南京大学

单变量微积分

· 极限

$$\lim_{x\to a} f(x)=L \Longleftrightarrow \lim_{x\to a^+} f(x)=\lim_{x\to a^-} f(x)=L$$

$$\lim_{x\to a^+} f(x)\neq \lim_{x\to a^-} f(x) \Rightarrow \lim_{x\to a} f(x)\text{不存在}$$

· 基本极限

$$\lim_{x\to\infty} e^x=\infty,\quad \lim_{x\to-\infty} e^x=0$$

$$\lim_{x\to\infty} \ln x=\infty,\quad \lim_{x\to 0^+} \ln x=-\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{b}{x^r}=0,\ (r>0),\quad \lim_{x\to-\infty} \frac{b}{x^r}=0,\ (r>0)$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} x^n=\infty\ (n\text{偶}),\quad \lim_{x\to+\infty} x^n=\infty,\ \lim_{x\to-\infty} x^n=-\infty\ (n\text{奇})$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} ax^n+\cdots+bx+c=\operatorname{sign}(a)\infty \quad (n\text{偶})$$

$$\lim_{x\to\infty} ax^n+\cdots+bx+c=\operatorname{sign}(a)\infty \quad (n\text{奇})$$

$$\lim_{x\to-\infty} ax^n+\cdots+bx+c=-\operatorname{sign}(a)\infty \quad (n\text{奇})$$

· 分数型极限 $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$ 的计算方法.

— 因子分解.

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2+4x-12}{x^2-2x}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+6)}{x(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+6}{x}=4$$

— 分子/分母有理化

$$\lim_{x\to 9}\frac{3-\sqrt{x}}{x^2-81}=\lim_{x\to 9}\frac{3-\sqrt{x}}{x^2-81}\cdot\frac{3+\sqrt{x}}{3+\sqrt{x}}=\lim_{x\to 9}\frac{9-x}{(x^2-81)(3+\sqrt{x})}=\lim_{x\to 9}\frac{-1}{(x+9)(3+\sqrt{x})}=-\frac{1}{108}$$

— 合并有理式

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{x-(x+h)}{x(x+h)}\right)=\lim_{h\to 0}\frac{-1}{x(x+h)}=-\frac{1}{x^2}$$

- 洛必达法则

若 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{0}{0}$ 或 $+\frac{\infty}{\infty}$ 或 $-\frac{\infty}{\infty}$

则 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

- 多项式在∞处的极限：~~比较~~提出x的最大项

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2-4}{5x-2x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2(3-\frac{4}{x^2})}{x^2(\frac{5}{x}-2)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3-\frac{4}{x^2}}{\frac{5}{x}-2}=-\frac{3}{2}$$

- 中值定理

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续．对 $\forall M\in[f(a),f(b)]$，$\exists c\in[a,b]$．使得 $f(c)=M$

- 导数的定义

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

- 常用导数．

$\frac{d}{dx}x=1$

$\frac{d}{dx}\sin x=\cos x$

$\frac{d}{dx}\cos x=-\sin x$

$\frac{d}{dx}\tan x=\sec^2 x$

$\frac{d}{dx}\sec x=\sec x\tan x$

$\frac{d}{dx}\csc x=-\csc x\cot x$

$\frac{d}{dx}\cot x=-\csc^2 x$

$\frac{d}{dx}\arcsin x=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\frac{d}{dx}\arccos x=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\frac{d}{dx}\arctan x=\frac{1}{1+x^2}$

$\frac{d}{dx}a^x=\ln a\cdot a^x$

$\frac{d}{dx}e^x=e^x$

$\frac{d}{dx}\ln x=\frac{1}{x}$，$x>0$

$\frac{d}{dx}\ln|x|=\frac{1}{x}$，$x\neq 0$

$\frac{d}{dx}\log_a x=\frac{1}{x\ln a}$，$x>0$

- 隐式微分

例如求 $\frac{dy}{dx}$：$e^{2x-9y}+x^3y^2=\sin y+11x$

方法：对等号两边同时做 $\frac{d}{dx}$ 运算

$$e^{2x-9y}(2-9\frac{dy}{dx})+3x^2y^2+2x^3y\frac{dy}{dx}=\cos y\frac{dy}{dx}+11$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{11-2e^{2x-9y}-3x^2y^2}{2x^3y-9e^{2x-9y}-\cos y}$$

- 函数的增减性．

$x=c$ 是驻点 $\Longleftrightarrow$ $f'(c)=0$ 或 $f'(c)$ 不存在

南京大學

$f'(x)>0 \Rightarrow f(x)\nearrow$

$f'(x)<0 \Rightarrow f(x)\searrow$

$f'(x)=0 \Rightarrow f(x)$ 常数

- 函数的凹凸性

  $x=c$ 是拐点 $\Longleftrightarrow f''(c)=0$

  $f''(x)>0 \Rightarrow f(x)$

  $f''(x)<0 \Rightarrow f(x)$

- 函数的极值

  – 费马定理：$x=c$ 处是 $f(x)$ 的局部极值 $\Rightarrow$ $x=c$ 是 $f(x)$ 的驻点

  – $[a,b]$ 上的极值：$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，极值从 $f(x)$ 的驻点，$f(a)$，$f(b)$ 中产生.

- 中值定理

  $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且可微，则 $\exists c\in(a,b)$，使得 $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

- 定积分定义

  $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，将 $[a,b]$ 分为 n 个子区间，每个区间宽 Δx，从每个区间选择 x_i^*

  则 $\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{\infty} f(x_i^*)\Delta x$

- 常用积分

$\int k\,dx = kx+C$

$\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1}+C,\ n\neq -1$

$\int x^{-1}dx = \ln|x|+C$

$\int \frac{1}{ax+b}dx = \frac{1}{a}\ln|ax+b|+C$

$\int \ln u\,du = u\ln u - u + C$

$\int e^u du = e^u + C$

$\int \cos u\,du = \sin u + C$

$\int \sin u\,du = -\cos u + C$

$\int \sec^2 u\,du = \tan u + C$

$\int \sec u \tan u\,du = \sec u + C$

$\int \csc u \cot u\,du = -\csc u + C$

$\int \csc^2 u\,du = -\cot u + C$

$\int \tan u\,du = \ln|\sec u| + C$

$\int \sec u\,du = \ln|\sec u + \tan u| + C$

$\int \frac{1}{a^2+u^2}du = \frac{1}{a}\arctan\frac{u}{a} + C$

$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-u^2}}du = \arcsin\frac{u}{a} + C$

- $\int \sin^n x \cos^m x \, dx$ 的计算方法
  - n奇：将1个$\sin x$变成$-d\cos x$，将其余$\sin x$转为$\cos x$（$\sin^2 x = 1-\cos^2 x$），用$u=\cos x$代换
  - m奇：将1个$\cos x$变成$d\sin x$、 … $\cos x$ … $\sin x$（$\cos^2 x = 1-\sin^2 x$），… $u=\sin x$ …
  - n, m同偶：用2倍角公式，

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x \qquad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} \qquad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

- $\int \tan^n x \sec^m x \, dx$ 的计算方法.
  - n奇：将1个$\tan x$和1个$\sec x$转为$d\sec x$，将其余$\tan x$转为$\sec x$（$\tan^2 x = \sec^2 x - 1$），用$u=\sec x$代换.
  - m偶：将2个$\sec x$转为$d\tan x$，将其余$\sec x$转为$\tan x$（$\sec^2 x = 1+\tan^2 x$），用$u=\tan x$代换.
  - n偶m奇：没有通法解决
- 三角代换

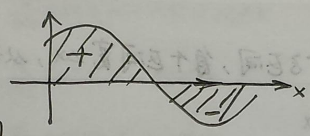
$$\sqrt{a^2-b^2x^2} \Rightarrow x = \frac{a}{b}\sin\theta, \quad \cos^2\theta = 1-\sin^2\theta$$

$$\sqrt{b^2x^2-a^2} \Rightarrow x = \frac{a}{b}\sec\theta, \quad \tan^2\theta = \sec^2\theta - 1$$

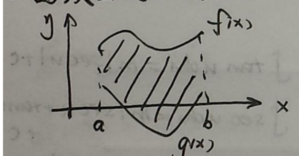
$$\sqrt{a^2+b^2x^2} \Rightarrow x = \frac{a}{b}\tan\theta, \quad \sec^2\theta = 1+\tan^2\theta$$

- 净面积

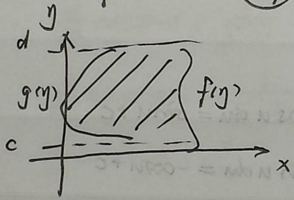
$$\int_a^b f(x)\,dx$$



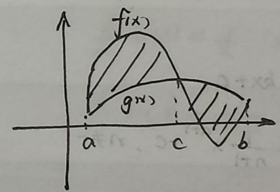
- 曲线之间的面积



$$\int_a^b (f(x)-g(x))\,dx$$

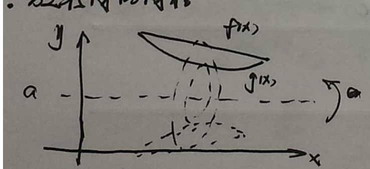


$$\int_c^d (f(y)-g(y))\,dy$$



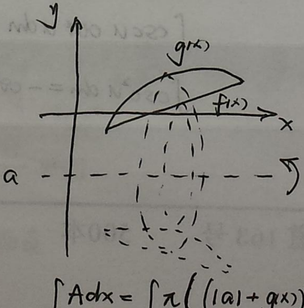
$$\int_a^c (f(x)-g(x))\,dx + \int_c^b (g(x)-f(x))\,dx$$

- 旋转体的体积



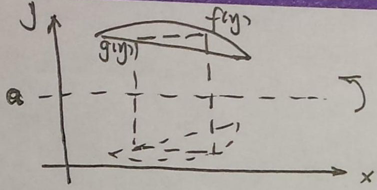
$$\int A\,dx = \int \pi\left((f(x)-a)^2 - (g(x)-a)^2\right)dx$$

圆环法



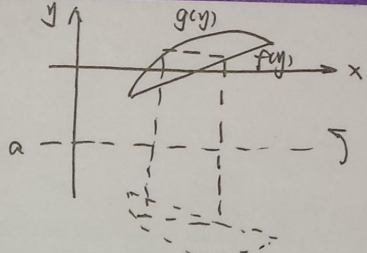
$$\int A\,dx = \int \pi\left((|a|+g(x))^2 - (|a|+f(x))^2\right)dx$$ 圆环法

南京大學



$$\int A\,dy = \int 2\pi\,(\overset{y-a}{\cancel{a-y}})(f(y)-g(y))\,dy$$

圆柱法



$$\int A\,dy = \int 2\pi\,(|a|+y)(f(y)-g(y))\,dy$$

· 函数平均值

$$\text{average} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = \frac{F(b)-F(a)}{b-a}$$

· 弧长

$$L = \int ds = \int\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = \int\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

$$= \int\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy = \int\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,d\theta$$

· 旋转体的表面积

对x轴旋转 $S = \int_a^b 2\pi y\,ds$

对y轴旋转 $S = \int_a^b 2\pi y\,ds$

· 反常积分收敛性的比较

若 $f(x) \geq g(x) \geq 0$，在区间 $[a, \infty)$

- 若 $\int_a^\infty f(x)\,dx$ ~~发散~~ 收敛 $\Rightarrow$ $\int_a^\infty g(x)\,dx$ 收敛
- 若 $\int_a^\infty g(x)\,dx$ 发散 $\Rightarrow$ $\int_a^\infty f(x)\,dx$ 发散

· 常用反常积分

$a>0$，$\int_a^\infty \frac{1}{x^p}\,dx$ 在 $p>1$ 时收敛

在 $p\leq 1$ 时发散