности. Положительные числа a, b, c называются *полуосями* двуполостного гиперболоида.

Исследование вопроса о пересечении поверхности (9) с прямыми, проходящими через ее центр, в точности совпадает с исследованием этого вопроса, проведенным выше для однополостного гиперболоида. Здесь получим, что множество асимптот поверхности (9) образует конус (4) с вершиной в центре поверхности — *асимптотический конус* этой поверхности.

Если поверхность, заданную в прямоугольной системе координат $O\vec{i}\vec{j}\vec{k}$ уравнением (9), пересечь плоскостью z = h, то проекция сечения на плоскость Oxy в системе координат $O\vec{i}\vec{j}$ имеет уравнение

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{h^2}{c^2}-1. \tag{10}$$

При |h| > c это уравнение определяет эллипс, поэтому сечения двуполостного гиперболоида плоскостями z = h, где |h| > c, представляют собой эллипсы. При h = c или h = – c уравнение (10) определяет пару мнимых прямых, пересекающихся в действительной точке, поэтому каждая из плоскостей: z = c и z = – c имеет только одну общую точку с поверхностью — вершину поверхности. При |h| <c уравнение (10) определяет мнимый эллипс, поэтому плоскости z = h, где |h| < c, не имеют общих точек с двуполостным гиперболоидом.

Предлагаем читателю самостоятельно убедиться в том, что сечения поверхности (9) плоскостями x = h или y = h — гиперболы.

Двуполостный гиперболоид изображен на рисунке 4.18.

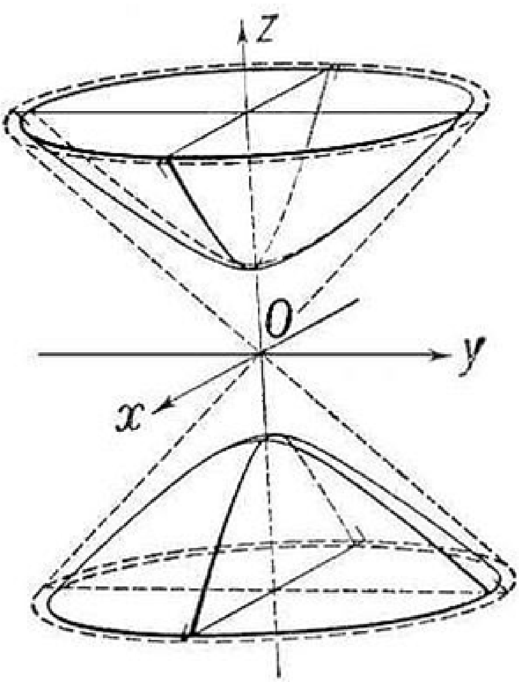


Рис. 4.18

6) Если в уравнении (9) a = b, то получим уравнение поверхности:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1, \tag{11}$$

которая называется двуполостным гиперболоидом вращения. Заметим, что эта поверхность образована вращением гиперболы $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$ вокруг оси Oz (вокруг действительной оси этой гиперболы).

Аналогично предыдущему (см. п. 4) можно убедиться в том, что при сжатии пространства к плоскости Oxz с коэффициентом сжатия $k=\frac{b}{a}$ поверхность (11) переходит в поверхность (9).

Следовательно, *любой двуполостный гиперболоид можно получить из некоторого двуполостного гиперболоида вращения с помощью сжатия к плоскости, проходящей через ось вращения*.

§ 7. Параболоиды

Различают эллиптические и гиперболические параболоиды.

1. *Эллиптическим параболоидом* называется поверхность, которая в некоторой прямоугольной системе координат определяется уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}=2z. \tag{1}$$

Это уравнение называется *каноническим уравнением* эллиптического параболоида.

Так как x и y входят в уравнение (1) в четных степенях, то эллиптический параболоид симметричен относительно плоскостей Oxz, Oyz и относительно оси Oz (ось поверхности). Эта поверхность не симметрична относительно плоскости Oxy, относительно осей Ox, Oy и начала координат.

Точка пересечения эллиптического параболоида с его осью называется *вершиной*. Если поверхность задана каноническим уравнением (1), то начало координат выбрано в вершине поверхности.

Из уравнения (1) заключаем, что для всех точек эллиптического параболоида выполняется соотношение $z \geq 0$, причем $z = 0$ выполняется только для вершины. Следовательно, все точки эллиптического параболоида (1), кроме его вершины, расположены по одну сторону от плоскости Oxy.

2. Изучим форму эллиптического параболоида методом сечений. Если поверхность, заданную в прямоугольной системе координат $O\vec{i}\vec{j}\vec{k}$ уравнением (1), пересечь плоскостью $z = h$, то проекция сечения на плоскость Oxy в системе координат $O\vec{i}\vec{j}$ имеет уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2h. \tag{2}$$

Здесь возможны три случая.

1) $h > 0$. Линия (2) (а значит, и равная ей линия, полученная в сечении) является эллипсом с полуосями $a^* = a\sqrt{2h}$, $b^* = b\sqrt{2h}$. Эти полуоси неограниченно возрастают при неограниченном возрастании h.

2) $h = 0$. Линия (2) — пара мнимых прямых, пересекающихся в начале координат. Значит, плоскость $z = 0$ имеет с поверхностью лишь одну общую действительную точку.

3) $h < 0$. Уравнение (2) определяет мнимый эллипс. Значит, плоскость $z = h < 0$ не пересекает поверхность.

Если данную поверхность пересечь плоскостью $y = h$, то в сечении получим параболу, проекция которой на плоскость Oxz имеет уравнение $x^2 = 2a^2z - \frac{a^2}{b^2}h^2$. Следовательно, все эти параболы при изменении h равны между собой и равны параболе $x^2 = 2a^2z$, полученной в сечении, поверхности (1) координатной плоскостью Oxz.

Аналогично убеждаемся, что в сечении поверхности (1) плоскостью $x = h$ получим параболу. Все такие параболы равны параболе $y^2 = 2b^2z$, которая получается в сечении поверхности плоскостью Oyz.

3. Если в уравнении (1) $a = b$, то получим уравнение поверхности в виде:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 2z, \tag{3}$$

которая называется параболоидом вращения. Нетрудно заметить, что эта поверхность получена вращением параболы $x^2 = 2a^2z$ вокруг ее оси (оси Oz).

Пусть дан параболоид вращения своим каноническим уравнением (3). При сжатии пространства к плоскости Oxz с коэффициентом сжатия $k = \frac{b}{a}$ поверхность (3) переходит в поверхность (1). Следовательно, *любой эллиптический параболоид можно получить из параболоида вращения с помощью сжатия к плоскости, проходящей через ось вращения*.

Эллиптический параболоид изображен на рисунке 4.19.

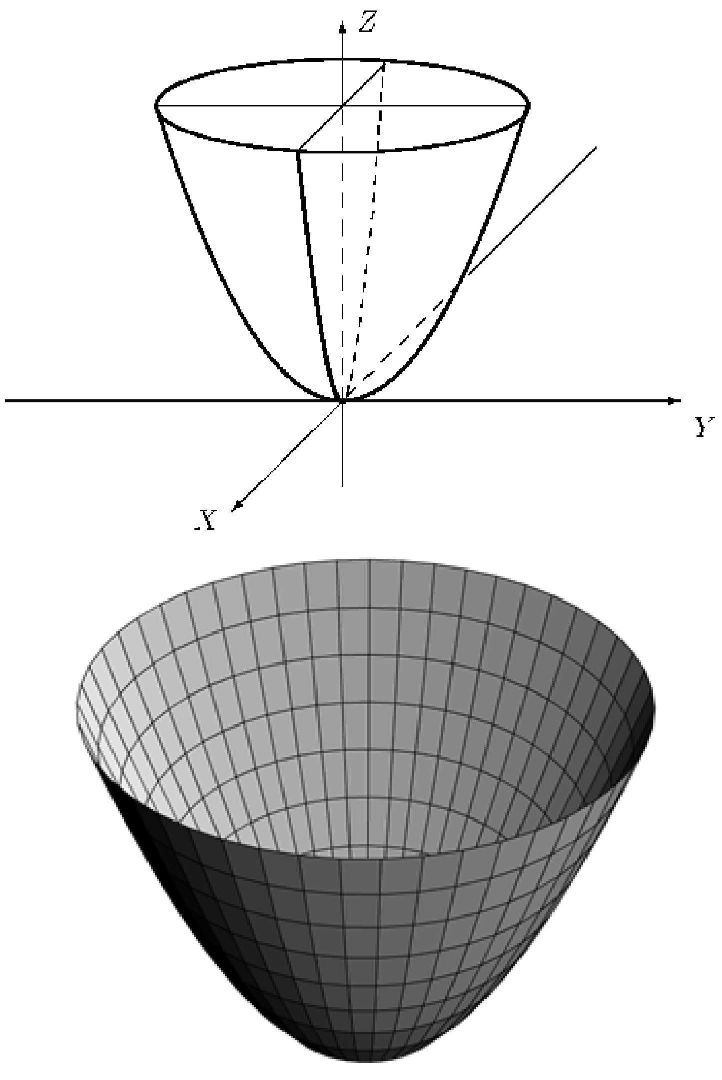


Рис. 4.19

4. *Гиперболическим параболоидом* называется поверхность, которая в некоторой прямоугольной системе координат определяется уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z\,. \tag{4}$$

Это уравнение называется *каноническим уравнением* гиперболического параболоида.

Как и в случае эллиптического параболоида, гиперболический параболоид (4) симметричен относительно плоскостей Oxz, Oyz и относительно оси Oz (*ось поверхности*). Эта поверхность не симметрична относительно плоскости Oxy, осей Ox, Oy и начала координат.

Точка пересечения гиперболического параболоида с его осью называется вершиной. Если поверхность задана каноническим уравнением (4), то начало координат выбрано в вершине этой поверхности.

5. Изучим форму гиперболического параболоида методом сечений. Если поверхность, заданную в прямоугольной системе координат $O\vec{i}\,\vec{j}\,\vec{k}$ уравнением (4), пересечь плоскостью z = h, то проекция сечения на плоскость Oxy в системе координат $O\vec{i}\,\vec{j}$ имеет уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2h\,. \tag{5}$$

Возможны три случая.

1) h > 0. Линия (5) является гиперболой с вещественной осью Ox. Следовательно, и равная ей линия пересечения поверхности (4) с плоскостью z = h, h > 0, является гиперболой, вещественная ось которой параллельна оси Ox.

2) h = 0. Плоскость z = 0 (плоскость Oxy) пересекает поверхность (4) по паре прямых:

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0,\ \ \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0\,,$$

пересекающихся в вершине поверхности.

3) h < 0. Как и в случае 1), находим, что сечением поверхности (4) плоскостью z = h является гипербола, но здесь действительная ось гиперболы параллельна оси Oy.

Если поверхность (4) пересечь плоскостью y = h, то в сечении получим параболу $x^2 = 2a^2z + \dfrac{a^2}{b^2h^2}$. Следовательно, все эти параболы при изменении h равны между собой и равны параболе $x^2 = 2a^2z$, полученной в сечении поверхности (4) координатной плоскостью Oxz. Оси этих парабол имеют положительное направление, определяемое вектором $\vec{k}$.

Аналогично убеждаемся, что в сечении поверхности (4) плоскостью x = h получаем параболу. Все такие параболы при изменении h равны параболе $y^2 = -2b^2z$, которая получается в сечении поверхности плоскостью Oyz. Оси этих парабол имеют положительное направление, определяемое вектором $-\vec{k}$.

Гиперболический параболоид изображен на рисунке 4.20.

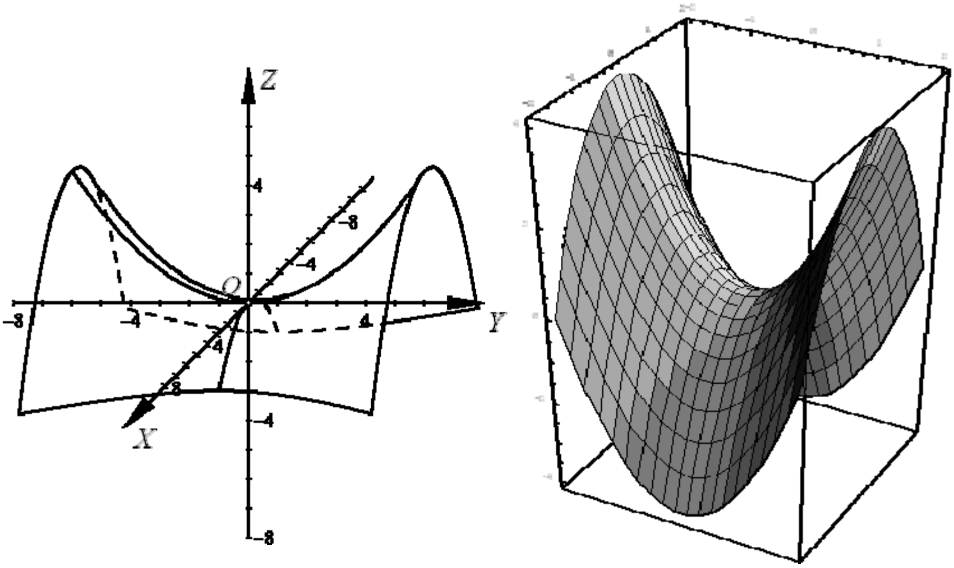


Рис. 4.20

§ 8. Прямолинейные образующие поверхностей второго порядка

1. Прямая, лежащая на поверхности, называется *прямолинейной образующей* этой поверхности. Следовательно, образующие цилиндрической и конической поверхностей являются их прямолинейными образующими.

Рассмотрим вопрос о прямолинейных образующих поверхностей, изученных в § 5—7.

Так как все точки эллипсоида не выходят за границы некоторого параллелепипеда, а на каждой прямой есть точки, не принадлежащие этому параллелепипеду, то *эллипсоид не имеет прямолинейных образующих*.

Рассмотрим теперь двуполостный гиперболоид, заданный уравнением (9) из § 6. В п. 5 § 6 мы выяснили, что сечение поверхности плоскостью $z = h$ при любом h не содержит прямых линий. Поэтому гиперболический параболоид не имеет прямолинейных образующих, параллельных плоскости Oxy или лежащих в этой плоскости. Если прямая не параллельна плоскости Oxy и не лежит в ней, то такая прямая пересекает эту плоскость в некоторой точке, которая не лежит на поверхности, так как плоскость Oxy не имеет общих точек с поверхностью. Следовательно, на нашей прямой есть точки, не принадлежащие поверхности, и поэтому такая прямая не может быть прямолинейной образующей двуполостного гиперболоида. Итак, *двуполостный гиперболоид не имеет прямолинейных образующих*. Аналогично можно убедиться в том, что *эллиптический параболоид также не имеет прямолинейных образующих*.

Остается рассмотреть вопрос о прямолинейных образующих однополостного гиперболоида и гиперболического параболоида.

2. Уравнение однополостного гиперболоида.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{1}$$

представим в виде

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a} - \frac{x}{c}\right) = \left(1 + \frac{y}{b}\right)\left(1 - \frac{y}{b}\right). \tag{2}$$

Рассмотрим две системы уравнений:

$$\begin{cases} k_1\left(\dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{c}\right) = l_1\left(1 + \dfrac{y}{b}\right), \\ l_1\left(\dfrac{x}{a} - \dfrac{z}{c}\right) = k_1\left(1 - \dfrac{y}{b}\right); \end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{cases} k_2\left(\dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}\right)=l_2\left(1+\dfrac{y}{b}\right), \\ l_2\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}\right)=k_1\left(1-\dfrac{y}{b}\right); \end{cases} \tag{4}$$

где k_1, l_1 — какие-либо действительные числа, из которых хотя бы одно отлично от нуля; этому же условию удовлетворяют и числа k_2, l_2.

Нетрудно подсчитать, что в каждой из систем уравнений (3), (4) ранг матрицы, составленной из коэффициентов при x, y, z, равен двум. Значит, каждая из этих систем определяет прямую линию.

Если обе части каждого из уравнений системы (3) умножить на какое-либо число, отличное от нуля, то мы получим новую систему, которая, очевидно определяет ту же прямую. Значит, чтобы написать уравнение прямой, определяемой системой (3), надо знать лишь отношение $k_1 : l_1$. Это можно сказать и о прямой (4), которая определяется отношением $k_2 : l_2$.

Если координаты точки M_0 (x_0, y_0, z_0) удовлетворяют системе уравнений (3) или (4), то они удовлетворяют и уравнению (2). Отсюда следует, что каждая прямая, определяемая системой уравнений (3), как и каждая прямая, определяемая системой уравнений (4), лежит на данной поверхности (1), т. е. является ее прямолинейной образующей.

Прямые, определяемые системой (3) при всевозможных значениях k_1, l_1 не равных нулю одновременно, образуют *одно семейство прямолинейных образующих* однополостного гиперболоида (1), а прямые, определяемые системой (4), при аналогичном условии для k_2, l_2 образуют *другое семейство прямолинейных образующих* этой поверхности.

Отметим основные свойства прямолинейных образующих однополостного гиперболоида (без доказательства).

1) Через каждую точку однополостного гиперболоида проходят две и только две прямолинейные образующие. Одна из них принадлежит семейству (3), а другая — семейству (4).

2) Любые две прямолинейные образующие одного семейства скрещиваются.

3) Любые две прямолинейные образующие из разных семейств лежат в одной плоскости.

Однополостный гиперболоид с двумя семействами прямолинейных образующих изображен на рисунке 4.21.

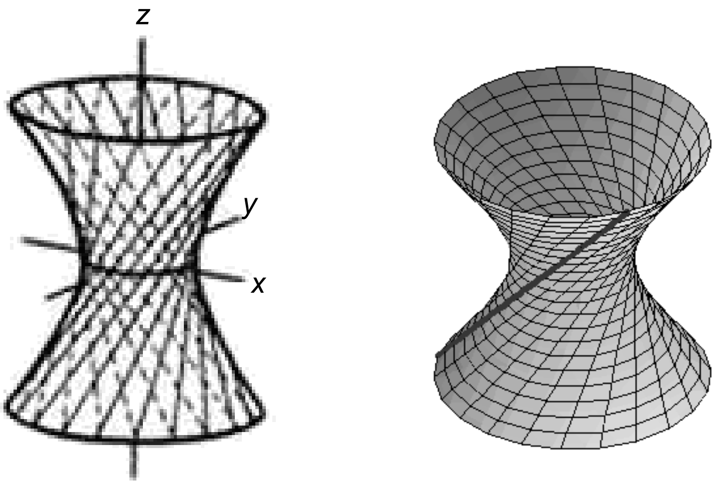


Рис. 4.21

***Пример*. Найти прямолинейные образующие однополостного гиперболоида**

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{16}=1, \qquad (5)$$

проходящие через его точку $M_0(6;2;8)$.

Р е ш е н и е. Запишем уравнения (3) для однополостного гиперболоида, заданного уравнением (5):

$$\begin{aligned} k_1\left(\frac{x}{3}+\frac{z}{4}\right) &= l_1\left(1+\frac{y}{2}\right), \\ l_1\left(\frac{x}{3}-\frac{z}{4}\right) &= k_1\left(1-\frac{y}{2}\right). \end{aligned} \qquad (6)$$

Подставив сюда значения x = 6, y = 2, z = 8, получим: $2k_1 = l_1$. Этому равенству удовлетворяют, например, числа $k_1 = 1$, $l_1 = 2$. Подставив эти значения в систему (6), приведем эту систему к виду:

$$\begin{cases} 4x-12y+3z-24=0, \\ 4x+3y-3z-6=0. \end{cases}$$

Эти уравнения определяют прямолинейную образующую одного семейства, проходящую через данную точку M_0 поверхности (5).

Проделав то же самое с системой уравнений (4), найдем уравнения

$$\begin{cases} 4x - 3z = 0, \\ y - 2 = 0. \end{cases}$$

прямолинейной образующей другого семейства, проходящей через точку M_0 поверхности (5).

3. Известный инженер Владимир Григорьевич Шухов (1853—1939) предложил устройство башен, мачт и опор, составленных из балок, расположенных по прямолинейным образующим однополостного гиперболоида вращения. Эти конструкции В. Г. Шухова оказались очень прочными и легкими. Они часто используются при строительстве водонапорных башен, высотных радиомачт, телевизионных мачт и т. д.

4. Уравнение гиперболического параболоида

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z \tag{7}$$

представим в виде $\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) = 2z$.

Рассмотрим две системы уравнений:

$$\begin{cases} k_1\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = l_1 z, \\ l_1\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) = 2k_1; \end{cases} \tag{8}$$

$$\begin{cases} k_2\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) = l_2 z, \\ l_2\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = 2k_2, \end{cases} \tag{9}$$

где k_1, l_1 — действительные числа, из которых хотя бы одно отлично от нуля; этому же условию удовлетворяют и числа k_2, l_2.

Точно так же, как и в п. 2, можно показать, что при всевозможных значениях параметров k_1, l_1 не равных нулю одновременно, и параметров k_2, l_2, также не равных нулю одновременно, уравнения (8) определяют одно семейство прямолинейных образующих поверхности (7), а уравнения (9) — другое семейство.

Прямолинейные образующие гиперболического параболоида обладают теми же свойствами 1), 2), 3), что и образующие однополостного гиперболоида (см. п. 2), и еще одним свойством: все прямолинейные образующие семейства (8) параллельны плоскости $\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0$, а все прямолинейные образующие семейства (9) параллельны плоскости $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0$. Это свойство предоставляем доказать читателю самостоятельно.

Гиперболический параболоид с двумя семействами прямолинейных образующих изображен на рисунке 4.22.

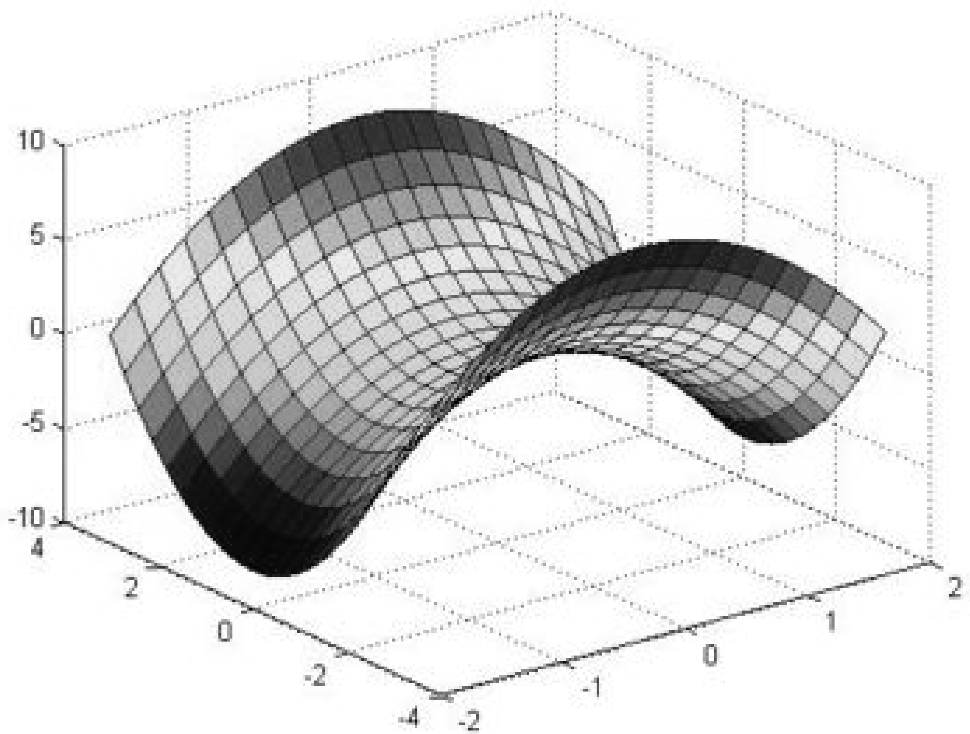


Рис. 4.22

§ 9. Приложение к решению задач школьного курса геометрии

В школьном курсе геометрии из поверхностей второго порядка изучаются сфера, прямой круговой цилиндр и прямой круговой конус. Рассмотрим примеры задач, в которых встречаются эти поверхности.

1. Рассмотрим сначала примеры задач, в которых встречается сфера.

З а д а ч а 1. Даны сфера с центром в точке O и радиусом r и точка A. Через точку A проведена прямая d, которая пересекает данную сферу в точках M_1 и M_2. Доказать, что скалярное произведение $\overrightarrow{AM_1} \cdot \overrightarrow{AM_2}$ не зависит от выбора секущей d.

Р е ш е н и е. Выберем прямоугольную систему координат $O\vec{i}\vec{j}\vec{k}$ так, чтобы начало координат совпало с центром данной сферы, а векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\vec{i}$ были сонаправлены. В этой системе координат данная сфера имеет уравнение $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, а точка A — координаты (a,0,0), где a = OA.

Зададим прямую d единичным направляющим вектором $\vec{p}(p_1,p_2,p_3)$ и точкой A (a,0,0) и запишем ее параметрические уравнения:

$$x = a + p_1t,\ y = p_2t,\ z = p_3t. \qquad (1)$$

Чтобы найти параметры t_1 и t_2 точек M_1 и M_2, надо подставить в уравнение сферы выражения x, y, z по формулам (1) и решить полученное уравнение относительно t: $(a + p_1t)^2 + (p_2t)^2 + (p_3t)^2 = r^2$. Учитывая, что $\vec{p}$ — единичный вектор, т. е. $p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = 1$, находим:

$$t^2 + 2ap_1t + (a^2 - r^2) = 0. \qquad (2)$$

Таким образом, точки M_1 и M_2 имеют координаты;

$$M_1(a + p_1t_1,\ p_2t_2,\ p_3t_3),\ M_2(a + p_1t_2,\ p_2t_2,\ p_3t_2),$$

где t_1 и t_2 — корни уравнения (2).

Так как $\overrightarrow{AM_1}(p_1t_1,\ p_2t_1,\ p_3t_1)$, $\overrightarrow{AM_2}(p_1t_2,\ p_2t_2,\ p_3t_2)$, то $\overrightarrow{AM_1} \cdot \overrightarrow{AM_2} = (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)t_1 \cdot t_2 = t_1t_2$. Из уравнения (2) по теореме Виета находим: $t_1t_2 = a^2 - r^2$. Но a = OA, поэтому

$$\overrightarrow{AM_1} \cdot \overrightarrow{AM_2} = OA^2 - r^2. \qquad (3)$$

Мы доказали, что скалярное произведение $\overrightarrow{AM_1} \cdot \overrightarrow{AM_2}$ действительно не зависит от выбора секущей d. Заметим, что формула (3) остается верной и тогда, когда точка A совпадает с точкой O (и значит, OA = 0), а также когда она совпадает с одной из точек M_1 или M_2 (и значит, OA = r).

Скалярное произведение $\overrightarrow{AM_1} \cdot \overrightarrow{AM_2}$ называется *степенью точки A относительно данной сферы*. Из формулы (3) следует, что степень точки A является положительной или отрицательной в зависимости от того, лежит ли точка A вне или внутри сферы; степень точки, лежащей на сфере, равна нулю.

З а д а ч а 2. Доказать, что множество F всех точек пространства, каждая из которых имеет равные степени относительно двух данных неконцентрических сфер, есть плоскость, перпендикулярная линии центров этих сфер.

Р е ш е н и е. Пусть O_1, r_1 и O_2, r_2 — соответственно центры и радиусы данных сфер. По формуле (3) точка M принадлежит фигуре F тогда и только тогда, когда $O_1M^2 - r_1^2 = O_2M^2 - r_2^2$, т. е.

$$O_1M^2 - O_2M^2 = r_1^2 - r_2^2. \tag{4}$$

Таким образом, F есть множество всех точек пространства, разность квадратов расстояний от каждой из которых до точек O_1 и O_2 равна $r_1^2 - r_2^2$. Это множество является плоскостью, перпендикулярной прямой O_1O_2.

2. Плоскость F, о которой идет речь в задаче 2, называется *радикальной плоскостью данных сфер*. Для построения радикальной плоскости достаточно построить одну из ее точек M_0 и через нее провести плоскость, перпендикулярную линии центров данных сфер. Если сферы имеют общие точки, то в качестве точки M_0 можно взять любую из этих точек. Действительно, если M_0 — общая точка двух сфер, то степень ее относительно каждой из этих сфер равна нулю, поэтому M_0 — точка радикальной плоскости этих сфер. Если данные сферы не имеют общих точек, то ясно, что их радикальная плоскость не имеет общих точек ни с одной из этих сфер.

Иногда удобно рассматривать точку как сферу нулевого радиуса. Степенью точки A относительно такой сферы с центром в точке M в соответствии с формулой (3) считается число AM^2 (так как $r = 0$). Утверждение, сформулированное в задаче 2, верно и в том случае, когда одна из данных сфер или даже обе сферы имеют нулевые радиусы.

З а м е ч а н и е. Две концентрические сферы не имеют радикальной плоскости, так как равенство (4) невозможно, если точки O_1 и O_2 совпадают, и $r_1 \neq r_2$.

3. Рассмотрим задачи, в которых встречаются другие поверхности второго порядка.

З а д а ч а 3. Доказать, что прямая, имеющая с прямым круговым цилиндром более двух общих точек, является прямолинейной образующей этого цилиндра.

Р е ш е н и е. Рассмотрим каноническое уравнение данного цилиндра:

$$x^2 + y^2 = a^2. \tag{5}$$

Пусть прямая d, заданная параметрическими уравнениями

$$x = x_0 + p_1t,\ y = y_0 + p_2t,\ z = z_0+p_3t \tag{6}$$

имеет с данным цилиндром более чем две общие точки. Докажем, что d — прямолинейная образующая этого цилиндра.

Чтобы получить те значения t, для которых точка M прямой d лежит и на данном цилиндре, надо выражения x, y, z по формулам (6) подставить в уравнение (5):

$$\left(p_1^2 + p_2^2\right)t^2 + 2\left(x_0p_1 + y_0p_2\right)t + \left(x_0^2 + y_0^2 - a^2\right) = 0\,.$$

Это квадратное уравнение должно иметь более двух корней (так как прямая d пересекает цилиндр (5) более чем в двух точках). Следовательно, его коэффициенты и свободный член равны нулю. Из $p_1^2 + p_2^2 = 0$ заключаем, что $p_1 = p_2 = 0$ и потому прямая d параллельна оси Oz или совпадает с ней. Из равенства $x_0^2 + y_0^2 - a^2 = 0$ следует, что точка M_0 (x_0, y_0, z_0) прямой d лежит на поверхности (5). Но прямая, проходящая через точку цилиндрической поверхности параллельно ее оси, и есть прямолинейная образующая этой поверхности.

З а д а ч а 4. Найти фигуру F, образованную всеми точками, отношение расстояний каждой из которых от данной точки O и от данной плоскости σ, проходящей через эту точку, постоянно и равно данному положительному числу a.

Р е ш е н и е. Выберем систему координат $O\vec{i}\vec{j}\vec{k}$ так, чтобы данная плоскость о совпала с координатной плоскостью $O\vec{i}\vec{j}$.

Если $M(x,y,z) \in F$, то x, y, z удовлетворяют условию:

$$\frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{|z|}=a. \tag{7}$$

Отсюда

$$x^2 + y^2 - (a^2 - 1)z^2 = 0. \tag{8}$$

Обратно, если координаты точки M (x, y, z) удовлетворяют уравнению (8) и $z \neq 0$, то ее координаты удовлетворяют уравнению (7). Таким образом, искомая фигура определяется уравнением (8), причем $z \neq 0$. Если $a > 0$, то F — круговой конус без вершины; при $a = 1$ фигура F — ось Oz без точки O; если же $a < 1$, то F — пустое множество.

4. Поверхности, изученные в этой главе, часто встречаются при отыскании множества точек в пространстве. Рассмотрим пример.

З а д а ч а 5. Найти множество S всех точек пространства, расстояние каждой из которых до данной точки A равно расстоянию до данной плоскости σ, не проходящей через точку A.

Р е ш е н и е. Пусть AD — перпендикуляр, проведенный из точки A к плоскости σ. Выберем прямоугольную систему координат $O\vec{i}\vec{j}\vec{k}$ так, чтобы точка O была серединой отрезка AD и $\overrightarrow{OA}\uparrow\uparrow\vec{k}$ (рис. 4.23). В этой системе координат точка A имеет координаты $(0,0,\frac{p}{2})$, где $p = AD$, а плоскость σ — уравнение $z+\frac{p}{2}=0$. Если точка $M(x,y,z)$ принадлежит множеству S, то $MA = \rho(M, \sigma)$. Но

$$MA=\sqrt{x^2+y^2+\left(z-\frac{p}{2}\right)^2},\ \ \rho(M,\sigma)=\left|z+\frac{p}{2}\right|, \tag{9}$$

поэтому $\sqrt{x^2+y^2+\left(z-\frac{p}{2}\right)^2}=\left|z+\frac{p}{2}\right|$. Отсюда следует, что

$$x^2 + y^2 = 2pz. \tag{10}$$

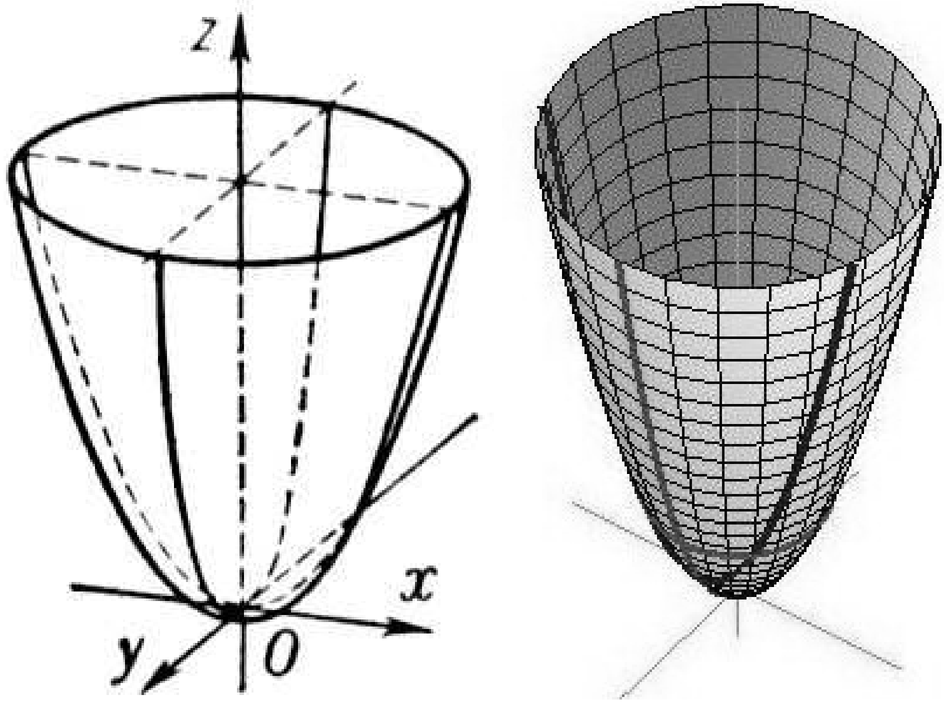


Рис. 4.23

Итак, доказано, что координаты любой точки множества S удовлетворяют уравнению (10). Докажем обратное утверждение: каждая точка M, координаты которой удовлетворяют уравнению (10), принадлежит множеству S. Подставив в первую из формул (9) значение $x^2 + y^2$ из (10), получим $MA = \sqrt{2pz + \left(z - \frac{p}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(z + \frac{p}{2}\right)^2} = \left|z + \frac{p}{2}\right|$. Следовательно $MA = \rho(M,\sigma)$, т. е. $M \in S$.

Уравнение (10), которое можно записать так: $\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{p} = 2z$, определяет параболоид вращения. Таким образом, S — параболоид вращения, осью вращения которого является прямая AD (рис. 4.23).

Глава V
ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ЛИНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА [1]

§ 1. Мнимые точки плоскости. Общее уравнение линии второго порядка

1. Если на плоскости задана аффинная система координат, то любая точка *M* плоскости имеет координаты *(x, y),* которые являются действительными числами. Обратно, любые два действительных числа, взятые в определенном порядке, являются координатами некоторой точки плоскости. Таким образом, при заданной системе координат устанавливается взаимно однозначное соответствие между точками плоскости и элементами из множества R^2.

Для общности дальнейших рассуждений расширим понятие точки, т. е. дополним плоскость так называемыми мнимыми точками. Введем следующее соглашение: при выбранной системе координат $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ точкой назовем любую пару чисел *(x,y),* взятых в определенном порядке, где $(x, y) \in C^2$, C — множество всех комплексных чисел. Точка называется *действительной* (вещественной), если *x* и *y* — действительные числа, и *мнимой*, если хотя бы одной из них не является действительными числом. Например, среди точек $A(2;-5)$, $B(\sqrt{2};i)$, $C(0;3+\sqrt{2i})$, $D(-\sqrt{5};4)$ мнимыми являются точки *B* и *C*.

Если точка *M* в системе $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ имеет координаты (*x, y*), то будем считать, что та же точка в системе $O'\vec{e}\,'_1\vec{e}\,'_2$ имеет координаты (*x´, y´*), где *x´* , *y´* определяются из формул

$$\begin{cases} x = c_{11}x' + c_{12}y' + x_0, \\ y = c_{21}x' + c_{22}y' + y_0. \end{cases}$$

Так как в этих формулах $c_{11}, c_{12}, x_0, c_{21}, c_{22}, y_0$ — действительные числа, то *понятие мнимой точки не зависит от выбора системы координат*. Отметим, что действительным точкам соответствуют обычные точки плоскости, поэтому их называют просто точками. Множество всех действительных и мнимых точек называется *комплексной плоскостью*.

Две точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ называются *комплексно-сопряженными,* если их соответствующие координаты являются комплексно-сопряженными числами. Например, $A_1(2+i, 3-2i)$ и $A_2(2-i, 3+2i)$ или $B_1(0,i)$ и $B_2(0,-i)$ — пары комплексно-сопряженных точек. Можно доказать, что понятие комплексно-сопряженности точек не зависит от выбора системы координат.

Пару точек A и B на комплексной плоскости называют *отрезком* с концами A и B. Серединой отрезка с концами $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ называется точка $M\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$. Это понятие также не зависит от выбора системы координат. Интересно отметить, что *середина отрезка с концами в комплексно-сопряженных точках есть действительная точка.* Действительно, пусть $M_1(a+bi, c+di)$ и $M_2(a-bi, c-di)$ – комплексно-сопряженные точки. Тогда середина отрезка M_1M_2 есть точка $M(a,c)$, которая является действительной, так как a и c — действительные числа.

2. Общее управление линии второго порядка в аффинной системе координат имеет вид:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{10}x + 2a_{20}y + a_{00} = 0. \tag{1}$$

Коэффициенты этого уравнения — любые действительные числа, причем a_{11}, a_{12}, a_{22} не равны одновременному нулю.

Коэффициенты a_{12}, a_{10} и a_{20} иногда будет обозначать соответственно через a_{21}, a_{01}, a_{02}.

Два уравнения вида (1) в одной и той же системе координат $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ определяют одну и ту же линию тогда и только тогда, когда одно из них получается из другого умножением на действительное число, не равное нулю. Следовательно, линия второго порядка вполне определяется, если задать аффинную систему координат и коэффициенты уравнения (1) с точностью до числового множителя.

Для удобства дальнейшего изложения введем следующие сокращенные обозначения:

$$F(x,y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{10}x + 2a_{20}y + a_{00},$$
$$F_1(x,y) = a_{11}x + a_{12}y + a_{10},$$
$$F_2(x,y) = a_{21}x + a_{22}y + a_{20},$$
$$F_0(x,y) = a_{01}x + a_{02}y + a_{00}.$$

Применяя эти обозначения, уравнение (1) сокращенно можно записать так: $F(x,y)=0,$ или

$$F_1(x,y)x+F_2(x,y)y+F_0(x,y)=0. \tag{2}$$

Мы уже встречались с примерами линий второго порядка: эллипс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$ гипербола $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$ парабола $y^2=2px.$ Рассмотрим другие примеры линий второго порядка. Линия φ, заданная уравнением $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0,$ является линией второго порядка. Это уравнение можно записать в виде $\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)=0.$ В этом случае говорят, что линия φ распадается на пару пересекающихся прямых: $\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0$ и $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0.$ Она изображена на рисунке 5.1. Аналогичная линия $x^2-a^2=0,$ где $a\neq 0,$ распадается на пару параллельных прямых: $x-a=0$ и $x+a=0$ (рис. 5.2).

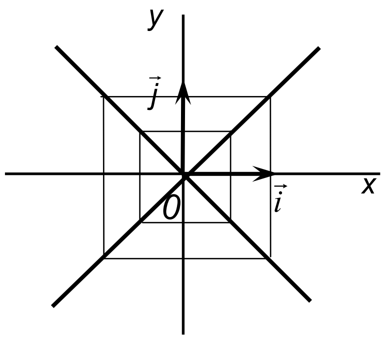


Рис. 5.1

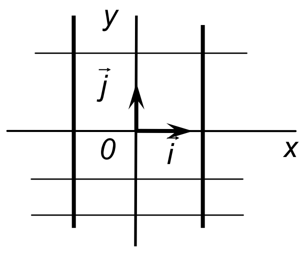


Рис. 5.2

Рассмотренные примеры являются примерами линий второго порядка, которые имеют бесконечное множество действительных и мнимых точек. Однако существуют линии второго порядка, которые не обладают этим свойством. Например, линия, заданная уравнением $x^2+y^2=0,$ имеет только одну действительную точку (0, 0) и бесконечное множество мнимых точек, а линия $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+1=0$ не имеет ни одной действительной точки, т. е. все ее точки мнимые.

§ 2. Пересечение линии второго порядка с прямой. Асимптотические направления

1. Пусть линия второго порядка φ в аффинной системе координат задана общим уравнением

$$F(x,y)=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{10}x+2a_{20}y+a_{00}=0 \qquad (1)$$

и прямая ℓ параметрическими уравнениями:

$$x=x_0+p_1t,\ y=y_0+p_2t. \qquad (2)$$

Найдем точки пересечения прямой ℓ с линией φ. Подставив значения x и y из уравнений (2) в уравнение (1), после преобразований получим:

$$Pt^2+2Qt+R=0, \qquad (3)$$

где

$$\begin{gathered} P=a_{11}p_1^2+2a_{12}p_1p_2+a_{22}p_2^2, \\ Q=F_1(x_0,y_0)p_1+F_2(x_0,y_0)p_2, \\ R=F(x_0,y_0). \end{gathered} \qquad (4)$$

Найдя из уравнения (3) параметры t_1,t_2 точек пересечений и подставив их в равнения (2), получаем координаты точек пересечений. Отметим, что каждому корню уравнения (3) соответствует точка пересечения, причем различным корням соответствуют различные точки: вещественным корням — действительные точки, а мнимым корням — мнимые точки.

Исследуем уравнение (3). Возможно два случая.

1) $P\neq 0.$ Уравнение (3) имеет два корня: $t_1=\frac{-Q+\sqrt{\delta}}{P}$, $t_2=\frac{-Q-\sqrt{\delta}}{P}$, где $\delta=Q^2-PR$ — дискриминант уравнения (3). Прямая ℓ_1 пересекает

линию φ в точках M_1 и M_2 — действительных различных, если $\delta > 0$, комплексно-сопряженных, если $\delta < 0$, и совпадающих, если $\delta = 0$. На рисунке 5.3 прямая ℓ_1 соответствует случаю $\delta > 0$, прямая ℓ_2 — случаю $\delta < 0$, а прямая ℓ_3 — случаю $\delta = 0$.

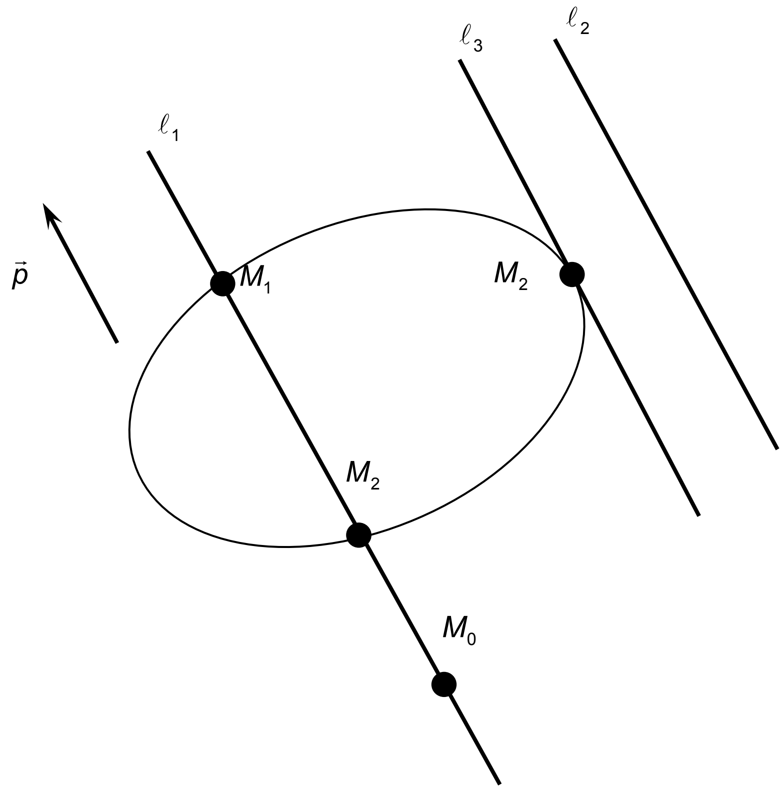


Рис. 5.3

2) $P = 0$. Уравнение (3) принимает вид: $Qt + R = 0$. Если $Q \neq 0$, то прямая ℓ пересекает линию φ в одной точке (прямая ℓ на рисунке 5.4 или на рисунке 5.5). Если $Q = 0$, $R \neq 0$, то прямая ℓ не имеет с линией φ ни одной общей точки — ни вещественной, ни мнимой (прямые m и m' на рисунке 5.5 или прямые m_1, m_2, m_3... на рисунке 5.6). Если, наконец, $Q = R = 0$, то любое t является решением уравнения (3), поэтому $\ell \subset \gamma$ (прямые n и n' на рисунках 5.5 и 5.6).

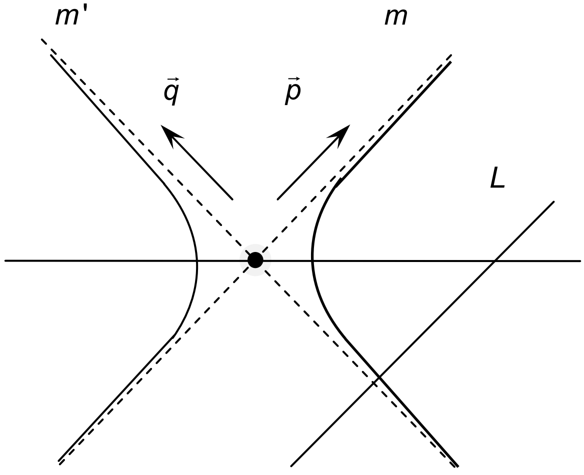


Рис. 5.4

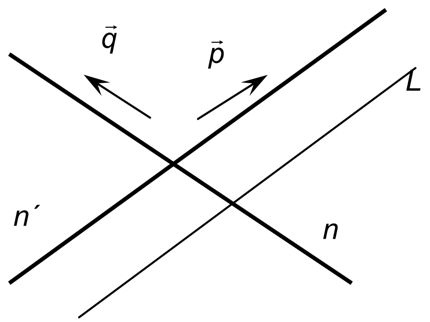


Рис. 5.5

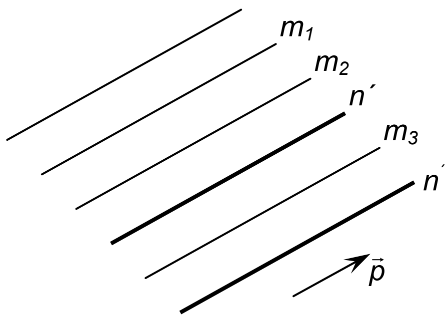


Рис. 5.6

Таким образом, возможны *шесть случаев взаимного расположения прямой ℓ и линии второго порядка φ:*

$\delta > 0$ – две действительные точки пересечения,

$P \neq 0, \delta < 0$ – мнимые комплексно-сопряженные точки пересечения,

$\delta = 0$ – совпадающие точки пересечения.

$Q \neq 0$ – одна точка пересечения,

$P = 0$ $Q = 0,\ R \neq 0$ – нет точек пересечения,

$Q = 0,\ \mathrm{R} = 0$ – прямая содержится в линии.

○ 2. Коэффициент P в уравнении (3) зависит только от направления **прямой ℓ с направляющим вектором $\vec{p}$** и не зависит от координат (x_0, y_0) точки M_0. Следовательно, если $P \neq 0$, то все прямые, имеющие направление вектора $\vec{p}(p_1,\ p_2)$, пересекают линию *φ* в двух точках (вещественных различных, совпадающих или мнимых комплексно-сопряженных). Если $P = 0$, то либо $\ell \subset \gamma$, либо прямая ℓ пересекает линию *φ* не более чем в одной точке.

Определение. **Направление, определяемое ненулевым вектором $\vec{p}$, называется асимптотическим направлением относительно линии *φ*, если прямая, параллельная вектору $\vec{p}$, либо имеет с линией не более одной общей точки, либо содержится в линии *φ*.** Из предыдущего следует: *направление*, *определяемое ненулевым* вектором $\vec{p}(p_1,\ p_2)$, является асимптотическим направлением относительно линии *φ*, заданной уравнением (1), тогда и только тогда, когда

$$P \equiv a_{11}p_1^2 + 2a_{12}p_1p_2 + a_{22}p_2^2 = 0. \qquad (5)$$

Пользуясь этой формулой, легко найти асимптотические направления относительно линии второго порядка.

Если $a_{22} \neq 0$, то из (5) следует, что $p_1 \neq 0$ (так как $\vec{p}$ — ненулевой вектор), поэтому из равенства (5) получаем: $a_{22}k^2 + 2a_{12}k + a_{11} = 0$, где $k = \dfrac{p_2}{p_1}$. Отсюда

$$k = \frac{-a_{12} \pm \sqrt{-\Delta}}{a_{22}}, \text{ где } \Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}^2. \qquad (6)$$

Если $a_{22} = 0$, то уравнение (5) имеет вид: $a_{11}p_1^2 + 2a_{12}p_1p_2 = 0$.

Этому уравнению удовлетворяют координаты векторов

$$\vec{e}_2(0,1) \text{ и } \vec{p}(-2a_{12}, a_{11}). \qquad (7)$$

Выясним, сколько существует асимптотических направлений относительно линии второго порядка φ. Рассмотрим три случая.

1) $\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$ и, значит, $a_{22} \neq 0$. Из формулы (6) мы заключаем, что относительно линии φ не существует асимптотических направлений.

2) $\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 < 0$. В этом случае относительно линии φ существует два асимптотических направления. В самом деле, если $a_{22} \neq 0$, то этот вывод следует из формулы (6), а если $a_{22} = 0$, то из (7). В последнем случае $a_{12} \neq 0$, поэтому векторы $e_2(0,1)$ и $\vec{p}(-2a_{12}, a_{11})$ не коллинеарны.

3) $\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$. В этом случае относительно линии φ существует только одно асимптотическое направление. В самом деле, если $a_{22} \neq 0$, то этот вывод следует из формулы (6), а если $a_{22} = 0$, то из (7). В последнем случае $a_{12} = 0$, поэтому векторы $\vec{e}_2(0,\ 1)$ и $\vec{p}(0,\ a_{11})$ коллинеарны и определяют одно и то же асимптотическое направление.

Полученный вывод сформулируем в виде следующей теоремы.

Теорема 5.1. ***Пусть линия второго порядка задана уравнением (1) и*** $\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$. ***Если*** $\Delta > 0$, ***то относительно такой линии не существует асимптотических направлений, если*** $\Delta < 0$, ***то существует два асимптотических направления, а если*** $\Delta = 0$ ***— одно асимптотическое направление.***

Замечание. Понятие асимптотического направления является геометрическим (т. е. определено через взаимное расположение геометрических фигур) и поэтому не зависит от выбора системы координат. Таким образом, из доказанной теоремы следует, что условия $\Delta > 0$, $\Delta < 0$ *или* $\Delta = 0$ *не зависят от выбора системы координат.*

Выясним, сколько асимптотических направлений имеется относительно эллипса, гиперболы и параболы. Пусть эллипс задан каноническим уравнением $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Тогда $\Delta = \frac{1}{a^2b^2} > 0$, поэтому *относительно эллипса не имеется асимптотических направлений.* Аналогично для гиперболы, заданной уравнением $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, $\Delta = -\frac{1}{a^2b^2}$, и уравнение (5) принимает вид: $\frac{p_1^2}{a^2} - \frac{p_2^2}{b^2} = 0$. Отсюда следует, что *относительно гиперболы имеется два асимптотических направления,* которые совпадают с направлениями ее асимптот. Точно так же можно доказать, что для параболы $\Delta = 0$, поэтому *относительно параболы* *имеется только одно асимптотическое направление.* В соответствии с этим выводом линия второго порядка называется линией *эллиптического типа, если* $\Delta > 0$, *гиперболического типа, если* $\Delta < 0$, *и параболического типа, если* $\Delta = 0$.

В заключении докажем следующую теорему:

Теорема 5.2. ***Направление ненулевого вектора*** $\vec{q}(q_1, q_2)$ ***является асимптотическим направлением относительно линии φ параболического типа, заданной уравнением (1), тогда и только тогда, когда***

$$a_{11}q_1 + a_{12}q_2 = 0,\ a_{21}q_1 + a_{22}q_2 = 0. \quad (8)$$

○ Покажем сначала, что координаты вектора асимптотического направления относительно линии φ параболического типа удовлетворяют системе (8). В п. 2 мы выяснили, что относительно линии φ имеется только одно асимптотического направление, которое определяется вектором $\vec{q}(a_{22}, -a_{12})$, если $a_{22} \neq 0$, и вектором $\vec{e}_2(0,1)$, если $a_{22} = 0$. Координаты вектора $\vec{q}$ удовлетворяют уравнению (8). Во втором случае из равенств $a_{22} = 0$, $\Delta = 0$ следует, что $a_{12} = 0$, поэтому координаты вектора $\vec{e}_2$ удовлетворяют системе (8).

Обратно, пусть координаты некоторого ненулевого вектора $\vec{q}(q_1, q_2)$ удовлетворяют системе (8). Умножив первое уравнение на q_1, а второе — на q_2 и сложив, получаем: $(a_{11}q_1 + a_{12}q_2)q_1 + (a_{21}q_1 + a_{22}q_2)q_2 = 0$. Итак, доказано, что вектор q имеет асимптотическое направление (см. формулу (5)).●

§ 3. Центр линии второго порядка

1. Докажем сначала лемму о координатах середины хорды.

Лемма 1. ***Дан вектор*** $\vec{p}(p_1, p_2)$ ***неасимптотического направления линии второго порядка, заданной уравнением***

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{10}x + 2a_{20}y + a_{00} = 0. \quad (1)$$

Для того чтобы точка $M(x_0, y_0)$ ***была серединой какой-нибудь хорды, параллельной вектору*** $\vec{p}$***, необходимо и достаточно, чтобы***

$$Q \overset{def}{=} F_1(x_0, y_0)p_1 + F_2(x_0, y_0)p_2 = 0. \tag{2}$$

○ Запишем параметрические уравнения прямой ℓ, проходящей через точку $M(x_0, y_0)$ и параллельной вектору $\vec{p}(p_1, p_2)$: $x = p_1 t + x_0$, $y = p_2 t + y_0$. Пусть M_1 и M_2 — точки пересечения прямой ℓ с данной линией, а t_1 и t_2 — параметры этих точек. Тогда

$$M_1(p_1 t_1 + x_0,\ p_2 t_1 + y_0),\ M_2(p_1 t_2 + x_0,\ p_2 t_2 + y_0).$$

Очевидно, точка $M_0(x_0,\ y_0)$ является серединой отрезка M_1M_2 тогда и только тогда, когда $t_1 + t_2 = 0$. С другой стороны, t_1 и t_2 являются корнями квадратного уравнения (3) § 2. По теореме Виета сумма корней этого уравнения равна нулю тогда и только тогда, когда $Q = 0$, т.е. выполняется равенство (2). ●

2. Точка C называется центром линии второго порядка, если она является центром симметрии этой линии.

Теорема 5.3. ***Для того чтобы*** $C(x_0, y_0)$ ***была центром линии второго порядка, заданной уравнением (1), необходимо и достаточно, чтобы пара чисел*** x_0, y_0 ***была решением системы:***

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{10} = 0, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{20} = 0. \end{cases} \tag{3}$$

○ Пусть $C(x_0, y_0) -$ центр линии второго порядка φ. Докажем, что x_0, y_0 удовлетворяют системе (3).

Проведем через точку C две хорды неасимптотического направления, параллельные соответственно векторам $\vec{p}(p_1, p_2)$ и $\vec{q}(q_1, q_2)$. Так как C — центр линии φ, то эта точка является серединой каждой из проведенных хорд. **По лемме 1 о координатах середины хорды**

$$F_1(x_0, y_0)p_1 + F_2(x_0, y_0)p_2 = 0,$$
$$F_1(x_0, y_0)q_1 + F_2(x_0, y_0)q_2 = 0.$$

Векторы $\vec{p}$ и $\vec{q}$ не коллинеарны, поэтому $\begin{vmatrix} p_1 q_1 \\ p_2 q_2 \end{vmatrix} \neq 0.$ Следовательно, $F_1(x_0, y_0) = 0,\ F_2(x_0, y_0) = 0,$ т. е. координаты точки C удовлетворяют системе уравнений (3).

Обратно, пусть координаты точки $C\ (x_0,\ y_0)$ удовлетворяют системе (3); докажем, что C — центр линии φ. Рассмотрим перенос начала координат в точку $C\ (x_0,\ y_0)$ и запишем уравнение линии в новой системе координат.

В данном случае формулы преобразований координат имеют вид: $x = X + x_0,\ y = Y + y_0,$ поэтому, подставим значения x и y в уравнение (1), получаем уравнение линии φ в новой системе координат:

$$a_{11}X^2 + 2a_{12}XY + a_{22}Y^2 + 2a_{10}^{'}X + 2a_{20}^{'}Y + a_{00}^{'} = 0. \qquad (4)$$

где

$$a_{10}^{'} = F_1(x_0,\ y_0),\ a_{20}^{'} = F_2(x_0,\ y_0),\ a_{00}^{'} = F(x_0,\ y_0).$$

Так как координаты точки $C\ (x_0,\ y_0)$ удовлетворяют системе (3), то $C\ a_{10}^{'} = 0,\ a_{20}^{'} = 0;$ поэтому уравнение (4) принимает вид:

$$a_{11}X^2 + 2a_{12}XY + a_{22}Y^2 + a_{00}^{'} = 0.$$

Из этого уравнения видно, что C — центр симметрии линии φ. Действительно, если $M(x, y) \in \gamma,$ то $M'(-x, -y) \in \gamma,$ где M' — точка симметричная точке M относительно C. Итак, C — центр линии φ.●

Теорема 5.4. ***Для того чтобы начало координат было центром линии, заданной уравнением (1), необходимо и достаточно, чтобы*** $a_{10} = a_{20} = 0$***.***

○ Действительно, числа (0,0) удовлетворяют системе (3) тогда и только тогда, когда $a_{10} = a_{20} = 0$.●

3. Доказанная теорема 5.3 позволяет исследовать вопрос о существовании центров данной линии. Задача сводится к исследованию системы уравнений (3). Рассмотрим матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{10} \\ a_{21} & a_{22} & a_{20} \end{pmatrix} = \overline{A} \qquad (5)$$

и обозначим соответственно через r и R ранги этих матриц. Очевидно, $r \le R$. Возможны следующие случаи:

1) $r = R = 2$. В этом случае система (3) имеет единственное решение и поэтому линия φ имеет один и только один центр. Линии, обладающие этим свойством, называются ***центральными.***

2) $r = R = 1$. В этом случае система (3) имеет бесконечное множество решений: одно из уравнений системы (3) является следствием другого. Линия имеет прямую центров. Эта прямая задается одним из уравнений системы (3).

3) $r = 1,\ R = 2$. Система (3) не имеет ни одного решения, и в соответствии с этим линия не имеет ни одного центра.

Линии, не имеющие центров или имеющие больше одного центра, называются нецентральными. Из предыдущих рассуждений следует, что линия является центральной тогда и только тогда, когда $\Delta \neq 0$. Таким образом, ***линии эллиптического и гиперболического типа являются центральными, а линии параболического типа — нецентральными.***

Эллипс и гипербола являются центральными линиями $(\Delta \neq 0)$, поэтому они имеют один и только один центр — начало системы координат, в которой эти линии имеют канонические уравнения. Для параболы, заданной каноническим уравнением $y^2 = 2px$, матрицы (5) имеют ранги $r = 1,\ R = 2$, поэтому ***парабола не имеет ни одного центра.***

Замечание. Как следует из предыдущего, ранги *r* и *R* матриц (5) имеют геометрический смысл, поэтому они не зависят от выбора системы координат.

§ 4. Касательная к линии второго порядка

1. Если точка M_0, принадлежащая линии второго порядка φ, является центром этой линии, то она называется особой точкой линии, в противном случае точка M_0 называется обыкновенной точкой.

Определение. **Прямая, проходящая через обыкновенную точку M_0 линии второго порядка, называется *касательной* к этой линии в точке M_0, если она пересекает линию в двух совпавших точках или целиком содержится в этой линии.**

Докажем теорему о касательной.

Теорема 5.5. ***В каждой обыкновенной точке линии второго порядка существует одна и только одна касательная. Если линия задана общим уравнением (1) § 3, то касательная в обыкновенной точке*** $M_0(x_0, y_0)$ ***этой линии имеет уравнение***

$$(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{10})x + (a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{20})y + \\ + (a_{01}x_0 + a_{02}y_0 + a_{00}) = 0, \tag{1}$$

или

$$F_1(x_0, y_0)x + F_2(x_0, y_0)y + F_0(x_0, y_0) = 0.$$

○ Пусть прямая *l*, проходящая через точку M_0, задана параметрическими уравнениями (2) § 2. Параметры точек пересечения прямой *l* с данной линией *φ* определяются из уравнения (3) § 2, которое в данном случае имеет вид:

$$Pt^2 + 2Qt = 0, \Leftrightarrow t_1 = 0 \vee t_2 = \frac{-2Q}{P}, \tag{2}$$

так как $M_0 \in \gamma$, и поэтому $R = F(x_0, y_0) = 0$.

Докажем, что прямая *l* является касательной тогда и только тогда, когда $Q = 0$. Действительно, если *l* — касательная, то уравнение (2) имеет либо два совпавших корня, либо бесконечно множество решений. И в том и в другом случае $Q = 0$. Обратно, если $Q = 0$, то уравнение (2) имеет либо два совпавших корня (когда $P \neq 0$), либо бесконечное множество решений (когда $P = 0$).

Согласно формулам (4) § 2 условие $Q = 0$ означает, что

$$Q \equiv F_1(x_0, y_0)p_1 + F_2(x_0, y_0)p_2 = 0. \tag{3}$$

Так как $M_0(x_0, y_0)$ — **обыкновенная точка,** то $F_1(x_0, y_0)$, $F_2(x_0, y_0)$ одновременно не равны нулю. Поэтому равенство (3) определяет единственное направление вектора $\vec{p}(p_1, p_2)$. В качестве такого вектора можно взять, например, вектор $\vec{t}(F_2(x_0, y_0), -F_1(x_0, y_0))$. Через точку M_0 проходит единственная прямая этого направления, поэтому в точке M_0 существует единственная касательная.

Касательная определяется точкой M_0 и направляющим вектором $\vec{t}$, поэтому имеет уравнение

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & F_2(x_0,y_0) \\ y-y_0 & -F_1(x_0,y_0) \end{vmatrix} = 0. \qquad (4)$$

Так как $M_0 \in \gamma$, то по формуле (2) § 1

$$F_1(x_0,y_0)x_0 + F_2(x_0,y_0)y_0 + F_0(x_0,y_0) = 0.$$

Учитывая это равенство, уравнение (4) можно записать так:

$$F_1(x_0,y_0)x + F_2(x_0,y_0)y + F_0(x_0,y_0) = 0.$$

Это и есть уравнение (1).●

2. Все точки эллипса, гиперболы и параболы являются обыкновенными, поэтому в каждой точке этих линий существует одна и только одна касательная. Запишем уравнения касательных, если линии заданы каноническими уравнениями.

1) Касательная к эллипсу $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ в точке (x_0,y_0). В даном случае $a_{11}=\frac{1}{a^2}$, $a_{22}=\frac{1}{b^2}$, $a_{00}=-1$, $a_{12}=a_{10}=a_{20}=0$, поэтому уравнение (1) принимает вид:

$$\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1. \qquad (5)$$

2) *Касательная к гиперболе* $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ *в точке* (x_0,y_0). По аналогии с предыдущим получаем:

$$\frac{xx_0}{a^2}-\frac{yy_0}{b^2}=1. \qquad (6)$$

3) *Касательная к параболе* $y^2-2px=0$ *в точке* (x_0,y_0). В данном случае $a_{22}=1$, $a_{10}=-p$, $a_{11}=a_{12}=a_{20}=a_{00}=0$, поэтому уравнение (1) принимает вид:

$$yy_0 = p(x+x_0). \qquad (7)$$

Пользуясь формулами (5)—(7), можно рассмотреть ряд интересных геометрических свойств касательных к эллипсу, гиперболе и параболе. Сформулируем без доказательства три утверждения.

1°. Касательная к эллипсу или гиперболе образует равные углы с фокальными радиусами точки касания.

2°. Отрезок любой касательной к гиперболе, заключенный между асимптотами, делится в точке касания пополам.

Эти свойства могут быть использованы для построения с помощью циркуля и линейки касательной в данной точке эллипса или гиперболы.

3°. Касательная к параболе образует равные углы с фокальным радиусом точки касания и с лучом, исходящим из точки касания, параллельно оси параболы.

На этом свойстве касательной параболы основана важное свойство вогнутых параболических зеркал — прожекторов, применяемых в технике. Поверхность параболического зеркала образована вращением дуги параболы вокруг оси. Если источник света поместить в фокусе поверхности, т. е. в общем фокусе всех образующих парабол, то лучи, отражаясь от внутренней зеркальной поверхности, пойдут параллельно оси.

Это свойства может быть также применено для построения циркулем и линейкой касательной к параболе в данной точке M_0, если известна ось d параболы и фокус F (рис. 5.7).

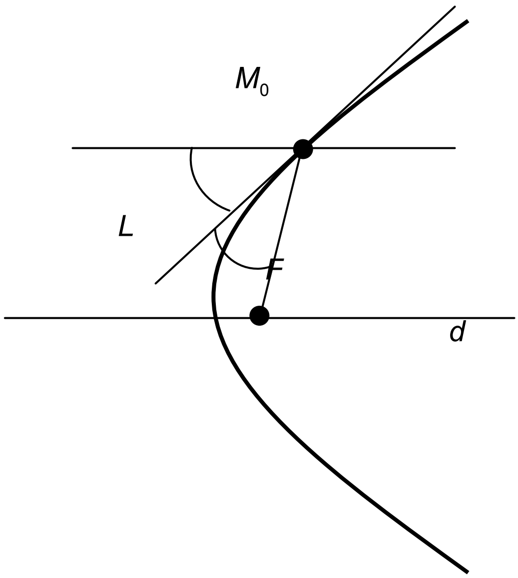


Рис. 5.7

§ 5. Диаметры линии второго порядка. Сопряженные направления

1. Пусть в аффинной системе координат $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ дана линия φ уравнением

$$F(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{10}x + 2a_{20}y + a_{00} = 0. \quad (1)$$

Возьмем какой-нибудь вектор $\vec{p}(p_1, p_2)$ неасимптотического направления относительно этой линии и рассмотрим множество d всех точек плоскости, которые являются серединами хорд направления $\vec{p}$ (рис. 5.8). По лемме 1 о координатах середины хорды точка $M(x, y)$ принадлежит этому множеству тогда и только тогда, когда выполняется условие:

$$(a_{11}x + a_{12}y + a_{10})p_1 + (a_{21}x + a_{22}y + a_{20})p_2 = 0. \quad (2)$$

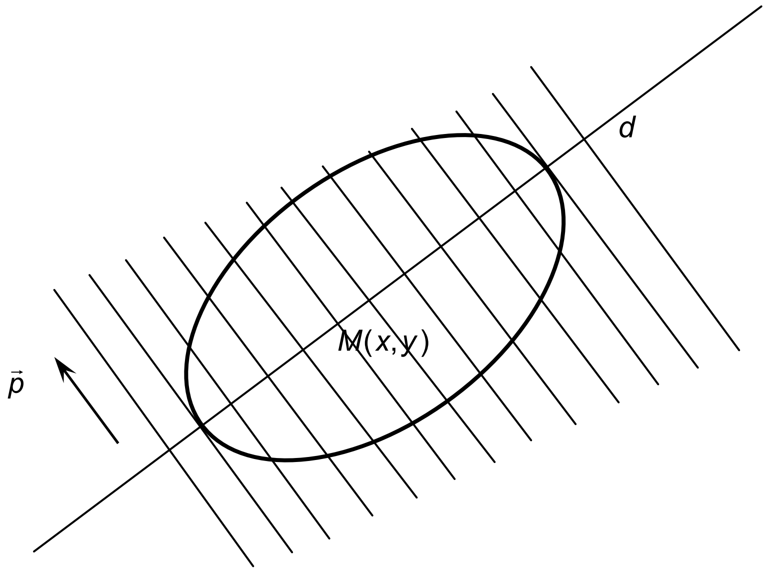


Рис. 5.8

Это и есть уравнение множества d его можно записать так:

$$(a_{11}p_1 + a_{12}p_{12})x + (a_{21}p_1 + a_{22}p_2)y + a_{10}p_1 + a_{20}p_2 = 0. \quad (3)$$

Вектор $\vec{p}$ не является вектором асимптотического направления, поэтому $(a_{11}p_1 + a_{12}p_2)p_1 + (a_{21}p_1 + a_{22}p_2)p_2 \neq 0$ (см. формулу (5) § 2). Отсюда заключаем, что коэффициенты при x и y в уравнении (3) не равны нулю одновременно, следовательно, d есть прямая линия. Итак, доказана следующая теорема.

Теорема 5.6. ***Множество середин всех хорд линии (1), параллельных вектору $\vec{p}(p_1, p_2)$ неасимптотического направления, есть прямая, заданная уравнению (3).***

Прямая d называется *диаметром*, сопряженным хордами, направление которых определяется вектором $\vec{p}$. Будет также говорить, что диаметр сопряжен вектору $\vec{p}$.

2. Рассмотрим некоторые свойства диаметров линии второго порядка.

1°. *Если линия второго порядка имеет центры, то каждый центр принадлежит любому диаметру линии.*

○ Пусть $C(x_0, y_0)$ — центр линии второго порядка, а d — произвольный диаметр, заданный уравнением (2). По теореме 5.3 координаты точки C удовлетворяют равенством (3) § 3, поэтому координаты точки C удовлетворяют уравнению (2). Это означает, что $C \in d$. ●

Отсюда следует интересный вывод: если линия второго порядка имеет более чем один центр, то она имеет один и только один диаметр. В общем случае линия второго порядка может иметь бесконечное множество диаметров. Имеет место, например, следующее утверждение, доказательство которого мы опускаем.

2°. *Если дана центральная линия второго порядка, то любая прямая неасимптотического направления, проходящая через ее центр, является диаметром этой линии.*

В частности, любая прямая, проходящая через центр эллипса (или окружности), является его диаметром.

3°. *Любой диаметр нецентральной линии второго порядка имеет асимптотическое направление.*

○ Пусть d — произвольный диаметр нецентральной линии второго порядка φ, а (3) — уравнение этого диаметра. Из (3) следует, что вектор $\vec{q}(-a_{21}p_1 - a_{22}p_2;\ a_{11}p_1 + a_{12}p_2)$ является направляющим вектором прямой d. По теореме 5.2 вектор $\vec{q}$ является вектором асимптотического направления линии φ. В самом деле, координаты вектора $\vec{q}$ при любых значениях p_1 и p_2, как легко проверить, удовлетворяют системе (8) § 2.

Так как нецентральная линия φ имеет только одна асимптотическое направление, то из свойства 3° следует, что направление ее диаметра не зависит от направления тех хорд, которые он делит пополам, т. е. любые два диаметра нецентральной линии параллельны.

Применим это свойство к параболе, которая является нецентральной линией. Все диаметры параболы имеют асимптотическое направление. Если парабола задана каноническим уравнением $y^2 = 2px$, то уравнение диаметра, сопряженного вектору $\vec{q}(q_1, q_2)$, имеет вид (3): $q_2 y - pq_1 = 0$ или, так как $q_2 \neq 0$, $y - p\dfrac{q_1}{q_2} = 0$. Для любого вектора $\vec{q}$ эта прямая имеет направление оси Ox. Обратно, любая прямая $y - A = 0$, имеющая направление оси Ox, являются диаметром параболы. Действительно, диаметр, сопряженный вектору $\vec{q}(A, p)$, совпадает с прямой $y - A = 0$.

3. **Теорема 5.7.** ***Если диаметр d_1 центральной линии второго порядка является множеством середин хорд, параллельных диаметру d_2, то диаметр d_2 является множеством середин хорд, параллельных диаметру d_1.***

○ Пусть диаметр d_1 сопряжен вектору $\vec{p}$, а диаметр d_2 — вектору $\vec{q}$ (рис. 5.9а). По условию теоремы $\vec{p} \parallel d_2$. Докажем, что $\vec{q} \parallel d_1$. Диаметр d_2 имеет уравнение $q_1(a_{11}x + a_{12}y + a_{10}) + q_2(a_{21}x + a_{22}y + a_{20}) = 0$ (см. формулу (2)). Вектор $\vec{p}$ — направляющий вектор этой прямой, поэтому

$$q_1(a_{11}p_1 + a_{12}p_2) + q_2(a_{21}p_1 + a_{22}p_2) = 0, \tag{4}$$

или

$$p_1(a_{11}q_1 + a_{12}q_2) + p_2(a_{21}q_1 + a_{22}q_2) = 0.$$

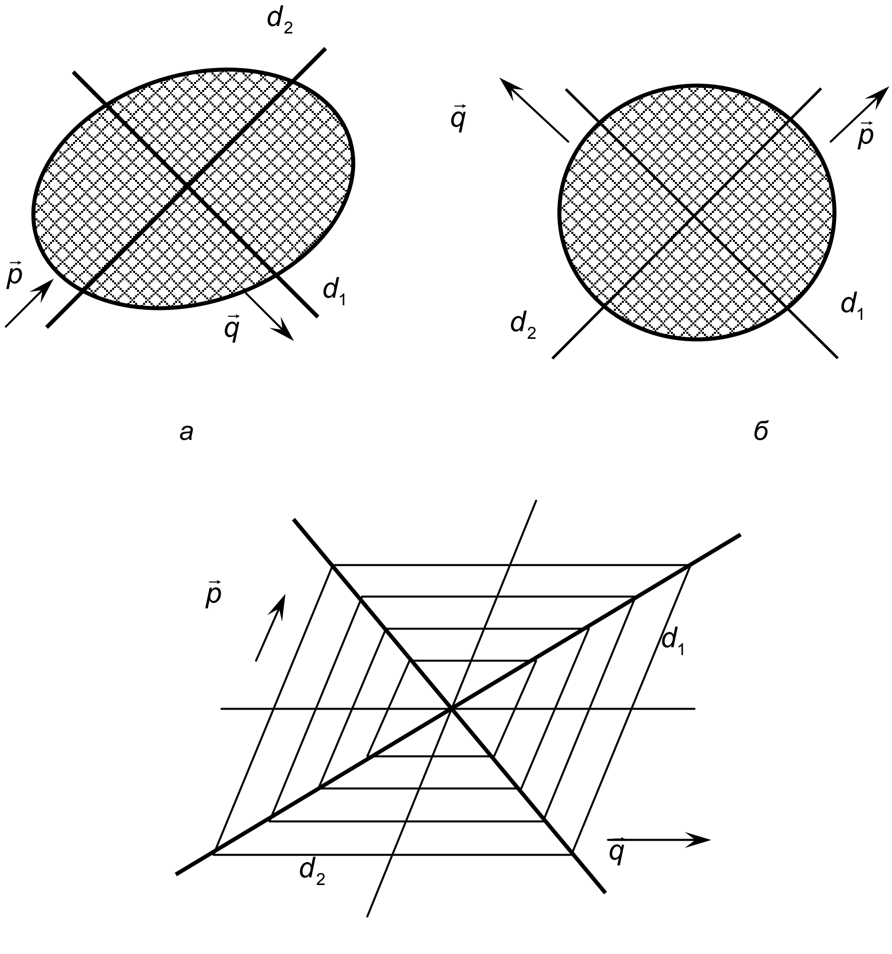


Рис. 5.9

Так как диаметр d_1 имеет уравнение (2), то это равенство означает, что $\vec{q} \parallel d_1$.●

Определение. **Два диаметра центральной линии второго порядка называются сопряженными, если каждый из них делит пополам хорд, параллельные другому диаметру. На рисунке 5.9 а, б и в изображены сопряженные диаметры d_1 и d_2 эллипса, окружности и пары пересекающихся прямых.**

4. **Направление ненулевого вектора $\vec{p}(p_1, p_2)$ называется сопряженными с направлением ненулевого вектора $\vec{q}(q_1, q_2)$ относительно линии, заданной уравнением (1), если выполняется равенство**

$$a_{11}p_1q_1 + a_{12}p_1q_2 + a_{21}p_2q_1 + a_{22}p_2q_2 = 0 \tag{5}$$

Так как $a_{ij} = a_{ji}$, то понятие сопряженности направлений является взаимным, поэтому говорят, что направления векторов $\vec{p}$ и $\vec{q}$ сопряжены относительно линии (1). (Иногда говорят более кратко: векторы $\vec{p}$ и $\vec{q}$ сопряжены относительно линии (1).)

Сравнивая равенства (5) с равенством (5) § 2, замечаем, что асимптотическое направление является самосопряженным направлением. Отметим далее, что сопряженные диаметры центральной линии второго порядка (см. формулу (4)) имеют сопряженные направления.

Докажем, что понятие сопряженности относительно линии (второго порядка имеет геометрический смысл, поэтому не зависит от выбора системы координат. Для доказательства возьмем произвольный ненулевой вектор $\vec{p}(p_1, p_2)$ и рассмотрим два случая.

1) Вектор $\vec{p}$ является вектором неасимптотического направления. Запишем равенство (5) в виде

$$(a_{11}p_1 + a_{12}p_2)q_1 + (a_{21}p_1 + a_{22}p_2)q_2 = 0 \tag{6}$$

Направление любого ненулевого вектора $\vec{q}$, удовлетворяющее этому равенству, как следует из формулы (4), совпадает с направлением диаметра, который делит хорды, параллельные вектору $\vec{p}$, пополам. Таким образом, существует одно и только одно направление, сопряженное с направлением вектора $\vec{p}$, и это направление имеет простой геометрический смысл.

2). Вектор $\vec{p}(p_1, p_2)$ является вектором асимптотического направления. Если $\Delta \neq 0$, то числа $a_{11}p_1 + a_{12}p_2$ и $a_{21}p_1 + a_{22}p_2$ не равны нулю одновременно, так как $\vec{p} \neq \vec{0}$. Поэтому все векторы $\vec{q}(q_1, q_2)$, координаты которых удовлетворяют равенству (6), попарно коллинеарны и образуют одномерное векторное подпространство L. Оно является подпространством, натянутым на вектор $\vec{p}$, так как $\vec{p} \in L$ (см. (5) § 2). Таким образом, кроме направления вектора $\vec{p}$, нет других направлений, сопряженных с $\vec{p}$.

Если $\Delta = 0$, то по теореме 5.2 $a_{11}p_1 + a_{12}p_2 = 0$ и $a_{12}p_1 + a_{22}p_2 = 0$, поэтому соотношение (6) удовлетворяется для любого вектора q. В этом случае любое направление плоскости сопряжено с направлением вектора $\vec{p}$.

§ 6. Главные направления. Главные диаметры

***Определение*. Направление ненулевого вектора $\vec{p} = (p_1; p_2)$ называется сопряженным с направлением ненулевого вектора $\vec{q} = (q_1; q_2)$ относительно линии, заданной уравнением**

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{10}x + 2a_{20}y + a_{00} = 0, \tag{1}$$

если выполняется равенство

$$a_{11}p_1q_1 + a_{12}p_1q_2 + a_{21}p_2q_1 + a_{22}p_2q_2 = 0. \tag{2}$$

Так как $a_{ij} = a_{ji}$, то понятие сопряженности направлений является взаимным. Поэтому говорят, что направления векторов $\vec{p}$ и $\vec{q}$ сопряжены относительно линии (1) или более кратко: *векторы $\vec{p}$ и $\vec{q}$ сопряжены относительно линии (1)*.

***Определение.* Направление называется главным относительно данной линии второго порядка, если оно сопряжено с перпендикулярным направлением. Так как понятие сопряженности является взаимным, то если данное направление является главным, то и перпендикулярное к нему направление является главным.**

Пусть в прямоугольной системе координат $O\vec{i}\vec{j}$ линия γ задана общим уравнением (1). По определению ненулевой вектор $\vec{p} = (p_1; p_2)$ является вектором главного направления относительно этой линии тогда и только тогда, когда векторы $\vec{p} = (p_1; p_2)$ и $\vec{q} = (-p_1; p_2)$ сопряжены. Подставив координаты этих векторов в уравнение (2) получаем:

$$(a_{22} - a_{11})p_1p_2 + a_{12}(p_1^2 - p_2^2) = 0. \tag{3}$$

Эта формула позволяет найти главные направления относительно линии второго порядка и выяснить, сколько главных направлений имеется относительно той или иной линии. Рассмотрим следующие случаи.

1) $a_{12} \neq 0$. В этом случае $p_1 \neq 0$ (так как $\vec{p} \neq \vec{0}$). Поэтому если положить $k = \frac{p_2}{p_1}$, то уравнение (3) запишется так:

$$k^2 a_{12} + (a_{11} - a_{22})k - a_{12} = 0. \tag{4}$$

Это квадратное уравнение имеет два различных действительных корня:

$$k_{1,2} = \frac{a_{22} - a_{11} \pm \sqrt{(a_{22} - a_{11})^2 + 4a_{12}^2}}{2a_{12}},$$

причем $k_1 k_2 = -1$.

Отсюда следует, что относительно данной линии имеются два и только два главных направления.

2) $a_{12} = 0$, $a_{22} - a_{11} \neq 0$. Уравнение (3) принимает вид $(a_{22} - a_{11})p_1 p_2 = 0 \Leftrightarrow p_1 p_2 = 0$. И в этом случае относительно данной линии имеются два и только два главных направления – направления координатных осей.

3) $a_{12} = 0$, $a_{22} - a_{11} = 0$. Ясно, что координаты любого вектора $\vec{p}(p_1 p_2)$ удовлетворяют равенству (3), поэтому любое направление является главным. В этом случае данная линия является окружностью (вещественного, мнимого или нулевого радиуса). Итак, доказана следующая важная теорема.

Теорема 4. Относительно любой линии второго порядка, отличной от окружности, существуют два и только два главных направления. Относительно окружности любое направление плоскости является главным.

2. **Диаметр линии второго порядка называется *главным*, если он перпендикулярен сопряженным хордам**. Отсюда следует, что главный диаметр является осью симметрии линии второго порядка. (рис. 5.8).

Пусть d — главный диаметр, а $\vec{p}(p_1 p_2)$ — вектор, параллельный сопряженным хордам. Направление вектора $\vec{p}$ сопряжено с направлением диаметра d, поэтому $\vec{p}$ имеет главное направление, а, следовательно, и диаметр d имеет главное направление. Обратно, если $\vec{p}$ — вектор главного, но неасимптотического направления, то сопряженный ему диаметр перпендикулярен к нему, поэтому является главным диаметром. Итак, для нахождения главных диаметров следует найти все главные, но не асимптотические направления данной линии. Диаметры, сопряженные этим направлениям, являются главными.

Теорема 5. Центральная линия второго порядка, отличная от окружности, имеет два и только два главных диаметра; для окружности любой диаметр является главным. Нецентральная линия второго порядка имеет только один главный диаметр.

○ а) Пусть γ — центральная линия второго порядка, отличная от окружности. По теореме 1 она имеет два и только два главных направления. Эти направления не являются асимптотическими. Поэтому диаметры, сопряженные хордам этих направлений, являются главными диаметрами.

б) Окружность является линией эллиптического типа, поэтому не имеет асимптотических направлений. Так как любое направление для окружности является главным, то любой диаметр окружности является главным диаметром.

в) Пусть $\vec{p}$ — вектор асимптотического направления нецентральной линии второго порядка γ, а $\vec{q}$ — перпендикулярный к нему ненулевой вектор. Направления векторов $\vec{p}$ и $\vec{q}$ сопряжены, поэтому каждое из этих направлений является главным. По теореме 4 других главных направлений линия γ не имеет. Диаметр, сопряженный вектору $\vec{q}$, является единственным главным диаметром линии γ. ●

3. Как известно, осью симметрии фигуры называется прямая, относительно которой фигура симметрична. Мы уже отмечали, что любой главный диаметр линии второго порядка является ее осью симметрии. Из теоремы 2 следует, что любая линия второго порядка имеет хотя бы одну ось симметрии. Эллипс с неравными полуосями и гипербола

имеют две оси симметрии, окружность — бесконечное множество осей симметрии. Парабола имеет только одну ось симметрии.

Существуют ли линии второго порядка, которые имеют оси симметрии, отличные от главных диаметров? Можно показать, что такие линии существуют. Например, для пары параллельных прямых $x^2 - a^2 = 0$ любая прямая, перпендикулярная этим прямым, является осью симметрии (рис. 5.2). Эти прямые не являются главными диаметрами. Для линии $x^2 - y^2 = 0$, которая распадается на пару взаимно перпендикулярных прямых, сами прямые являются осями симметрии. Эта линия изображена на рисунке 5.1. Она имеет четыре оси симметрии — оси координат Ox и Oy, которые являются главными диаметрами, и прямые l_1, и l_2, на которые распадается линия. Можно доказать, что в остальных случаях оси симметрии линии второго порядка, имеющей бесконечное множество действительных точек, совпадают с ее главными диаметрами.

§ 7. Классификация линий второго порядка

Идея классификации линий второго порядка заключается в том, чтобы путем надлежащего выбора новой прямоугольной системы координат упростить уравнение линии, а затем по этому уравнению установить, к какому классу принадлежит линия.

Пусть линия второго порядка γ в прямоугольной системе координат $O\vec{i}\vec{j}$ задана уравнением

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{10}x + 2a_{20}y + a_{00} = 0. \qquad (1)$$

Рассмотрим поворот системы координат вокруг точки O так, чтобы вектор $\vec{j}'$ новой системы координат $O\vec{i}'\vec{j}'$ имел главное, но не асимптотическое направление. Тогда вектор $\vec{i}'$ также будет иметь главное направление. Запишем уравнение линии γ в новой системе координат:

$$a'_{11}x'^2 + 2a'_{12}x'y' + a'_{22}y'^2 + 2a'_{10}x' + 2a'_{20}y' + a_{00} = 0.$$

Так как вектор $\vec{j}' = (0,1)$ имеет главное направление, то его координаты удовлетворяют уравнению (3) § 6, поэтому $a'_{12} = 0$. Вектор $\vec{j}'$ не имеет асимптотического направления, поэтому $a'_{22} \neq 0$. Таким образом, предыдущее уравнение имеет вид:

$$a'_{11}x'^2 + a'_{22}y'^2 + 2a'_{10}x' + 2a'_{20}y' + a_{00} = 0. \qquad (2)$$

Дальнейшее упрощение этого уравнения достигается путем надлежащего выбора точки O' и переноса начала координат в эту точку. Рассмотрим различные случаи в зависимости от наличия центров линии γ.

2. *Классификация центральных линий второго порядка*. Рассмотрим перенос начала координат в центр O' линии γ. В этом случае в новой системе координат коэффициенты при x' и y' в уравнении линии γ равны нулю, поэтому оно имеет вид:

$$a'_{11}x'^2 + a'_{22}y'^2 + a'_{00} = 0, \text{ где } a'_{11}a'_{22} \neq 0. \qquad (3)$$

Возможны два случая.

1) $a'_{00} \neq 0$. Уравнение (3) можно записать так:

$$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} = 1, \qquad (4)$$

где $A = -\dfrac{a'_{00}}{a'_{11}}$, $B = -\dfrac{a'_{00}}{a'_{22}}$. Не нарушая общности, можно предположить, что $A \geq B$ (в случае $A < B$ выполним преобразование координат, поменяв местами координатные оси).

а) Если $A > 0$, $B > 0$, то линия (4) есть эллипс с полуосями $\sqrt{A}, \sqrt{B}$.

б) Если $A > 0$, $B < 0$, то линия (4) есть гипербола с полуосями $\sqrt{A};\ -\sqrt{B}$.

в) Если $A < 0$, $B < 0$, то, обозначив $A = -a^2$, $B = -b^2$, где $a > 0$, $b > 0$, запишем уравнение (4) в виде $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = -1$. Линия не имеет ни одной вещественной точки и называется *мнимым эллипсом.*

2) $a'_{00} = 0$. Уравнение (3) можно записать в виде $\dfrac{x^2}{A} + \dfrac{y^2}{B} = 0$, где $A > 0$.

а) Если $B < 0$, то, обозначив $A = a^2$, $B = -b^2$, получаем:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0\text{, или }\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)=0.$$

Линия распадается на *пару пересекающихся прямых*:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0 \text{ и } \frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0.$$

б) Если B > 0, то аналогично предыдущему получаем: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$. Линия имеет только одну вещественную точку — начало координат. Говорят, что линия распадается на *пару мнимых пересекающихся прямых*: $\frac{x}{a}+i\frac{y}{b}=0$ и $\frac{x}{a}-i\frac{y}{b}=0$.

3. Классификация нецентральных линий второго порядка, имеющих центры. Рассмотрим перенос начала координат в один из центров O' линии γ. Так как в данном случае вектор $\vec{i}'$ имеет асимптотическое направление, то уравнение (3) можно записать так:

$$y^2 + C = 0\text{, где } C=\frac{a'_{00}}{a'_{22}}. \tag{5}$$

а) Если C < 0, то, обозначив $C = -a^2$, запишем уравнение (5) в виде $y^2 - a^2 = 0$, или $(y - a)(y + a) = 0$. Линия распадается на *пару параллельных прямых* ($y - a = 0$ и $y + a = 0$).

б) Если C > 0, то аналогично предыдущему получаем $y^2 + a^2 = 0$ или $(y - ia)(y + ia) = 0$. Линия не имеет ни одной вещественной точки. Говорят, что она распадается на *пару мнимых параллельных прямых*: $y - ia = 0$ и $y + ia = 0$.

в) Если C = 0, то уравнение (5) имеет вид: $y^2 = 0$ или $yy = 0$. Говорят, что линия распадается на *пару совпавших прямых* ($y = 0$, $y = 0$).

4. Классификация нецентральных линий второго порядка, не имеющих центров. Рассмотрим перенос начала координат в точку O', лежащую на главном диаметре линии γ. В данном случае линия имеет только один главный диаметр, который совпадает с осью $O'\vec{i}'$ и сопряжен с хордами, параллельными вектору $\vec{j}'$. Пусть уравнение линии γ в системе $O'\vec{i}'\vec{j}'$ имеет вид (2). Тогда $a'_{11} = 0$, так как век-

тор $\vec{i}'$ имеет асимптотическое направление $a'_{22} \neq 0$ и $a'_{20} = 0$, так как ось абсцисс — главный диаметр. Таким образом, уравнение (2) имеет вид: $a'_{22}(y')^2 + 2a'_{10}x + a_{00} = 0$. Здесь $a'_{10} \neq 0$, так как точка O' не является центром линии γ (линия γ не имеет центров). Из уравнения видно, что ось абсцисс пересекает линию в точке $\left(-\dfrac{a_{00}}{2a'_{10}};0\right)$. Если перенести начало координат в эту точку, то уравнение линии принимает вид: $a_{22}y^2 + 2a_{10}x = 0$ или $y^2 = px$, где $p = \dfrac{-a'_{10}}{a'_{22}}$. Это уравнение параболы.

5. Итак, существуют девять типов линий второго порядка, представленных в следующей таблице.

Название линии	Каноническое уравнение	Δ	R	Центры
1. Эллипс	$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$	> 0	2	Один центр, не принадлежащий линии
2. Гипербола	$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$	< 0	2	Один центр, не принадлежащий линии
3. Парабола	$y^2 = 2px$	= 0	2	Нет центров
4. Мнимый эллипс	$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=-1$	>0	2	Один центр, не принадлежащий линии
5. Пара пересекающихся прямых	$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=0$	< 0	2	Один центр, принадлежащий линии
6. Пара мнимых пересекающихся прямых	$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=0$	>0	2	Один центр, принадлежащий линии
7. Пара параллельных прямых	$y^2 - a^2 = 0$	0	1	Прямая центров, не принадлежащих линии
8. Пара мнимых параллельных прямых	$y^2 + a^2 = 0$	0	1	Прямая центров, принадлежащих линии
9. Пара совпавших прямых	$y^2 = 0$	0	1	Прямая центров, принадлежащих линии

§ 8. Приведение уравнения линии второго порядка к каноническому виду и построение ее точек

В этом параграфе рассмотрим примеры приведения уравнения линии второго порядка к каноническому виду. Сначала рассмотрим общую схему, а затем перейдем к примерам. Пусть линия второго порядка γ в прямоугольной системе координат $O\vec{i}\,\vec{j}$ задана общим уравнением

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{10}x + 2a_{20}y + a_{00} = 0, \tag{1}$$

где $a_{12} \neq 0$. Найдем главные направления линии γ и примем их за направления новых координатных осей.

Координаты единичного вектора $\vec{p}(\cos\alpha, \sin\alpha)$ главного направления, где $\alpha = (\widehat{\vec{i},\vec{p}})$, удовлетворяют уравнению (3) из § 10. Это уравнение можно записать так:

$$\begin{vmatrix} a_{11}\cos\alpha + a_{12}\sin\alpha & a_{21}\cos\alpha + a_{22}\sin\alpha \\ \cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix} = 0.$$

Для каждого вектора $\vec{p}$ главного направления существует такое λ, что

$$\begin{cases} a_{11}\cos\alpha + a_{12}\sin\alpha = \lambda\cos\alpha, \\ a_{21}\cos\alpha + a_{22}\sin\alpha = \lambda\sin\alpha; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a_{11} - \lambda)\cos\alpha + a_{12}\sin\alpha = 0, \\ a_{21}\cos\alpha + (a_{22} - \lambda)\sin\alpha = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Эта система совместна тогда и только тогда, когда

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}^2) = 0\,. \tag{3}$$

Уравнение (3) называется *характеристическим уравнением* линии второго порядка γ. Корни этого уравнения находятся по формуле

$$\lambda = \frac{(a_{11} + a_{22}) \pm \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2}}{2}.$$

Так как $(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2 \geq 0$, то *корни λ_1 и λ_2 характеристического уравнения (3) — действительные числа*, причем если γ не является окружностью (т. е. если $(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2 \neq 0$), то $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Пусть для определенности $\lambda_2 \neq 0$. Подставив каждый из этих корней в уравнения (2), получаем соотношение, из которого находим координаты единичного вектора главного направления. Таким образом, каждому корню характеристического уравнения соответствует главное направление.

Пусть $\vec{i}' = (\cos\alpha, \sin\alpha)$ — единичный вектор главного направления, который соответствует корню λ_1. Из формул (2) находим:

$$(a_{11} - \lambda_1)\cos\alpha + a_{12}\sin\alpha = 0\ ,$$

отсюда

$$\mathrm{tg}\alpha \frac{\lambda_1 - a_{11}}{a_{12}}\,. \tag{5}$$

Найдем $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$:

$$\sin\alpha = \frac{\mathrm{tg}\alpha}{\sqrt{1 + \mathrm{tg}^2\alpha}},\quad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \mathrm{tg}^2\alpha}}\,.$$

Формулы преобразования координат имеют вид

$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha, \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha. \end{cases} \tag{6}$$

Подставив отсюда значения x и y в уравнение (1), получаем, получаем уравнение линии γ в системе $O\vec{i}'\vec{j}'$:

$$a'_{11}x'^2 + a'_{22}y'^2 + 2a'_{10}x' + 2a'_{20}y' + a'_{00} = 0, \tag{7}$$

где

$$\left.\begin{aligned} a'_{11} &= a_{11}\cos^2\alpha + 2a_{12}\cos\alpha\sin\alpha + a_{22}\sin^2\alpha, \\ a'_{22} &= a_{11}\sin^2\alpha - 2a_{12}\sin\alpha\cos\alpha + a_{22}\cos^2\alpha, \\ a'_{10} &= a_{10}\cos\alpha + a_{20}\sin\alpha, \\ a'_{20} &= -a_{10}\sin\alpha + a_{20}\cos\alpha. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Из первой формулы (8), учитывая равенства (2), получаем:

$$a'_{11} = (a_{11}\cos\alpha + a_{12}\sin\alpha)\cos\alpha + (a_{21}\cos\alpha + a_{22}\sin\alpha)\sin\alpha =$$
$$= \lambda_1\cos^2\alpha + \lambda_1\sin^2\alpha = \lambda_1.$$

Из формул (8) получаем $a'_{11} + a'_{22} = a_{11} + a_{22}$ или $\lambda_1 + a'_{22} = a_{11} + a_{22}$. Но по теореме Виета $a_{11} + a_{22} = \lambda_1 + \lambda_2$, поэтому $a'_{22} = \lambda_2$. Следовательно, уравнение (7) линии γ имеет вид:

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + 2a'_{10}x' + 2a'_{20}y' + a_{00} = 0. \qquad (9)$$

Коэффициенты a'_{10} и a'_{20} непосредственно находятся по формулам (8).

Из уравнения (9) путем переноса начала координат в некоторую точку O' получаем каноническое уравнение линии γ. Если γ не является параболой, то O' — центр (или один из центров) линии γ; если же γ — парабола, то O' — ее вершина.

Таким образом, для того чтобы привести уравнение (1) линии γ второго порядка к каноническому виду и построить точки этой линии, необходимо выполнить следующее.

1) Найти корни характеристического уравнения (3).

2) Найти координаты векторов $\vec{i}'(\cos\alpha, \sin\alpha)$ и $\vec{j}'(-\sin\alpha, \cos\alpha)$ по формулам (4).

3) Вычислить коэффициенты a'_{10}, a'_{20} по формулам (8) и записать уравнение линии γ в виде (9).

4) Переносом начала координат получить каноническое уравнение линии γ.

5) Построить систему координат $O'\vec{i}'\vec{j}'$ по координатам точки O' и векторов $\vec{i}'$ и $\vec{j}'$ и затем построить точки линии γ в системе $O'\vec{i}'\vec{j}'$ по каноническому уравнению. ’

Рассмотрим пример, иллюстрирующий эту схему.

Пример 1. $5x^2 + 5y^2 + 8xy - \sqrt{2}x + \sqrt{2}y - 8 = 0$.

1) Запишем характеристическое уравнение (3) для данной линии и найдем его корни $\lambda^2 - 10\lambda + 9 = 0$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 9$.

2) По формулам (4) найдем координаты векторов $\vec{i}'(\cos\alpha, \sin\alpha)$ и $\vec{j}'(-\sin\alpha, \cos\alpha)$.

$$\mathrm{tg}\alpha = -1, \quad \sin\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \alpha = -45^\circ$$

$$\vec{i}'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2}\right), \quad \vec{j}'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

3) По формулам (8) вычислим коэффициенты a'_{10}, a'_{20}: $a'_{10} = -1$, $a'_{20} = 0$. Уравнение (9) в данном случае имеет вид:

$$x'^2 + 9y'^2 - 2x' - 8 = 0.$$

4) Так как $\Delta' = 1\cdot 9 \neq 0$, то линия центральная.

По формулам $\begin{cases} a'_{11}x + a'_{12}y + a'_{10} = 0, \\ a'_{21}x + a'_{22}y + a'_{20} = 0 \end{cases}$ находим координаты центра O' в системе $\{O', \vec{i}', \vec{j}'\}$: O'(1;0).

Формулы переноса системы координат в точку O' имеют вид:

$$x' = X + 1.\ y' = Y,$$

поэтому линия в системе $O'\vec{i}'\vec{j}'$ имеет уравнение

$$X^2 + 9Y^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow \frac{X^2}{9} + \frac{Y^2}{1} = 1. \tag{10}$$

Это каноническое уравнение эллипса с полуосями a = 3, b = 1.

5) На рисунке 5.10 выполнено построение эллипса (10). Сначала строим систему $O'\vec{i}'\vec{j}'$, в этой системе точку O' и через эту точку проводим оси координат системы $O'\vec{i}'\vec{j}'$. Затем на этих осях координат отмечаем вершины эллипса по заданным полуосям и вычерчиваем эллипс.

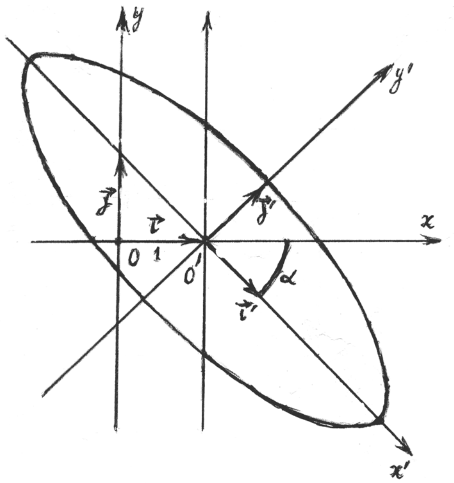


Рис. 5.10

3. В ряде случаев, когда в исходном уравнении (1) отдельные коэффициенты равны нулю, рассмотренная выше схема упрощается. Например, если $a_{12} = 0$, то нет необходимости в нахождении главных направлений линии, поэтому достаточно ограничиться пунктами 4 и 5 схемы. В случае, если $a_{10} = a_{20} = 0$, то следует выполнить только пункты 1, 2, 3 и 5. Рассмотрим примеры.

Пример 2. $2y^2 + 4x - 8y + 9 = 0$.

Так как $a_{12} = 0$, то координатные векторы $\vec{i}$ и $\vec{j}$ имеют главные направления.

Данная линия γ не имеет центров, так как система уравнений для определения центров $\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{10} = 0, \\ a_{21}x + a_{22}y + a = 0 \end{cases}$ несовместна:

$$0 \cdot x + 0 \cdot y + 2 = 0,\ 0 \cdot x + 2y - 4 = 0.$$

Следовательно, линия γ — парабола. Главный диаметр сопряжен вектору $\vec{j}$, поэтому имеет уравнение $2y - 4 = 0$, или $y = 2$. Эта прямая пересекает параболу γ в точке $O'(-\frac{1}{4}, 2)$, которая является вершиной параболы. Формулы переноса системы координат в точку O' имеют вид: $x = X - \frac{1}{4}$, $y = Y + 2$, поэтому линия γ в системе $O'\vec{i}\,'\vec{j}\,'$ имеет уравнение $Y^2 + 2X = 0$. Если изменить направление оси абсцисс, т. е. ввести новую систему координат $\vec{O}'\vec{i}\,'\vec{j}\,'$, где $\vec{i}\,' = -\vec{i}\,', \vec{j}\,' = \vec{j}$, то формулы преобразования имеют вид: $X = -X'$, $Y = Y'$, поэтому линия γ в новой системе координат имеет каноническое уравнение $Y'^2 = 2X'$. На рисунке 5.11 выполнено построение этой параболы.

Пример 3. $4x^2 - 4xy + y^2 - 15 = 0$.

1) $\lambda^2 - 5\lambda = 0$, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 5$;

2) $\mathrm{tg}\alpha = 2,\ \sin\alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}},\ \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$;

3) $a'_{10} = 0$, $a'_{20} = 0$. Уравнение данной линии, в системе $O'\vec{i}\,'\vec{j}\,'$ имеет вид: $5y'^2 - 15 = 0$ или $y'^2 - 3 = 0$. В этом случае нет необходимости в переносе начала координат, так как мы уже получили каноническое уравнение пары параллельных прямых: $y - \sqrt{3} = 0,\ y + \sqrt{3} = 0$. На рисунке 5.12 изображена эта линия.

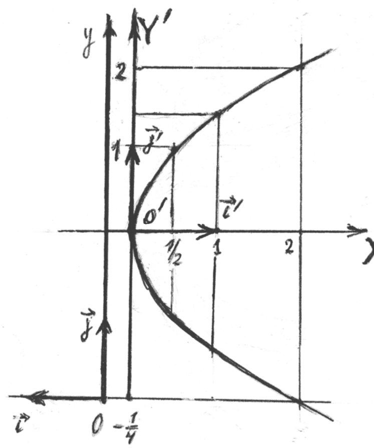


Рис. 5.11

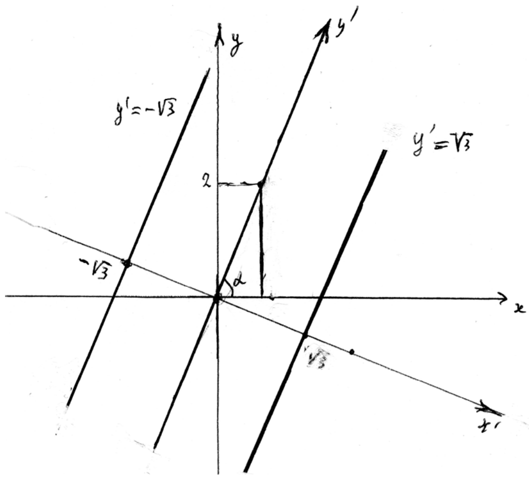


Рис. 5.12

4) Если данная линия распадается на пару прямых, то иногда удается без приведения уравнения линии к каноническому виду разложить левую часть уравнения на множители и найти уравнения тех прямых, которые составляют линию.

Пример 4. $x^2 + xy - 2y^2 + 5x - 5y = 0$. Запишем это уравнение так:

$$(x^2 + 2xy + 5x) - (xy + 2y^2 + 5y) = 0 \Rightarrow x(x + 2y + 5) - y(x + 2y + 5) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x - y)(x + 2y + 5) = 0.$$

Данная линия распадается на пару пересекающихся прямых:

x – y = 0, x + 2y + 5 = 0 (рис. 5.13).

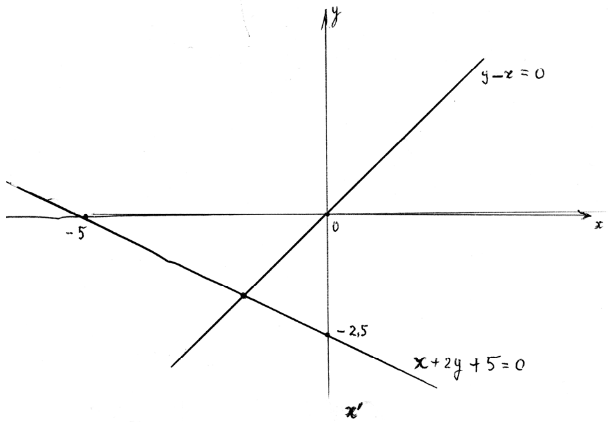


Рис. 5.13

§ 9. Инварианты линии второго порядка

1. Пусть относительно декартовой системы координат $\{0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ линия второго порядка имеет вид:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{10}x + 2a_{20}y + a_{00} = 0\,. \tag{1}$$

Чтобы в дальнейшем применять суммирование по Эйнштейну, введем обозначения

$$x \overset{def}{=} x^1,\ y \overset{def}{=} x^2,\ i, j, p, q = 1,2;\ \alpha, \beta, \gamma ... = 0,1,2.$$

Уравнение (1) запишем в виде

$$a_{ij}x^i x^j + 2a_{io}x^i + a_{00} = 0, \tag{2}$$

а формулы преобразования координат

$$\begin{cases} x = \overset{*}{x}\cos\alpha - \overset{*}{y}\sin x + C_0^1; \\ y = \overset{*}{x}\sin\alpha + \overset{*}{y}\cos\alpha + C_0^2 \end{cases} \tag{3*}$$

представим в виде

$$x^i = c_p^i \overset{*}{x}{}^p + c_0^i, \tag{3}$$

где

$$\begin{aligned} &c_1^1 = \cos\alpha,\ c_2^1 = -\sin\alpha, \\ &c_1^2 = \sin\alpha,\ c_2^2 = \cos\alpha,\ c_i^j \neq c_j^i. \end{aligned} \tag{4}$$

и

$$\det \| C_p^i \| = \begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} = 1. \tag{5}$$

***Определение.* Инвариантом линии второго порядка (2) называется функция $\Im(A_{\alpha\beta})$ от коэффициентов этой линии (2), которая меняется при переходе одной декартовой системы координат к другой, т.е.**

$$\Im(A_{\alpha\beta}) = \Im^*(\overset{*}{A}_{\alpha\beta}).$$

Подставив формулы (3) в сравнение (2), получим уравнение линии второго порядка относительно новой д.с. координат $\left\{O^* \overset{*}{x}\,\overset{*}{y}\right\}$:

$$a_{pq}^* \overset{*}{x}{}^p \overset{*}{x}{}^q + 2a_{po}^* \overset{*}{x}{}^p + a_{00}^* = 0, \tag{6}$$

причем

$$a_{\alpha\beta}^* = a_{\eta\gamma} C_\alpha^\eta C_\beta^\gamma, \tag{7}$$

где

$$C_0^0 = 1,\ C_1^0 = C_2^0 = 0. \tag{8}$$

Предварительно вычислим определитель с учетом (4), (8):

$$\det \| C_\alpha^\beta \| = \begin{vmatrix} C_1^1 & C_2^1 & C_0^1 \\ C_1^2 & C_2^2 & C_0^2 \\ C_1^0 & C_2^0 & C_0^0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & C_0^1 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & C_0^2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1. \tag{9}$$

2. Задача отыскания инвариантов кривой сводится к отысканию таких комбинаций коэффициентов $a^*_{\alpha\beta}$ (функций от $a^*_{\alpha\beta}$), которые после замены их по формулам (7), преобразовывались в аналогичные комбинации от коэффициентов $a_{\alpha\beta}$.

Первый такой инвариант $\mathfrak{I}_1$ получим, сложив почленно первые две формулы (8), § 8:

$$\mathfrak{I}_1 = a^*_{11} + a^*_{22} = a_{11} + a_{22}. \tag{10}$$

Замечание. ***Величины*** a^*_{11} ***и*** a^*_{22} ***получаются из формул (7), если последовательно положить*** $\alpha = \beta = 1$ ***и*** $\alpha = \beta = 2$***.***

Далее согласно формулам (7) и (5) вычисляем:

$$\mathfrak{I}^*_2 \overset{def}{=} \det\| a^*_{pq} \|_{(7)} = \det\| a_{ij} C^i_p C^j_q \| = \det\| a_{ij} C^j_q \| \cdot \det\| C^i_p \| =$$
$$= \det\| a_{ij} \| \cdot \det\| C^j_q \| \cdot \det\| C^i_p \| = \det\| a_{ij} \| = \mathfrak{I}_2.$$

Следовательно, мы нашли второй инвариант линии (2):

$$\mathfrak{I}_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \overset{def}{=} \Delta. \tag{11}$$

В частности, если $\Delta \overset{def}{=} \mathfrak{I}_2 = 0 \Rightarrow \mathfrak{I}^*_2 = 0,$ т.е. линия параболического типа преобразования в линию параболического типа (нецентральная линия).

3. **Определение.** ***Если для линии второго порядка (2) определитель***

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{10} \\ a_{21} & a_{22} & a_{20} \\ a_{01} & a_{02} & a_{00} \end{vmatrix} \neq 0,$$

то линия (2) называется нераспадающейся (или невырождающейся), а если $D_3 = 0$***, то линия (2) называется распадающейся (вырождающейся).***

Ясно, что если $D_3 = 0$ (линия распадающаяся), то и в новой системе координат она распадающаяся и потому $D^*_3 = 0$. Т.е. $D_3 = 0$ — инвариант для распадающихся линий второго порядка. Это наводит на мысль: проверить, а не будет ли определитель D_3 инвариантом для любых линий второго порядка (2).

Проведем вычисления с учетом (7), (9):

$$D_3^* = \det \| a_{\alpha\beta}^* \| = \det \| a_{\eta\gamma} C_\alpha^\eta C_\beta^\gamma \| = \det \| a_{\eta\gamma} \| \cdot \det \| C_\alpha^\eta \| \cdot \det \| C_\beta^\gamma \| =$$
$$= \det \| a_{\beta\gamma} \| = D_3.$$

Итак, $\Im_3 = D_3$ — третий инвариант линии (2).

Отметим, что все три инварианта $\Im_1, \Im_2, \Im_3$ функционально независимы, т.е. они являются функциями от различных совокупностей коэффициентов $a_{\alpha\beta}$.

Кроме того, корни λ_1 и λ_2 характеристического уравнения $\lambda^2 - \Im_1\lambda + \Im_2 = 0$ тоже являются инвариантами линии (2), так как они являются функциями инвариантов $\Im_1$ и $\Im_2$: $\lambda_{1,2} = \dfrac{\Im_1 \pm \sqrt{\Im_1^2 - 4\Im_2}}{2}$.

○ Покажем, что любая линия (2) не может иметь более трех функционально независимых инвариантов. Чтобы получить зависимости между $a_{\alpha\beta}^*$ и $a_{\eta\gamma}$, надо в формулах (7) исключить параметры C_α^η. Очевидно, что среди чисел C_α^η только три независимых параметра: α, C_0^1, C_0^2. Исключая из шести уравнений (7) три параметра $(\alpha; C_0^1; C_0^2)$ мы получим не более трех зависимостей между коэффициентами $a_{\alpha\beta}^*$ и $a_{\eta\gamma}$.●

Однако, для полной классификации линий второго порядка (2) (см. § 10) необходимо ввести понятие **полуинварианта.**

Определение. **Функция $\Im(a_{\alpha\beta})$, не меняющаяся при повороте декартовой системы координат, называется <u>полуинвариантом</u> (или семиинвариантом), линии второго порядка (2).**

Используя уравнения (7), непосредственным подсчетом убеждаемся, что величина

$$K = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{10} \\ a_{01} & a_{00} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{20} \\ a_{02} & a_{00} \end{vmatrix} \qquad (12)$$

является инвариантом линии (2) при повороте декартовой системы координат, т. е. K — полуинвариант (семиинвариант) линии (2).

§ 10. Определение вида линий второго порядка по инвариантам. Классификация линий второго порядка по инвариантам

1. Путем надлежащего подбора системы координат линию второго порядка γ (см. (1), § 9) можно привести к одному из видов:

$$\lambda_1 \overset{*}{x}{}^2 + \lambda_2 \overset{*}{y}{}^2 + a_{00}^* = 0, \text{ где } \lambda_1\lambda_2 \neq 0, \tag{1}$$

$$\lambda_2 \overset{*}{y}{}^2 + 2\overset{*}{a}_{10} \overset{*}{x} = 0, \ \ \lambda_2 \neq 0, \ a_{10}^* \neq 0, \tag{2}$$

$$\lambda_1 \overset{*}{x}{}^2 + a_{00}^* = 0. \tag{3}$$

Установим признаки определения линии второго порядка γ по инвариантам.

I. Пусть γ приводится к виду (1). В этом случае $\Im_1 = \lambda_1 + \lambda_2; \Im_2 = \lambda_1\lambda_2; \Im_3 = \lambda_1\lambda_2 a_{00}^*$, поэтому уравнение (1) принимает вид

$$\lambda_1 \overset{*}{x}{}^2 + \lambda_2 \overset{*}{y}{}^2 + \frac{\Im_3}{\Im_2} = 0. \tag{4}$$

а) Уравнение (4) задает эллипс, если λ_1 и λ_2 имеют одинаковые знаки ($\Im_2 > 0$), а $\frac{\Im_3}{\Im_2}$ — знак, противоположным знакам λ_1 и λ_2. Отсюда следует, что

$$\Im_2 > 0; \ \Im_1\Im_3 < 0. \tag{5}$$

Обратно, если для линии γ (§ 9, (1)) выполняются условия (5), то линия γ — эллипс. В самом деле, уравнение γ приводится к одному из видов (1)—(3). Так как $\Im_2 > 0$, то это только уравнение (1), так как для линий γ вида (2) или (3) $\Im_2 = 0$.

В силу $\Im_2 > 0$ следует, что λ_1 и λ_2 одного знака, а из $\Im_1\Im_3 < 0$ получаем, что $\frac{\Im_3}{\Im_2}$ имеет знак, противоположный знакам λ_1 и λ_2. Итак, уравнение (1) при условиях (5) задает эллипс.

Замечание. **В дальнейшем доказательство обратного предложения признака предоставляется читателю.**

б) Уравнение (4) задает **мнимый эллипс**, если λ_1, λ_2, $\dfrac{\mathfrak{I}_3}{\mathfrak{I}_2}$ имеют одинаковые знаки. Отсюда следует, что

$$\mathfrak{I}_2 > 0; \ \mathfrak{I}_1\mathfrak{I}_2 > 0. \tag{6}$$

Доказательство обратного утверждения аналогично предыдущего (см. п. а)). Итак, условия (6) – признак мнимого эллипса.

в) Уравнение (4) задает **гиперболу**, если λ_1 и λ_2 имеют разные знаки и $\dfrac{\mathfrak{I}_3}{\mathfrak{I}_2} \neq 0$, т.е.

$$\mathfrak{I}_2 < 0; \ \mathfrak{I}_3 \neq 0. \tag{7}$$

Убеждаемся, что обратное утверждение верно. Следовательно, соотношения (7) — признак гиперболы.

г) Уравнение (4) задает **пару действительных пересекающихся прямых** тогда и только тогда, когда

$$\mathfrak{I}_2 < 0; \ \mathfrak{I}_3 = 0. \tag{8}$$

д) Уравнение (4) задает **пару мнимых пересекающихся прямых** тогда и только тогда, когда

$$\mathfrak{I}_2 > 0; \ \mathfrak{I}_3 = 0. \tag{9}$$

II. Пусть уравнение линии γ приводится к виду (2). В этом случае $\mathfrak{I}_1 = \lambda_2$; $\mathfrak{I}_2 = 0$; $\mathfrak{I}_3 = -\lambda_2(\overset{*}{a}_{10})^2 = -\mathfrak{I}_1(a^*_{10})^2$, поэтому уравнение (2) принимает вид:

$$\mathfrak{I}_1 \overset{*}{y}{}^2 + 2\sqrt{-\frac{\mathfrak{I}_3}{\mathfrak{I}_1}}\,\overset{*}{x} = 0. \tag{10}$$

Уравнение (10) задает **параболу**. Здесь $\mathfrak{I}_1$ и $\mathfrak{I}_3$ имеют разные знаки. Итак, имеем

$$\mathfrak{I}_2 = 0, \ \mathfrak{I}_3 \neq 0. \tag{11}$$

Верно и обратное утверждение: если условия (11) выполняются для линии γ, то данная линия γ — парабола.

III. Пусть линия γ приведена к виду (3). В этому случае имеем $\Im_1 = \lambda_1$; $\Im_2 = 0$; $\Im_3 = 0$ и $K = \lambda_1 a^*_{00}$. Уравнение (3) примет вид:

$$\Im_1 \overset{*}{x}{}^2 + \frac{K}{\Im_1} = 0. \qquad (12)$$

Этим уравнением задается **пара действительных параллельных прямых**, если $K < 0$, $\Im_1$ - любое по знаку. В этом случае имеем

$$\Im_2 = \Im_3 = 0,\ \ K < 0. \qquad (13)$$

Верно и обратное утверждение. Поэтому условия (13) — это признак **пары действительных параллельных прямых**.

Аналогично предыдущему можно показать, что условия

$$\Im_2 = \Im_3 = 0,\ \ K > 0 \qquad (14)$$

характеризуют **пару мнимых параллельных прямых**, а условия

$$\Im_2 = \Im_3 = 0,\ K = 0 \qquad (15)$$

пару совпавших прямых.

Резюмируя все изложенное выше, мы приходим к следующей таблице для определения вида второго порядка по инвариантам:

№ п/п	Признак вида	Приведенное уравнение	Каноническое уравнение	Название кривой
1	$I_2 > 0,\ I_1\ I_3 < 0$	$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \frac{\Im_3}{\Im_2} = 0$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	Эллипс
2	$I_2 > 0,\ I_1\ I_3 > 0$	$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \frac{\Im_3}{\Im_2} = 0$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$	Мнимый эллипс
3	$I_2 < 0,\ I_3 \neq 0$	$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \frac{\Im_3}{\Im_2} = 0$	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	Гипербола

Окончание табл.

№ п/п	Признак вида	Приведенное уравнение	Каноническое уравнение	Название кривой
4	$I_2 < 0,\ I_3 = 0$	$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = 0$	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$	Пара действительных пересекающихся прямых
5	$I_2 > 0,\ I_3 = 0$	$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = 0$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$	Пара мнимых пересекающихся прямых
6	$I_2 = 0,\ I_3 \neq 0$	$\Im_1 x^2 + 2\sqrt{-\frac{\Im_3}{\Im_1}}\, y = 0$	$x^2 = 2py$	Парабола
7	$I_2 = I_3 = 0, K < 0$	$\Im_1 x^2 + \frac{K}{\Im_1} = 0$	$\frac{x^2}{a^2} = 1$	Пара действительных прямых
8	$I_2 = I_3 = 0, K > 0$	$\Im_1 x^2 + \frac{K}{\Im_1} = 0$	$\frac{x^2}{a^2} = -1$	Пара мнимых параллельных прямых
9	$I_2 = I_3 = K = 0$	$x^2 = 0$	$x^2 = 0$	Пара совпавших прямых

Рассмотрим несколько примеров определения вида линии второго порядка по инвариантам.

Пример 1. $-2x^2 + 12xy + 7y^2 - 8x - 6y = 0$ (γ) Определим инварианты этой линии:

$$\Im_1 = a_{11} + a_{22} = -2 + 7 = 5;\ \Im_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 6 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = -50;$$

$$\Im_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 6 & -4 \\ 6 & 7 & -3 \\ -4 & -3 & 0 \end{vmatrix} = -4 \cdot 10 + 3 \cdot 30 = 50.$$

В данном случае $\Im_2 < 0,\ \Im_3 \neq 0,$ поэтому линия γ представляет собой гиперболу.

Найдем корни характеристического уравнения:

$$\lambda^2 - \Im_1\lambda + \Im_2 = 0,\ \lambda^2 - 5\lambda - 50 = 0,\ \lambda_1 = 10,\ \lambda_2 = -5.$$

Приведенное уравнение имеет вид: $10x^2 - 5y^2 - 1 = 0.$

Пример 2. $3x^2 - 2xy + y^2 - 6x + 2y + 8 = 0.\ (\gamma_1)$

$$\Im_1 = 3 + 1 = 4,\ \Im_2 = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2,\ \Im_3 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 8 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 5 \cdot 2 = 10.$$

В данном случае $\Im_2 > 0,\ \Im_1 \cdot \Im_3 = 4 \cdot 10 = 40 > 0.$ Линия γ_1 представляет собой мнимый эллипс.

Характеристическое уравнение имеет вид:

$$\lambda^2 - 4\lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow\ \lambda_1 = 2 + \sqrt{2}\ \vee \lambda_2 = 2 - \sqrt{2}.$$

Приведенное уравнение имеет вид:

$$(2 + \sqrt{2})x^2 + (2 - \sqrt{2})y^2 + 5 = 0.$$

Пример 3. $4x^2 - 4xy + y^2 - x - 2 = 0.\ (\eta)$

$$\Im_2 = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 0,\ \Im_3 = \begin{vmatrix} 4 & -2 & -\frac{1}{2} \\ -2 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot 0 = -\frac{1}{4} \neq 0.$$

Линия (η) представляет собой параболу. Приведенное уравнение имеет вид: $5x^2 + 2\sqrt{\frac{1}{20}}y = 0,\ x^2 + \frac{1}{5\sqrt{5}}y = 0.$

Примеры

Определить вид следующих линий 2-го порядка по инвариантам. Написать приведенные уравнения этих линий.

1) $9x^2 - 4xy + 6y^2 + 6x - 8y + 2 = 0.$

2) $12xy + 5y^2 - 12x - 22y - 19 = 0.$

3) $x^2 - 2xy + y^2 - x - 2y + 3 = 0.$

4) $x^2 - 6xy + 9y^2 - 3\sqrt{10x} - \sqrt{10y} = 0.$

5) $5x^2 + 8xy + 5y^2 - 9 = 0.$

6) $4x^2 - 4xy + y^2 - 15 = 0.$

7) $x^2 + 2y^2 + 4x + 4 = 0.$

Глава VI
ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

§ 1. Пересечение поверхности 2-го порядка с прямой

Пусть поверхность 2-го порядка γ задана в аффинной системе координат $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ уравнением

$$F(x,x) \overset{\text{del}}{=} a_{ij}x^i x^j + 2a_{i0}x^i + a_{00} = 0, \tag{1}$$

а прямая *l* параметрическими уравнениями:

$$l: \quad x^i = p^i t + \xi^i, \tag{2}$$

где i, j, k…= 1,2,3; $\vec{p} = \{p^i\}$ — направляющий вектор прямой *l*, $M_0(\xi^i) = M_0(\xi^1, \xi^2, \xi^3)$ — начальная точка прямой *l*.

Найдем точки пересечения прямой (2) и поверхности γ (1). Подставив x^i (2) в уравнение (1), после элементарных преобразований получим

$$Pt^2 + 2Qt + \mathcal{R} = 0, \tag{3}$$

где

$$P = a_{ij}p^i p^j, \tag{4}$$

$$Q = a_{ij}p^i \xi^j + a_{i0}p^i = p^i(a_{ij}\xi^j + a_{i0}), \tag{5}$$

$$\mathcal{R} = F(\xi,\xi) = a_{ij}\xi^i \xi^j + 2a_{i0}\xi^i + a_{00}. \tag{6}$$

Корни уравнения (3) являются параметрами точек пересечения прямой (2) с поверхностью γ, заданной уравнением (1). Подставив найденное значение параметров в уравнение (2), получаем координаты точек пересечения. Таким образом, для выяснения количества и характера точек пересечения необходимо исследовать уравнение (3).

Из соотношения (4) следует, что коэффициент P зависит от направления прямой *l* (от вектора $\vec{p}$) и не зависит от выбора начальной точки M_0 этой прямой. Значит, если для всех параллельных прямых выбрать один и тот же направляющий вектор, то коэффициент P будет иметь одно и то же значение. Поэтому, если для некоторой прямой P ≠ 0 (P = 0), то для всех прямых, параллельных этой прямой, коэффициент P ≠ 0 (P = 0). Это обстоятельство позволяет ввести

Определение. *Прямые, направляющие векторы которых удовлетворяют условию P = 0, называются* ***прямыми асимптотического направления*** *относительно данной поверхности γ, а направляющие векторы $\vec{p}$ этих прямых —* ***векторами асимптотического направления или асимптотическими векторами***.

Исследование уравнения (3) по существу ничем не отличается от исследования аналитического уравнения § 2 главы V. В результате имеет место

Теорема 6.1. *Если прямая (2) не имеет асимптотического направления по отношению к поверхности (1), то она пересекает поверхность в двух точках:*

а) действительных различных, если $D = Q^2 - P\mathcal{R} > 0$;

б) комплексно-сопряженных, если D < 0;

с) совпадающих, если D = 0.

Если прямая имеет асимптотическое направление по отношению к поверхности (1), то она либо пересекается с ней в одной точке (P = 0; Q ≠0), либо не имеет с ней ни одной общей точки (P = 0; Q = 0, R ≠ 0), либо принадлежит поверхности всеми своими точками (P = 0; Q = 0; R = 0).

Следствие. *Если прямая имеет с поверхностью более двух общих точек, то она целиком лежит на поверхности*.

Определение. *Прямые, принадлежащие поверхности (1), называются прямолинейными образующими поверхности*.

Пример. Найти те прямолинейные образующие поверхности

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1, \tag{7}$$

которые проходят через точку (1;1;1).

○ Пусть $\vec{p} = (\alpha, \beta, \gamma)$ — направляющий вектор искомой прямолинейной образующей *l*, тогда параметрические уравнения образующей имеют вид

$$x = 1 + \alpha t, \ y = 1 + \beta t, \ z = 1 + \gamma t. \tag{8}$$

Подставив значения x,y,z (8) в уравнение (7), после элементарных преобразований получаем

$$(\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2)t^2 + 2(\alpha + \beta - \gamma)t = 0.$$

Прямая *l* будет прямолинейной образующей в том и только в том случае, когда

$$\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 = 0, \quad \alpha + \beta - \gamma = 0. \tag{9}$$

Отметим, что $\gamma \neq 0$, так как в противном случае ($\gamma = 0$) из (9) следует: $\alpha = 0$, $\beta = 0$.

Разделим соотношения (9) на $\gamma \neq 0$ и, вводя новые неизвестные $\varepsilon = \dfrac{\alpha}{\gamma}$; $\eta = \dfrac{\beta}{\gamma}$, получаем

$$\varepsilon^2 + \eta^2 = 1, \quad \varepsilon = \eta = 1. \tag{10}$$

Из системы (10) находим, что

$$\varepsilon_1 = 0, \ \eta_1 = 1 \ \vee \ \varepsilon_2 = 1, \ \eta_2 = 0.$$

Положив $\gamma = 1$, получаем координаты двух направляющих векторов прямолинейных образующих

$$\vec{p}_1 = (0; \ 1; \ 1) \text{ и } \vec{p}_2 = (1; \ 0; 1).$$

Итак, параметрические уравнения прямолинейных образующих имеют вид:

$$\begin{aligned} l_1 &: \quad x = 1; \ \ y = 1 + t; \ \ z = 1 + t; \\ l_2 &: \quad 1 + t; \ \ y = 1; \ \ z = 1 + t. \end{aligned} \tag{11}$$

Подставив значения x, y, z из (11) в уравнение (7) убеждаемся в том, что уравнение (7) превращается в тождество относительно t. Другими словами, прямые l_1 и l_2 являются прямолинейными образующими поверхности (7). ●

§ 2. Пересечение поверхности 2-го порядка с плоскостью

Пусть поверхность 2-го порядка γ задана уравнением

$$F(x,x)=0, \tag{1}$$

а плоскость ω уравнением

$$A_i x^i + A_0 = 0. \tag{2}$$

Теорема 6.2. *Если существует хотя бы один неасимптотический вектор $\vec{p}\parallel\omega$, то линия пересечения поверхности (1) с плоскостью (2) является линией 2-го порядка.*

Выберем новую аффинную систему координат $\{O^*, \vec{e}_1^{\,*}, \vec{e}_2^{\,*}, \vec{e}_3^{\,*}\}$ так, что $O^* \in \omega$, $\vec{e}_1^{\,*} \parallel \omega$, $\vec{e}_2^{\,*} \parallel \omega$, тогда уравнение плоскости ω в системе $\{O^*, \vec{e}_1^{\,*}, \vec{e}_2^{\,*}, \vec{e}_3^{\,*}\}$ имеет вид

$$\overset{*}{x}{}^3 = 0, \tag{3}$$

поверхности γ:

$$a^*_{ij}\overset{*}{x}{}^i\overset{*}{x}{}^j + 2a^*_{i0}\overset{*}{x}{}^i + a^*_{00} = 0, \tag{4}$$

а линия пересечения $\omega \cap \gamma$ запишется в виде

$$\begin{cases} a^*_{11}\overset{*}{x}{}^1\overset{*}{x}{}^2 + 2a^*_{12}\overset{*}{x}{}^1\overset{*}{x}{}^2 + a^*_{22}\overset{*}{x}{}^2\overset{*}{x}{}^2 + 2a^*_{10}\overset{*}{x}{}^1 + 2a^*_{20}\overset{*}{x}{}^2 + a^*_{00} = 0, \\ x^{*3} = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Путь $\vec{p} = (\overset{*}{p}{}^1; \overset{*}{p}{}^2; 0) \neq \vec{0}$, $\vec{p} \parallel \omega$ и $\vec{p}$ — неасимптотический вектор поверхности (1), т. е.

$$a^*_{11}\overset{*}{p}{}^i\overset{*}{p}{}^2 + 2a^*_{12}\overset{*}{p}{}^1\overset{*}{p}{}^2 + a^*_{22}\overset{*}{p}{}^2\overset{*}{p}{}^2 \neq 0. \tag{6}$$

Из (6) следует, что хотя бы один из коэффициентов $a^*_{11}, a^*_{12}, a^*_{22}$ отличен от нуля, т. е. линия (5) — есть линия 2-го порядка. ●

Теорема 6.3. *Пусть в некоторой аффинной системе координат* $\{O,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$ *поверхность* γ *задана уравнением (1), а плоскость* ω — *уравнением (2). Пусть любой вектор* $\vec{p}\,||\,\omega$ *является вектором асимптотического направления относительно поверхности (1), тогда имеются следующие случаи расположения плоскости* ω *и поверхности* γ*:*

а) плоскость ω *пересекает поверхность* γ *по прямой или касается поверхности* γ *по прямой;*

б) плоскость ω *не имеет ни одной общей точки с поверхностью* γ*;*

в) плоскость ω *целиком принадлежит поверхности* γ.

○ Выберем систему координат так, как и в теореме 6.2., тогда поверхность γ задается уравнением (4), плоскость ω уравнением (3), а линия пересечения — уравнениями (5). Однако в этом случае, так как векторы $\vec{e}_1^{\,*}=(1;\ 0;\ 0)$, $\vec{e}_2^{\,*}=(0;\ 1;\ 0)$, $(\vec{e}_1^{\,*}+e_2^*)=(1;\ 1;\ 0)$ параллельны ω и являются асимптотическими (P = 0), имеем

$$a_{11}^*=0;\quad a_{22}^*=0;\quad a_{12}^*=0. \qquad (7)$$

В силу (7) линия пересечения плоскости ω и поверхности γ имеет вид:

$$\begin{cases} 2a_{10}^*\overset{*}{x}{}^1+2a_{20}^*\overset{*}{x}{}^2+a_{00}^*=0,\\ x^{*3}=0. \end{cases} \qquad (8)$$

Возможны следующие случаи:

1) $a_{10}^*\neq 0\vee a_{20}^*\neq 0$, т.е. плоскость ω пересекает поверхность по прямой (8) или касается поверхности ω по прямой;

2) $a_{10}^*=0;\ a_{20}^*=0,\ a_{00}^*\neq 0$, т.е. уравнение (9) не имеет смысла, т.е. плоскость ω не пересекает поверхность γ;

3) $a_{10}^*=0;\ a_{20}^*=0;\ a_{00}^*=0$, т.е. координаты любой точки плоскости $x^{*3}=0$ удовлетворяют (9) и, следовательно $\omega\subset\gamma$. ●

§ 3. Цилиндрические поверхности 2-го порядка

Пусть относительно аффинной стстемы координат уравнение поверхности γ имеет вид

$$F(x,x) = 0. \qquad (1)$$

Теорема 6.4. *(признак цилиндрической поверхности). Для того, чтобы поверхность 2-го порядка была цилиндрической с образующими параллельными вектору* $\vec{p} = \{p^i\}$*, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:*

$$\begin{cases} a_{ij}p^i = 0, \\ a_{i0}p^i = 0. \end{cases} \tag{2}$$

○ **Необходимое условие признака.** Пусть уравнение (1) задает цилиндрическую поверхность с образующими параллельными вектору $\vec{p} = \{p^i\}$. Докажем, что координаты вектора $\vec{p}$ удовлетворяют условиям (2).

Пусть $M_0(\xi^i)$ — произвольная точка пространства, а *l* — прямая, проходящая через эту точку и параллельная вектору $\vec{p}$. Тогда прямая *l* является либо прямолинейной образующей поверхности γ (1), либо не имеет с ней ни одной общей точки. В силу теоремы 6.1 в обоих случаях имеем

$$Q = 0 \Leftrightarrow a_{ij}p^i\xi^j + a_{i0}p^i = 0. \tag{3}$$

Соотношение (3) есть тождество относительно (ξ^j), поэтому справедливы условия (2). ●

○ **Достаточное условие признака.** Пусть для поверхности γ(1) существует вектор $\vec{p}$, координаты которого удовлетворяют соотношениям (2).

Возьмем произвольную точку $M(\xi^i) \in \gamma$ и покажем, что прямая.

$$l: \quad x^i = p^i t + \xi^i, \tag{4}$$

проходящая через точку и параллельная вектору $\vec{p}$, является прямолинейной образующей поверхности γ(1). Из условия (2) следует, что $P = (a_{ij}p^i)p^j = 0$, $Q = 0$. Так как $M \in \gamma$, то $\mathcal{R} = F(\xi^i, \xi^i) = 0$. Итак, $P = Q = R = 0$.

Согласно теореме (6.1.) это означает, что *l* (4) — прямолинейная образующая поверхности. В силу того, что $M \in \gamma$ — произвольная точка поверхности, утверждаем, что поверхность γ(1) — цилиндрическая поверхность. ●

Пример. Доказать, что поверхность, заданная в аффинной системе координат уравнением

$$4x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^3 + 4x_1x_3 - 4x_2x_3 + 8x_1 - 4x_2 + 8x_3 = 0 \qquad (5)$$

является цилиндрической. Найти направление прямолинейных образующих.

○ Составим систему (2) для данной поаерхности (5)

$$\begin{cases} 4p_1 + 0 \cdot p_2 + 2p_3 = 0, \\ 0 \cdot p_1 + 2p_2 - 2p_3 = 0, \\ 2p_1 - 2p_2 + 3p_3 = 0, \\ 4p_1 - 2p_2 + 4p_3 = 0. \end{cases}$$

Решив систему, убеждаемся, что вектор $\vec{p} = (-1;\ 2;\ 2)$ — направляющий вектор образующих цилиндрической поверхности (5). ●

Теорема 6.4 позволяет установить другой критерий для определения цилиндрических поверхностей второго порядка. Действительно, рассмотрим матрицу

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{10} \\ a_{21} & a_{22} & a_{20} \\ a_{31} & a_{32} & a_{30} \\ a_{01} & a_{02} & a_{03} \end{bmatrix} \qquad (6)$$

и обозначим через r ранг этой матрицы возможны следующие случаи:

а) r_A = 3. В этом случае система (2) имеет только нулевое решение, поэтому поверхность $\gamma(1)$ не является цилиндрической.

б) r_A = 2. Имеется одно направление, удовлетворяющее системе (2). Поверхность $\gamma(1)$ является цилиндрической с определенным направлением образующих.

в) r_A = 1. Имеется бесконечное множество направлений, удовлетворяющих системе (2). Все они параллельны некоторой плоскости. В этом случае можно доказать, что поверхность распадается на пару плоскостей (см. § 2), т. е. мы имеем цилиндрическую поверхность, направляющей которой является пара прямых.

Ранг матрицы (6) не может быть равен нулю, так как по определению поверхности 2-го порядка хотя бы один из коэффициентов a_{ij} (при i, j ≤ 3) не равен нулю.

Следовательно, справедлива

Теорема 6.5. *Пусть поверхность 2-го порядка задана в аффинной системе координат уравнением (1) и* r_A *— ранг матрицы (6). Для того, чтобы поверхность была цилиндрической, необходимо и достаточно, чтобы* $r_A \le 2$. *При этом, если* $r_A = 2$, *то цилиндрическая поверхность имеет образующие определенного направления, а при* $r_A = 1$ *она распадается на пару плоскостей*.

§ 4. Конические поверхности 2-го порядка

Докажем признак для определения конических поверхностей.

Теорема 6.6. *Для того, чтобы поверхность второго порядка* γ, *определяемая в аффинной системе координат уравнением*

$$\gamma: \quad F(x,x) \overset{\text{del}}{=} a_{ij}x^i x^j + 2a_{i0}x^i + a_{00} = 0 \tag{1}$$

была конической поверхностью с вершиной в точке $M_0(\xi^i)$, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:*

$$\begin{cases} a_{ij}\xi^j + a_{i0} = 0, \\ a_{i0}\xi^i + a_{00} = 0. \end{cases} \tag{2}$$

○ **Необходимое условие признака**. Пусть $\gamma(1)$ — коническая поверхность второго порядка с вершиной в точке $M_0(\xi^i)$. Возьмем произвольный вектор $\vec{p} = (p^1, p^2, p^3) \overset{\text{def}}{=} \{p^i\}$ неасимптотического направления и проведем через M_0 прямую.

$$l: \quad x^i = p^i t + \xi^i, \tag{3}$$

параллельную вектору $\vec{p}$.

Параметры точек пересечения поверхности $\gamma(1)$ и прямой $l(3)$ является корнями квадратного уравнения (§ 1):

$$Pt^2 + 2Qt + \mathcal{R} = 0. \tag{4}$$

По определению конической поверхности прямая *l* (3) либо пересекает поверхность γ(1) в одной точке $M_0(\xi\varepsilon^i)$, либо целиком принадлежит γ.

В обоих случаях (см. § 1)

$$Q = 0 \Leftrightarrow a_{ij} \cdot p^i \cdot \xi^j + a_{i0} \cdot p^i = 0 \Leftrightarrow (a_{ij}\xi^j + a_{i0})p^i = 0.$$

Последнее соотношение есть тождество относительно $\{p^i\}$ так как вектор $\vec{p}$ выбирался произвольно, т. е.

$$a_{ij} \cdot \xi^j + a_{i0} = 0. \tag{5}$$

Точка

$$M_0 \in \gamma \Leftrightarrow a_{ij}\xi^i\xi^j + 2a_{i0}\xi^i + a_{00} = 0 \Leftrightarrow (a_{ij}\xi^j + a_{i0})\xi^i + (a_{i0}\xi^i + a_{00}) = 0.$$

Отсюда в силу (5) имеем

$$a_{i0}\xi^i + a_{00} = 0. \tag{6}$$

Из (5) и (6) следуют соотношения (2). ●

○ **Достаточное условие признака**. Пусть для поверхности γ (1) выполняются условия (2). Покажем, что поверхность γ(1) — коническая поверхность с вершиной в точке $M_0(\xi^i)$.

Прежде всего в силу (5) и (6) (или (2)) имеем

$$\mathcal{R} = F(\xi;\xi) = a_{ij}\xi^i\xi^j + 2a_{i0}\xi^i + a_{00} = (a_{ij}\xi^j + a_{i0})\xi^i + (a_{i0}\xi^i + a_{00}) = 0,$$

т. е. точка $M_0 \in \gamma(1)$.

Кроме того, из (5) следует, что

$$Q \overset{\text{def}}{=} a_{ij}\xi^j + a_{i0} = 0.$$

Проведем произвольную прямую *l* (3) через точку M_0. Тогда с учетом, что R = Q = 0, получаем следующее уравнение для определения параметров точек пересечения прямой *l* с поверхностью γ(1):

$$Pt^2 = 0. \tag{7}$$

Отсюда следует, что прямая *l*(3) либо целиком принадлежит поверхности γ(1) (P = 0), либо пересекает ее только в точке M_0 (t = 0). Таким образом, γ — коническая поверхность с вершиной в точке M_0 (по определению конической поверхности). ●

Доказанная теорема 6.6 позволяет установить другой критерий для определения конических поверхностей.

Рассмотрим матрицы:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{01} & a_{02} & a_{03} \end{bmatrix}, \quad \bar{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{10} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{20} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{30} \\ a_{01} & a_{02} & a_{03} & a_{00} \end{bmatrix} \qquad (8)$$

Система (2) совместна тогда и только тогда (теорема Кронекера-Капелли), когда ранги этих матриц равны между собой, т. е. $r_A = r_{\bar{A}}$.

Итак, имеет место

Теорема 6.7. *Для того чтобы поверхность $\gamma(1)$ была конической, необходимо и достаточно, чтобы ранги матриц (8) совпадали.*

Следствие. Если $\gamma(1)$ — коническая поверхность, то

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{10} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{30} \\ a_{01} & a_{02} & a_{03} & a_{04} \end{vmatrix} = 0. \qquad (9)$$

○ Действительно, если $\gamma(1)$ — коническая поверхность, то ранги матриц (8) совпадают, поэтому ранг $r_{\bar{A}} < 4$. Отсюда следует, что определитель этой матрицы равен нулю (9).

Пример. В аффинной системе координат дана поверхность второго порядка:

$$2x_1^2 - 3x_2^2 + 2x_3^2 - 8x_1x_3 + 4x_1 - 6x_2 + 8x_3 - \frac{35}{3} = 0 \qquad (10)$$

Показать,что эта поверхность является конической, и найти координаты вершины.

○ Для поверхности (10) уравнения (2) принимают вид

$$\begin{cases} 2\xi_1 + 0\xi_2 - 4\xi_3 + 2 = 0, \\ 0\xi_1 - 3\xi_2 + 0\xi_3 - 3 = 0, \\ -4\xi_1 + 0\xi_2 + 2\xi_3 + 4 = 0, \\ 2\xi_1 - 3\xi_2 + 4\xi_3 - \dfrac{35}{3} = 0. \end{cases}$$

Эта система имеет единственное решение $\xi_1 = \frac{5}{3}$, $\xi_2 = -1$, $\xi_3 = \frac{4}{3}$. На основании теоремы 6.6 утверждаем, что поверхность (10) коническая с вершиной в точке $M_0\left(\frac{5}{3};\ -1;\ \frac{4}{3}\right)$. ●

§ 5. Сопряженные и главные направления относительно поверхности 2-го порядка

1. **Сопряженные направления**.

Пусть в аффинной системе координат поверхность второго порядка γ задана уравнением

$$\gamma:\quad F(x;x) \overset{\text{def}}{=} a_{ij}x^i x^j + 2a_{i0}x^i + a_{00} = 0. \tag{1}$$

Определение. *Если координаты двух ненулевых векторов* $\vec{p} = \{p^i\}$ *и* $\vec{q} = \{q^j\}$ *удовлетворяют соотношению*

$$a_{ij}p^i q^j = 0, \tag{2}$$

то векторы называются сопряженными относительно поверхности γ (1).

Очевидно понятие сопряженности есть взаимное понятие, так как

$$a_{ij}p^i q^j = a_{ij}q^i p^j.$$

Понятие сопряженности в некотором смысле является обобщением понятия **асимптотичности**.

Действительно, если сопряженные векторы $\vec{p}$ и $\vec{q}$ коллинеарны, то

$$\vec{p} = \lambda\vec{q} \Leftrightarrow p^i = \lambda q^i. \tag{3}$$

Подставив p^i(3) в соотношения (2), получим условие асимптотичности:

$$a_{ij}q^iq^j = 0, \tag{4}$$

Можно показать [§ 5, п. 4], что понятие сопряженности векторов относительно γ(1) не зависит от выбора системы координат и, следовательно, является геометрическим понятием.

Основные свойства понятия сопряженности относительно γ(1):

1) Если векторы $\vec{p}$ и $\vec{q}$ сопряжены относительно γ, то и векторы $\lambda\vec{p}$ и $\mu\vec{q}$, где $\lambda \neq 0$; $\mu \neq 0$, сопряжены относительно γ.

2) Если вектор $\vec{p}$ сопряжен с тремя векторами $\vec{q}$, $\vec{m}$, $\vec{n}$, то он сопряжен с любой линейной комбинацией этих векторов.

В частности, если вектор $\vec{p}$ сопряжен с тремя некомпланарными векторами $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, то он сопряжен с любым вектором пространства, так как любой вектор пространства линейно выражается через базис $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ пространства.

3) Для того чтобы базисные векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ были взаимно сопряжены относительно γ(1), необходимо и достаточно, чтобы

$$a_{12} = a_{13} = a_{23} = 0. \tag{5}$$

4) Для любой плоскости ω пространства существуют два вектора $\vec{p} \perp \vec{q}$, которые параллельны плоскости ω и сопряжены относительно поверхности γ(1).

2. Главные направления.

Определение. *Направление нулевого вектора* $\vec{p}$ *называется главным относительно поверхности* γ*(1), если любой вектор* $\vec{x} \perp \vec{p}$ *сопряжен с ним*.

Найдем условия, при которых данный вектор имеет главное направление.

Теорема 6.8. *Если поверхность второго порядка γ задана в прямоугольной декартовой системе координат уравнением (1), то, для того чтобы ненулевой вектор $\vec{p} = \{p^i\}$ имел главное направление относительно γ, необходимо и достаточно, чтобы существовало такое число λ, при котором координаты вектора $\vec{p}$ удовлетворяли условиям*

$$a_{ij}p^j = \lambda p^i. \tag{6}$$

○ **Необходимость условий (6).** Пусть $\vec{p} = \{p^i\}$ имеет главное направление относительно поверхности γ(1). Это означает, что если $\vec{x} \perp \vec{p}$, то $\vec{x} = \{x^i\}$ сопряжен с $\vec{p}$, т. е. если

$$x^1p^1 + x^2p^2 + x^3p^3 = 0, \tag{7}$$

то

$$a_{ij}p^jx^i = 0 \Leftrightarrow a_{1j}p^jx^1 + a_{2j}p^jx^2 + a_{3j}p^jx^3 = 0. \tag{8}$$

Условия (7) и (8) выполняются одновременно тогда и только тогда, когда коэффициенты при x^1, x^2, x^3 пропорциональны, т. е. существует число λ такое, что выполняются соотношения (6).

Достаточность условий (6). Пусть существует число λ такое, что выполняются соотношения (6). Тогда для всякого вектора $\vec{x}$, удовлетворяющего условию (7), выполняется также условие (8), т. е. вектор $\vec{p}$ имеет **главное направление**. ●

Доказанная теорема 6.8 дает возможность решить задачу об определении главных направление данной поверхности γ(1). Систему (6) представим в виде

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)p^1 + a_{12}p^2 + a_{13}p^3 = 0, \\ a_{21}p^1 + (a_{22} - \lambda)p^2 + a_{23}p^3 = 0, \\ a_{31} + a_{32}p^2 + (a_{33} - \lambda)p^3 = 0. \end{cases} \tag{9}$$

Рассмотрим эту систему как систему линейных уравнений относительно $\{p^i\}$. Система (9) имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда определитель системы равен нулю, т. е.

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0. \qquad (10)$$

Заметим, что кубическое уравнение (10) относительно λ всегда имеет по крайней мере, один действительный корень. Решив уравнение (10), найдем значение λ и, подставив найденное значение в уравнения (9), определим координаты вектора, имеющего главное направление. Таким образом, каждому действительному значению λ соответствует по крайней мере один вектор главного направления. Может случится и так, что данному значению λ соответствует несколько попарно неколлинеарных векторов главного направления, даже бесконечное множество таких векторов.

Уравнение (10) называется **характеристическим уравнением** поверхности $\gamma(1)$, а его корни — **характеристическими числами** поверхности $\gamma(1)$.

Теорема 6.9. *Каждая поверхность второго порядка имеет по крайней мере три взаимно перпендикулярных главных направления.*

○ Характеристическое уравнение (10) как алгебраическое уравнение третьей степени с действительными коэффициентами имеет имеет по крайней мере один действительный корень λ_1. Подставив значение этого корня в уравнения (9), получим ненулевое решение $\vec{p} = (p^i, p^2, p^{3)})$ — вектор главного направления.

Пусть плоскость $\omega \perp \vec{p}$. По свойству (4) сопряженных направлений найдутся два вектора $\vec{m}$ и $\vec{n}$ такие, что $\vec{m} \perp \vec{n}$, $\vec{m} \,||\, \omega$, $\vec{n} \,||\, \omega$ и, кроме того, они сопряжены относительно поверхности $\gamma(1)$.

Таким образом, мы имеем тройку попарно перпендикулярных и попарно сопряженных векторов $(\vec{p}, \vec{m}, \vec{n})$. Векторы $\vec{p}, \vec{m}, \vec{n}$ определяют главные направления поверхности $\gamma(1)$. ●

Теорема 6.10. *Для того, чтобы $\vec{p} \neq \vec{0}$ был вектором главного и асимптотического направления поверхности γ (1), необходимо и достаточно, чтобы координаты вектора $\vec{p} = \{p^i\}$ удовлетворяли условиям*

$$a_{ij} p^j = 0. \qquad (11)$$

○ **Необходимость.** Если вектор $\vec{p}$ — есть вектор главного и одновременно асимптотического направления, то $\lambda = 0$ и из (6) следует (11).

Достаточность. Из (11) и (6) следует, что $\lambda = 0$, т. е. вектор $\vec{p}$ — есть вектор плавного и асимптотического направления поверхности $\gamma(1)$. ●

Пример. Определить векторы главных направлений относительно поверхности второго порядка.

$$7x_1^2 + 6x_2^2 + 5x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3 - x_1 + 2x_2 - 30 = 0.$$

○ Составим характеристическое уравнение данной поверхности

$$\begin{vmatrix} 7-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 6-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^3 - 18\lambda^2 + 99\lambda - 162 = 0. \qquad (12)$$

Находим корни уравнения (12): $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 9$, $\lambda_3 = 6$. Координаты вектора главного направления, соответствующего корню $\lambda_1 = 3$, определяются из соотношений (9):

$$4p_1 - 2p_2 = 0, \;\; -2p_1 + 3p_2 - 2p_3 = 0, \;\; -2p_2 + 2p_3 = 0.$$

Рассмотрим первые два уравнения. Учитывая, что определитель, составленный из коэффициентов при p_1 и p_2 в этих уравнениях не равен нулю, мы приходим к выводу, что третье уравнение есть следствие первых двух. Из первых двух уравнений получаем:

$$p_1 = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} t = 4t, \;\; p_2 = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} t = 8t, \;\; p_3 = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} t = 8t,$$

где $t \neq 0$. В частности, при $t = 1$ получаем $\vec{p} = (4;8;8)$, который является вектором главного направления, соответствующего характеристическому числу 3. Аналогично, если $\lambda_2 = 9$ получаем соответствующий вектор главного направления $\vec{q} = (2;-2;1)$ и для числа $\lambda_3 = 6$ – $\vec{r} = (2;1;-2)$. ●

§ 6. Диаметральные плоскости, центр поверхности 2-го порядка

1. Пусть в аффинной системе координат задана поверхность второго порядка γ уравнением

$$\gamma: \quad f(x,x) \overset{\text{def}}{=} a_{ij}x^i x^j + 2a_{i0}x^i + a_{00} = 0. \tag{1}$$

Теорема 6.11. *Геометрическое место середин всех хорд поверхности (1), параллельных вектору $\vec{p} = \{p^i\}$ неасимптотического направления, есть плоскость, заданная уравнением*

$$Q \overset{\text{def}}{=} a_{ij}p^i x^j + a_{i0}p^i = 0. \tag{2}$$

Доказательство теоремы 6.11 аналогично соответствующей теореме 5.6 из теории линий второго порядка (глава 5).

Плоскость (2) называется **диаметральной плоскостью поверхности второго порядка**, соответствующей (или сопряженной) вектору $\vec{p}$.

Итак, каждому вектору $\vec{p}$ **неасимптотического направления** соответствует своя диаметральная плоскость (2):

$$(a_{ij}x^j + a_{i0})p^i = 0. \tag{2*}$$

Выясним геометрический смысл понятия сопряженности векторов $\vec{p}$ и $\vec{q} = \{q^i\}$ относительно поверхности (1):

$$a_{ij}p^i q^j = 0 \Leftrightarrow (a_{ij}q^j)p^i = 0. \tag{3}$$

Сравнивая (3) и (2*) убеждаемся, что соотношение(3) есть необходимое и достаточное условие параллельности вектора $\vec{q}$ и плоскости (2*).

Отсюда следует вывод (геометрический смысл сопряженности векторов относительно поверхности γ):

если $\vec{p}$ не имеет асимптотического направления, то для того, чтобы вектор $\vec{q}$ был сопряжен с вектором $\vec{p}$, необходимо и достаточно, чтобы $\vec{q}$ был параллелен диаметральной плоскости, соответствующей (сопряженной) вектору $\vec{p}$.

2. Определение. *Диаметральная плоскость, являющаяся плоскостью симметрии поверхности γ(1), называется главной (диаметральной плоскостью).*

Диаметральная плоскость будет главной тогда и только тогда, когда она ортогональна вектору, которому она сопряжена (соответствует).

Таким образом, для того чтобы диаметральная плоскость была главной, необходимо и достаточно, чтобы соответствующий ей вектор имел **главное**, но **не асимптотическое направление**.

Это предложение позволяет практически определять все главные диаметральные плоскости.

3. Центр поверхности второго порядка.

Определение. *Точка С пространства называется центром поверхности γ (1), если поверхность симметрична относительно С*.

Это значит, что для всякой точки М, принадлежащей поверхности, точка М*, симметричная М относительно С, также принадлежит поверхности.

Теорема 6.12. *Для того чтобы С(x_0^i) была центром поверхности γ (1), необходимо и достаточно, чтобы координаты этой точки удовлетворяли системе уравнений*

$$a_{ij}x_0^j + a_{i0} = 0. \tag{4}$$

○ **Необходимость условия (4).** Пусть *С*(x_0^i) — центр поверхности γ(1). Возьмем три некомпланарных вектора $\vec{p} = \{p^i\}$, $\vec{q} = \{q^i\}$, $\vec{m} = \{m^i\}$, не имеющих асимптотических направлений относительно γ(1). Если через точку С провести три прямые, параллельные векторам $\vec{p}, \vec{q}, \vec{m}$, то каждая из этих прямых пересекается с поверхностью соответственно в двух точках P_1, P_2; Q_1, Q_2; M_1, M_2. Точка С как центр поверхности является серединой отрезков P_1P_2, Q_1Q_2, M_1M_2. Отсюда следует, что С принадлежит диаметральным плоскостям, соответствующим (сопряженным) векторам $\vec{p}, \vec{q}, \vec{m}$, :

$$\begin{cases} (a_{ij} \cdot x_0^j + a_{i0})p^i = 0, \\ (a_{ij} \cdot x_0^j + a_{i0})q^i = 0, \\ (a_{ij} \cdot x_0^j + a_{i0})m^i = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Так как $(\vec{p}, \vec{q}, \vec{m}) \neq 0,$ то система (5) имеет нулевое решение, т. е.

$$a_{ij}x_0^j + a_{i0} = 0. \bullet$$

○ **Достаточность условия (4).** Пусть координаты точки C(x_0^i) удовлетворяют соотношениям (4). Возьмем произвольную точку $M_1(x_1^i) \in \gamma$ и докажем, что точка M*(x_2^i) симметричная точке M_1 относительно C, также принадлежит $\gamma(1)$. Имеем

$$x_1^i + x_2^i = 2x_0^i \Leftrightarrow x_2^i = 2x_0^i - x_1^i.$$

Подставляя x_2^i в уравнение (1) убеждаемся, что координаты точки M* удовлетворяют уравнению (1). Итак, мы доказали, что точка M_2, симметричная любой точке $M_1 \in \gamma$ относительно точки C, принадлежит этой поверхности γ, т. е. C — центр поверхности γ. ●

Доказанная теорема 6.12 позволяет исследовать вопрос о существовании центров поверхностей второго порядка. Задача сводится к исследованию системы уравнений (4).

Рассмотрим матрицы

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{10} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{20} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{30} \end{bmatrix} \qquad (6)$$

и пусть $r_B = r, \;\; r_{\bar{B}} = R.$ Очевидно, что r ≤ R.

Возможны следующие случаи:

1) r = R = 3. В этом случае система (4) имеет единственное решение и соответственно этому поверхность $\gamma(1)$ **имеет один и только один центр**.

Определение. *Поверхности γ (1), имеющие один и только один центр, называются **центральными поверхностями второго порядка**.*

2) R = r = 2. В данном случае система (4) совместима и имеет бесконечное множество решений. Так как R = 2, то система содержит два линейно независимых решения. Значит, точки, координатами которых являются решения системы (4), в данном случае лежат на одной прямой.

Итак, **при r = R = 2 поверхность имеет прямую центров, определяемую системой (4).**

3) R = r = 1. Система (4) имеет бесконечное множество решений. В этом случае два уравнения являются следствиями одного, поэтому **поверхность γ(1) имеет плоскость центров**.

4) r < R. Система (4) не имеет ни одного решения, в соответствии с этим **поверхность не имеет ни одного центра**.

Определение. *Поверхности γ, не имеющие ни одного центра или имеющие бесконечное множество центров, называются нецентральными поверхностями второго порядка*.

Следствие. Поверхность γ(1) является центральной тогда и только тогда, когда

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0. \qquad (7)$$

Пример. Найти центр поверхности второго порядка

$$2x_1^2 + 12x_2^2 + 4x_3^2 + 8x_1x_2 - 4x_1x_3 + 12x_2x_3 - 10x_1 + 14x_3 + 7 = 0.$$

○ Для данной поверхности составим систему (4):

$$\begin{cases} 2x_0^1 + 4x_0^2 - 2x_0^3 - 5 = 0, \\ 4x_0^1 + 12x_0^2 + 6x_0^3 = 0, \\ -2x_0^1 + 6x_0^2 + 4x_0^3 + 7 = 0. \end{cases}$$

Так как $\Delta_3 \neq 0$, то система имеет единственное решение: $x_0^1 = \dfrac{3}{2}$; $x_0^2 = 0$; $x_0^3 = -1$. ●

4. В заключение рассмотрим несколько теорем, весьма полезных для практики.

Теорема 6.13. *Для того чтобы начало координат совпадало с центром поверхности, необходимо и достаточно, чтобы*

$$a_{10} = a_{20} = a_{30} = 0. \qquad (8)$$

Следствие. Если поверхность $\gamma(1)$ не имеет ни одного центра, то существует система координат, относительно которой хотя бы один из коэффициентов a_{10}, a_{20}, a_{30} отличен от нуля.

Теорема 6.14. *Всякая поверхность γ (1), имеющая бесконечное множество центров, является цилиндрической поверхностью*.

Если цилиндрическая поверхность $\gamma(1)$ имеет хотя бы один центр, то она имеет бесконечное множество центров.

○ 1) Пусть поверхность $\gamma(1)$ имеет бесконечное множество центров. Тогда $\overline{B} < 3$ и в силу теоремы 6.5. следует, что поверхность γ — цилиндрическая.

2) Пусть поверхность γ — цилиндрическая. Тогда $\overline{B} = R \le 2$. Если поверхность $\gamma(1)$ имеет один центр и R ≤ 2 (см. п. 3 § 6), то поверхность имеет и бесконечное множество центров. ●

Теорема 6.15. *Для того, чтобы поверхность $\gamma(1)$ была конической, необходимо и достаточно, чтобы она имела по крайней мере один центр, принадлежащий самой поверхности. Этот центр будет вершиной конической поверхности.*

§ 7. Упрощение уравнения поверхности второго порядка путем преобразования системы координат

1. Пусть в прямоугольной декартовой системе координат поверхность второго порядка γ задана уравнением:

$$\gamma: \quad \tilde{a}_{ij}\tilde{x}^i\tilde{x}^j + 2\tilde{a}_{i0}\tilde{x}^i + \tilde{a}_{00} = 0. \qquad (1)$$

Из теоремы 6.9 следует

Теорема 6.16. *Какова бы ни была поверхность второго порядка, всегда существует такая прямоугольная декартова система координат, в которой уравнение поверхности имеет следующий вид*:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{10}x + 2a_{20}y + 2a_{30}z + a_{00} = 0. \qquad (2)$$

○ В силу теоремы 6.9 поверхность имеет три взаимно перпендикулярных главных направления.

Выберем новую систему координат так, чтобы новые координатные оси имели главные направления. Пусть $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ — новые координатные векторы, тогда каждый из них имеет главное направление и, следовательно, все три вектора попарно сопряжены. Из условий сопряженности векторов $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ следует $a_{12} = 0$; $a_{13} = 0$; $a_{23} = 0$, т.е. поверхность $\gamma(1)$ примет вид (2). ●

Из теоремы 6.16 следует, что путем поворота системы координат всегда можно упростить уравнение поверхности $\gamma(1)$, приведя его к виду, не содержащему произведений переменных.

2. Согласно теореме 6.13, если поверхность $\gamma(1)$ имеет хотя бы один центр то, приняв его за начало координат, мы можем добиться того, чтобы уравнение поверхности не содержало членов первой степени. Итак, принимая во внимание теорему 6.16, приходим к выводу.

Теорема 6.17. *Если поверхность γ (1) имеет*:

а) *один центр, то всегда существует такая прямоугольная декартова система координат, в которой уравнение поверхности γ (1) имеет вид*

$$a_{11}\overset{*}{x}{}_1^2 + a_{22}\overset{*}{x}{}_2^2 + a_{33}\overset{*}{x}{}_3^2 + a_{00}^* = 0, \tag{3}$$

б) *прямую центров, то уравнение (1) приводится к виду*

$$a_{11}\overset{*}{x}{}_1^2 + a_{22}\overset{*}{x}{}_2^2 + a_{00}^* = 0, \tag{4}$$

в) *плоскость центров, то уравнение (1) приводится к виду*

$$a_{11}\overset{*}{x}{}_1^2 + a_{00}^* = 0. \tag{5}$$

3. Пусть поверхность (2) не имеет ни одного центра. Согласно следствию теоремы 6.13. в любой системе координат уравнение (2) содержит хотя бы один член первой степени.

Теорема 6.18. *Если поверхность $\gamma(2)$ не имеет ни одного центра, то всегда существует такая прямоугольная декартова система координат, в которой уравнение поверхности имеет вид*

$$A\overset{*}{x}{}^2 + B\overset{*}{y}{}^2 = \overset{*}{z} \qquad (6)$$

или

$$A\overset{*}{x}{}^2 = \overset{*}{z}. \qquad (7)$$

○ Так как поверхность $\gamma(2)$ не имеет ни одного центра, то хотя бы один из коэффициентов a_{11}, a_{22}, a_{33} равен нулю. Действительно, если все коэффициенты $a_{11} \neq 0$; $a_{22} \neq 0$; $a_{33} \neq 0$, то $r_B = 3$, что означает: поверхность $\gamma(2)$ имеет центр. Не нарушая общности, можно предположить, что $a_{33} = 0$. Возможны два случая: а) $a_{11} \neq 0$; $a_{22} \neq 0$,

б) $a_{11} \neq 0$, $a_{22} = 0 \vee a_{22} \neq 0$, $a_{11} = 0$.

Рассмотрим каждый их этих случаев в отдельности.

а) $a_{11} \neq 0$; $a_{22} \neq 0$. Уравнение (2) запишем так:

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{10}x_1 + 2a_{20}x_2 + 2a_{30}x_3 + a_{00} = 0. \qquad (8)$$

Рассмотрим матрицы

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \overline{B} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & a_{10} \\ 0 & a_{22} & 0 & a_{20} \\ 0 & 0 & 0 & a_{30} \end{bmatrix}.$$

$r_B = 2$, тогда $r_{\overline{B}} = 3$ (поверхность не имеет центров). Отсюда находим, что $a_{30} \neq 0$. Разделив уравнение (8) на $-2a_{30}$ и вводя новые обозначения для коэффициентов, получаем

$$Ax_1^2 + Bx_2^2 + 2Cx_1 + 2Dx_2 + F = x_3, \qquad (9)$$

где $A \neq 0$, $B \neq 0$.

Преобразуем уравнение (9)

$$A\left(x_1 + \frac{C}{A}\right)^2 + B\left(x_2 + \frac{D}{B}\right)^2 = x_3 - F + \frac{C^2}{A} + \frac{D^2}{B}.$$

Введем новую прямоугольную декартову систему координат так, чтобы

$$\overset{*}{x}_1 = x_1 + \frac{C}{A}; \ \overset{*}{x}_2 = x_2 + \frac{D}{B}; \ \overset{*}{x}_3 = x_3 - F + \frac{C^2}{A^2} + \frac{D^2}{B}.$$

Тогда уравнение (9) приводится к виду (6).

б) $a_{11} \neq 0$, $a_{22} = a_{33} = 0$. В данном случае уравнение (2) примет вид

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{10}x_1 + 2a_{20}x_2 + 2a_{30}x_3 + a_{00} = 0. \qquad (10)$$

Так как поверхность (10) не имеет ни одного центра то, так же как в пункте а), можно показать, что хотя бы один из коэффициентов a_{20} или a_{30} не равен нулю.

Сначала рассмотрим случай, когда один из коэффициентов равен нулю: $a_{20} = 0 \vee a_{30} = 0$. Разделив уравнение (10) на $-2a_{30} \neq 0$ и вводя новые обозначения для коэффициентов, получаем:

$$Ax_1^2 + 2B_1x_1 + C = x_3,$$

где $A \neq 0$.

Преобразуем это уравнение:

$$A\left(x_1 + \frac{B}{A}\right)^2 = x_3 - C + \frac{B^2}{A}.$$

Введем новую прямоугольную декартову систему координат так, чтобы

$$\overset{*}{x}_1 = x_1 + \frac{B}{A}; \quad \overset{*}{x}_2 = x_2; \quad \overset{*}{x}_3 = x_3 - C + \frac{B^2}{A}.$$

В этой системе координат уравнение поверхности (2) примет вид (7).

Можно показать, что при $a_{20} \neq 0$; $a_{30} \neq 0$ уравнение (10) приводится к виду (7). ●

Резюмируя результаты § 7, приходим к выводу

Теорема 6.19. *Уравнение поверхности γ (1), заданной в прямоугольной декартовой системе координат, путем надлежащего выбора новой прямоугольной декартовой системы координат можно привести к одному из следующих видов:*

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + D = 0, \quad A \neq 0,\ B \neq 0,\ C \neq 0; \qquad (11)$$

$$Ax^2 + By^2 = z, \quad A \neq 0,\ B \neq 0; \qquad (12)$$

$$Ax^2 = z, \quad A \neq 0; \qquad (13)$$

$$Ax^2 + By^2 = C, \quad A \neq 0, \; B \neq 0; \tag{14}$$

$$Ax^2 = C, \quad A \neq 0. \tag{15}$$

§ 8. Классификация поверхностей второго порядка

1. Центральные поверхности второго порядка.

Из теоремы 6.19 следует, что уравнение любой центральной поверхности 2-го порядка можно привести к виду (11) § 7:

$$\overset{*}{A} x^2 + \overset{*}{B} y^2 + \overset{*}{C} z^2 + \overset{*}{D} = 0, \tag{1}$$

где $\overset{*}{A} \neq 0, \;\; \overset{*}{B} \neq 0, \;\; \overset{*}{C} \neq 0$.

Рассмотрим два случая:

I. $\overset{*}{D} \neq 0.$ Разделив на $(-\overset{*}{D})$ и переобозначив коэффициенты, получим

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1. \tag{2}$$

а) A > 0, B > 0, C > 0, $A = \dfrac{1}{a^2}, \;\; B = \dfrac{1}{b^2}, \;\; C = \dfrac{1}{c^2}.$

Уравнение (2) в этом случае задает **эллипсоид**:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \tag{3}$$

б) A > 0; B >0; C < 0 (один из коэффициентов отрицателен). Уравнение (3) приводится к виду

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1. \tag{4}$$

Поверхность (4) называется **однополостным гиперболоидом**.

в) A < 0, B < 0, C > 0 (два коэффициента в уравнении (2) отрицательны). Тогда

$$(2) \Leftrightarrow -\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1. \tag{5}$$

Поверхность (5) называется **двуполостным гиперболоидом**.

г) A < 0, B < 0, C < 0. Уравнение (2) принимает вид:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1. \tag{6}$$

Уравнение (6) задает **мнимый эллипсоид**.

II. $\overset{*}{D} = 0$. Уравнение (2) запишем в виде

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 0. \tag{7}$$

а) A > 0, B > 0, C > 0 (или A < 0, B < 0, C < 0).

Уравнение (7) приводится к виду

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0. \tag{8}$$

Уравнение (8) задает **мнимый конус**.

б) A >0, B > 0, C < 0 (один из коэффициентов в уравнении (7) отрицателен или любые два).

Уравнение (7) в этих случаях приводится к виде

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0. \tag{9}$$

и задает **действительный конус**.

Итак, имеется **шесть и только шесть видов центральных поверхностей 2-го порядка**.

2. Поверхности 2-го порядка, не имеющие ни одного центра.

Согласно теореме 6.19 уравнение такой поверхности приводится к виду (12) § 7 или (13) § 7:

$$Ax^2 + By^2 = z,\ A \neq 0;\ B \neq 0. \tag{10}$$

$$Ax^2 = z,\ A \neq 0. \tag{11}$$

Рассмотрим сначала поверхности вида (10).

а) $A > 0;\ B > 0 \vee A < 0;\ B < 0$.

Если ввести обозначения $A = \frac{1}{2a^2};\quad B = \frac{1}{2b^2}$, то уравнение (10) приводится к виду

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z\,. \tag{12}$$

Поверхность (12) называется **эллиптическим параболоидом**.

б) $A > 0,\ B < 0 \vee A < 0,\ B > 0$.

В этом случае поверхность (10) имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z. \tag{13}$$

и называется **гиперболическим параболоидом**.

Рассмотрим поверхность (11). Если ввести обозначение $A = \frac{1}{2p}$, то уравнение (11) принимает канонический вид

$$x^2 = 2pz. \tag{14}$$

Поверхность (14) называется **параболическим цилиндром**.

Вывод: *Существует три и только три поверхности второго порядка (1) эллиптический параболоид, 2) гиперболический параболоид, 3) параболический цилиндр) не имеющих ни одного центра*.

3. Поверхности второго порядка, имеющие прямую центров.

Согласно теореме 6.19 уравнение любой такой поверхности приводится к виду

$$Ax^2 + By^2 = C,\ A \neq 0,\ B \neq 0. \tag{15}$$

Рассмотрим два случая:

I. $C \neq 0$. а) $A > 0$; $B > 0$; $C > 0$. Разделим на C обе части уравнения (15) и переобозначив коэффициенты приведем уравнение к каноническому виду:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{16}$$

Поверхность (16) называется **эллиптическим цилиндром**.

б) $A > 0$; $B < 0$; $C > 0 \vee (A < 0;\ B > 0;\ C < 0)$.

В этом случае уравнение (15) приводится к виду

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{17}$$

Уравнение (17) задает **гиперболический цилиндр**.

в) $A > 0$; $B > 0$; $C < 0 \vee (A < 0;\ B < 0;\ C > 0)$.

Тогда уравнение (15) имеет канонический вид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1. \tag{18}$$

и задает **мнимый эллиптический цилиндр**.

II. С = 0. Введем обозначения $A=\frac{1}{a^2}$; $B=\frac{1}{b^2}$.

а) A > 0; B > 0; $\vee$ A < 0; B < 0. Уравнение (15 принимает канонический вид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0. \tag{19}$$

Уравнением (19) задается **пара мнимых пересекающихся плоскостей**.

б) A > 0; B < 0 $\vee$ A < 0; B > 0. В этом случае уравнение (150 имеет такой канонический вид:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0. \tag{20}$$

Уравнение (20) задает **пару действительных пересекающихся плоскостей.**

Вывод: *Существуют пять и только пять видов поверхностей второго порядка, имеющих прямую центров*.

4. Поверхности 2-го порядка, имеющие плоскость центров.

Уравнение такой поверхности согласно теореме 6.19 приводится к виду

$$Ax^2 = C,\ A \neq 0. \tag{21}$$

Возможны случаи:

I. C ≠ 0.

а) A > 0; C > 0 $\vee$ (A < 0; C < 0). В этом случае имеем уравнение вида $\left(a^2=\frac{C}{A}\right)$:

$$x^2 - a^2 = 0. \tag{22}$$

Поверхность (22) — есть **пара параллельных действительных плоскостей**.

б) A > 0; C < 0 $\vee$ (A < 0; C > 0). Тогда уравнение (21) приводится к виду

$$x^2 + a^2 = 0. \tag{23}$$

Уравнение (23) задает **пару мнимых параллельных плоскостей**.

II. C = 0. Уравнение (21) имеет вид $x^2 = 0$ и задает **пару совпавших плоскостей**.

Вывод: *Существуют три и только три вида поверхностей второго порядка, имеющих плоскость центров*.

Резюмируя результаты § 8, мы приходим к выводу, что существуют семнадцать и только семнадцать поверхностей второго порядка (см. таблицу):

1. Эллипсоид	$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{x_2^2}{b^2}+\frac{x_3^2}{c^2}=1$	1
2. Однополостный гиперболоид	$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{x_2^2}{b^2}-\frac{x_3^2}{c^2}=1$	1
3. Двуполостный гиперболоид	$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{x_2^2}{b^2}-\frac{x_3^2}{c^2}=-1$	1
4. Мнимый эллипсоид	$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{x_2^2}{b^2}+\frac{x_3^2}{c^2}=-1$	1
5. Коническая поверхность	$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{x_2^2}{b^2}-\frac{x_3^2}{c^2}=0$	1
6. Мнимый конус	$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{x_2^2}{b^2}+\frac{x_3^2}{c^2}=0$	1
7. Эллиптический параболоид	$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{x_2^2}{b^2}=2x_3$	0
8. Гиперболический параболоид	$\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{x_2^2}{b^2}=2x_3$	0
9. Эллиптический цилиндр	$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{x_2^2}{b^2}=1$	∞^4
10. Гиперболический цилиндр	$\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{x_2^2}{b^2}=1$	∞^1

Окончание табл.

11. Мнимый эллиптический цилиндр	$\dfrac{x_1^2}{a^2}+\dfrac{x_2^2}{b^2}=-1$	∞^1
12. Параболический цилиндр	$x_1^2=2px_3$	0
13. Пара пересекающихся плоскостей	$\dfrac{x_1^2}{a^2}-\dfrac{x_2^2}{b^2}=0$	∞^1
14. Пара мнимых плоскостей	$\dfrac{x_1^2}{a^2}+\dfrac{x_2^2}{b^2}=0$	∞^1
15. Пара параллельных плоскостей	$x_1^2-a^2=0$	∞^2
16. Пара мнимых параллельных плоскостей	$x_1^2+a^2=0$	∞^2
17. Пара совпавших плоскостей	$x_1^2=0$	∞^2

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Атанасян Л. С*. Геометрия. Ч. 1. М. : Просвещение, 1973.

2. *Атанасян Л. С.* Аналитическая геометрия в пространстве. М. : Просвещение, 1970.

3. *Атанасян Л. С., Базылев В. Т.* Геометрия. Ч. 1. М. : Просвещение, 1986.

4. *Атанасян Л. С., Базылев В. Т.* Геометрия. Ч. 2. М. : Просвещение, 1987.

5. *Моденов П. С., Пархоменко А. С*. Сборник задач по аналитической геометрии. М. : Наука, 1976.

6. *Атанасян Л. С., Атанасян В. А.* Сборник задач по аналитической геометрии. М. : Просвещение, 1968.

7. *Попов Ю. И.* Векторы в школьном курсе геометрии : методическое пособие. Калининград : Янтарный сказ, 1998.

8. *Попов Ю. И.* Методы решения стереометрических задач с помощью вкторного аппарата : учебное пособие. Калининград : БФУ им. И. Канта, 2012.

9. *Попов Ю. И.* Стереометрия. Методы и приемы решения задач. Калининград : БФУ им. И. Канта, 2010.

10. *Цубербиллер О. Н.* Задачи и упражнения по аналитической геометрии. СПб. ; М. ; Краснодар, 2003.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

Попов Юрий Иванович

ЛЕКЦИИ
ПО АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

Учебное пособие

Компьютерная верстка *Г. И. Винокуровой*

Подписано в печать 09.09.2013 г.
Формат $70 \times 100\ ^1/_{16}$. Усл. печ. л. 17,2
Тираж 100 экз. Заказ 158

Отпечатано полиграфическим отделом
Издательства Балтийского федерального университета им. И. Канта
236041, г. Калининград, ул. А. Невского, 14