

# **Paradigmas de Programación**

## **Sistemas deductivos**

### **Deducción natural para lógica proposicional**

**2do cuatrimestre de 2024**

Departamento de Computación

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Universidad de Buenos Aires

# Sistemas deductivos

## Sistema deductivo (informalmente)

Brinda herramientas y principios para **razonar de manera rigurosa**.

# Sistemas deductivos

## Sistema deductivo

Dado por un conjunto de **axiomas** y **reglas de inferencia**, que tienen la siguiente estructura:

$$\frac{}{\langle \text{axioma} \rangle} \langle \text{nombre del axioma} \rangle$$
$$\frac{\langle \text{premisa}_0 \rangle \quad \langle \text{premisa}_1 \rangle \quad \dots \quad \langle \text{premisa}_n \rangle}{\langle \text{conclusión} \rangle} \langle \text{nombre de la regla} \rangle$$

- ▶ **Axioma:** Afirmaciones básicas que se asumen como verdaderas (no se deducen de otras afirmaciones).
- ▶ **Reglas de inferencia:** Permiten derivar afirmaciones (teoremas) a partir de axiomas y otras afirmaciones.

**Nota:** Un axioma es una regla de inferencia sin premisas.

# Reglas de inferencia

## Regla de inferencia

$$\frac{\langle \text{premisa}_0 \rangle \quad \langle \text{premisa}_1 \rangle \quad \dots \quad \langle \text{premisa}_n \rangle}{\langle \text{conclusión} \rangle} \langle \text{nombre de la regla} \rangle$$

Las premisas son **condiciones suficientes** para la conclusión.

- ▶ Lectura de arriba hacia abajo:  
si tenemos evidencia de que valen las premisas,  
podemos deducir que vale la conclusión.
- ▶ Lectura de abajo hacia arriba:  
si queremos demostrar que vale la conclusión,  
alcanza con demostrar que valen las premisas.

# Sistemas deductivos

## Ejemplo: Sistema deductivo $\mathcal{A}$

► Axiomas:

$$\frac{}{\star > \blacksquare} \text{ax1}$$

$$\frac{}{\blacksquare > \blacktriangle} \text{ax2}$$

$$\frac{}{\blacktriangle > \bullet} \text{ax3}$$

► Regla de inferencia: definida por el *esquema*

$$\frac{X > Y \quad Y > Z}{X > Z} \text{trans}$$

$X$ ,  $Y$  y  $Z$  son variables esquemáticas / *metavariabes*:  
se pueden instanciar de manera arbitraria

## Derivación

Un método sistemático para construir una demostración que muestra cómo una afirmación se deduce a partir de un conjunto de axiomas y reglas de inferencia.

# Árbol de Derivación

## Árbol de Derivación: Representación gráfica de una derivación

Un árbol **finito** donde

- ▶ Los nodos representan afirmaciones
- ▶ La raíz es la afirmación que se quiere probar (**conclusión**)
- ▶ Las ramas representan las reglas de inferencias que conectan a las afirmaciones.

Parte de ciertas premisas (hojas) y llega a una conclusión (raíz).

# Árbol de Derivación

## Ejemplo 1

$$\frac{}{\blacksquare > \blacktriangle} \text{ax2}$$

Se puede concluir  $\blacksquare > \blacktriangle$  sin premisas.

## Ejemplo 2

$$\frac{\star > \blacksquare \quad \blacksquare > \blacktriangle}{\star > \blacktriangle} \text{trans}$$

Se puede concluir  $\blacksquare > \blacktriangle$  a partir de las premisas  $\star > \blacksquare$  y  $\blacksquare > \blacktriangle$ .

## Ejemplo 3

$$\frac{\frac{\star > \blacksquare}{\star > \blacksquare} \text{ax1} \quad \frac{\blacksquare > \blacktriangle}{\blacksquare > \blacktriangle} \text{ax2}}{\star > \blacktriangle} \text{trans}$$

Se puede concluir  $\star > \blacktriangle$  sin premisas.



# Afirmación derivable (teorema)

## Afirmación derivable

Una afirmación es **derivable** si existe alguna derivación **sin premisas** que la tiene como conclusión.

Son las siguientes afirmaciones derivables?

▶ ★ > ▲

▶ ▲ > ★

# Lógica proposicional: Sintaxis

Suponemos dado un conjunto infinito de *variables proposicionales*:

$$\mathcal{P} = \{P, Q, R, \dots\}$$

## Fórmulas

Las fórmulas de la lógica proposicional se construyen con las siguientes reglas

- ▶ Una variable proposicional es una fórmula.
- ▶  $\perp$  es una fórmula (representa una contradicción).
- ▶ Si  $\tau$  es una fórmula, entonces  $\neg\tau$  es una fórmula.
- ▶ Si  $\tau$  y  $\sigma$  son fórmulas, entonces  $(\tau \wedge \sigma)$ ,  $(\tau \Rightarrow \sigma)$ , y  $(\tau \vee \sigma)$  son fórmulas.

Nota: Omitimos  $\iff$  por economía

# Lógica proposicional: Sintaxis (como sistema deductivo)

Suponemos dado un conjunto infinito de *variables proposicionales*:

$$\mathcal{P} = \{P, Q, R, \dots\}$$

## Sistema deductivo

La afirmación “ $X$  FORM” denota que  $X$  es una fórmula de la lógica proposicional

$$\begin{array}{c} \frac{P \in \mathcal{P}}{P \text{ FORM}} \text{FP} \quad \frac{}{\perp \text{ FORM}} \text{F}\perp \quad \frac{\tau \text{ FORM} \quad \sigma \text{ FORM}}{(\tau \wedge \sigma) \text{ FORM}} \text{F}\wedge \\[10pt] \frac{\tau \text{ FORM} \quad \sigma \text{ FORM}}{(\tau \Rightarrow \sigma) \text{ FORM}} \text{F}\Rightarrow \quad \frac{\tau \text{ FORM} \quad \sigma \text{ FORM}}{(\tau \vee \sigma) \text{ FORM}} \text{F}\vee \quad \frac{\tau \text{ FORM}}{\neg \tau \text{ FORM}} \text{F}\neg \end{array}$$

1. Demostrar  $\neg(P \Rightarrow (Q \Rightarrow P))$  FORM.

# Lógica proposicional: Sintaxis (gramáticas)

- ▶ Usualmente vamos a definir la sintaxis de lenguajes a través de sistemas deductivos.
- ▶ Vamos a escribirlos de maneras abreviadas, usando gramáticas (la definición de lo que es una gramática la verán en Teoría de Lenguajes)

## Gramática de la lógica proposicional

Las **fórmulas** son las expresiones que se pueden generar a partir de la siguiente gramática:

$$\tau, \sigma, \rho, \dots ::= P \mid \perp \mid (\tau \wedge \sigma) \mid (\tau \Rightarrow \sigma) \mid (\tau \vee \sigma) \mid \neg \tau$$

# Convenciones de notación

1. Omitimos los paréntesis más externos de las fórmulas.

$$\tau \wedge \neg(\sigma \vee \rho) = (\tau \wedge \neg(\sigma \vee \rho))$$

2. La implicación es asociativa a derecha.

$$\tau \Rightarrow \sigma \Rightarrow \rho = (\tau \Rightarrow (\sigma \Rightarrow \rho))$$

3. Ojo: los conectivos  $(\wedge, \vee)$  **no** son conmutativos ni asociativos.

$$\tau \vee (\sigma \vee \rho) \neq (\tau \vee \sigma) \vee \rho \qquad \tau \wedge \sigma \neq \sigma \wedge \tau$$

# Lógica Proposicional : Semántica

## Valuación

Una valuación es una función  $v : \mathcal{P} \rightarrow \{V, F\}$  que asigna valores de verdad a las variables proposicionales.

## $v \models \tau$

Una valuación  $v$  **satisface** una fórmula  $\tau$  si  $v \models \tau$ , donde:

$v \models P$	si y sólo si	$v(P) = V$
$v \models \tau \wedge \sigma$	si y sólo si	$v \models \tau$ y $v \models \sigma$
$v \models \tau \Rightarrow \sigma$	si y sólo si	$v \not\models \tau$ o $v \models \sigma$
$v \models \tau \vee \sigma$	si y sólo si	$v \models \tau$ o $v \models \sigma$
$v \models \neg \tau$	si y sólo si	$v \not\models \tau$

**Nota:**  $v \models \perp$  nunca vale

# Contextos y juicios

## Contexto

Un **contexto** es un conjunto finito de fórmulas.

Los notamos con letras griegas mayúsculas ( $\Gamma, \Delta, \Sigma, \dots$ ).

Por ejemplo:

$$\Gamma = \{P \Rightarrow Q, \neg Q\}$$

Generalmente omitimos las llaves; p. ej.:  $P \Rightarrow Q, \neg Q$ .

$$v \models \Gamma$$

Una valuación  $v$  satisface un contexto  $\Gamma$  (notación:  $v \models \Gamma$ ) si y sólo si  $v$  satisface a todas las fórmulas de  $\Gamma$ .

**Nota: Toda valuación  $v$  satisface al contexto vacío**



# Consecuencia lógica

## Consecuencia lógica

Una fórmula  $\tau$  es consecuencia lógica de un conjunto  $\Gamma$  (notación:  $\Gamma \models \tau$ ) si y sólo si cualquier valuación  $v$  que satisface a  $\Gamma$  también satisface a  $\tau$ .

### Notar:

- ▶  $A$  es verdadera para todas las valuaciones que satisfacen todas la fórmulas en  $\Gamma$
- ▶ Asumiendo que todas las fórmulas en  $\Gamma$  son verdaderas (hipótesis),  $A$  (tesis) es verdadera.

# Consecuencia lógica

## Ejemplo

1. Probar que  $P \wedge Q \models P$ .
2. Probar que  $P \vee Q, \neg Q \models P$ .
3. Probar que no vale  $P \vee Q \models Q$ .
4. Probar que  $P \models Q \vee \neg Q$ .
5. Probar que  $\models P \Rightarrow P$ .

# Limitaciones del método semántico

Hay varios problemas con un enfoque puramente semántico:

- ▶ Muy pocas lógicas tienen procedimientos de decisión como la lógica proposicional.
- ▶ El conjunto de hipótesis (axiomas) puede ser infinito.
- ▶ No evidencia la relación de la fórmula con hipótesis (Por ejemplo, dónde es necesaria una hipótesis).
- ▶ Difícil reconocer resultados intermedios (lemas).

# Enfoque deductivo

- ▶ Definir un sistema deductivo.
- ▶ Vamos a ver el sistema de **deducción natural** (existen otros):
  - ▶ Trabaja con afirmaciones de la forma:

$$\underbrace{\Gamma}_{\text{hipótesis}} \vdash \underbrace{\tau}_{\text{tesis}}$$

- ▶ Denominamos a estas afirmaciones **Juicios**
- ▶ Informalmente, un juicio afirma que a partir de las hipótesis en el contexto  $\Gamma$  es posible deducir la fórmula de la tesis.

## Ejemplo

Los siguientes van a ser juicios derivables:

$$P \vee Q, \neg Q \vdash P \qquad \vdash P \Rightarrow P$$

## Reglas de inferencia — axioma

El sistema de deducción natural tiene muchas reglas de inferencia.  
(Vamos de a poco)

### Axioma

$$\frac{}{\Gamma, \tau \vdash \tau}^{\text{ax}}$$

### Ejemplo

$$\frac{}{P \vdash P}^{\text{ax}} \quad \frac{}{P \Rightarrow Q, R \vdash P \Rightarrow Q}^{\text{ax}} \quad \frac{}{P, Q \wedge R, S \vdash Q \wedge R}^{\text{ax}}$$

Los siguientes juicios **no** se deducen de la regla ax:

$$P, Q \vdash R \quad \vdash P \Rightarrow P \quad P \wedge Q \vdash Q \wedge P \quad \neg\neg P \vdash P$$

# Reglas de inferencia — conjunción

## Introducción de la conjunción

$$\frac{\Gamma \vdash \tau \quad \Gamma \vdash \sigma}{\Gamma \vdash \tau \wedge \sigma} \wedge_i$$

## Eliminación de la conjunción

$$\frac{\Gamma \vdash \tau \wedge \sigma}{\Gamma \vdash \tau} \wedge_{e1} \quad \frac{\Gamma \vdash \tau \wedge \sigma}{\Gamma \vdash \sigma} \wedge_{e2}$$

1. Dar una derivación de  $P \wedge Q \vdash Q \wedge P$ .
2. Dar una derivación de  $P \wedge (Q \wedge R) \vdash (P \wedge Q) \wedge R$ .

# Reglas de inferencia — implicación

## Introducción de la implicación

$$\frac{\Gamma, \tau \vdash \sigma}{\Gamma \vdash \tau \Rightarrow \sigma} \Rightarrow_i$$

## Eliminación de la implicación

(*modus ponens*)

$$\frac{\Gamma \vdash \tau \Rightarrow \sigma \quad \Gamma \vdash \tau}{\Gamma \vdash \sigma} \Rightarrow_e$$

1. Dar una derivación de  $\vdash P \Rightarrow P$
2. Dar una derivación de  $\vdash P \Rightarrow Q \Rightarrow (Q \wedge P)$
3. Dar una derivación de  $P \Rightarrow Q, Q \Rightarrow R \vdash P \Rightarrow R$ .

# Reglas de inferencia — disyunción

## Introducción de la disyunción

$$\frac{\Gamma \vdash \tau}{\Gamma \vdash \tau \vee \sigma} \vee_{i_1}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \sigma}{\Gamma \vdash \tau \vee \sigma} \vee_{i_2}$$

## Eliminación de la disyunción

$$\frac{\Gamma \vdash \tau \vee \sigma \quad \Gamma, \tau \vdash \rho \quad \Gamma, \sigma \vdash \rho}{\Gamma \vdash \rho} \vee_e$$

1. Dar una derivación de  $\vdash P \Rightarrow (P \vee P)$ .
2. Dar una derivación de  $\vdash (P \vee P) \Rightarrow P$ .
3. Dar una derivación de  $P \vee Q \vdash Q \vee P$ .



# Reglas de inferencia — falsedad

El conectivo  $\perp$  representa la falsedad (contradicción, absurdo).

El conectivo  $\perp$  **no** tiene reglas de introducción.

Eliminación del falso (principio de explosión o *ex falso quodlibet*)

$$\frac{\Gamma \vdash \perp}{\Gamma \vdash \tau} \perp_e$$

1. Dar una derivación de  $(P \vee Q) \Rightarrow \perp \vdash P \Rightarrow Q$
2. Dar una derivación de  $(P \wedge Q) \Rightarrow \perp \vdash P \Rightarrow Q \Rightarrow R$
3. Mostrar que hay infinitas derivaciones de  $\perp \vdash \perp$ .

# Reglas de inferencia — negación

Introducción de la negación

(reducción al absurdo intuicionista)

$$\frac{\Gamma, \tau \vdash \perp}{\Gamma \vdash \neg \tau} \neg_i$$

Eliminación de la negación

$$\frac{\Gamma \vdash \tau \quad \Gamma \vdash \neg \tau}{\Gamma \vdash \perp} \neg_e$$

1. Dar una derivación de  $\vdash P \Rightarrow \neg\neg P$ .
2. Dar una derivación de  $\vdash \neg(P \wedge \neg P)$ .
3. Dar una derivación de  $P \vee Q \vdash \neg(\neg P \wedge \neg Q)$ .

# Deducción natural **intuicionista** (**NJ**) — todas la reglas

	$\frac{}{\Gamma, \tau \vdash \tau} \text{ax}$	
	Introducción	Eliminación
$\wedge$	$\frac{\Gamma \vdash \tau \quad \Gamma \vdash \sigma}{\Gamma \vdash \tau \wedge \sigma} \wedge_i$	$\frac{\Gamma \vdash \tau \wedge \sigma}{\Gamma \vdash \tau} \wedge_{e1} \quad \frac{\Gamma \vdash \tau \wedge \sigma}{\Gamma \vdash \sigma} \wedge_{e2}$
$\Rightarrow$	$\frac{\Gamma, \tau \vdash \sigma}{\Gamma \vdash \tau \Rightarrow \sigma} \Rightarrow_i$	$\frac{\Gamma \vdash \tau \Rightarrow \sigma \quad \Gamma \vdash \tau}{\Gamma \vdash \sigma} \Rightarrow_e$
$\vee$	$\frac{\Gamma \vdash \tau}{\Gamma \vdash \tau \vee \sigma} \vee_{i1} \quad \frac{\Gamma \vdash \sigma}{\Gamma \vdash \tau \vee \sigma} \vee_{i2}$	$\frac{\Gamma \vdash \tau \vee \sigma \quad \Gamma, \tau \vdash \rho \quad \Gamma, \sigma \vdash \rho}{\Gamma \vdash \rho} \vee_e$
$\perp$	$\frac{\Gamma \vdash \perp}{\Gamma \vdash \tau} \perp_e$	
$\neg$	$\frac{\Gamma, \tau \vdash \perp}{\Gamma \vdash \neg \tau} \neg_i$	$\frac{\Gamma \vdash \tau \quad \Gamma \vdash \neg \tau}{\Gamma \vdash \perp} \neg_e$

# Propiedades del sistema

## Teorema (Debilitamiento)

(weakening)

Si  $\Gamma \vdash \tau$  es derivable, entonces  $\Gamma, \sigma \vdash \tau$  es derivable.

$$\frac{\Gamma \vdash \tau}{\Gamma, \sigma \vdash \tau} \text{W}$$

Se puede demostrar por inducción estructural en la derivación.  
(Se hará como ejercicio en la práctica).

## Ejemplo

$$\frac{\frac{\frac{}{P \wedge Q, R \vdash P \wedge Q} \text{ax}}{P \wedge Q, R \vdash Q} \wedge_{e2} \quad \frac{\frac{}{P \wedge Q, R \vdash P \wedge Q} \text{ax}}{P \wedge Q, R \vdash P} \wedge_{e1}}{P \wedge Q, R \vdash Q \wedge P} \wedge_i \Rightarrow_i$$
$$R \vdash (P \wedge Q) \Rightarrow (Q \wedge P)$$

# Reglas derivadas

Veamos que las siguientes reglas se deducen de las anteriores.  
(No es necesario agregarlas al sistema deductivo).

*Modus tollens*

$$\frac{\Gamma \vdash \tau \Rightarrow \sigma \quad \Gamma \vdash \neg \sigma}{\Gamma \vdash \neg \tau} \text{MT}$$

Introducción de la doble negación

$$\frac{\Gamma \vdash \tau}{\Gamma \vdash \neg \neg \tau} \neg \neg i$$

# Principios de razonamiento clásicos

## Eliminación de la doble negación

¿Se puede deducir la siguiente regla a partir de las anteriores?

$$\frac{\Gamma \vdash \neg\neg\tau}{\Gamma \vdash \tau} \neg\neg_e$$

## Principio del tercero excluido

(*Law of Excluded Middle*)

¿Se puede deducir la siguiente regla a partir de las anteriores?

$$\frac{}{\Gamma \vdash \tau \vee \neg\tau} \text{LEM}$$

**No es posible deducir estas reglas de las anteriores.**

Sin embargo, se pueden deducir la una de la otra. Veamos que:

1. Usando la regla LEM se puede deducir la regla  $\neg\neg_e$ .
2. Usando la regla  $\neg\neg_e$  se puede deducir la regla LEM.

# Principios de razonamiento clásicos

Las reglas  $\neg\neg_e$  y LEM son principios de razonamiento **clásicos**.  
Otro principio de razonamiento clásico, equivalente a  $\neg\neg_e$  y LEM:

Reducción al absurdo clásico

*(Proof by Contradiction)*

$$\frac{\Gamma, \neg\tau \vdash \perp}{\Gamma \vdash \tau} \text{PBC}$$

## Ejercicio

Ver que usando PBC se puede deducir LEM y viceversa.

# Lógica intuicionista vs. lógica clásica

## Dos sistemas deductivos

**NJ** sistema de deducción natural intuicionista.

**NK** sistema de deducción natural clásica.

- ▶ **NK** extiende a **NJ** con principios de razonamiento clásicos. Alcanza con agregar uno de ellos, por ejemplo  $\neg\neg_e$ .
- ▶ Si un juicio es derivable en **NJ**, también es derivable en **NK**.
- ▶ **NJ** es más restrictiva. No permite usar  $\neg\neg_e$ , LEM, PBC, etc.
- ▶ Para hacer matemática, comúnmente usamos lógica clásica.

## Interés de la lógica intuicionista en computación

- ▶ Permite razonar acerca de **información**.  
¿Qué significa (hay vida en Marte  $\vee$   $\neg$ hay vida en Marte)?
- ▶ Las derivaciones en **NJ** se pueden entender como programas.  
**NJ** es la base de un lenguaje de programación funcional.



# Deducción natural **clásica** (NK) — reglas completas

	$\frac{}{\Gamma, \tau \vdash \tau} \text{ax}$	$\frac{\Gamma \vdash \neg\neg\tau}{\Gamma \vdash \tau} \neg\neg_e$
	Introducción	Eliminación
$\wedge$	$\frac{\Gamma \vdash \tau \quad \Gamma \vdash \sigma}{\Gamma \vdash \tau \wedge \sigma} \wedge_i$	$\frac{\Gamma \vdash \tau \wedge \sigma}{\Gamma \vdash \tau} \wedge_{e1} \quad \frac{\Gamma \vdash \tau \wedge \sigma}{\Gamma \vdash \sigma} \wedge_{e2}$
$\Rightarrow$	$\frac{\Gamma, \tau \vdash \sigma}{\Gamma \vdash \tau \Rightarrow \sigma} \Rightarrow_i$	$\frac{\Gamma \vdash \tau \Rightarrow \sigma \quad \Gamma \vdash \tau}{\Gamma \vdash \sigma} \Rightarrow_e$
$\vee$	$\frac{\Gamma \vdash \tau}{\Gamma \vdash \tau \vee \sigma} \vee_{i1} \quad \frac{\Gamma \vdash \sigma}{\Gamma \vdash \tau \vee \sigma} \vee_{i2}$	$\frac{\Gamma \vdash \tau \vee \sigma \quad \Gamma, \tau \vdash \rho \quad \Gamma, \sigma \vdash \rho}{\Gamma \vdash \rho} \vee_e$
$\perp$	$\frac{\Gamma \vdash \perp}{\Gamma \vdash \tau} \perp_e$	
$\neg$	$\frac{\Gamma, \tau \vdash \perp}{\Gamma \vdash \neg\tau} \neg_i$	$\frac{\Gamma \vdash \tau \quad \Gamma \vdash \neg\tau}{\Gamma \vdash \perp} \neg_e$

# Corrección y completitud

## Teorema (Corrección y completitud)

Son equivalentes:

1.  $\Gamma \vdash \tau$  es derivable en **NK**.
2.  $\Gamma \models \tau$

Supongamos que  $\Gamma \vdash \tau$  es derivable en **NK**.

Demostramos que  $\Gamma \models \tau$  por inducción estructural en la derivación.

Hay que analizar 13 casos, uno por cada regla de **NK**.

Por ejemplo, para la regla  $\Rightarrow_e$ :

$$\frac{\Gamma \vdash \tau \Rightarrow \sigma \quad \Gamma \vdash \tau}{\Gamma \vdash \sigma} \Rightarrow_e$$

Queremos ver que  $\Gamma \models \sigma$ .

Sea  $v$  tal que  $v \models \Gamma$  y veamos que  $v \models \sigma$ .

Por HI sabemos que  $\Gamma \models \tau \Rightarrow \sigma$  y que  $\Gamma \models \tau$ .

Como  $v \models \Gamma$  tenemos que  $v \models \tau \Rightarrow \sigma$  y  $v \models \tau$ .

Por definición de  $v \models \tau \Rightarrow \sigma$ , tenemos entonces que  $v \not\models \tau$  o  $v \models \sigma$ .

Pero teníamos  $v \models \tau$ , con lo cual concluimos  $v \models \sigma$ .

- Intentar probar los 12 casos restantes.

# Demostración de completitud $(\Gamma \models \tau \text{ implica } \Gamma \vdash_{\mathbf{NK}} \tau)$

## Definición

1. Un contexto  $\Gamma$  **determina** una variable  $P \in \mathcal{P}$  si vale que  $P \in \Gamma$  o que  $\neg P \in \Gamma$ .
2. Un contexto  $\Gamma$  **determina** un conjunto de variables  $X \subseteq \mathcal{P}$  si determina a todas las variables de  $X$ .

Para probar el teorema de completitud, necesitamos:

## Lema principal

Si  $\Gamma$  determina a todas las variables que aparecen en  $\tau$ , entonces:

1. O bien  $\Gamma \vdash \tau$  es derivable en **NK**.
2. O bien  $\Gamma \vdash \neg \tau$  es derivable en **NK**.

Asumamos que el lema vale, lo demostraremos después.

## Demostración de completitud $(\Gamma \models \tau \text{ implica } \Gamma \vdash_{\mathbf{NK}} \tau)$

Supongamos que  $\sigma_1, \dots, \sigma_n \models \tau$ .

Queremos ver que  $\sigma_1, \dots, \sigma_n \vdash \tau$  es derivable en **NK**.

Sea  $\rho = (\sigma_1 \wedge \dots \wedge \sigma_n) \Rightarrow \tau$ . Sabemos que  $\models \rho$ .

¿Por qué?

Alcanza con probar que  $\vdash \rho$  es derivable en **NK**.

¿Por qué?

Sea  $X = \{P_1, \dots, P_n\}$  el conjunto de variables que aparecen en  $\rho$ .

Usando LEM y  $\forall_e$  podemos considerar  $2^n$  casos, de la forma:

$$\tilde{P}_1, \dots, \tilde{P}_n \vdash \rho$$

donde cada  $\tilde{P}_i$  es o bien  $P_i$  o bien  $\neg P_i$ .

Por el lema principal, se da uno de los dos casos siguientes:

1. O bien  $\tilde{P}_1, \dots, \tilde{P}_n \vdash \rho$  es derivable en **NK** (y listo).
2. O bien  $\tilde{P}_1, \dots, \tilde{P}_n \vdash \neg \rho$  es derivable en **NK**.

Por corrección vale  $\tilde{P}_1, \dots, \tilde{P}_n \models \neg \rho$ .

Sea  $v$  una valuación tal que  $v(P_i) = \mathbf{V}$  si y sólo si  $\tilde{P}_i = P_i$ .

Luego  $v \models \neg \rho$ . Absurdo pues sabíamos  $\models \rho$ .

# Demostración del lema principal

Recordemos el enunciado:

## Lema principal

Si  $\Gamma$  determina a todas las variables que aparecen en  $\tau$ , entonces:

1. O bien  $\Gamma \vdash \tau$  es derivable en **NK**.
2. O bien  $\Gamma \vdash \neg\tau$  es derivable en **NK**.

Lo demostramos por inducción estructural en  $\tau$ .

Hay 6 casos ( $P, \wedge, \Rightarrow, \vee, \perp, \neg$ ).

Por ejemplo, supongamos que  $\tau = (\sigma \wedge \rho)$ .

Por hipótesis inductiva sobre  $\sigma$ , sabemos que:

1. O bien  $\Gamma \vdash \sigma$  es derivable en **NK**.

Por hipótesis inductiva sobre  $\rho$ , sabemos que:

- 1.1 O bien  $\Gamma \vdash \rho$  es derivable en **NK** y tenemos  $\Gamma \vdash \sigma \wedge \rho$ .
  - 1.2 O bien  $\Gamma \vdash \neg\rho$  es derivable en **NK** y tenemos  $\Gamma \vdash \neg(\sigma \wedge \rho)$ .
  2. O bien  $\Gamma \vdash \neg\sigma$  es derivable en **NK** y tenemos  $\Gamma \vdash \neg(\sigma \wedge \rho)$ .
- Intentar probar los 5 casos restantes.

## Lectura recomendada

Logic in computer science: Modelling and reasoning about systems.  
Michael Huth y Mark Ryan. Cambridge University Press, 2004.  
Capítulo 1.

i i i i i i i i i i ? ? ? ? ? ? ? ?