

Spis treści

| | |
|--|----|
| Przedmowa do wydania drugiego | 7 |
| 1. Wprowadzenie do układów automatycznego sterowania | 9 |
| 1.1. Wprowadzenie | 9 |
| 1.2. Rys historyczny | 9 |
| 1.3. Pojęcia podstawowe | 11 |
| 1.4. Klasifikasiacja układów automatycznego sterowania | 14 |
| 1.5. Przykłady układów automatycznego sterowania | 19 |
| 1.6. Sygnały w układach automatycznego sterowania | 22 |
| 1.6.1. Sygnały ciągłe | 23 |
| 1.6.2. Sygnały impulsowe | 26 |
| 1.6.3. Sygnały dyskretne | 27 |
| 1.6.4. Sygnały losowe | 28 |
| 1.6.5. Podstawowe sygnały stosowane w automatyczce | 29 |
| 2. Modelowanie matematyczne układów dynamicznych | 31 |
| 2.1. Wprowadzenie | 31 |
| 2.2. Modelowanie układów mechanicznych | 34 |
| 2.3. Transmitancja operatorowa | 37 |
| 2.4. Modelowanie w przestrzeni stanów | 41 |
| 2.5. Linearyzacja | 49 |
| 2.5.1. Linearyzacja statyczna | 50 |
| 2.5.2. Linearyzacja dynamiczna | 51 |
| 2.6. Modelowanie układów elektrycznych | 58 |
| 2.7. Modele układów elektromechanicznych | 62 |
| 2.8. Modelowanie układów cieplnych i przepływowych | 66 |
| 2.8.1. Przepływ ciepła | 66 |
| 2.8.2. Przepływ cieczy nieściśliwych | 69 |
| 2.9. Zapis transmitancji operatorowej | 73 |
| 3. Opis układów automatyki za pomocą schematów strukturalnych | 79 |
| 3.1. Schematy blokowe | 79 |
| 3.1.1. Podstawowe elementy schematów blokowych | 79 |

| | |
|---|------------|
| 3.1.2. Przekształcenia schematów blokowych..... | 82 |
| 3.1.3. Budowa schematów blokowych | 88 |
| 3.2. Grafy przepływu sygnałów | 94 |
| 3.2.1. Pojęcia podstawowe..... | 94 |
| 3.2.2. Zasady redukcji grafów | 97 |
| 3.2.3. Rozwiązywanie grafu metodą Masona | 100 |
| 4. Właściwości dynamiczne układów liniowych | 105 |
| 4.1. Wprowadzenie | 105 |
| 4.2. Sposoby oceny właściwości układów liniowych | 105 |
| 4.3. Wprowadzenie do charakterystyk czasowych i częstotliwościowych | 107 |
| 4.4. Przykłady podstawowych elementów automatyki i ich charakterystyki czasowe | 110 |
| 4.4.1. Element proporcjonalny (bezineracyjny) | 110 |
| 4.4.2. Element inercyjny pierwszego rzędu..... | 111 |
| 4.4.3. Element całkujący | 114 |
| 4.4.4. Element całkujący rzeczywisty | 116 |
| 4.4.5. Element różniczkujący rzeczywisty | 117 |
| 4.4.6. Element oscylacyjny drugiego rzędu..... | 119 |
| 4.4.7. Element inercyjny drugiego rzędu | 122 |
| 4.4.8. Element opóźniający | 125 |
| 5. Charakterystyki częstotliwościowe | 127 |
| 5.1. Wprowadzenie | 127 |
| 5.2. Charakterystyka amplitudowo-fazowa | 129 |
| 5.3. Charakterystyki logarytmiczne | 130 |
| 6. Układ regulacji, jego zadanie i struktura | 145 |
| 6.1. Wprowadzenie | 145 |
| 6.2. Obiekty regulacji | 146 |
| 6.3. Regulatory | 151 |
| 6.4. Regulatory dwupołożeniowe | 155 |
| 7. Stabilność liniowych stacjonarnych układów sterowania | 159 |
| 7.1. Ogólne warunki stabilności | 159 |
| 7.2. Matematyczne warunki stabilności | 162 |
| 7.3. Kryterium Hurwitza | 168 |
| 7.4. Kryterium Michajłowa | 171 |
| 7.5. Kryterium Nyquista | 177 |
| 7.6. Logarytmiczne kryterium stabilności. Zapas stabilności | 183 |
| 8. Ocena jakości liniowych układów regulacji | 185 |
| 8.1. Wprowadzenie | 185 |
| 8.2. Dokładność statyczna liniowych układów regulacji | 186 |
| 8.3. Jakość dynamiczna | 192 |
| 8.3.1. Ocena parametrów odpowiedzi skokowej | 192 |
| 8.3.2. Kryteria całkowe | 198 |

| | |
|---|------------|
| 8.3.3. Kryteria częstotliwościowe | 201 |
| 8.3.4. Metoda miejsc geometrycznych pierwiastków (wartości własnych) | 204 |
| 9. Synteza układów liniowych sterowania automatycznego | 209 |
| 9.1. Wprowadzenie | 209 |
| 9.2. Synteza metodami klasycznymi | 211 |
| 9.3. Dobór parametrów regulatora | 213 |
| 9.3.1. Metoda Zieglera–Nicholsa | 213 |
| 9.3.2. Metoda charakterystyk częstotliwościowych | 215 |
| 9.3.3. Metoda linii pierwiastkowych | 215 |
| 9.4. Synteza układów sterowania z uwzględnieniem wskaźników jakości. Metoda przestrzeni stanów | 221 |
| 10. Podstawowe algorytmy sterowania | 223 |
| 10.1. Wprowadzenie | 223 |
| 10.2. Algorytm sterowania proporcjonalnego | 223 |
| 10.3. Algorytm sterowania całkowego | 224 |
| 10.4. Algorytm sterowania proporcjonalno-całkowego | 226 |
| 10.5. Algorytm sterowania proporcjonalno-różniczkowego | 227 |
| 10.6. Algorytm sterowania proporcjonalno-całkowo-różniczkowego | 228 |
| 10.7. Regulacja prędkości silnika prądu stałego | 229 |
| 11. Sterowanie cyfrowe | 237 |
| 11.1. Wprowadzenie do sterowania cyfrowego | 237 |
| 11.2. Parametry sterowania cyfrowego | 237 |
| 11.2.1. Próbkowanie sygnału | 238 |
| 11.2.2. Kwantyzacja sygnału | 239 |
| 11.2.3. Ekstrapolacja sygnału | 239 |
| 11.2.4. Modele dyskretnie | 241 |
| 11.3. Podstawowe struktury systemów sterowania | 241 |
| 11.4. Podstawowe algorytmy regulacji cyfrowej bezpośredniej | 243 |
| 11.4.1. Algorytm pozycyjny (położeniowy) | 243 |
| 11.4.2. Algorytm prędkościowy (przyrostowy) | 245 |
| 11.4.3. Modyfikacje algorytmów | 246 |
| 11.5. Dobór parametrów algorytmów podstawowych | 247 |
| 11.5.1. Dobór parametrów na podstawie tablic nastaw dla regulatorów analogowych | 247 |
| 11.5.2. Zmodyfikowane reguły Zieglera–Nicholsa dla algorytmów regulacji cyfrowej | 248 |
| 11.5.3. Eksperymentalna optymalizacja parametrów algorytmów regulacji | 249 |
| 12. Synteza układów przełączających | 251 |
| 12.1. Wprowadzenie | 251 |
| 12.1.1 Pojęcia podstawowe | 251 |
| 12.1.2. Algebra Boole'a | 252 |

| | |
|---|------------|
| 12.1.3. Ważniejsze funkcje przełączające | 253 |
| 12.1.4. Realizacja funkcji przełączających | 254 |
| 12.2. Układy kombinacyjne | 256 |
| 12.2.1. Sposoby opisu układów kombinacyjnych | 256 |
| 12.2.2. Minimalizacja funkcji przełączających | 257 |
| 12.2.3. Synteza układów kombinacyjnych | 259 |
| 12.3. Układy sekwencyjne | 259 |
| 12.3.1. Pojęcia podstawowe | 260 |
| 12.3.2. Synteza układów sekwencyjnych | 262 |
| 12.3.2.1. Opis układów sekwencyjnych | 262 |
| 12.3.2.2. Metoda tablic kolejności łączeń | 263 |
| 12.3.2.3. Metoda tablic przejść-wyjść (metoda Huffmana) | 269 |
| Literatura | 275 |

Przedmowa do wydania drugiego

Ogromne zainteresowanie, jakim cieszyło się pierwsze wydanie książki, sprawiło, iż zdecydowałem się przygotować drugie wydanie, poprawione i poszerzone. Publikacja ta będzie się składała z dwóch tomów; drugi tom będzie zawierał znacznie rozbudowany materiał z przykładami i zadaniami.

Podręcznik przeznaczony jest dla studentów wydziałów mechanicznych wyższych uczelni technicznych. Materiał w nim zawarty opracowany został na podstawie wykładów, które prowadzę od roku 1980 do chwili obecnej w Akademii Górnictwo-Hutniczej w Krakowie na Wydziale Inżynierii Mechanicznej i Robotyki.

Treść podręcznika obejmuje głównie zagadnienia liniowych układów regulacji automatycznej oraz w niewielkim zakresie układy przełączające i sterowanie cyfrowe. Jest to podręcznik przeznaczony przede wszystkim dla studentów specjalności konstrukcyjnych, eksploatacyjnych i technologicznych, dla których znajomość zagadnień klasycznej teorii regulacji we współczesnym jej ujęciu jest w przyszłej praktyce inżynierskiej konieczna do współpracy z automatykami w zakresie automatyzacji procesów produkcyjnych. Dlatego też podręcznik ten nie jest wyczerpujący – ma za zadanie wprowadzenie czytelnika w dziedzinę automatyki, teorii sterowania i ułatwienie mu opanowania zasadniczych pojęć, ich interpretacji i związków między nimi. Nie ma w nim dowodów twierdzeń ani ścisłych wyprowadzeń wzorów, te znajdzie czytelnik w obszernych monografiach i podręcznikach, które wymieniono w umieszczonej na końcu książki bibliografii.

Pragnę serdecznie podziękować pracownikom Katedry Automatyzacji Procesów Wydziału Inżynierii Mechanicznej i Robotyki Akademii Górnictwo-Hutniczej w Krakowie za pomoc w przygotowaniu podręcznika, szczególnie zaś podziękowania składam mgr. inż. Romanowi Ornackiemu. Dziękuję również mgr. inż. Romanowi Korzeniowskiemu za przygotowanie rozdziału 12. Jestem też bardzo wdzięczny prof. dr. hab. inż. Zenonowi Jędrzykiewiczowi i prof. dr. hab. inż. Januszowi Kwaśniewskiemu za wnikliwe recenzje i cenne uwagi, które pozwoliły mi uniknąć wielu potknięć.

Janusz Kowal

1. Wprowadzenie do układów automatycznego sterowania

1.1. Wprowadzenie

Automatyka jest dziedziną wiedzy zajmującą się możliwościami ograniczenia lub wyeliminowania udziału człowieka w czynnościach związanych ze sterowaniem różnych obiektów fizycznych. Sterowanie automatyczne odegrało zasadniczą rolę w rozwoju inżynierii i nauki. Oprócz jego ogromnego znaczenia w układach statków kosmicznych, układach zdalnego kierowania pociskami, w robotyce itp., sterowanie automatyczne stało się ważną i integralną częścią nowoczesnych procesów produkcyjnych i przemysłowych. Na przykład sterowanie automatyczne jest zasadniczym elementem w sterowaniu numerycznym obrabiarek w przemyśle wytwórczym, w projektowaniu układów pilota automatycznego w przemyśle lotniczym i kosmicznym oraz w projektowaniu samochodów osobowych i ciężarowych w przemyśle samochodowym. Ma ono także zasadnicze znaczenie w takich operacjach przemysłowych, jak sterowanie ciśnieniem, temperaturą, wilgotnością i przepływem w przemyśle przetwórczym.

Głównym celem, jaki stawia sobie automatyka (teoria regulacji, teoria sterowania), jest podanie przepisu, który umożliwia samoczynne utrzymywanie określonych, pożądanych warunków pracy danego urządzenia (procesu) oraz realizacja tego przepisu. Ponieważ postępy w teorii i praktyce sterowania automatycznego dostarczają sposobów do osiągnięcia optymalnej wydajności układów dynamicznych, poprawienia zdolności produkcyjnej, uwolnienia od nującej pracy wykonywanej przy wielu rutynowych i powtarzalnych operacjach manualnych i innych, więc większość inżynierów i naukowców musi teraz posiadać dobre rozeznanie w tej dziedzinie.

1.2. Rys historyczny

Tendencje i zdarzenia w dziedzinie rozwoju automatycznego sterowania w ciągu ostatnich paru stuleci można podzielić na trzy okresy.

Pierwszy okres rozwoju sterowania automatycznego trwał od schyłku XVIII wieku do początku XX wieku. W tym czasie osiągnięcia w dziedzinie sterowania automa-

tycznego miały charakter empiryczny. Najważniejszym osiągnięciem w zakresie praktycznego zastosowania sterowania automatycznego był regulator odśrodkowy wynaleziony przez Jamesa Watta w 1750 roku. Regulator ten zastosowano do sterowania maszyną parową (wiatrakiem). Z powodu swego działania proporcjonalnego regulator Watta prowadził do uchybu statycznego prędkości maszyny. Starania, aby usunąć ten uchyb, doprowadziły do wprowadzenia składowej całkowej sterowania, co jednak z kolei powodowało niestabilność w zastosowaniu do maszyn parowych. Ówcześni badacze tych zjawisk nie dysponując odpowiednią teorią umożliwiającą ich analizę musieli polegać wyłącznie na intuicji.

Drugi okres rozwoju sterowania automatycznego obejmuje lata 1900–1910. Nastąpił wówczas gwałtowny rozwój przemysłu energetycznego, hutniczego, przetwórczego i chemicznego. Rosnąca złożoność układów technicznych wymagała posłużenia się teorią połączoną z intuicją przy projektowaniu układów sterowania. Publikacja książki Maxa Tolle'a o regulacji prędkości była pierwszym krokiem w tym kierunku. Inne znaczące prace we wstępnych etapach rozwoju teorii sterowania zawdzięczamy m.in. Minorsky'emu, Hazenowi i Nyquistowi. Wykorzystanie metod teoretycznych ograniczało się do rozwiązań równań różniczkowych zwyczajnych i zastosowań kryteriów stabilności Routha i Hurwicza, co sprowadzało się do prostych układów niskiego rzędu. W 1922 r. Minorsky pracował nad sterownikami automatycznymi do kierowania statkami i wykazał, w jaki sposób stabilność może być wyznaczona z równań różniczkowych opisujących układ. W 1932 r. Nyquist rozwinał stosunkowo prostą procedurę wyznaczania stabilności układów zamkniętych na podstawie odpowiedzi układów otwartych na ustalone sinusoidalne sygnały wejściowe. W 1934 r. Hazen, który wprowadził pojęcie mechanizmu wykonawczego do układów sterowania położeniem, omówił projekt przekaźnikowych mechanizmów wykonawczych mających zdolność ścisłego podążania za zmieniającym się sygnałem wejściowym.

Trzeci okres rozpoczął się rozwojem teorii i nowym spojrzeniem na sterowanie automatyczne, jako potencjalną dziedzinę nauki. Podczas II wojny światowej nastąpił nadzwyczajny rozwój teorii i jej zastosowań.

W latach 40. XX wieku metody odpowiedzi częstotliwościowych umożliwiły inżynierom zaprojektowanie liniowych układów sterowania z obwodem zamkniętym, które spełniały wymagania dotyczące wydajności. Od końca lat 40. do wczesnych lat 50. została w pełni rozwinięta metoda miejsc geometrycznych Evansa.

Metody odpowiedzi częstotliwościowych oraz miejsc geometrycznych, będące jądrom klasycznej teorii sterowania, prowadzą do układów, które są stabilne i spełniają zbiór mniej lub bardziej arbitralnych wymagań dotyczących jakości. Takie układy są, na ogół, do przyjęcia, ale nie są optymalne w żadnym istotnym sensie. Od późnych lat 50. główny akcent w problemach projektowania sterowania przesunął się z projektowania jednego z wielu układów, które działają na projektowanie jednego złożonego układu, optymalnego w pewnym istotnym sensie.

Ponieważ nowoczesne urządzenia z wieloma sygnałami wejściowymi i wyjściowymi stają się coraz bardziej skomplikowane, opis nowoczesnego układu sterowania wymaga ogromnej ilości równań. Klasyczna teoria sterowania, która zajmuje się tylko układami z jednym wejściem i jednym wyjściem, staje się bezsilna wobec układów z wieloma wejściami i wyjściami. Od mniej więcej 1960 roku, kiedy dostępność maszyn cyfrowych umożliwiła analizę czasową złożonych układów, nowoczesna teoria sterowania, oparta na analizie czasowej i syntezie wykorzystującej zmienne stanu, została rozwinięta w kierunku radzenia sobie z rosnącą złożonością urządzeń i surowymi wymaganiami dotyczącymi dokładności, wagi i kosztów, w zastosowaniach w wojskowości, przestrzeni kosmicznej i przemyśle.

W latach 1960–1980 zostało w pełni zbadane sterowanie optymalne zarówno układów deterministycznych, jak i stochastycznych, podobnie jak sterowanie adaptacyjne i uczące się – układów skomplikowanych. Począwszy od roku 1980, aż do chwili obecnej, postępy w nowoczesnej teorii sterowania koncentrują się na sterowaniu odpornym, sterowaniu H_∞ i tematach pokrewnych.

Obecnie jako integralne części układów sterowania wykorzystywane są komputery – układy mikroprocesorowe stają się coraz tańsze i osiągają niespotykany wcześniej stopień miniaturyzacji.

1.3. Pojęcia podstawowe

Podstawy automatyki są odrębną dyscypliną naukową o własnych specyficznych pojęciach podstawowych. Są to pojęcia o charakterze bardzo ogólnym, wynikające ze specyfiki rozpatrywanych zagadnień, a więc np.: sygnał, informacja, przesyłanie sygnału, element układu automatyki, regulator, obiekt sterowania itd. Zanim więc będziemy mogli omówić układy sterowania automatycznego, podamy niektóre z tych pojęć.

Obiekt sterowania. Obiektem sterowania może być urządzenie, maszyna, element wyposażenia lub zespół współpracujących części maszyn, których celem jest wykonanie konkretnej operacji. W tej książce będziemy nazywać obiektem sterowania każdy obiekt fizyczny, który ma być sterowany (np. przyrząd mechaniczny, piec grzewczy, zbiornik, reaktor chemiczny lub statek kosmiczny). Obiektami sterowania mogą być również procesy zdefiniowane jako naturalne, stopniowo kontynuujące się działania lub rozwój. Składają się one z szeregu kontrolowanych działań lub ruchów systematycznie prowadzących do pewnego szczególnego wyniku lub zakończenia. Procesem będziemy nazywać każde działanie, które ma być sterowane. Przykładami będą tu procesy techniczne, chemiczne, ekonomiczne i biologiczne. Obiekt sterowania można przedstawić na schemacie blokowym (rys. 1.1).



Rys. 1.1. Schematyczne przedstawienie obiektu regulacji

Wielkościami, którymi oddziałujemy na obiekt sterowania są **sygnały wejściowe**, czasami nazywane **zmiennymi nastawianymi**. Sygnały wejściowe wpływają na wielkości sterowane, zwane **sygnałami wyjściowymi** lub **zmiennymi sterowanymi**. Wielkościami wejściowymi będą wymuszenia zewnętrzne (pozytyczne lub szkodliwe), a wielkościami wyjściowymi – zmienne, których przebieg jest określony w zadaniu sterowania lub które są użytkowane przez regulator (sterownik) jako pewne wielkości pomocnicze. Wielkości wejściowe szkodliwe nazywamy **sygnałami zakłócającymi**.

Zmienna sterowana i zmienna nastawiana. Zmienna **sterowana** jest to wielkość lub warunek, który jest mierzony i sterowany, a zmienna **nastawiana** – wielkość lub warunek, który jest zmieniany przez sterownik tak, aby osiągnąć wartość zmiennej sterowanej. Zwykle zmienna sterowana jest sygnałem wyjściowym systemu. **Sterowanie** oznacza mierzenie wartości zmiennej sterowanej układu i zastosowanie zmiennej nastawianej w celu skorygowania lub ograniczenia odchyлеń wartości mierzonej od wartości pożądanej.

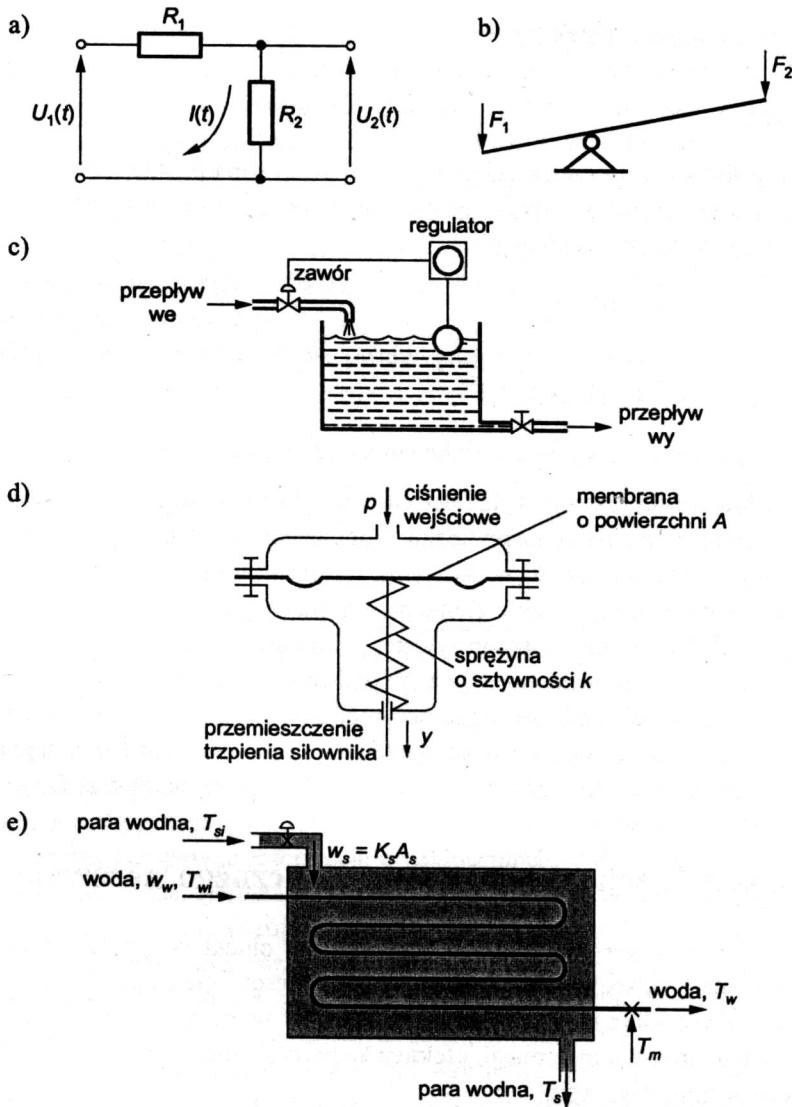
Zakłócenie. Zakłócenie jest sygnałem, który wywiera niekorzystny wpływ na wartość sygnału wyjściowego układu. Zakłócenie generowane wewnątrz układu jest nazywane **wewnętrzny**, natomiast zakłócenie **zewnętrzne** jest generowane poza systemem i stanowi sygnał wejściowy.

Analiza właściwości obiektu sterowania, rachunkowa lub eksperymentalna, musi mieć na celu ustalenie związków między wielkościami wejściowymi a wyjściowymi, a ścisłe biorąc – ustalenie zależności wielkości sterowanych od wielkości nastawianych i wielkości zakłócających, oraz określenie w jakim stopniu wielkości wyjściowe pomocnicze dostarczają wiadomości o zakłócieniach i ewentualnie o działaniu następującym.

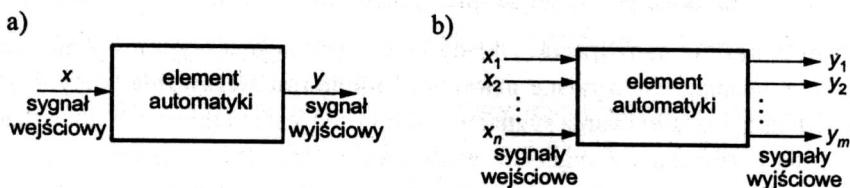
Do opisu układów sterowania niezbędne są pewne pojęcia dodatkowe.

Układ. Układ jest połączeniem elementów, które współdziałają i wykonują pewne zadanie. Pojęcie układu nie jest ograniczone do układów fizycznych. Może być zastosowane do abstrakcyjnych zjawisk dynamicznych, takich jak zjawiska spotykane w ekonomii. Słowo układ powinno być zatem interpretowane jako oznaczające układy fizyczne, biologiczne, ekonomiczne itp.

Element automatyki. Układ, w którym wyróżniamy sygnał wejściowy i wyjściowy, nazywamy krótko **elementem** (rys. 1.2) i oznaczamy w sposób umowny tak jak pokazano na rysunku 1.3.



Rys. 1.2. Przykłady elementów: a) element elektryczny; b) element mechaniczny;
c) element hydrauliczny; d) element pneumatyczny; e) element cieplny



Rys. 1.3. Element automatyki: a) jednowymiarowy; b) wielowymiarowy

Elementy automatyki dzielimy na:

- liniowe,
- nieliniowe.

Elementy liniowe są to takie elementy, których opis ma postać zależności liniowych. Z postulatu liniowości wynika zasada superpozycji. Oznacza ona, że reakcja układu liniowego na wymuszenie

$$x = c_1x_1 + c_2x_2$$

ma postać

$$y = c_3y_1 + c_4y_2,$$

przy czym y_1 i y_2 stanowią wynik oddziaływanego oddzielnych wymuszeń x_1 i x_2 .

Postulat liniowości jest niezwykle ostrym warunkiem, w szczególności wymaga, aby żadna ze zmiennych układu nie podlegała ograniczeniom. Elementy liniowe są opisywane liniowymi równaniami różniczkowymi, różnicowymi i algebraicznymi.

Elementy nieliniowe – to takie elementy automatyki, które nie spełniają zasady superpozycji. Układy nieliniowe są opisywane za pomocą nieliniowych równań różniczkowych, różnicowych i algebraicznych. W praktyce większość elementów jest nieliniowa. Ponieważ jednak badanie zagadnień nieliniowych jest znacznie trudniejsze, a ograniczenie amplitud zmiennych fizycznych często pozwala z bardzo dobrym przybliżeniem uważać element za liniowy, chętnie korzysta się z tej możliwości.

1.4. Klasyfikacja układów automatycznego sterowania

Sterowaniem nazywa się oddziaływanie na dany obiekt w sposób zamierzony, mający doprowadzić do spełnienia określonego celu. Sterowanie z zasady nie łączy się bezpośrednio z wydatkiem energii, lecz najczęściej jest wyrażone przez sygnał reprezentujący pewien strumień informacji; efektem sterowania mogą być zmiany przepływu znaczących strumieni energii.

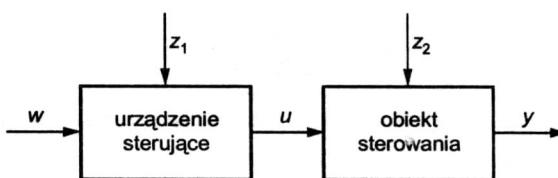
Istnieją dwa zasadnicze sposoby sterowania:

- 1) w układzie otwartym (otwarte układy sterowania),
- 2) w układzie zamkniętym (czyli ze sprzężeniem zwrotnym).

Otwarte układy sterowania. Układy, w których sygnał wyjściowy nie wpływa na akcję sterowania, są nazywane **otwartymi układami sterowania**. Innymi słowy, w otwartym układzie sterowania sygnał wyjściowy nie jest ani mierzony, ani podawany zwrotnie, dla porównania z sygnałem wejściowym. Przykładem może być tu pralka, gdzie czynności moczenia, prania i płukania trwają w czasie. Maszyna nie mierzy sygnału wyjściowego, którym jest czystość ubrań.

W żadnym układzie otwartym sygnał wyjściowy nie jest porównywany z sygnałem wejściowym będącym odniesieniem, stąd dokładność układu zależy od wzorcowania. W przypadku zakłóceń układ sterowania nie będzie wykonywał żądanego zadania. Otwarte układy sterowania mogą być wykorzystane praktycznie tylko wtedy, gdy związek pomiędzy sygnałami wejściowym i wyjściowym jest znany i jeśli nie ma zakłóceń ani wewnętrznych, ani zewnętrznych. Oczywiście, układy takie nie są układami ze sprzężeniem zwrotnym. Należy zauważyć, że każdy układ sterowania, który działa na bazie czasowej, jest układem otwartym. Innym przykładem może być układ sterowania sygnalizacją ruchu ulicznego.

Schemat otwartego układu sterowania przedstawiono na rysunku 1.4.



Rys. 1.4. Schemat blokowy otwartego układu sterowania: u – sygnał reprezentujący sterowanie (sygnał nastawiający), w – sygnał wymuszający (wartość zadana wielkości sterowanej), y – wielkość sterowania (sygnał sterowany), z_1, z_2 – sygnały zakłócające (zakłócenia)

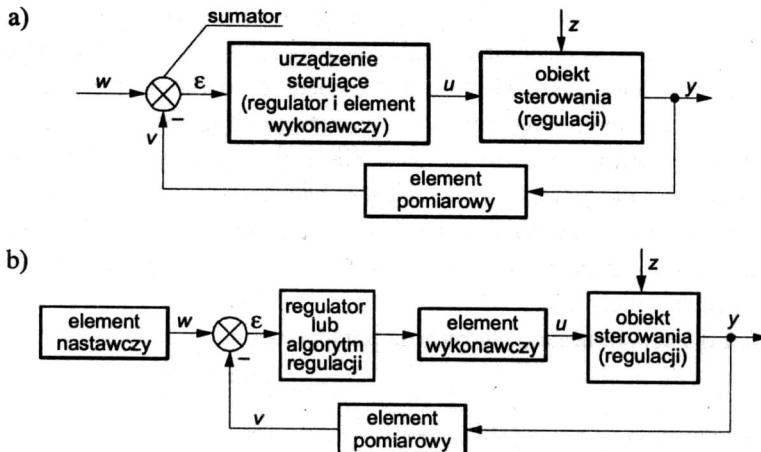
Urządzenie sterujące, tj. element, w którym wytwarza się sygnał nastawiający u , nie otrzymuje żadnych informacji o wartości wielkości regulowanej y , lecz co najwyżej pewne dane dotyczące pożdanego celu sterowania. Ponadto urządzenie sterujące może otrzymywać pewne informacje o zakłócenach (układy otwarte z kompensacją zakłóceń). Jak widać, sterowanie w układzie otwartym ma sens wtedy, gdy na podstawie znajomości sygnału sterującego można dokładnie przewidzieć przebieg wielkości sterowanej. W najlepszym razie przewidywanie takie może być ułatwione, jeśli mamy dostęp do pomiaru zakłóceń. Jeżeli jednak pojawi się zakłócenie, którego wpływu nie znamy, sterowanie w układzie otwartym będzie nieskuteczne.

Układy sterowania ze sprzężeniem zwrotnym. Abytrzymać zamknięty układ sterowania, czyli układ automatycznej regulacji, w skrócie UAR, należy zamknąć pętlę oddziaływań, tzn. uzależnić sterowanie od skutków, jakie to sterowanie wywołuje. Połączenie wielkości regulowanej y , zamykające pętlę regulacji, nazywa się **sprzężeniem zwrotnym**.

Regulacja, czyli sterowanie ze sprzężeniem zwrotnym, jest jednym z najważniejszych pojęć automatyki.

Na rysunku 1.5 przedstawiono najprostszy układ regulacji, którego celem jest utrzymywanie wartości zadanej wielkości regulowanej. Uchyb regulacji ϵ otrzymuje się z relacji

$$\epsilon = w - v \quad (1.1)$$



Rys. 1.5. Schemat blokowy układu regulacji: a) postać uproszczona; b) postać szczegółowa

Układ, który utrzymuje wyznaczony stosunek pomiędzy sygnałem wyjściowym a będącym odniesieniem sygnałem wejściowym, poprzez porównywanie ich i wykorzystanie różnicy jako środka sterowania, jest nazywany **układem sterowania ze sprzężeniem zwrotnym** (układem automatycznej regulacji). Jako przykład można tu podać układ sterowania temperatury w pokoju. Mierząc temperaturę rzeczywistą i porównując ją z temperaturą odniesienia (żądaną temperaturą), termostat włącza lub wyłącza urządzenia grzewcze/chłodzące w taki sposób, aby zapewnić utrzymanie temperatury na komfortowym poziomie, bez względu na warunki zewnętrzne.

Układy sterowania ze sprzężeniem zwrotnym nie ograniczają się tylko do zagadnień inżynierskich. Na przykład ciało człowieka jest bardzo zaawansowanym układem sterowania ze sprzężeniem zwrotnym. Zarówno temperatura ciała, jak i ciśnienie krwi są utrzymywane na stałym poziomie za pomocą fizjologicznego sprzężenia zwrotnego. Rzeczywiście, sprzężenie zwrotne funkcjonuje, stanowiąc o życiu i śmierci: sprawia, że ciało ludzkie jest stosunkowo nieczułe na zaburzenia zewnętrzne, co umożliwia mu właściwe funkcjonowanie w zmieniającym się otoczeniu.

Układy sterowania ze sprzężeniem zwrotnym są często nazywane **układami sterowania w układzie zamkniętym** lub **układami regulacji**. W praktyce określenia „sterowanie ze sprzężeniem zwrotnym” i „sterowanie w układzie zamkniętym” są używane zamiennie. W układach sterowania w układzie zamkniętym wykonawczy sygnał błędu, który jest różnicą pomiędzy sygnałem wejściowym i sygnałem sprzężenia zwrotnego (który może być samym sygnałem wyjściowym lub funkcją sygnału wyjściowego, jego pochodnych i/lub całek), jest podawany do sterownika tak, aby zredukować błąd i doprowadzić sygnał wyjściowy układu do żądanej wartości. Pojęcie „sterowanie z obwodem zamkniętym” zawsze zakłada wykorzystanie akcji sterowania ze sprzężeniem zwrotnym w celu zredukowania błędu układu.

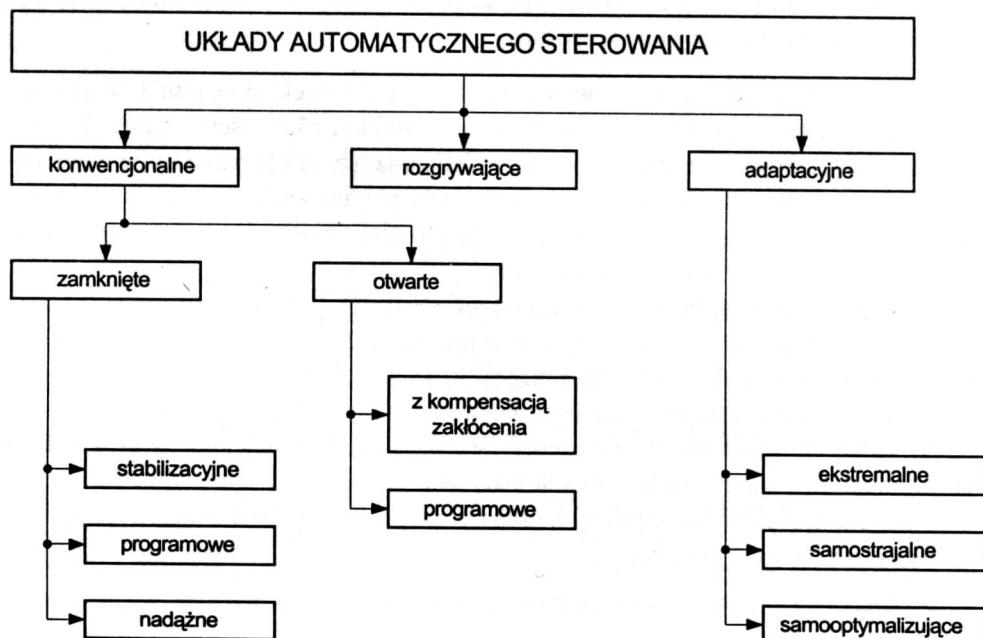
Porównując układy sterowania ze sprzężeniem zwrotnym z układami otwartymi można stwierdzić, że przewaga tych pierwszych polega na wykorzystaniu sprzężenia zwrotnego tak, że odpowiedź układu jest stosunkowo niewrażliwa na zakłócenia zewnętrz-

ne i wewnętrzne zmiany parametrów układu. Stąd możliwe jest wykorzystanie stosunkowo niedokładnych i tanich elementów składowych, aby otrzymać dokładne sterowanie danego urządzenia, podczas gdy jest to niemożliwe w przypadku obwodu otwartego.

Z punktu widzenia stabilności, układ z obwodem otwartym jest łatwiejszy do zbudowania, ponieważ stabilność układu nie jest głównym problemem. Z drugiej strony stabilność jest głównym problemem w układzie z obwodem zamkniętym, który może mieć tendencję do nadmiernego korygowania błędów, co może spowodować oscylacje o stałej lub zmiennej amplitudzie.

Należy podkreślić, że dla układów, w których sygnały wejściowe są znane wyprzedzająco w czasie, i w których nie ma zakłóceń, doradzane jest zastosowanie sterowania z obwodem otwartym. Układy sterowania z obwodem zamkniętym mają przewagę tylko wtedy, gdy istnieją nieprzewidywalne zakłócenia i/lub nieprzewidywalne zmiany w elementach składowych układu. Należy zwrócić uwagę, że oszacowanie mocy wyjściowej częściowo determinuje koszt, waga i rozmiar układu sterowania. Liczba elementów składowych użytych w układzie sterowania z obwodem zamkniętym jest większa niż w odpowiadającym mu układzie sterowania z obwodem otwartym. Stąd układ sterowania z obwodem zamkniętym jest na ogół droższy i potrzebuje więcej mocy. Aby zmniejszyć moc wymaganą przez układ, sterowanie z obwodem otwartym może być użyte wszędzie, gdzie tylko da się je zastosować. Właściwa kombinacja sterowań z obwodem otwartym i zamkniętym jest zwykle tańsza i daje satysfakcjonującą ogólną jakość sterowania.

Klasyfikacja układów automatycznego sterowania. Ze względu na zadanie, jakie spełniają, układy automatycznego sterowania możemy podzielić jak na rysunku 1.6.



Rys. 1.6. Klasyfikacja układów automatycznego sterowania

W grupie konwencjonalnych układów automatycznej regulacji w zależności od wartości zadanej w , możemy wyróżnić następujące typy układów:

- **układ stabilizujący** – układ o stałej wartości zadanej ($w = \text{const}$), który ma za zadanie zapobiegać zmianom wielkości regułowanej przy zmieniających się w czasie zakłóciach;
- **układ programowy** – układ, w którym wartość zadana $w(t)$ jest z góry określona funkcją czasu, czyli zmieniającą się według pewnego programu ($w = f(t)$); przykładem może być rozruch silnika maszyny wyciągowej, w której obroty silnika mają narastać liniowo;
- **układ nadążny (śledzący)** – układ, w którym wartość zadana $w(t)$ jest funkcją czasu, przy czym jest ona nieznana ($w = ?$); zmiany tej funkcji nie zależą od procesu zachodzącego wewnątrz układu, ale związane są ze zjawiskami występującymi na zewnątrz; na przykład układ regulacji położenia lufy działa przeciwlotniczego lub sterowanie położeniem anten radiowych.

Otwarte układy sterowania możemy podzielić na układy:

- **z kompensacją zakłócenia** – w których likwidacja skutków zakłócenia występuje na drodze kompensacji; są wprowadzone dodatkowe bloki do układu sterowania (korektory zakłóceń);
- **programowe** – w których wartość zadana $w(t)$ jest z góry określona funkcją czasu, położenia itp.; przykładem mogą być układy regulacji obrabiarek, wykonujących element o z góry określonym profilu.

W klasycznych układach sterowania zakłada się, że obiekt sterowania i działające nań zakłócenia są stacjonarne, tzn. nie zmieniają swoich właściwości w czasie. Wystarczy więc jednorazowa identyfikacja obiektu i jednorazowy dobór parametrów regulatora. Założenie o stacjonarności jest jednak w wielu przypadkach nie spełniane. Wtedy dla zapewnienia wymaganej jakości sterowania, konieczne jest dostrajanie (adaptacja) parametrów regulatora w czasie sterowania.

Sterowaniem adaptacyjnym nazywa się sterowanie obiektem o zmieniających się właściwościach dynamicznych oraz o zmieniających się właściwościach zakłóceń stochastycznych, w trakcie którego przeprowadza się estymację parametrów modelu obiektu i zakłóceń w celu uaktualnienia parametrów algorytmu sterowania.

W dalszych rozważaniach będziemy się zajmować konwencjonalnymi układami sterowania, a szczególnie układami automatycznej regulacji.

Klasyfikację układów regulacji automatycznej można przeprowadzić na podstawie różnych kryteriów podziału.

Ze względu na liczbę zmiennych sterowanych w tym samym obiekcie dzielimy je na:

- układy regulacji jednej zmiennej,
- układy regulacji wielu zmiennych.

Ze względu na rodzaj elementów, z jakich układ się składa, wyróżniamy:

- układy liniowe,
- układy nieliniowe.

Ze względu na sposób pomiaru wielkości sterowanej układ dzielimy na:

- układy analogowe,
- układy cyfrowe.

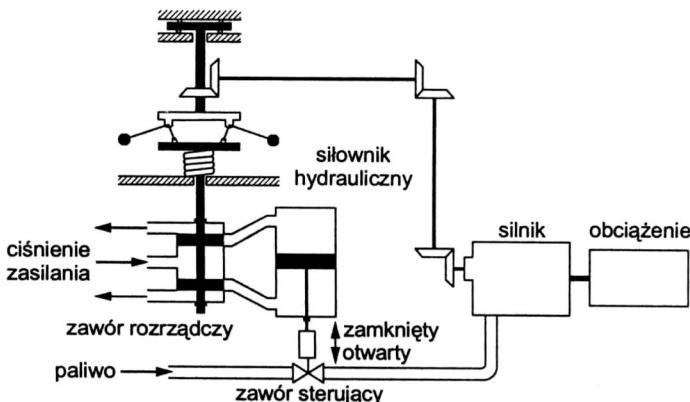
Kolejny rodzaj klasyfikacji wyróżnia:

- układy regulacji ciągłej,
- układy regulacji dyskretnej.

1.5. Przykłady układów automatycznego sterowania

W niniejszym podrozdziale przedstawione zostaną przykłady układów sterowania.

Układ sterowania prędkością obrotową silnika. Podstawową zasadę działania regulatora obrotów Watta w silniku przedstawiono schematycznie na rysunku 1.7. Ilość paliwa dostarczana do silnika jest regulowana stosownie do różnicy pomiędzy żądaną a rzeczywistą prędkością silnika.



Rys. 1.7. Układ sterowania prędkością obrotową silnika

Ciąg czynności może być ustalony następująco: regulator obrotów jest ustawiony tak, aby przy żądanej prędkości obrotowej – olej pod ciśnieniem nie wpływał z żadnej strony do silownika. Jeśli z powodu zakłóceń rzeczywista prędkość spada poniżej żądanej wartości, to zmniejszenie siły odśrodkowej regulatora obrotów powoduje, że zawór sterujący otwiera się (porusza się w dół), dostarczając więcej paliwa i prędkość silnika wzrasta aż do osiągnięcia żądanej wartości. W przeciwnym przypadku, jeśli

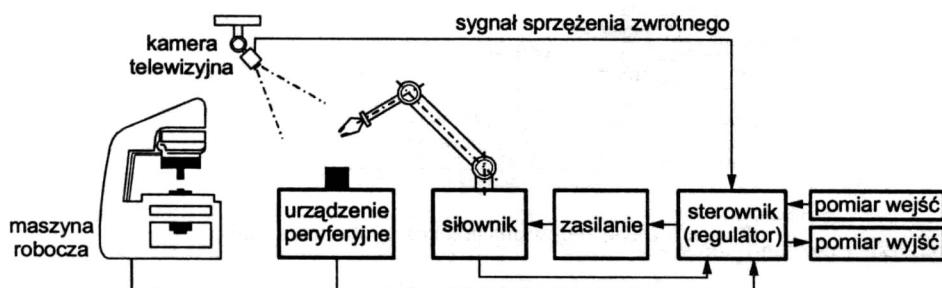
prędkość silnika wzrasta powyżej żądanej wartości, to wzrost siły odśrodkowej regułatora powoduje, że zawór sterowania zamyka się. To zmniejsza dopływ paliwa i prędkość silnika spada aż do osiągnięcia tej wartości.

W takim układzie sterowania obiektem sterowanym jest silnik, a sterowaną zmienią – prędkość obrotowa silnika. Różnica pomiędzy żadaną prędkością a prędkością rzeczywistą jest sygnałem błędów. Sygnał sterowania (ilość paliwa), który ma być zastosowany do urządzenia (silnika) jest sygnałem wykonawczym. Zakłóceniem jest sygnał zewnętrzny, zakłócający zmienną sterowaną, przykładem może być nieoczekiwana zmiana obciążenia.

Układ sterowania robota. Roboty przemysłowe są często wykorzystywane w przemyśle w celu podniesienia zdolności produkcyjnych. Robot może wykonywać prace monotonne równie dobrze jak prace skomplikowane, bez błędów w działaniu. Może również pracować w otoczeniu nie do zaakceptowania dla człowieka, na przykład w ekstremalnych temperaturach (zarówno wysokich, jak i niskich), w środowisku wysoko- lub niskociśnieniowym pod wodą, lub w przestrzeni kosmicznej. Istnieją specjalne roboty do zwalczania pożarów, eksploracji podwodnej, eksploracji przestrzeni kosmicznej itp.

Robot przemysłowy musi manipulować częściami mechanicznymi, które mają indywidualne kształty i wagę. Dlatego musi on mieć przynajmniej ramię, nadgarstek i rękę. Musi mieć wystarczającą siłę, aby wykonać zadanie i zdolność przynajmniej ograniczonego poruszania się. Rzeczywiście, niektóre dzisiejsze roboty mogą same poruszać się swobodnie w ograniczonej przestrzeni fabryki.

Robot przemysłowy musi mieć niezbędne urządzenia pomiarowe. W robotach niskiego poziomu elementami pomiarowymi są zainstalowane w ramionach mikroprzełączniki. Robot najpierw doryka obiektu, a następnie – poprzez mikroprzełączniki – potwierdza istnienie obiektu w przestrzeni i wykonuje następny krok, aby uchwycić go.

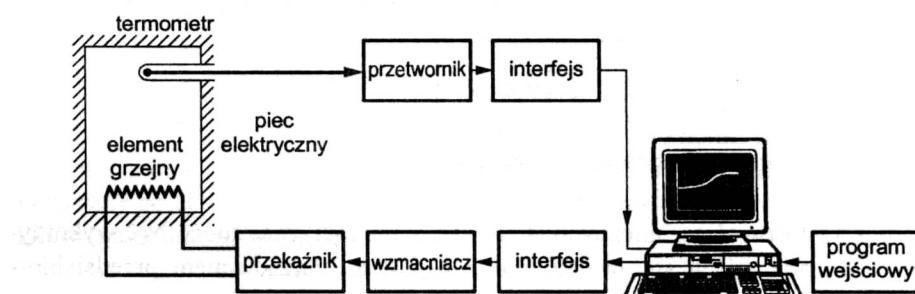


Rys. 1.8. Przykład układu sterowania robota

W robocie wysokiego poziomu do przeszukiwania tła obiektu jest wykorzystany sposób optyczny (taki jak układ telewizyjny). Rozpoznaje on obraz, określa obecność i orientację obiektu. Komputer jest niezbędny do przetwarzania sygnału w procesie

rozpoznawania obrazów (patrz rys. 1.8). W niektórych zastosowaniach skomputeryzowane roboty rozpoznają obecność i orientację każdej części mechanicznej poprzez proces rozpoznawania obrazów, który polega na odczytywaniu liczb kodowych powiązanych z nimi. Następnie robot podnosi część i przemieszcza ją do właściwego miejsca montażu i tam montuje kilka części w jeden element. Dobrze zaprogramowany komputer działa jako sterownik.

Układ sterowania temperaturą. Rysunek 1.9 przedstawia schemat układu sterowania temperaturą pieca elektrycznego. Temperaturę w piecu elektrycznym mierzy się za pomocą termometru, który jest urządzeniem analogowym. Sygnał analogowy, uzyskany z czujnika temperatury, jest przetwarzany na sygnał cyfrowy przez przetwornik analogowo-cyfrowy. Temperatura w postaci sygnału cyfrowego (ciąg impulsów) jest przekazywana do sterownika przez interfejs, a następnie porównywana z zaprogramowaną temperaturą wejściową i jeśli istnieje jakakolwiek rozbieżność (uchyb), sterownik wysyła sygnał do elementu grzejnego poprzez interfejs, wzmacniacz i przekaźnik w celu doprowadzenia temperatury pieca do żądanej wartości.



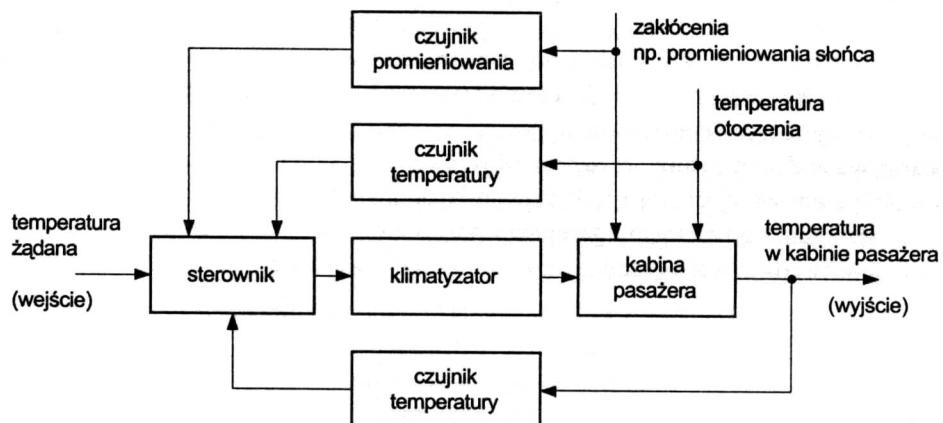
Rys. 1.9. Schemat sterowania temperaturą pieca elektrycznego

Sterowanie temperaturą w kabinie pasażerskiej samochodu. Rysunek 1.10 przedstawia schemat funkcjonalny układu sterowania temperaturą w kabinie pasażerskiej samochodu. Żądana temperatura przetworzona na napięcie stanowi sygnał wejściowy do sterownika. Rzeczywista temperatura kabiny pasażerskiej jest przetworzona na napięcie przez czujnik i przekazana z powrotem do sterownika w celu porównania z sygnałem wejściowym. Temperatura otoczenia i ciepło promieniowania słońca, które nie są stałe podczas jazdy samochodu, działają jako zakłócenia. Ten układ wykorzystuje zarówno sterowanie ze sprzężeniem zwrotnym, jak i sterowanie ze sprzężeniem do przodu (predykcję). Sterowanie ze sprzężeniem do przodu powoduje działanie korygujące, zanim zakłócenie wpłynie na sygnał wyjściowy.

Temperatura w kabinie pasażerskiej samochodu różni się znacznie w zależności od miejsca, w którym jest mierzona. Zamiast korzystania z wielu czujników, w celu pomiaru temperatury i uśredniania pomierzonych wartości, oszczędniej jest zainstalować małą dmuchawę ssącą w miejscu, w którym pasażerowie zwykle odczuwają temperaturę.

rę. Temperatura powietrza z dmuchawy ssącej stanowi wskazanie temperatury w kabinie pasażerskiej i jest uważana za wyjście układu.

Sterownik otrzymuje sygnał wejściowy, sygnał wyjściowy i sygnały z czujników ze źródeł zakłóceń. Sterownik wysyła sygnał optymalnego sterowania do urządzenia klimatyzacyjnego w celu sterowania ilością powietrza chłodzącego lub cieplego, tak aby temperatura w kabinie pasażerskiej była zbliżona do żądanej temperatury.



Rys. 1.10. Sterowanie temperaturą w kabinie samochodu

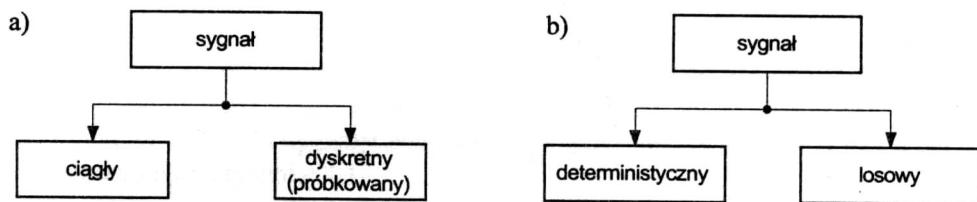
Oprócz zastosowań technicznych, sterowanie automatyczne może być wykorzystywane w zagadnieniach sterowania, np. transportem, zarządzaniem przedsiębiorstwem itd.

1.6. Sygnały w układach automatycznego sterowania

W automatyce przebieg zmian określonej wielkości fizycznej, wyrażający w umowny sposób informację, nazywa się sygnałem. W każdym układzie sterowania przekazywanie informacji pomiędzy elementami układu odbywa się za pośrednictwem sygnałów.

Podstawową cechą sygnału jest jego wielkość nośna – jest to wielkość fizyczna, której zmiany umożliwiają przekazywanie w określony sposób informacji. Wielkościami nośnymi sygnałów są np. ciśnienie powietrza lub oleju, napięcie lub natężenie prądu, siła, przyspieszenie lub przemieszczenie. Mogą to być również sygnały akustyczne, świetlne, radiowe itp. Jeżeli dwie wielkości fizyczne są jednoznacznie od siebie zależne, to z przebiegu jednej z nich możemy mówić o przebiegu drugiej – inaczej mówiąc, jeden z sygnałów zawiera informację o drugim. Do przekazywania informacji mogą być wykorzystywane różne cechy wielkości nośnej, np. wartość amplitudy, częstotliwość, szerokość impulsów itp. Sygnały są na ogół dowolnymi funkcjami czasu.

Klasyfikację sygnałów ze względu na dwa różne kryteria przedstawiono na rysunku 1.11.



Rys. 1.11. Klasyfikacja sygnałów ze względu na: a) ciągłość opisu; b) jednoznaczność opisu

Celem tego podrozdziału jest przedstawienie pewnej liczby typowych funkcji, które służą do przybliżenia sygnałów rzeczywistych. W istocie, o ile pewne funkcje ciągłe, takie jak sinus lub funkcje wykładnicze, należą do elementarnych w sensie matematycznym, o tyle nie odnosi się to do funkcji skokowych lub impulsowych, a tym bardziej do sygnałów losowych.

1.6.1. Sygnały ciągłe

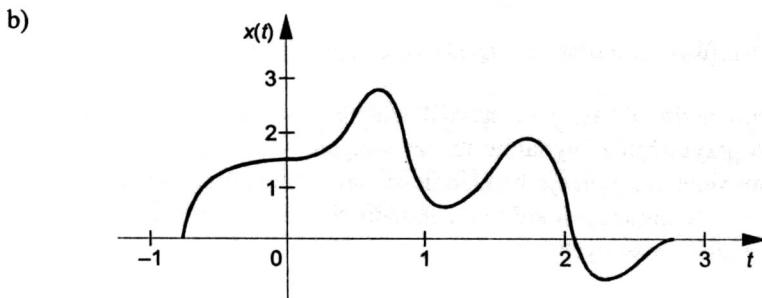
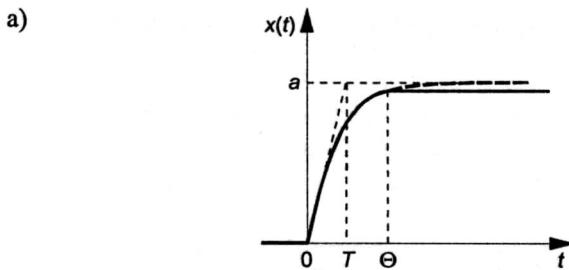
Przy rozważaniu sygnałów ciągłych zakłada się, że czas jest zmienną ciągłą. Sygnały takie można zapisywać w postaci parametrycznej i nieparametrycznej. Opis parametryczny polega na tym, że sygnał jest określony przez przyjęte wartości współczynników (parametrów), przykładowo:

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < 0 \\ a(1 - e^{-t/T}) & \text{dla } 0 \leq t \leq \Theta \\ a(1 - e^{-\Theta/T}) & \text{dla } t \geq \Theta \end{cases} \quad (1.2)$$

gdzie: a , Θ , T – parametry.

Opis parametryczny sygnału (1.2) w formie graficznej przedstawia rysunek 1.12a.

Opis nieparametryczny dotyczy sygnałów, których nie można określić za pomocą skończonej liczby wartości. Tak więc zapisy na papierze i taśmie magnetycznej stanowią definicje nieparametryczne sygnału (rys. 1.12b). Zwykle sygnały rzeczywiste, odzwierciedlające przebieg np. ciśnienia czy temperatury, trudno jest przedstawić ścisłe w sposób parametryczny. Tym niemniej staramy się zwykle, jeżeli jest to możliwe, idealizować je za pomocą opisów parametrycznych. Wśród sygnałów, których opis parametryczny jest prosty, wyróżnia się sygnały wykładnicze i sygnały impulsowe; odgrywają one w automatyce dużą rolę, ponieważ wszystkie sygnały wyjściowe układów liniowych da się przedstawić za pomocą liniowych kombinacji sygnałów tych dwóch typów.



Rys. 1.12. Postać graficzna sygnału: a) opis parametryczny; b) opis nieparametryczny

Sygnały wykładnicze. Obecnie rozważymy sygnały stanowiące rozwiązanie liniowego równania różniczkowego o stałych współczynnikach

$$a_n \frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 x = 0 \quad (1.3)$$

Wielomian charakterystyczny tego równania ma postać

$$F(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0 \quad (1.4)$$

Pełne rozwiązanie równania różniczkowego jest sygnałem wykładniczym

$$x(t) = e^{\alpha_1 t} \sum_{j=0}^{n_1-1} c_{1j} t^j + e^{\alpha_2 t} \sum_{j=0}^{n_2-1} c_{2j} t^j + \dots + e^{\alpha_p t} \sum_{j=0}^{n_p-1} c_{pj} t^j \quad (1.5)$$

gdzie α_i oznacza pierwiastki, których krotności są równe n_i ($i = 1, \dots, p$, $n_1 + n_2 + \dots + n_p = n$).

W związku z powyższym, zwykły wielomian należy do klasy sygnałów wykładniczych, podobnie jak sygnały sinusoidalne.

Przykładowo: $x(t) = \cos(\omega t + \varphi)$ jest rozwiązaniem równania

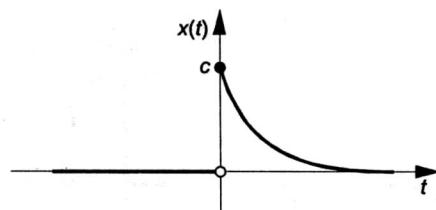
$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

i inaczej może być zapisane w postaci

$$x(t) = \frac{1}{2} \left(e^{j(\omega t + \varphi)} + e^{-j(\omega t + \varphi)} \right) \quad (1.6)$$

Podczas procesów przejściowych lub też w wypadku, gdy występuje np. zjawisko zmiany wartości zadanej bądź zakłóceń, pojawiają się sygnały, które można uważać za równe 0 dla $t < 0$. Taki sygnał określony jest analitycznie za pomocą równości (1.7) i przedstawiony na rysunku 1.13

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < 0 \\ ce^{at} & \text{dla } t \geq 0 \end{cases} \quad (1.7)$$

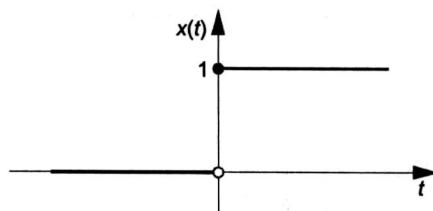


Rys. 1.13. Sygnał wykładniczy określony dla $t \geq 0$ i $\alpha < 0$

Wzór (1.7) można zapisać również w inny sposób, korzystając z sygnału skokowego.

Skok jednostkowy (rys. 1.14) zdefiniujemy jako

$$\mathbf{1}(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < 0 \\ 1 & \text{dla } t \geq 0 \end{cases} \quad (1.8)$$



Rys. 1.14. Skok jednostkowy

Wówczas wzór (1.7) można zapisać w postaci

$$x(t) = ce^{at} \cdot \mathbf{1}(t) \quad (1.9)$$

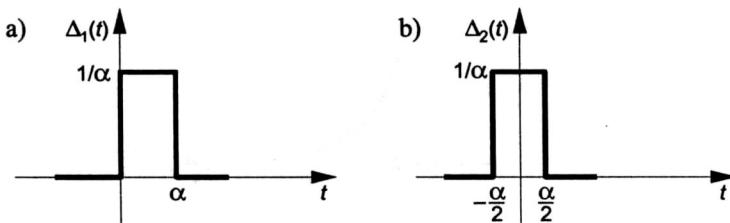
1.6.2. Sygnały impulsowe

Wszystkie sygnały impulsowe $\Delta_i(t)$ mają następujące właściwości:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Delta_i(t) dt = 1 \text{ dla każdego } \alpha \text{ (rys. 1.15),}$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \Delta_i(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t \neq 0, \\ \infty & \text{dla } t = 0. \end{cases}$$

Na rysunku 1.15 przedstawiono dwa przykłady praktycznej realizacji sygnałów impulsowych.



Rys. 1.15. Sygnały impulsowe: a) określony dla $0 < t < \alpha$; b) określony dla $-\frac{\alpha}{2} < t < \frac{\alpha}{2}$

Impuls Diraca (impuls jednostkowy) można zdefiniować jako granicę jednej z przedstawionych na rysunku 1.15 funkcji impulsowych przy $\alpha \rightarrow 0$

$$\delta(t) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \Delta_i(t) \quad (1.10)$$

Zatem

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \quad (1.11)$$

Stąd

$$\delta(t) = \frac{d\mathbf{1}(t)}{dt} \quad (1.12)$$

Skok jednostkowy można więc rozważać jako funkcję pierwotną impulsu jednostkowego

$$\mathbf{1}(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau \quad (1.13)$$

1.6.3. Sygnały dyskretne

Sygnały dyskretne, to sygnały określone tylko dla pewnego przeliczanego ciągu określonych chwil czasowych $t = \{t_1, t_2, \dots, t_n, \dots\}$, przy czym zmienna t nazywana jest zmienną dyskretną lub zdyskretyzowaną.

Najczęściej sygnały dyskretne zapisuje się jako

$$x(t_n) = x_n \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.14)$$

Najczęściej rozważany jest przypadek, gdy poszczególne chwile (punkty czasowe) są równoodległe (przedziały czasowe między tymi punktami są równe)

$$t_{i+1} - t_i = \Delta \text{ dla każdego } i \quad (1.15)$$

Najbardziej elementarnym sposobem określania sygnału dyskretnego jest podanie kolejnych wartości sygnału x_n . Przykładowo:

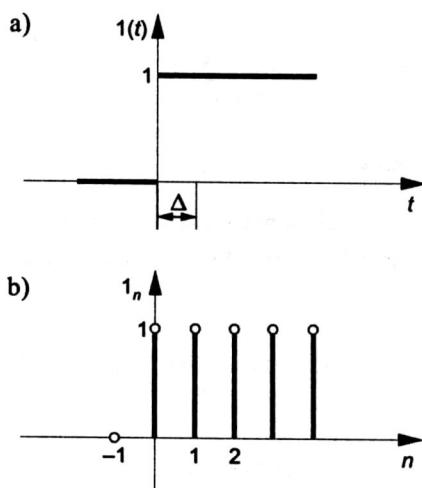
$$x_0 = 3,54$$

$$x_1 = 3,42$$

$$x_3 = 3,29$$

⋮

Taki opis odpowiada opisowi nieparametrycznemu dla sygnałów ciągłych, lecz opis parametryczny jest dogodniejszy, np. $x_n = a + n \cdot b + c^n$, gdzie: a, b, c to parametry definiujące sygnał x_n .



Rys. 1.16. Próbkowanie sygnału skokowego $1(t)$: a) sygnał skokowy;
b) wynik próbkowania sygnału skokowego

Sygnał dyskretny można również zdefiniować na podstawie sygnału ciągłego. Przykładowo, niech ciąg x_n będzie określony równością

$$x_n = x(n\Delta) \quad (1.16)$$

gdzie:

x_n – próbka sygnału $x(t)$,

Δ – okres próbkowania.

Istnieje jednak możliwość, że w sygnale $x(t)$ występuje nieciągłość lub impulsy w punktach próbkowania. W przypadku gdy sygnał $x(t)$ jest nieciągły dla $t = n\Delta$, przyjmujemy, że $x_n = x(n\Delta + \epsilon)$. Rezultat próbkowania skoku jednostkowego przedstawiony jest na rysunku 1.16.

1.6.4. Sygnały losowe

Sygnały losowe zmieniają się w czasie w sposób, którego nie da się ścisłe przewidzieć (nie można przewidzieć przebiegu sygnału na podstawie znajomości aktualnej jego wartości). Są one charakteryzowane przez prawdopodobieństwo określonego zachowania się.

Najczęściej występujące sygnały losowe są dobrze określone za pomocą dwóch parametrów:

- 1) wartości średniej $m(t)$

$$m(t) = E[X(t)] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad . (1.17)$$

gdzie $X(t)$ – zmienna losowa;

- 2) wariancji, czyli kwadratu odchylenia standardowego $\sigma^2(t)$, która określa obszar, w jakim należy się spodziewać największej koncentracji realizacji

$$\sigma^2(t) = E[(X(t) - m)^2] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - m)^2 \quad (1.18)$$

oraz funkcji korelacji własnej (autokorelacji)

$$\phi(t, \tau) = E[X(t) \cdot X(t - \tau)] \quad (1.19)$$

W przypadku gdy parametry statystyczne są niezależne od wyboru początkowej chwili obserwacji, mamy do czynienia z sygnałem stacjonarnym, dla którego:

$$\begin{aligned}m(t) &= m \\ \sigma^2(t) &= \sigma^2 \\ \phi(t, \tau) &= \phi(\tau)\end{aligned}\tag{1.20}$$

Jeżeli ponadto sygnał jest ergodyczny, to tyle samo informacji o nim zawiera jedna lub więcej realizacji obserwowanych w krótszym czasie.

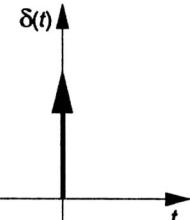
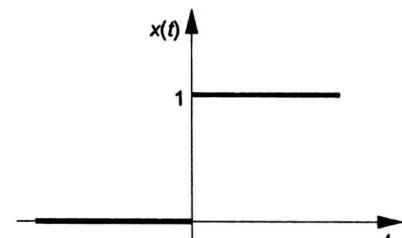
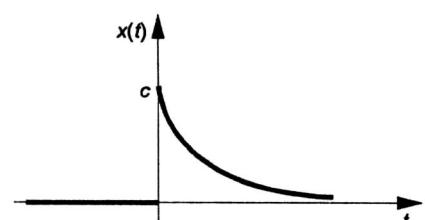
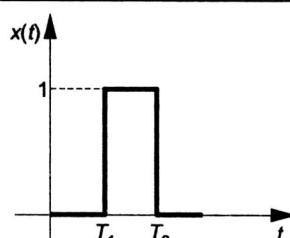
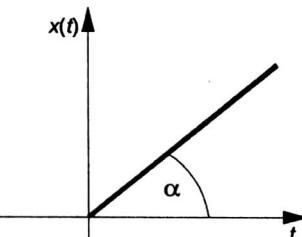
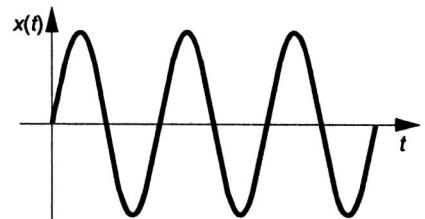
Zatem:

$$\begin{aligned}\hat{m} &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) dt \\ \hat{\sigma}^2 &= \phi(0) \\ \hat{\phi}(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T (x(t) - m)(x(t + \tau) - m) dt\end{aligned}\tag{1.21}$$

1.6.5. Podstawowe sygnały stosowane w automatyce

Podstawowe sygnały występujące w układach automatycznego sterowania zestawiono w tabeli 1.1 (na wklejce).

Tabela 1.1
Podstawowe sygnały stosowane w automatyczce

| Lp. | Rodzaj sygnału | | |
|-----|--------------------|---|--|
| 1 | Impuls Diraca |  | $\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t \neq 0 \\ \infty & \text{dla } t = 0 \end{cases}$ |
| 2 | Skok jednostkowy |  | $1(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < 0 \\ 1 & \text{dla } t \geq 0 \end{cases}$ |
| 3 | Sygnal wykładniczy |  | $x(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < 0 \\ ce^{\alpha t} & \text{dla } t \geq 0 \end{cases}$ $\alpha < 0$ |
| 4 | Impuls prostokątny |  | $x(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t \in (0, T_1) \\ 1 & \text{dla } t \in (T_1, T_2) \\ 0 & \text{dla } t \in (T_2, \infty) \end{cases}$ |
| 5 | Funkcja liniowa |  | $x(t) = at$ |
| 6 | Sygnal harmoniczny |  | $x(t) = \sin \omega t$ |

2. Modelowanie matematyczne układów dynamicznych

2.1. Wprowadzenie

Matematyczny opis zachowania się obiektów regulacji i poszczególnych urządzeń automatyki jest niezbędny do przeprowadzania analizy i syntezy działania układów automatyki. Opis ten nazywany jest **modelem matematycznym**.

Rozróżnia się właściwości statyczne i dynamiczne obiektu lub elementu. Właściwości statyczne odnoszą się do stanu ustalonego (sygnał stały w czasie). Właściwości dynamiczne odnoszą się do stanu nieustalonego (sygnał zmienny w czasie). Stan taki wywołany jest działaniem zmiennych sygnałów wejściowych. Model matematyczny układu dynamicznego jest zdefiniowany jako układ równań, który dokładnie lub przy najmniej dość dobrze opisuje właściwości statyczne i dynamiczne układu. Należy zauważać, że model matematyczny dla danego układu nie jest jedyny. Układ może być opisany na wiele różnych sposobów i dlatego może mieć wiele różnych modeli matematycznych, w zależności od punktu widzenia badającego.

Właściwości dynamiczne wielu układów: mechanicznych, elektrycznych, cieplnych, ekonomicznych, biologicznych, czy też innych, mogą być opisane poprzez równania różniczkowe. Takie równania można otrzymać, wykorzystując prawa fizyczne rządzące konkretnym układem (na przykład prawa Newtona dla układów mechanicznych, a prawa Kirchhoffa dla układów elektrycznych). Musimy zawsze pamiętać, że wyprowadzenie rozsądnego modelu matematycznego jest najważniejszym etapem całej analizy.

Modele matematyczne mogą przybierać wiele różnych postaci. W zależności od układu i okoliczności, dany model matematyczny może pasować lepiej niż inne modele. Na przykład, w problemach sterowania optymalnego korzystne jest zastosowanie reprezentacji w przestrzeni stanów. Z drugiej strony, dla analizy odpowiedzi czasowej lub odpowiedzi częstotliwościowej w układach z jednym wejściem i jednym wyjściem, liniowych, niezmiennych w czasie, opisanie przez funkcję przejścia może być wygodniejsze. Po otrzymaniu modelu matematycznego, do analizy i syntezy można wykorzystać rozmaite narzędzia analityczne i komputer.

Zwiększenie dokładności modelu matematycznego możliwe jest poprzez zwiększenie jego skomplikowania. W niektórych przypadkach, aby opisać cały układ, wpro-

wadzamy setki równań. Tworząc model matematyczny, musimy zdecydować się na kompromis pomiędzy prostotą modelu a dokładnością wyników analizy. Jeśli duża dokładność nie jest wymagana, bardziej pożądane jest stworzenie rozsądnie uproszczonego modelu. W rzeczywistości, na ogół jesteśmy usatysfakcjonowani, jeśli możemy otrzymać model matematyczny, który jest odpowiedni do rozważanego problemu. Ważne jest jednak zwrócenie uwagi na fakt, że wyniki otrzymywane z analizy są obowiązujące tylko w takim zakresie, w jakim model aproksymuje dany układ dynamiczny.

Wyprowadzając rozsądnie uproszczony model matematyczny stwierdzamy często, że niezbędne jest zaniedbanie pewnych fizycznych właściwości układu. W szczególności, jeśli pożądany jest liniowy model matematyczny o parametrach skupionych (tzn. taki, w którym występują równania różniczkowe zwyczajne), to zawsze jest konieczne zaniedbanie pewnych nieliniowości i parametrów rozproszonych (opisywanych równaniami różniczkowymi cząstkowymi), które mogą istnieć w układzie fizycznym. Jeśli wpływ tych zaniedbanych właściwości na odpowiedź jest mały, to otrzymamy dobrą zgodność pomiędzy wynikami analizy modelu matematycznego i wynikami badań doświadczalnych układu fizycznego.

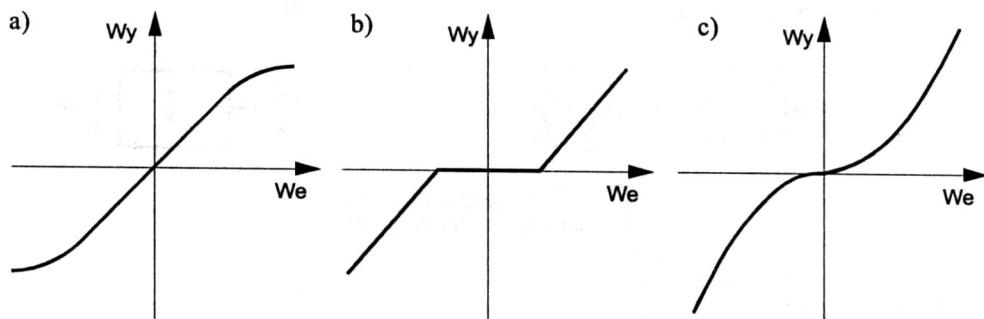
Na ogół, rozwiązujejąc nowy problem uważamy za celowe budowanie najpierw modelu uproszczonego, tak aby otrzymać ogólne rozwiązania. Następnie może być zbudowany pełniejszy model matematyczny, który będzie wykorzystany do pełniejszej analizy.

Musimy być świadomi, że liniowy model o parametrach skupionych (obowiązujący w niskich częstotliwościach), może przestać obowiązywać w odpowiednio wysokich częstotliwościach, kiedy zaniedbana właściwość parametrów rozproszonych może stać się ważnym czynnikiem w dynamicznym zachowaniu układu. Na przykład masa sprężyny może być zaniedbana w przypadku działań w niskich częstotliwościach, ale staje się ważną właściwością układu w wysokich częstotliwościach. Chociaż wiele związków fizycznych jest często opisywanych równaniami liniowymi, w większości przypadków rzeczywiste ziązki nie są całkowicie liniowe.

Układ nazywamy liniowym, jeśli ma zastosowanie zasada superpozycji. Zasada superpozycji mówi, że odpowiedź wytworzona przez równoczesne zastosowanie dwóch różnych funkcji wymuszających jest sumą dwóch indywidualnych odpowiedzi.

W badaniach doświadczalnych układu dynamicznego, układ może być uważany za liniowy, jeśli przyczyna i skutek są proporcjonalne, skąd można wnioskować, że zasada superpozycji ma zastosowanie. Faktycznie, dokładne badanie układów fizycznych wykazuje, że nawet tzw. „układy liniowe” są prawdziwie liniowe tylko w ograniczonych zakresach działania. W praktyce, w przypadku wielu układów elektromechanicznych, hydraulicznych, pneumatycznych itd. w grę wchodzą nieliniowe ziązki pomiędzy zmiennymi. Na przykład sygnał wyjściowy elementu może być nasycany dla dużych sygnałów wejściowych. Może występować strefa nieczułości, która dotyczy małych sygnałów, określa ona zakres zmienności sygnałów wejściowych, na jakie element jest nieczuły. W pewnych elementach może wystąpić nieliniowość w stopniu

kwadratowym. Na przykład amortyzatory wykorzystane w układach fizycznych mogą być liniowe, działając przy małej prędkości, ale mogą stać się nieliniowe przy dużych prędkościach, a siła tłumienia może stać się proporcjonalna do kwadratu prędkości działania. Przykłady krzywych charakterystyk dla tych nieliniowości są pokazane na rysunku 2.1.



Rys. 2.1. Przykłady charakterystyk statycznych elementów nieliniowych: a) nasycenie; b) strefa nieczułości; c) nieliniowość kwadratowa

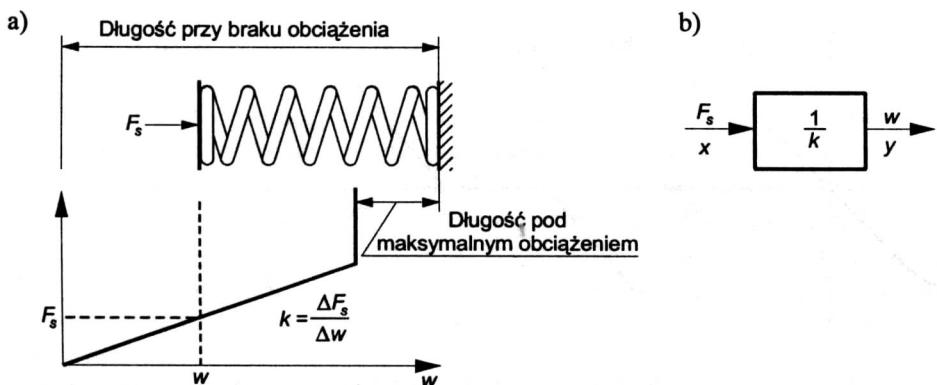
Należy zauważyć, że niektóre ważne układy sterowania są nieliniowe dla sygnałów dowolnej wielkości. Na przykład w dwupołożeniowych układach sterowania, akcja sterowania polega na włączeniu, lub na wyłączeniu – nie ma zatem liniowego związku pomiędzy sygnałami wejściowym i wyjściowym sterownika.

Procedury znajdowania rozwiązań problemów, kiedy w grę wchodzą takie układy nieliniowe, są na ogół niezwykle skomplikowane. Z powodu tej matematycznej trudności, związanej z układami nieliniowymi, często stwierdza się, że niezbędne jest wprowadzenie „równoważnych” układów liniowych w miejsce układów nieliniowych. Układy takie obowiązują tylko w ograniczonym obszarze działania. Kiedy właściwości układu nieliniowego zostaną zaproksymowane przez liniowy model matematyczny, w celach analitycznych i projektowych można zastosować wiele narzędzi do analizy układów liniowych. W inżynierii sterowania normalne działanie układu może odbywać się wokół punktu równowagi, a sygnały mogą być rozważane jako małe wokół tego punktu. Należy zwrócić uwagę, że istnieje wiele wyjątków od tej sytuacji. Jednakże jeśli układ działa wokół punktu równowagi i jeśli wchodzące w grę sygnały są małe, to możliwe jest zaproksymowanie układu nieliniowego za pomocą układu liniowego, który jest równoważny rozważanemu układowi nieliniowemu, w ograniczonym zakresie działania. Taki zlinearyzowany model (model liniowy, niezmienny w czasie) ma istotne znaczenie w inżynierii sterowania. Zagadnienia liniaryzacji układów dynamicznych zostaną omówione w podrozdziale 2.4.

W dalszym ciągu rozdziału 2 zajmiemy się elementami liniowymi stacjonarnymi o stałych skupionych. Tworząc model matematyczny układów i elementów automatyki, będziemy określać zależności opisujące związki między sygnałami.

2.2. Modelowanie układów mechanicznych

Na rysunku 2.2a przedstawiono model i charakterystykę sprężyny poddanej działaniu siły F_s . W wyniku działania tej siły sprężyna odkształci się o wielkość w .



Rys. 2.2. Sprężyna: a) model i charakterystyka sprężyny poddanej działaniu siły F_s ; b) schemat blokowy

Związek pomiędzy sygnałem wejściowym $x = F_s$ i wyjściowym z elementu $y = w$ opisuje zależność

$$F_s = kw \quad (2.1)$$

stąd

$$w = \frac{1}{k} F_s \quad (2.2)$$

Ostatecznie odkształcenie sprężyny określa zależność

$$y = \frac{1}{k} x \quad (2.3)$$

Elementowi opisanemu zależnością (2.3) odpowiada schemat blokowy przedstawiony na rysunku 2.2b.

Podobnie, tłumik hydrauliczny (rys. 2.3a) można opisać zależnością

$$F_d = c \frac{dy}{dt} \quad (2.4)$$

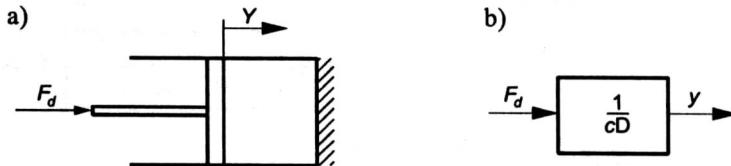
Wprowadzając operator różniczkowania $D^n = \frac{d^n}{dt^n}$, $n = 1, 2, \dots$ otrzymamy

$$F_d = c D y \quad (2.5)$$

Stąd

$$y = \frac{1}{cD} F_d \quad (2.6)$$

Zależność tę można przedstawić graficznie jak na rysunku 2.3b.



Rys. 2.3. Tłumik hydrauliczny: a) model; b) schemat blokowy

Dla zespołu masa – tłumik – sprężyna, przedstawionego na rysunku 2.4a, można zapisać następujące równanie równowagi

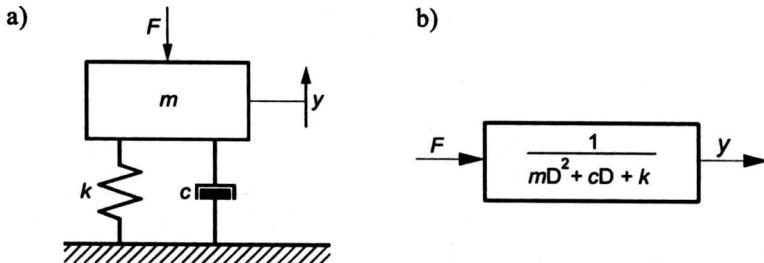
$$F = m \frac{d^2 y}{dt^2} + c \frac{dy}{dt} + ky \quad (2.7)$$

Po wprowadzeniu operatora różniczkowania otrzymamy

$$F = (mD^2 + cD + k)y \quad (2.8)$$

stąd

$$y = \frac{1}{mD^2 + cD + k} F \quad (2.9)$$

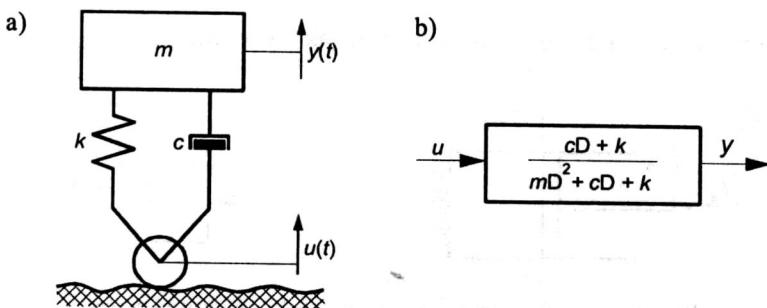


Rys. 2.4. Zespół masa – tłumik – sprężyna: a) model układu; b) schemat blokowy

Zależność tę można przedstawić graficznie (rys. 2.4b).

Na rysunkach 2.5 i 2.6 przedstawiono bardziej złożone układy mechaniczne wykorzystujące ruch postępowy i obrotowy.

Układ z rysunku 2.5a jest modelem fizycznym zawieszenia jednego koła pojazdu.



Rys. 2.5. Zawieszenie pojazdu: a) model fizyczny zawieszenia; b) schemat blokowy

Wielkością wejściową układu jest przemieszczenie osi koła $u(t)$, zaś wyjściową $y(t)$ – przemieszczenie masy nadwozia. Zakładając, że układ jest liniowy oraz korzystając z zasady d'Alemberta, piszemy równanie ruchu układu w postaci

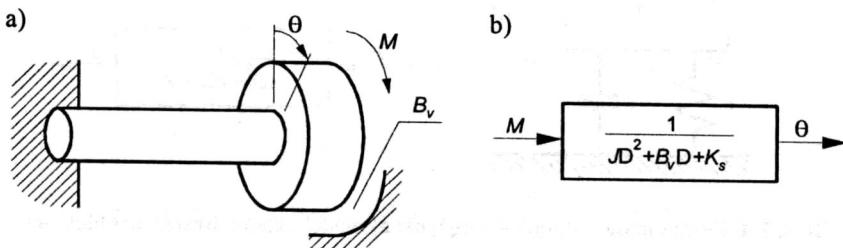
$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + c \left(\frac{dy}{dt} - \frac{du}{dt} \right) + k(y - u) = 0 \quad (2.10)$$

Wprowadzając operator różniczkowania D oraz przekształcając równanie (2.10) otrzymamy

$$mD^2 y + cDy + ky = cDu + ku \quad (2.11)$$

stąd

$$y = \frac{cD + k}{mD^2 + cD + k} u \quad (2.12)$$



Rys. 2.6. Wał jednostronne zamocowany: a) model fizyczny wału; b) schemat blokowy

Podobnie dla przypadku układu przedstawionego na rysunku 2.6a równanie ruchu układu ma postać

$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} + B_v \frac{d\theta}{dt} + K_s \theta = M \quad (2.13)$$

gdzie:

θ – kąt obrotu wału,

M – moment sił zewnętrznych,

J – moment bezwładności wału,

B_v – współczynnik tłumienia wiskotycznego,

K_s – współczynnik sztywności wału

$$K_s = \frac{\pi d^4 G}{32l},$$

d, l – średnica i długość wału,

G – moduł sprężystości.

Wprowadzając operator różniczkowania D i przekształcając powyższe równanie, otrzymamy

$$\theta = \frac{1}{JD^2 + B_v D + K_s} M \quad (2.14)$$

Tę zależność można przedstawić w postaci schematu blokowego jak na rysunku 2.6b.

2.3. Transmitancja operatorowa

W teorii sterowania funkcje, zwane funkcjami przejścia lub transmitancjami, są powszechnie wykorzystywane do charakteryzowania związków pomiędzy sygnałami wyjściowymi a wejściowymi elementów lub układów, które mogą być opisane za pomocą liniowych, stacjonarnych (niezmiennych w czasie) równań różniczkowych.

Transmitancja (funkcja przejścia) jest zdefiniowana jako stosunek transformaty Laplace'a sygnału wyjściowego (funkcji odpowiedzi) do transformaty Laplace'a sygnału wejściowego (funkcji wymuszającej), przy założeniu, że wszystkie warunki początkowe są równe zero.

Rozważmy liniowy, niezmienny w czasie układ zdefiniowany przez następujące równanie różniczkowe

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 y = b_m \frac{d^m x}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + \dots + b_0 x \quad (2.15)$$

Jest to równanie różniczkowe liniowe o stałych współczynnikach, przy czym $n \geq m$.

Sygnal y jest sygnałem wyjściowym układu, a x jest sygnałem wejściowym. Funkcję przejścia tego układu otrzymuje się poprzez zastosowanie transformaty Laplace'a

do obydwu stron równania (2.15), przy założeniu, że wszystkie warunki początkowe są równe zero.

Transmitancja układu ma postać

$$G(s) = \frac{\mathcal{L}[y]}{\mathcal{L}[x]} = \frac{Y(s)}{X(s)} \quad (2.16)$$

Dokonując przekształceń Laplace'a otrzymamy

$$(a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0) Y(s) = (b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0) X(s) \quad (2.17)$$

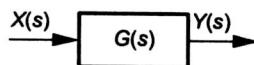
stąd

$$Y(s) = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0} X(s) \quad (2.18)$$

Przy zerowych warunkach początkowych sygnał wyjściowy w postaci operatorowej jest iloczynem transformaty sygnału wejściowego i transmitancji $G(s)$ zwanej również **transmitancją operatorową**

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \quad (2.19)$$

Ponieważ opisuje ona właściwości obiektu lub układu automatyki, przyjęto wpisywać ją wewnątrz prostokątów przedstawiających elementy na schematach blokowych (rys. 2.7).



Rys. 2.7. Symbol graficzny elementu, obiektu lub układu automatyki i jego transmitancja operatorowa

Elementy wielowymiarowe określa macierz transmitancji, na przykład

$$G(s) = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) & \cdots & G_{1m}(s) \\ \vdots & \vdots & \vdots & G_{2m}(s) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ G_{n1}(s) & \cdots & \cdots & G_{nm}(s) \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

gdzie $G_{ik}(s) = \frac{Y_i(s)}{X_k(s)}$ – przy założeniu, że wszystkie pozostałe wartości wejściowe i warunki początkowe są równe zero.

W przypadku układu o dwóch wejściach i dwóch wyjściach otrzymujemy

$$G(s) = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

Transmitancja operatorowa umożliwia opisanie właściwości statycznych i dynamicznych układu za pomocą równań algebraicznych zmiennej s . Jeśli najwyższa potęga s w mianowniku funkcji przejścia jest równa n , to układ nazywamy **układem n -tego rzędu**.

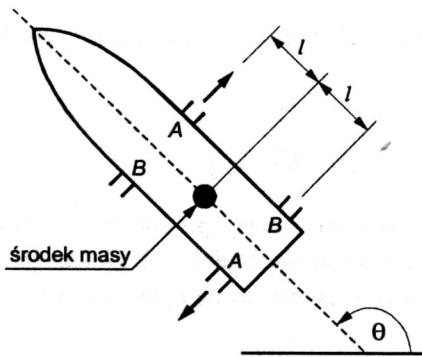
Możliwość stosowania transmitancji jest ograniczona do układów równań różniczkowych liniowych, niezmennych w czasie. Transmitancja operatorowa jest jednak szeroko wykorzystywana w analizie i projektowaniu takich układów.

Poniżej przedstawiamy najważniejsze właściwości transmitancji:

- Transmitancja układu jest modelem matematycznym, dla którego istnieje operacyjna metoda wyrażenia równania różniczkowego, które wiąże zmienną wyjściową ze zmienną wejściową.
- Transmitancja jest właściwością samego układu, niezależną od wielkości i natury sygnału wejściowego.
- Transmitancja zawiera składniki niezbędne do przedstawienia związku pomiędzy sygnałami: wyjściowym i wejściowym, nie dostarcza natomiast żadnej informacji dotyczącej fizycznej struktury układu. Transmitancje wielu fizycznie różnych układów mogą być identyczne.
- Jeśli transmitancja układu jest znana, to możemy określić sygnał wyjściowy (odpowiedź) dla różnych sygnałów wejściowych.
- Jeśli transmitancja układu jest nieznana, to można ją ustalić doświadczalnie, wprowadzając znane sygnały wejściowe i badając sygnały wyjściowe układu. Raz określona transmitancja daje pełny opis charakterystyk statycznych i dynamicznych układu, w odróżnieniu od jego opisu fizycznego.

Rozważmy układ sterowania położeniem satelity, pokazany na rysunku 2.8. Schemat pokazuje sterowanie wyłącznie kątem odchylenia θ . W rzeczywistym układzie sterowanie dotyczy trzech osi. Małe dysze silników korekcyjnych wytwarzają siły w celu obrócenia satelity do żądanego położenia. Dwie symetrycznie usytuowane dysze oznaczone literami A i B działają wspólnie. Założymy, że ciąg każdej dyszy jest równy $0,5F$, a na układ działa moment obrotowy $M = Fl$. Dysze działają przez pewien czas, stąd moment obrotowy może być zapisany w postaci $M(t)$. Moment bezwładności wokół osi obrotu przechodzącej przez środek masy wynosi J .

Wyznaczamy transmitancję układu zakładając, że moment obrotowy $M(t)$ jest wejściem, a kątowe przemieszczenie satelity $\theta(t)$ jest wyjściem. Rozważamy ruch wyłącznie w płaszczyźnie kartki.



Rys. 2.8. Schemat sterowania położeniem satelity

W celu wyznaczenia transmitancji wykonuje się poniższe kroki:

1. Piszemy równanie różniczkowe dla układu.
2. Stosujemy transformację Laplace'a równania różniczkowego zakładając, że wszystkie warunki początkowe są zerowe.
3. Wyznaczamy stosunek transformacji sygnału wyjściowego $\theta(s)$ do transformacji sygnału wejściowego $M(s)$. Ten stosunek jest transmitancją układu.

Stosując do tego układu drugie prawo Newtona i zakładając, że w otoczeniu satelity nie ma tarcia, otrzymujemy

$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} = M \quad (2.22)$$

Biorąc transformację Laplace'a obu stron tego równania i zakładając, że wszystkie warunki początkowe są zerowe, otrzymujemy

$$Js^2\theta(s) = M(s) \quad (2.23)$$

gdzie:

$$\theta(s) = L[\theta(t)],$$

$$M(s) = L[M(t)].$$

Stąd transmitancja układu ma postać

$$G(s) = \frac{1}{Js^2} \quad (2.24)$$

Podobnie możemy wyznaczyć transmitancję układu z rysunku 2.4. Stosując przekształcenie Laplace'a równania (2.7), otrzymujemy

$$F(s) = ms^2Y(s) + csY(s) + kY(s) \quad (2.25)$$

Wyznaczymy stosunek transformaty sygnału wyjściowego do transformaty sygnału wejściowego, w tym celu przekształcamy (2.25) do postaci

$$(ms^2 + cs + k)Y(s) = F(s) \quad (2.26)$$

stąd ostatecznie transmitancja wyniesie

$$G(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms^2 + cs + k} \quad (2.27)$$

2.4. Modelowanie w przestrzeni stanów

W niniejszym podrozdziale przedstawimy materiał wprowadzający do analizy układów sterowania w przestrzeni stanów.

Nowy trend w układach inżynierskich zmierza do większej złożoności, co wynika głównie z wymagań dotyczących złożonych zadań i dobrej dokładności. Skomplikowane układy sterowania mogą mieć większą liczbę wejść i wyjść, a także mogą się zmieniać w czasie. Nowoczesna teoria sterowania, która stanowi nowe podejście do analizy i projektowania złożonych układów sterowania, rozwinęła się około 1960 roku, co spowodowane było koniecznością wyjścia naprzeciw rosnącym wymaganiom dotyczącym jakości układów sterowania, wzrostowi złożoności układów i dostępowi do komputerów dużej mocy obliczeniowej. To podejście opiera się na pojęciu stanu. Samo pojęcie stanu nie jest nowe, istniało ono znacznie wcześniej, m.in. w dziedzinie dynamiki klasycznej.

Nowoczesna teoria sterowania różni się od klasycznej tym, że pierwsza z nich nadaje się do stosowania dla układów o wielu wejściach i wielu wyjściach, które mogą być liniowe lub nieliniowe, niezmienne lub zmienne w czasie, podczas gdy druga – nadaje się do stosowania tylko dla układów liniowych, niezmiennych w czasie, z jednym wejściem i jednym wyjściem. Ponadto stanowi ona podejście poprzez dziedzinę czasową, a klasyczna teoria sterowania – poprzez złożoną dziedzinę częstotliwościową. Zanim przejdziemy dalej, musimy zdefiniować stan, zmienne stanu, wektor stanu i przestrzeń stanów.

Stan układu dynamicznego jest najmniejszym zbiorem zmiennych, nazywanych **zmiennymi stanu**, takich, że znajomość tych zmiennych w chwili $t = t_0$, wraz ze znajomością sygnału wejściowego dla $t \geq t_0$, w pełni określa zachowanie układu w każdej chwili $t \geq t_0$.

Należy zauważyć, że pojęcie stanu w żaden sposób nie jest ograniczone do układów fizycznych. Nadaje się ono do stosowania do układów biologicznych, ekonomicznych, społecznych i innych.

Zmiennymi stanu układu dynamicznego są zmienne tworzące najmniejszy zbiór zmiennych, które określają stan układu dynamicznego. Jeśli do kompletnego opisania zachowania układu dynamicznego potrzeba przynajmniej n zmiennych x_1, x_2, \dots, x_n , to n takich zmiennych tworzy zbiór zmiennych stanu. Kiedy dany jest sygnał wejściowy

dla $t \geq t_0$, a stan początkowy dla $t = t_0$ jest określony, to przyszły stan układu jest dokładnie wyznaczony.

Należy zauważyć, że zmienne stanu nie muszą być wielkościami fizycznie mierzalnymi lub obserwowlnymi. Zmienne, które nie reprezentują wielkości fizycznych i takie, które nie są ani mierzalne, ani obserwowlne, mogą być wybrane jako zmienne stanu. Taka swoboda wyboru zmiennych stanu jest zaletą metod przestrzeni stanów. W praktyce jednak wygodnie jest wybrać na zmienne stanu wielkości łatwo mierzalne, jeśli jest to w ogóle możliwe.

Jeśli do pełnego opisu zachowania się danego układu potrzeba n zmiennych stanu, to tych n zmiennych stanu może być rozważanych jako n składowych wektora \mathbf{x} . Taki wektor nazywamy **wektorem stanu**. Wektor stanu określa więc jednoznacznie stan $\mathbf{x}(t)$ układu w każdej chwili $t \geq t_0$, gdy tylko stan przy $t = t_0$ jest dany i określony jest sygnał wejściowy $\mathbf{u}(t)$ dla $t \geq t_0$.

Przestrzeń stanów nazywamy n -wymiarową przestrzeń, której układ współrzędnych składa się z osi x_1, x_2, \dots, x_n . Każdy stan może być przedstawiony przez punkt w przestrzeni stanów.

Równania w przestrzeni stanów. W analizie układów w przestrzeni stanów interesujemy się trzema typami zmiennych, które uwzględniamy w procesie modelowania układów dynamicznych: zmiennymi wejściowymi, zmiennymi wyjściowymi i zmiennymi stanu. Jak zobaczymy w niniejszym rozdziale, reprezentacja w przestrzeni stanów dla danego układu nie jest jednoznaczna, z wyjątkiem sytuacji, gdy liczba zmiennych stanu jest taka sama dla różnych reprezentacji tego samego układu w przestrzeni stanów.

W układzie dynamicznym muszą występować elementy, które zapamiętują wartości sygnałów wejściowych dla $t \geq t_0$. Są to elementy zdolne magazynować energię (potencjalną, kinetyczną) jak na przykład sprężyna czy kondensator. Zachowują się one jak elementy całkujące (integratory). Ponieważ integratory w ciągłym układzie sterowania służą jako urządzenia zapamiętujące, sygnały wyjściowe takich integratorów mogą być rozważane jako zmienne, które definiują wewnętrzny stan układu dynamicznego. Stąd sygnały wyjściowe z integratorów służą jako zmienne stanu. Liczba zmiennych stanu, które w pełni określają właściwości statyczne i dynamiczne układu, jest równa liczbie integratorów w układzie.

Założymy, że w skład układu o wielu wejściach i wielu wyjściach wchodzi n integratorów. Założymy także, że jest r sygnałów wejściowych $u_1(t), u_2(t), \dots, u_r(t)$ i m sygnałów wyjściowych $y_1(t), y_2(t), \dots, y_m(t)$. Zdefiniujmy – jako zmienne stanu: $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ – n sygnałów wyjściowych z integratorów. Wtedy układ może być opisany przez następujący układ równań różniczkowych:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ \dot{x}_2(t) &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n(t) &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t)\end{aligned}\tag{2.28}$$

Sygnały wyjściowe $y_1(t), y_2(t), \dots, y_m(t)$ układu mogą być dane przez związki:

$$\begin{aligned} y_1(t) &= g_1(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ y_2(t) &= g_2(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ &\vdots \\ y_m(t) &= g_m(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \end{aligned} \quad (2.29)$$

Jeśli zdefiniujemy:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, & \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) &= \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \end{bmatrix}, \\ \mathbf{y}(t) &= \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_m(t) \end{bmatrix}, & \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) &= \begin{bmatrix} g_1(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ g_2(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ \vdots \\ g_m(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_r(t) \end{bmatrix},$$

to równania (2.28) i (2.29) przybierają postać:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \quad (2.30)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \quad (2.31)$$

gdzie równanie (2.30) jest równaniem stanów, a równanie (2.31) jest równaniem wyjścia. Jeśli funkcje wektorowe \mathbf{f} i \mathbf{g} zależą jawnie od czasu t , to układ jest nazywany układem niestacjonarnym (zmiennym w czasie).

Jeśli równania (2.30) i (2.31) zlinearyzujemy wokół punktu pracy, to otrzymujemy następujące zlinearyzowane równanie stanów i równanie wyjścia:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \quad (2.32)$$

$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t) \quad (2.33)$$

gdzie:

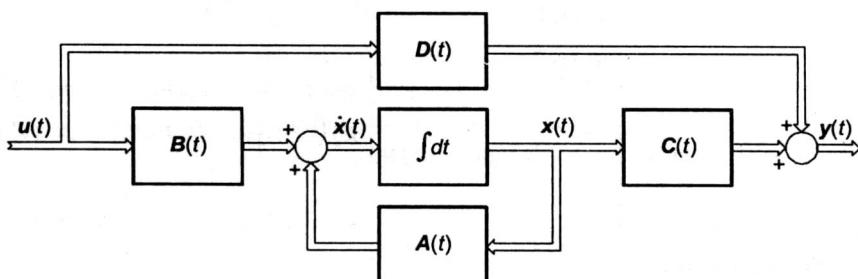
$A(t)$ – macierz stanu,

$B(t)$ – macierz wejścia (sterowania),

$C(t)$ – macierz wyjścia (odpowiedzi),

$D(t)$ – bezpośrednią macierz transmisji.

Zapis równań (2.32) i (2.33) w postaci schematu blokowego jest przedstawiony na rysunku 2.9.



Rys. 2.9. Schemat blokowy ciągłego liniowego układu sterowania w przestrzeni stanów

Jeśli funkcje wektorowe f i g nie wprowadzają jawnie czasu t , to układ jest nazywany układem stacjonarnym (niezmiennym w czasie). W takim przypadku równania (2.32) i (2.33) mogą zostać uproszczone do postaci:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (2.34)$$

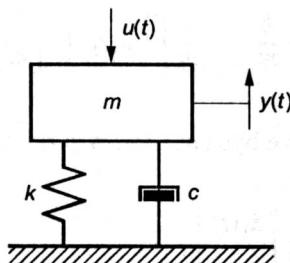
$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (2.35)$$

Równanie (2.34) jest równaniem stanów układu liniowego, niezmiennego w czasie. Równanie (2.35) jest równaniem wyjścia dla tego samego układu. W niniejszym podręczniku będziemy się interesować głównie układami opisanyimi równaniami (2.34) i (2.35).

W podanym przykładzie przedstawimy wyprowadzenie równania stanów i równania wyjścia.

Przykład 2.1. Wyprowadzenie równań stanów i wyjścia

Rozważmy układ mechaniczny pokazany na rysunku 2.10. Przedstawia on model fizyczny elastycznego mocowania silnika (układ wibroizolacji).



Rys. 2.10. Model układu mechanicznego

Zakładamy, że układ jest liniowy. Wejściem układu jest siła wewnętrzna $u(t)$, zaś wielkością wyjściową przemieszczenie masy $y(t)$. Przemieszczenie $y(t)$ jest mierzone od pozycji równowagi, przy braku sił zewnętrznych. Układ taki jest układem z jednym wejściem i jednym wyjściem i można go opisać za pomocą transmitancji. Tutaj zostanie pokazana możliwość równoważnego opisu układu w przestrzeni stanów. Ze schematu otrzymujemy równanie układu

$$m\ddot{y}(t) + cy(t) + ky(t) = u(t) \quad (2.36)$$

Jest to równanie różniczkowe drugiego rzędu, co oznacza, że w skład układu wchodzą dwa integratory. Zdefiniujemy zmienne stanu $x_1(t)$ i $x_2(t)$ jako:

$$x_1(t) = y(t),$$

$$x_2(t) = \dot{y}(t).$$

Podstawiając za $y(t)$ i $\dot{y}(t)$ zastępujemy równanie różniczkowe drugiego rzędu, układem dwóch równań rzędu pierwszego w postaci:

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) \quad (2.37)$$

$$\dot{x}_2(t) = -\frac{k}{m}x_1(t) - \frac{c}{m}x_2(t) + \frac{1}{m}u(t) \quad (2.38)$$

Równanie wyjścia ma postać

$$y(t) = x_1(t) \quad (2.39)$$

W postaci wektorowo-macierzowej równania (2.37) i (2.38) mogą być zapisane jako

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} \cdot u(t) \quad (2.40)$$

Równanie wyjścia (2.39) może być zapisane w postaci

$$y(t) = [1 \ 0] \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

Równanie (2.40) jest równaniem stanów, a równanie (2.41) – równaniem wyjścia dla układu. Równania (2.40) i (2.41) mają postać normalną:

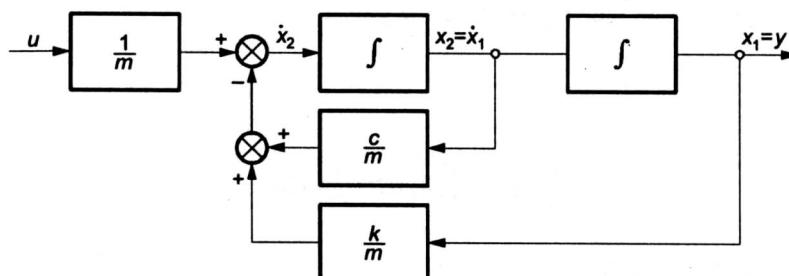
$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t),$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t),$$

gdzie:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix}, \quad C = [1 \ 0], \quad D = 0.$$

Rysunek 2.11 jest schematem blokowym układu. Należy zauważyć, że sygnały wyjściowe z integratorów są zmiennymi stanu.



Rys. 2.11. Schemat blokowy układu mechanicznego

Poniżej pokażemy, jak wyznaczać transmitancję układu z jednym wejściem i jednym wyjściem z równań stanu. Rozważmy układ, którego transmitancja dana jest przez

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} \quad (2.42)$$

Układ ten może być opisany w przestrzeni stanów przez następujące równania:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (2.43)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (2.44)$$

gdzie:

x – wektor stanu;

u – wejście;

y – wyjście.

Transformaty Laplace'a równań (2.43) i (2.44) są dane przez:

$$sX(s) - x(0) = AX(s) + BU(s) \quad (2.45)$$

$$Y(s) = CX(s) + DU(s) \quad (2.46)$$

Ponieważ transmitancja została wcześniej zdefiniowana jako stosunek transformaty Laplace'a sygnału wyjściowego do transformaty Laplace'a sygnału wejściowego, gdy warunki początkowe były zerowe, więc zakładamy, że $x(0)$ w równaniu (2.45) równa się zero. Wtedy otrzymujemy

$$sX(s) - AX(s) = BU(s) \quad (2.47)$$

lub

$$(sI - A)X(s) = BU(s) \quad (2.48)$$

gdzie I macierz jednostkowa, czyli mająca wszystkie elementy na głównej przekątnej równe jedności, a pozostałe – zerowe.

Mnożąc lewostronne obie strony ostatniego równania przez $(sI - A)^{-1}$ uzyskujemy

$$X(s) = (sI - A)^{-1}BU(s) \quad (2.49)$$

Wstawiając równanie (2.49) do równania (2.46) mamy

$$Y(s) = [C(sI - A)^{-1}B + D]U(s) \quad (2.50)$$

Porównując równanie (2.50) z równaniem (2.42) widzimy, że

$$G(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D} \quad (2.51)$$

Jest to transmitancja wyrażona za pomocą \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} i \mathbf{D} .

Zauważmy, że prawa strona równania (2.51) zawiera $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$. Stąd $G(s)$ może być zapisane jako

$$G(s) = \frac{Q(s)}{|s\mathbf{I} - \mathbf{A}|} \quad (2.52)$$

gdzie $Q(s)$ jest wielomianem zmiennej s . Stąd $|s\mathbf{I} - \mathbf{A}|$ jest równe wielomianowi charakterystycznemu $G(s)$. Innymi słowy, wartości własne macierzy \mathbf{A} są identyczne z biegunami $G(s)$.

Przykład 2.2. Obliczanie transmitancji układu

Rozważmy ponownie układ mechaniczny pokazany na rysunku 2.10. Równania stanu dla układu są dane równaniami (2.40) i (2.41). Chcemy otrzymać transmitancję układu z równań stanu.

Weźmy pod uwagę wzór (2.51).

$$G(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D} \quad (2.53)$$

Zastępując \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} i \mathbf{D} w równaniu (2.53) otrzymujemy:

$$G(s) = [1 \ 0] \cdot \left\{ \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} \end{bmatrix} \right\}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} + 0 \quad (2.54)$$

$$G(s) = [1 \ 0] \cdot \begin{bmatrix} s & -1 \\ \frac{k}{m} & s + \frac{c}{m} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix}$$

Ponieważ

$$\begin{bmatrix} s & -1 \\ \frac{k}{m} & s + \frac{c}{m} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{s^2 + \frac{c}{m}s + \frac{k}{m}} \cdot \begin{bmatrix} s + \frac{c}{m} & 1 \\ -\frac{k}{m} & s \end{bmatrix} \quad (2.55)$$

równanie (2.54) przekształcamy do postaci

$$G(s) = [1 \ 0] \cdot \frac{1}{s^2 + \frac{c}{m}s + \frac{k}{m}} \cdot \begin{bmatrix} s + \frac{c}{m}, & 1 \\ -\frac{k}{m}, & s \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} \quad (2.56)$$

czyli

$$G(s) = [1 \ 0] \frac{1}{s^2 + \frac{c}{m}s + \frac{k}{m}} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{m} \\ \frac{1}{m}s \end{bmatrix} = [1 \ 0] \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{ms^2 + cs + k} \\ \frac{s}{ms^2 + cs + k} \end{bmatrix}$$

zatem

$$G(s) = \frac{1}{ms^2 + cs + k} \quad (2.57)$$

Ta sama transmitancja może być otrzymana z równania (2.36).

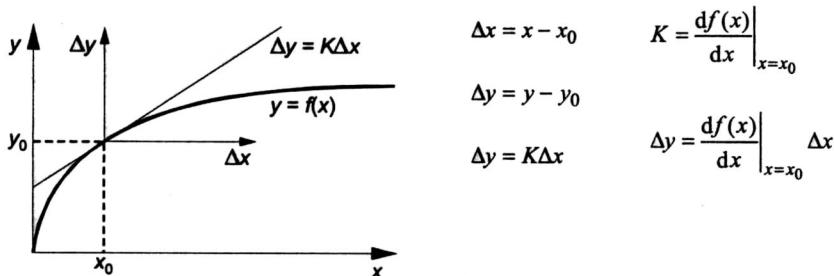
2.5. Linearyzacja

Matematyczny opis zjawisk fizycznych (model matematyczny) jest zawsze przybliżeniem ich rzeczywistego charakteru. W przypadku elementów i układów automatyki model ten tworzą równania wyrażające zależności pomiędzy wielkościami, które charakteryzują przebieg procesu, zachodzącego w rozpatrywanym elemencie lub układzie, np. zależność pomiędzy sygnałem wejściowym i wyjściowym. Równania otrzymane w wyniku analizy zjawisk zachodzących w danym elemencie mogą być równaniami liniowymi (algebraicznymi, różniczkowymi lub różnicowymi), bądź nieliniowymi. W pewnych przypadkach, gdy sygnały występujące w obiekcie są ciągłymi funkcjami czasu oraz zmiany sygnału są małe, wówczas równania te można zlinearyzować, tzn. zastąpić je przybliżonymi równaniami liniowymi, jeżeli przybliżenie takie dla celów praktycznych może okazać się wystarczająco dokładne. Wynika stąd problem linearyzacji równań nieliniowych. Linearyzacja jest procesem tworzenia modelu liniowego, który aproksymowałby model nieliniowy. Poniżej przedstawione zostaną dwa zagadnienia związane z linearyzacją:

- 1) linearyzacja równań algebraicznych (linearyzacja statyczna),
- 2) linearyzacja równań różniczkowych (linearyzacja dynamiczna).

2.5.1. Linearyzacja statyczna

Niech dana będzie zależność $y = f(x)$. Graficzny obraz tej zależności przedstawia rysunek 2.12.



Rys. 2.12. Linearyzacja statyczna funkcji

Proces linearyzacji polega na:

- przeniesieniu układu współrzędnych do punktu pracy,
- zastąpieniu sygnałów w opisie matematycznym odchyleniami tych wartości w punkcie pracy,
- zastąpieniu krzywej reprezentującej zależność y od x styczną do niej w punkcie pracy.

W przypadku kilku sygnałów wejściowych, na przykład gdy $y = f(x_1, x_2)$, wtedy

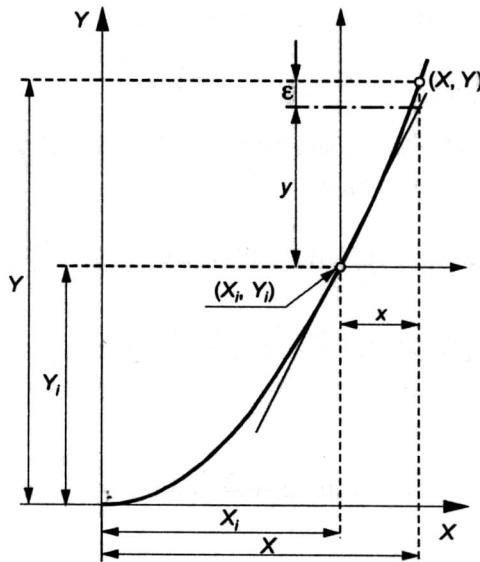
$$\Delta y = \left[\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} \right]_{x_{10}} \cdot \Delta x_1 + \left[\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} \right]_{x_{20}} \cdot \Delta x_2 \quad (2.58)$$

Analogicznie, gdy $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, wtedy

$$\Delta y = \left[\frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1} \right]_{x_{10}} \cdot \Delta x_1 + \dots + \left[\frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_n} \right]_{x_{n0}} \cdot \Delta x_n \quad (2.59)$$

Przykład 2.3. Linearyzacja funkcji jednej zmiennej

Charakterystykę elementu opisywanego funkcją $Y = X^2$ przedstawia rysunek 2.13. Zakładając, że zakres zmienności sygnałów wokół punktu pracy X_i , Y_i jest mały, równanie nieliniowe zastępuje się przybliżonym równaniem liniowym, uzyskując za cenę wprowadzenia przyblizonego opisu matematycznego możliwość zastosowania teorii układów liniowych.



Rys. 2.13. Linearyzacja funkcji $Y = X^2$

Jak pokazano na rysunku 2.13, wybieramy punkt pracy (X_i, Y_i) i rysujemy styczną do krzywej w tym punkcie. Rozpatrując ten punkt otrzymamy:

$$Y = Y_i + y + \varepsilon \approx Y_i + y \quad (2.60)$$

$$\frac{y}{x} = \left. \frac{dY}{dX} \right|_i - \text{nachylenie w punkcie } (X_i, Y_i), \quad (2.61)$$

stąd

$$y = \left. \frac{dY}{dX} \right|_i x = \left. \frac{d}{dX} (X^2) \right|_i x = 2X_i x \quad (2.62)$$

zatem

$$Y \approx Y_i + 2X_i x \quad (2.63)$$

Często przesuwamy początek układu współrzędnych do punktu pracy (położenia równowagi) określonego przez współrzędne (X_i, Y_i) .

2.5.2. Linearyzacja dynamiczna

Jedną ze znanych metod linearyzacji jest rozwinięcie nieliniowych funkcji f_1, \dots, f_n w szereg Taylora w otoczeniu punktu pracy. Punktem tym jest stan ustalony (równowagi).

Uogólniając procedurę linearyzacji, jeżeli funkcja

$$F(y, \dot{y}, \dots, y^{(n)}, u, \dot{u}, \dots, u^{(m)}) = 0 \quad (2.64)$$

jest ciągła i różniczkowalna względem wszystkich zmiennych i ich pochodnych w otoczeniu punktu pracy (równowagi), to:

$$\begin{aligned} y &= y_0 \quad (\dot{y})_0 = 0 \dots (y^{(n)})_0 = 0 \\ u &= u_0 \quad (\dot{u})_0 = 0 \dots (u^{(m)})_0 = 0 \end{aligned} \quad (2.65)$$

$$F(y_0, u_0) = 0 \quad (2.66)$$

Rozwijamy funkcję po lewej stronie równania (2.64) w szereg Taylora

$$\begin{aligned} F(y, \dots, y^{(n)}, u, \dots, u^{(m)}) &= \\ &= F(y_0, u_0) + \frac{\partial F}{\partial y} \Big|_0 \Delta y + \frac{\partial F}{\partial \dot{y}} \Big|_0 \Delta \dot{y} + \dots + \frac{\partial F}{\partial y^{(n)}} \Big|_0 \Delta y^{(n)} + \\ &+ \frac{\partial F}{\partial u} \Big|_0 \Delta u + \dots + \frac{\partial F}{\partial u^{(m)}} \Big|_0 \Delta u^{(m)} + R_n \end{aligned} \quad (2.67)$$

gdzie:

$\frac{\partial F}{\partial y} \Big|_0, \dots$, itd. – pochodne cząstkowe w punkcie równowagi;

$\Delta y, \Delta \dot{y}, \dots$, itd. – przyrosty sygnałów i ich pochodnych względem czasu, liczne w odniesieniu do punktu równowagi oznaczonego umownie przez 0:

$$\Delta y = y - y_0 \quad \Delta \dot{y} = \dot{y} - \dot{y}_0 \quad \dots$$

$$\Delta u = u - u_0 \quad \Delta \dot{u} = \dot{u} - \dot{u}_0 \quad \dots,$$

R_n – reszta nieliniowa równa sumie wyrazów szeregu Taylora zawierających pochodne cząstkowe rzędu drugiego i wyższe.

Gdy rozważamy zachowanie się elementu przy niewielkim odchyleniu od położenia równowagi, to przyrosty sygnałów i ich pochodnych są niewielkie, dlatego w przybliżeniu można pominąć wyrazy zawierające iloczyny przyrostów oraz te przyrosty

w potęgach drugiej i wyższej, a zatem można przyjąć, że $R_n = 0$. Wtedy po uwzględnieniu równań (2.64) i (2.66) otrzymamy z (2.67)

$$\begin{aligned} & \left. \frac{\partial F}{\partial y} \right|_0 \Delta y + \left. \frac{\partial F}{\partial \dot{y}} \right|_0 \Delta \dot{y} + \dots + \left. \frac{\partial F}{\partial y^{(n)}} \right|_0 \Delta y^{(n)} + \\ & + \left. \frac{\partial F}{\partial u} \right|_0 \Delta u + \left. \frac{\partial F}{\partial \dot{u}} \right|_0 \Delta \dot{u} + \dots + \left. \frac{\partial F}{\partial u^{(m)}} \right|_0 \Delta u^{(m)} = 0 \end{aligned} \quad (2.68)$$

Jeżeli układ jest stacjonarny, to w punkcie pracy odpowiadającym stanowi równowagi, pochodne cząstkowe występujące w równaniu (2.68) są stałe:

$$\begin{aligned} a_0 &= \left. \frac{\partial F}{\partial y} \right|_0, & a_1 &= \left. \frac{\partial F}{\partial \dot{y}} \right|_0, & \dots & a_n = \left. \frac{\partial F}{\partial y^{(n)}} \right|_0, \\ b_0 &= \left. \frac{\partial F}{\partial u} \right|_0, & b_1 &= \left. \frac{\partial F}{\partial \dot{u}} \right|_0, & \dots & b_m = \left. \frac{\partial F}{\partial u^{(m)}} \right|_0. \end{aligned}$$

Wówczas równanie (2.68) przyjmuje postać

Nie pamiętam →

$$\begin{aligned} a_n \Delta y^{(n)} + a_{n-1} \Delta y^{(n-1)} + \dots + a_1 \Delta \dot{y} + a_0 \Delta y &= \\ &= b_m \Delta u^{(m)} + b_{m-1} \Delta u^{(m-1)} + \dots + b_1 \Delta \dot{u} + b_0 \Delta u \end{aligned}$$

(2.69)

Poniżej przedstawimy przykłady linearyzacji równań różniczkowych.

Przykład 2.4. Zbiornik z wodą

Znaleźć nieliniowe równanie różniczkowe opisujące wysokość wody w zbiorniku (rys. 2.14) oraz nieliniowe równanie masowego natężenia wypływu wody ze zbiornika. Zlinearyzować otrzymane równania dla punktu pracy (p_0, h_0).

Stosujemy równanie, które mówi o masowym natężeniu wpływu jako funkcji wysokości wody w zbiorniku

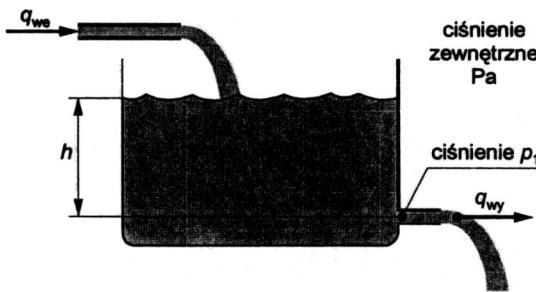
$$q_{wy} = \frac{1}{R} \sqrt{(p_1 - p_a)} \quad (2.70)$$

gdzie:

$p_1 = \rho gh$ – ciśnienie hydrostatyczne,

p_a – ciśnienie zewnętrzne, na przykład atmosferyczne,

R – stała zaworu.



Rys. 2.14. Zbiornik z wodą

Podstawiając wyrażenie (2.70) do wzoru

$$\dot{h} = \frac{1}{A\rho} (q_{we} - q_{wy}) \quad (2.71)$$

gdzie:

A – powierzchnia przekroju poprzecznego zbiornika,
 ρ – gęstość wody,

otrzymujemy nieliniowe równanie różniczkowe dla wysokości słupa wody

$$\dot{h} = \frac{1}{A\rho} \left(q_{we} - \frac{1}{R} \sqrt{\rho gh - p_a} \right) \quad (2.72)$$

Linearyzujemy, przyjmując jako punkt operacyjny $p_0 = pg h_0$ i zastępując $p_1 = p_0 + \Delta p$ w równaniu (2.70). Następnie rozszerzamy definicję nieliniowości według związku

$$(1 + \varepsilon)^\beta \equiv 1 + \beta\varepsilon \quad (2.73)$$

gdzie $\varepsilon \ll 1$. Równanie (2.70) możemy więc zapisać jako

$$q_{wy} = \frac{\sqrt{p_0 - p_a}}{R} \left(1 + \frac{\Delta p}{p_0 - p_a} \right)^{\frac{1}{2}} \cong \frac{\sqrt{p_0 - p_a}}{R} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\Delta p}{p_0 - p_a} \right) \quad (2.74)$$

Aproxymacja liniowa występująca w powyższym równaniu jest ważna pod warunkiem, że $\Delta p \ll p_0 - p_a$, to znaczy, że odchylenie ciśnienia systemu dla wybranego punktu operacyjnego będzie względnie małe. Zlinearyzowane równanie ruchu poziomu wody w zbiorniku ma postać

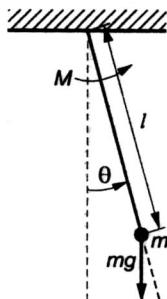
$$\Delta \dot{h} = \frac{1}{A\rho} \left[q_{we} - \frac{\sqrt{p_0 - p_a}}{R} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\Delta p}{p_0 - p_a} \right) \right] \quad (2.75)$$

Ponieważ $\Delta p = \rho g \Delta h$, równanie przekształcamy do liniowego równania różniczkowego dla Δh

$$\dot{\Delta h} = -\frac{g}{2AR \cdot \sqrt{p_0 - p_a}} \cdot \Delta h + \frac{q_{we}}{A\rho} - \frac{\sqrt{p_0 - p_a}}{\rho AR} \quad (2.76)$$

Przykład 2.5. Wahadło

Rozpatrzmy przykład wahadła pokazanego na rysunku 2.15.



Rys. 2.15. Model wahadła

Moment bezwładności względem osi obrotu wynosi $I = ml^2$, a przyłożony moment zewnętrzny wynosi M .

Równanie ruchu wahadła przyjmie postać

$$\ddot{\theta} + mg/l \sin \theta = M \quad | : l \quad (2.77)$$

Przekształcając powyższe rówanie, otrzymamy

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = \frac{M}{ml^2} \quad (2.78)$$

Jest to równanie nieliniowe ze względu na $\sin \theta$.

Zakładając niewielkie wychylenia wahadła, czyli niewielki kąt θ możemy przyjąć, że $\sin \theta \approx \theta$, wtedy

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \theta = \frac{M}{ml^2} \quad (2.79)$$

Uzyskaliśmy zlinearyzowaną postać równania ruchu. Równanie powyższe odpowiada równaniu oscylatora harmonicznego o częstotliwości drgań własnych

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad (2.80)$$

Alternatywnym podejściem do uzyskania modelu liniowego jest użycie części układu sterowania na zlikwidowanie składników nieliniowych oraz do zaprojektowania pozostały części układu sterowania w oparciu o teorię liniową. To podejście, **linearyzacja poprzez sprzężenie zwrotne**, jest popularne w robotyce, gdzie nazywane jest metodą wyliczanego momentu obrotowego. Zagadnienie to przewija się również przy projektowaniu sterowania samolotów.

Linearyzację przy zastosowaniu pętli sprzężenia zwrotnego uzyskuje się poprzez odjęcie składników nieliniowych równań ruchu obiektu i dodanie ich do sterowania. W wyniku tego otrzymuje się układ liniowy. Dla zilustrowania tej metody rozważmy rozpatrywane wcześniej równanie wahadła

$$ml^2\ddot{\theta} + mgl \sin \theta = M \quad (2.81)$$

Jeśli określmy wartość momentu obrotowego M jako

$$M = mgl \sin \theta + u \quad (2.82)$$

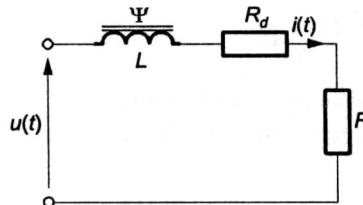
to równanie ruchu układu przyjmie postać

$$ml^2\ddot{\theta} = u \quad (2.83)$$

Powyższe równanie jest równaniem liniowym, bez względu na to, jak duży jest kąt θ . Równanie to znajduje zastosowanie do wyznaczania sterowania u i umożliwia nam skorzystanie z liniowych metod analizy. Uzyskane sterowanie zapewni odpowiednią wartość sygnału u w oparciu o pomierzone wartości kąta θ , jednakże wartość momentu obrotowego przesyłana w danej chwili do urządzeń, wynikać będzie z równania (2.82).

Przykład 2.6. Obwód LR

Dany jest obwód elektryczny (rezystor + cewka z rdzeniem) przedstawiony na rysunku 2.16.



Rys. 2.16. Schemat obwodu elektrycznego

Strumień magnetyczny dławika wynosi:

strumień jest proporcjonalny do prądu

$$\Psi(t) = k \cdot \sqrt{i(t)} \quad (2.84)$$

$$k = \text{const}$$

Równanie układu można zapisać

$$\text{Spodél} \quad \frac{d\Psi(t)}{dt} + (R_d + R)i(t) = u(t) \quad (2.85)$$

na pocięciu

Podstawiając za $\Psi(t)$, otrzymamy

$$\frac{k}{2\sqrt{i(t)}} \frac{di(t)}{dt} + (R_d + R)i(t) = u(t) \quad (2.86)$$

Równanie (2.86) zapiszemy w ogólnej postaci

$$F[i(t), \dot{i}(t), u(t)] = 0 \quad (2.87)$$

Przyjmujemy punkt ustalonej pracy przy napięciu u_0 i prądzie i_0 . Następnie znajdujemy pochodne cząstkowe względem czasu w punkcie pracy:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial i} \right)_0 = (R + R_d) - \frac{k(i)_0}{4\sqrt{i_0^3}} = R + R_d, \quad \text{bo } (i)_0 = 0,$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{i}} \right)_0 = \frac{k}{2\sqrt{i_0}} \quad \text{oraz} \quad \left(\frac{\partial F}{\partial u} \right)_0 = -1.$$

Rozwijając lewą stronę równania (2.87) w szereg Taylora w otoczeniu punktu pracy ustalonej $u = u_0$ i $i = i_0$, otrzymujemy po pominięciu reszty nieliniowej

$$\left(\frac{\partial F}{\partial i} \right)_0 \Delta i + \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{i}} \right)_0 \Delta \dot{i} + \left(\frac{\partial F}{\partial u} \right)_0 \Delta u = 0 \quad (2.88)$$

Po podstawieniu pochodnych cząstkowych w punkcie pracy otrzymamy

$$(R + R_d)\Delta i + \frac{k}{2\sqrt{i_0}} \Delta \dot{i} = \Delta u \quad (2.89)$$

Przyjmując $\Delta i = i$ oraz $\Delta u = u$ uzyskujemy

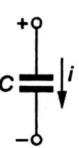
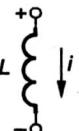
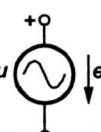
$$\underbrace{\frac{k}{2\sqrt{i_0}} \cdot i + (R + R_d)i}_\text{przybliżone wóznie} = u \quad (2.90)$$

2.6. Modelowanie układów elektrycznych

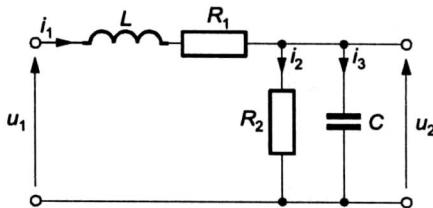
Obwody elektryczne składają się z połączeń pomiędzy źródłami napięcia elektrycznego i prądu oraz innymi elementami elektrycznymi, takimi jak: rezystory, kondensatory, tranzystory. Obwody elektryczne są częstymi składnikami układów ze sprzężeniem zwrotnym, ponieważ stwarzają projektantowi ogromną łatwość w modyfikacji i przetwarzaniu sygnałów. Przykładem samodzielnych układów ze sprzężeniem zwrotnym są wzmacniacze operacyjne. Elementy elektryczne i elektroniczne spełniają również główną rolę w urządzeniach elektromechanicznych, takich jak silniki elektryczne, generatory i czujniki elektryczne. W tym podręczniku zdefiniowano zmienne, opisano warunki narzucone na nie poprzez typowe elementy i obwody oraz opisano kilka najbardziej efektywnych metod prowadzących do uzyskania równań. Modele obwodów elektrycznych budujemy w oparciu o prawa Kirchhoffa.

Symboli liniowych elementów obwodu elektrycznego i występujące w nich zależności napięciowo-prądowe pokazano w tabeli 2.1.

Tabela 2.1
Elementy obwodu elektrycznego

| Lp. | Nazwa | Symbol | Równanie |
|-----|-----------------|---|--|
| 1 | Rezystor |  | $u = Ri$ |
| 2 | Kondensator |  | $i = C \frac{du}{dt}$ lub $u = \frac{1}{C} \int_0^t idt$ |
| 3 | Cewka |  | $u = L \frac{di}{dt}$ |
| 4 | Źródło napięcia |  | $u = e$ |

Dla przykładu rozpatrzmy czwórnik RLC , którego schemat przedstawiono na rysunku 2.17.



Rys. 2.17. Schemat czwórnika RLC

Korzystając z drugiego prawa Kirchhoffa możemy zapisać równanie

$$u_1(t) = L \frac{di_1(t)}{dt} + R_1 i_1(t) + u_2(t) \quad (2.91)$$

Przy czym:

$$u_2(t) = R_2 i_2(t); \quad i_3(t) = C \frac{du_2(t)}{dt} \quad (2.92)$$

Z pierwszego prawa Kirchhoffa mamy

$$i_1(t) = i_2(t) + i_3(t) \quad (2.93)$$

Podstawiając (2.92) do (2.93) otrzymamy

$$i_1(t) = \frac{1}{R_2} u_2(t) + C \frac{du_2(t)}{dt} \quad (2.94)$$

Po wyznaczeniu pochodnej z równania (2.94) i przekształceniu równania (2.91) otrzymamy równanie różniczkowe drugiego rzędu, określające relacje pomiędzy sygnałem wejściowym i wyjściowym. Równanie to przedstawia model matematyczny obwodu elektrycznego pokazanego na rysunku 2.17

$$\frac{d^2 u_2(t)}{dt^2} + \left(\frac{L + R_1 R_2 C}{R_2 L C} \right) \frac{du_2(t)}{dt} + \frac{R_1 + R_2}{R_2 L C} u_2(t) = \frac{1}{LC} u_1(t) \quad (2.95)$$

Model ten przedstawia zależność pomiędzy sygnałem wejściowym $u_1(t)$ a sygnałem wyjściowym $u_2(t)$. Sygnałami tymi mogą być również inne prądy lub napięcia. Definiując nowe zmienne:

$$x_1(t) = u_2(t) \quad (2.96)$$

$$x_2(t) = \frac{du_2(t)}{dt} = \frac{dx_1(t)}{dt} \quad (2.97)$$

$$u(t) = u_1(t)$$

$$y(t) = u_2(t), \text{ czyli } y(t) = x_1(t)$$

i podstawiając do (2.95), otrzymamy

$$\frac{dx_2(t)}{dt} + \left(\frac{L + R_1 R_2 C}{R_2 L C} \right) x_2(t) + \left(\frac{R_1 + R_2}{R_2 L C} \right) x_1(t) = \frac{1}{LC} u(t) \quad (2.98)$$

Równanie (2.97) i równanie (2.98) zapiszemy w formie macierzowej jako

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{R_1 + R_2}{R_2 L C} & -\frac{L + R_1 R_2 C}{R_2 L C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{LC} \end{bmatrix} u \quad (2.99)$$

Równanie wyjścia w formie macierzowej ma postać

$$y(t) = [1 \ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (2.100)$$

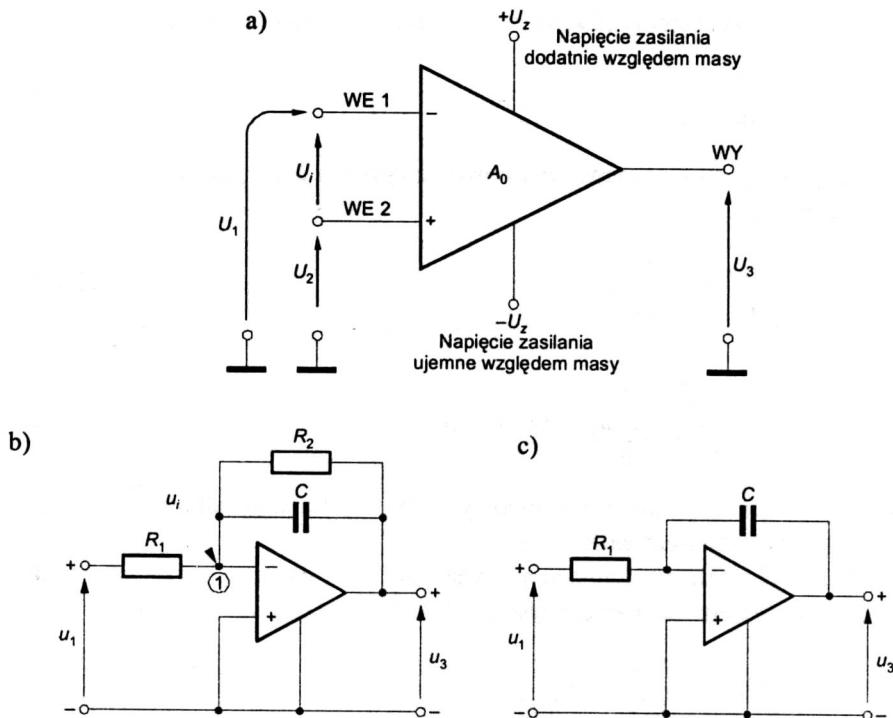
Równania (2.99) i (2.100) są równaniami stanu obwodu, którego model matematyczny przedstawia (2.98). Korzystając z równania (2.95) możemy wyznaczyć transmitancję obwodu elektrycznego, którego schemat przedstawia rysunek 2.17. Dokonując transformacji Laplace'a równania (2.95) otrzymamy

$$s^2 U_2(s) + \left(\frac{L + R_1 R_2 C}{R_2 L C} \right) s U_2(s) + \left(\frac{R_1 + R_2}{R_2 L C} \right) U_2(s) = \frac{1}{LC} U_1(s) \quad (2.101)$$

Z definicji transmitancji otrzymamy

$$G(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{\frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{L + R_1 R_2 C}{R_2 L C} s + \frac{R_1 + R_2}{R_2 L C}} \quad (2.102)$$

Bierne obwody elektryczne składają się z połączeń rezystorów, kondensatorów i cewek. Wraz z rozwojem elektroniki zestaw elementów elektrycznych powiększył się o urządzenia aktywne, włącznie z tranzystorami i wzmacniaczami. W przetwarzaniu sygnałów i sterowaniu najbardziej powszechnym rozwiązaniem jest zastosowanie wzmacniacza lub wzmacniacza operacyjnego. Schemat wzmacniacza operacyjnego przedstawiono na rysunku 2.18a. W typowych wzmacniaczach, przy zerowej częstotliwości i/lub prądzie stałym, wzmacnienie A_0 zmienia się w przedziale od 10^5 do 10^7 .



Rys. 2.18. Wzmacniacz operacyjny: a) symbol ogólny; b) schemat podstawowy układu całkującego; c) schemat uproszczony układu całkującego (przy $R_2 \rightarrow \infty$)

Dla większości zastosowań można, z wystarczającą dokładnością, przyjąć bardzo duże (nieskończone) wzmacnienie A_0 .

Przykład zastosowania wzmacniacza operacyjnego pokazano na rysunku 2.18b. Korzystając z prawa Kirchhoffa można zapisać równanie dla 1 węzła

$$\frac{u_i - u_1}{R_1} + \frac{u_i - u_3}{R_2} + C \frac{d}{dt} (u_i - u_3) = 0 \quad (2.103)$$

Równanie wzmacniacza pokazanego na rysunku 2.18b jest w tym przypadku następujące

$$u_3 = -A_0 u_i \quad (2.104)$$

Jeżeli $A_0 \rightarrow \infty$, to $u_i \rightarrow 0$ dla ustalonej wartości u_3 . Równanie (2.103) redukuje się wówczas do postaci

$$-\frac{u_1}{R_1} - \frac{u_3}{R_2} - C \frac{du_3}{dt} = 0 \quad (2.105)$$

a po przekształceniu uzyskujemy równanie różniczkowe pierwszego rzędu

$$\frac{du_3}{dt} + \frac{1}{CR_2} u_3 = -\frac{1}{CR_1} u_1 \quad (2.106)$$

Zakładając, że $R_2 \rightarrow \infty$, otrzymujemy obwód z rysunku 2.18c, którego model matematyczny ma postać

$$\frac{du_3}{dt} = -\frac{1}{R_1 C} u_1 \quad (2.107)$$

lub

$$u_3 = -\frac{1}{R_1 C} \int_0^t u_1(\tau) d\tau + u_3(0) \quad (2.108)$$

W ten sposób idealny wzmacniacz operacyjny spełnia funkcję całkującą. Urządzenie to jest nazwane **elementem całkującym**.

Dokonując przekształcenia Laplace'a równania (2.107) możemy wyznaczyć transmitancję wzmacniacza operacyjnego z rysunku 2.18c

$$G(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = -\frac{1}{R_1 C s} \quad (2.109)$$

2.7. Modele układów elektromechanicznych

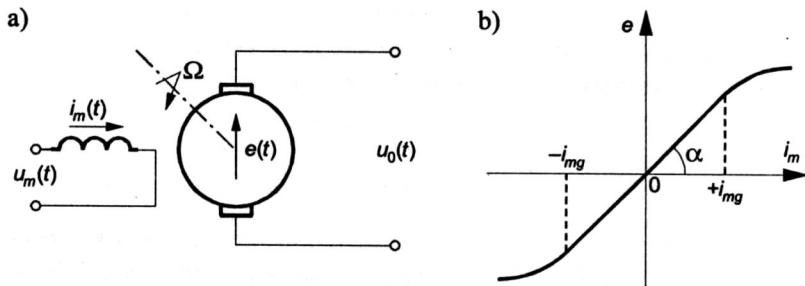
Prąd elektryczny i pole magnetyczne oddziałują na siebie w różny sposób. Trzy spośród tych sposobów są ważne do zrozumienia działania większości przetworników energii elektromechanicznej, takich jak silnik liniowy lub obrotowy oraz elektroniczny przetwornik pomiarowy.

W tym podrozdziale przedstawimy zmienne występujące w takich układach i zależności pomiędzy nimi oraz naszkicujemy kilka typowych układów używanych w urządzeniach sterujących.

Poniżej wyznaczamy model matematyczny prądnicy obcowzbudnej, której schemat przedstawiono na rysunku 2.19a.

Prądnica napędzana z prędkością kątową Ω (rys. 2.19a), pracuje na idealnym biegu jałowym. Zakres zmian prądu wzbudzenia jest taki, że punkt pracy znajduje się między $-i_{mg}$ i $+i_{mg}$. Odpowiada to pracy na prostoliniowej części charakterystyki $e = f(i_m)$, przechodzącej przez środek układu współrzędnych (rys. 2.19b). Wówczas siła elektromotoryczna prądnicy $e(t)$ jest proporcjonalna do prądu wzbudzenia $i_m(t)$

$$e(t) = k_m i_m(t) \text{ dla } -i_{mg} < i_m(t) < +i_{mg} \quad (2.110)$$



Rys. 2.19. Prądnica obcowzbudna prądu stałego: a) schemat; b) charakterystyka

Przy tych założeniach indukcyjność obwodu wzbudzenia jest stała ($L_m = \text{const}$) i przy zasilaniu tego obwodu napięciem $u_m(t)$ obowiązuje równanie

$$u_m(t) = R_m i_m(t) + L_m \frac{di_m(t)}{dt} \quad (2.111)$$

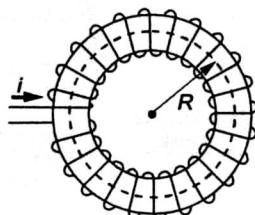
Podstawiając za $i_m(t) = \frac{e(t)}{k_m}$, otrzymamy model matematyczny w postaci równania różniczkowego pierwszego rzędu

$$\frac{L_m}{k_m} \frac{de(t)}{dt} + \frac{R_m}{k_m} e(t) = u_m(t) \quad (2.112)$$

Transmitancję prądnicy wyznaczamy dokonując transformacji Laplace'a równania (2.112)

$$G(s) = \frac{\mathcal{L}[e(t)]}{\mathcal{L}[u_m(t)]} = \frac{E(s)}{U_m(s)} = \frac{k_m}{L_m s + R_m} \quad (2.113)$$

Pierwszą ważną zasadą wzajemnego oddziaływania między prądem elektrycznym a polem magnetycznym jest fakt, że przepływający prąd elektryczny wytwarza pole magnetyczne. Natężenie tego pola zależy od natężenia prądu, rodzaju materiału i kształtu cewki. Idealny przypadek pokazany jest na rysunku 2.20.



Rys. 2.20. Cewka pierścieniowa o promieniu R

Mamy tu pierścień o średnim promieniu R , wykonany z materiału o przenikalności μ składający się z N zwojów przewodów przewodzących prąd o natężeniu i . Indukcję magnetyczną we wnętrzu pierścienia opisuje równanie

$$B = \frac{\mu}{2\pi R} Ni \quad (2.114)$$

Pole siłowe jest proporcjonalne do natężenia prądu i liczby zwojów przewodu wokół pierścienia. Przenikalność μ charakteryzuje właściwości materiału. Dla powietrza $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ Wb/(A·m). W przypadku materiałów ferromagnetycznych przenikalność może być kilka tysięcy razy większa od przenikalności powietrza.

Urządzenie, w którym pole magnetyczne jest wytwarzane i kontrolowane przez prąd elektryczny w przewodzie, nazywamy elektromagnesem.

Drugim interesującym nas efektem elektromagnetycznym jest fakt, że na ładunek q poruszający się z prędkością v w polu magnetycznym o indukcji B działa siła F , będąca iloczynem wektorowym

$$F = qv \times B \quad (2.115)$$

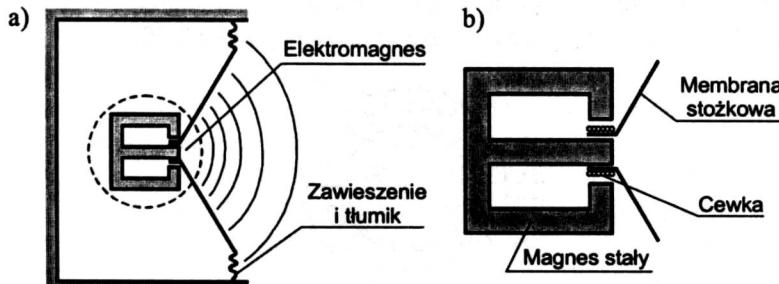
Jeżeli poruszający się ładunek zastąpimy prądem o natężeniu i płynącym w przewodzie o długości l o kierunku zgodnym z kierunkiem linii indukcji magnetycznej, siła F wyrażona jest wtedy wzorem

$$F = Bli \quad (2.116)$$

Równanie to jest podstawowym opisem zjawisk elektrycznych i mechanicznych, zachodzących w takich urządzeniach jak silniki elektryczne. Z tego względu nazywane jest prawem silników.

Przykład 2.7. Głośnik (1)

Głośnik służący do odtwarzania dźwięku z sygnału elektrycznego pokazano schematycznie na rysunku 2.21.



Rys. 2.21. Głośnik: a) schemat konstrukcyjny; b) elektromagnes

Magnes stały wytwarza pole radialne w cylindrycznej szczelinie pomiędzy biegunami. Siła wywołana przepływem prądu wewnątrz uzwojenia cewki powoduje jej ruch w lewo lub prawo, co skutkuje przemieszczeniem membrany w powietrzu. Wywołane tym przemieszczeniem zmiany ciśnienia powietrza rozprzestrzeniają się i są słyszalne w postaci dźwięku.

Przyjmijmy, że membrana posiada masę m , a współczynnik tłumienia wiskotycznego oznaczmy C . Zakładając, że magnes wytwarza pole o indukcji $B = 0,5 \text{ T}$, cewka ma 20 zwojów o średnicy 2 cm, korzystając z równania (2.116) otrzymamy:

$$l = 20 \frac{2\pi}{100}, \text{ m} = 1,26 \text{ m},$$

$$F = 0,5 \cdot 1,26 \cdot i = 0,63i, \text{ N.}$$

Dla masy m i współczynnika tarcia C możemy napisać równanie

$$m \ddot{x} + C \dot{x} = 0,63i \quad (2.117)$$

Równanie (2.116) może być również użyte w wielu innych zastosowaniach.

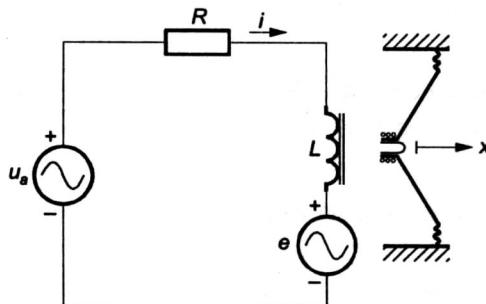
Trzecim ważnym zjawiskiem elektromechanicznym jest samoindukcja. Jeżeli przewód p o długości l przesuwa się z prędkością v w jednorodnym polu magnetycznym prostopadle do linii sił pola o indukcji B , to w przewodzie tym powstaje napięcie

$$e(t) = Blv \quad (2.118)$$

Równanie to nazwane jest prawem generatora.

Przykład 2.8. Głośnik (2)

Dla głośnika z rysunku 2.21 i obwodu pokazanego na rysunku 2.22 znaleźć równanie różniczkowe opisujące relację między wartością wejściową u_a i wartością wyjściową x (przemieszczenie membrany). Przyjmujemy rezystancję głośnika jako R , a jego indukcję jako L .



Rys. 2.22. Obwód elektryczny głośnika

Ruch membrany głośnika opisuje równanie (2.117). Wynikiem tego ruchu jest powstanie w cewce napięcia $e(t)$ określonego zależnością (2.118), gdzie \dot{x} oznacza prędkość. W rezultacie otrzymujemy

$$e(t) = Bl\dot{x} \quad (2.119)$$

To indukowane napięcie jest potrzebne do analizy obwodu z rysunku 2.22. Dla części mechanicznej równanie ruchu jest opisane przez równanie (2.117). Dla części elektrycznej równanie ruchu przyjmuje postać

$$L \frac{di}{dt} + Ri = u_a - 0,63\dot{x} \quad (2.120)$$

Tak więc równania (2.117) i (2.120) tworzą model dynamiczny głośnika.

2.8. Modelowanie układów cieplnych i przepływowych

Zagadnienia termodynamiki, przepływu ciepła i dynamiki tego przepływu są przedmiotem oddzielnych pozycji książkowych. Aby tworzyć modele dynamiczne, stosowane w układach sterowania, najistotniejszym aspektem fizycznym jest pokazanie dynamicznej interakcji między zmiennymi modelu. Do określenia bieżących zmian parametrów w celu stworzenia całościowego modelu dynamicznego, służącego do projektowania układów sterowania, zwykle wymagane jest przeprowadzenie doświadczeń.

2.8.1. Przepływ ciepła

Niektóre układy sterowania wymagają regulacji temperatury dla części układu. W modelach dynamicznych, stosowanych w układach sterowania temperaturą, bierze się pod uwagę przepływ oraz zachowanie energii cieplnej. Energia cieplna przepływająca przez ciało jest wprost proporcjonalna do różnicy temperatur ciała i otoczenia, zgodnie ze wzorem

$$q = \frac{1}{R} (T_1 - T_2) \quad (2.121)$$

gdzie:

q – przepływ energii cieplnej, J/s,

R – opór cieplny, $^{\circ}\text{C}/(\text{J}\cdot\text{s})$,

T – temperatura, $^{\circ}\text{C}$.

Dopływ energii cieplnej do ciała wpływa na jego temperaturę, zgodnie z relacją

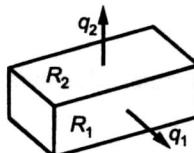
$$\dot{T} = \frac{1}{C} q \quad (2.122)$$

gdzie C – pojemność cieplna $\text{J}/^{\circ}\text{C}$.

Zwykle istnieje kilka dróg przepływu ciepła zarówno do ciała, jak i z ciała. W równaniu (2.122) parametr q stanowi sumę przepływu ciepła równą wartości q z równania (2.121).

Przykład 2.9. Pomieszczenie

Pokazany na rysunku 2.23 pokój ma izolowane trzy ściany i podłogę, co oznacza, że ich $R = \infty$. Znaleźć równanie różniczkowe opisujące temperaturę pokoju, wynikające z przepływu ciepła przez jedną ścianę i sufit.



Rys. 2.23. Dynamiczny model zjawisk cieplnych w pokoju
(objaśnienia w tekście)

Na podstawie równań (2.121) i (2.122) otrzymujemy

$$\dot{T}_i = \frac{1}{C_i} \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \cdot (T_0 - T_i) \quad (2.123)$$

gdzie:

C_i – pojemność cieplna powietrza wewnątrz pokoju,

T_0 – temperatura otoczenia,

T_i – temperatura w pokoju,

R_1 – opór cieplny ściany pokoju,

R_2 – opór cieplny sufitu pokoju.

Właściwości materiałów opisane są następującymi wzorami:

- pojemność cieplną można wyznaczyć na podstawie masy substancji i ciepła właściwego przy stałej objętości

$$C = mc_v \quad (2.124)$$

gdzie:

m – masa substancji;

c_v – ciepło właściwe przy stałej objętości;

- przewodność cieplna jest związana z rezystancją R zależnością

$$\frac{1}{R} = \frac{kA}{l} \quad (2.125)$$

gdzie:

k – przewodność cieplna;

A – pole przekroju poprzecznego;

l – długość drogi przepływu ciepła.

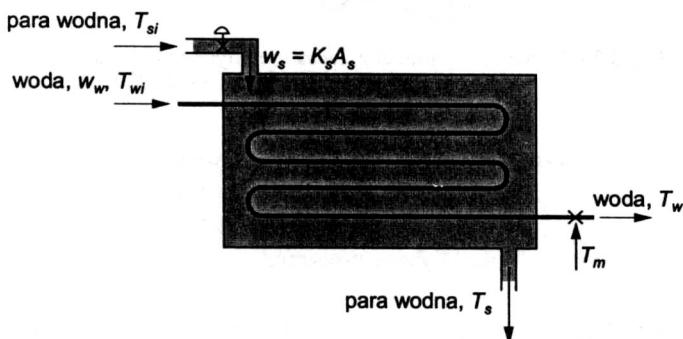
Wzór (2.121) można zapisać również w innej postaci, mianowicie

$$q = \dot{m}c_v(T_i - T_0) \quad (2.126)$$

gdzie \dot{m} – szybkość masy powietrza o temperaturze T_i wypływającego do otoczenia o temperaturze T_0 .

Przykład 2.10. Wymiennik ciepła

Na rysunku 2.24 pokazany jest wymiennik ciepła.



Rys. 2.24. Wymiennik ciepła
(objaśnienia w tekście)

Para wodna wpływa do komory od góry przez regulowany zawór i schłodzona wypływa na dole. Przez rurę zwiniętą wewnątrz komory przepływa woda absorbiująca ciepło od pary wodnej. Znaleźć równanie różniczkowe opisujące temperaturę wypływającą na zewnątrz wody jako funkcję kontrolowanej wartości otworu wlotowego pary wodnej w stanie otwartym. Temperaturę wypływającą wody mierzy czujnik pomiarowy. Istotne jest, że wyjściowa temperatura pary wodnej jest opóźniona o t_d sekund.

Temperatura wody w rurze jest zmienna ze względu na przepływające ciepło z pary wodnej (temperatura pary wodnej na wypływie z komory jest mniejsza). Dokładny model cieplny tego procesu jest zawiły, ponieważ bieżące ciepło przekazywane z pary wodnej do wody jest proporcjonalne do lokalnej temperatury płynu. Dla wielu zastosowań dokładne obliczenia są niepotrzebne, ponieważ sprzężenie koryguje znaczną ilość błędów tego modelu. Dlatego ma sens łączenie przestrzennych zmian temperatury T_s i T_w (T_s – temperatura wypływającej pary wodnej, T_w – temperatura wody). Założamy, że przekazywanie ciepła pary wodnej do wody jest proporcjonalne do różnicy

temperatur, jak we wzorze (2.121). Przepływ ciepła wewnątrz komory zależy więc od szybkości przepływu na wlocie i temperatury zgodnie z równaniem (2.126)

$$q = w_s c_{vs} (T_{si} - T_s),$$

gdzie:

- $w_s = K_s A_s$ – szybkość przepływającej masy pary wodnej,
- A_s – pole powierzchni zaworu wlotowego pary wodnej,
- K_s – współczynnik przepływu dla zaworu wlotowego,
- c_{vs} – ciepło właściwe pary wodnej,
- T_{si} – temperatura wejściowa pary wodnej,
- T_s – temperatura wyjściowa pary wodnej.

Przepływ ciepła wewnątrz komory jest różnicą pomiędzy ciepłem gorącej pary wlotowej a ciepłem wypływającej na zewnątrz wody. Przepływ ciepła determinuje szybkość zmian temperatury pary wodnej według zależności (2.122)

$$C_s \dot{T}_s = A_s K_s c_{vs} (T_{si} - T_s) - \frac{1}{R} (T_s - T_w) \quad (2.127)$$

gdzie:

- $C_s = m_s c_{vs}$ – pojemność cieplna masy m_s pary wodnej w komorze,
- R – średnia oporność cieplna.

Podobnie tworzymy równanie różniczkowe opisujące temperaturę wody

$$C_w \dot{T}_w = w_w c_{vw} (T_{wi} - T_w) - \frac{1}{R} (T_s - T_w) \quad (2.128)$$

gdzie:

- w_w – szybkość przepływającej masy wody
- c_{vw} – ciepło właściwe wody,
- T_{wi} – temperatura wejściowa wody,
- T_w – temperatura wyjściowa wody,
- T_m – temperatura wody przy pomiarze pary wylotowej,
- t_d – czas opóźnienia.

Czas opóźnienia pomiędzy pomiarami na wyjściu jest opisany relacją: $T_m = T_w(t - t_d)$.

2.8.2. Przepływ cieczy nieściśliwych

Przepływy płynów są charakterystyczne dla wielu układów sterowania – jako jeden z najbardziej charakterystycznych przykładów można podać sterowanie lotkami samolotu za pomocą siłownika hydraulicznego.

Fizyczne zależności regulacji przepływem cieczy to ciągłość, równowaga sił i opory hydrauliczne. Równanie ciągłości wynika z zasady zachowania masy

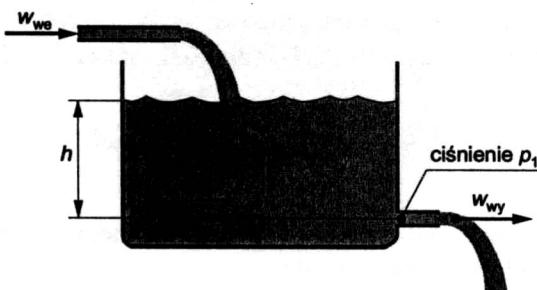
$$\dot{m} = w_{we} - w_{wy} \quad (2.129)$$

gdzie:

- \dot{m} – zmiana masy cieczy wewnętrz opisywanego układu,
- w_{we} – masowe natężenie przepływu na wejściu układu,
- w_{wy} – masowe natężenie przepływu na wyjściu układu.

Przykład 2.11. Zbiornik wody

Napisać równanie różniczkowe wysokości wody w zbiorniku (rys. 2.25).



Rys. 2.25. Zbiornik wodny
(objaśnienia w tekście)

Stosując wzór (2.129) otrzymujemy

$$\dot{h} = \frac{1}{A\rho} (w_{we} - w_{wy}) \quad (2.130)$$

gdzie:

- A – powierzchnia przekroju poprzecznego zbiornika,
- ρ – gęstość wody,
- $h = m/A\rho$ – wysokość słupa wody,
- m – masa wody w zbiorniku.

Przykład 2.12. Siłownik hydrauliczny i inne elementy płynowe

Napisać równanie różniczkowe opisujące ruch tłoka siłownika pokazanego na rysunku 2.26, na który działa siła F_D , a ciśnienie w komorze wynosi p .

Uwzględniając siłę pochodząą od ciśnienia cieczy, przyłożoną siłę F_D oraz siłę bezwładności tłoka otrzymujemy równanie

$$m\ddot{x} = Ap - F_D \quad (2.131)$$

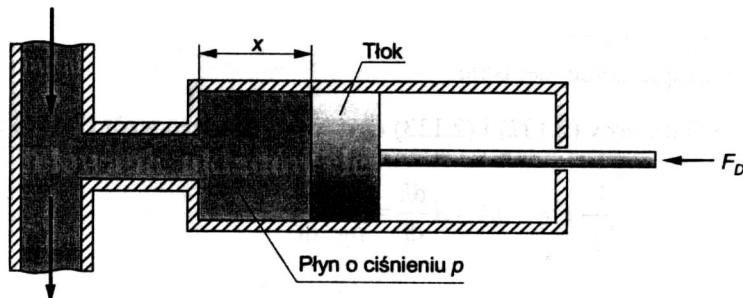
gdzie:

A – pole powierzchni tłoka,

p – ciśnienie w komorze,

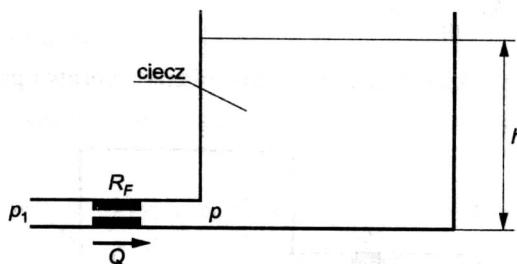
m – masa tłoka,

x – położenie tłoka.



Rys. 2.26. Tłok silownika hydraulicznego

Rozpatrzmy teraz proces napełniania zbiornika (rys. 2.27).



Rys. 2.27. Zbiornik z cieczą

Objętościowe natężenie przepływu Q przez opór hydrauliczny R_F wynosi

$$Q = \frac{1}{R_F} (p_1 - p) \quad (2.132)$$

gdzie:

p_1 – ciśnienie zasilania,

p – ciśnienie w zbiorniku,

R_F – opór hydrauliczny.

Jest ono równe zmianie objętości cieczy w zbiorniku

$$Q = A \frac{dh}{dt} \quad (2.133)$$

gdzie A – powierzchnia przekroju poprzecznego zbiornika.

Ciśnienie hydrostatyczne cieczy ma postać

$$p = \rho gh \quad (2.134)$$

gdzie:

ρ – gęstość cieczy

g – przyspieszenie ziemskie.

Porównując wzory (2.132) i (2.133) oraz uwzględniając wzór (2.134) otrzymamy

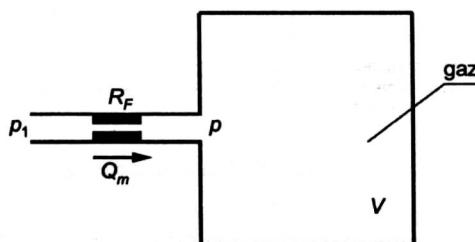
$$\frac{1}{R_F} (p_1 - p) = A \frac{dh}{dt} = \frac{A}{\rho g} \frac{dp}{dt} \quad (2.135)$$

gdzie $\frac{A}{\rho g} = C_F$ – pojemność hydrauliczna.

Stąd

$$C_F R_F \frac{dp}{dt} + p = p_1 \quad (2.136)$$

W podobny sposób rozpatrzmy proces napełniania zbiornika gazem (rys. 2.28).



Rys. 2.28. Zbiornik z gazem

Masowe natężenie przepływu gazu wyraża się zależnością

$$Q_m = \frac{1}{R_F} (p_1 - p) \quad (2.137)$$

Równanie stanu gazu ma postać

$$pV = GRT \quad (2.138)$$

gdzie:

- G – masa gazu,
- T – temperatura gazu,
- V – objętość gazu,
- R – stała gazowa.

Natomiast

$$Q_m = \frac{dG}{dt} = \frac{V}{RT} \frac{dp}{dt} \quad (2.139)$$

Oznaczając

$$C_F = \frac{V}{RT}$$

i porównując wzory (2.137) i (2.139) otrzymamy

$$C_F R_F \frac{dp}{dt} + p = p_1 \quad (2.140)$$

2.9. Zapis transmitancji operatorowej

Weźmy pod uwagę transmitancję operatorową zisaną ogólnym wzorem (2.19)

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \quad (2.141)$$

W praktyce stosuje się przekształcenie wzoru (2.141) do postaci zawierającej następujące parametry:

- współczynnik wzmacnienia,
- stałe czasowe,
- liczby tłumienia.

Zapis ten umożliwia łatwe i szybkie porównanie własności elementów, obiektów i układów o różnym charakterze fizycznym, np. elektrycznych, mechanicznych, hydraulycznych itd. Tworzenie tego zapisu przedstawimy na kilku przykładach.

Przykład 2.13. Zapis transmitancji elementu inercyjnego pierwszego rzędu

Niech transmitancja elementu ma postać wynikającą z uproszczenia wzoru (2.141)

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_0}{a_1 s + a_0} \quad (2.142)$$

gdzie a_1, a_0, b_0 – współczynniki zawierające parametry konstrukcyjno-ruchowe elementu, np. rezystancje i pojemności w przypadku elementu elektrycznego, masy i sprężystości w przypadku elementu mechanicznego.

W pierwszej kolejności transmitancję (2.142) przekształcamy w ten sposób, aby wyrazy wolne we wszystkich wielomianach zmiennej s były równe jedności

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\frac{b_0}{a_0}}{\frac{a_1}{a_0} s + 1} \quad (2.143)$$

Następnie przyjmujemy poniższe określenia.

Współczynnik wzmacnienia. Jest to najczęściej współczynnik występujący poza wielomianami zmiennej s . Zwykle oznacza się go przez K , a zatem

$$K = \frac{b_0}{a_0} \quad (2.144)$$

Współczynnik wzmacnienia ma jednostkę miary wynikającą z jednostek miar tworzących go parametrów konstrukcyjno-ruchowych lub z jednostek miar sygnału wejściowego i wyjściowego. Dla elementów nie wykazujących działania całkującego lub różniczkującego można posłużyć się wzorem

$$[K] = \left[\frac{b_0}{a_0} \right] = \left[\frac{y(t)}{x(t)} \right] \quad (2.145)$$

Stała czasowa. Jest to współczynnik znajdujący się przy zmiennej zespolonej s w pierwszej potędze, co dotyczy tylko dwumianów rzeczywistych pierwszego stopnia. Stałą czasową zwykle oznaczamy przez T , zatem

$$T = \frac{a_1}{a_0} \quad (2.146)$$

Stała czasowa ma jednostkę miary wynikającą z jednostek miar tworzących ją parametrów konstrukcyjno-ruchowych i zawsze jest nią jednostka miary czasu, mianowicie

$$[T] = \left[\frac{a_1}{a_0} \right] = [s] \quad (2.147)$$

Tak więc transmitancję (2.143) zapiszemy następująco

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K}{Ts + 1} \quad (2.148)$$

Weźmy teraz dla przykładu transmitancję prądnicy daną wzorem (2.113)

$$G(s) = \frac{E(s)}{U_m(s)} = \frac{k_m}{L_m s + R_m} \quad (2.149)$$

Stosując opisany sposób postępowania, bardzo łatwo otrzymujemy zapis (2.148), w którym:

$$\begin{aligned} K &= \frac{k_m}{R_m} \quad - \text{współczynnik wzmacniania} \\ T &= \frac{L_m}{R_m} \quad - \text{stała czasowa} \end{aligned} \quad (2.150)$$

Przykład 2.14. Zapis transmitancji elementu drugiego rzędu

Niech transmitancja elementu (2.141) przyjmie postać

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_0}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0} \quad (2.151)$$

gdzie: a_2, a_1, a_0, b_0 – współczynniki zawierające parametry konstrukcyjno-ruchowe elementu, np. wartości masy, współczynnika tarcia lepkiego i sztywności v , w przypadku elementu mechanicznego z rysunku 2.4.

Podobnie, jak w poprzednim przykładzie, przekształcamy wzór (2.151)

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\frac{b_0}{a_0}}{\frac{a_2}{a_0} s^2 + \frac{a_1}{a_0} s + 1} \quad (2.152)$$

Następnie przyjmujemy poniższe oznaczenia:

$$\begin{aligned} K &= \frac{b_0}{a_0} \\ T^2 &= \frac{a_2}{a_0} \\ 2\zeta T &= \frac{a_1}{a_0} \end{aligned} \quad (2.153)$$

gdzie:

K – współczynnik wzmacniania,

T – stała czasowa,

ζ – liczba tłumienia, czyli współczynnik określający zdolność członu do tłumienia drgań.

Współczynniki wyrażone wzorami (2.153) mają następujące jednostki miar:

$$\begin{aligned}[K] &= \left[\frac{b_0}{a_0} \right] = \left[\frac{y(t)}{x(t)} \right] \\ [T^2] &= \left[\frac{a_2}{a_0} \right] = [s^2] \\ [\zeta] &= [-] \end{aligned} \tag{2.154}$$

Tak więc transmitancję (2.152) zapiszemy następująco

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K}{T^2 s^2 + 2\zeta T s + 1} \tag{2.155}$$

gdzie:

$$\begin{aligned} K &= \frac{b_0}{a_0} \\ T &= \sqrt{\frac{a_2}{a_0}} \\ \zeta &= \frac{a_1}{2a_0 T} = \frac{a_1}{2\sqrt{a_2 a_0}} \end{aligned} \tag{2.156}$$

Weźmy teraz dla przykładu transmitancję elementu z rysunku 2.4 daną wzorem (2.27)

$$G(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms^2 + cs + k} \tag{2.157}$$

Stosując opisany sposób postępowania, łatwo otrzymujemy zapis (2.155), w którym:

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{k} \\ T &= \sqrt{\frac{m}{k}} \\ \zeta &= \frac{c}{2\sqrt{mk}} \end{aligned} \tag{2.158}$$

Na zakończenie przykładu rozważymy trzy przypadki dotyczące różnych postaci wzoru (2.155) w zależności od wartości liczby tłumienia ζ .

Przypadek 1. Liczba tłumienia wynosi $0 < \zeta < 1$

W tym przypadku mówimy, że tłumienie jest podkrytyczne (człon niedothumiony), i pozostaćmy przy zapisie (2.155). Element nazywamy wtedy elementem oscylacyjnym, co znajduje uzasadnienie w jego charakterystyce czasowej dla skokowego sygnału wejściowego.

Zatem

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K}{T^2 s^2 + 2\zeta T s + 1} \quad (2.159)$$

Przypadek 2. Liczba tłumienia wynosi $\zeta = 1$

W tym przypadku wzór (2.155) można zapisać w postaci

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K}{(Ts + 1)^2} \quad (2.160)$$

Wtedy mówimy, że tłumienie jest krytyczne, a element nazywamy inercyjnym o dwóch jednakowych stałych czasowych. Nazwa ta znajduje uzasadnienie w charakterystyce elementu dla skokowego sygnału wejściowego.

Przypadek 3. Liczba tłumienia wynosi $\zeta > 1$

W tym przypadku wzór (2.155) można zapisać w postaci

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)} \quad (2.161)$$

gdzie T_1, T_2 – stałe czasowe, o wartościach:

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{T}{\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}} \\ T_2 &= \frac{T}{\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}} \end{aligned} \quad (2.162)$$

W tym przypadku mówimy, że tłumienie jest nadkrytyczne (człon przetłumiony), a element nazywamy inercyjnym o dwóch różnych stałych czasowych (człon inercyjny drugiego rzędu).

Przykład 2.15. Zapis transmitancji elementu całkującego

Niech transmitancja (2.141) przyjmie uproszczoną postać

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_0}{a_1 s} \quad (2.163)$$

lub

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K}{s} \quad (2.164)$$

gdzie K oznacza współczynnik wzmacniania. Jednostka miary tego współczynnika wynosi

$$[K] = \left[\frac{b_0}{a_1} \right] = \left[\frac{sY(s)}{X(s)} \right] = \left[\frac{\frac{dy(t)}{dt}}{x(t)} \right] \quad (2.165)$$

Jeżeli sygnały $x(t)$ i $y(t)$ są jednoimienne (oznaczają np. przemieszczenie), to współczynnik K ma miarę odwrotności czasu i wtedy stosujemy zapis

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{Ts} \quad (2.166)$$

gdzie T jest stałą czasową, przy czym

$$T = \frac{1}{K} \quad (2.167)$$

Przykład 2.16. Zapis transmitancji elementu różniczkującego

Założmy, że transmitancję (2.141) można sprowadzić do postaci

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_1 s}{a_0} \quad (2.168)$$

lub

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = Ks \quad (2.169)$$

gdzie K jest współczynnikiem wzmacniania. Jednostka miary tego współczynnika wynosi

$$[K] = \left[\frac{b_1}{a_0} \right] = \left[\frac{Y(s)}{sX(s)} \right] = \left[\frac{\frac{y(t)}{dx(t)}}{dt} \right] \quad (2.170)$$

Jeżeli sygnały $x(t)$ i $y(t)$ są jednoimienne (np. w postaci napięcia), to współczynnik K ma miarę czasu i wtedy stosujemy zapis

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = Ts \quad (2.171)$$

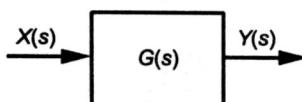
gdzie T jest stałą czasową, przy czym $T = K$.

3. Opis układów automatyki za pomocą schematów strukturalnych

W praktyce do opisu złożonych układów dynamicznych najczęściej stosuje się schematy blokowe lub grafy przepływu sygnałów.

3.1. Schematy blokowe

Schematy blokowe pokazują strukturę dowolnego elementu lub układu automatyki w postaci bloków. Dla każdego z bloków jest określony kierunek przepływu sygnałów oraz związek między sygnałem wejściowym i wyjściowym (transmitancja). Przekształcając schemat blokowy układu automatyki, można zredukować go do jednego bloku. Ogólny schemat blokowy liniowego elementu automatyki przedstawia rysunek 3.1.



Rys. 3.1. Schemat blokowy liniowego układu automatyki

Na wejście wprowadzamy sygnał $X(s)$, który podlega przekształceniu uwidocznionemu wewnątrz bloku poprzez transmitancję $G(s)$, dając w efekcie sygnał $Y(s)$. Drogą przekształcenia złożonego schematu blokowego do prostszej postaci otrzymujemy transmitancję zastępczą $G_{zast.}(s)$ całego układu.

3.1.1. Podstawowe elementy schematów blokowych

Elementarne bloki dynamiczne zawierają wydzielone fragmenty lub elementy składowe układu automatyki. Zazwyczaj są rysowane w postaci prostokątów, z umieszczonymi wewnątrz informacjami dotyczącymi ich właściwości – w układach liniowych zwykle podaje się transmitancje.

$$Y(s) = G(s)X(s) \quad (3.1)$$

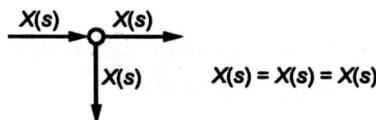
gdzie:

$Y(s)$ – transformata sygnału wyjściowego,

$X(s)$ – transformata sygnału wejściowego,

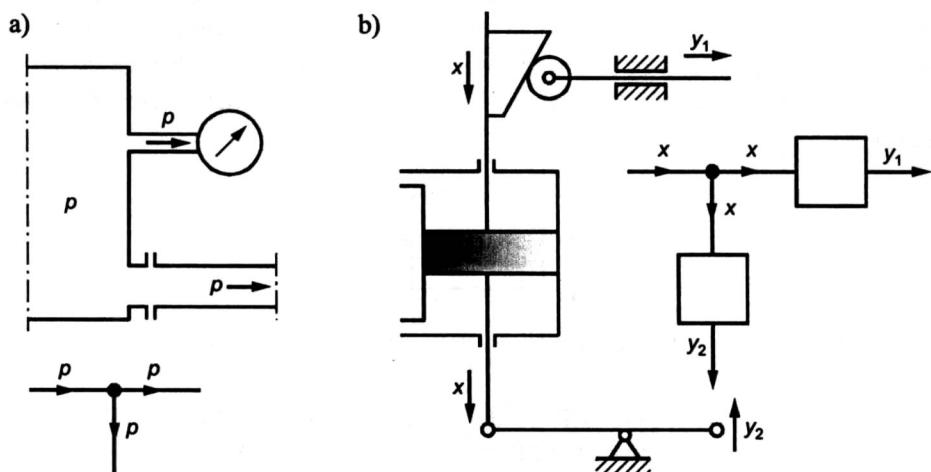
$G(s)$ – transmitancja operatorowa elementu (członu) dynamicznego.

Węzły zaczepowe (informacyjne) umożliwiają przekazanie tej samej informacji do kilku różnych punktów schematu blokowego (jedno wejście i co najmniej dwa wyjścia), co przedstawia rysunek 3.2.



Rys. 3.2. Schemat węzła zaczepowego

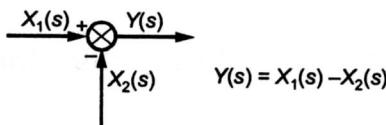
Przykłady elementów spełniających rolę węzłów zaczepowych pokazano na rysunku 3.3.



Rys. 3.3. Przykłady węzłów zaczepowych: a) zbiornik ciśnieniowy;
b) tłoczyssko siłownika hydraulicznego z krzywką

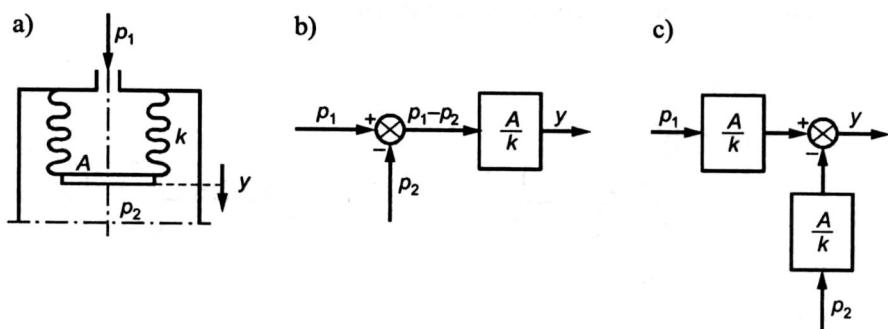
W zbiorniku ciśnieniowym znajduje się medium o ciśnieniu p przekazywane rurociągiem do dalszej części układu. Przy założeniu, że w całym zbiorniku i wychodzących z niego przewodach panuje ciśnienie p , otrzymamy przykład węzła zaczepowego, jak na rysunku 3.3a. W drugim przykładzie (rys. 3.3b) przesunięcie x jest zarówno przesunięciem tłoczysska i związanego z nim końca dźwigni, jak i przesunięciem krzywki.

Węzły sumacyjne umożliwiają algebraiczne sumowanie kilku sygnałów (jedno wyjście i co najmniej dwa wejścia brane z odpowiednimi znakami), jak to przedstawiono na rysunku 3.4.



Rys. 3.4. Schemat węzła sumacyjnego

Przykłady elementów spełniających rolę węzłów sumacyjnych pokazano na rysunkach 3.5 i 3.6.



Rys. 3.5. Mieszek sprężysty: a) schemat mieszka; b), c) schematy blokowe; p_1, p_2 – sygnały wejściowe (ciśnienia), y – sygnał wyjściowy (przesunięcie), A – powierzchnia efektywna mieszka, k – współczynnik sztywności mieszka

Równanie sił działających na mieszek sprężysty, jak na rysunku 3.5, ma postać

$$(p_1 - p_2)A = ky \quad (3.2)$$

stąd

$$y = \frac{A}{k} (p_1 - p_2) \quad (3.3)$$

Tak więc wypadkowe przesunięcie y mieszka jest różnicą dwóch składowych pochodzących od sygnałów wejściowych (ciśnień).

Mechanizm różnicowy (rys. 3.6) można opisać za pomocą równań prędkości kół mechanizmu różnicowego:

$$r\omega_1 = r\omega_3 + r\omega_4 \quad (3.4)$$

$$r\omega_2 = r\omega_3 - r\omega_4 \quad (3.5)$$

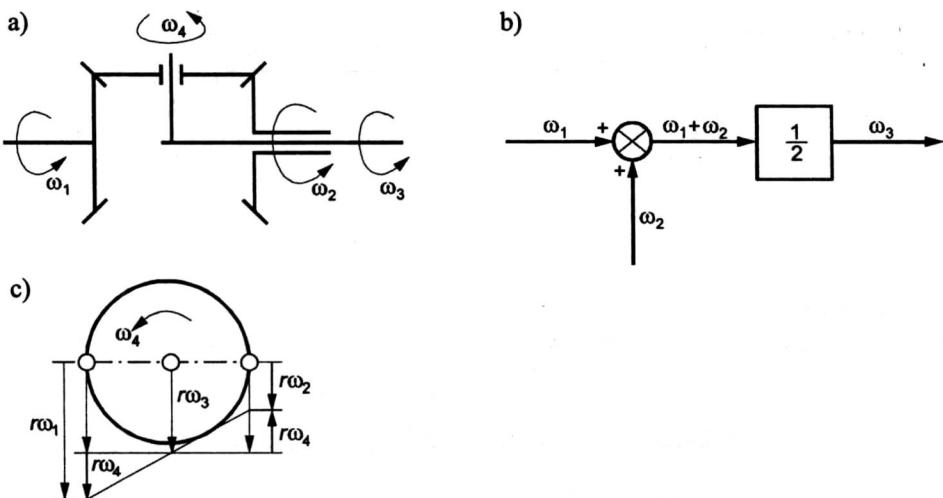
Dodając stronami równania (3.4) i (3.5), otrzymujemy

$$\omega_3 = \frac{1}{2} (\omega_1 + \omega_2) \quad (3.6)$$

Jeżeli sygnałami wejściowymi i wyjściowymi będą kąty obrotu kół zębatych, to otrzymamy

$$\alpha_3 = \frac{1}{2} (\alpha_1 + \alpha_2) \quad (3.7)$$

Zmianie kierunku prędkości kątowej (lub kąta) odpowiada zmiana znaku na wejściu węzła sumacyjnego. Tak więc wypadkowy kąt obrotu mechanizmu różnicowego zależy od algebraicznej sumy kątów początkowych.

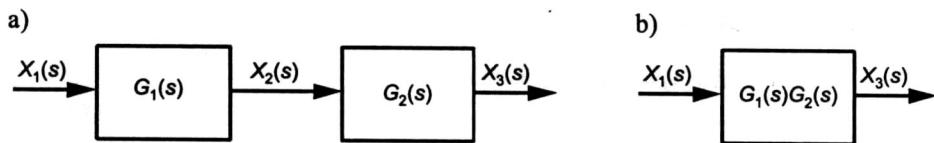


Rys. 3.6. Mechanizm różnicowy: a) schemat mechaniczny; b) schemat blokowy; c) rozkład prędkości, ω_1, ω_2 – sygnały wejściowe (prędkości kątowe), ω_3 – sygnał wyjściowy (prędkość kątowa), r – promień podziałowy koła zębnego

3.1.2. Przekształcenia schematów blokowych

Omawiając właściwości oraz warunki pracy liniowych układów automatyki, można zauważać, że często istnieje potrzeba przekształcenia schematu blokowego, w celu doprowadzenia go do postaci dogodnej pod względem przeprowadzanych rozważań. Możemy to zrobić dzięki temu, że układy liniowe są jednorodne i addytywne. W rozbudowanych schematach blokowych wyróżnia się trzy podstawowe rodzaje połączeń bloków w zależności od sposobu oddziaływanie przepływających sygnałów.

Połączenie szeregowo (kaskadowe, łańcuchowe) jest to takie połączenie, w którym sygnał wyjściowy jednego bloku jest jednocześnie sygnałem wejściowym do następnego (rys. 3.7).



Rys. 3.7. Schemat szeregowego połączenia bloków: a) schemat pierwotny;
b) schemat równoważny

Zakładając, że:

$$\begin{aligned} X_2(s) &= G_1(s)X_1(s) \\ X_3(s) &= G_2(s)X_2(s) \end{aligned} \quad (3.8)$$

można napisać

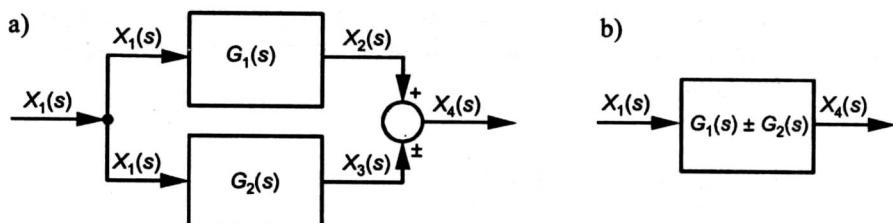
$$X_3(s) = G_2(s)G_1(s)X_1(s) \quad (3.9)$$

Stąd transmitancja zastępcza dla połączenia szeregowego

$$G(s) = \frac{X_3(s)}{X_1(s)} = G_1(s)G_2(s) \quad (3.10)$$

Transmitancja zastępcza połączenia szeregowego bloków jest więc równa iloczynowi transmitancji operatorowych poszczególnych bloków. Zależność ta jest słuszna, gdy przy przepływie sygnałów przez poszczególne bloki nie występuje oddziaływanie wsteczne.

Połączenie równolegle jest to takie połączenie, w którym ten sam sygnał wejściowy działa równocześnie na kilka bloków, a sygnał wyjściowy takiego połączenia jest sumą algebraiczną sygnałów wyjściowych z poszczególnych bloków (rys. 3.8).



Rys. 3.8. Schemat równoległego połączenia bloków: a) schemat pierwotny;
b) schemat równoważny

Zakładając, że:

$$\begin{aligned} X_2(s) &= G_1(s)X_1(s) \\ X_3(s) &= G_2(s)X_1(s) \\ X_4(s) &= X_2(s) \pm X_3(s) \end{aligned} \quad (3.11)$$

można napisać

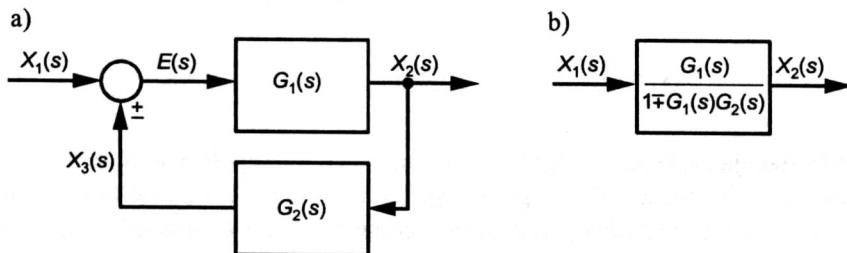
$$X_4(s) = (G_1(s) \pm G_2(s))X_1(s) \quad (3.12)$$

Stąd transmitancja zastępcza dla połączenia równoleglego

$$G(s) = \frac{X_4(s)}{X_1(s)} = G_1(s) \pm G_2(s) \quad (3.13)$$

Transmitancja zastępcza połączenia równoleglego bloków jest więc równa sumie algebraicznej transmitancji operatorowych poszczególnych bloków.

Połączenie ze sprzężeniem zwrotnym – jest to takie połączenie, w którym sygnał wyjściowy z bloku w torze głównym oddziałuje wstecznie na sygnał wejściowy tego bloku (rys. 3.9).



Rys. 3.9. Schemat blokowy połączenia ze sprzężeniem zwrotnym: a) schemat pierwotny; b) schemat równoważny

Jeżeli sygnał wyjściowy oddziałuje na układ w taki sposób, że składowa sygnału wejściowego pochodząca od sprzężenia dodaje się do zasadniczego sygnału wejściowego lub odejmuje się od niego, to sprzężenie takie nazywać będziemy odpowiednio dodatnim lub ujemnym.

Zakładając, że:

$$\begin{aligned} E(s) &= X_1(s) \pm X_3(s) \\ X_2(s) &= G_1(s)E(s) \\ X_3(s) &= G_2(s)X_2(s) \end{aligned} \quad (3.14)$$

można napisać:

$$\begin{aligned} X_2(s) &= G_1(s)(X_1(s) \pm X_3(s)) \\ X_2(s) &= G_1(s)X_1(s) \pm G_1(s)G_2(s)X_2(s) \end{aligned} \quad (3.15)$$

Wyliczając $X_2(s)$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} X_2(s)(1 \mp G_1(s)G_2(s)) &= G_1(s)X_1(s) \\ X_2(s) &= \frac{G_1(s)}{1 \mp G_1(s)G_2(s)} X_1(s) \end{aligned} \quad (3.16)$$

Transmitancja zastępcza dla połączenia ze sprzężeniem zwrotnym wynosi

$$G(s) = \frac{X_2(s)}{X_1(s)} = \frac{G_1(s)}{1 \mp G_1(s)G_2(s)} \quad (3.17)$$

gdzie:

$G_1(s)$ – transmitancja układu w torze głównym,

$G_2(s)$ – transmitancja układu w torze sprzężenia zwrotnego.

Znak „+” w mianowniku równania (3.17) dotyczy sprzężenia zwrotnego ujemnego, a znak „–” sprzężenia zwrotnego dodatniego. Jeżeli $G_2(s) = 1$ i cały sygnał wyjściowy jest podawany na wejście, to takie sprzężenie nazywamy sprzężeniem bezpośrednim (**jednostkowym**).

Wtedy

$$G(s) = \frac{G_1(s)}{1 \mp G_1(s)} \quad (3.18)$$

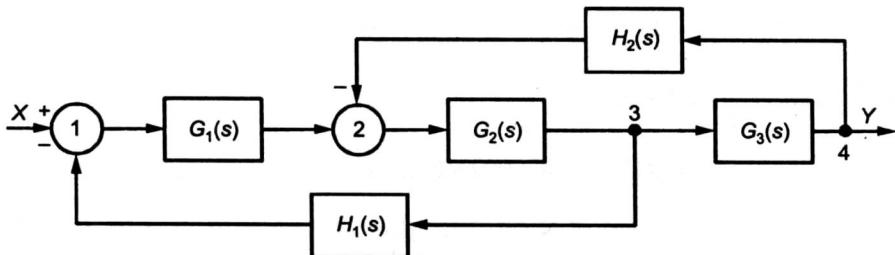
Jeśli w torze sprzężenia zwrotnego występuje człon proporcjonalny $G_2(s) = K$, to sprzężenie takie nazywamy **sztywnym**. Jeśli w torze sprzężenia zwrotnego występuje człon różniczkujący $G_2(s) = Ts$, to otrzymujemy układ ze sprzężeniem podatnym (**elastycznym**) – ujemne podatne sprzężenie zwrotne powoduje spowolnienie procesu, zaś dodatnie – przyśpieszenie.

Przekształcenia schematów blokowych umożliwiają wyznaczenie wypadkowej transmitancji układu. W częściach schematów blokowych zawierających wyłącznie elementy liniowe można przesuwać węzły informacyjne i sumacyjne w przód i w tył.

Reguły przekształceń schematów blokowych zawiera tabela 3.1 (na wklejce). Przedstawimy je bliżej w przykładzie 3.1.

Przykład 3.1

Przekształcić schemat blokowy układu pokazanego na rysunku 3.10 do prostszej postaci i wyznaczyć jego zastępczą transmitancję operatorową.



Rys. 3.10. Pierwotny schemat blokowy układu

Sposób 1

Przesuwamy węzeł sumacyjny 1 za człon o transmitancji $G_1(s)$, czyli stosujemy regułę 10 z tabeli 3.1. Jednocześnie dokonujemy zamiany kolejności węzłów sumacyjnych 1 i 2. Dla otrzymanej konfiguracji połączeń stosujemy wzory na połączenie szeregowe (3.10) i połączenie z ujemnym sprzężeniem zwrotnym (3.17) (rys. 3.11a).

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = G_1(s) \frac{\frac{G_2(s)}{1 + H_1(s)G_1(s)G_2(s)} G_3(s)}{1 + \frac{G_2(s)}{1 + H_1(s)G_1(s)G_2(s)} G_3(s) H_2(s)} \quad (3.19)$$

$$G(s) = \frac{G_1(s)G_2(s)G_3(s)}{1 + H_1(s)G_1(s)G_2(s) + G_2(s)G_3(s)H_2(s)} \quad (3.20)$$

Sposób 2

Przesuwamy węzeł zaczepowy 4 przed człon o transmitancji $G_3(s)$, czyli stosujemy regułę 7 z tabeli 3.1. Następnie dla otrzymanej konfiguracji połączeń stosujemy wzory na połączenie szeregowe (3.10) i połączenie z ujemnym sprzężeniem zwrotnym (3.17) (rys. 3.11b).

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{G_1(s) \frac{G_2(s)}{1 + G_2(s)H_2(s)G_3(s)} G_3(s)}{1 + G_1(s) \frac{G_2(s)}{1 + G_2(s)H_2(s)G_3(s)} H_1(s)} \quad (3.21)$$

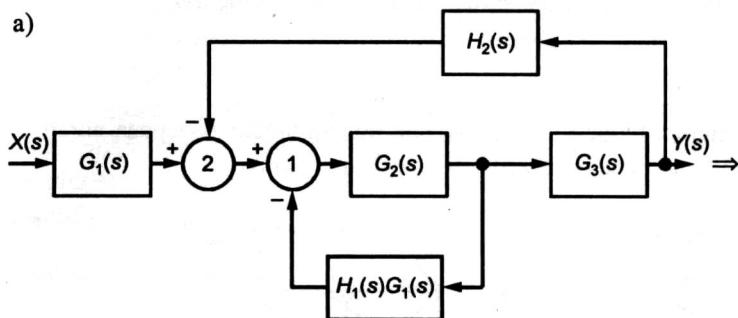
$$G(s) = \frac{G_1(s)G_2(s)G_3(s)}{1 + G_2(s)H_2(s)G_3(s) + G_1(s)G_2(s)H_1(s)} \quad (3.22)$$

Tabela 3.1
Reguły przekształcania schematów blokowych

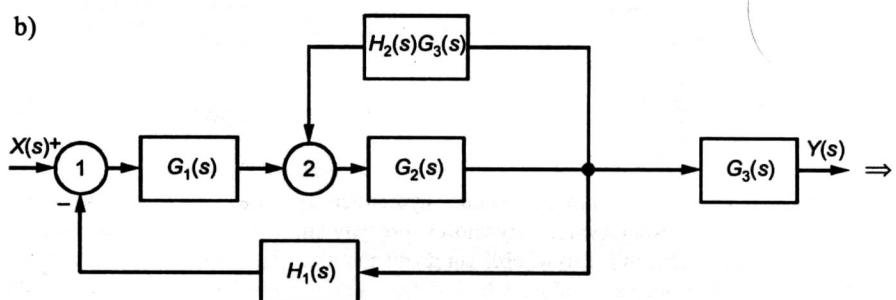
| Lp. | Rodzaj przekształcenia | Układy równoważne | |
|-----|--|------------------------|--------------------|
| | | przed przekształceniem | po przekształceniu |
| 1 | Połączenie szeregowe | | |
| 2 | Połączenie równoległe | | |
| 3 | Połączenie ze sprzężeniem zwrotnym | | |
| 4 | Jednostkowe ujemne sprzężenie zwrotne | | |
| 5 | Przesunięcie członu sprzężenia zwrotnego przed węzłem sumacyjnym | | |
| 6 | Wydzielenie członu z gałęzi równoległej | | |
| 7 | Przesunięcie węzła zaczepowego przed człon | | |
| 8 | Przesunięcie węzła zaczepowego za człon | | |
| 9 | Przesunięcie węzła sumacyjnego przed człon | | |
| 10 | Przesunięcie węzła sumacyjnego za człon | | |
| 11 | Łączenie węzłów zaczepowych | | |
| 12 | Rozdzielenie węzłów zaczepowych | | |
| 13 | Zmiana położenia węzłów zaczepowych | | |
| 14 | Łączenie węzłów sumacyjnych | | |
| 15 | Rozdzielenie węzłów sumacyjnych | | |
| 16 | Przesunięcie węzła zaczepowego przed sumacyjny | | |
| 17 | Zmiana kolejności węzłów sumacyjnych | | |
| 18 | Przesunięcie węzła sumacyjnego przed zaczepowy | | |

W obu przypadkach otrzymujemy ten sam wynik przekształcenia – wzory (3.20) i (3.22).

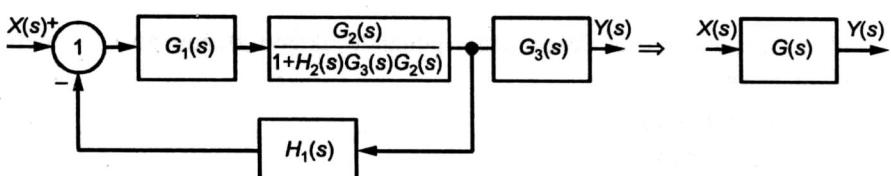
a)



b)



a)



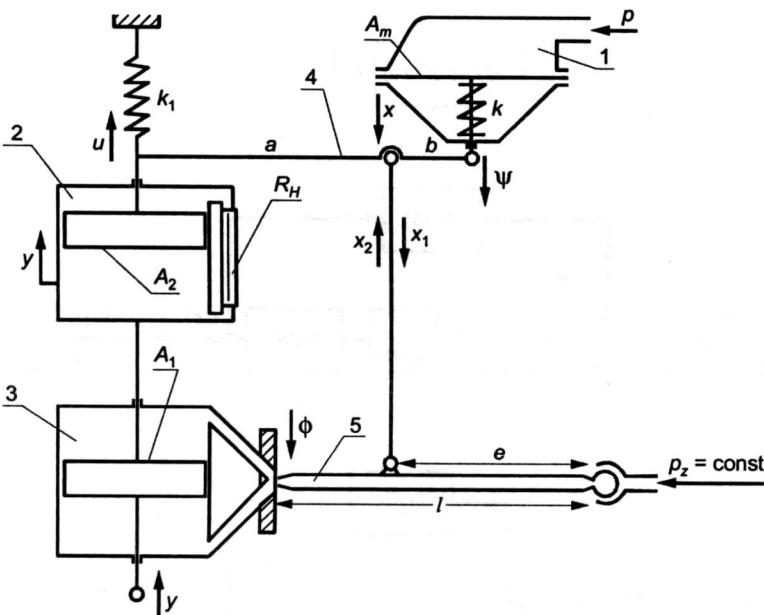
Rys. 3.11. Kolejne etapy przekształcania schematu blokowego z rysunku 3.10 według:
a) sposobu 1; b) sposobu 2

3.1.3. Budowa schematów blokowych

Schematy blokowe możemy budować na drodze analitycznej na podstawie równań opisujących ich działanie lub na podstawie wyniku eksperymentalnych badań układu lub elementu.

Przykład 3.2

Narysować schemat blokowy oraz określić transmitancję zastępczą układu sterowania siłownika hydraulicznego, przedstawionego na rysunku 3.12.



Rys. 3.12. Schemat układu sterowania siłownika hydraulicznego: A_m – powierzchnia efektywna membrany siłownika, k – współczynnik sztywności sprężyny siłownika, A_2 – powierzchnia czynna tłoka tłumika, k_1 – współczynnik sztywności sprężyny tłumika, R_H – opór hydrauliczny zaworu, A_1 – powierzchnia czynna tłoka siłownika, a, b, e – długości ramion dźwigni dwustronnej, l – długość rurki strumieniowej, p_z – ciśnienie zasilania rurki strumieniowej, ψ , ϕ , u , x_1 , x_2 – przesunięcia, p – ciśnienie wejściowe, y – przesunięcie wyjściowe, x – przemieszczenie wypadkowe (pozostałe objaśnienia w tekście)

W pierwszej kolejności dokonujemy podziału układu złożonego na następujące czlonki elementarne:

- siłownik pneumatyczny (1),
- tłumik hydrauliczny (2),
- siłownik hydrauliczny (3),
- dźwignia dwustronna (4),
- rurka strumieniowa (5).

Właściwości wymienionych członów można stosunkowo łatwo opisać za pomocą transmitancji operatorowych, sporządzić ich częściowe schematy blokowe, a następnie połączyć je w kompletny schemat blokowy całego układu. Powyższą operację można wykonać przy założeniu, że reakcje między rozdzielonymi myślowo członami są pomijalnie małe. Wielkością wejściową w układzie jest ciśnienie p działające na membranę siłownika pneumatycznego, natomiast wielkością wyjściową jest przesunięcie tłoczyka siłownika hydraulicznego. Stan równowagi w układzie jest osiągany przy poziomym położeniu dźwigni dwustronnej. Poniżej zostaną określone transmitancje operatorowe dla poszczególnych członów elementarnych układu.

Siłownik pneumatyczny (1)

Oznaczenia:

- p – ciśnienie działające na membranę siłownika, czyli wielkość wejściowa;
- ψ – przesunięcie trzpienia siłownika, czyli wielkość wyjściowa.

Pomijając siłę tarcia oraz siłę bezwładności, można zapisać równanie ruchu w postaci

$$pA_m = k\psi \quad (3.23)$$

Po zastosowaniu przekształcenia Laplace'a transmitancja operatorowa siłownika pneumatycznego przyjmuje postać

$$G_1(s) = \frac{\Psi(s)}{P(s)} = \frac{A_m}{k} \quad (3.24)$$

Siłownik jest więc członem proporcjonalnym.

Tłumik hydrauliczny (2)

Oznaczenia:

- y – przemieszczenie korpusu tłumika, czyli wielkość wejściowa;
- u – przemieszczenie tłoczyka tłumika, czyli wielkość wyjściowa.

Natężenie przepływu oleju Q przez zawór jest wprost proporcjonalne do różnicy ciśnień na tym zaworze

$$Q = \frac{1}{R_H} \Delta p \quad (3.25)$$

Ugięcie u sprężyny o sztywności k_1 wywołuje różnicę ciśnień Δp na zaworze, określoną następująco

$$\Delta p = \frac{uk_1}{A_2} \quad (3.26)$$

Pochodna zmiany objętości komory cylindra na skutek ruchu tłoka jest równa objętościowemu natężeniu przepływu oleju Q , czyli z (3.25) i (3.26) otrzymamy

$$A_2 \frac{d}{dt} (y - u) = u \frac{k_1}{R_H A_2} \quad (3.27)$$

stąd

$$A_2 \frac{du}{dt} + u \frac{k_1}{R_H A_2} = A_2 \frac{dy}{dt} \quad (3.28)$$

podstawiając $T_2 = \frac{R_H A_2^2}{k_1}$, otrzymujemy równanie ruchu dla tego członu

$$T_2 \frac{du}{dt} + u = T_2 \frac{dy}{dt} \quad (3.29)$$

Po zastosowaniu przekształcenia Laplace'a transmitancja operatorowa tłumika hydraulicznego przyjmuje postać

$$G_2(s) = \frac{U(s)}{Y(s)} = \frac{T_2 s}{T_2 s + 1} \quad (3.30)$$

Tłumik hydrauliczny jest więc członem różniczkującym rzeczywistym.

Silownik hydrauliczny (3)

Oznaczenia:

ϕ – przesunięcie końca rurki strumieniowej, czyli wielkość wejściowa;

y – przesunięcie tłoczyska silownika hydraulicznego, czyli wielkość wyjściowa.

Z zasad zachowania ciągłości strugi dla przepływu cieczy do komory tłoka silownika wynika

$$A_1 \frac{dy}{dt} = Q \quad (3.31)$$

Objętościowe natężenie przepływu Q oleju przez rurkę strumieniową można wyrazić jako

$$Q = h\phi v \quad (3.32)$$

gdzie:

$h\phi$ – powierzchnia przepływu oleju,

v – prędkość wypływu oleju z rurki,

h – szerokość otworu.

Z równań (3.31) i (3.32) otrzymamy

$$\frac{A_1}{hv} \frac{dy}{dt} = \phi \quad (3.33)$$

podstawiając $T_1 = \frac{A_1}{hv}$, otrzymujemy równanie ruchu dla tego członu

$$T_1 \frac{dy}{dt} = \phi \quad (3.34)$$

Po zastosowaniu przekształcenia Laplace'a transmitancja operatorowa siłownika hydraulicznego przyjmuje postać

$$G_3(s) = \frac{Y(s)}{\Phi(s)} = \frac{1}{T_1 s} \quad (3.35)$$

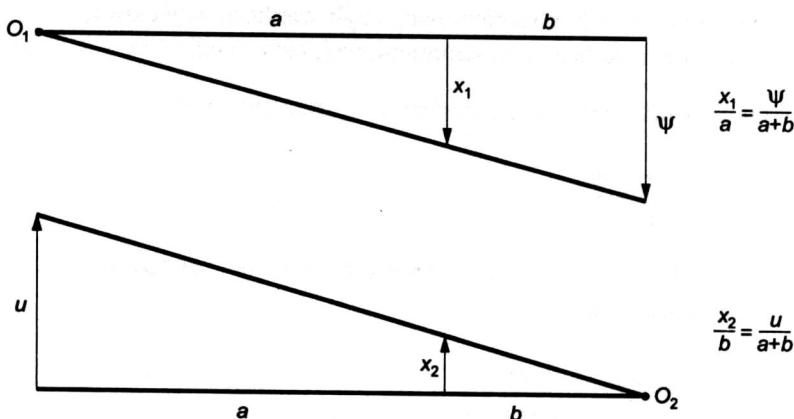
Siłownik hydrauliczny jest więc członem całkującym.

Dźwignia dwustronna (4)

Oznaczenia:

- u i ψ – przesunięcia końców dźwigni, czyli wielkości wejściowe;
- x – wypadkowe przesunięcie dźwigni, czyli wielkość wyjściowa.

Wykorzystując zasadę superpozycji, działanie dźwigni możemy przedstawić jako złożenie przesunięć składowych pokazanych na rysunku 3.13.



Rys. 3.13. Działanie dźwigni dwustronnej

Wypadkowe przesunięcie dźwigni

$$x = x_1 - x_2 \quad (3.36)$$

gdzie:

x_1 – przesunięcie dźwigni przy obrocie wokół punktu O_1 ,

x_2 – przesunięcie dźwigni przy obrocie wokół punktu O_2 .

Dla małych kątów wychyleń dźwigni można przyjąć następujące wzory:

$$\frac{x_1}{a} = \frac{\Psi}{a+b}, \quad \text{stąd} \quad x_1 = \frac{a}{a+b} \Psi \quad (3.37)$$

$$\frac{x_2}{b} = \frac{u}{a+b}, \quad \text{stąd} \quad x_2 = \frac{b}{a+b} u \quad (3.38)$$

Podstawiając wzory (3.37) i (3.38) do (3.36), otrzymujemy

$$x = \frac{a}{a+b} \Psi - \frac{b}{a+b} u \quad (3.39)$$

Po zastosowaniu przekształcenia Laplace'a równanie dźwigni dwustronnej przyjmuje postać

$$X(s) = \frac{a}{a+b} \Psi(s) - \frac{b}{a+b} U(s) \quad (3.40)$$

Rurka strumieniowa (5)

Oznaczenia:

x – przesunięcie rurki strumieniowej, czyli wielkość wejściowa;

φ – przesunięcie końca rurki strumieniowej, czyli wielkość wyjściowa.

Z równania wychylenia rurki strumieniowej możemy napisać

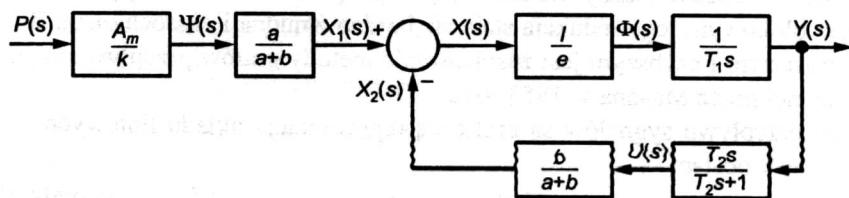
$$\frac{x}{e} = \frac{\varphi}{l} \quad (3.41)$$

Po zastosowaniu przekształcenia Laplace'a transmitancja operatorowa rurki strumieniowej przyjmuje postać

$$G_5(s) = \frac{\Phi(s)}{X(s)} = \frac{l}{e} \quad (3.42)$$

Rurka strumieniowa jest więc członem proporcjonalnym.

Po złożeniu wszystkich członów otrzymamy schemat blokowy całego układu sterowania silownika hydraulicznego (rys. 3.14).



Rys. 3.14. Schemat blokowy układu sterowania silownika hydraulicznego

Transmitancja zastępcza całego układu wynosi

$$G(s) = \frac{Y(s)}{P(s)} = \frac{A_m}{k} \cdot \frac{a}{a+b} \cdot \frac{\frac{l}{e} \cdot \frac{1}{T_1 s}}{1 + \frac{l}{e} \cdot \frac{1}{T_1 s} \cdot \frac{T_2 s}{T_2 s + 1} \cdot \frac{b}{a+b}} \quad (3.43)$$

Po podstawieniu:

$$K_1 = \frac{A_m}{k} \cdot \frac{a}{a+b} \cdot \frac{l}{e} \quad \text{oraz} \quad K_2 = \frac{l}{e} \cdot \frac{T_2}{T_1} \cdot \frac{b}{a+b}$$

otrzymamy:

$$G(s) = \frac{\frac{K_1}{T_1 s}}{1 + \frac{K_2}{T_2 s + 1}} = \frac{K_1}{T_1 s + \frac{K_2 T_1 s}{T_2 s + 1}} = \frac{K_1 (T_2 s + 1)}{T_1 T_2 s^2 + T_1 s + K_2 T_1 s},$$

$$G(s) = \frac{K_1 (T_2 s + 1)}{T_1 s (T_2 s + K_2 + 1)} = \frac{K_1 (T_2 s + 1)}{(K_2 + 1) T_1 s \left(\frac{T_2}{K_2 + 1} s + 1 \right)}.$$

Po zastosowaniu poniższych wzorów:

$$K = \frac{K_1}{(K_2 + 1) T_1} \quad \text{oraz} \quad T = \frac{T_2}{K_2 + 1}$$

otrzymamy

$$G(s) = \frac{K (T_2 s + 1)}{s (T s + 1)} \quad (3.44)$$

3.2. Grafy przepływu sygnałów

Wraz ze wzrostem liczbą bloków i pętli sprzężeń zwrotnych występujących na schemacie blokowym jego redukcja staje się bardzo żmudna i czasochłonna. Rozwiążaniem prostszym i szybszym jest zastosowanie metody grafów przepływu sygnałów, wprowadzonej przez Masona w 1953 roku.

Grafy przepływu sygnałów są graficzną reprezentacją układu liniowych równań algebraicznych postaci

$$y_j(s) = \sum_{k=1}^n G_{kj}(s)y_k(s), \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (3.45)$$

powstałych po transformacji Laplace'a układu równań różniczkowych, będącego modelem matematycznym liniowego układu automatyki. Graf przepływu sygnałów definiujemy jako zbiór punktów zwanych węzłami i skierowanych gałęzi łączących ze sobą odpowiednie węzły. Węzły reprezentują poszczególne sygnały, a gałęzie – transmitancje opisujące związki między sygnałami. Sygnał może być przesyłany wzdłuż gałęzi tylko w kierunku wskazywanym przez strzałkę. Po wprowadzeniu założeń upraszczających do zapisu wzorów:

$$y_j(s) = y_j,$$

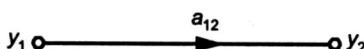
$$G_{kj}(s) = a_{kj},$$

wzór (3.45) przyjmie postać

$$y_j = \sum_{k=1}^n a_{kj} y_k, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (3.46)$$

3.2.1. Pojęcia podstawowe

Elementarny graf przepływu sygnałów, przedstawiający związek między sygnałem wejściowym y_1 , sygnałem wyjściowym y_2 oraz transmitancją a_{12} pokazano na rysunku 3.15.



Rys. 3.15. Elementarny graf przepływu sygnałów

Równanie grafu z rysunku 3.15

$$y_2 = a_{12}y_1 \quad (3.47)$$

Dla bardziej złożonych układów, np. dla układu opisanego równaniami:

$$\begin{cases} y_2 = a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + a_{42}y_4 \\ y_3 = a_{23}y_2 \\ y_4 = a_{14}y_1 + a_{34}y_3 \\ y_5 = a_{35}y_3 + a_{45}y_4 \end{cases} \quad (3.48a)$$

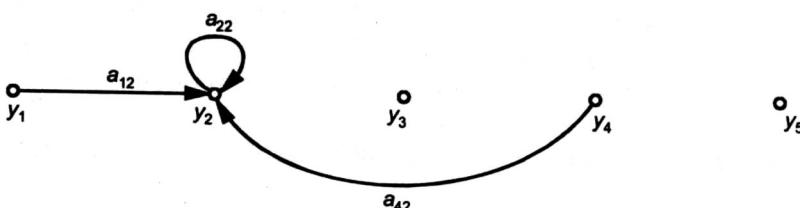
$$(3.48b)$$

$$(3.48c)$$

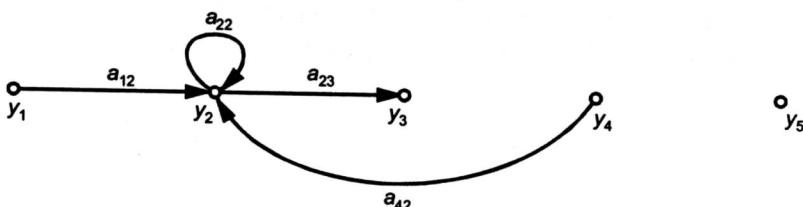
$$(3.48d)$$

można zbudować graf pokazany na rysunku 3.16, łącząc ze sobą poszczególne węzły, zgodnie ze związkami między sygnałami wynikającymi z układu równań (3.48).

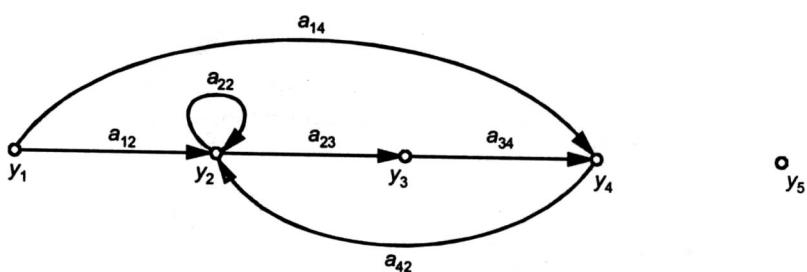
a)



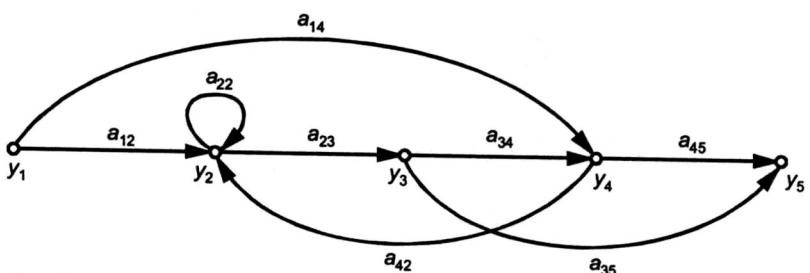
b)



c)



d)

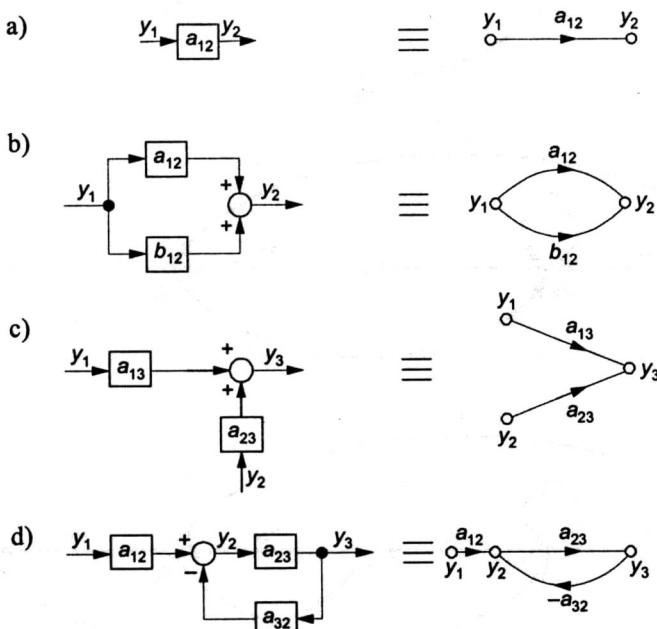


Rys. 3.16. Graf opisany równaniami (3.48a)–(3.48d) skonstruowany metodą krok po kroku

Zdefiniowane wcześniej gałęzie i węzły grafu należy dodatkowo uzupełnić następującymi elementami, użytecznymi dla celów stosowania algebrą grafów:

- podgraf – wydzielona część grafu;
- węzeł źródłowy – z takiego węzła gałęzie tylko wychodzą (np. y_1 na rys. 3.16);
- węzeł odbiorczy – do takiego węzła gałęzie tylko dochodzą (np. y_5 na rys. 3.16);
- węzeł pośredni – do takiego węzła gałęzie zarówno dochodzą, jak i wychodzą (np. y_3 na rys. 3.16);
- ścieżka – droga sygnałów będąca zbiorem następujących po sobie gałęzi, którymi sygnały kolejno przepływają i tylko raz przechodzą przez poszczególne węzły (np. $y_1 \rightarrow y_2 \rightarrow y_3 \rightarrow y_4 \rightarrow y_5$ lub $y_1 \rightarrow y_4 \rightarrow y_5$ na rys. 3.16);
- kaskada – ścieżka zaczynająca się w węźle źródłowym a kończąca w węźle odbiorczym (np. $y_1 \rightarrow y_2 \rightarrow y_3 \rightarrow y_5$ na rys. 3.16);
- pętla – ścieżka zaczynająca się i kończąca w tym samym węźle (np. $y_2 \rightarrow y_3 \rightarrow y_4 \rightarrow y_2$ na rys. 3.16);
- pętla własna – pętla zawierająca tylko jedną gałąź (np. w węźle y_2 pętla z a_{22} na rys. 3.16).

Na rysunku 3.17 przedstawiono kilka wybranych schematów blokowych wraz z odpowiadającymi im grafami przepływu sygnałów.



Rys. 3.17. Schematy blokowe i odpowiadające im grafy przepływu sygnałów: a) człon pojedynczy; b) równoległe połączenie członów; c) suma sygnałów; d) układ ze sprzężeniem zwrotnym

3.2.2. Zasady redukcji grafów

Do redukcji grafów przepływu sygnałów stosuje się niżej omówione sposoby ich przekształceń.

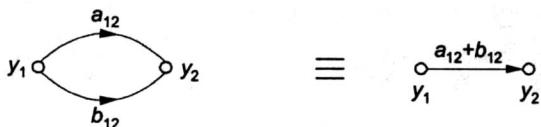
Połączenie szeregowo gałęzi grafu (rys. 3.18)



$$\begin{cases} y_2 = a_{12}y_1 \\ y_3 = a_{23}y_2 \end{cases} \quad \equiv \quad y_3 = a_{23}a_{12}y_1$$

Rys. 3.18. Połączenie szeregowo gałęzi grafu

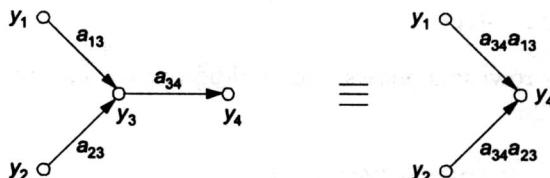
Połączenie równolegle gałęzi grafu (rys. 3.19)



$$\begin{cases} y_2 = a_{12}y_1 \\ y_2 = b_{12}y_1 \end{cases} \quad \equiv \quad y_2 = (a_{12} + b_{12})y_1$$

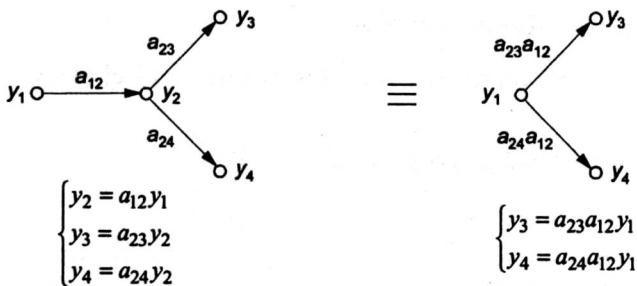
Rys. 3.19. Połączenie równolegle gałęzi grafu

Eliminacja węzłów pośrednich (rys. 3.20 i 3.21)



$$\begin{cases} y_3 = a_{12}y_1 + a_{23}y_2 \\ y_4 = a_{34}y_3 \end{cases} \quad \equiv \quad y_4 = a_{34}a_{13}y_1 + a_{34}a_{23}y_2$$

Rys. 3.20. Eliminacja węzłów pośrednich

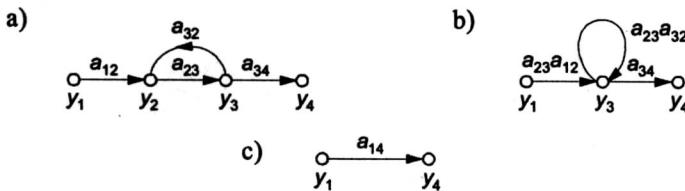


Rys. 3.21. Eliminacja węzłów pośrednich

Redukcja grafu zawierającego pętlę

Przykład 3.3

Redukcję grafu zawierającego pętlę dokonujemy wprowadzając najpierw pętlę własną, a następnie eliminując ją.



Rys. 3.22. Redukcja grafu zawierającego pętlę
(objaśnienia w tekście)

Graf z rysunku 3.22a możemy opisać równaniami:

$$\begin{cases} y_2 = a_{12}y_1 + a_{32}y_3 \\ y_3 = a_{23}y_2 \\ y_4 = a_{34}y_3 \end{cases} \quad (3.49)$$

Podstawiając y_2 z równania pierwszego do drugiego we wzorach (3.49) otrzymamy graf z rysunku 3.22b:

$$\begin{cases} y_3 = a_{23}a_{12}y_1 + a_{23}a_{32}y_3 \\ y_4 = a_{34}y_3 \end{cases} \quad (3.50)$$

Z pierwszego równania ze wzoru (3.50) wyliczamy y_3

$$y_3(1 - a_{23}a_{32}) = a_{23}a_{12}y_1 \rightarrow y_3 = \frac{a_{23}a_{12}}{1 - a_{23}a_{32}} y_1 \quad (3.51)$$

Po podstawieniu y_3 do równania na y_4 we wzorach (3.50) otrzymamy graf z rysunku 3.22c

$$y_4 = \frac{a_{34}a_{23}a_{12}}{1 - a_{23}a_{32}} y_1 = a_{14}y_1 \quad (3.52)$$

Redukcja grafu zawierającego dwie pętle (rys. 3.23)

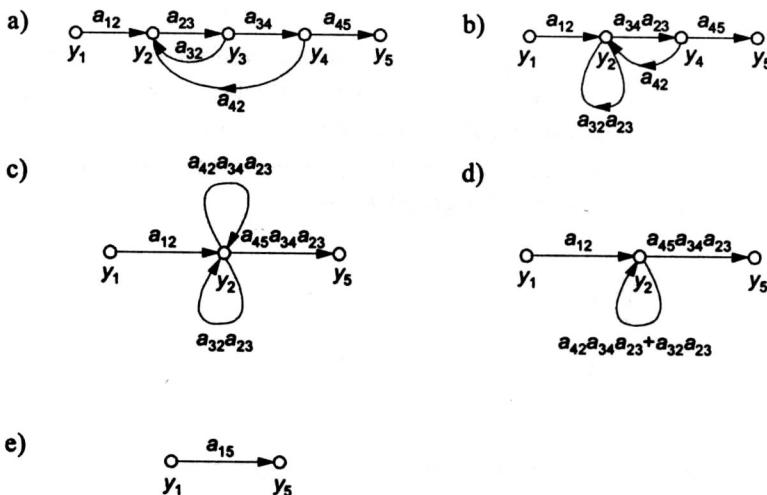
Przykład 3.4

Redukcja grafu sprowadza się do kolejnej eliminacji węzłów y_3, y_4, y_2 . Graf z rysunku 3.23a możemy opisać równaniami:

$$\begin{cases} y_2 = a_{12}y_1 + a_{32}y_3 + a_{42}y_4 \\ y_3 = a_{23}y_2 \\ y_4 = a_{34}y_3 \\ y_5 = a_{45}y_4 \end{cases} \quad (3.53)$$

Podstawiając y_3 z równania drugiego do równania pierwszego i trzeciego we wzorach (3.53), otrzymujemy graf z rysunku 3.23b opisany równaniami:

$$\begin{cases} y_2 = a_{12}y_1 + a_{32}a_{23}y_2 + a_{42}y_4 \\ y_4 = a_{34}a_{23}y_2 \\ y_5 = a_{45}y_4 \end{cases} \quad (3.54)$$



Rys. 3.23. Redukcja grafu zawierającego dwie pętle
(objaśnienia w tekście)

Podstawiając y_4 z równania drugiego do równania pierwszego i trzeciego we wzorach (3.54), otrzymujemy graf z rysunku 3.23c opisany równaniami:

$$\begin{cases} y_2 = a_{12}y_1 + a_{32}a_{23}y_2 + a_{42}a_{34}a_{23}y_2 \\ y_5 = a_{45}a_{34}a_{23}y_2 \end{cases} \quad (3.55)$$

Łącząc ze sobą pozostałe pętle własne otrzymujemy graf z rysunku 3.23d.

Z pierwszego równania ze wzoru (3.55), wyliczamy y_2

$$y_2(1 - a_{32}a_{23} - a_{42}a_{34}a_{23}) = a_{12}y_1 \rightarrow y_2 = \frac{a_{12}}{1 - a_{32}a_{23} - a_{42}a_{34}a_{23}} y_1 \quad (3.56)$$

Po podstawieniu y_2 do równania na y_5 we wzorach (3.55) otrzymamy graf z rysunku 3.23e

$$y_5 = \frac{a_{45}a_{34}a_{23}a_{12}}{1 - a_{32}a_{23} - a_{42}a_{34}a_{23}} y_1 = a_{15}y_1 \quad (3.57)$$

3.2.3. Rozwiązywanie grafu metodą Masona

W przypadku grafów skomplikowanych, znajdowanie grafu zastępczego drogą kolejnych redukcji jest nierzaz pracochłonne i wtedy wygodniej jest stosować metodę Masona.

Wzór Masona w teorii grafów jest odpowiednikiem wzoru Cramera wykorzystywanego do rozwiązywania układu liniowych równań algebraicznych. Umożliwia on określenie związków między dwoma sygnałami bez redukcji grafu. Zgodnie z regułą Masona, całkowitą transmitancję grafu, a więc między wybranym węzłem źródłowym a wybranym odbiorczym, możemy obliczyć ze wzoru

$$a = \frac{\sum_{i=1}^m a_i \Delta_i}{\Delta} \quad (3.58)$$

gdzie:

m – liczba kaskad między węzłem źródłowym a odbiorczym,

a_i – transmitancja i -tej kaskady,

Δ – wyznacznik grafu, liczony według wzoru (3.59),

Δ_i – dopełnienie i -tej kaskady, przy czym

$$\Delta = 1 - \sum_i l_i + \sum_{ij} l_i l_j - \sum_{ijk} l_i l_j l_k + \dots \quad (3.59)$$

gdzie:

$\sum_i l_i$ – suma transmitancji wszystkich pojedynczych pętli grafu;

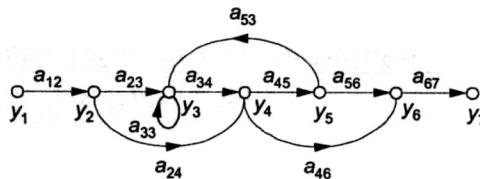
$\sum_{ij} l_i l_j$ – suma iloczynów transmitancji pętli nie stykających się ze sobą, branych po dwie;

$\sum_{ijk} l_i l_j l_k$ – suma iloczynów transmitancji pętli nie stykających się ze sobą, branych po trzy.

Dopełnienie Δ_i otrzymujemy z wyznacznika grafu Δ przez przyrównanie do zera w tym wyrażeniu wszystkich transmitancji pętli i wchodzących lub stykających się z i -tą kaskadą.

Przykład 3.5

Dany jest graf przedstawiony na rysunku 3.24. Należy wyznaczyć transmitancję między węzłem y_1 a węzłem y_7 .



Rys. 3.24. Graf do przykładu 3.5

Między węzłami y_1 i y_7 są cztery kaskady:

- 1) $y_1 - y_2 - y_3 - y_4 - y_5 - y_6 - y_7$ o transmitancji $a_1 = a_{12}a_{23}a_{34}a_{45}a_{56}a_{67}$,
- 2) $y_1 - y_2 - y_4 - y_5 - y_6 - y_7$ o transmitancji $a_2 = a_{12}a_{24}a_{45}a_{56}a_{67}$,
- 3) $y_1 - y_2 - y_4 - y_6 - y_7$ o transmitancji $a_3 = a_{12}a_{24}a_{46}a_{67}$,
- 4) $y_1 - y_2 - y_3 - y_4 - y_6 - y_7$ o transmitancji $a_4 = a_{12}a_{23}a_{34}a_{46}a_{67}$.

Rozważany graf ma dwie pętle:

- 1) $y_3 - y_3$ o transmitancji $l_1 = a_{33}$,
- 2) $y_3 - y_4 - y_5 - y_3$ o transmitancji $l_2 = a_{34}a_{45}a_{53}$.

Obie pętle stykają się z kaskadami a_1 i a_4 , czyli

$$\Delta_1 = \Delta_4 = 1 \quad (3.60a)$$

Pętla l_1 nie styka się z kaskadami a_2 i a_3 , czyli

$$\Delta_2 = \Delta_3 = 1 - a_{33} \quad (3.60b)$$

Wyznacznik grafu

$$\Delta = 1 - (l_1 + l_2) = 1 - (a_{33} + a_{34}a_{45}a_{53}) \quad (3.61)$$

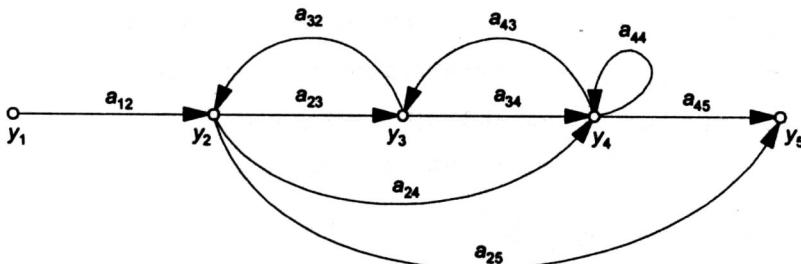
Podstawiając wyliczone wartości do wzoru (3.58) otrzymujemy szukaną transmitancję

$$\frac{y_7}{y_1} = \frac{a_1\Delta_1 + a_2\Delta_2 + a_3\Delta_3 + a_4\Delta_4}{\Delta} \quad (6.62)$$

$$a_{17} = \frac{a_{12}a_{23}a_{34}a_{45}a_{56}a_{67} + (a_{12}a_{24}a_{45}a_{56}a_{67})(1 - a_{33})}{1 - (a_{33} + a_{34}a_{45}a_{53})} + \\ + \frac{a_{12}a_{24}a_{46}a_{67}(1 - a_{33}) + a_{12}a_{23}a_{34}a_{46}a_{67}}{1 - (a_{33} + a_{34}a_{45}a_{53})} \quad (3.63)$$

Przykład 3.6

Dla grafu przedstawionego na rysunku 3.25 określić transmitancję pomiędzy węzłami y_1 a y_5 stosując regułę Masona.



Rys. 3.25. Graf do przykładu 3.6

Węzły y_1 i y_5 połączone są trzema kaskadami:

- 1) $y_1 - y_2 - y_3 - y_4 - y_5$ o transmitancji $a_1 = a_{12}a_{23}a_{34}a_{45}$,
- 2) $y_1 - y_2 - y_5$ o transmitancji $a_2 = a_{12}a_{25}$,
- 3) $y_1 - y_2 - y_4 - y_5$ o transmitancji $a_3 = a_{12}a_{24}a_{45}$.

Rozważany graf ma cztery pętle:

- 1) $y_2 - y_3 - y_2$ o transmitancji $l_1 = a_{23}a_{32}$,
- 2) $y_3 - y_4 - y_3$ o transmitancji $l_2 = a_{34}a_{43}$,
- 3) $y_4 - y_4$ o transmitancji $l_3 = a_{44}$,
- 4) $y_2 - y_4 - y_3 - y_2$ o transmitancji $l_4 = a_{24}a_{43}a_{32}$.

Jest tylko jedna para pętli nie stykających się:

$$y_2 - y_3 - y_2 \text{ oraz } y_4 - y_4$$

$$\text{Ich transmitancja } l_1l_2 = a_{23}a_{32}a_{44}.$$

Wszystkie pętle stykają się z kaskadami a_1 i a_3 , dlatego

$$\Delta_1 = \Delta_3 = 1 \quad (3.64a)$$

Są natomiast dwie pętle, które nie stykają się z kaskadą a_2 – są to pętle l_2 i l_3 , czyli

$$\Delta_2 = 1 - a_{34}a_{43} - a_{44} \quad (3.64b)$$

Wyznacznik grafu

$$\begin{aligned} \Delta &= 1 - (l_1 + l_2 + l_3 + l_4) + l_1l_3 = \\ &= 1 - (a_{23}a_{32} + a_{34}a_{43} + a_{44} + a_{24}a_{43}a_{32}) + a_{23}a_{32}a_{44} \end{aligned} \quad (3.65)$$

Podstawiając wyliczone wartości do wzoru (3.58), otrzymujemy szukaną transmitancję:

$$\frac{y_5}{y_1} = \frac{a_1\Delta_1 + a_2\Delta_2 + a_3\Delta_3}{\Delta} \quad (3.66)$$

$$a_{15} = \frac{a_{12}a_{23}a_{34}a_{45} + (a_{12}a_{25})(1 - a_{34}a_{43} - a_{44}) + a_{12}a_{24}a_{45}}{1 - (a_{23}a_{32} + a_{34}a_{43} + a_{44} + a_{24}a_{43}a_{32}) + a_{23}a_{32}a_{44}} \quad (3.67)$$

Grafy przepływu sygnałów odgrywają ważną rolę przy analizie i syntezie liniowych układów regulacji – podobnie jak schematy blokowe. Umożliwiają one graficzne przedstawienie modeli matematycznych omówionych układów. Na ich podstawie można wyznaczyć transmitancję między dowolnymi punktami układu przy zastosowaniu podanych ogólnych reguł w sposób bezpośredni.

4. Właściwości dynamiczne układów liniowych

4.1. Wprowadzenie

W rozdziale 2 stwierdzono, że analizę układu sterowania rozpoczyna się od wprowadzenia matematycznego modelu układu. Stosuje się szereg metod analizowania właściwości modelu układu.

W praktyce sygnał wejściowy do układu sterowania nie jest wcześniej znany, i często ma charakter losowy, co utrudnia jego zapis w formie analitycznej. Tylko w układach programowych sygnał wejściowy jest znany w formie analitycznej.

Analizując i projektując układy sterowania, musimy mieć możliwość porównywania ich właściwości. W tym celu stosuje się określone testowe sygnały wejściowe, umożliwiające porównanie odpowiedzi badanych układów na te sygnały. Wiele metod projektowania oparto na takich sygnałach lub na odpowiedziach układów na zmiany warunków początkowych (bez żadnych sygnałów testowych). Wykorzystanie sygnałów testowych wynika z tego, że istnieje korelacja pomiędzy odpowiedziami układu na typowy sygnał wejściowy a zdolnością układu do radzenia sobie z rzeczywistymi sygnałami wejściowymi. Powszechnie wykorzystywanymi testowymi sygnałami wejściowymi są funkcje: skokowa, liniowa, impulsowa, sinusoidalna itp. Dla tych sygnałów testowych można łatwo przeprowadzić analizę matematyczną i eksperymentalną układów sterowania, ponieważ sygnały te są bardzo prostymi funkcjami do wygenerowania.

4.2. Sposoby oceny właściwości układów liniowych

Jak pokazano w rozdziale 2, właściwości układu liniowego o stałych parametrach (stacjonarnego) można opisać za pomocą liniowego równania różniczkowego o stałych współczynnikach, którego postać ogólna jest następująca

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 y = b_m \frac{d^m x}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + \dots + b_0 x \quad (4.1)$$

przy czym $n \geq m$ dla wszystkich układów rzeczywistych, gdyż wszystkie elementy rzeczywiste mają charakter inercyjny.

W równaniu tym przyjęto oznaczenia:

- y – wielkość wyjściowa,
- x – wielkość wejściowa,
- t – czas,
- a_k, b_l – stałe współczynniki ($k = 0, 1, \dots, n; l = 0, 1, \dots, m$).

Z równania (4.1) wynika charakterystyka statyczna (w stanie ustalonym, wtedy wszystkie pochodne są równe zero), na podstawie której wnioskujemy o właściwościach statycznych układu

$$y = \frac{b_0}{a_0} x \quad (4.2)$$

Dla elementów linearyzowanych jest to równanie stycznej do charakterystyki rzeczywistej, gdzie początkiem układu współrzędnych jest punkt styczności – punkt pracy, wokół którego przeprowadzono linearyzację.

Właściwości dynamiczne układu ocenia się zwykle na podstawie przebiegu sygnału wyjściowego $y(t)$, będącego wynikiem wprowadzenia określonego sygnału wejściowego $x(t)$. Wyznaczenie tego przebiegu, nazywanego krótko odpowiedzią na typowe wymuszenia, wymaga rozwiązyania równania różniczkowego, opisującego model układu, które dla większości układów jest nieliniowe. Istnieją dwie drogi podejścia do rozwiązania tego równania.

Szybsza metoda – poprzez analizę przybliżoną (aproksymację), w czasie której stosujemy linearyzację. Z aproksymacji odpowiedzi układu wnioskujemy o cechach rozwiązania i o sposobie zmiany układu, tak aby uzyskać wymaganą odpowiedź w zależności od zadanego kryterium jakości sterowania (celu). Ta klasyczna metoda polega na wprowadzeniu równania charakterystycznego układu, obliczeniu pierwiastków tego równania i wyznaczeniu stałych całkowania z warunków początkowych. Metoda ta jest uciążliwa w przypadku równań wyższego rzędu.

Natomiast dokładną odpowiedź układu otrzymuje się, stosując techniki numeryczne i programy komputerowe do rozwiązywania równań różniczkowych.

W automatyce stosowana jest powszechnie odmiana pierwszej metody, tzw. metoda operatorowa, która pozwala znacznie uprościć tok obliczeń. Idea metody polega na znalezieniu przekształcenia pozwalającego zastąpić równania różniczkowo-całkowe zwykłymi równaniami algebraicznymi. Najczęściej stosowanym narzędziem matematycznym jest przekształcenie Laplace'a.

Podstawą do niemal wszystkich technik analiz układów liniowych są dwie cechy tych układów:

- 1) są one liniowe, więc ma zastosowanie zasada superpozycji, która mówi, iż w przypadku gdy wejście układu może być wyrażone jako suma sygnałów, wówczas od-

powiedź układu również może być wyrażona poprzez sumę odpowiedzi odpowiadających poszczególnym sygnałom wejściowym, zatem:

$$x(t) = a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t), \quad x - \text{wejście układu},$$

$$y(t) = b_1 y_1(t) + b_2 y_2(t), \quad y - \text{wyjście układu};$$

- 2) odpowiedź układów liniowych może być także wyrażona jako splot wejścia $x(t)$ i odpowiedzi impulsowej $g(t)$ układu

$$y(t) = x(t) * g(t) = \int_0^t x(\tau)g(t-\tau)d\tau = \int_0^t x(t-\tau)g(\tau)d\tau \quad (4.3)$$

4.3. Wprowadzenie do charakterystyk czasowych i częstotliwościowych

Przekształcenie Laplace'a umożliwia wyznaczenie transmitancji operatorowej liniowego układu, która również określa własności dynamiczne układu (model) niezależnie od rodzaju sygnału wejściowego. Transmitancja operatorowa jest bardzo wygodna dla analizy pracy liniowych układów i dlatego jest powszechnie stosowana. Umożliwia ona również przedstawienie zasadniczych cech układów w postaci graficznej, pozwalającej na pierwszy rzut oka ocenić ich właściwości dynamiczne. Biorąc pod uwagę dziedzinę, w jakiej przedstawia się te właściwości, można wyróżnić:

- charakterystyki czasowe,
- charakterystyki częstotliwościowe.

Charakterystyki czasowe dają możliwość (w odniesieniu do układów jednowymiarowych) bezpośredniej oceny układu, ponieważ charakterystyka czasowa jest przebiegiem w czasie odpowiedzi układu dynamicznego $y(t)$ na określone wymuszenie $x(t)$.

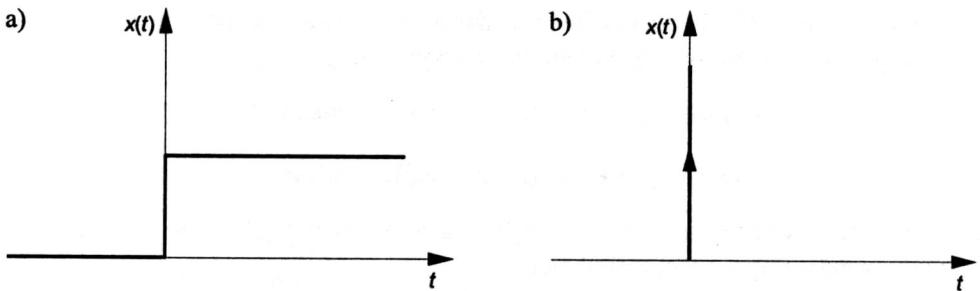
Najczęściej stosowanymi wymuszeniami są (rys. 4.1):

- skok jednostkowy $1(t)$ (tzw. funkcja Heaviside'a) – mówimy wówczas o odpowiedzi (charakterystyce) skokowej $h(t)$:

$$x(t) = 1(t) = \begin{cases} 0, & \text{dla } t < 0, \\ 1, & \text{dla } t \geq 0; \end{cases}$$

- impuls Diraca $\delta(t)$ (tzw. funkcja wagi układu) – mówimy wówczas o odpowiedzi (charakterystyce) impulsowej $g(t)$:

$$x(t) = \delta(t) = \begin{cases} 0, & \text{dla } t \neq 0, \\ \infty, & \text{dla } t = 0. \end{cases}$$



Rys. 4.1. Typowe wymuszenia przy badaniu układów dynamicznych: a) skok jednostkowy;
b) impuls Diraca

Odpowiedź skokowa elementu lub układu jest to przebieg jego wielkości wyjściowej, uzyskany pod wpływem skokowej zmiany wielkości wejściowej, przy czym przed tą zmianą układ znajdował się w stanie ustalonym.

Jeżeli sygnał wejściowy $x(t) = 1(t)$, dla którego $X(s) = \frac{1}{s}$, to wtedy

$$Y(s) = G(s)X(s) = G(s)\frac{1}{s} \quad (4.4)$$

Stosując odwrotne przekształcenie Laplace'a, uzyskamy odpowiedź skokową w postaci

$$y(t) = h(t) = L^{-1}\left[G(s)\frac{1}{s}\right] \quad (4.5)$$

Odpowiedź skokową możemy również wyznaczyć doświadczalnie. Znajomość odpowiedzi układu na skok jednostkowy $h(t)$ pozwala wyznaczyć jego odpowiedź na dowolny sygnał wejściowy $x(t)$, z zależności zwanej całką Duhamela

$$y(t) = h(t)x(0^+) + \int_0^t h(t-\tau)x(\tau)d\tau \quad (4.6)$$

lub

$$y(t) = h(t)x(0^+) + \int_0^t h(\tau)x(t-\tau)d\tau \quad (4.7)$$

W przypadku odpowiedzi impulsowej, jeżeli sygnał wejściowy $x(t) = \delta(t)$, dla którego $X(s) = 1$, zachodzi

$$Y(s) = G(s)X(s) = G(s) \quad (4.8)$$

Stosując odwrotne przekształcenie Laplace'a, uzyskamy odpowiedź impulsową w postaci

$$y(t) = g(t) = L^{-1}[G(s)] \quad (4.9)$$

Z powyższej zależności wynika, że odpowiedź impulsowa stanowi oryginał transmitancji operatorowej układu. Porównując wzory (4.4) i (4.8) stwierdzamy, że między odpowiedziami impulsową i skokową zachodzą związki

$$g(t) = \frac{d}{dt} h(t) \quad \text{dla } h(0) = 0 \quad (4.10)$$

oraz

$$h(t) = \int_0^t g(\tau) d\tau \quad (4.11)$$

Odpowiedź impulsowa jest więc pochodną odpowiedzi skokowej. Znając odpowiedź impulsową $g(t)$, można wyznaczyć, korzystając z twierdzenia o splocie, odpowiedź $y(t)$ układu na dowolne wymuszenie $x(t)$.

$$y(t) = g(t) * x(t) = \int_0^t g(\tau) x(t - \tau) d\tau = \int_0^t g(t - \tau) x(\tau) d\tau \quad (4.12)$$

Odpowiedź skokowa oraz odpowiedź impulsowa, wykorzystywane są najczęściej do oceny właściwości dynamicznych układów ciągłych.

Charakterystyki częstotliwościowe dają możliwość pośredniej oceny działania układu dynamicznego dzięki znajomości zmian amplitudy i fazy sygnałów sinusoidalnych dla różnych częstotliwości podawanych na wejście układu. Charakterystyki częstotliwościowe są krzywymi przedstawiającymi transmitancję widmową $G(j\omega)$ w funkcji pulsacji ω .

Charakterystyki czasowe i częstotliwościowe są ze sobą ściśle związane, transmitancja widmowa jest bowiem transformatą Fouriera odpowiedzi impulsowej

$$G(j\omega) = F[g(t)] \quad (4.13)$$

lub inaczej mówiąc, transmitancja operatorowa jest transformatą Laplace'a odpowiedzi impulsowej

$$G(s) = L[g(t)] \quad (4.14)$$

4.4. Przykłady podstawowych elementów automatyki i ich charakterystyki czasowe

4.4.1. Element proporcjonalny (bezinerencyjny)

Ogólna postać równania opisującego element proporcjonalny jest następująca

$$y(t) = Kx(t) \quad (4.15)$$

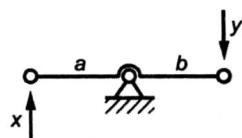
gdzie K oznacza współczynnik proporcjonalności (współczynnik wzmacniania).

Po wykonaniu transformacji Laplace'a równania (4.15) wyznaczamy transmitancję operatorową

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = K \quad (4.16)$$

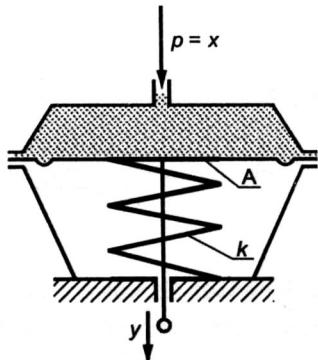
Przykłady elementów proporcjonalnych przedstawiono na rysunku 4.2.

a)

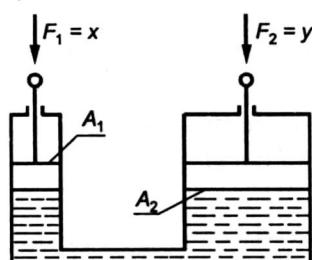


$$y(t) = \frac{b}{a} x(t)$$

b)



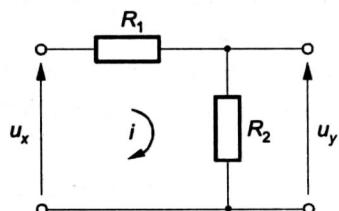
c)



$$y(t) = \frac{A_2}{A_1} x(t)$$

d)

$$y(t) = \frac{A}{k} x(t)$$



$$u_y(t) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} u_x(t)$$

Rys. 4.2. Przykłady elementów proporcjonalnych: a) mechaniczne układy dźwigniowe; b) siłownik pneumatyczny; c) prasa hydrauliczna; d) rezystancyjny dzielnic napięcia

Odpowiedź skokową elementu proporcjonalnego wyznaczamy, podając na jego wejście sygnał skoku jednostkowego $x(t) = 1(t)$

$$Y(s) = G(s)X(s) = K \frac{1}{s} \quad (4.17)$$

stąd odpowiedź skokowa przyjmuje postać

$$y(t) = h(t) = K \cdot 1(t) \quad (4.18)$$

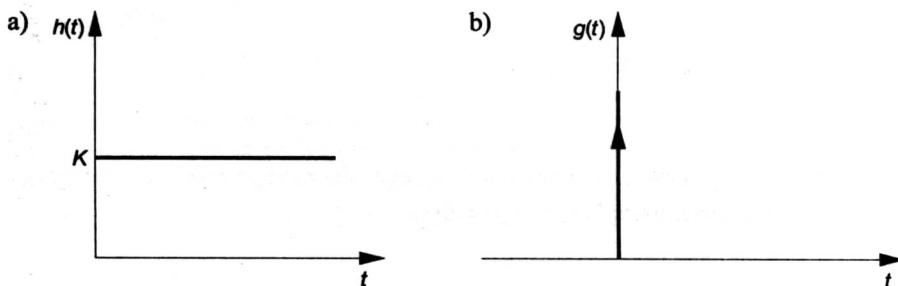
Odpowiedź impulsową elementu proporcjonalnego wyznaczamy, podając na jego wejście impuls Diraca $x(t) = \delta(t)$

$$Y(s) = G(s)X(s) = K \cdot 1 \quad (4.19)$$

stąd odpowiedź impulsowa przyjmuje postać

$$y(t) = g(t) = K\delta(t) \quad (4.20)$$

Przykładowe odpowiedzi czasowe elementu proporcjonalnego przedstawia rysunek 4.3.



Rys. 4.3. Odpowiedzi elementu proporcjonalnego: a) skokowa; b) impulsowa

4.4.2. Element inercyjny pierwszego rzędu

Ogólna postać równania różniczkowego opisującego element inercyjny pierwszego rzędu jest następująca

$$T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = Kx(t) \quad (4.21)$$

Po wykonaniu transformacji Laplace'a równania (4.21) wyznaczamy transmitancję operatorową

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K}{Ts + 1} \quad (4.22)$$

gdzie:

K – współczynnik proporcjonalności (wzmocnienia),

T – stała czasowa.

Odpowiedź skokową elementu inercyjnego pierwszego rzędu wyznaczamy, podając na jego wejście sygnał skoku jednostkowego $x(t) = 1(t)$

$$Y(s) = G(s)X(s) = \frac{K}{Ts + 1} \cdot \frac{1}{s} = \frac{K}{s(Ts + 1)} \quad (4.23)$$

Rozkładając (4.23) na ułamki proste, otrzymamy

$$Y(s) = \frac{K}{s} - \frac{K}{s + \frac{1}{T}} \quad (4.24)$$

stąd odpowiedź skokowa przyjmuje postać

$$y(t) = h(t) = K \left(1 - e^{-\frac{1}{T}t} \right) \quad (4.25)$$

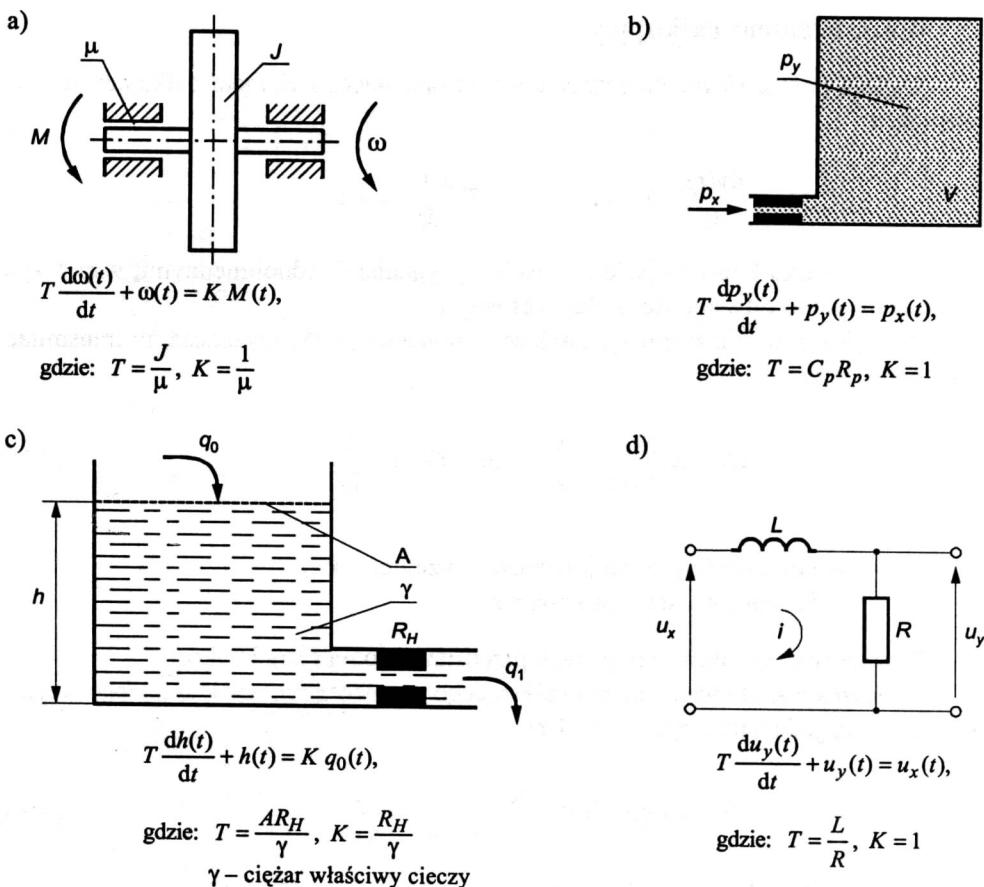
Odpowiedź impulsową elementu inercyjnego pierwszego rzędu wyznaczamy, podając na jego wejście impuls Diraca $x(t) = \delta(t)$

$$Y(s) = G(s)X(s) = \frac{K}{Ts + 1} \cdot 1 = \frac{K}{T} \cdot \frac{1}{s + \frac{1}{T}} \cdot 1 \quad (4.26)$$

stąd odpowiedź impulsowa przyjmuje postać

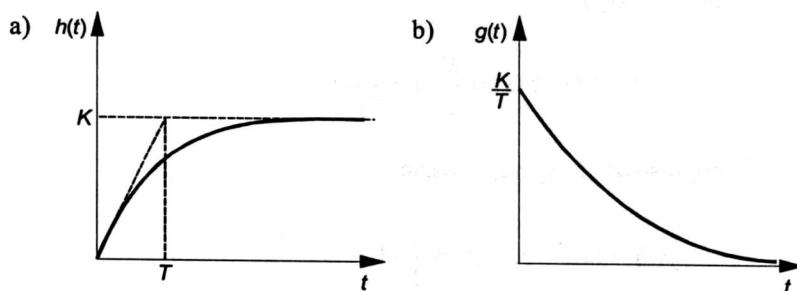
$$y(t) = g(t) = \frac{K}{T} e^{-\frac{1}{T}t} \quad (4.27)$$

Przykłady elementów inercyjnych pierwszego rzędu przedstawiono na rysunku 4.4.



Rys. 4.4. Przykłady elementów inercyjnych pierwszego rzędu: a) masa wirująca na wale; b) zbiornik z gazem; c) zbiornik z cieczą; d) układ LR

Przykładowe odpowiedzi czasowe elementu inercyjnego pierwszego rzędu przedstawia rysunek 4.5.



Rys. 4.5. Odpowiedzi elementu inercyjnego pierwszego rzędu: a) skokowa; b) impulsowa

4.4.3. Element całkujący

Ogólna postać równania różniczkowego opisującego element całkujący jest następująca:

$$\frac{dy(t)}{dt} = Kx(t) \quad \text{lub} \quad T \frac{dy(t)}{dt} = x(t) \quad (4.28)$$

W przypadku kiedy wejście i wyjście są sygnałami jednoimiennymi, współczynnik K ma wymiar odwrotności stałej czasowej T .

Po wykonaniu transformacji Laplace'a równania (4.28) wyznaczamy transmitancję operatorową:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K}{s} \quad \text{lub} \quad G(s) = \frac{1}{Ts} \quad (4.29)$$

gdzie:

K – współczynnik proporcjonalności (wzmocnienia),

T – stała czasowa, stała całkowania.

Przykłady elementów całkujących przedstawiono na rysunku 4.6.

Odpowiedź skokową elementu całkującego wyznaczamy, podając na jego wejście sygnał skoku jednostkowego $x(t) = 1(t)$

$$Y(s) = G(s)X(s) = \frac{K}{s} \cdot \frac{1}{s} = \frac{K}{s^2} = \frac{1}{Ts^2} \quad (4.30)$$

stąd odpowiedź skokowa przyjmuje postać

$$y(t) = h(t) = Kt = \frac{1}{T}t \quad (4.31)$$

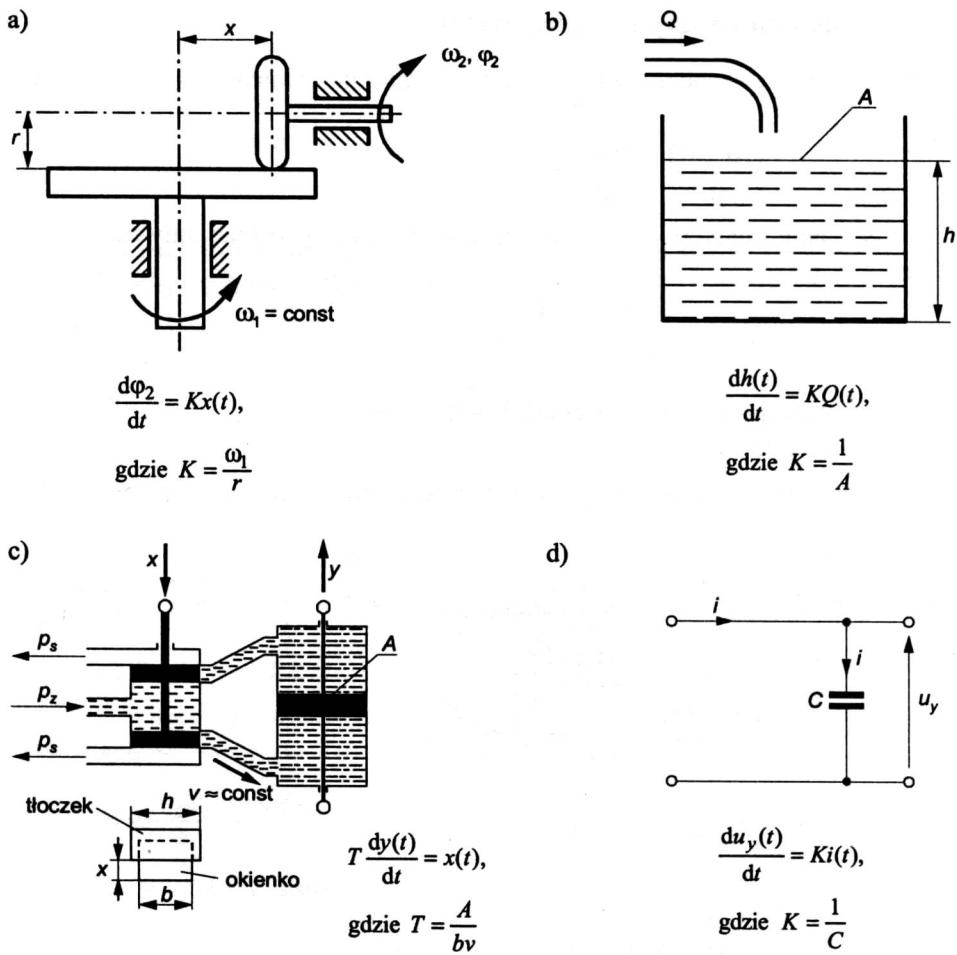
Odpowiedź impulsową elementu całkującego wyznaczamy, podając na jego wejście impuls Diraca $x(t) = \delta(t)$

$$Y(s) = G(s)X(s) = \frac{K}{s} \cdot 1 = \frac{1}{Ts} \quad (4.32)$$

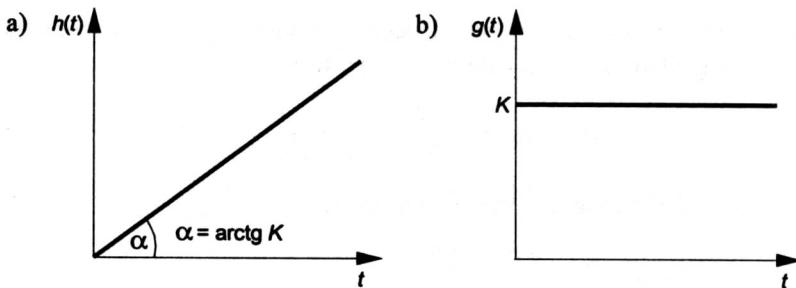
stąd odpowiedź impulsowa przyjmuje postać

$$y(t) = g(t) = K \cdot 1(t) = \frac{1}{T} \cdot 1(t) \quad (4.33)$$

Przykładowe odpowiedzi czasowe elementu całkującego przedstawia rysunek 4.7.



Rys. 4.6. Przykłady elementów całkujących: a) przekładnia cierna; b) zbiornik z cieczą; c) zespół rozdzielacz-siłownik hydrauliczny; d) idealny kondensator



Rys. 4.7. Odpowiedzi elementu całkującego: a) skokowa; b) impulsowa

4.4.4. Element całkujący rzeczywisty

Ogólna postać równania różniczkowego opisującego element całkujący jest następująca

$$T \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \frac{dy(t)}{dt} = Kx(t) \quad (4.34)$$

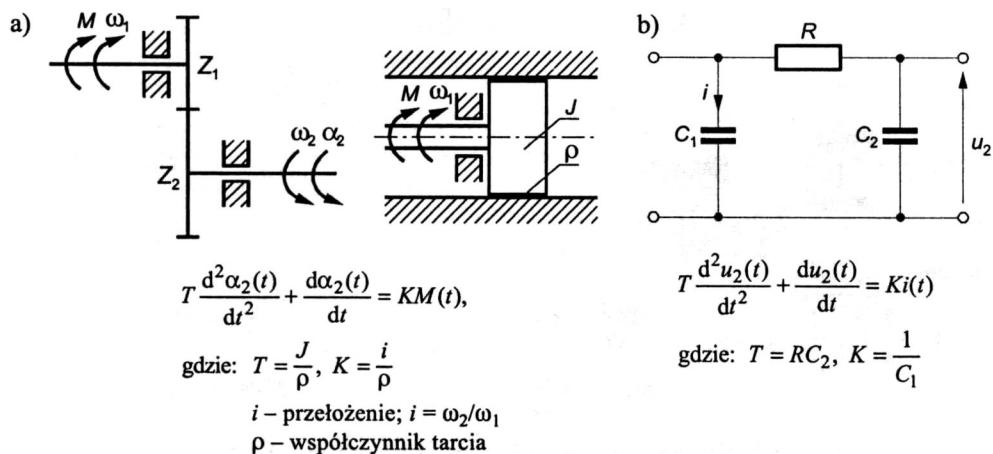
Po wykonaniu transformacji Laplace'a równania (4.34) wyznaczamy transmitancję operatorową

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K}{s(T_S + 1)} \quad (4.35)$$

gdzie:

K – współczynnik proporcjonalności (wzmocnienia),
 T – stała czasowa.

Przykłady elementów całkujących rzeczywistych przedstawiono na rysunku 4.8.



Rys. 4.8. Przykłady elementów całkujących rzeczywistych: a) przekładnia mechaniczna; b) czwórnik RC

Odpowiedź skokową elementu całkującego rzeczywistego wyznaczamy, podając na jego wejście sygnał skoku jednostkowego $x(t) = \mathbf{1}(t)$

$$Y(s) = G(s)X(s) = \frac{K}{s(Ts+1)} \cdot \frac{1}{s} = \frac{K}{s^2(Ts+1)} \quad (4.36)$$

Rozkładając (4.36) na ułamki proste, otrzymamy

$$Y(s) = \frac{K}{s^2} - \frac{KT}{s} + \frac{KT}{s + \frac{1}{T}} \quad (4.37)$$

stąd odpowiedź skokowa przyjmuje postać

$$y(t) = h(t) = Kt - KT \left(1 - e^{-\frac{t}{T}} \right) \quad (4.38)$$

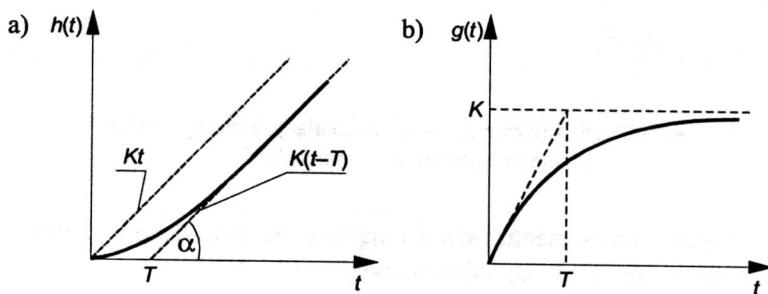
Odpowiedź impulsową elementu całkującego rzeczywistego wyznaczamy, podając na jego wejście impuls Diraca $x(t) = \delta(t)$

$$Y(s) = G(s)X(s) = \frac{K}{s(Ts + 1)} \cdot 1 \quad (4.39)$$

stąd odpowiedź impulsowa przyjmuje postać

$$y(t) = g(t) = K \left(1 - e^{-\frac{t}{T}} \right) \quad (4.40)$$

Przykładowe odpowiedzi czasowe elementu całkującego rzeczywistego przedstawia rysunek 4.9.



Rys. 4.9. Odpowiedzi elementu całkującego rzeczywistego: a) skokowa; b) impulsowa

4.4.5. Element różniczkujący rzeczywisty

Ogólna postać równania różniczkowego opisującego element różniczkujący rzeczywisty jest następująca

$$T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = K \frac{dx(t)}{dt} \quad (4.41)$$

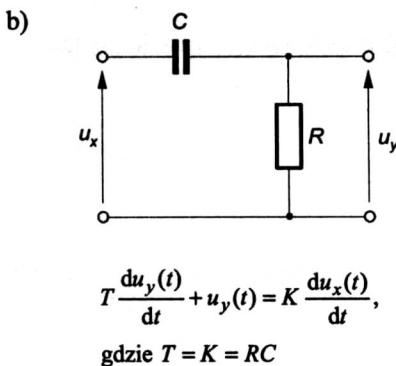
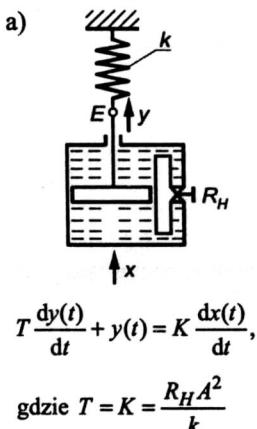
Po wykonaniu transformacji Laplace'a równania (4.41) wyznaczamy transmitancję operatorową

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{Ks}{Ts + 1} \quad (4.42)$$

gdzie:

K – współczynnik proporcjonalności (wzmocnienia),
 T – stała czasowa.

Przykłady elementów różniczkujących rzeczywistych przedstawiono na rysunku 4.10.



Rys. 4.10. Przykłady elementów różniczkujących rzeczywistych:
a) tłumik hydrauliczny; b) układ RC

Odpowiedź skokową elementu różniczkującego rzeczywistego wyznaczamy, podając na jego wejście sygnał skoku jednostkowego $x(t) = 1(t)$

$$Y(s) = G(s)X(s) = \frac{Ks}{Ts + 1} \cdot \frac{1}{s} = \frac{K}{T} \cdot \frac{1}{s + \frac{1}{T}} \quad (4.43)$$

stąd odpowiedź skokowa przyjmuje postać

$$y(t) = h(t) = \frac{K}{T} e^{-\frac{1}{T}t} \quad (4.44)$$

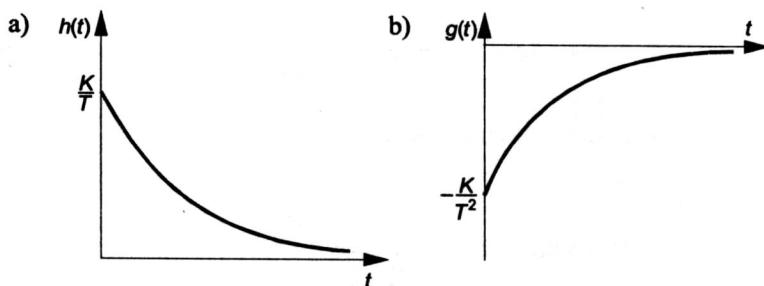
Odpowiedź impulsową elementu różniczkującego rzeczywistego wyznaczamy, różniczkując funkcję odpowiedzi skokowej (4.44) tego elementu

$$g(t) = \frac{dh(t)}{dt} \quad (4.45)$$

a zatem

$$y(t) = g(t) = -\frac{K}{T^2} e^{-\frac{1}{T}t} \quad (4.46)$$

Przykładowe odpowiedzi czasowe elementu różniczkującego rzeczywistego przedstawia rysunek 4.11



Rys. 4.11. Odpowiedzi elementu różniczkującego rzeczywistego: a) skokowa; b) impulsowa

4.4.6. Element oscylacyjny drugiego rzędu

Ogólna postać równania różniczkowego opisującego element oscylacyjny jest następująca

$$T^2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2\zeta T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = Kx(t) \quad (4.47)$$

Warunkiem powstawania drgań jest

$$4\zeta^2 T^2 - 4T^2 < 0 \quad (4.48)$$

czyli

$$-1 < \zeta < 1.$$

Gdy współczynnik tłumienia $\zeta < 0$, powstają drgania, których amplituda rośnie do nieskończoności. Do dalszych rozważań przyjmujemy, że drgania są tłumione, czyli

$$0 < \zeta < 1 \quad (4.49)$$

Po wykonaniu transformacji Laplace'a równania (4.47) wyznaczamy transmitancję operatorową

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K}{T^2 s^2 + 2\zeta T s + 1} \quad (4.50)$$

gdzie:

- K – współczynnik proporcjonalności (wzmocnienia),
- T – stała czasowa,
- ζ – współczynnik tłumienia.

Odpowiedź skokową elementu oscylacyjnego wyznaczamy, podając na jego wejściu sygnał skoku jednostkowego $x(t) = 1(t)$

$$Y(s) = G(s)X(s) = \frac{K}{T^2 s^2 + 2\zeta T s + 1} \cdot \frac{1}{s} \quad (4.51)$$

stąd odpowiedź skokowa przyjmuje postać

$$y(t) = h(t) = K \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta \frac{t}{T}} \sin \left(\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{T} t + \phi \right) \right] \quad (4.52)$$

gdzie

$$\phi = \operatorname{arc tg} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} = \operatorname{arc cos} \zeta.$$

Wartości współczynnika tłumienia ζ decydują o rodzaju drgań powstających w elemencie oscylacyjnym, dla:

$\zeta = 0$ powstają drgania nietłumione, równanie charakterystyczne transmitancji (4.50) ma dwa pierwiastki ujęte sprężone;

$0 < \zeta < 1$ powstają drgania tłumione, równanie charakterystyczne transmitancji (4.50) ma dwa pierwiastki zespolone sprężone;

$\zeta = 1$ odpowiedź jest aperiodyczna, nieoscylacyjna, równanie charakterystyczne transmitancji (4.50) ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste, a element nazywamy inercyjnym drugiego rzędu;

$\zeta > 1$ odpowiedź jest aperiodyczna, nieoscylacyjna, równanie charakterystyczne transmitancji (4.50) ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste i wtedy mamy również element inercyjny drugiego rzędu.

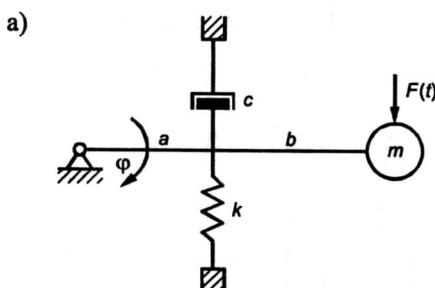
Odpowiedź impulsową elementu oscylacyjnego wyznaczamy, podając na jego wejście impuls Diraca $x(t) = \delta(t)$

$$Y(s) = G(s)X(s) = \frac{K}{T^2 s^2 + 2\zeta Ts + 1} \cdot 1 \quad (4.53)$$

stąd odpowiedź impulsowa przyjmuje postać

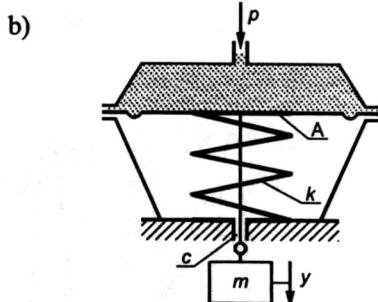
$$y(t) = g(t) = \frac{1}{T\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\frac{t}{T}} \sin t \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{T} \quad (4.54)$$

Przykłady elementów drugiego rzędu, które w zależności od rodzaju pierwiastków (urojone lub rzeczywiste) są elementami oscylacyjnymi lub inercyjnymi, przedstawiono na rysunku 4.12.



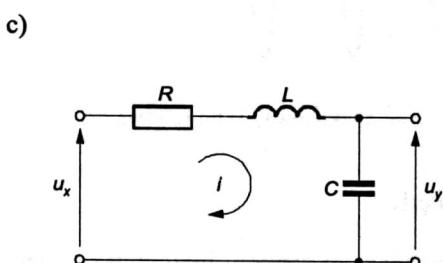
$$T^2 \frac{d^2\phi(t)}{dt^2} + T_1 \frac{d\phi(t)}{dt} + \phi(t) = K F(t),$$

$$\text{gdzie: } T^2 = \frac{m(a+b)}{ak}, \quad T_1 = \frac{c}{k}, \quad K = \frac{1}{ak}$$



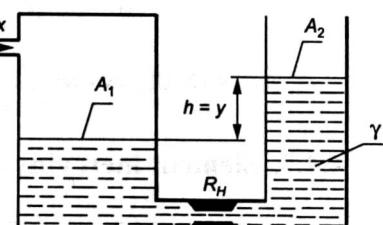
$$T^2 \frac{d^2y(t)}{dt^2} + T_1 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = K p(t),$$

$$\text{gdzie: } T^2 = \frac{m}{k}, \quad T_1 = \frac{c}{k}, \quad K = \frac{A}{k}$$



$$T^2 \frac{d^2u_y(t)}{dt^2} + T_1 \frac{du_y(t)}{dt} + u_y(t) = K u_x(t),$$

$$\text{gdzie: } T^2 = LC, \quad T_1 = RC, \quad K = 1$$

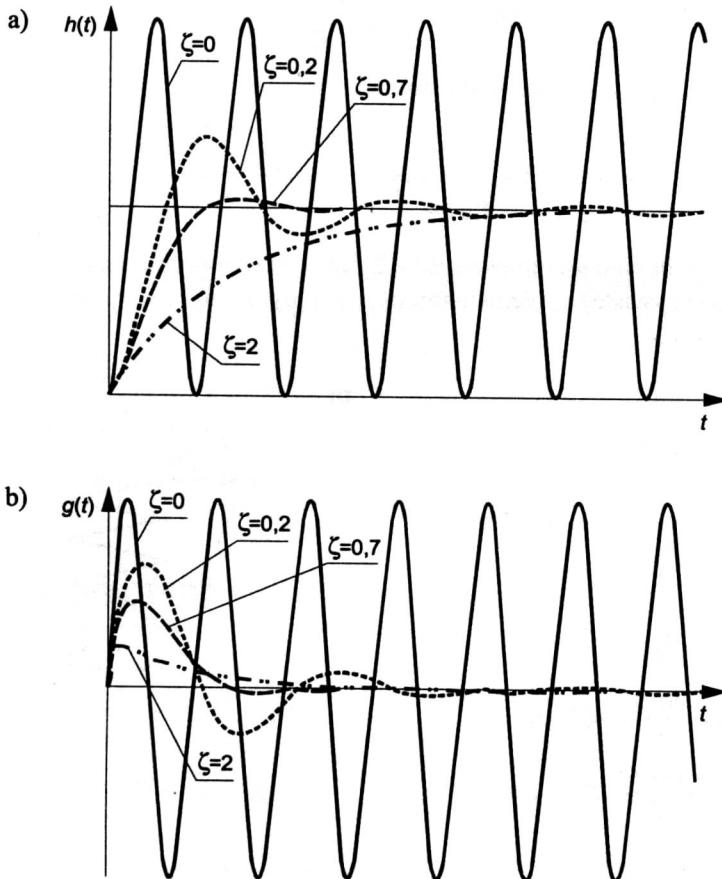


$$T^2 \frac{d^2h(t)}{dt^2} + T_1 \frac{dh(t)}{dt} + h(t) = K p(t),$$

$$\text{gdzie: } T^2 = \frac{m}{A_2\gamma}, \quad T_1 = \frac{R_H}{A_2\gamma}, \quad K = \frac{A_1}{A_2\gamma}$$

Rys. 4.12. Przykłady elementów drugiego rzędu: a) układ masa-tłumik-sprężyna; b) siłownik pneumatyczny; c) układ RLC; d) układ zbiorników z cieczą

Przykładowe odpowiedzi czasowe elementu drugiego rzędu przedstawia rysunek 4.13.



Rys. 4.13. Odpowiedzi elementu drugiego rzędu: a) skokowa; b) impulsowa

4.4.7. Element inercyjny drugiego rzędu

Ogólna postać równania różniczkowego opisującego element inercyjny drugiego rzędu jest następująca

$$T_2^2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + T_1 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = Kx(t) \quad (4.55)$$

przy czym $T_1 \geq 2T_2$.

Po wykonaniu transformacji Laplace'a równania (4.55) wyznaczamy transmitancję operatorową

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K}{T_2 s^2 + T_1 s + 1} \quad (4.56)$$

lub

$$G(s) = \frac{K}{(T_3 s + 1)(T_4 s + 1)} \quad (4.57)$$

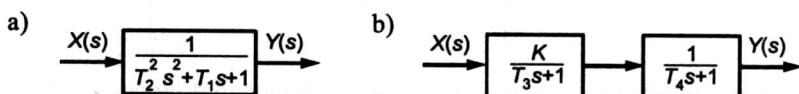
albo w wyniku rozkładu równania (4.57) na ułamki proste

$$G(s) = G_1(s) + G_2(s) = \frac{\frac{KT_3}{T_3 - T_4}}{1 + T_3 s} - \frac{\frac{KT_4}{T_3 - T_4}}{1 + T_4 s} \quad (4.58)$$

Przy założeniu: $T_1 \geq 2T_2$, stałe czasowe T_3 i T_4 wynoszą odpowiednio:

$$T_3 = \frac{T_1}{2} + \sqrt{\frac{T_1^2}{4} - T_2^2} \quad \text{oraz} \quad T_4 = \frac{T_1}{2} - \sqrt{\frac{T_1^2}{4} - T_2^2} \quad (4.59)$$

Wynika stąd, że element inercyjny drugiego rzędu można przedstawić w postaci szeregowego połączenia dwóch elementów inercyjnych pierwszego rzędu (rys. 4.14).



Rys. 4.14. Element inercyjny drugiego rzędu: a) schemat pierwotny; b) schemat równoważny

Odpowiedź impulsową elementu inercyjnego drugiego rzędu, jako sumę dwóch składowych $G_1(s) + G_2(s)$ wyliczonych w równaniu (4.58), wyznaczamy, podając na jego wejście impuls Diraca $x(t) = \delta(t)$:

$$Y(s) = Y_1(s) + Y_2(s) = G_1(s)X(s) + G_2(s)X(s) \quad (4.60)$$

$$Y(s) = (G_1(s) + G_2(s))X(s) \quad (4.61)$$

$$Y(s) = \left(\frac{\frac{KT_3}{T_3 - T_4}}{1 + T_3 s} - \frac{\frac{KT_4}{T_3 - T_4}}{1 + T_4 s} \right) \cdot 1 \quad (4.62)$$

stąd odpowiedź impulsowa przyjmuje postać:

$$y(t) = g(t) = y_1(t) + y_2(t) = \frac{K}{T_3 - T_4} e^{-\frac{t}{T_3}} - \frac{K}{T_3 - T_4} e^{-\frac{t}{T_4}} \quad (4.63)$$

$$y(t) = g(t) = \frac{K}{T_3 - T_4} \left(e^{-\frac{t}{T_3}} - e^{-\frac{t}{T_4}} \right) \quad (4.64)$$

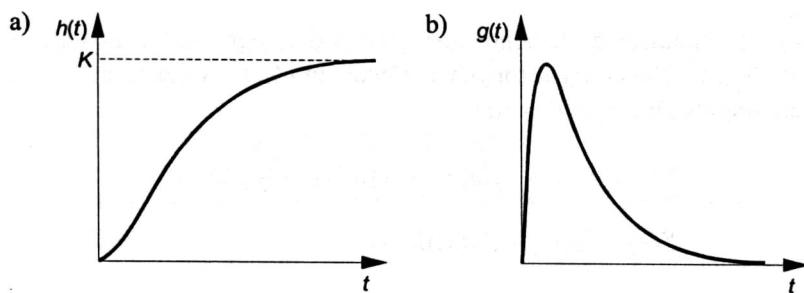
Na podstawie równania (4.11) odpowiedź skokową elementu inercyjnego drugiego rzędu możemy wyznaczyć jako

$$y(t) = h(t) = \int_0^t g(\tau) d\tau = \frac{K}{T_3 - T_4} \int_0^t \left(e^{-\frac{\tau}{T_3}} - e^{-\frac{\tau}{T_4}} \right) d\tau \quad (4.65)$$

Po scałkowaniu odpowiedź skokowa przyjmuje postać

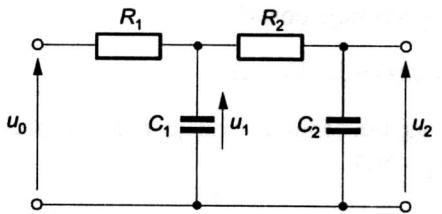
$$y(t) = h(t) = K \left[1 - \frac{1}{T_3 - T_4} \left(T_3 e^{-\frac{t}{T_3}} - T_4 e^{-\frac{t}{T_4}} \right) \right] \quad (4.66)$$

Przykładowe odpowiedzi czasowe elementu inercyjnego drugiego rzędu przedstawia rysunek 4.15.



Rys. 4.15. Odpowiedzi elementu inercyjnego drugiego rzędu: a) skokowa; b) impulsowa

Przykładem elementu inercyjnego drugiego rzędu jest podwójny czwórnik RC pokazany na rysunku 4.16.



Rys. 4.16. Przykład elementu inercyjnego drugiego rzędu

Czwórnik ten można opisać następującymi równaniami:

$$\begin{cases} C_1 \frac{du_1(t)}{dt} = \frac{u_0(t) - u_1(t)}{R_1} - \frac{u_1(t) - u_2(t)}{R_2} \\ C_2 \frac{du_2(t)}{dt} = \frac{u_1(t) - u_2(t)}{R_2} \end{cases} \quad (4.67)$$

Po przekształceniach otrzymamy

$$T_1 T_2 \frac{d^2 u_2(t)}{dt^2} + (T_1 T_2 + T_{12}) \frac{du_2(t)}{dt} + u_2(t) = u_0(t) \quad (4.68)$$

gdzie: $T_1 = R_1 C_1$, $T_2 = R_2 C_2$, $T_{12} = R_1 C_2$.

4.4.8. Element opóźniający

Ogólna postać równania opisującego element opóźniający jest następująca

$$y(t) = Kx(t - \tau) \quad (4.69)$$

Po wykonaniu transformacji Laplace'a równanie (4.69) wyznaczamy transmitancję operatorową

$$G(s) = Ke^{-\tau s} \quad (4.70)$$

Odpowiedź skokową elementu opóźniającego wyznaczamy, podając na jego wejście sygnał skoku jednostkowego $x(t) = 1(t)$

$$Y(s) = G(s)X(s) = Ke^{-\tau s} \frac{1}{s} \quad (4.71)$$

stąd odpowiedź skokowa przyjmuje postać

$$y(t) = h(t) = K \cdot 1(t - \tau) \quad (4.72)$$

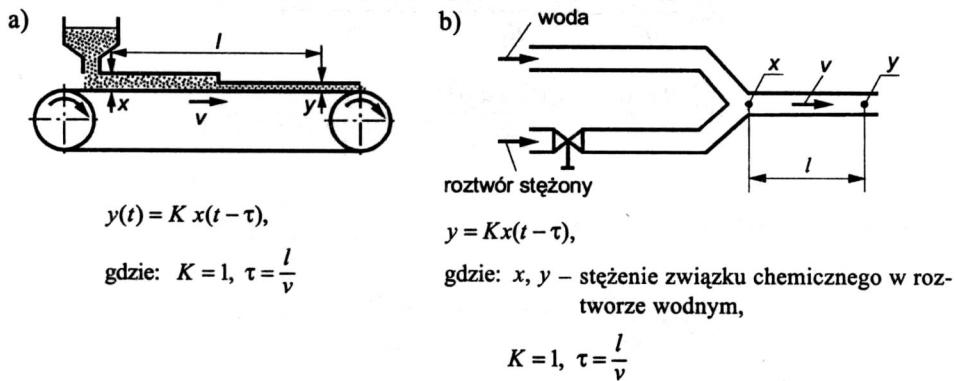
Odpowiedź impulsową elementu opóźniającego wyznaczamy, podając na jego wejście impuls Diraca $x(t) = \delta(t)$

$$Y(s) = G(s)X(s) = Ke^{-\tau s} \cdot 1 \quad (4.73)$$

stąd odpowiedź impulsowa przyjmuje postać

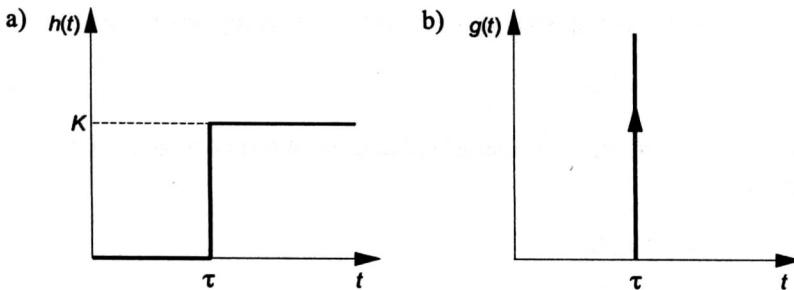
$$y(t) = g(t) = K\delta(t - \tau) \quad (4.74)$$

Przykłady elementów opóźniających przedstawiono na rysunku 4.17.



Rys. 4.17. Przykłady elementów opóźniających: a) transporter; b) odcinek rurociągu

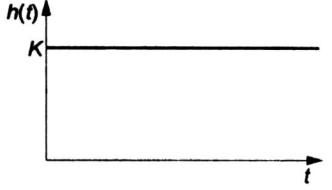
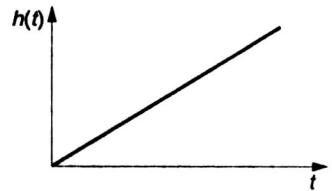
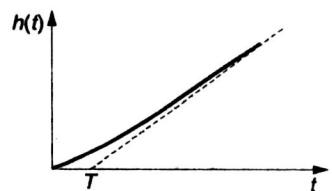
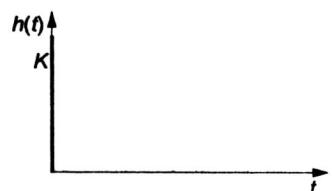
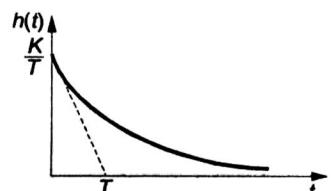
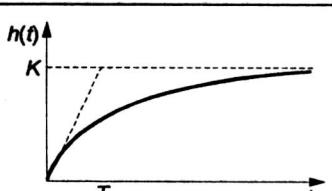
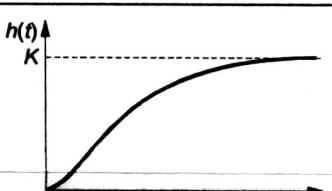
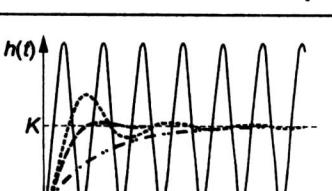
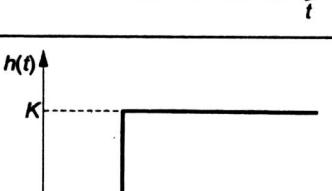
Przykładowe odpowiedzi czasowe elementu opóźniającego przedstawia rysunek 4.18.



Rys. 4.18. Odpowiedzi elementu opóźniającego: a) skokowa; b) impulsowa

W tabeli 4.1 (na wklejce) przedstawiono zestawienie podstawowych elementów automatyki.

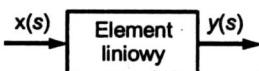
Tabela 4.1
Zestawienie podstawowych elementów automatyki

| Nazwa elementu | Równanie | Transmitancja operatorowa | Charakterystyka skokowa |
|------------------------------|---|--|--|
| proporcjonalny | $y(t) = Kx(t)$ | $G(s) = K$ |  |
| całkujący idealny | $T \frac{dy(t)}{dt} = x(t)$ | $G(s) = \frac{1}{Ts}$ |  |
| całkujący rzeczywisty | $T \frac{d^2y(t)}{dt^2} + \frac{dy(t)}{dt} Kx(t)$ | $G(s) = \frac{K}{s(Ts + 1)}$ |  |
| różniczający idealny | $y(t) = K \frac{dx(t)}{dt}$ | $G(s) = Ks$ |  |
| różniczujący rzeczywisty | $T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = K \frac{dx(t)}{dt}$ | $G(s) = \frac{Ks}{Ts + 1}$ |  |
| inerencyjny pierwszego rzędu | $T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = Kx(t)$ | $G(s) = \frac{K}{Ts + 1}$ |  |
| inerencyjny drugiego rzędu | $T_2^2 \frac{d^2y(t)}{dt^2} + T_1 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = Kx(t)$ | $G(s) = \frac{K}{(T_3s + 1)(T_4s + 1)}$ |  |
| oscylacyjny drugiego rzędu | $T^2 \frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2\zeta T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = Kx(t)$ | $G(s) = \frac{K}{T^2 s^2 + 2\zeta Ts + 1}$ |  |
| opóźniający | $y(t) = Kx(t - \tau)$ | $G(s) = Ke^{-\tau s}$ |  |

5. Charakterystyki częstotliwościowe

5.1. Wprowadzenie

W dotychczasowych rozważaniach elementy liniowe układów automatyki charakteryzowane były między innymi przez odpowiedzi na sygnał skokowy. Poniższe zagadnienia będą dotyczyć tylko elementu liniowego (rys. 5.1), na którego wejście podano sygnał harmoniczny. Sygnał ten jest istotny nie tylko ze względu na dość częste występowanie w różnych układach, lecz także z powodu możliwości rozkładu innych sygnałów o charakterze okresowym na szereg Fouriera złożony z funkcji harmonicznych.



Rys. 5.1. Ogólny symbol graficzny elementu liniowego

Korzystając z twierdzenia Eulera dla liczb zespolonych

$$e^{j\varphi} = \cos \varphi + j \sin \varphi \quad (5.1)$$

sygnał harmoniczny w postaci zespolonej można zapisać jako

$$x(t) = A_1(\omega)(\cos \omega t + j \sin \omega t) = A_1(\omega)e^{j\omega t} \quad (5.2)$$

gdzie:

A_1 – amplituda sygnału,

$\omega = \frac{2\pi}{T}$ – pulsacja sygnału (T – okres drgań).

Przy takim sygnale wejściowym, odpowiedź $y(t)$ elementu ma również charakter harmoniczny, o takiej samej pulsacji ω co sygnał wejściowy, lecz innej amplitudzie i jest przesunięta w fazie względem $x(t)$ o kąt φ

$$y(t) = A_2(\omega)[\cos(\omega t + \varphi(\omega)) + j \sin(\omega t + \varphi(\omega))] = A_2(\omega)e^{j(\omega t + \varphi(\omega))} \quad (5.3)$$

Podstawiając równania (5.2) i (5.3) do równania różniczkowego opisującego związek między wielkością wyjściową $y(t)$ i wielkością wejściową $x(t)$ dla układu liniowego, ciągłego

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_0 x(t) \quad (5.4)$$

można wyznaczyć stosunek amplitud sygnałów wyjściowego i wejściowego $M(\omega) = A_2(\omega)/A_1(\omega)$ oraz przesunięcie fazowe $\varphi(\omega)$ między nimi.

Mamy więc

$$\begin{aligned} a_n (j\omega)^n A_2(\omega) e^{j(\omega t + \varphi(\omega))} + a_{n-1} (j\omega)^{n-1} A_2(\omega) e^{j(\omega t + \varphi(\omega))} + \dots + a_0 A_2(\omega) e^{j(\omega t + \varphi(\omega))} = \\ = b_m (j\omega)^m A_1(\omega) e^{j\omega t} + b_{m-1} (j\omega)^{m-1} A_1(\omega) e^{j\omega t} + \dots + b_0 A_1(\omega) e^{j\omega t} \end{aligned} \quad (5.5)$$

Po przekształceniach otrzymujemy

$$\begin{aligned} A_2(\omega) e^{j(\omega t + \varphi)} \left[a_n (j\omega)^n + a_{n-1} (j\omega)^{n-1} + \dots + a_0 \right] = \\ = A_1(\omega) e^{j\omega t} \left[b_m (j\omega)^m + b_{m-1} (j\omega)^{m-1} + \dots + b_0 \right] \end{aligned}$$

i stąd

$$\frac{b_m (j\omega)^m + b_{m-1} (j\omega)^{m-1} + \dots + b_0}{a_n (j\omega)^n + a_{n-1} (j\omega)^{n-1} + \dots + a_0} = \frac{A_2(\omega)}{A_1(\omega)} e^{j\varphi(\omega)} = G(j\omega) \quad (5.6)$$

Wielkość $G(j\omega)$ nazywana jest **transmitancją widmową**.

Pojęcie transmitancji widmowej związane jest z przekształceniem Fouriera, które przyporządkowuje funkcji czasu $f(t)$ funkcję pulsacji $G(j\omega)$ wg zależności

$$G(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (5.7)$$

zwaną całką Fouriera. Analogicznie, jak w przypadku przekształcenia Laplace'a, dla $f(t)$ rozpoczynających się przy $t = 0$, dolna granica jest zerem.

Poddając obie strony równania (5.4) przekształceniu Fouriera przy zerowych warunkach początkowych i wyznaczając stosunek transformaty Fouriera sygnału wyjściowego do transformaty Fouriera sygnału wejściowego, otrzymuje się transmitancję widmową elementu automatyki.

Jak widać ze wzoru (5.6), transmitancję widmową wyznaczyć można także na podstawie transmitancji operatorowej, stosując podstawienie

$$G(j\omega) = G(s) \Big|_{s=j\omega} \quad (5.8)$$

Z zależności (5.6) wynika, że transmitancja widmowa jest wektorem, którego moduł $M(\omega)$ dla każdej pulsacji ω jest stosunkiem amplitudy sygnału wyjściowego do amplitudy sygnału wejściowego

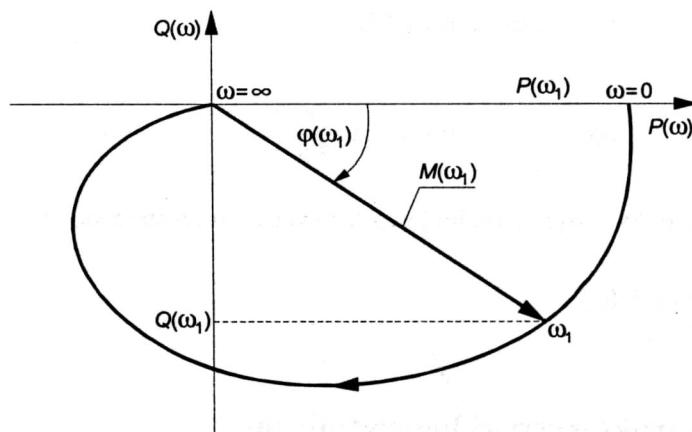
$$|G(j\omega)| = M(\omega) = \frac{A_2(\omega)}{A_1(\omega)} \quad (5.9)$$

a argumentem $\phi(\omega)$ jest przesunięcie fazowe sygnału wyjściowego względem sygnału wejściowego

$$\arg G(j\omega) = \phi(\omega) \quad (5.10)$$

5.2. Charakterystyka amplitudowo-fazowa

Graficznym obrazem transmitancji widmowej jest charakterystyka amplitudowo-fazowa, której przykładowy przebieg pokazano na rysunku 5.2.



Rys. 5.2. Przykładowy przebieg charakterystyki amplitudowo-fazowej

Transmitancja widmowa dla każdej wartości pulsacji, np. $\omega = \omega_1$, jest liczbą zespoloną, a więc wyznacza na płaszczyźnie $P(\omega), jQ(\omega)$ punkt o współrzędnych $P(\omega_1), Q(\omega_1)$. Punkt ten jest końcem wektora $G(j\omega_1)$ o długości $M(\omega_1)$ i kącie nachylenia $\phi(\omega_1)$. Charakterystyka amplitudowo-fazowa jest więc miejscem geometrycznym punktów, jakie zakreśla koniec wektora $G(j\omega)$ na płaszczyźnie zmiennej zespolonej przy zmianie pulsacji sygnału wejściowego od 0 do ∞ .

Charakterystyki amplitudowo-fazowe układów rzeczywistych, dla których stopień wielomianu licznika transmitancji jest niższy od stopnia wielomianu mianownika, dążą do początku układu współrzędnych

$$G(j\omega) \rightarrow 0, \quad \text{gdy} \quad \omega \rightarrow \infty \quad (5.11)$$

Korzystając z równania (5.1) i (5.9), transmitancję widmową (5.6) można zapisać w następujących postaciach:

$$G(j\omega) = M(\omega)e^{j\varphi(\omega)} \quad (5.12)$$

$$G(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega) \quad (5.13)$$

gdzie:

$$P(\omega) = \operatorname{Re} G(j\omega) = M(\omega) \cos \varphi(\omega) \quad (5.14)$$

$$Q(\omega) = \operatorname{Im} G(j\omega) = M(\omega) \sin \varphi(\omega) \quad (5.15)$$

Ponadto na podstawie rysunku 5.2 można napisać:

$$M(\omega) = |G(j\omega)| = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)} \quad (5.16)$$

oraz

$$\varphi(\omega) = \arg G(j\omega) = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{Q(\omega)}{P(\omega)} \quad (5.17)$$

Oprócz charakterystyki amplitudowo-fazowej wykorzystuje się także charakterystyki:

- amplitudową $M(\omega)$,
- fazową $\varphi(\omega)$.

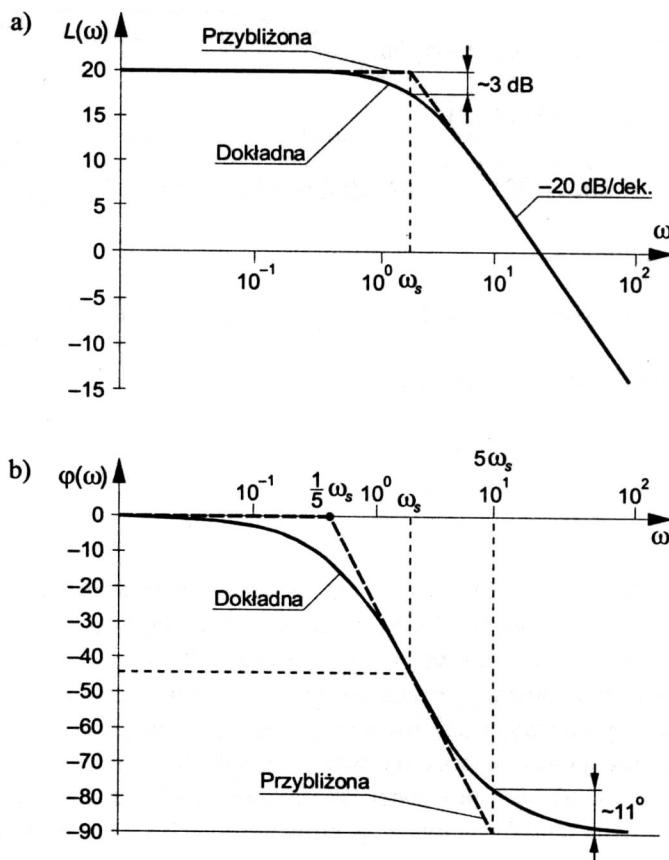
5.3. Charakterystyki logarytmiczne

Duże znaczenie praktyczne mają charakterystyki amplitudowa i fazowa, wykreślone w układach współrzędnych, w których oś odciętych wyrażona jest w skali logarytmicznej, zwane **charakterystykami logarytmicznymi**. Logarytmiczna charakterystyka amplitudowa $L(\omega)$ przedstawia wykres zależności między logarytmem dziesiętnym modułu transmitancji widmowej $M(\omega)$ i pulsacją ω . Przyjęto podawać logarytm z modułu transmitancji widmowej $M(\omega)$ w dB. Wtedy

$$L(\omega) = 20 \lg |G(j\omega)| = 20 \lg M(\omega) \quad (5.18)$$

Sporządzając logarytmiczną charakterystykę amplitudową, odkłada się więc na osi rzędnych nie wartości logarytmu modułu, ale wartości 20-krotnie większe, gdyż jest to wygodniejsze do obliczeń. Logarytmiczna charakterystyka fazowa przedstawia natomiast wykres zależności argumentu $\phi(\omega)$ od pulsacji ω . Logarytmiczną charakterystykę fazową przyjęto rysować pod logarytmiczną charakterystyką amplitudową, przy zachowaniu tej samej skali logarytmicznej dla osi odciętych.

Przykładowy przebieg tych charakterystyk, zwanych charakterystykami Bodego, pokazano na rysunku 5.3.



Rys. 5.3. Przykładowe przebiegi charakterystyk logarytmicznych: a) amplitudowa; b) fazowa

Duże znaczenie praktyczne charakterystyk logarytmicznych wynika z łatwości określania charakterystyki wypadkowej układu, złożonego ze znanych elementów liniowych połączonych szeregowo. Wypadkowa transmitancja widmowa $G(j\omega)$ takiego układu jest równa iloczynowi transmitancji elementów składowych.

Założymy, że:

$$G_1(j\omega) = M_1(\omega)e^{j\varphi_1(\omega)} \quad \text{oraz} \quad G_2(j\omega) = M_2(\omega)e^{j\varphi_2(\omega)},$$

wtedy

$$G(j\omega) = G_1(j\omega)G_2(j\omega) = M_1(\omega)M_2(\omega)e^{j[\varphi_1(\omega)+\varphi_2(\omega)]},$$

stąd:

$$M(\omega) = M_1(\omega)M_2(\omega),$$

$$\varphi(\omega) = \varphi_1(\omega) + \varphi_2(\omega).$$

Na podstawie równania (5.18)

$$L(\omega) = 20\lg M_1(\omega)M_2(\omega) = 20\lg M_1(\omega) + 20\lg M_2(\omega).$$

Oznaczając:

$$L_1(\omega) = 20\lg M_1(\omega) \quad \text{oraz} \quad L_2(\omega) = 20\lg M_2(\omega),$$

równania charakterystyk logarytmicznych układu można zapisać jako:

$$L(\omega) = L_1(\omega) + L_2(\omega) \tag{5.19}$$

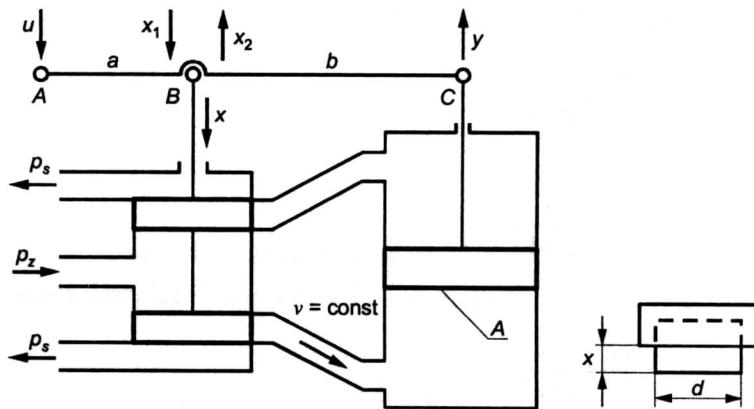
$$\varphi(\omega) = \varphi_1(\omega) + \varphi_2(\omega) \tag{5.20}$$

Ze wzorów (5.19) i (5.20) wynika, że zarówno logarytmiczna charakterystyka amplitudowa, jak i fazowa są algebraiczną sumą charakterystyk elementów składowych. Wprowadzenie charakterystyk logarytmicznych umożliwia więc zastąpienie mnożenia łatwiejszą operacją matematyczną – sumowaniem. Zaletą stosowania charakterystyk logarytmicznych jest również to, że dla większości elementów liniowych można je zastępować charakterystykami przybliżonymi (asymptotycznymi), składającymi się z odcinków linii prostej. W dalszej części rozdziału przedstawiono przykłady wyznaczania charakterystyk częstotliwościowych kilku podstawowych elementów automatyki.

Przykład 5.1

Sporządzić charakterystyki częstotliwościowe (amplitudowo-fazową, logarytmiczne: amplitudową i fazową) układu automatyki, którego schemat przedstawiono na rysunku 5.4.

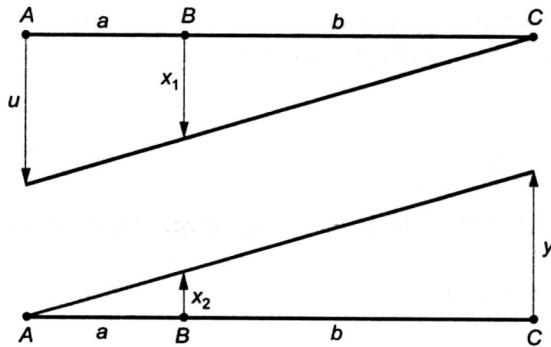
Sygnałem wejściowym jest przesunięcie u końca dźwigni, czyli punktu A , natomiast sygnałem wyjściowym przesunięcie y końca tłoczyska siłownika, czyli punktu C .



Rys. 5.4. Schemat serwomechanizmu hydraulicznego, d , x – wymiary okienka, v – prędkość przepływu oleju w okienku, A – powierzchnia tłoka siłownika, $p_z = \text{const}$, $p_s = \text{const}$

Opis matematyczny

Wykorzystując zasadę superpozycji działanie dźwigni można przedstawić jako złożenie przesunięć składowych (rys. 5.5).



Rys. 5.5. Działanie dźwigni dwustronnej

Wypadkowe przesunięcie punktu B dźwigni można zapisać jako

$$x = x_1 - x_2 \quad (5.21)$$

gdzie:

- x_1 – przesunięcie dźwigni przy obrocie wokół punktu C ,
- x_2 – przesunięcie dźwigni przy obrocie wokół punktu A .

Dla małych kątów wychyleń dźwigni

$$\frac{x_1}{b} = \frac{u}{a+b}$$

stąd

$$x_1 = \frac{b}{a+b} u \quad (5.22)$$

oraz

$$\frac{x_2}{a} = \frac{y}{a+b}$$

stąd

$$x_2 = \frac{a}{a+b} y \quad (5.23)$$

Podstawiając powyższe równania do równania (5.21), otrzymujemy

$$x = \frac{b}{a+b} u - \frac{a}{a+b} y \quad (5.24)$$

Z zasady zachowania ciągłości strugi dla przepływu cieczy do komory siłownika wynika, że zmiana objętości oleju pod tłem siłownika wynosi

$$A \frac{dy}{dt} = Q \quad (5.25)$$

Objętościowe natężenie przepływu Q oleju przez suwak można wyrazić jako

$$Q = dxv \quad (5.26)$$

gdzie:

dx – powierzchnia przepływu oleju,
 v – prędkość przepływu.

Porównując wzory (5.25) i (5.26), otrzymujemy:

$$A \frac{dy}{dt} = dxv \quad (5.27)$$

$$\frac{A}{dv} \frac{dy}{dt} = x$$

Oznaczając $T_1 = \frac{A}{d\nu}$, otrzymujemy:

$$T_1 \frac{dy}{dt} = x \quad (5.28)$$

Wyznaczenie transmitancji operatorowej

Stosując przekształcenie Laplace'a do równań (5.24) i (5.28), otrzymujemy:

$$X(s) = \frac{b}{a+b} U(s) - \frac{a}{a+b} Y(s) \quad (5.29)$$

$$T_1 s Y(s) = X(s) \quad (5.30)$$

Po podstawieniu (5.30) do (5.29) otrzymamy

$$\left(T_1 s + \frac{a}{a+b} \right) Y(s) = \frac{b}{a+b} U(s)$$

stąd

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\frac{b}{a+b}}{T_1 s + \frac{a}{a+b}} = \frac{\frac{b}{a}}{T_1 \frac{a+b}{a} s + 1} = \frac{K}{Ts + 1} \quad (5.31)$$

gdzie:

$$K = \frac{b}{a},$$

$$T = T_1 \frac{a+b}{a}.$$

Wyznaczanie transmitancji widmowej

Podstawiając do równania (5.31) $s = j\omega$, otrzymujemy

$$G(j\omega) = \frac{K}{1 + jT\omega} \quad (5.32)$$

Część rzeczywistą i urojoną transmitancji widmowej można obliczyć, mnożąc licznik i mianownik zależności (5.32) przez liczbę sprzężoną z mianownikiem

$$G(j\omega) = \frac{K}{1+jT\omega} \cdot \frac{1-jT\omega}{1-jT\omega} = \frac{K(1-jT\omega)}{1+T^2\omega^2} = \frac{K}{1+T^2\omega^2} - j \frac{KT\omega}{1+T^2\omega^2} \quad (5.33)$$

gdzie:

$$\operatorname{Re} G(j\omega) = P(\omega) = \frac{K}{1+T^2\omega^2} \quad (5.34)$$

$$\operatorname{Im} G(j\omega) = Q(\omega) = \frac{-KT\omega}{1+T^2\omega^2} \quad (5.35)$$

Wyznaczanie charakterystyki amplitudowo-fazowej

Z równań (5.34) i (5.35) wynika równanie charakterystyki amplitudowo-fazowej

$$Q^2(\omega) + P^2(\omega) - KP(\omega) = 0 \quad (5.36)$$

Po uzupełnieniu znoszącymi się wyrażeniami otrzymamy:

$$Q^2(\omega) + P^2(\omega) - KP(\omega) + \frac{K^2}{4} - \frac{K^2}{4} = 0$$

$$Q^2(\omega) + \left[P(\omega) - \frac{K}{2} \right]^2 = \frac{K^2}{4} \quad (5.37)$$

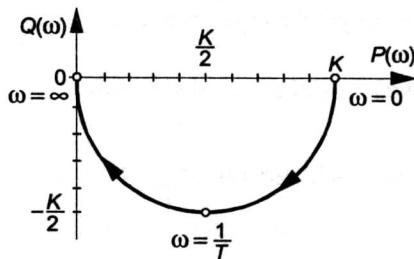
Jest to równanie okręgu o promieniu $\frac{K}{2}$, o środku leżącym w punkcie $\left(\frac{K}{2}, j0\right)$.

Ze wzoru (5.35) wynika, że część urojona $Q(\omega)$ transmitancji widmowej $G(j\omega)$ jest ujemna dla $\omega > 0$. Charakterystyka amplitudowo-fazowa omawianego układu jest więc półokresem leżącym poniżej osi odciętych. Można również wyznaczyć wartości $P(\omega)$ i $Q(\omega)$ ze wzorów (5.34) i (5.35), dla różnych wartości ω z przedziału $(0, +\infty)$, i zestawić dane w tabeli 5.1.

Tabela 5.1

| | | | |
|-------------|-----|----------------|----------|
| ω | 0 | $\frac{1}{T}$ | ∞ |
| $P(\omega)$ | K | $\frac{K}{2}$ | 0 |
| $Q(\omega)$ | 0 | $-\frac{K}{2}$ | 0 |

Charakterystykę amplitudowo-fazową omawianego układu pokazano na rysunku 5.6.



Rys. 5.6. Charakterystyka amplitudowo-fazowa układu

Wyznaczenie logarytmicznej charakterystyki amplitudowej

Wykorzystując wykładniczy zapis liczb zespolonych i równanie (5.12), transmitemcjię widmową omawianego układu można zapisać jako

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= \frac{K}{1+jT\omega} = \frac{Ke^{j0}}{\sqrt{1+T^2\omega^2} e^{j\arctan T\omega}} = \\ &= \frac{K}{\sqrt{1+T^2\omega^2}} e^{-j\arctan T\omega} = M(\omega)e^{j\varphi(\omega)} \end{aligned} \quad (5.38)$$

Równanie charakterystyki amplitudowej można więc zapisać w postaci

$$M(\omega) = \frac{K}{\sqrt{1+T^2\omega^2}} \quad (5.39)$$

Równanie to można także wyznaczyć ze wzoru (5.16):

$$\begin{aligned} M(\omega) &= |G(j\omega)| = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)} = \sqrt{\frac{K^2}{(1+T^2\omega^2)^2} + \frac{K^2T^2\omega^2}{(1+T^2\omega^2)^2}}, \\ M(\omega) &= \sqrt{\frac{K^2(1+T^2\omega^2)}{(1+T^2\omega^2)^2}} = \frac{K}{\sqrt{1+T^2\omega^2}}. \end{aligned}$$

Chcąc wyrazić moduł w decybelach, korzystamy z równania (5.18):

$$\begin{aligned} L(\omega) &= 20 \lg M(\omega) = 20 \lg \frac{K}{\sqrt{1+T^2\omega^2}} \\ L(\omega) &= 20 \lg K - 20 \lg \sqrt{1+T^2\omega^2} \end{aligned} \quad (5.40)$$

Ponieważ wykreślenie charakterystyki według wzoru (5.40) jest pracochłonne, można użyć charakterystyk asymptotycznych, które są przybliżeniem charakterystyki rzeczywistych. Są to charakterystyki logarytmiczne aproksymowane odcinkami linii prostych.

Cały zakres częstotliwości dzielimy na dwie części:

$$\text{dla } T^2\omega^2 \ll 1, \text{ czyli } \omega \ll \frac{1}{T} \quad (5.41)$$

$$\text{dla } T^2\omega^2 \gg 1, \text{ czyli } \omega \gg \frac{1}{T} \quad (5.42)$$

Częstotliwość graniczna $\omega_s = \frac{1}{T}$ nazywana jest częstotliwością sprzęgającą.

Dla pierwszego zakresu częstotliwości, wykorzystując założenie (5.41), można w równaniu (5.40) pominać jego drugi składnik, stąd:

$$\text{dla } \omega \ll \frac{1}{T} \quad L(\omega) = 20 \lg K \quad (5.43)$$

Dla drugiego zakresu częstotliwości, wykorzystując założenie (5.42), można w równaniu (5.40) pominać jedynkę pod pierwiastkiem, stąd:

$$\text{dla } \omega \gg \frac{1}{T} \quad L(\omega) = 20 \lg K - 20 \lg T\omega = 20 \lg \frac{K}{T\omega} \quad (5.44)$$

Oś odciętych logarytmicznej charakterystyki amplitudowej ma podziałkę logarytmiczną, dlatego równaniom (5.43) i (5.44) odpowiadają na wykresie odcinki linii prostej. Wstawiając do równania (5.44) dwie dowolne wartości ω , wyznaczamy nachylenie tego odcinka charakterystyki względem osi odciętych.

Przykładowo dla $\omega_s = \frac{1}{T}$ mamy:

$$L(\omega_s) = 20 \lg \frac{KT}{T} = 20 \lg K,$$

$$L(10\omega_s) = 20 \lg \frac{KT}{10T} = 20 \lg K - 20 \lg 10 = 20 \lg K - 20,$$

$$L(10\omega_s) - L(\omega_s) = -20 \text{ dB.}$$

Prosta o równaniu (5.44) przecina oś odciętych przy pulsacji ω , dla której $L(\omega) = 0$, czyli

$$20 \lg \frac{K}{T\omega} = 0 \Rightarrow \frac{K}{T\omega} = 1 \Rightarrow \omega = \frac{K}{T} \quad (5.45)$$

Charakterystyka określona równaniem (5.44) przecina więc oś odciętych przy pulsacji $\omega = \frac{K}{T}$ i obniża się o 20 dB na dekadę (występuje dziesięciokrotny wzrost pulsacji).

Wykres logarytmicznej charakterystyki amplitudowej przedstawiono na rysunku 5.7a.

Wyznaczenie logarytmicznej charakterystyki fazowej

Na podstawie równań (5.12) i (5.38) można napisać, że

$$\varphi(\omega) = -\text{arc tg } T\omega \quad (5.46)$$

Równanie to można także wyznaczyć ze wzoru (5.17)

$$\varphi(\omega) = \text{arc tg } \frac{Q(\omega)}{P(\omega)} = \text{arc tg } \frac{-\frac{KT\omega}{1+T^2\omega^2}}{\frac{K}{1+T^2\omega^2}} = -\text{arc tg } T\omega \quad (5.47)$$

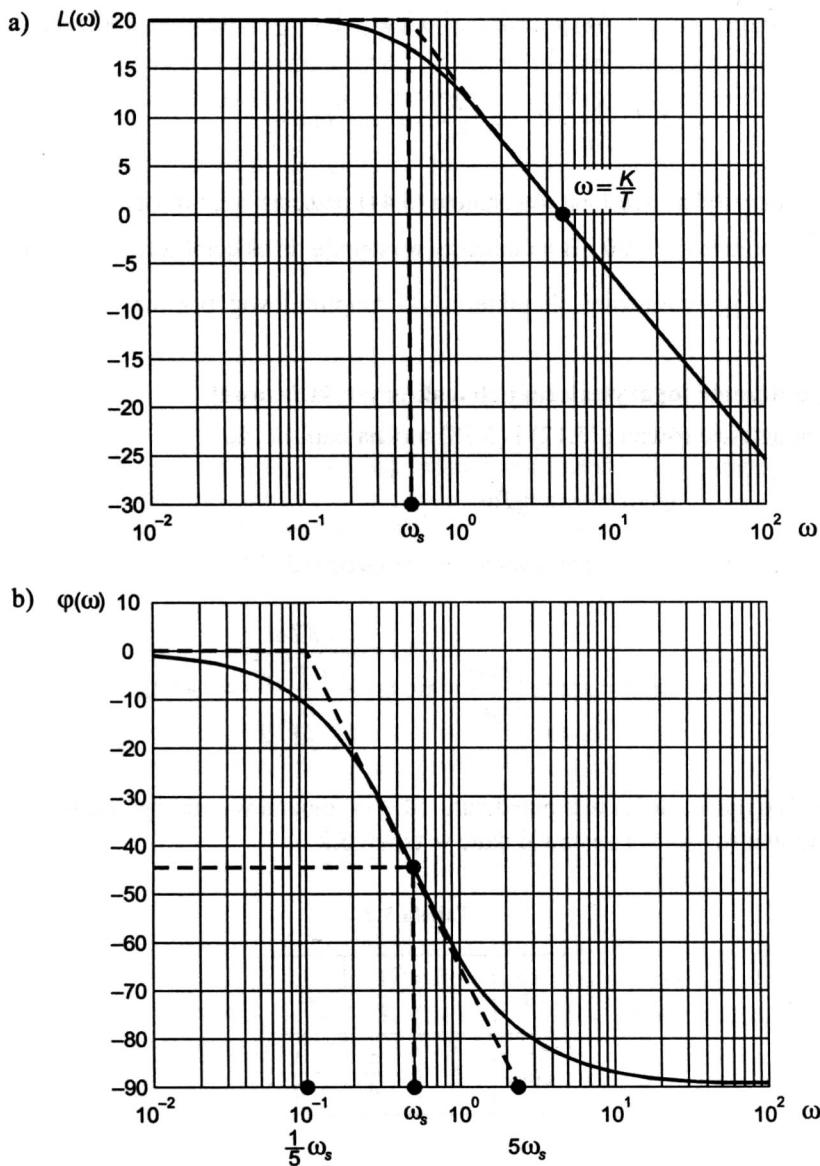
Dla różnych wartości ω z przedziału $(0, +\infty)$ można wyznaczyć wartość $\varphi(\omega)$ na podstawie wzoru (5.46) i zestawić dane w tabeli 5.2.

Tabela 5.2

| ω | 0 | $\frac{1}{T}$ | ∞ |
|-------------------|---|------------------|------------------|
| $\varphi(\omega)$ | 0 | $-\frac{\pi}{4}$ | $-\frac{\pi}{2}$ |

Przybliżoną logarytmiczną charakterystykę fazową można wyznaczyć, stosując aproksymację trzyodcinkową. Na podstawie częstotliwości sprzągającej ω_s wyznaczamy dwie częstotliwości pomocnicze $\omega_1 = 1/5 \omega_s$ i $\omega_2 = 5\omega_s$. Na lewo od ω_1 rysujemy odcinek aproksymujący, pokrywający się z osią odciętych. Między ω_1 i ω_2 rysujemy drugi odcinek aproksymujący, opadający w dół o wartość 90° , styczny do charakterystyki dokładnej w punkcie przegięcia. Na prawo od ω_2 rysujemy trzeci odcinek aproksymujący, który pokrywa się z kątem fazowym $\varphi(\omega) = -90^\circ$.

Wykres logarytmicznej charakterystyki fazowej przedstawiono na rysunku 5.7b.



Rys. 5.7. Charakterystyki logarytmiczne układu: a) amplitudowa; b) fazowa

Przykład 5.2

Wyznaczyć charakterystyki częstotliwościowe (amplitudowo-fazową, logarytmiczne: amplitudową i fazową) elementu o transmitancji:

$$G(s) = \frac{T_1 s}{1 + T_2 s}, \text{ gdzie } T_1 = 2 \text{ s, } T_2 = 1 \text{ s} \quad (5.48)$$

Transmitancja widmowa

Podstawiając do równania (5.48) $s = j\omega$, otrzymujemy

$$G(j\omega) = \frac{j2\omega}{1 + j\omega} \quad (5.49)$$

Część rzeczywistą i urojoną transmitancji widmowej można obliczyć, mnożąc licznik i mianownik zależności (5.49) przez liczbę sprzężoną z mianownikiem

$$G(j\omega) = \frac{j2\omega}{1 + j\omega} \cdot \frac{1 - j\omega}{1 - j\omega} = \frac{j2\omega + 2\omega^2}{1 + \omega^2} = \frac{2\omega^2}{1 + \omega^2} + j \frac{2\omega}{1 + \omega^2} \quad (5.50)$$

Charakterystyka amplitudowo-fazowa

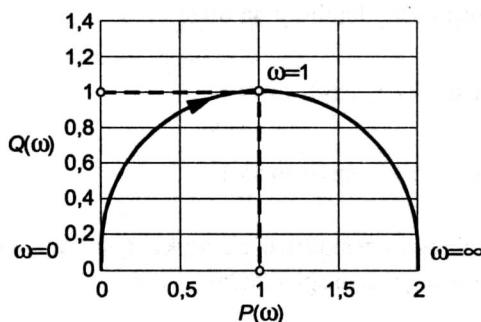
$$P(\omega) = \frac{2\omega^2}{1 + \omega^2}, \quad Q(\omega) = \frac{2\omega}{1 + \omega^2} \quad (5.51)$$

Wyznaczamy wartości $P(\omega)$ i $Q(\omega)$ z równania (5.51), dla różnych wartości ω z przedziału $(0, +\infty)$ i zestawiamy dane w tabeli 5.3.

Tabela 5.3

| ω | 0 | 1 | 2 | ∞ |
|-------------|---|---|-----|----------|
| $P(\omega)$ | 0 | 1 | 1,6 | 2 |
| $Q(\omega)$ | 0 | 1 | 0,8 | 0 |

Charakterystykę amplitudowo-fazową omawianego elementu pokazano na rysunku 5.8.



Rys. 5.8. Charakterystyka amplitudowo-fazowa elementu

Logarytmiczna charakterystyka amplitudowa

Transmitancję widmową $G(j\omega)$ można zapisać jako

$$G(j\omega) = \frac{j2\omega}{1+j\omega} = \frac{2\omega e^{j90}}{\sqrt{1+\omega^2} e^{j\arctg \omega}} = \frac{2\omega}{\sqrt{1+\omega^2}} e^{j(90-\arctg \omega)} \quad (5.52)$$

stąd równanie charakterystyki amplitudowej

$$M(\omega) = \frac{2\omega}{\sqrt{1+\omega^2}} \quad (5.53)$$

lub wyznaczone z równania (5.16):

$$M(\omega) = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)} = \sqrt{\frac{4\omega^4}{(1+\omega^2)^2} + \frac{4\omega^2}{(1+\omega^2)^2}},$$

$$M(\omega) = \sqrt{\frac{4\omega^2(1+\omega^2)}{(1+\omega^2)^2}} = \frac{2\omega}{\sqrt{1+\omega^2}}.$$

Chcąc wyrazić $M(\omega)$ w decybelach

$$L(\omega) = 20 \lg \frac{2\omega}{\sqrt{1+\omega^2}} = 20 \lg 2\omega - 20 \lg \sqrt{1+\omega^2} \quad (5.54)$$

Cały zakres częstotliwości dzielimy na dwie części:

$$\text{dla } \omega^2 \ll 1, \text{ czyli } \omega \ll 1 \quad (5.55)$$

$$\text{dla } \omega^2 \gg 1, \text{ czyli } \omega \gg 1 \quad (5.56)$$

Dla pierwszego zakresu częstotliwości, wykorzystując założenie (5.55), można w równaniu (5.54) pominąć jego drugi składnik, stąd:

$$\text{dla } \omega \ll 1 \quad L(\omega) = 20 \lg 2\omega \quad (5.57)$$

Dla drugiego zakresu częstotliwości, wykorzystując założenie (5.56), można w równaniu (5.54) pominać jedynkę pod pierwiastkiem, stąd:

$$\text{dla } \omega \gg 1 \quad L(\omega) = 20 \lg 2\omega - 20 \lg \omega = 20 \lg \frac{2\omega}{\omega}$$

$$L(\omega) = 20 \lg 2 \approx 6 \text{ dB} \quad (5.58)$$

Oś odciętych logarytmicznej charakterystyki amplitudowej ma podziałkę logarytmiczną, dlatego równaniom (5.57) i (5.58) odpowiadają na wykresie odcinki linii prostej. Prosta o równaniu (5.57) przecina oś odciętych przy pulsacji ω , dla której $L(\omega) = 0$, czyli

$$20 \lg 2\omega = 0 \Rightarrow 2\omega = 1 \Rightarrow \omega = \frac{1}{2} \quad (5.59)$$

Wykres logarytmicznej charakterystyki amplitudowej przedstawiono na rysunku 5.9a.

Logarytmiczna charakterystyka fazowa

Na podstawie równania (5.52) można napisać

$$\varphi(\omega) = 90 - \arctg \omega \quad (5.60)$$

Równanie to można także wyznaczyć ze wzoru (5.17)

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{Q(\omega)}{P(\omega)} = \arctg \frac{\frac{2\omega}{1+\omega^2}}{\frac{2\omega^2}{1+\omega^2}} = \arctg \frac{1}{\omega} = 90 - \arctg \omega \quad (5.61)$$

Dla różnych wartości ω z przedziału $(0, +\infty)$ można wyznaczyć wartość $\varphi(\omega)$ na podstawie wzoru (5.58) i zestawić dane w tabeli 5.4.

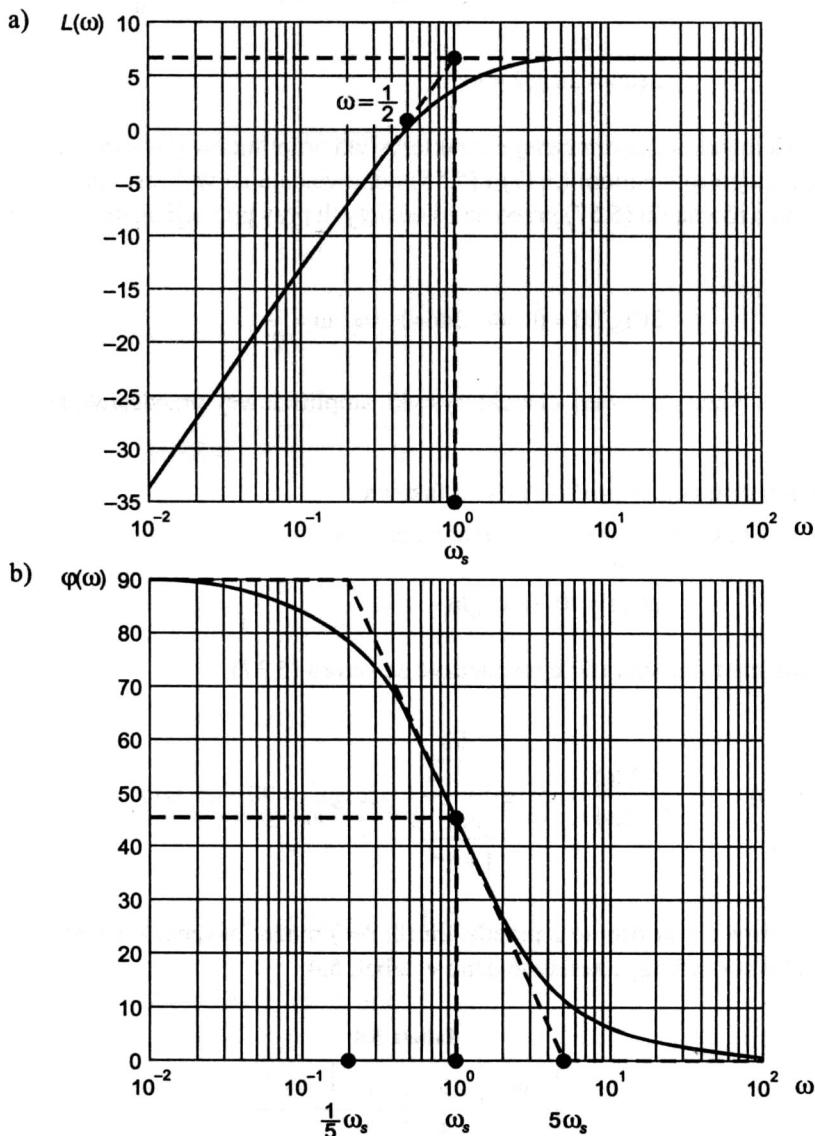
Tabela 5.4

| ω | 0 | 1 | ∞ |
|-------------------|-----------------|-----------------|----------|
| $\varphi(\omega)$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{\pi}{4}$ | 0 |

Przybliżoną logarytmiczną charakterystykę fazową można wyznaczyć stosując aproksymację trzyodcinkową. Na podstawie częstotliwości sprzęgającej ω_s wyznacza-

my dwie częstotliwości pomocnicze $\omega_1 = 1/5 \omega_s = 0,2 \text{ l/s}$ i $\omega_2 = 5\omega_s = 5 \text{ l/s}$ i rysujemy trzy odcinki aproksymujące.

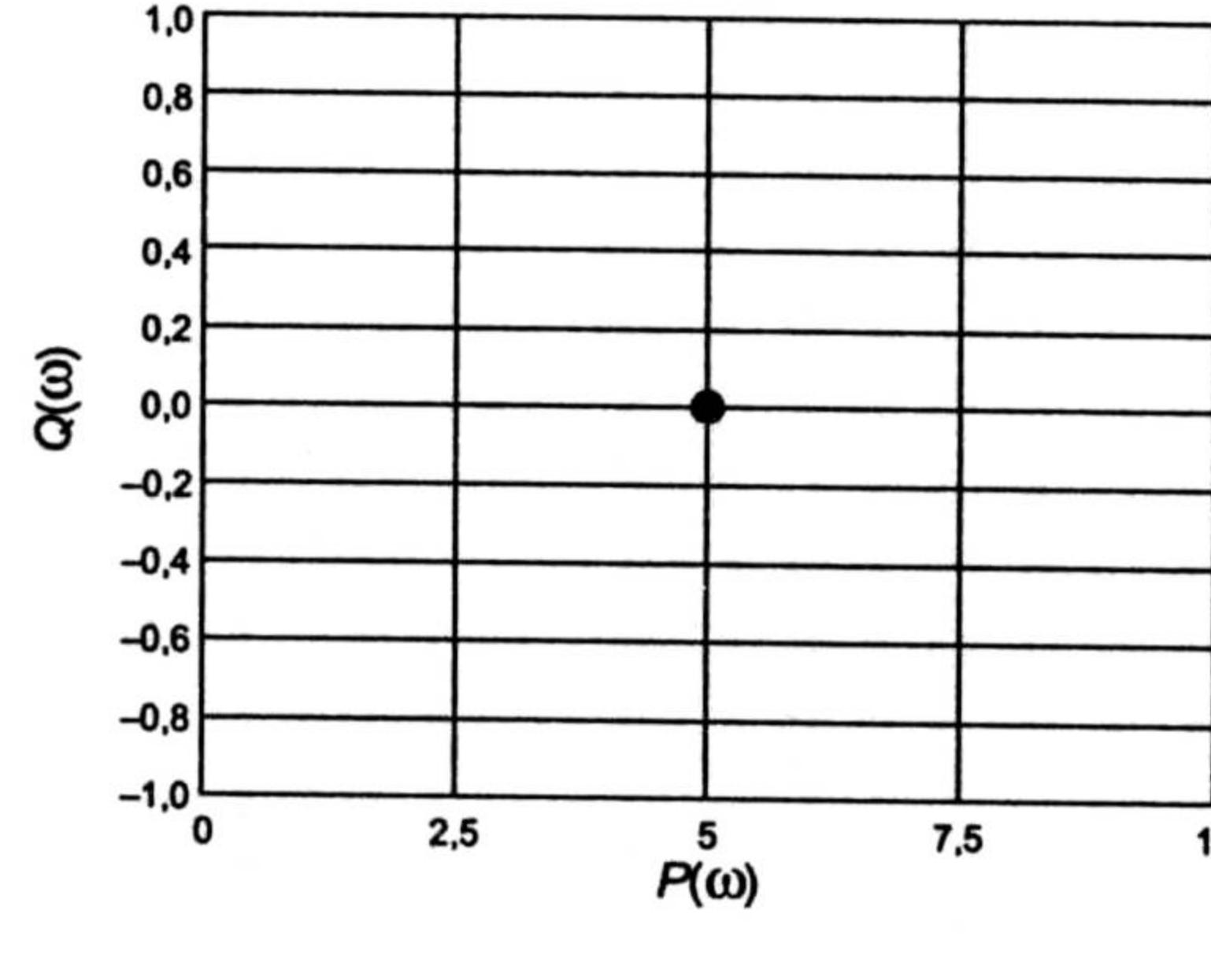
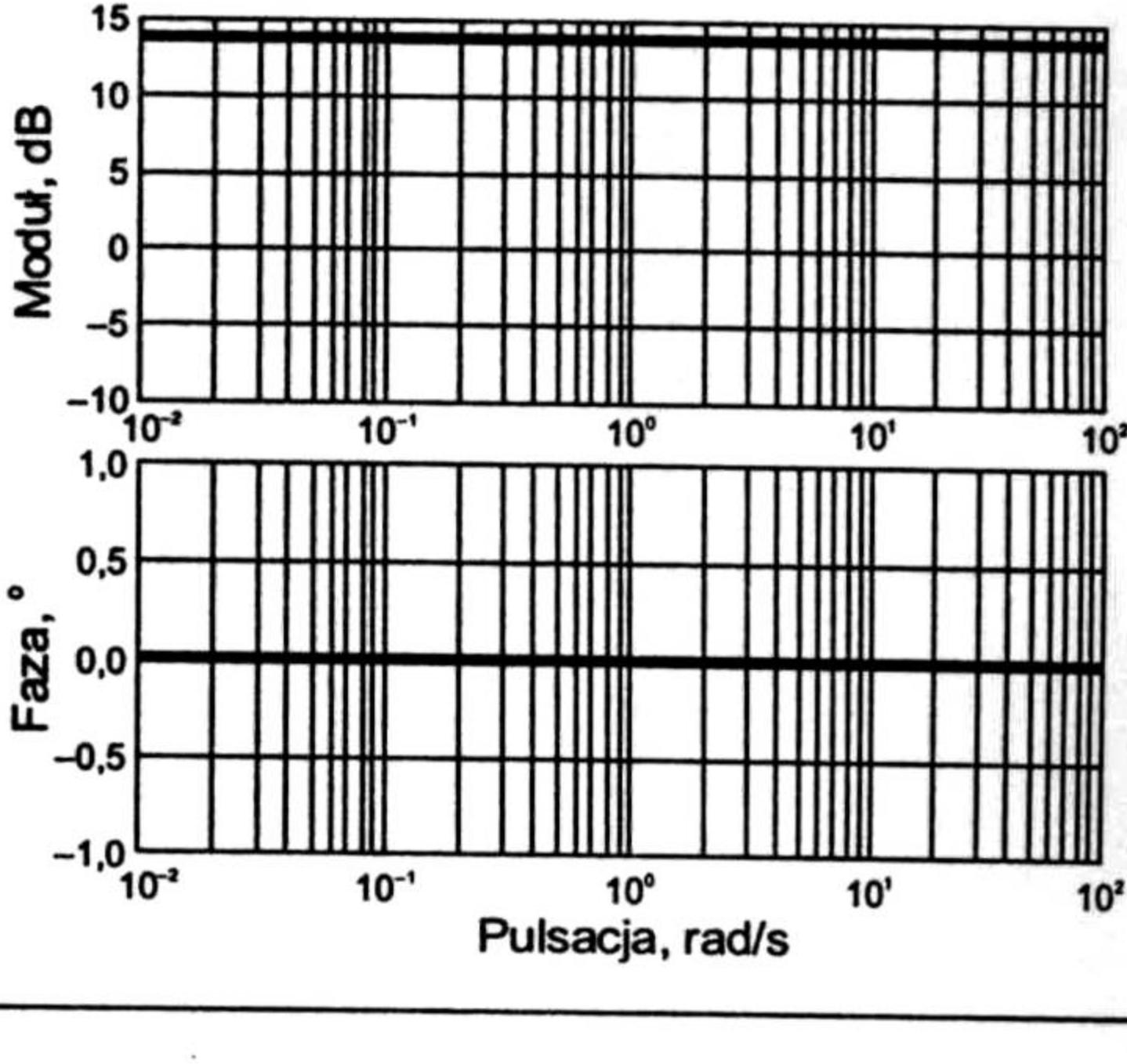
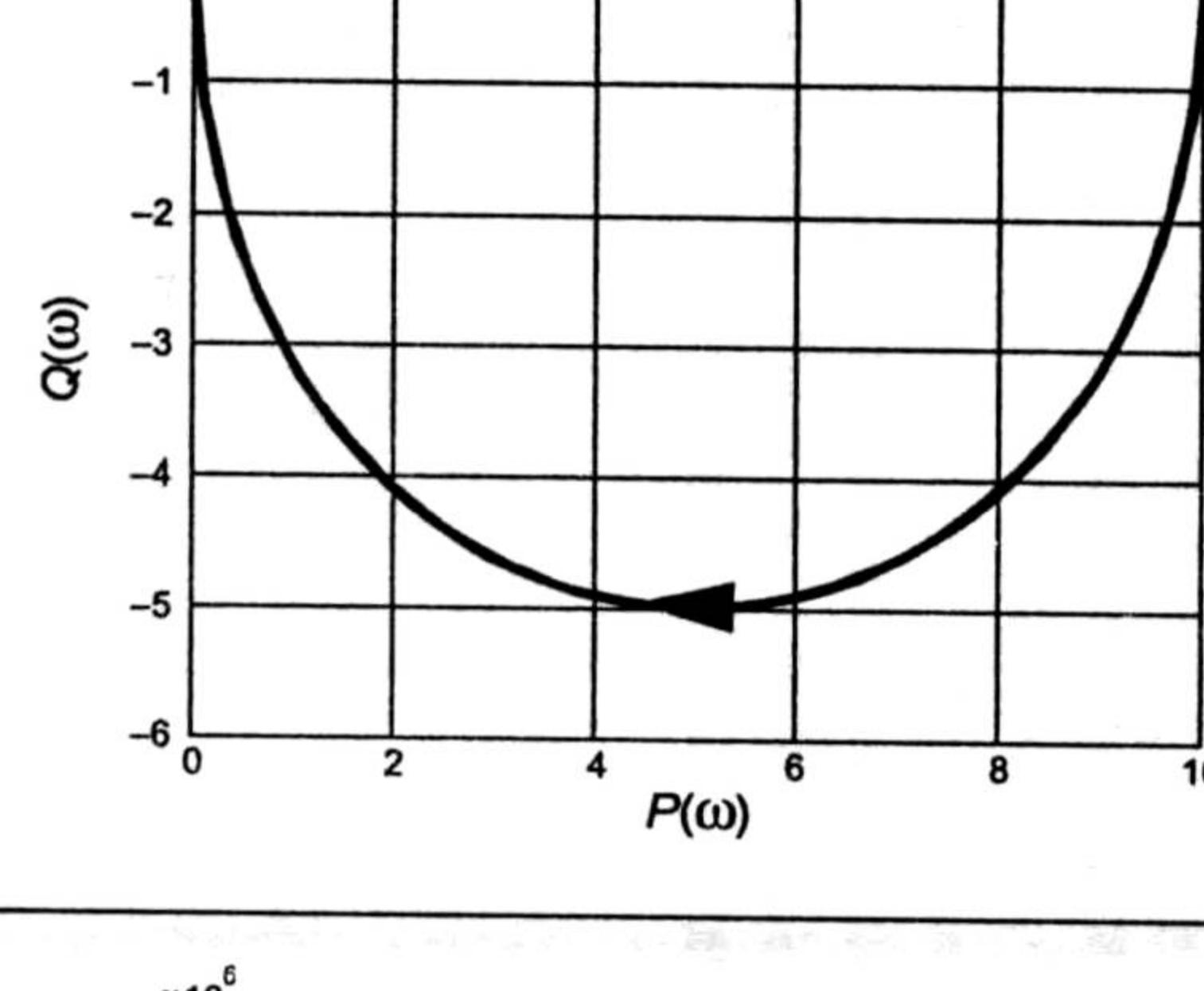
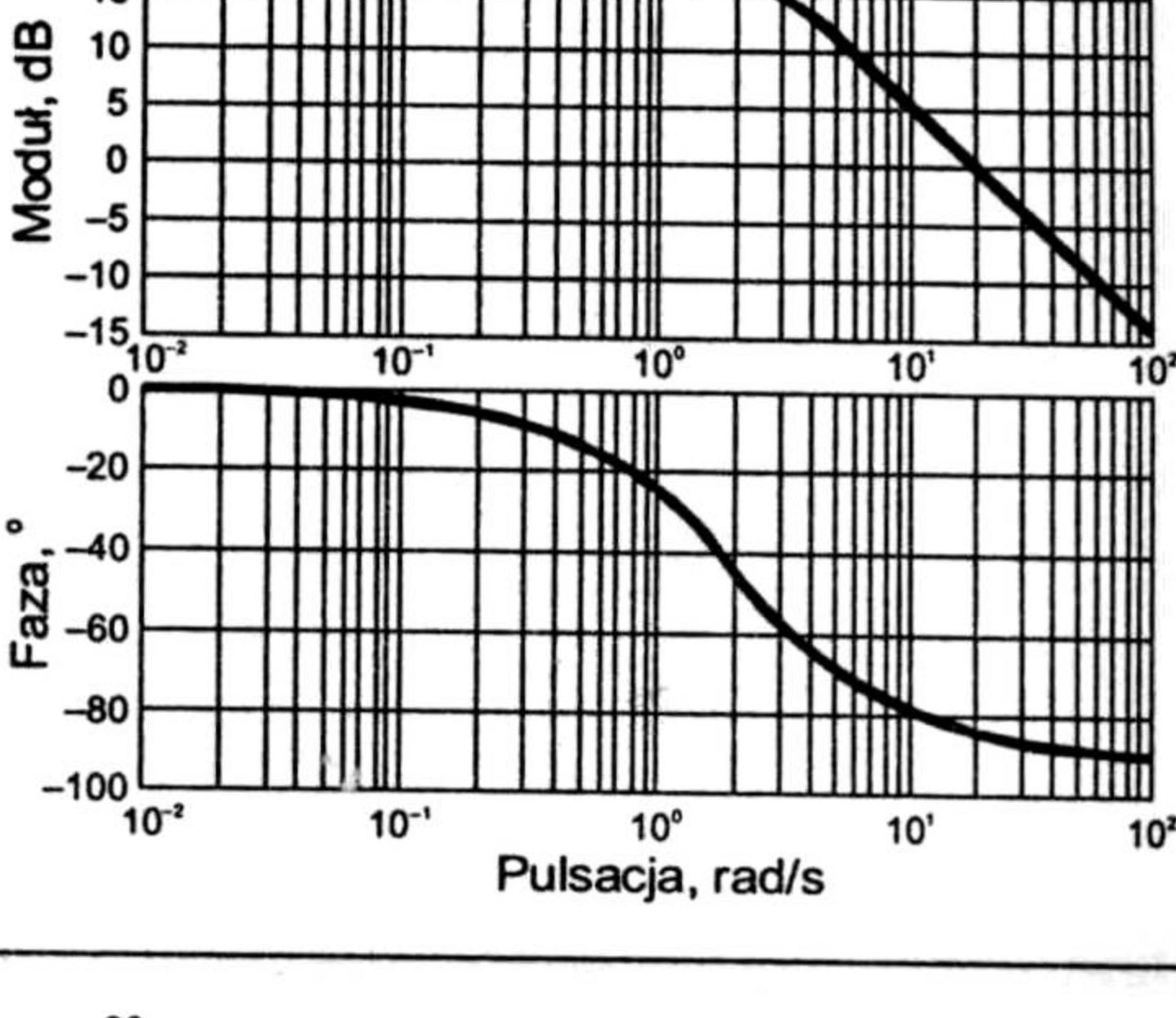
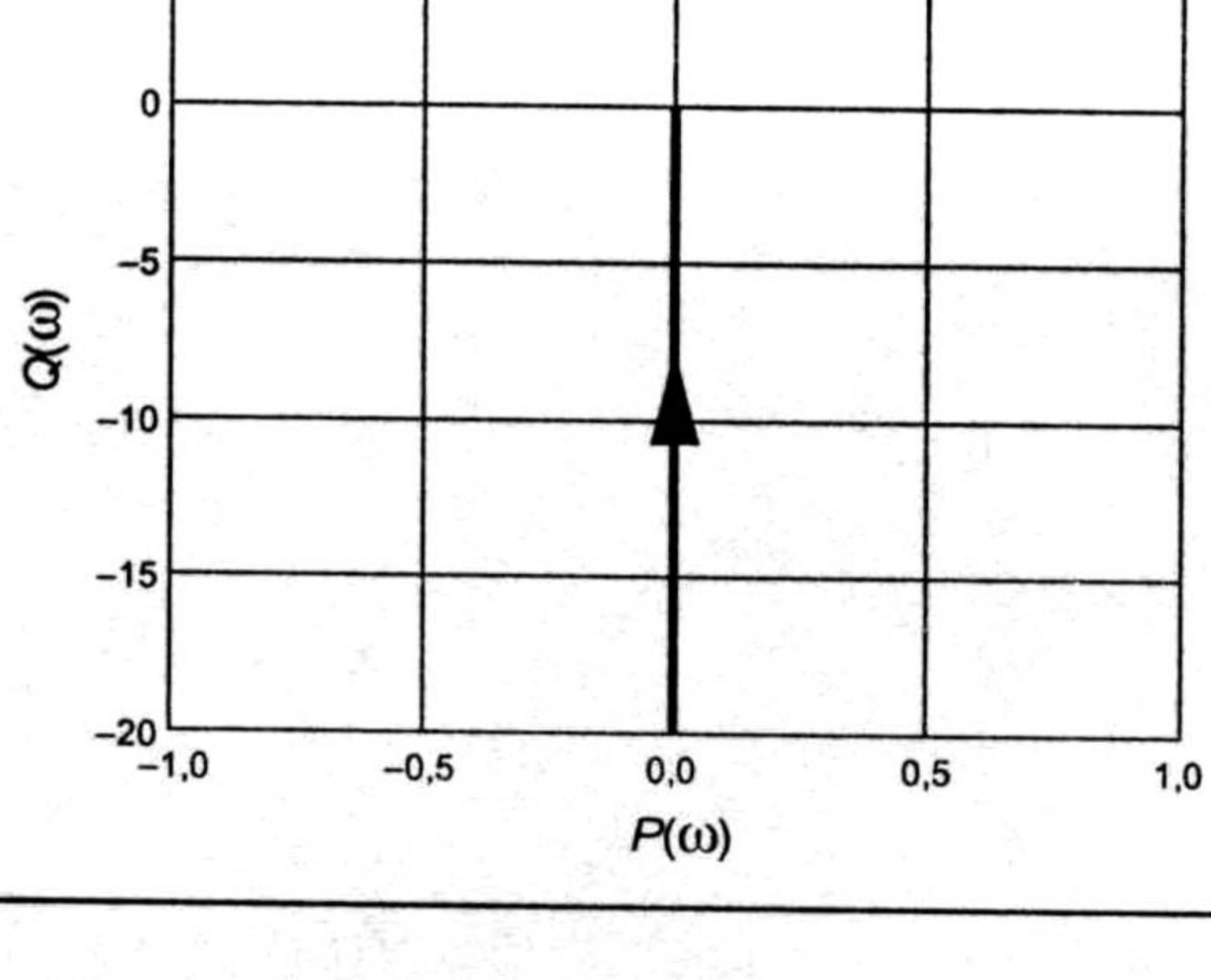
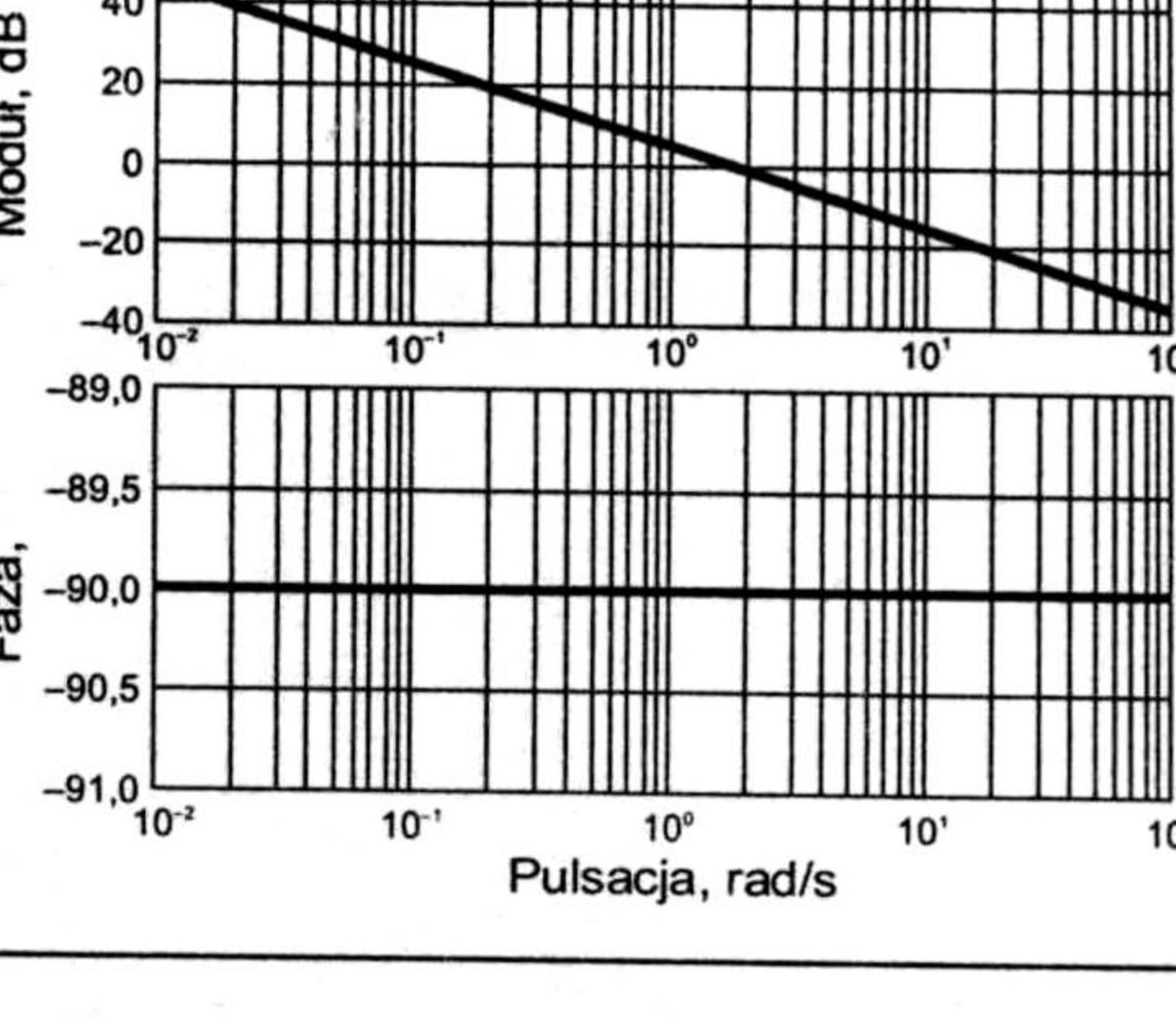
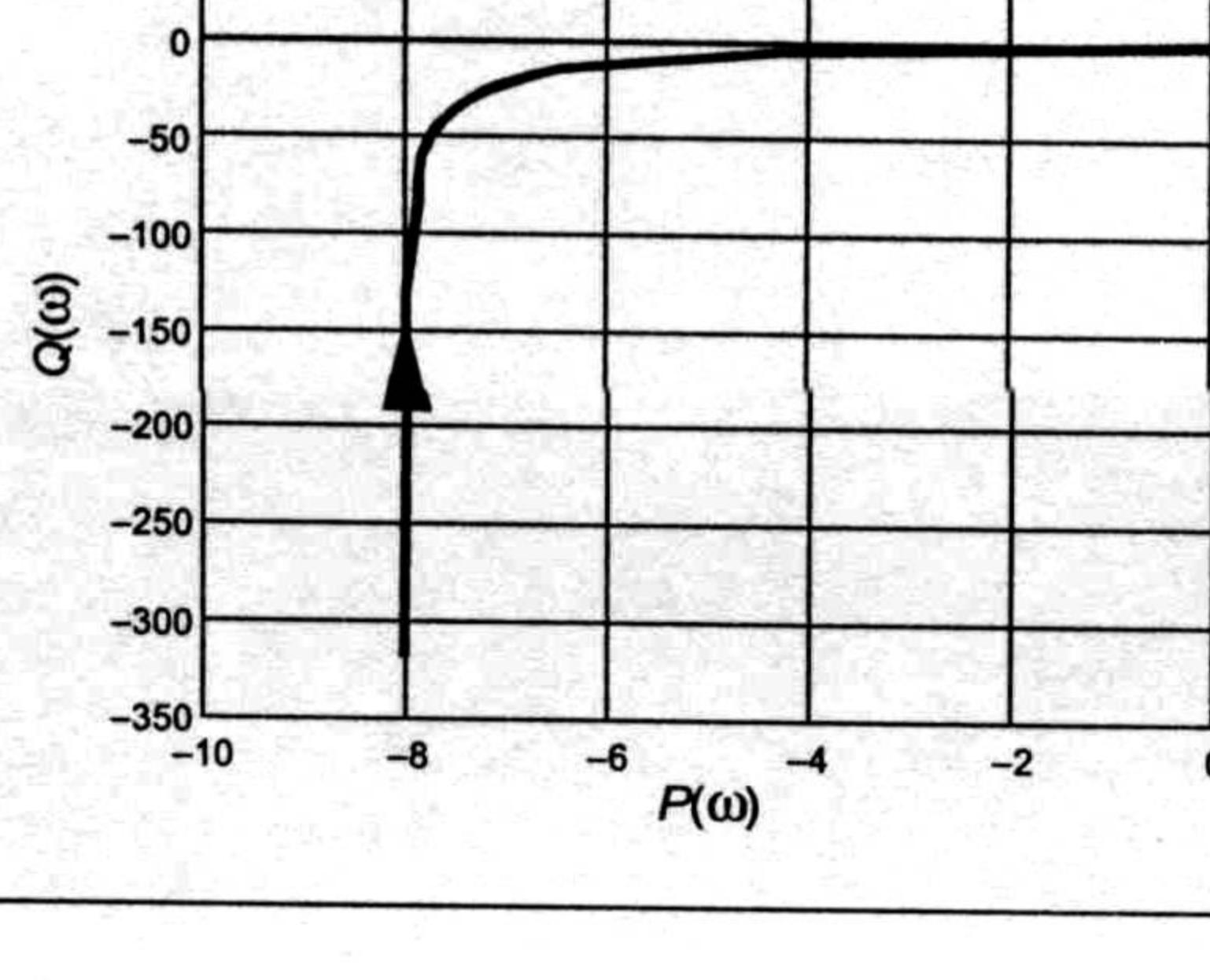
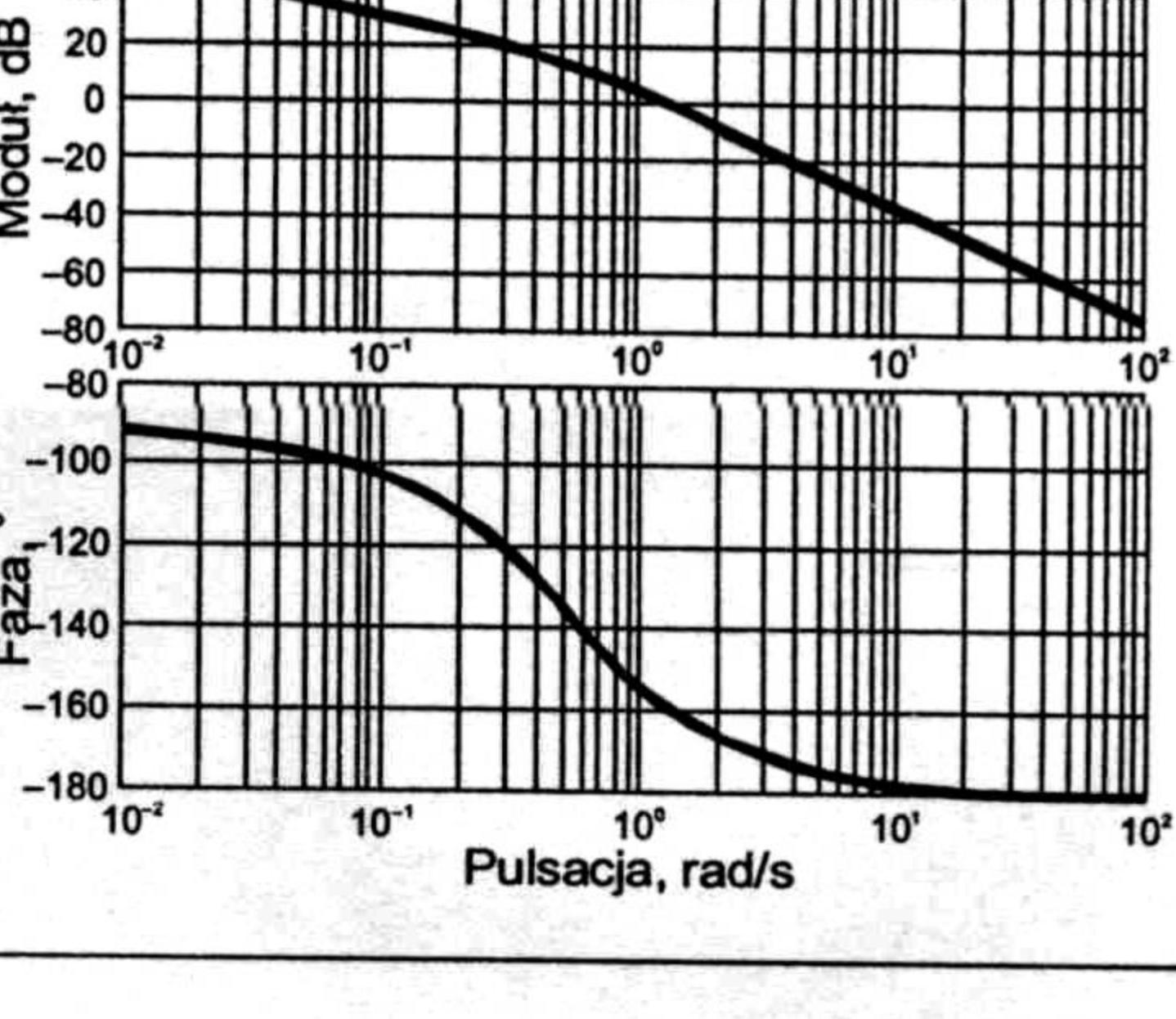
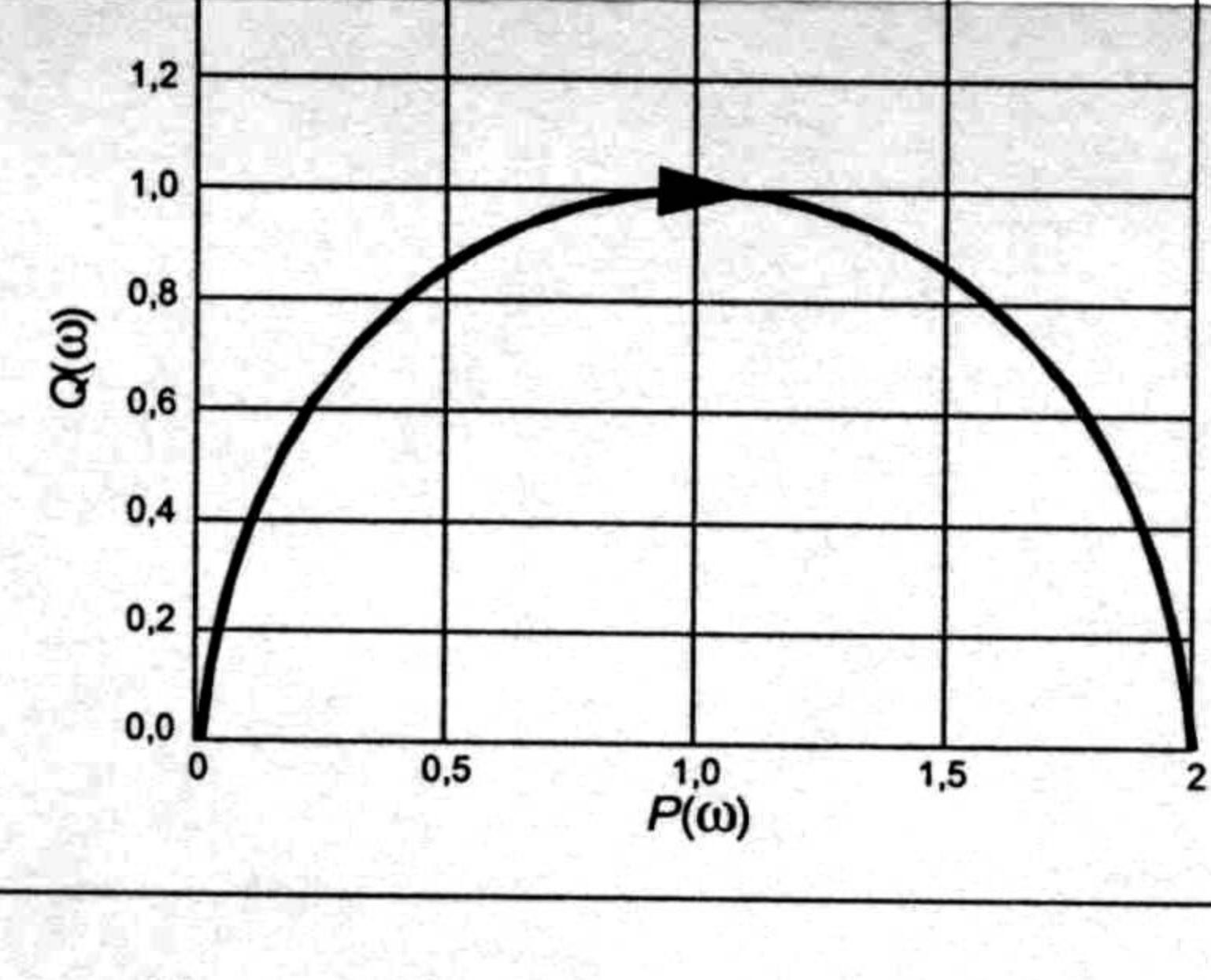
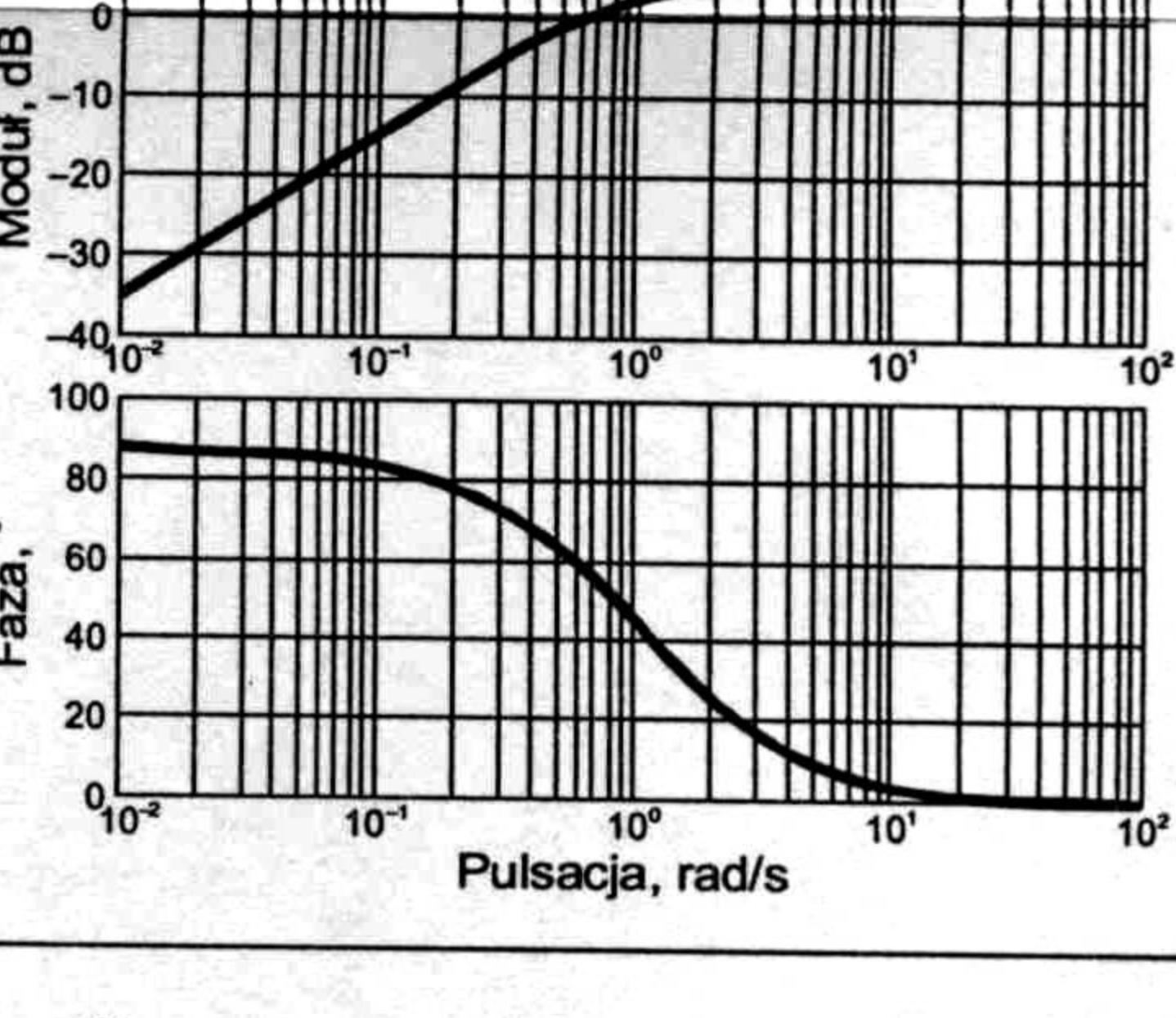
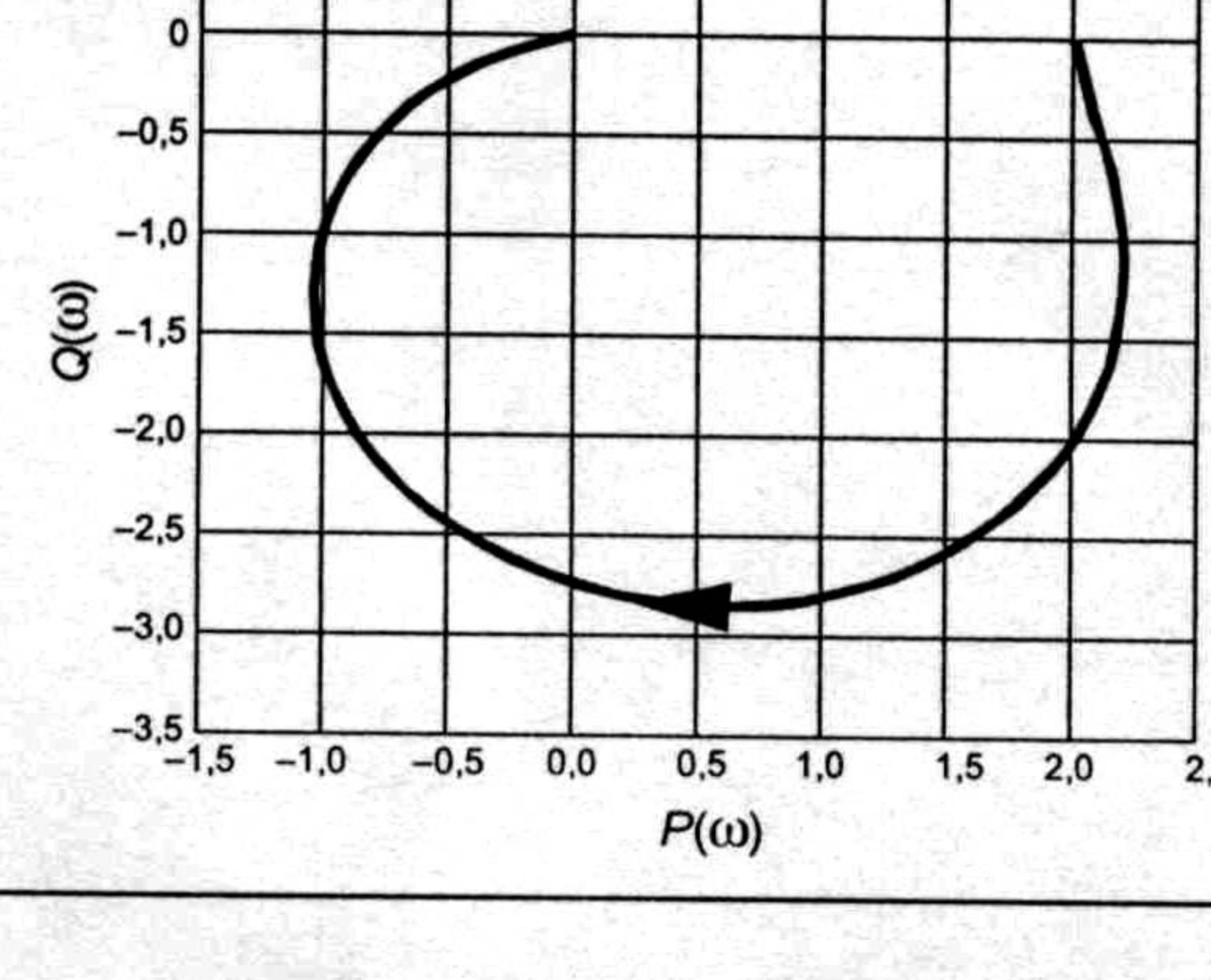
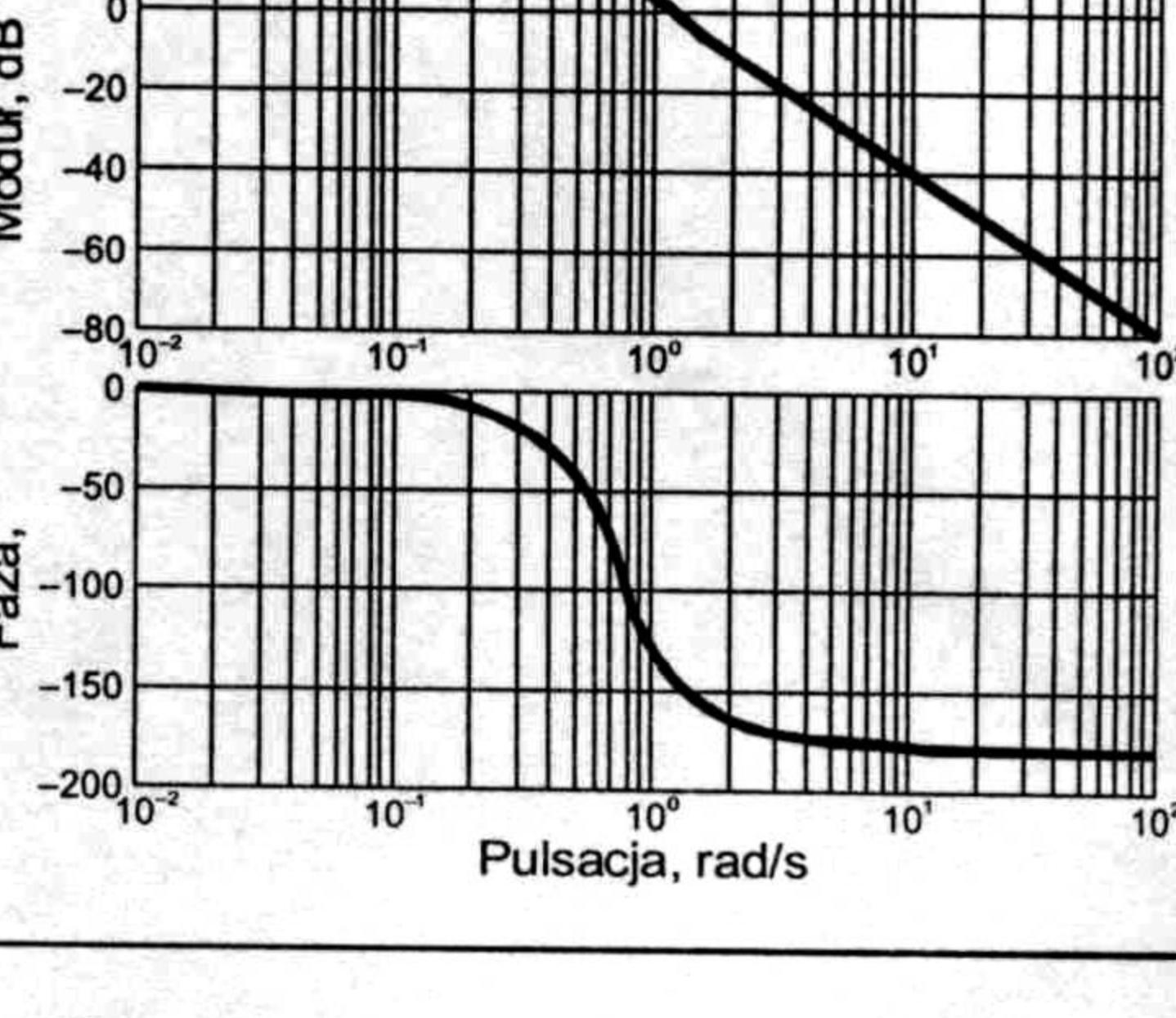
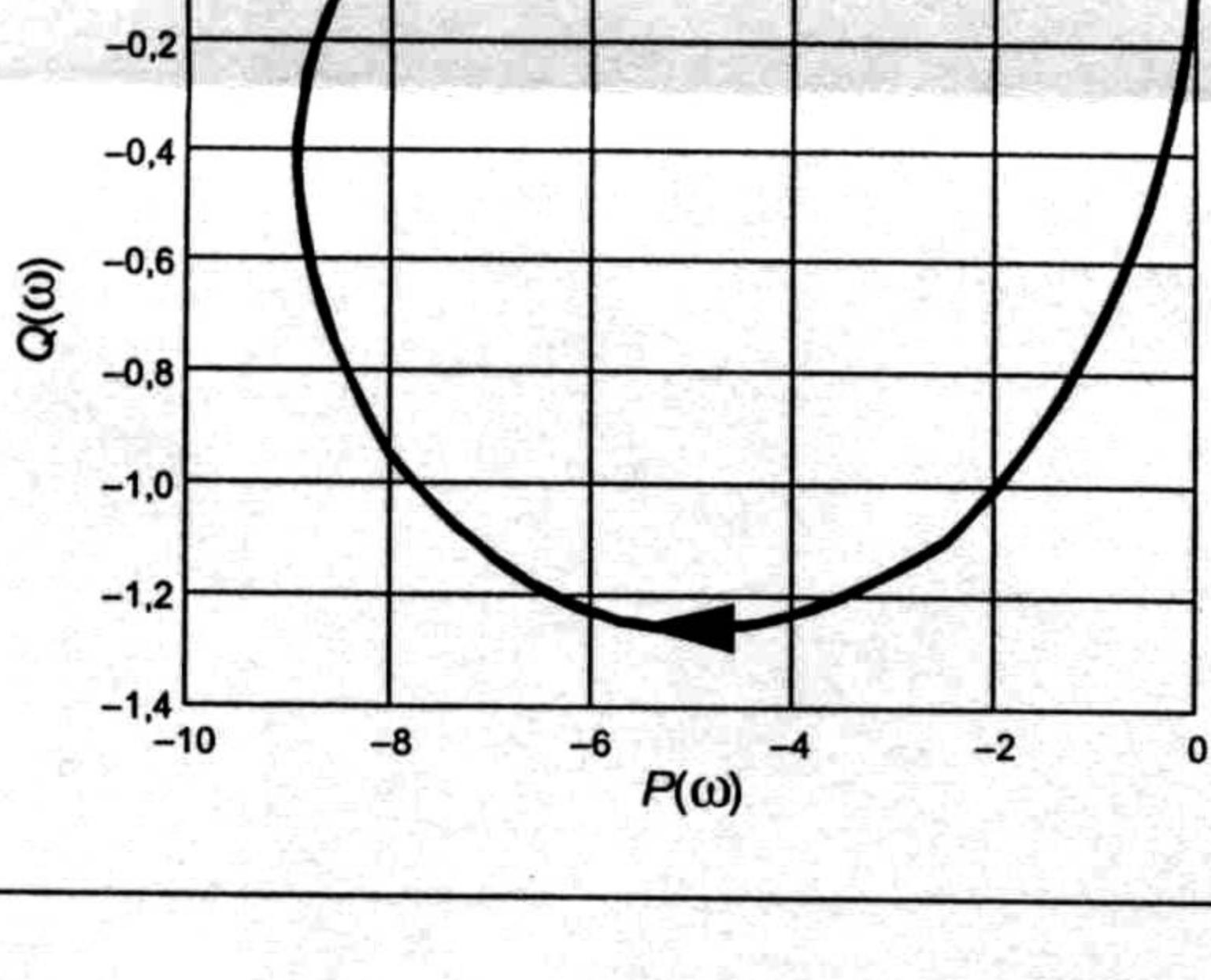
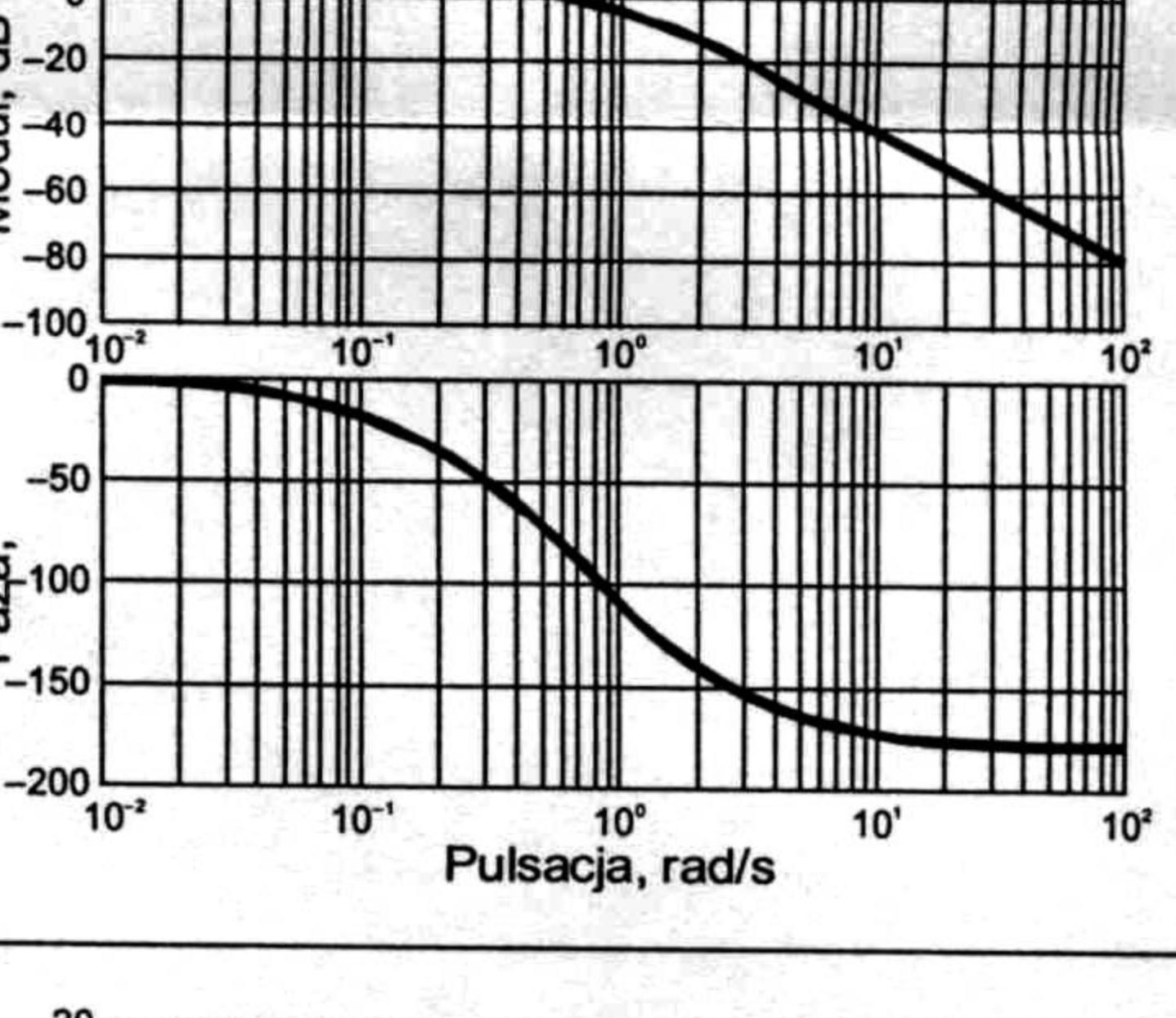
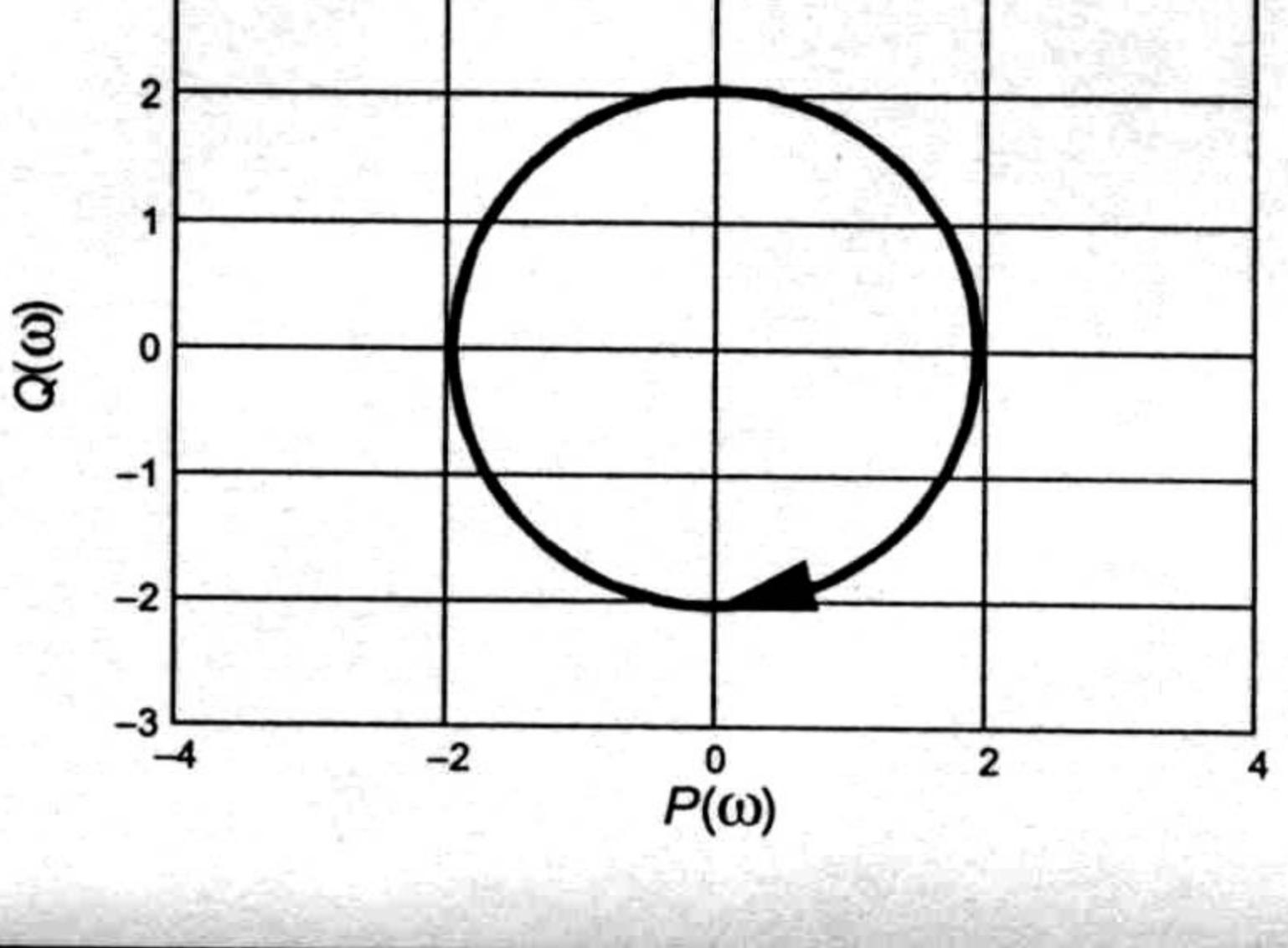
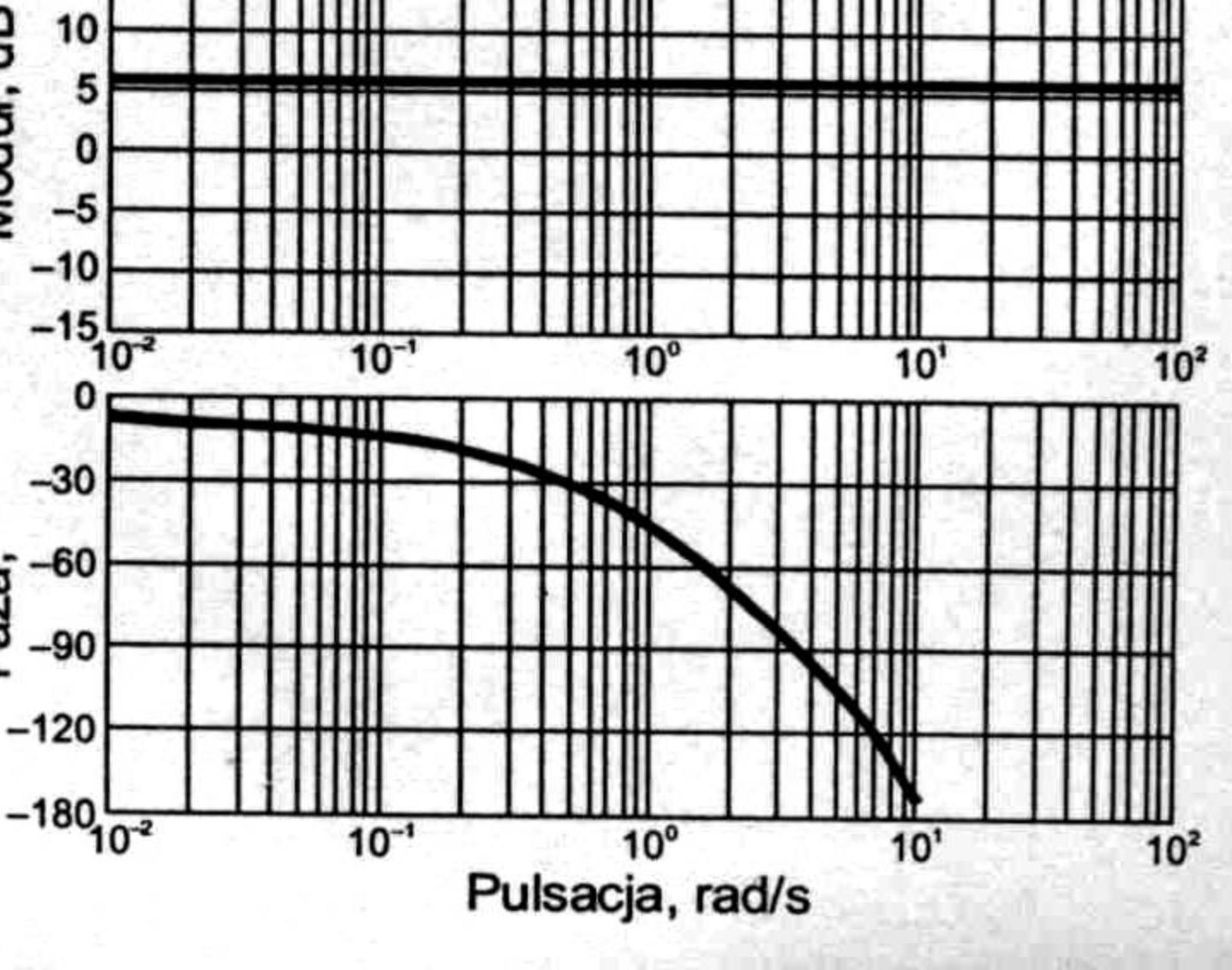
Wykres logarytmicznej charakterystyki fazowej przedstawiono na rysunku 5.9b.



Rys. 5.9. Charakterystyki logarytmiczne elementu: a) amplitudowa; b) fazowa

Charakterystyki częstotliwościowe podstawowych elementów automatyki zestawione w tabeli 5.5 (na wklejce).

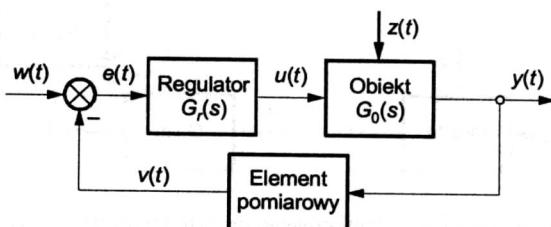
Tabela 5.5

| Rodzaj elementu automatyki | Charakterystyka amplitudowo-fazowa | Charakterystyki logarytmiczne: modułu i fazy |
|---|---|---|
| Element proporcjonalny $y(t) = Kx(t)$ $G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = K$ |  |  |
| Element inercyjny pierwszego rzędu $T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = Kx(t)$ $G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K}{Ts+1}$ |  |  |
| Element całkujący $\frac{dy(t)}{dt} = Kx(t)$ lub $T \frac{dy(t)}{dt} = x(t)$ $G(s) = \frac{K}{s}$ lub $G(s) = \frac{1}{Ts}$ |  |  |
| Element całkujący rzeczywisty $T \frac{d^2y(t)}{dt^2} + \frac{dy(t)}{dt} = Kx(t)$ $G(s) = \frac{K}{s(Ts+1)}$ |  |  |
| Element różniczkujący rzeczywisty $T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = K \frac{dx(t)}{dt}$ $G(s) = \frac{Ks}{Ts+1}$ |  |  |
| Element oscylacyjny drugiego rzędu $T^2 \frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2\zeta T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = Kx(t)$ $G(s) = \frac{K}{T^2 s^2 + 2\zeta Ts + 1}$ |  |  |
| Element inercyjny drugiego rzędu $T_2^2 \frac{d^2y(t)}{dt^2} + T_1 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = Kx(t)$ $G(s) = \frac{K}{(T_3 s + 1)(T_4 s + 1)}$ |  |  |
| Element opóźniający $y(t) = Kx(t-\tau)$ $G(s) = Ke^{-\tau s}$ |  |  |

6. Układ regulacji, jego zadanie i struktura

6.1. Wprowadzenie

W rozdziale pierwszym podkreślono, że w dużej części przypadków w procesach technologicznych zadanie układu regulacji polega na utrzymywaniu stałej wartości wielkości regułowanej (wartość zadana $w = \text{const}$). Regulację taką nazywa się stałowo-wartościową. Utrzymaniu stałej wartości wielkości regułowanej przeszkadzają wielkości zakłócające. Zastosowanie układu regulacji automatycznej ma prowadzić do eliminacji wpływu zakłóceń na wielkość regułowaną. Odmienna od regulacji stałowo-wartościowej jest regulacja programowa, przy której wartość wielkości regułowanej ma zmieniać się w czasie w ustalony z góry sposób (wartość zadana $w = w(t)$ jest zdeterminowana). Trzecim rodzajem regulacji jest regulacja nadążna; tu wartość zadana zmienia się w sposób niezdeterminowany $w = w(?)$. Rysunek 6.1 przedstawia schemat blokowy układu automatycznej regulacji oraz wyjaśnia, jakie transmitancje układu są interesujące z punktu widzenia ustalenia zadań.



Rys. 6.1. Schemat blokowy układu automatycznej regulacji

Zadaniem układu regulacji jest zatem minimalizacja sygnału uchybu regulacji e , czyli tak, aby

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (w(t) - v(t)) = 0 \quad (6.1)$$

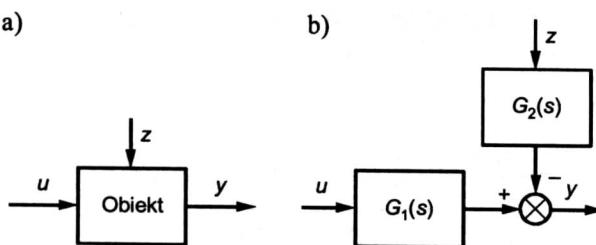
Zadanie regulacji może być realizowane przez układ z ograniczoną dokładnością. Dokładność tę, czyli tzw. jakość regulacji, można oceniać w różny sposób, zależnie od potrzeb. Wymagania stawiane układom regulacji zostaną omówione w następnych rozdziałach.

Oprócz układów, w których zadanie regulacji związane jest z podaniem wartości wielkości regułowanej y w postaci określonego sygnału $w(t)$, istnieje druga grupa układów, w której zadanie regulacji nie określa wartości $y(t)$, lecz zadaje utrzymanie pewnego określonego związku pomiędzy wielkością regułowaną $y(t)$ a wielkością istniejącą $u(t)$. Do takiej grupy układów należą m.in. układy regulacji ekstremalnej, gdzie żąda się, aby

$$\frac{\partial y(t)}{\partial u(t)} = 0 \quad (6.2)$$

6.2. Obiekty regulacji

Układy regulacji o jednej wielkości regułowanej (jednowymiarowe), które są głównym przedmiotem niniejszego podręcznika, charakteryzują się tym, że w obiekcie regulacji wyróżniamy tylko jedną wielkość, dla której postawione jest zadanie. Zazwyczaj staramy się wynaleźć w tym samym obiekcie również tylko jedną wielkość sterującą, której zmiany wywoływane przez regulator wpływają na wielkość regułowaną tak, aby spełnić zadanie regulacji. Sygnały występujące w jednowymiarowym obiekcie regulacji przedstawiono ogólnie na rysunku 6.2a. W przypadku obiektu liniowego schemat ten może przykładowo przyjąć postać pokazaną na rysunku 6.2b.



Rys. 6.2. Schematy blokowe jednowymiarowego obiektu regulacji: u – wielkość sterująca, y – wielkość wyjściowa, z – wielkość zakłócająca

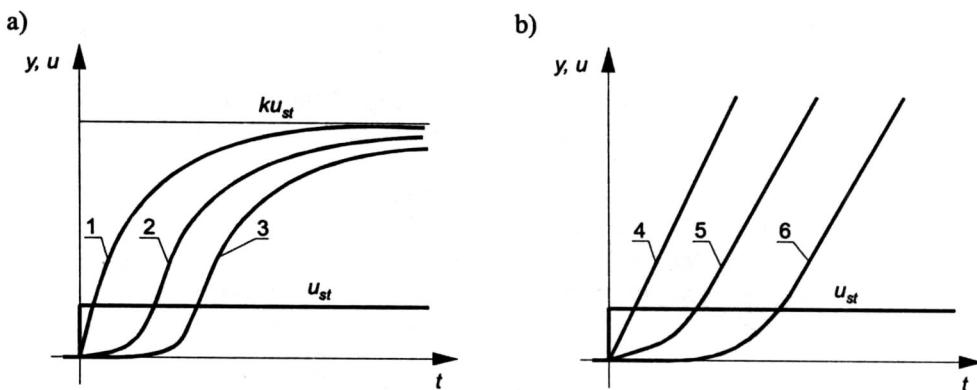
Rozpatrując obiekt regulacji pod względem matematycznym, musimy rozumieć przebieg dowolnych wielkości fizycznych podlegających regulacji, na które oddziałują wielkości sterujące oraz wielkości zakłócające. Przykładem obiektu regulacji w takim rozumieniu może być dowolny proces technologiczny, w którym dowolna wielkość fizyczna podlega regulacji. W sensie aparaturowym obiektem regulacji nazywa się urządzenie lub zespół urządzeń występujących w układzie automatycznej regulacji, w których drogą zewnętrznych oddziaływań realizuje się pożądany algorytm działania. Obiekty regulacji, podobnie jak wszystkie elementy automatyki, ze względu na prze-

bieg charakterystyki statycznej dzielimy na liniowe i nieliniowe. Jednak większość obiektów podlegających regulacji jest nieliniowa. Dlatego też, budując model matematyczny takiego obiektu i analizując zjawiska w nim zachodzące, dokonujemy linearizacji równań nieliniowych w otoczeniu punktu pracy. Pozwala to na wykorzystanie teorii sterowania dla celów projektowania i syntezy układów regulacji.

W wielu przypadkach takie postępowanie nie jest możliwe ze względu na niedostateczną znajomość zjawisk zachodzących w obiekcie. Wynika stąd potrzeba stosowania innych metod ustalania równań dynamiki lub transmitancji takich obiektów regulacji. Metody te, zwane **metodami identyfikacji**, umożliwiają tworzenie modelu matematycznego badanego obiektu na podstawie obserwacji przebiegów wyjściowych. Najprostszą z tych metod jest ocena transmitancji obiektu na podstawie odpowiedzi na wymuszenie skokowe.

Obiekty, podobnie jak inne elementy automatyki, klasyfikuje się zwykle ze względu na ich właściwości dynamiczne. Najbardziej ogólna klasyfikacja wyróżnia jedynie cechę samodzielnego osiągania lub nie osiągania stanu równowagi trwały po wprowadzeniu wymuszenia skokowego. Ze względu na końcową wartość odpowiedzi skokowej rozróżnia się dwie grupy obiektów:

- 1) statyczne (z samowyrównaniem), których wartość odpowiedzi skokowej dąży do wartości skończonej;
- 2) astaticzne (bez samowyrównania), których wartość odpowiedzi skokowej dąży do nieskończoności.



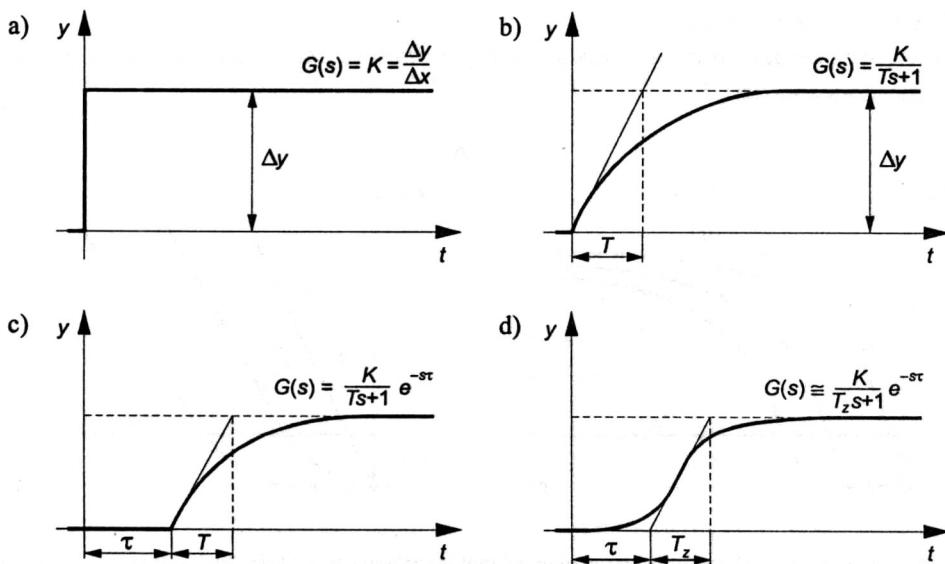
Rys. 6.3. Przykładowe charakterystyki skokowe: a) obiekty statyczne; b) obiekty astaticzne. 1 – obiekt inercyjny pierwszego rzędu, 2 – obiekt inercyjny wyższego rzędu, 3 – obiekt inercyjny wyższego rzędu z opóźnieniem, 4 – obiekt całkujący, 5 – obiekt całkujący z inercją, 6 – obiekt całkujący z inercją i z opóźnieniem

Przykładowe odpowiedzi obiektów statycznych i astaticznych na wymuszenia skokowe wielkością sterującą u_{st} przedstawia rysunek 6.3.

Charakterystyki skokowe można wyznaczyć zarówno drogą analityczną, jak i doświadczalną. Punktem wyjścia metody analitycznej jest równanie ruchu. Badania doświadczalne wymagają:

- przygotowania obiektu do badań,
- doboru odpowiedniej aparatury pomiarowej,
- montażu aparatury na obiekcie,
- przygotowania tabel pomiarowych.

Pomiary powinny być przeprowadzone w całym zakresie pracy obiektu. Odpowiedzi na wymuszenie skokowe obiektu wyznacza się w otoczeniu wybranego punktu pracy. Wartość wymuszenia skokowego winna wynosić 5÷15% maksymalnej wartości wielkości wejściowej i znajdować się na takim poziomie, aby odpowiedź zawierała się w obszarze punktu pracy. Wartość wymuszenia zależy od stopnia nieliniowości. Im charakterystyka jest bardziej nieliniowa, tym wartość wymuszenia powinna być mniejsza. Na rysunku 6.4 pokazane są typowe odpowiedzi skokowe obiektów statycznych i odpowiadające im transmitancje.



Rys. 6.4. Odpowiedzi skokowe obiektów statycznych
(objaśnienia w tekście)

Obiekt o odpowiedzi jak na rysunku 6.4a traktowany jest jak element proporcjonalny, obiekt z rysunku 6.4b – jak element inercyjny pierwszego rzędu. Obiekt o odpo-

wiedzi jak na rysunku 6.4c traktowany jest jako szeregowo połączenie elementu inercyjnego i opóźniającego.

Obiekt z rysunku 6.4d może być traktowany dwójako:

- jak element inercyjny pierwszego rzędu z opóźnieniem,
- jak element inercyjny wyższego rzędu.

Transmitancję członów o odpowiedzi jak na rysunku 6.4d ustala się w pierwszym przypadku na podstawie parametrów tej odpowiedzi: τ – czasu opóźnienia, T_z – zastępcej stałej czasowej.

Wartość tych parametrów wyznacza się, wystawiając styczną w punkcie przegięcia odpowiedzi. W drugim przypadku stosuje się przybliżenie przebiegu odpowiedzi danego elementu przebiegiem odpowiedzi elementu inercyjnego wyższego rzędu.

Obiektami inercyjnymi wyższego rzędu nazywamy elementy o transmitancji typu

$$G(s) = \frac{K}{(T_s + 1)^n} \quad (6.3)$$

gdzie n – rząd danego elementu

Przykładowe charakterystyki skokowe obiektów dla wymuszenia $U_{st} = U_{st} \cdot 1(t)$ zestawiono w tabeli 6.1.

Bardziej dokładną i mniej wrażliwą na zakłócenia metodą określenia właściwości obiektu, niż wyznaczenie charakterystyk czasowych, jest wyznaczenie parametrów obiektu na podstawie doświadczalnie wyznaczonej charakterystyki częstotliwościowej amplitudowo-fazowej. Zadanie polega na określeniu na podstawie kształtu charakterystyki amplitudowo-fazowej rzędu i współczynników transmitancji.

Charakterystyki te można podzielić na trzy grupy:

- 1) charakterystyki obiektów statycznych inercyjnych, wieloinercyjnych i inercyjnych z opóźnieniem;
- 2) charakterystyki obiektów astatycznych z opóźnieniem lub z inercją;
- 3) charakterystyki obiektów oscylacyjnych, wykazujące rezonans.

Mając charakterystykę badanego obiektu, stwierdzamy najpierw w przybliżeniu, do której z grup można ją zaliczyć. Następnie obserwujemy przebieg modułu i argumentu badanej charakterystyki w zakresie większych częstotliwości. Jeżeli np. argument ma tendencję do ustalania się, to opóźnienie nie istnieje lub jest niewielkie. Jeżeli natomiast krzywa jest wklęsła, czyli moduł maleje powoli, a argument ujemny szybko rośnie, to w badanym obiekcie istnieje duże opóźnienie. Następnie kolejno staramy się znaleźć najlepszą zgodność krzywej rzeczywistej z jedną z krzywych wzorcowych.

Zagadnienie identyfikacji obiektów szeroko omówione jest w literaturze [16, 20].

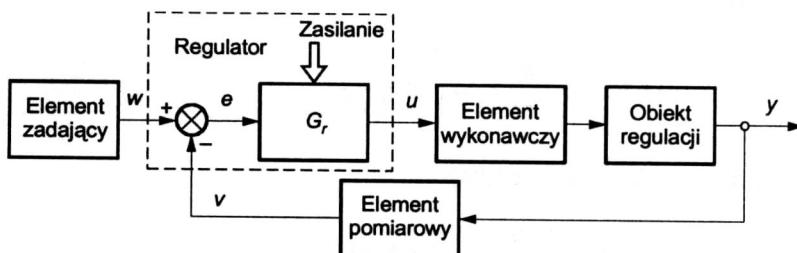
Tabela 6.1

Charakterystyki skokowe wybranych obiektów

| Obiekty statyczne | | Obiekty statyczne | |
|---|---|--|---|
| Nazwa | Charakterystyka skokowa | Nazwa | Charakterystyka skokowa |
| Inercyjny pierwszego rzędu | $y = u_0 e^{-\frac{t}{T}}$ | Calkujący | $y = u_{st} + \frac{K}{s} \alpha t$ |
| Inercyjny wyższego rzędu bez opóźnienia | $y = u_0 e^{-\frac{t}{T}} + u_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right) + u_0 \frac{T}{2} \left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right)^2 + \dots + u_0 \frac{T^n}{n!} \left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right)^n$ | Calkujący z inercyjnością bez opóźnienia | $y = u_{st} + \frac{K}{s(Ts+1)} t$ lub $y = u_{st} + \frac{K}{s(Ts+1)^n} t^n$ |
| Inercyjny wyższego rzędu z opóźnieniem | $y = u_0 e^{-\frac{t-\tau}{T}} + u_0 \left(1 - e^{-\frac{t-\tau}{T}}\right) + u_0 \frac{T}{2} \left(1 - e^{-\frac{t-\tau}{T}}\right)^2 + \dots + u_0 \frac{T^n}{n!} \left(1 - e^{-\frac{t-\tau}{T}}\right)^n$ | Calkujący z opóźnieniem | $y = u_{st} + \frac{Ke^{-\tau s}}{s} t$ |
| | | Calkujący z inercyjnością i opóźnieniem | $y = u_{st} + \frac{Ke^{-\tau s}}{s(Ts+1)^n} t^n$ |

6.3. Regulator

Zadaniem regulatora w układzie regulacji automatycznej jest wytworzenie sygnału sterującego u , który wpływa na przebieg wielkości regułowanej y (rys. 6.5).



Rys. 6.5. Regulator w układzie regulacji

Pojęcie **regulator** używane jest w dwojakim sensie. Regulatorem nazywa się element, którego sygnałem wejściowym jest uchyb regulacji $e(t)$, a wyjściowym – wielkość sterująca $u(t)$, tak jak na rysunku 6.1. Transmitancją regulatora jest wtedy stosunek transformaty $U(s)$ do transformaty $E(s)$

$$G_r(s) = \frac{U(s)}{E(s)} \quad (6.4)$$

Natomiast regulator – urządzenie wchodzące w skład układu automatycznej regulacji ma dwa wejścia: jedno do wprowadzenia informacji o bieżącej wartości v wielkości regułowanej y , drugie – do wprowadzenia informacji o wartości zadanej w , tak jak na rysunku 6.5.

W regulatorze tym dokonywane jest porównanie informacji wejściowych. Wynikiem tego porównania jest uchyb regulacji e , na podstawie którego regulator tworzy sygnał sterujący u według określonego algorytmu. Tak rozumiany regulator zawiera element o transmitancji $G_r(s)$ oraz węzeł sumacyjny, tzw. element porównujący, w którym następuje porównanie wartości zadanej w i regułowanej oraz tworzenie sygnału uchybu $e = w - v$. Między regulatorem a obiektem znajduje się jeszcze zwykle urządzenie wykonawcze, ale jego właściwości statyczne i dynamiczne są zazwyczaj proste i niezmienne. Rola uformowania sygnału sterującego przypada przede wszystkim regulatorowi.

W klasycznych sformułowaniach własności regulatorów rozróżnia się następujące zależności $u(t)$ od $e(t)$:

- proporcjonalną (P)

$$G_r(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p \quad (6.5)$$

– całkową (I)

$$G_r(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = \frac{1}{T_i s} = \frac{K_p}{s} \quad (6.6)$$

– proporcjonalno-całkową (PI)

$$G_r(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} \right) \quad (6.7)$$

– proporcjonalno-różniczkową (PD)

$$G_r(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p (1 + T_d s) \quad (6.8)$$

– proporcjonalno-całkowo-różniczkową (PID)

$$G_r(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) \quad (6.9)$$

gdzie:

K_p – współczynnik wzmacnienia,

$P = \frac{1}{K_p} \cdot 100\%$ – zakres proporcjonalności,

T_i – czas zdwojenia,

T_d – czas wyprzedzenia.

Stałe K_p, T_i, T_d występujące w powyższych wzorach należy uważać za dające się nastawić w regulatorze w pewnych zakresach.

Przez **zakres proporcjonalności** rozumie się procentową część pełnego zakresu zmian wielkości uchybu e , potrzebną do wywołania zmiany wielkości sterującej u o pełny zakres. Czas zdwojenia T_i wyraża intensywność działania całkującego. Nazwa **czas zdwojenia** znajduje uzasadnienie na wykresie charakterystyki skokowej regulatora typu PI. W chwili $t = 0$ składowa działania całkującego regulatora jest równa składowej działania proporcjonalnego. Zatem całkowita wartość sygnału wyjściowego $u(t)$ w chwili $t = T_i$ jest zdwojona w stosunku do początkowego przyrostu wielkości wejściowej (w chwili $t = 0^+$), reprezentującego tylko działanie proporcjonalne. Stała czasowa T_d **czas wyprzedzenia** określa działanie różniczkujące regulatora. Dzięki działaniu różniczkowemu regulator może bardzo silnie reagować już na małe zmiany uchybu regulacji $e(t)$, uprzedza więc dalszy spodziewany wzrost uchybu przez odpowiednie oddziaływanie na obiekt regulacji.

Tabela 6.2

Transmitancje operatorowe, charakterystyki skokowe i charakterystyki amplitudowo-fazowe typowych regulatorów

| Typ regulatora | $Gr(s)$ | $h(t)$ | $Gr(j\omega)$ |
|----------------|---|--|--|
| P | K_r | <p style="text-align: center;">$K_r > 0$</p> | <p style="text-align: center;">$K_r > 0$</p> |
| I | $\frac{1}{sT_i}$ | <p style="text-align: center;">$\tg \alpha = \frac{1}{T_i}$</p> | <p style="text-align: center;">ω</p> |
| PI | $K_r \left(1 + \frac{1}{sT_i}\right)$ | <p style="text-align: center;">$\tg \alpha = \frac{K_r}{T_i}$</p> | <p style="text-align: center;">K_r</p> <p style="text-align: center;">ω</p> |
| PD | $K_r(1+sT_d)$ | | <p style="text-align: center;">ω</p> |
| PID | $K_r \left(1 + \frac{1}{sT_i} + sT_d\right)$ | <p style="text-align: center;">$\tg \alpha = \frac{K_r}{T_i}$</p> | <p style="text-align: center;">ω</p> |
| RPD | $K_r \left(1 + \frac{sT_d}{sT+1}\right)$ | <p style="text-align: center;">$K_r(1 + \frac{T_d}{T})$</p> | <p style="text-align: center;">K_r</p> <p style="text-align: center;">$K_r(1 + \frac{T_d}{T})$</p> |
| RPID | $K_r \left(1 + \frac{1}{sT_i} + \frac{sT_d}{sT+1}\right)$ | <p style="text-align: center;">$\tg \alpha = \frac{K_r}{T_i}$</p> | <p style="text-align: center;">K_r</p> <p style="text-align: center;">$K_r(1 + \frac{T_d}{T})$</p> |

Wartość liczbowa T_d można zdefiniować następująco: T_d jest to czas, po którym przy włączeniu na wejście regulatora typu PD sygnału narastającego liniowo $e(t) = t$, sygnał związany z działaniem proporcjonalnym zrówna się z sygnałem pochodząym od działania różniczkowego.

Działanie różniczkowe w regulatorach typu PD lub PID rzadko bywa idealne, częściej akcja różniczkująca opisana jest transmitancją $T_d s / (1 + Ts)$ i wówczas odpowiednie transmitancje rzeczywistych regulatorów RPD i RPID zapisać można w postaci:

$$G_r(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p \left(1 + \frac{T_d s}{Ts + 1} \right) \quad (6.10)$$

$$G_r(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + \frac{T_d s}{Ts + 1} \right) \quad (6.11)$$

Stała czasowa T jest ścisłe określona i nienastawialna.

Charakterystyki czasowe i częstotliwościowe wymienionych rodzajów regulatorów zestawione w tabeli 6.2 (na wklejce).

Wzory od (6.5) do (6.11) nie wyczerpują wszelkich możliwych właściwości regulatorów liniowych. Mają one najwyżej trzy dające się nastawić parametry określające ich właściwości dynamiczne. Niemniej jednak, dla większości praktycznie spotykanych przypadków i wymagań działanie typu P, PI, PD i PID jest dostateczne. Cechy regulatora, jako jednego z podstawowych elementów układu automatycznej regulacji, są jednymi z głównych czynników, decydujących o charakterze i właściwości całego układu. Z kolei zadania i wymagania stawiane układowi mają decydujący wpływ na dobór typu regulatora.

W skład struktury przemysłowego układu sterowania (rys. 6.5), wchodzą:

- regulator,
- element wykonawczy,
- element pomiarowy,
- obiekt.

Regulator pobiera sygnał uchybu, który ma zwykle bardzo niski poziom mocy, i wzmacnia go do wystarczająco wysokiego poziomu. Sygnał wyjściowy z regulatora jest podawany do urządzenia wykonawczego, np. siłownika pneumatycznego, zaworu, silnika hydraulicznego lub silnika elektrycznego. Czujnik lub element pomiarowy przetwarza zmienną wyjściową y na inną odpowiednią zmienną x , taką jak przemieszczenie, ciśnienie lub napięcie, tak aby mogła być wykorzystana do porównania sygnału wyjściowego z sygnałem wejściowym zadającym. Element ten znajduje się w pętli sprzężenia zwrotnego układu. Sygnał zadający wchodzący do regulatora musi być w tych samych jednostkach, co sygnał od sprzężenia zwrotnego z czujnika lub elementu pomiarowego.

Projektując układ regulacji, o wyborze typu regulatora należy zdecydować na podstawie własności fizycznych obiektu (narzuconych kryteriami jakości regulacji), z uwzględnieniem bezpieczeństwa, kosztów, dostępności, niezawodności, dokładności, wagi i rozmiaru układu regulacji.

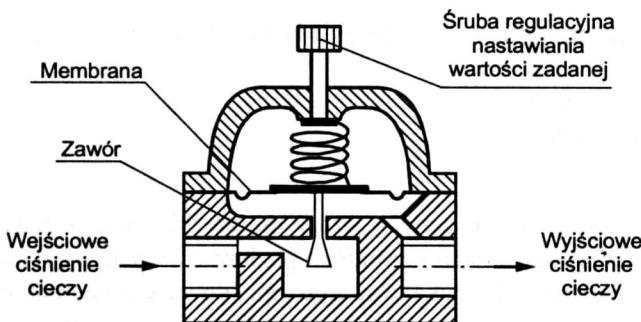
Regulatory, według sposobu budowy, dzielimy na dwie zasadnicze grupy:

- 1) regulatory nie korzystające z energii pomocniczej (o działaniu bezpośrednim),
- 2) regulatory korzystające z energii pomocniczej (o działaniu pośrednim), czyli wymagające elementu wykonawczego.

Regulatory nie korzystające z energii pomocniczej są to takie konstrukcje, w których energia potrzebna do oddziaływania na obiekt (czyli do przemieszczenia elementu nastawczego) jest pobierana najczęściej z urządzenia pomiarowego. Stanowi to istotne uproszczenie, ale jednocześnie stwarza ograniczenie możliwości regulatora.

Regulatory korzystające z energii pomocniczej dzielimy według rodzaju nośnika energii, użytego do zasilania znajdującego się w regulatorze wzmacniacza. Najczęściej są to regulatory elektryczne, rzadziej hydrauliczne i pneumatyczne. Większość regulatorów przemysłowych jako źródła mocy wykorzystuje prąd elektryczny, olej pod ciśnieniem lub sprężone powietrze.

Jako regulatory przemysłowe, w większości stosuje się regulatory o działaniu pośrednim – element pomiarowy i urządzenie wykonawcze są wtedy oddzielone od siebie. Jednak w bardzo prostym regulatorze, jakim jest regulator ciśnienia pokazany na rysunku 6.6, elementy te są połączone w jeden zespół. Mamy wtedy do czynienia z regulatorem o działaniu bezpośredniem, wykorzystującym moc wytworzoną przez element pomiarowy.



Rys. 6.6. Regulator ciśnienia

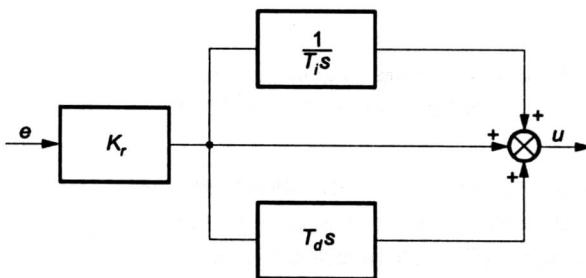
Sygnał zadający jest określony poprzez ustawienie śrubą regulacyjną siły sprężyny. Sterowane ciśnienie jest mierzone przez membranę. W zależności od wartości wyjściowego ciśnienia cieczy i ustawionej wartości zadanej, powstaje uchyb regulacji,

powodujący ścisknięcie sprężyny i zmniejszenie przekroju przepływowego. Taki regulator bezpośredni jest szeroko stosowany do sterowania ciśnieniem wody i gazu.

Ze względu na rodzaj przetwarzanych w regulatorze sygnałów dzielimy je na:

- regulatory analogowe,
- regulatory cyfrowe.

Ogólna struktura regulatora PID (także cyfrowego) da się sprowadzić do połączenia równoległego trzech członów podstawowych: proporcjonalnego, całkującego i różniczkującego (rys. 6.7). Większość typowych regulatorów analogowych zestawiono w tabeli 6.2.



Rys. 6.7. Ogólna struktura regulatora PID

6.4. Regulatorzy dwupołożeniowe

W dwupołożeniowym układzie regulacji element wykonawczy ma tylko dwa ustalone położenia, które są – w wielu przypadkach – po prostu włączeniem i wyłączeniem. Sterowanie dwupołożeniowe jest stosunkowo proste i niedrogie, i z tego powodu jest szeroko stosowane zarówno w domowych, jak i w przemysłowych układach sterowania.

Niech sygnałem wyjściowym z regulatora będzie $u(t)$, a sygnałem uchybu $e(t)$. W sterowaniu dwupołożeniowym sygnał $u(t)$ pozostaje na poziomie wartości maksymalnej, albo minimalnej, w zależności od tego, czy sygnał uchybu jest dodatni czy ujemny, stąd:

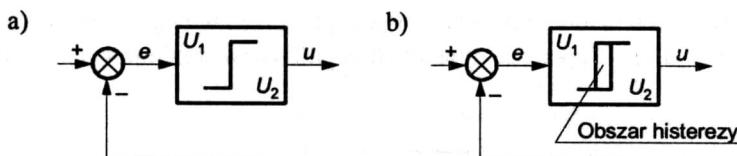
$$u(t) = U_1 \text{ dla } e(t) > 0,$$

$$u(t) = U_2 \text{ dla } e(t) < 0,$$

gdzie U_1 i U_2 są stałymi. Minimalna wartość U_2 jest zwykle równa albo zero, albo $-U_1$.

Regulatory dwupołożeniowe są na ogół urządzeniami elektrycznymi, a elektryczny zawór uruchamiany przez cewkę jest szeroko stosowany w takich regulatorach. Regulatorzy proporcjonalne pneumatyczne z bardzo dużymi wzmacnieniami działają jak sterowniki dwupołożeniowe i są czasami nazywane dwupołożeniowymi sterownikami pneumatycznymi.

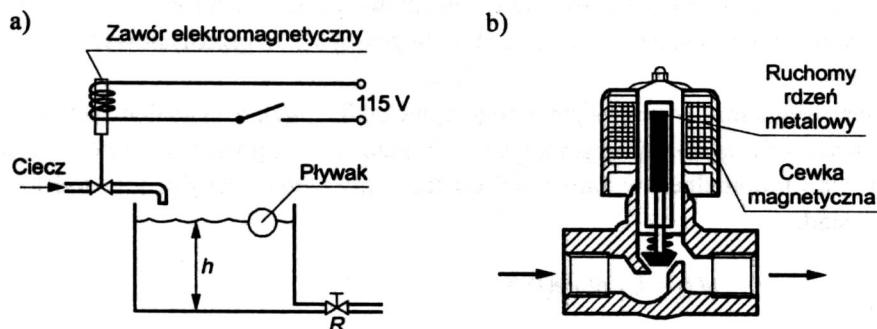
Rysunki 6.8a i 6.8b pokazują schematy blokowe regulatorów dwupołożeniowych.



Rys. 6.8. Schematy blokowe regulatora dwupołożeniowego: a) z przekaźnikiem idealnym; b) z przekaźnikiem rzeczywistym

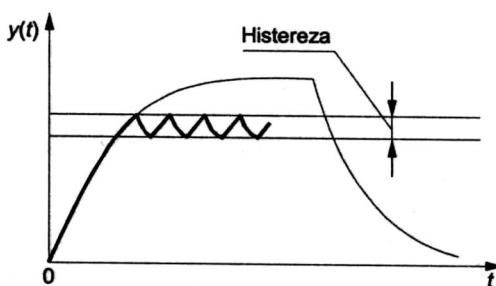
Obszar, przez jaki musi przejść sygnał uchybu, zanim nastąpi przełączenie, nazywany jest **obszarem histerezy**. Obszar histerezy, pokazany na rysunku 6.8b, powoduje, że sygnał wyjściowy sterownika $u(t)$ zachowuje aktualną wartość aż do momentu, kiedy sygnał uchybu wyjdzie z obszaru (tu: poza wartość zero). W niektórych przypadkach histereza wynika z niezamierzonego tarcia lub poślizgu; jednak dość często jest ona celowo realizowana, aby zapobiec zbyt częstemu działaniu mechanizmu włączania i wyłączania.

Rozważmy układ regulacji poziomu cieczy pokazany na rysunku 6.9a, w którym zawór elektromagnetyczny, pokazany na rysunku 6.9b, jest wykorzystany do regulacji poziomu cieczy w zbiorniku. Zawór ten jest albo otwarty, albo zamknięty. Przy takim sterowaniu dwupołożeniowym dopływ wody jest stały albo zerowy.



Rys. 6.9. Układ regulacji poziomu cieczy
(objaśnienia w tekście)

Jak to pokazano na rysunku 6.10, sygnał wyjściowy oscyluje pomiędzy dwoma granicami, określonymi przez histerezę, od jednego ustalonego położenia do drugiego. Zauważmy, że krzywa wyjściowa pokrywa się z krzywą wykładniczą, odpowiadającą napełnianiu i krzywą odpowiadającą opróżnianiu. Takie wahanie sygnału pomiędzy dwiema granicami jest typową charakterystyką odpowiedzi układu, poddanego regulacji dwupołożeniowej.



Rys. 6.10. Postać sygnału wyjściowego dla układu z rysunku 6.9

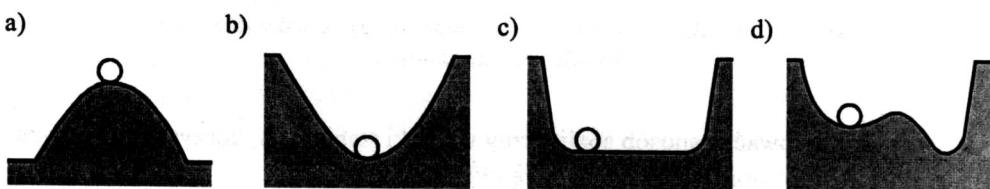
Na rysunku 6.10 możemy zauważyć, że amplituda drgań sygnału wyjściowego może być zredukowana przez zmniejszenie histerezy, co zwiększa liczbę włączeń i wyłączeń w ciągu minuty i zmniejsza trwałość użyteczną elementu. Wartość histerezy musi być określona na podstawie rozważań dotyczących wymaganej dokładności i trwałości elementu.

Więcej informacji o regulatorach można znaleźć w literaturze [10, 16, 17].

7. Stabilność liniowych stacjonarnych układów sterowania

7.1. Ogólne warunki stabilności

Stabilność układu sterowania jest najważniejszą jego cechą charakteryzującą zdolność układu do wykonania zadań, dla których został on zbudowany. Stabilność jest pojęciem określającym – w potocznym znaczeniu – zdolność zachowania pewnego stanu. Mimo iż każdy odnosi wrażenie, że pojęcie stabilności jest mu intuicyjnie znane, to jednak może ono być różnie interpretowane. Studiowanie problematyki stabilności można rozpocząć, posługując się prostymi przykładami z mechaniki. Rozpatrując zachowanie się kulki swobodnej (rys. 7.1), którą poddamy przesunięciu, możemy uznać, że pozycja równowagi, w jakiej znajduje się kula w czterech przypadkach a)–d) jest odpowiednio: niestabilna, stabilna asymptotycznie i globalnie, stabilna nieasymptotycznie i globalnie, stabilna asymptotycznie i lokalnie, a nie globalnie.

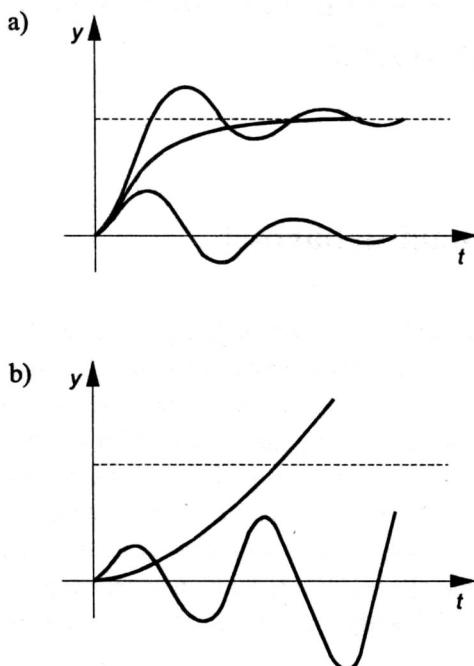


Rys. 7.1. Rodzaje równowagi: a) niestabilna; b) stabilna asymptotycznie i globalnie; c) stabilna nieasymptotycznie i globalnie; d) stabilna asymptotycznie i lokalnie, a nie globalnie

W przypadku c) kula znajduje się w pozycji równowagi różnej od wejściowej. Teoria Lapunowa, przez wprowadzenie pojęcia stabilności nieasymptotycznej, pozwala na analizę takiego przypadku.

Przez stabilność układu automatycznej regulacji (UAR) rozumiemy właściwość układu polegającą na powrocie do stanu równowagi stałej po ustaniu działania wymuszenia, które wywróciło układ z tego stanu, lub na osiągnięciu nowego stanu równowagi stałej, jeśli wymuszenie pozostało na stałym poziomie. Stabilność jest cechą, której

kategorycznie nie można naruszać. W naszych rozwiązańach stabilność charakteryzuje właściwości dynamiczne układu, które są warunkiem jego prawidłowej pracy. Przykładowe charakterystyki czasowe układów stabilnych i niestabilnych pokazano na rysunku 7.2.



Rys. 7.2. Przykładowe charakterystyki czasowe: a) układów stabilnych; b) układów niestabilnych

Aby sformułować w sposób analityczny warunki stabilności, korzystamy z równania różniczkowego opisującego dynamikę układu

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_0 \frac{d^m x}{dt^m} + \dots + b_1 \frac{dx}{dt} + b_0 x \quad (7.1)$$

Rozwiązanie tego równania jest sumą dwóch rozwiązań: ogólnego $y_0(t)$ i szczególnego $y_s(t)$. Rozwiązanie szczególne $y_s(t)$ uwzględnia rodzaj wymuszenia. Ponieważ rodzaj sygnału wejściowego nie ma znaczenia przy badaniu stabilności, układ będzie stabilny, gdy

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_0(t) = 0 \quad (7.2)$$

W celu sprawdzenia, czy układ jest stabilny, należy zbadać rozwiązanie ogólne równania różniczkowego jednorodnego

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = 0 \quad (7.3)$$

Korzystając z przekształcenia Laplace'a, otrzymamy równanie algebraiczne

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = 0 \quad (7.4)$$

zwane **równaniem charakterystycznym**. Pierwiastki równania charakterystycznego mogą przybrać wartości: zerowe, rzeczywiste dodatnie lub ujemne, zespolone z częścią rzeczywistą dodatnią, zerową lub ujemną. Jeżeli s_1, s_2, \dots, s_n są pierwiastkami tego równania w zakresie liczb rzeczywistych, to rozwiązanie ma postać

$$y_0(t) = C_1 e^{s_1 t} + C_2 e^{s_2 t} + \dots + C_n e^{s_n t} \quad (7.5)$$

Równanie to możemy zapisać w postaci

$$y_0(t) = \sum_{i=1}^n C_i e^{s_i t} \quad (7.6)$$

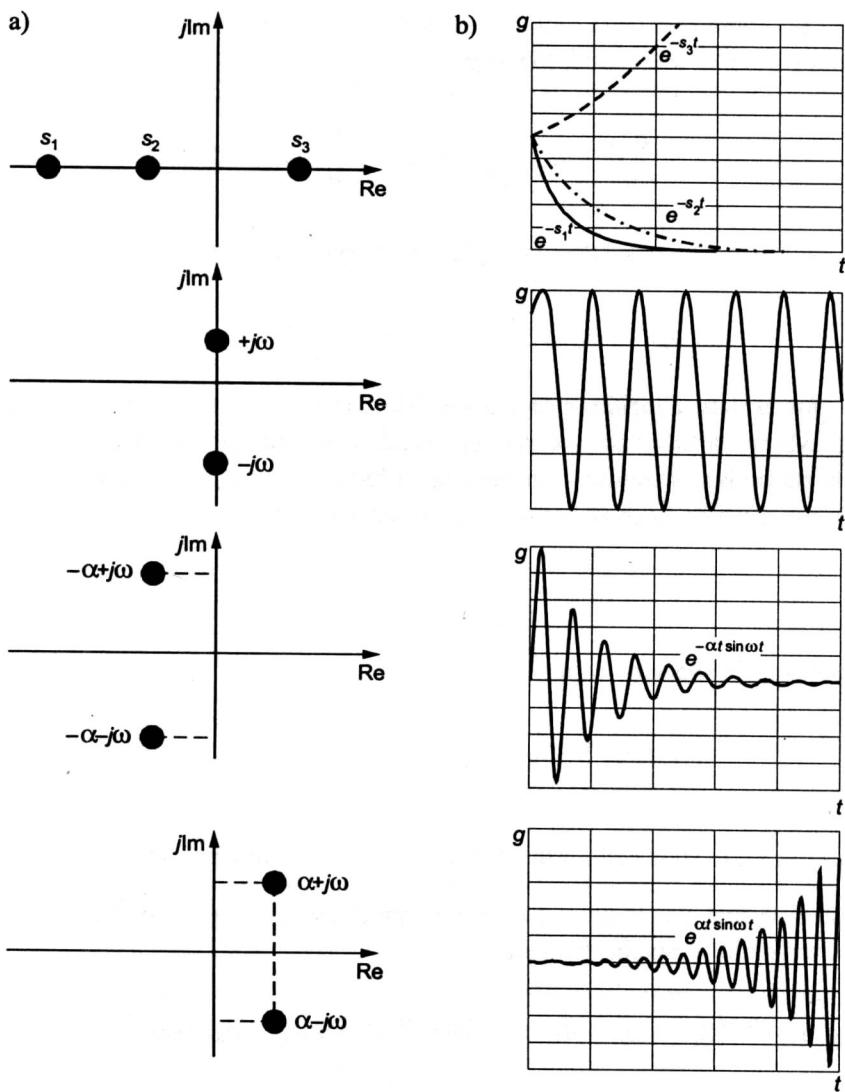
gdzie C_1, \dots, C_n to stałe całkowania wynikające z warunków początkowych.

Jeśli równanie ma pierwiastki zespolone sprzężone $s_{1,2} = \alpha_1 \pm j\omega_1; s_{3,4} = \alpha_2 \pm j\omega_2$, to w rozwiązaniu wystąpią składniki

$$y_0(t) = e^{\alpha_1 t} (A_1 \cos \omega_1 t + A_2 \sin \omega_1 t) + e^{\alpha_2 t} (A_3 \cos \omega_2 t + A_4 \sin \omega_2 t) \quad (7.7)$$

W zależności od wartości pierwiastków równania charakterystycznego otrzymamy różne przebiegi $y_0(t)$. Z wykresów przedstawionych na rysunku 7.3 wynika, że przebiegi $y_0(t)$ zanikają w funkcji czasu, jeżeli pierwiastki równania charakterystycznego są rzeczywiste ujemne lub zespolone o częściach rzeczywistych ujemnych. Jeżeli chociażby jedna z części rzeczywistych s_i jest dodatnia, to odpowiednia składowa w wyrażeniu (7.7) ma czynnik $e^{\alpha t}$, co przy $\alpha > 0$ i $t \rightarrow \infty$ powoduje, że $y_0(t)$ zmierza do nieskończoności, czyli układ jest niestabilny.

Ogólnie można stwierdzić, że składowa swobodna ma charakter zanikający (zmiera do zera), jeżeli pierwiastki równania charakterystycznego leżą w lewej półpłaszczyźnie płaszczyzny zmiennej zespolonej s .



Rys. 7.3. Wpływ lokalizacji pierwiastków równania charakterystycznego na stabilność układu:
a) lokalizacja pierwiastków na płaszczyźnie zespolonej; b) charakterystyki czasowe

7.2. Matematyczne warunki stabilności

W zagadnieniach dotyczących stabilności układów sterowania przyjmiemy ogólniejsze podejście. Będziemy badać stabilność rozwiązań równań różniczkowych opisujących układ i śledzić jego zachowanie na podstawie przebiegu trajektorii w przestrzeni-

ni stanu (tzn. takiej, w której położenie punktu określone jest przez wszystkie współrzędne tej przestrzeni i jednoznacznie charakteryzuje stan dynamiczny układu).

Wyróżniamy dwa rodzaje stabilności:

- 1) stabilność układu w stanie swobodnym (gdy na układ nie działają sygnały zewnętrzne, zarówno sterujące, jak i zakłócające);
- 2) stabilność układu poddanego działaniom zewnętrznym.

Niech będzie dany układ jednowymiarowy, ciągły, stacjonarny, opisany równaniem różniczkowym nieliniowym n -tego rzędu, w którym potrafimy zgrupować trzy wyrażenia

$$F[y(t), y^{(1)}(t), \dots, y^{(n)}(t)] = f_1[u(t), u^{(1)}(t), \dots, u^{(m)}(t)] + f_2[z(t), z^{(1)}(t), \dots, z^{(l)}(t)] \quad (7.8)$$

Pierwsze z nich zawiera sygnał wyjściowy $y_0(t)$ i jego n pochodnych, drugie – sygnał sterujący $u(t)$ i jego m pochodnych, trzecie – sygnał zakłócający $z(t)$ i jego l pochodnych.

W przypadku gdy układ znajduje się w stanie swobodnym, obydwa wyrażenia po prawej stronie równania (7.8) są równe zero, a zatem

$$F[y(t), y^{(1)}(t), \dots, y^{(n)}(t)] = 0 \quad (7.9)$$

Niech w stanie początkowym $t = t_0$ stan dynamiczny układu swobodnego będzie jednoznacznie określony przez znaną wartość sygnału wyjściowego $y_0(t)$ oraz wartości jego pochodnych do rzędu $n - 1$ włącznie, tzn. $y^{(1)}(t_0), \dots, y^{(n-1)}(t_0)$. Wprowadźmy współrzędne fazowe stanu:

$$y_1(t) = y(t),$$

$$y_2(t) = y^{(1)}(t),$$

$$y_3(t) = y^{(2)}(t),$$

⋮

$$y_n(t) = y^{(n-1)}(t).$$

Stan dynamiczny układu możemy wtedy określić w dowolnej chwili przez wektor $y(t)$ w przestrzeni fazowej mający składowe $y_1(t), \dots, y_n(t)$. Mówimy, że układ swobodny znajduje się w równowadze, jeżeli wszystkie pochodne $y^{(1)}(t), \dots, y^{(n)}(t)$ występujące w równaniu (7.9) są równe zeru. Punkt przestrzeni fazowej, w którym to występuje, nazywamy punktem równowagi. Przymijmy, że jeżeli układ swobodny znajduje się w stanie równowagi, to odpowiadający temu punkt równowagi w przestrzeni fazowej umieszczały w początku jej układu współrzędnych. Jest to dogodne przy badaniu

procesu przejściowego przy $t > t_0$ na podstawie trajektorii, jaką punkt opisujący wychodzący z położenia początkowego $y_1(t_0), \dots, y_n(t_0)$ kreśli w n -wymiarowej przestrzeni fazowej, mianowicie:

- jeżeli dla $t \rightarrow \infty$ trajektoria dąży do początku układu współrzędnych (punkt równowagi), to układ jest **stabilny asymptotycznie**;
- jeżeli dla $t \rightarrow \infty$ trajektoria oddala się nieskończonie do początku układu współrzędnych, to układ jest **niestabilny**;
- jeżeli dla $t \rightarrow \infty$ trajektoria nie wychodzi poza pewien ograniczony obszar otaczający początek układu współrzędnych, to układ jest **stabilny w sensie Lapunowa**.

W tym ostatnim przypadku mówimy, że początek układu współrzędnych jest dla układu swobodnego punktem stabilności w sensie Lapunowa, jeżeli dla liczby dodatniej ϵ można znaleźć taką liczbę δ , żeby przy

$$\|y(t_0)\| < \delta \quad (7.10)$$

obowiązywała nierówność

$$\|y(t)\| < \epsilon \quad \text{dla } t > t_0 \quad (7.11)$$

Przez $\|y\|$ będziemy oznaczać w przestrzeni fazowej, będącej liniową przestrzenią wektorową, normę wektora y o składowych y_1, y_2, \dots, y_n równą:

$$\|y(t)\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n [y_k(t)]^2} = \sqrt{y_1^2(t) + y_2^2(t) + \dots + y_n^2(t)} \quad (7.12)$$

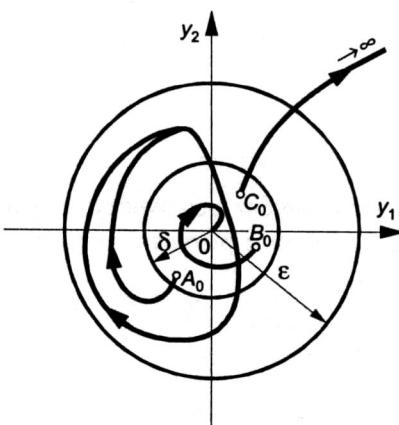
Norma ta w n -wymiarowej przestrzeni euklidesowej przedstawia odległość punktu znajdującego się w położeniu określonym przez współrzędne fazowe y_1, y_2, \dots, y_n od początku układu współrzędnych. Zatem jeżeli warunki (7.10) i (7.11) są spełnione, to przy stanie początkowym, odpowiadającym położeniu punktu opisującego wewnątrz kuli o promieniu δ , trajektoria układu swobodnego nie wychodzi poza kulę o promieniu ϵ przy $t > t_0$.

Mówimy, że początek układu współrzędnych fazowych jest dla układu swobodnego punktem **stabilności asymptotycznej**, jeżeli można dobrać taką dodatnią liczbę δ , żeby przy spełnionym warunku (7.10) i dla $t > t_0$ trajektoria dążyła do początku układu współrzędnych tzn.

$$\left\| y(t) \right\|_{t \rightarrow +\infty} \rightarrow 0 \quad (7.13)$$

W przypadku gdy układ jest stabilny dla dowolnych warunków początkowych, a nie tylko dla spełniających nierówność (7.13) przy skończonej wartości δ , nazywamy

go stabilnym globalnie. Wtedy trajektoria układu swobodnego wychodząca z dowolnego punktu przestrzeni fazowej osiąga początek układu współrzędnych (**stabilność globalna asymptotyczna**), albo dochodzi do obszaru określonego wzorem (7.11) i pozostałe w nim (**stabilność globalna w sensie Lapunowa**).



Rys. 7.4. Przebiegi trajektorii fazowej dla układu drugiego rzędu wychodzące z punktu: \$A_0\$ – dla układu stabilnego w sensie Lapunowa, \$B_0\$ – dla układu stabilnego asymptotycznie, \$C_0\$ – dla układu niestabilnego

W celu zilustrowania różnych przypadków stabilności układu swobodnego, na rysunku 7.4 przedstawiono przebiegi trajektorii na płaszczyźnie fazowej dla układu drugiego rzędu. Punkty \$A_0\$, \$B_0\$ i \$C_0\$ odpowiadające stanowi początkowemu \$y(t_0)\$ znajdują się wewnątrz okręgu o promieniu \$\delta\$. W przypadku gdyby układ był stabilny globalnie, punkty \$A_0\$ i \$B_0\$ mogłyby znajdować się w dowolnym miejscu przestrzeni fazowej, tj. \$\delta = +\infty\$.

Dochodzące rozważania dotyczą ogólnie stabilności w stanie swobodnym jednowymiarowego układu nieliniowego opisanego równaniem (7.9). Natomiast w przypadku układu liniowego stan swobodny jest opisany jednorodnym równaniem liniowym o stałych współczynnikach

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = 0 \quad (7.14)$$

Na podstawie rozwiązań tego równania badamy stabilność układu swobodnego. Rozwiązanie ogólne równania różniczkowego \$n\$-tego rzędu, zwyczajnego liniowego o stałych współczynnikach i jednorodnego, jest kombinacją liniową \$n\$ rozwiązań niezależnych liniowo. Jak wykazaliśmy w poprzednim podrozdziale, postać tych rozwiązań zależy od pierwiastków równania charakterystycznego

$$a_n s_n + a_{n-1} s_{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 + 0 \quad (7.15)$$

Dla przykładu rozpatrzymy kilka przypadków.

- Równanie charakterystyczne ma wyłącznie pojedyncze pierwiastki rzeczywiste ujemne, na przykład

$$g(t) = L^{-1} \left[\frac{L(s)}{(s+1)(s+2)} \right] = L^{-1} \left[\frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2} \right] = Ae^{-t} + Be^{-2t},$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = 0,$$

czyli układ jest stabilny asymptotycznie.

- Równanie charakterystyczne oprócz pojedynczych ujemnych pierwiastków rzeczywistych ma również wielokrotne pierwiastki rzeczywiste ujemne

$$g(t) = L^{-1} \left[\frac{L(s)}{(s+1)(s+2)} \right] = L^{-1} \left[\frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{s+2} \right] =$$

$$= Ae^{-t} + Be^{-2t} Cte^{-2t},$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = 0,$$

wtedy układ jest również stabilny asymptotycznie.

- Równanie charakterystyczne ma rzeczywiste pierwiastki ujemne i pierwiastki zespolone o częściach rzeczywistych ujemnych

$$\begin{aligned} g(t) &= L^{-1} \left[\frac{L(s)}{(s+1)(s+2s+4)} \right] = L^{-1} \left[\frac{A}{s+1} + \frac{Bs+C}{s^2+2s+4} \right] = \\ &= Ae^{-t} + Be^{-t} \cos t\sqrt{3} + \frac{C-B}{\sqrt{3}} e^{-t} \sin t\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Układ jest stabilny asymptotycznie, gdyż występują sinusoidy o gasnącej amplitudzie.

- Równanie charakterystyczne ma oprócz pierwiastków o ujemnych częściach rzeczywistych jeden pierwiastek zerowy

$$g(t) = L^{-1} \left[\frac{L(s)}{(s+1)s} \right] = L^{-1} \left[\frac{A}{s+1} + \frac{B}{s} \right] = Ae^{-t} + B,$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = B.$$

Stabilność nieasymptotyczna związana jest z występowaniem jednego pierwiastka zerowego; układ jest stabilny w sensie Lapunowa.

- Równanie charakterystyczne oprócz pierwiastków ujemnych ma wielokrotny pierwiastek zerowy

$$g(t) = L^{-1} \left[\frac{L(s)}{(s+1)s^2} \right] = L^{-1} \left[\frac{A}{s+1} + \frac{B}{s} + \frac{C}{s^2} \right] = Ae^{-t} + B + Ct,$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = \infty,$$

wtedy układ jest niestabilny.

- Równanie charakterystyczne oprócz pierwiastków ujemnych ma pierwiastki dodatnie

$$g(t) = L^{-1} \left[\frac{L(s)}{(s+1)(s-2)} \right] = L^{-1} \left[\frac{A}{s+1} + \frac{B}{s-2} \right] = Ae^{-t} + Be^{2t},$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = \infty,$$

wtedy układ jest niestabilny.

- Równanie charakterystyczne oprócz pierwiastków ujemnych ma pierwiastki zespolone o dodatniej części rzeczywistej

$$g(t) = L^{-1} \left[\frac{L(s)}{(s+1)(s^2 - 2s + 4)} \right] = L^{-1} \left[\frac{A}{s+1} + \frac{Bs+C}{s^2 - 2s + 4} \right] =$$

$$= Ae^{-t} + Be^t \cos t\sqrt{3} + \frac{C+B}{\sqrt{3}} e^t \sin t\sqrt{3},$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = \infty.$$

wtedy układ jest niestabilny.

- Równanie charakterystyczne oprócz pierwiastków ujemnych ma pierwiastki zespolone o zerowych częściach rzeczywistych

$$g(t) = L^{-1} \left[\frac{L(s)}{(s+1)(s^2 + 4)} \right] = L^{-1} \left[\frac{A}{s+1} + \frac{Bs+C}{s^2 + 4} \right] =$$

$$= Ae^{-t} + B \cos 2t + \frac{C}{2} \sin 2t,$$

wtedy występują drgania niegasnące, układ jest stabilny w sensie Lapunowa.

Dla układu swobodnego opisanego równaniem (7.14) warunek konieczny stabilności w sensie Lapunowa jest następujący: wszystkie pierwiastki rzeczywiste i części rzeczywiste pierwiastków zespolonych powinny być ujemne, a krotność pierwiastków rzeczywistych równych zeru, jak i krotność par pierwiastków urojonych, powinna być co najwyżej równa jedności. Gdy spełniony jest powyższy warunek konieczny, układ jest stabilny w sensie Lapunowa, gdy:

- występuje jeden pierwiastek rzeczywisty równy zeru,
- występują pojedyncze (nie wielokrotne) pary pierwiastków urojonych,
- przy jednym pierwiastku rzeczywistym równym zeru występują pojedyncze (nie wielokrotne) pary pierwiastków urojonych.

Zatem układ liniowy jest stabilny w sensie Lapunowa, jeżeli pierwiastki jego równania charakterystycznego leżą w lewej półpłaszczyźnie płaszczyzny zmiennej zespolonej, natomiast na osi urojonej występują pierwiastki pojedyncze (w tym co najwyżej jeden rzeczywisty równy zeru). Stabilność układu liniowego w stanie swobodnym jest podstawowym stawianym mu wymaganiem, przy spełnieniu którego, po ustaniu działania zakłócenia, ustalają się warunki pracy. Z reguły żąda się, aby układ liniowy był stabilny asymptotycznie, ponieważ wtedy występuje globalna stabilność asymptotyczna. Warunkiem koniecznym i wystarczającym stabilności asymptotycznej jest, aby wszystkie pierwiastki rzeczywiste oraz części rzeczywiste pierwiastków urojonych były ujemne, możemy to zapisać

$$\operatorname{Re}(s_k) < 0 \quad (7.16)$$

Stabilność w sensie Lapunowa jest zwykle w realnych układach liniowych nie do przyjęcia. Pracują one wtedy bowiem na granicy stabilności i niewielka zmiana ich parametrów może spowodować niestabilność układu.

Ocena stabilności układu na podstawie znajomości rozkładu pierwiastków (wartości własnych) wymaga rozwiązania równania charakterystycznego, czyli wyznaczenia miejsc zerowych wielomianu. W przypadku równania wysokiego stopnia jest to bardzo kłopotliwe. Z tego względu stosowane są twierdzenia pomocnicze (kryteria stabilności) pozwalające ominąć tę trudność. Najbardziej znanymi są kryteria analityczne Hurwitz, Routha, kryterium graficzne Michajłowa oraz analityczno-graficzne Nyquista. Pierwsze dwa kryteria wymagają znajomości transmitancji układu w postaci analitycznej. Kryteria graficzne oparte są na charakterystykach częstotliwościowych.

7.3. Kryterium Hurwitz'a

Algebraiczne kryterium stabilności, oparte na badaniu współczynników równania charakterystycznego, udowodnione zostało przez Hurwitz'a w 1895 r. Pozwala ono na sprawdzenie, czy równanie algebraiczne dowolnego stopnia ma wyłącznie pierwiastki ujemne lub o ujemnych częściach rzeczywistych.

Warunkiem koniecznym i wystarczającym, żeby układ liniowy stacjonarny ciągły był stabilny asymptotycznie, jest aby:

- wszystkie współczynniki równania charakterystycznego

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = 0$$

były różne od zera i jednakowego znaku

$$a_i > 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n;$$

- wszystkie podwyznaczniki główne (minory) wyznacznika Δ_n (wyznacznika Hurwitz'a) były większe od zera.

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & a_2 & a_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & a_4 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} \quad (7.17)$$

$$\Delta_1 = a_{n-1} > 0; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ a_n & a_{n-2} \end{vmatrix} > 0; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix} > 0.$$

Jak widać, we wzorze (7.17) wyznacznik Hurwitz'a tworzymy umieszczając na głównej przekątnej kolejne współczynniki wielomianu od a_{n-1} do a_0 . Następnie w poszczególnych kolumnach wpisujemy powyżej wyrazu na przekątnej głównej wyznacznika współczynniki o indeksach kolejno zmniejszających się o jeden, a poniżej wyrazu na przekątnej głównej – współczynniki o indeksach kolejno zwiększających się o jeden.

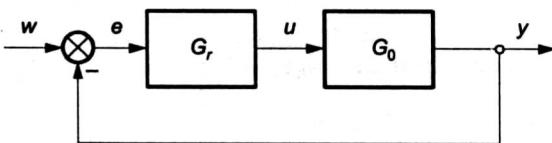
Przykład 7.1

Dany jest układ regulacji automatycznej, którego schemat blokowy przedstawiono na rysunku 7.5. Transmitancje:

$$- \text{regulatora } G_r(s) = \frac{K_1}{T_1 s + 1},$$

$$- \text{obiektu } G_0(s) = \frac{K_2}{s(T_2 s + 1)}.$$

Wyznaczyć zakresy parametrów K_1 , K_2 , T_1 i T_2 , przy których układ jest stabilny.



Rys. 7.5. Układ automatycznej regulacji

Transmitancja operatorowa układu zamkniętego

$$G(s) = \frac{G_0 G_r}{1 + G_0 G_r} = \frac{K_1 K_2}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1) + K_1 K_2}.$$

Równanie charakterystyczne ma postać

$$s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1) + K_1 K_2 = 0,$$

a po przekształceniu

$$T_1 T_2 s^3 + (T_1 + T_2)s^2 + s + K_1 K_2 = 0.$$

W tym przypadku $n = 3$, należy więc zbadać tylko jeden wyznacznik drugiego stopnia

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_2 & a_0 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} T_1 + T_2 & K_1 K_2 \\ T_1 T_2 & 1 \end{vmatrix} = T_1 + T_2 - K_1 K_2 T_1 T_2.$$

Aby układ był stabilny, parametry regulatora K_1 i T_1 oraz K_2 i T_2 muszą spełniać warunek

$$\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} > K_1 K_2.$$

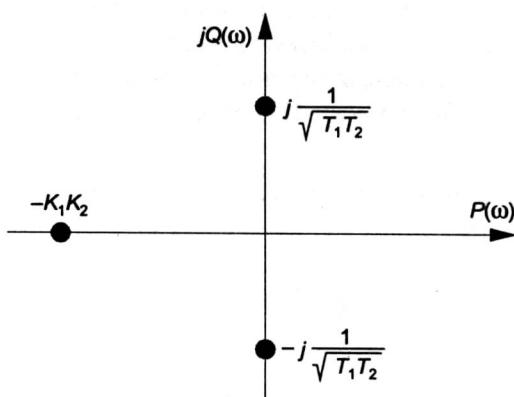
Aby układ był na granicy stabilności, musi zachodzić zależność

$$\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} = K_1 K_2.$$

Równanie charakterystyczne ma wtedy postać

$$(T_1 T_2 s^2 + 1)(s + K_1 K_2) = 0.$$

Rozkład wartości własnych tego równania pokazano na rysunku 7.6.



Rys. 7.6. Rozkład wartości własnych

Kryterium Hurwitz'a umożliwia stwierdzenie stabilności asymptotycznej, jak i nie-asymptotycznej. Możliwość wystąpienia stabilności nieasymptotycznej zachodzi wtedy, kiedy w równaniu charakterystycznym współczynnik $a_0 = 0$. Po podzieleniu stron równania przez s, otrzymujemy równanie stopnia $n-1$, w odniesieniu do którego stosujemy kryterium Hurwitz'a.

Kryterium Routha, dogodniejsze w zastosowaniu do układów wysokich rzędów, ma dodatkowo tę zaletę, że pozwala w przypadku niestabilności układu określić liczbę pierwiastków leżących w prawej półpłaszczyźnie zmiennej zespolonej.

7.4. Kryterium Michajłowa

Kryterium Michajłowa służy do oceny stabilności układu liniowego jednowymiarowego, a właściwie do uzyskania metodą graficzną odpowiedzi na pytanie: ile pierwiastków równania charakterystycznego leży w prawej półpłaszczyźnie.

Kryterium to umożliwia badanie stabilności na podstawie przebiegu na płaszczyźnie zmiennej zespolonej wykresu funkcji $N(j\omega)$, otrzymanej z wielomianu charakterystycznego po podstawieniu $s = j\omega$.

$$N(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 \quad (7.18)$$

Wyrażenie to zapiszemy w postaci

$$N(s) = a_n (s - s_1)(s - s_2)\dots(s - s_n) \quad (7.19)$$

Każdemu miejscu zerowemu s_k ($k = 1, 2, \dots, n$) tego wielomianu odpowiada punkt na płaszczyźnie zmiennej zespolonej. Zatem poszczególne czynniki $(s - s_k)$ wielomianu $N(s)$ można przedstawić na tej płaszczyźnie przez odpowiedni wektor. Jest on różnicą wektorów otrzymanych po połączeniu środka współrzędnych z punktami odpowiadającymi s oraz s_k . Obieramy $s = j\omega$ i wtedy ze wzoru (7.19) otrzymujemy

$$N(j\omega) = a_n (j\omega - s_1)(j\omega - s_2)\dots(j\omega - s_n) \quad (7.20)$$

lub inaczej

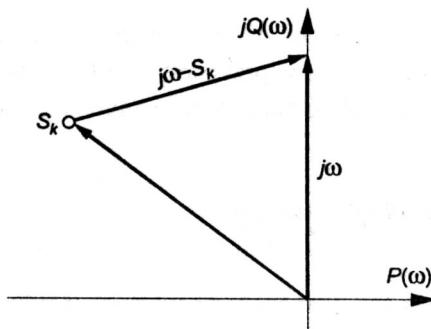
$$N(j\omega) = |N(j\omega)| e^{j\Phi} \quad (7.21)$$

gdzie:

$$|N(j\omega)| = a_n |j\omega - s_1| \dots |j\omega - s_n|,$$

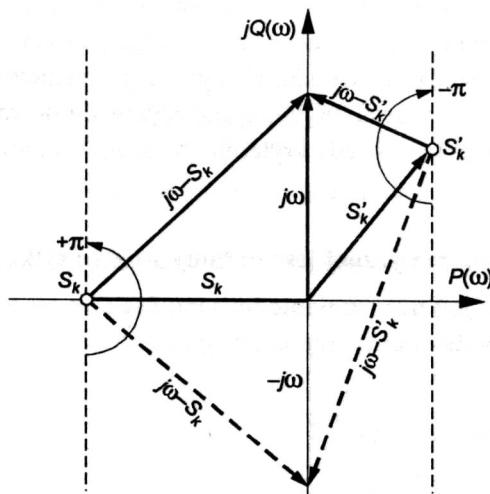
$$\Phi = \arg N(j\omega) = \arg(j\omega - s_1) + \dots + \arg(j\omega - s_n).$$

Wektor odpowiadający $j\omega$ jest położony na osi urojonej i końce poszczególnych wektorów przedstawiających czynniki $(j\omega - s_k)$ znajdują się na tej osi (rys. 7.7).



Rys. 7.7. Układ wektorów na płaszczyźnie zespolonej

Jeżeli będziemy zmieniać pulsację ω , w zakresie od $-\infty$ do $+\infty$, to stwierdzimy, że zmiana argumentu wektora $(j\omega - s_k)$ zależy od położenia punktu odpowiadającego s_k na płaszczyźnie zmiennej zespolonej. W przypadku gdy punkt ten leży w lewej półpłaszczyźnie, wektor $(j\omega - s_k)$ przy zmianie $-\infty < \omega < +\infty$ obróci się w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara o kąt $+\pi$ (rys. 7.8).



Rys. 7.8. Zmiany argumentu wektora $(j\omega - s_k)$ przy zmianach ω od $-\infty$ do $+\infty$

Natomiast gdy punkt odpowiadający s_k leży w prawej półpłaszczyźnie, to wektor $(j\omega - s_k)$ przy zmianie $-\infty < \omega < +\infty$ obróci się w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara o kąt $-\pi$. Widzimy więc, że zależnie od znaku części rzeczywistej pierwiastka s_k , czyli $R_e s_k$ występują różne ($+\pi$ lub $-\pi$) zmiany argumentu wektora $(j\omega - s_k)$, które oznaczymy przez $\Delta \arg(j\omega - s_i)$. Ponieważ wyrażenie $N(j\omega)$ jest iloczynem (7.20), argument $N(j\omega)$ jest sumą argumentów poszczególnych czynników we wzorze (7.21), czyli

$$\Delta \arg N(j\omega) = \sum_{k=1}^n \Delta \arg(j\omega - s_k).$$

Jeżeli z liczby n wszystkich pierwiastków, m pierwiastków znajduje się w prawej półpłaszczyźnie, a $(n - m)$ – w lewej, to zmiana argumentu $N(j\omega)$ przy $-\infty < \omega < +\infty$ wyraża się wzorem

$$\Delta \arg N(j\omega) = (n - m)\pi - m\pi = (n - 2m)\pi \quad (7.22)$$

$-\infty < \omega < \infty$

Warunkiem stabilności jest, aby wszystkie pierwiastki miały ujemne części rzeczywiste (czyli $m = 0$), dlatego zachodzi

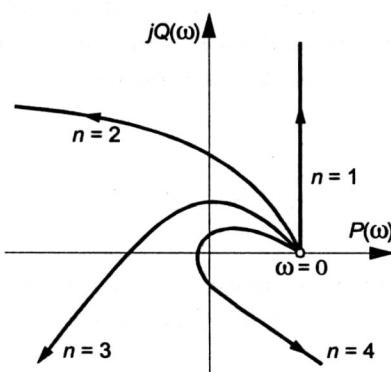
$$R_e s_k < 0, \quad \text{jeżeli} \quad \Delta \arg N(j\omega) = n\pi. \\ -\infty < \omega < \infty$$

Zatem po wykreśleniu krzywej $N(j\omega)$ (nazywanej hodografem Michajłowa) możemy, na podstawie zmian jej argumentu odpowiadających zmianom pulsacji od $-\infty$ do $+\infty$, wnioskować o stabilności układu. Uwzględniając symetrię względem osi rzeczywistych dwóch gałęzi wykresu $N(j\omega)$, ograniczymy się do rozważenia przebiegu krzywej w zakresie $0 < \omega < \infty$. Wtedy kryterium Michajłowa można sformułować następująco:

Układ regulacji automatycznej jest stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy zmiana argumentu krzywej $N(j\omega)$ przy zmianie pulsacji $0 < \omega < +\infty$ wynosi $n\frac{\pi}{2}$, gdzie n oznacza stopień równania charakterystycznego, tzn.

$$\Delta \arg N(j\omega) = \frac{n\pi}{2} \\ 0 < \omega < \infty \quad (7.23)$$

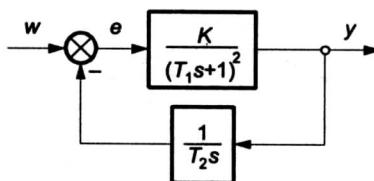
Interpretując geometrycznie kryterium Michajłowa stwierdzamy, że krzywa $N(j\omega)$ układu stabilnego asymptotycznie przy zmianie ω od 0 do $+\infty$ przechodzi kolejno w kierunku dodatnim przez n ćwiartek płaszczyzny zmiennej zespolonej. Na rysunku 7.9 przedstawiono wykresy $N(j\omega)$ dla stabilnych asymptotycznie układów rzędu od pierwszego do czwartego.



Rys. 7.9. Przykładowe wykresy Michajłowa układów stabilnych asymptotycznie rzędu od $n = 1$ do $n = 4$

Przykład 7.2

Dany jest układ regulacji automatycznej jak na rysunku 7.10. Zbadać stabilność układu, wykorzystując kryterium Michajłowa, jeśli $T_1 = 0,14$ s, $T_2 = 2$ s i $K = 10$. Jakie powinno być K , by układ znalazł się na granicy stabilności?



Rys. 7.10. Schemat blokowy układu regulacji

Transmitancja zastępcza układu zamkniętego wynosi

$$G_z(s) = \frac{\frac{K}{(T_1 s + 1)^2}}{1 + \frac{K}{(T_1 s + 1)^2} \cdot \frac{1}{T_2 s}} = \frac{K T_2 s}{T_2 s (T_1 s + 1)^2 + K}.$$

Przekształcając mianownik transmisji $G_z(s)$, otrzymujemy wielomian charakterystyczny układu

$$N(s) = T_1^2 T_2 s^3 + 2T_1 T_2 s^2 + T_2 s + K,$$

po podstawieniu danych otrzymujemy

$$N(s) = 0,04s^3 + 0,56s^2 + 2s + 10.$$

Podstawiając $s = j\omega$ oraz wyodrębniając część rzeczywistą i urojoną, otrzymujemy

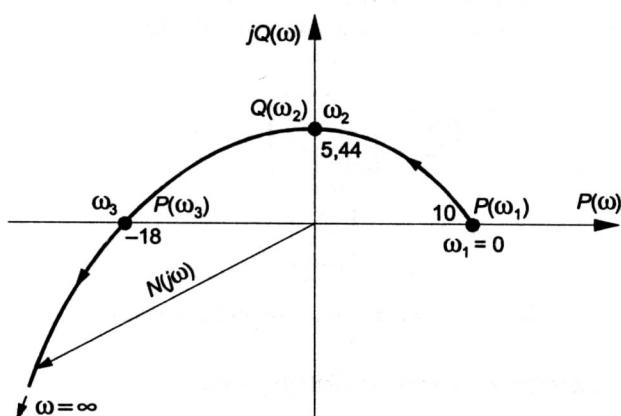
$$N(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega) = 10 - 0,56\omega^2 + j\omega(2 - 0,04\omega^2).$$

Następnie rozwiązuje się równania $P(\omega) = 0$ i $Q(\omega) = 0$, znajdując w ten sposób punkty, przy których wykres Michajłowa przecina osie. Wyniki obliczeń zestawiono w tabeli 7.1.

Tabela 7.1

| ω | 0 | 4,23 | 7,1 | ∞ |
|-------------|----|------|-----|-----------|
| $P(\omega)$ | 10 | 0 | -18 | $-\infty$ |
| $Q(\omega)$ | 0 | 5,44 | 0 | $-\infty$ |

Wykres krzywej $N(j\omega)$ przedstawiono na rysunku 7.11. Wykres ten przechodzi kolejno przez trzy ćwiartki płaszczyzny zmiennej zespolonej, więc układ jest stabilny.



Rys. 7.11. Krzywa Michajłowa dla układu z rysunku 7.10

Jeżeli współczynnik K , stanowiący wolny wyraz równania charakterystycznego, będzie stopniowo zwiększały się, to w granicznym przypadku krzywa $N(j\omega)$ przejdzie przez początek układu współrzędnych. Wtedy układ znajduje się na granicy stabilności i spełnione są równania $P(\omega) = 0$ i $Q(\omega) = 0$.

Możemy wtedy ułożyć układ równań:

$$K - 0,56\omega^2 = 0,$$

$$2 - 0,04\omega^2 = 0,$$

stąd wyznaczamy $K = 28$, dla którego układ znajduje się na granicy stabilności.

Uzupełnieniem kryterium Michajłowa jest następujące twierdzenie:

Calkowita zmiana argumentu wielomianu charakterystycznego $N(j\omega)$ niestabilnego układu liniowego jednowymiarowego rzędu n -tego, którego m pierwiastków leży w prawej półpłaszczyźnie wynosi

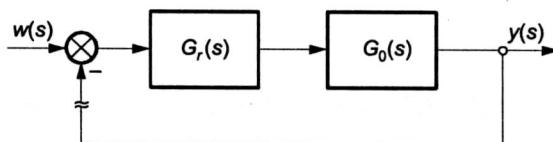
$$\Delta \arg N(j\omega) = (n - 2m) \frac{\pi}{2} \quad (7.24)$$

$$\omega \in (0, \infty)$$

Z zależności (7.24) można obliczyć liczbę pierwiastków równania charakterystycznego leżących w prawej półpłaszczyźnie.

7.5. Kryterium Nyquista

Kryterium Nyquista jest graficznym sposobem oceny stabilności układu zamkniętego (rys. 7.12) na podstawie znajomości charakterystyki częstotliwościowej układu otwartego. Ma ono duże znaczenie, bowiem wyznaczenie charakterystyki amplitudowo-fazowej układu otwartego jest możliwe na drodze analitycznej i doświadczalnej.



Rys. 7.12. Schemat blokowy układu regulacji

Transmitancja operatorowa układu otwartego, otrzymanego poprzez przerwanie pętli sprzężenia zwrotnego (rys. 7.12) wynosi

$$G(s) = \frac{y(s)}{w(s)} = G_r(s)G_0(s) \quad (7.25)$$

Przedstawiając tę transmitancję w postaci ilorazu wielomianów zmiennej s , otrzymamy

$$G(s) = \frac{M(s)}{N(s)} \quad (7.26)$$

przy czym $N(s) = 0$ jest równaniem charakterystycznym n -tego stopnia układu otwartego.

Transmitancja układu zamkniętego wynosi

$$G_z(s) = \frac{G_0(s)G_r(s)}{1 + G_0(s)G_r(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)} = \frac{M_z(s)}{N_z(s)} \quad (7.27)$$

lub po uwzględnieniu wyrażenia (7.26)

$$G_z(s) = \frac{M(s)}{N(s) + M(s)} \quad (7.28)$$

Równanie charakterystyczne układu zamkniętego

$$N_z(s) = N(s) + M(s) = 0 \quad (7.29)$$

jest również stopnia n .

Wnioskujemy zatem, że równanie charakterystyczne $N_z(s)$ ma te same miejsca zerowe, co wyrażenie w mianowniku transmitancji (7.27)

Przyrost argumentu wyrażenia $1+G(j\omega)$ przy zmianach częstotliwości ω od 0 do $+\infty$ wyniesie

$$\Delta \arg [1 + G(j\omega)] = \Delta \arg N_z(j\omega) - \Delta \arg N(j\omega),$$
$$0 < \omega < \infty \quad 0 < \omega < \infty \quad 0 < \omega < \infty$$

czyli

$$\Delta \arg [1 + G(j\omega)] = \Delta \arg [M(j\omega) + N(j\omega)] - \Delta \arg N(j\omega) \quad (7.30)$$
$$0 < \omega < \infty \quad 0 < \omega < \infty \quad 0 < \omega < \infty$$

Rozpatrzmy teraz dwa przypadki.

1) Układ otwarty jest stabilny

Równanie charakterystyczne układu otwartego ma wszystkie pierwiastki w lewej półpłaszczyźnie s . Zgodnie z kryterium Michajłowa zachodzi

$$\Delta \arg N(j\omega) = n \frac{\pi}{2}.$$
$$0 < \omega < \infty$$

Układ zamknięty będzie stabilny, jeżeli

$$\Delta \arg N_z(j\omega) = n \frac{\pi}{2}.$$
$$0 < \omega < \infty$$

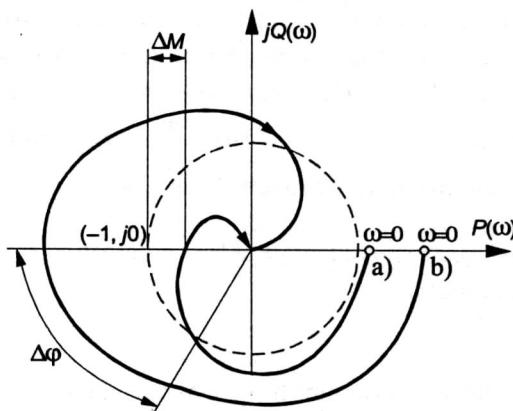
Warunek stabilności układu zamkniętego można wtedy zapisać

$$\Delta \arg [1 + G(j\omega)] = 0 \quad (7.31)$$
$$0 < \omega < \infty$$

Oznacza to, że wykres krzywej $[1 + G(j\omega)]$ nie może obejmować początku układu współrzędnych (musi się zaczynać i kończyć na jednej prostej wychodzącej z początku układu). Ten sam warunek, odniesiony do charakterystyki amplitudowo-fazowej układu otwartego $G(j\omega)$, będzie sformułowany następująco:

Jeżeli otwarty układ regulacji jest stabilny i jego charakterystika amplitudowo-fazowa $G(j\omega)$ dla pulsacji $0 < \omega < \infty$ nie obejmuje punktu $(-1, j0)$, to wtedy i tylko wtedy po zamknięciu będzie on również stabilny.

Przykładowe wykresy krzywych $G(j\omega)$ układów stabilnych i niestabilnych przedstawiono na rysunku 7.13.



Rys. 7.13. Charakterystyki amplitudowo fazowe: a) układów stabilnych; b) układów niestabilnych

W przypadku złożonego kształtu krzywych $G(j\omega)$ wygodnie jest posługiwać się wynikającą bezpośrednio z podanego kryterium regułą:

Układ zamknięty jest stabilny, jeżeli punkt $(-1, j0)$ znajduje się w obszarze leżącym po lewej stronie charakterystyki $G(j\omega)$, idąc w stronę rosnących ω .

2) Układ otwarty jest niestabilny

Równanie charakterystyczne układu otwartego ma $(n - m)$ pierwiastków w lewej półpłaszczyźnie zmiennej s oraz m pierwiastków w prawej półpłaszczyźnie. Zgodnie ze wzorem (7.22)

$$\Delta \arg N(j\omega) = (n - 2m) \frac{\pi}{2}.$$

$$0 < \omega < \infty$$

Układ zamknięty będzie stabilny, jeżeli

$$\Delta \arg N_z(j\omega) = n \frac{\pi}{2}.$$

$$0 < \omega < \infty$$

Warunek stabilności układu zamkniętego można więc zapisać

$$\Delta \arg [1 + G(j\omega)] = \frac{m}{2} 2\pi \quad (7.32)$$

$$0 < \omega < \infty$$

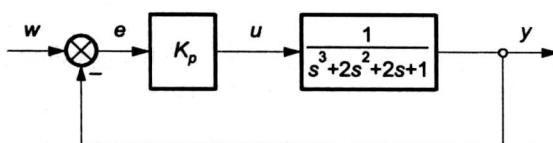
Warunek ten odniesiony do charakterystyki amplitudowo-fazowej układu otwartego $G(j\omega)$ możemy sformułować następująco:

Jeżeli otwarty układ automatyki jest niestabilny i posiada m pierwiastków w prawej półpłaszczyźnie zmiennej s , to po zamknięciu będzie on stabilny, wtedy i tylko wtedy, gdy charakterystyka amplitudowo-fazowa układu otwartego dla częstotliwości ω zmieniającej się od 0 do ∞ okrąży $\frac{m}{2}$ razy punkt $(-1, j0)$ w kierunku dodatnim (przeciwnym do ruchu wskazówek zegara).

Przypadek ten jest bardzo rzadki, gdyż układy automatyki spotykane w praktyce są stabilne w stanie otwartym ($m = 0$).

Przykład 7.3

Sprawdzić na podstawie kryterium Nyquista, czy układ zamknięty, którego schemat podano na rysunku 7.14, jest stabilny przy $K_p = 10$.



Rys. 7.14. Schemat blokowy układu regulacji

Transmitancja układu otwartego wynosi

$$G(s) = \frac{K_p}{s^3 + 2s^2 + 2s + 1}.$$

Stosując kryterium Hurwitza sprawdzamy, czy układ otwarty jest stabilny:

$$1, 2, 2, 1 > 0,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 > 0.$$

Układ otwarty jest stabilny.

Transmitancja widmowa układu otwartego wynosi

$$G(j\omega) = \frac{K_p}{(j\omega)^3 + 2(j\omega)^2 + j2\omega + 1} = \frac{K_p}{(1 - 2\omega^2) + j\omega(2 - \omega^2)},$$

stąd:

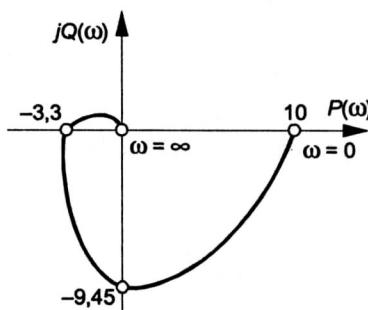
$$P(\omega) = \operatorname{Re} G(j\omega) = \frac{K_p(1 - 2\omega^2)}{(1 - 2\omega^2)^2 + \omega^2(2 - \omega^2)^2},$$

$$Q(\omega) = \operatorname{Im} G(j\omega) = \frac{-K_p\omega(2 - \omega^2)}{(1 - 2\omega^2)^2 + \omega^2(2 - \omega^2)^2}.$$

Wyniki obliczeń dla $K_p = 10$, na podstawie których wykreślono na rysunku 7.15 charakterystykę amplitudowo-fazową, zestawiono w tabeli 7.2.

Tabela 7.2

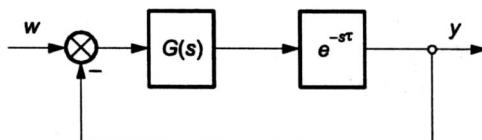
| ω | 0 | $1/\sqrt{2}$ | $\sqrt{2}$ | 2 | ∞ |
|-------------|----|--------------|------------|-------|----------|
| $P(\omega)$ | 10 | 0 | -3,3 | -1,01 | 0 |
| $Q(\omega)$ | 0 | -9,45 | 0 | 0,61 | 0 |



Rys. 7.15. Wykres transmitancji $G(j\omega)$ układu otwartego

Wykres $G(j\omega)$ przecina oś rzeczywistą przy częstotliwości $\omega_p = \sqrt{2}$ w punkcie $(-3,3, j0)$ i w związku z tym obejmuje punkt $(-1, j0)$. Układ zamknięty będzie więc niestabilny.

Jedną z zalet kryterium Nyquista jest to, iż można je stosować dla układów zamkniętych zawierających elementy opóźniające (rys. 7.16).



Rys. 7.16. Schemat blokowy układu zamkniętego z elementem opóźniającym

Transmitancja widmowa układu otwartego ma postać

$$G_{otw}(j\omega) = G(j\omega)e^{-j\omega\tau} = G(j\omega)(\cos \omega\tau - j \sin \omega\tau).$$

Moduł transmitancji widmowej

$$|G_{otw}(j\omega)| = |G(j\omega)| \sqrt{\cos^2 \omega\tau + \sin^2 \omega\tau} = |G(j\omega)|.$$

Kąt przesunięcia fazowego

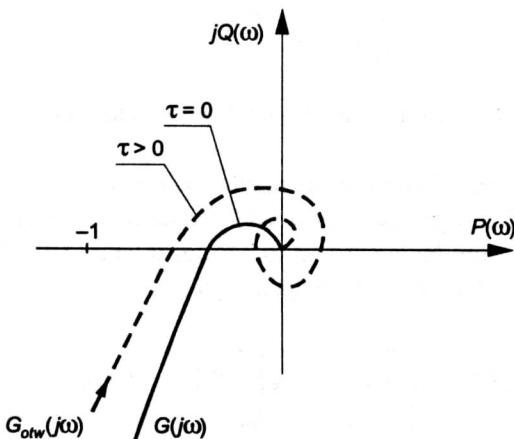
$$\varphi_{otw}(\omega) = \varphi(\omega) - \arctan \frac{\sin \omega\tau}{\cos \omega\tau} = \varphi(\omega) - \omega\tau,$$

gdzie $G(j\omega)$ i $\varphi(j\omega)$ są modułem i fazą układu otwartego bez opóźnienia.

Wpływ opóźnienia objawia się poprzez dodatkowe opóźnienie fazowe proporcionalne do $\omega\tau$, co powoduje, że charakterystyka amplitudowo-fazowa układu z opóźnieniem okrąża spiralnie początek układu współrzędnych w miarę rosnących częstotliwości (rys. 7.17). Dla pewnej częstotliwości ω_x , dla której $|G_{otw}(j\omega_x)|=1$ istnieje krytyczna stała czasowa opóźnienia τ_{kr} taka, że zachodzi

$$\varphi(\omega_x) - \omega_x \tau_{kr} = -\pi, \quad \text{czyli} \quad \tau_{kr} = \frac{\varphi(\omega_x) + \pi}{\omega_x}.$$

Wtedy wykres $G_{otw}(j\omega)$ przechodzi przez punkt $(-1, j0)$, a układ zamknięty znajduje się na granicy stabilności.



Rys. 7.17. Wpływ elementu opóźniającego na przebieg charakterystyki amplitudowo-fazowej układu otwartego

7.6. Logarytmiczne kryterium stabilności. Zapas stabilności

Sformułowania podane w podrozdziale 7.5 można również odnieść do charakterystyk logarytmicznych (amplitudowej i fazowej) układu otwartego. Z kryterium Nyquista wynika, że moduł transmitancji widmowej układu otwartego dla częstotliwości ω_x , dla której argument tej transmitancji jest równy $-\pi$, powinien być mniejszy od jedności. Wtedy bowiem charakterystyka amplitudowo-fazowa nie obejmuje punktu $(-1, j0)$.

Otrzymujemy zatem warunki

$$|G(j\omega_x)| < 1 \quad (7.33)$$

oraz

$$\arg G(j\omega_x) = -\pi \quad (7.34)$$

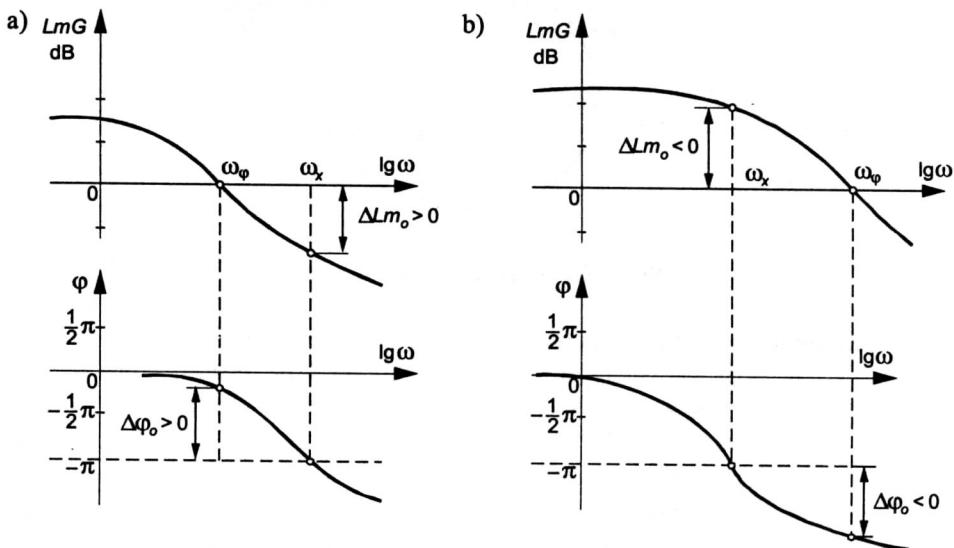
Warunek (7.33) w skali logarytmicznej przyjmie postać

$$Lm(\omega_x) = 20 \lg |G(j\omega_x)| < 0 \quad (7.35)$$

Na podstawie zależności (7.34) i (7.35) można sformułować kryterium Nyquista oparte na charakterystykach logarytmicznych:

Jeśli układ otwarty jest stabilny, a jego charakterystyka amplitudowa logarytmiczna przecina oś 0 dB przy częstotliwości mniejszej od częstotliwości przecięcia osi $-\pi$ przez charakterystykę fazową, to układ zamknięty jest stabilny.

W przeciwnym razie układ zamknięty jest niestabilny. Powyższe stwierdzenie zilustrowano na rysunku 7.18.



Rys. 7.18. Charakterystyki logarytmiczne: a) układu stabilnego; b) układu niestabilnego

Na podstawie przebiegu charakterystyk logarytmicznych można również określić tzw. **zapas stabilności**. Jest to pewien margines bezpieczeństwa, dający projektantowi układu regulacji pewność, że układ pozostanie stabilny pomimo pewnych zmian jego parametrów. Wyróżnia się dwa rodzaje zapasu stabilności, które są od siebie względnie niezależne (rys. 7.18):

- zapas modułu: ΔLm_o ,
- zapas fazy: $\Delta\varphi_o$.

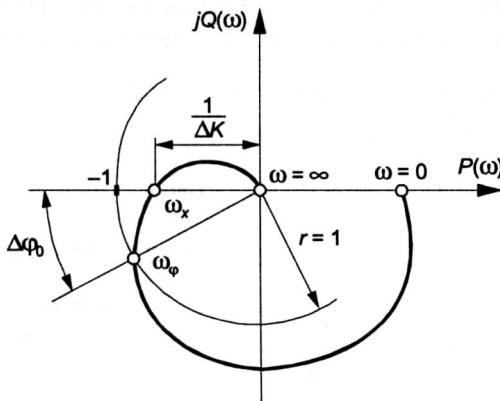
Zapas modułu zwany też zapasem wzmacnienia określa wartość, o którą może być zwiększone (pomnożone) wzmacnienie układu otwartego, aby układ znalazł się na granicy stabilności

$$\Delta Lm_o = -20 \lg |G(j\omega)|,$$

gdy

$$\varphi = -\pi.$$

Zapas fazy określa wartość zmiany argumentu transmitancji widmowej przy stałym wzmacnieniu, które spowodowałoby, że układ zamknięty znalazłby się na granicy stabilności. Zapas stabilności można również określić na podstawie charakterystyki amplitudowo-fazowej układu otwartego (rys. 7.19).



Rys. 7.19. Określenie zapasu stabilności

Zapas modułu można wyznaczyć

$$\Delta K = \frac{1}{G(j\omega_x)},$$

gdy

$$\varphi = -\pi.$$

W tym przypadku miarą zapasu stabilności układu jest oddalenie charakterystyki amplitudowo-fazowej od punktu krytycznego $(-1, j0)$.

8. Ocena jakości liniowych układów regulacji

8.1. Wprowadzenie

Podstawowym wymaganiem stawianym układowi regulacji jest uzyskanie na jego wyjściu sygnału $y(t)$ odpowiednio bliskiego przebiegowi wartości zadanej $w(t)$ (czyli minimalizacji sygnału uchybu). Uchyb regulacji $e(t)$ będący różnicą pomiędzy wartością zadaną a regulowaną może być wywołany wieloma przyczynami, np. zakłóceniami, zmianą wartości zadanej, zmianą parametrów układu itd. (rys. 8.1) i wynosi

$$e(t) = w(t) - y(t) \quad (8.1)$$

Ponadto realizacja postawionego wymagania związana jest z żądaniem określonego kształtu przebiegu procesu przejściowego (określonych własności dynamicznych), jak np. czas osiągania stanu ustalonego po zniku działania zakłóceń (czas regulacji), minimalizacja odchyleń o dużej amplitudzie. Przykładowo wymienione wyżej czynniki określają jakość regulacji.

Ocena jakości regulacji polega na analizie dwóch stanów układu regulacji:

- 1) stanu przejściowego,
- 2) stanu ustalonego.

W pierwszym przypadku mówimy o **dokładności dynamicznej**, w drugim o **dokładności statycznej**.

Dokładność dynamiczna określa zdolność układu do wiernego i szybkiego śledzenia zmiany wartości zadanej, a **dokładność statyczna** – zdolność układu do utrzymywania wartości regulowanej jak najbliżej wartości zadanej w stanie ustalonym, a więc po zakończeniu stanu przejściowego.

W przebiegu uchybu wypadkowego $e(t)$ można zatem wydzielić dwie składowe. Pierwsza z nich jest uchybem ustalonym, końcowym e_u (występującym wtedy, gdy w układzie dla $t \rightarrow \infty$, przy danym sygnale sterującym i danych sygnałach zakłócających, sygnał wyjściowy ustala się). Przy wymuszeniu skokowym uchyb ustalony nosi nazwę

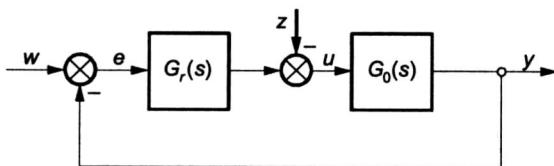
uchybu statycznego. Druga składowa jest uchybem występującym w stanie przejściowym zwanym uchybem dynamicznym $e_d(t)$, zatem

$$e(t) = e_u + e_d(t) \quad (8.2)$$

Uchyby ustalone i dynamiczne określają dokładności układu regulacji w stanie ustalonym i stanie przejściowym.

8.2. Dokładność statyczna liniowych układów regulacji

Wymaganie dokładności w stanie ustalonym jest jednym z podstawowych wymagań stawianych układowi regulacji. Miarą dokładności statycznej są uchyby ustalone, utrzymujące się po zaniku procesu przejściowego, wywołanego zmianą wartości zadanej $w(t)$ lub zakłócenia $z(t)$. Rozważając jakość układów automatycznej regulacji, będziemy posługiwać się schematem blokowym układu jak na rysunku 8.1.



Rys. 8.1. Schemat blokowy układu regulacji

Jak powiedziano wyżej, ocena dokładności statycznej układu sprowadza się do oceny uchybu w stanie ustalonym e_u

$$e_u = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) \quad (8.3)$$

Biorąc pod uwagę działanie sygnałów $z(t)$ i $w(t)$, uchyb regulacji $e(t)$ można wyrazić także jako sumę dwóch składowych

$$e(t) = e_z(t) + e_w(t) \quad (8.4)$$

gdzie:

$e_z(t)$ – składowa będąca wynikiem oddziaływania zakłóceń (uchyb zakłóceń),

$e_w(t)$ – składowa wywołana zmianą wartości zadanej na wejściu układu (uchyb nadążania).

Rozważmy dwa przypadki (rys. 8.1).

1) Zakładamy, że $z(t) \equiv 0$, wtedy

$$G_1(s) = \frac{y_w(s)}{w(s)} = \frac{G_0(s)G_r(s)}{1 + G_0(s)G_r(s)} \quad (8.5)$$

lecz

$$y_w(s) = G_0(s)G_r(s)E_w(s) \quad (8.6)$$

stąd transmitancja uchybu względem wartości zadanej $w(t)$

$$G_{e/w}(s) = \frac{e_w(s)}{w(s)} = \frac{1}{1 + G_0(s)G_r(s)} \quad (8.7)$$

2) Zakładamy, że $w(t) \equiv 0$, wtedy

$$G_2(s) = \frac{y_z(s)}{z(s)} = -\frac{G_0(s)}{1 + G_0(s)G_r(s)} \quad (8.8)$$

lecz

$$y_z(s) = -\frac{1}{G_0(s)} e_z(s),$$

stąd transmitancja uchybu względem zakłócenia

$$G_{e/z}(s) = \frac{e_z(s)}{z(s)} = \frac{G_0(s)}{1 + G_0(s)G_r(s)} \quad (8.9)$$

Odpowiedź całkowita wielkości regulowanej wyraża się wzorem

$$y(s) = y_w(s) + y_z(s) = \frac{G_0(s)G_r(s)}{1 + G_0(s)G_r(s)} w(s) - \frac{G_0(s)}{1 + G_0(s)G_r(s)} z(s) \quad (8.10)$$

a odpowiedź całkowita uchybu

$$e(s) = e_w(s) + e_z(s) = \frac{1}{1 + G_0(s)G_r(s)} w(s) + \frac{G_0(s)}{1 + G_0(s)G_r(s)} z(s) \quad (8.11)$$

stąd uchyb statyczny (twierdzenie o wartości końcowej)

$$e_u = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s e(s) \quad (8.12)$$

Powyższe zależności pozwalają ocenić wpływ typu i nastaw regulatora na dokładność statyczną układu.

Przykład 8.1

Obiekt regulacji jest elementem inercyjnym pierwszego rzędu $G_0(s) = \frac{K}{Ts + 1}$. Wyznaczyć uchyb statyczny układu wywołany skokową zmianą zakłócenia w przypadku, gdy w układzie zastosowano: a) regulator typu P i b) regulator typu PI.

Ponieważ $w(t) = 0$, na podstawie wzorów (8.11) i (8.12) otrzymamy

$$e_u = \lim_{s \rightarrow 0} se(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{G_0(s)}{1 + G_0(s)G_r(s)} z(s).$$

a) Jeżeli $G_r(s) = K_p$, to

$$e_u = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{\frac{K}{Ts + 1}}{1 + \frac{K}{Ts + 1} K_p} \frac{z_{st}}{s} = \frac{K}{1 + KK_p} z_{st} \quad (8.13)$$

b) Jeżeli $G_r(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s}\right)$, to

$$e_u = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{\frac{K}{Ts + 1}}{1 + \frac{K}{Ts + 1} K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s}\right)} \frac{z_{st}}{s}$$

czyli

$$e_u = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{KT_i s}{T_i s(Ts + 1) + KK_p (Ts + 1)} z_{st} = 0 \quad (8.14)$$

Z powyższych obliczeń wynika, że:

- a) zwiększenie wzmocnienia K_p , regulatora typu P, powoduje zmniejszenie uchybu statycznego,
- b) działanie całkujące regulatora powoduje, że uchyb statyczny $e_u = 0$.

Należy zwrócić uwagę, że zmniejszenie uchybu statycznego na drodze zwiększenia współczynnika wzmocnienia K_p regulatora opisanego wyrażeniem (8.13) jest możliwe w ograniczonym zakresie – może bowiem prowadzić do niestabilności układu.

Wśród liniowych układów regulacji można wyróżnić dwa typy układów.

- 1) Układy, w których występują uchyby ustalone, proporcjonalne do wartości wymuszenia skokowego, nazywane **układami regulacji statycznej**.

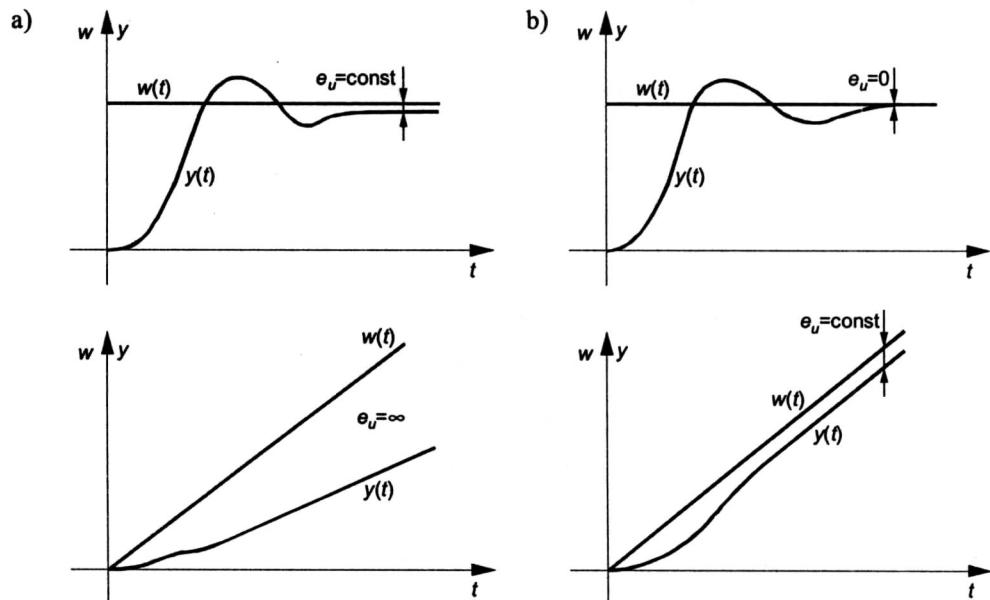
Transmitancja układu otwartego $G_{otw}(s)$ dla układów statycznych nie zawiera biegunów zerowych, czyli

$$G_{otw}(s) = \frac{L(s)}{M(s)} \quad (8.15)$$

- 2) Układy, w których uchyby ustalone przy stałym wymuszeniu są równe zero, nazywamy **układami regulacji astatycznej**. Układy astatyczne, wykazują pewne uchyby ustalone przy wymuszeniach liniowo narastających. Układ regulacji astatycznej jest układem astatycznym n -tego rzędu, jeżeli układ otwarty zawiera n elementów całkujących połączonych łańcuchowo, a n jest rzędem astatyzmu, przy czym $n \geq 1$. Transmitancja układu otwartego dla układów astatycznych ma postać

$$G_{otw}(s) = \frac{L(s)}{s^n M(s)} \quad (8.16)$$

Na podstawie powyższych rozważań wnioskujemy, że astatyzm układu względem sygnału zadającego lub względem zakłócenia może występować wtedy, gdy w tym układzie są elementy całkujące. Ponadto, zależnie od usytuowania i sposobułączenia tych elementów, układ może być astatyczny względem jednych sygnałów, natomiast statyczny względem innych. Przedstawiono to na wykresach (rys. 8.2) i pokazano na przykładzie.



Rys. 8.2. Przebiegi odpowiedzi układów na wymuszenie skokowe oraz liniowo narastające:
a) statycznego; b) astatycznego pierwszego rzędu

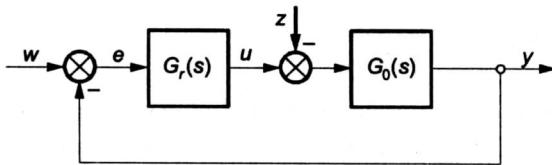
Przykład 8.2

Układ regulacji automatycznej ma strukturę przedstawioną na rysunku 8.3. Regulator i obiekt mają transmitancje operatorowe odpowiednio równe:

$$G_r(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{sT_i} \right),$$

$$G_0(s) = \frac{1}{s(s+2)}.$$

Wyznaczyć uchyb ustalony w odpowiedzi na wymuszenie skokowe i liniowo narastające.



Rys. 8.3. Układ regulacji automatycznej

Korzystając z twierdzenia o wartości końcowej (8.12) i transmitancji uchybowej (8.7) lub wartości całkowitego uchybu (8.11), przy założeniu, że $z(s) = 0$, otrzymamy dla wymuszeń nieokresowych:

$$\begin{aligned} e_u &= \lim_{s \rightarrow 0} [se(s)] = \lim_{s \rightarrow 0} [sG_{e/w}(s)w(s)] = \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \left[s \frac{1}{1 + G_r(s)G_0(s)} w(s) \right] = \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \left[s \frac{M_r(s)M_0(s)}{M_r(s)M_0(s) + L_r(s)L_0(s)} w(s) \right] = \\ &= \frac{1}{M_r(0)M_0(0) + L_r(0)L_0(0)} \lim_{s \rightarrow 0} [sM_r(s)M_0(s)w(s)] \end{aligned} \quad (8.17)$$

Dla wymuszenia skokowego $w_1(t) = a_1 \cdot 1(t)$ o amplitudzie $a_1 = 1$ transformata ma postać $w_1(s) = \frac{1}{s}$, natomiast dla wymuszenia liniowego (prędkościowego) $w_2(t) = a_2 t \cdot 1(t)$ o amplitudzie $a_2 = 1$, otrzymamy $w_2(s) = \frac{1}{s^2}$.

Mianownik transmitancji operatorowej regulatora PI ma postać

$$M_r(s) = sT_i,$$

dlatego zapewnia zerowy uchyb ustalony układu zamkniętego przy wymuszeniu skokowym, bez względu na transmitancję obiektu. Dla potwierdzenia, zgodnie ze wzorem (8.17), uchyb ustalony (statyczny) przy wymuszeniu skokowym będzie równy zero

$$e_u = \frac{1}{0 \cdot 0 + 1 \cdot k_p} \lim_{s \rightarrow 0} \left[s \frac{1}{s} sT_i s(s+2) \right] = 0 \quad (8.18)$$

Przy wymuszeniu liniowo narastającym uchyb ustalony również będzie równy zero, ze względu na całkujący charakter obiektu

$$e_u = \frac{1}{K_p} \lim_{s \rightarrow 0} \left[s \frac{1}{s^2} sT_i s(s+2) \right] = 0 \quad (8.19)$$

Dopiero wymuszenie trzeciego rzędu, przyspieszeniowe (paraboliczne) $w_3(t) = a_3 t^2 \cdot 1(t)$ o amplitudzie $a_3 = 1$ daje $w_3(s) = \frac{1}{s^3}$ i wtedy powstanie niezerowy uchyb ustalony.

Dokładność w stanie ustalonym jest szczególnie ważna w przypadku układów regulacji stałwartościowej (gdy $w(t) = \text{const}$) oraz w układach nadążących. Staramy się wtedy zapewnić, aby uchyb ustalony był jak najmniejszy. Likwidacja uchybu statycznego poprzez wprowadzenie dodatkowych elementów całkujących ma zasadniczą wadę, polegającą na tym, że podwyższanie rzędu astatyzmu wpływa ujemnie na właściwości układu. Może bowiem spowodować utratę stabilności. Często też okazuje się, że układ staje się niestabilny strukturalnie tzn., że nie udaje się uzyskać jego stabilnej pracy przez zmianę wartości (dobór) jego parametrów.

Pozostaje wtedy przyjąć inną strukturę układu, tak aby wprowadzenie dodatkowych elementów nie spowodowało utraty stabilności. Włączamy wtedy, np. szeregowo, element o transmitancji

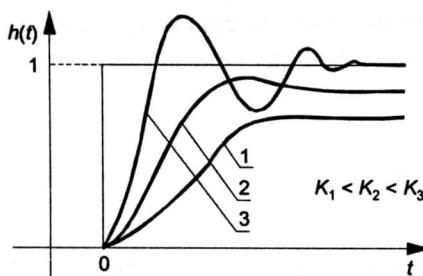
$$G_k(s) = \frac{k_a}{s} + k_b = \frac{k_a + k_b s}{s} \quad (8.20)$$

który tworzy się z elementów izodromowych (rzeczywistych różniczkujących). Element o transmitancji (8.20) jest prostym pojedynczym elementem izodromowym.

8.3. Jakość dynamiczna

Dla zapewnienia określonych własności dynamicznych układu nie wystarcza wymaganie stabilności. Jeżeli układ jest stabilny, to wiemy jedynie, że przebiegi przejściowe w tym układzie zanikają. Nie znamy jednak tak istotnych dla zastosowań praktycznych wiadomości, jak: rodzaj przebiegów, wartość odchyleń maksymalnych, czas zanikania przebiegów przejściowych (czas regulacji), pasmo częstotliwości, w którym zachodzi odtwarzanie sygnałów wymuszających z zadaną dokładnością itp.

Z odpowiedzi układowi z regulatorem proporcjonalnym na skokową zmianę wartości zadanej (rys. 8.4) widać, że wzrost wzmocnienia regulatora zmniejsza wartość uchybu ustalonego, ale równocześnie powoduje, że przebieg sygnału wyjściowego coraz bardziej odbiega od przebiegu wartości zadanej. Powoduje to więc zmniejszenie dokładności dynamicznej.



Rys. 8.4. Odpowiedź skokowa dla różnych wzmocnień regulatora

Jednocześnie ocena dokładności dynamicznej nie jest jednoznaczna. O ile bowiem uchyb ustalony łatwo zdefiniować i wyznaczyć jego wartość, o tyle dokładność dynamiczną można scharakteryzować różnymi parametrami, na podstawie różnych kryteriów.

Kryteria te można podzielić na cztery grupy:

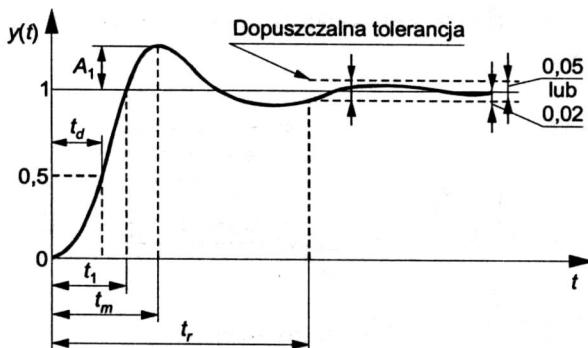
- 1) ocena parametrów odpowiedzi skokowej,
- 2) kryteria całkowe,
- 3) kryteria częstotliwościowe,
- 4) kryteria rozkładu pierwiastków.

8.3.1. Ocena parametrów odpowiedzi skokowej

Odpowiedź skokowa rzeczywistego układu sterowania często daje tłumione oscylacje, zanim osiągnie stan ustalony. Jakość regulacji określa się w tym przypadku na podstawie następujących parametrów (rys. 8.5):

- a) czasu t_d ,
- b) czasu narastania (czasu wzrostu) t_1 ,
- c) czasu szczytowego t_m ,
- d) maksymalnego przeregulowania A_1 ,
- e) czasu regulacji t_r .

Parametry te są zdefiniowane poniżej i przedstawione graficznie na rysunku 8.5.



Rys. 8.5. Przebieg wielkości regulowanej (odpowiedź na skokową zmianę wielkości zadanej)

- Ad a) Czas t_d – jest czasem potrzebnym, aby odpowiedź po raz pierwszy osiągnęła połowę wartości ustalonej.
- Ad b) Czas narastania t_1 – jest czasem potrzebnym, aby odpowiedź wzrosła od 10% do 90%, od 5% do 95% lub od 0% do 100% swojej wartości końcowej. Dla układów niedotłumionych drugiego lub wyższego rzędu normalnie wykorzystywany jest czas narastania od 0% do 100%. Dla układów przetłumionych (o odpowiedzi aperiodycznej) powszechnie wykorzystywany jest czas narastania od 10% do 90%.
- Ad c) Czas szczytowy t_m – jest czasem potrzebnym, aby odpowiedź osiągnęła pierwszy szczyt przeregulowania.
- Ad d) Maksymalne przeregulowanie A_1 (w procentach) – jest maksymalną wartością odpowiedzi, mierzoną od wartości ustalonej $y(\infty)$. Jest ono zdefiniowane następująco

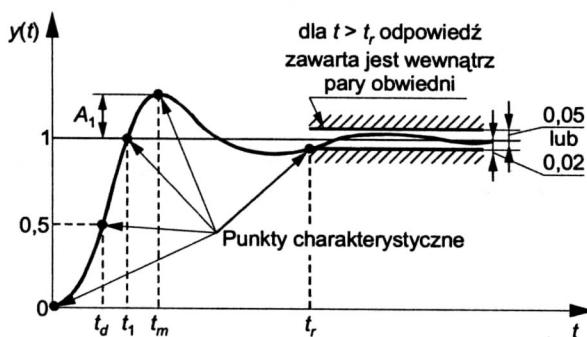
$$A_1 = \frac{y(t_m) - y(\infty)}{y(\infty)} \cdot 100\% \quad (8.21)$$

Wartość maksymalnego przeregulowania można uważać za miarę zapasu stabilności układu. Dla układów znajdujących się na granicy stabilności $A_1 = 100\%$.

- Ad e) Czas regulacji t_r – jest to czas potrzebny, aby krzywa odpowiedzi osiągnęła i pozostała w otoczeniu wartości ustalonej. Wartość tego czasu zwykle przyjmuje się jako 2% lub 5% wartości ustalonej. Czas regulacji jest związany z największą stałą czasową układu regulacji.

Dla konkretnego projektu układu można do oceny wybrać jeden lub kilka z wyżej wymienionych parametrów. Parametry odpowiedzi skokowej omawiane powyżej są bardzo ważne, ponieważ większość układów regulacji jest badana w dziedzinie czasu,

co znaczy, że bada się ich odpowiedzi czasowe. Układ regulacji musi być modyfikowany tak długo, aż np. odpowiedź skokowa będzie spełniała narzucone wartości parametrów t_d , t_1 , t_m , t_r , i A_1 , które w zadowalający sposób opisują przebieg odpowiedzi, co ilustruje rysunek 8.6.

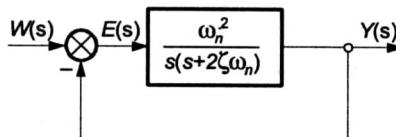


Rys. 8.6. Przebieg odpowiedzi skokowej układu

Zauważmy, że niekoniecznie wszystkie te punkty charakterystyczne mają zastosowanie do każdego przypadku. Na przykład do układu przetłumionego (odpowiedzi aperiodycznej) nie stosuje się określenia czasu szczytowego i maksymalnego przeregulowania. Dla układów statycznych, które dają uchyby w stanie ustalonym dla skokowych sygnałów wejściowych, ten uchyb musi być utrzymywany w zakresie określonego przedziału procentowego. Z wyjątkiem kilku zastosowań, w których nie powinny wystąpić oscylacje, pożądane jest, aby odpowiedź skokowa była wystarczająco szybka i wystarczająco tłumiona. Stąd dla większości układów drugiego rzędu tłumienie powinno zawierać się między 0,4 a 0,8. Małe wartości ξ ($\xi < 0,4$) dają nadmierne przeregulowanie w odpowiedzi skokowej, a układy o dużej wartości ξ ($\xi > 0,8$) odpowiadają powoli, ale przeregulowanie jest prawie niezauważalne. Niektóre parametry, np. maksymalne przeregulowanie i czas narastania, są przeciwwstawne, tzn. maksymalne przeregulowanie i czas narastania nie mogą być zmniejszane równocześnie. Jeśli jedno z nich jest zmniejszone, to drugie z konieczności staje się większe.

Przykład 8.3

Wyznaczyć czas narastania, czas szczytowy, maksymalne przeregulowanie i czas regulacji układu drugiego rzędu przedstawionego na rysunku 8.7.



Rys. 8.7. Schemat blokowy układu drugiego rzędu

Wartości te określmy jako funkcję parametrów ζ i ω_n . Zakłada się, że układ jest niedothłumiony (oscylacyjny). Wtedy transmitancja układu zamkniętego ma postać

$$G_z(s) = \frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (8.22)$$

Czas narastania t_1

Obliczając z równania (8.22) odpowiedź skokową, otrzymujemy czas narastania t_1 , przyjmując $y(t_1) = 1$, czyli

$$y(t_1) = 1 - e^{-\zeta\omega_n t_1} \left(\cos\omega_d t_1 + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin\omega_d t_1 \right) = 1 \quad (8.23)$$

przy czym ω_d oznacza pulsację drgań własnych tłumionych, wynoszącą $\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\zeta^2}$.

Ponieważ $e^{-\zeta\omega_n t_1} \neq 0$, z równania (8.23) otrzymujemy

$$\cos\omega_d t_1 + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin\omega_d t_1 = 0 \quad (8.24)$$

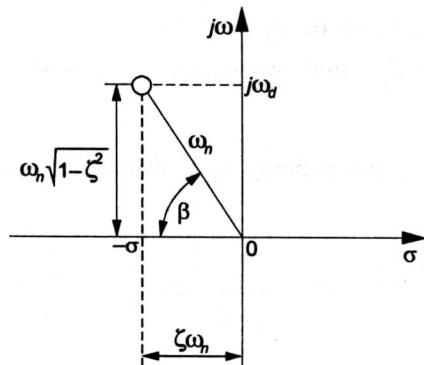
czyli

$$\operatorname{tg}\omega_d t_1 = -\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} = -\frac{\omega_d}{\zeta\omega_n} = -\frac{\omega_d}{\sigma} \quad (8.25)$$

stąd czas narastania t_1 jest równy

$$t_1 = \frac{1}{\omega_d} \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{\omega_d}{-\sigma} \right) = \frac{\pi - \beta}{\omega_d} \quad (8.26)$$

gdzie β jest zdefiniowane na rysunku 8.8. Oczywiście, dla małych wartości t_1 , ω_d musi być duże.



Rys. 8.8. Definicja kąta β

Czas szczytowy t_m

Czas szczytowy otrzymujemy z odpowiedzi (8.23), różniczkując $y(t)$ ze względu na czas i przyrównując tę pochodną do zera. Stąd

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \zeta \omega_n e^{-\zeta \omega_n t} \left(\cos \omega_d t + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \omega_d t \right) + \\ &+ e^{-\zeta \omega_n t} \left(\omega_d \sin \omega_d t - \frac{\zeta \omega_d}{\sqrt{1-\zeta^2}} \cos \omega_d t \right) \end{aligned} \quad (8.27)$$

Człony zawierające cosinus w ostatnim równaniu znoszą się i $\frac{dy}{dt}$ oszacowane w $t = t_m$ może być uproszczone do postaci

$$\left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=t_m} = (\sin \omega_d t_m) \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta \omega_n t_m} = 0 \quad (8.28)$$

Z ostatniego równania otrzymujemy

$$\sin \omega_d t_m = 0 \quad (8.29)$$

czyli

$$\omega_d t_m = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \dots$$

Ponieważ czas szczytowy dotyczy pierwszego przeregulowania, więc $\omega_d t_m = \pi$. Stąd

$$t_m = \frac{\pi}{\omega_d} \quad (8.30)$$

Czas szczytowy t_m odpowiada połowie okresu drgań własnych tłumionych.

Maksymalne przeregulowanie A_1

Maksymalne przeregulowanie występuje w czasie szczytowym, czyli dla $t = t_m = \frac{\pi}{\omega_d}$.

Stąd z równania (8.23) otrzymujemy A_1 , podstawiając (8.30)

$$A_1 = y(t_m) - 1 = e^{-\zeta \omega_n \frac{\pi}{\omega_d}} \left(\cos \pi + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \pi \right) = e^{-\frac{\sigma}{\omega_d} \pi} = e^{-\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \pi} \quad (8.31)$$

Maksymalne procentowo przeregulowanie równe jest $e^{-\frac{\sigma}{\omega_d} \pi} \cdot 100\%$.

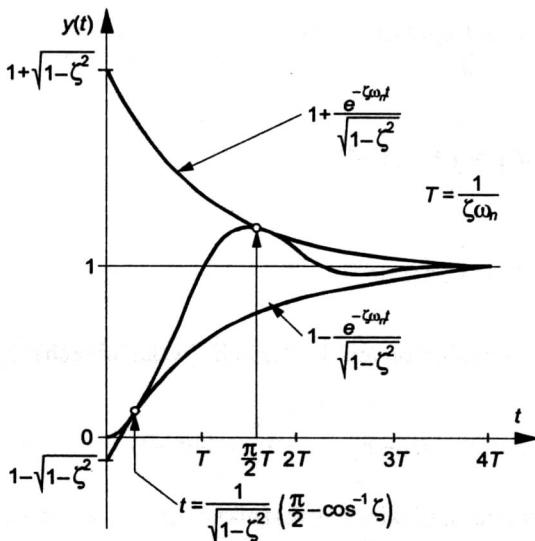
Czas regulacji t_r

Dla niedotłumionego układu (oscylacyjnego) drugiego rzędu odpowiedź skokowa otrzymana z równania (8.22), po przekształceniu, ma postać

$$y(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin\left(\omega_d t + \operatorname{tg}^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right) \text{ dla } t \geq 0 \quad (8.32)$$

Krzywe $1 \pm e^{-\zeta\omega_n t}/\sqrt{1-\zeta^2}$ są obwiedniami odpowiedzi skokowej dla jednostkowego skokowego sygnału wejściowego. Krzywa odpowiedzi $y(t)$ zawsze pozostaje wewnątrz pary obwiedni, jak to pokazano na rysunku 8.9. Stała czasowa tych obwiedni równa jest $1/\zeta\omega_n$. Prędkość tłumienia odpowiedzi skokowej zależy od wartości stałej czasowej $1/\zeta\omega_n$. Dla danego ω_n czas regulacji t_r jest funkcją stosunku ζ .

Czas regulacji określany do chwili znalezienia się sygnału wyjściowego w paśmie tolerancji o szerokości $\pm 2\%$ lub $\pm 5\%$ może być mierzony poprzez stałą czasową $T = 1/\zeta\omega_n$.



Rys. 8.9. Para obwiedni odpowiedzi skokowej

W praktyce do porównania odpowiedzi układów powszechnie stosuje się czas regulacji zdefiniowany jako

$$t_r = 4T = \frac{4}{\sigma} = \frac{4}{\zeta\omega_n} \quad (\text{kryterium } 2\%) \quad (8.33)$$

lub

$$t_r = 3T = \frac{3}{\sigma} = \frac{3}{\zeta\omega_n} \quad (\text{kryterium } 5\%) \quad (8.34)$$

Zauważmy, że czas regulacji jest odwrotnie proporcjonalny do iloczynu liczby tlenienia ζ i nietlenionej pulsacji własnej układu ω_n . Ponieważ wartość ζ jest zwykle określona na podstawie wymagań dotyczących maksymalnego dopuszczalnego przeregulowania, więc czas regulacji jest określony przede wszystkim przez nietlenioną częstotliwość naturalną ω_n . Oznacza to, że długość trwania okresu przejściowego może się zmieniać – bez zmiany maksymalnego przeregulowania, poprzez nastawienie nietlenionej pulsacji własnej ω_n .

8.3.2. Kryteria całkowe

W grupie kryteriów całkowych najczęściej stosowanymi są:

$$I_0 = \int_0^{\infty} |e_d(t)| dt \quad (8.35)$$

$$I_1 = \int_0^{\infty} e_d(t) dt \quad (8.36)$$

$$I_{1k} = \int_0^{\infty} t^k e_d(t) dt \quad (8.37)$$

$$I_2 = \int_0^{\infty} e_d^2(t) dt \quad (8.38)$$

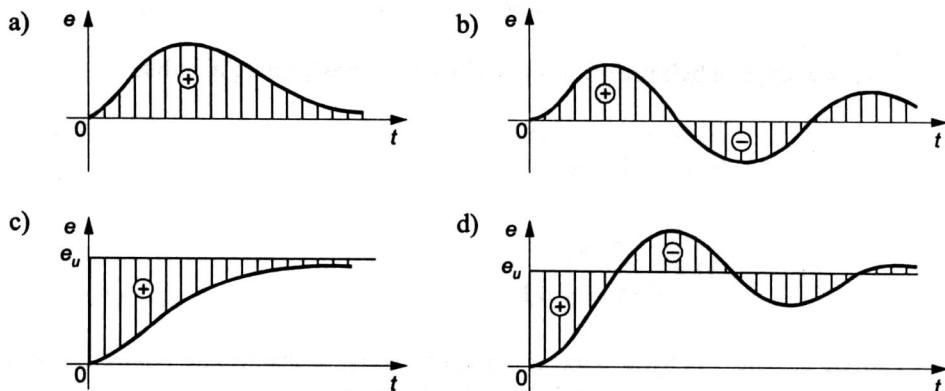
We wszystkich wymienionych kryteriach (wskaźnikach) $e_d(t)$ oznacza uchyb przejściowy, czyli:

$$e_d(t) = e(t) - e_u, \quad e_u = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) \quad (8.39)$$

Poza tym stosowane są niekiedy wskaźniki całkowe, w których funkcja podcałkowa jest kombinacją funkcji podcałkowych z powyższych kryteriów.

Za miarę jakości układu uważa się wartość całki I , tzn. im mniejsza jest ta wartość, tym wyższa jakość regulacji układu. W stabilnych układach regulacji uchyb przejściowy $e_d(t)$ dąży do zera dla czasu $t \rightarrow \infty$, dlatego dla czasu regulacji t_r przyjmuje się przedział $(0 < t < \infty)$. Całka I_1 (8.36) stanowi pole zawarte między krzywą uchybu regulacji $e(t)$ a asymptotą, do której dąży ta krzywa (rys. 8.10). Całka I_1 może być stosowana wyłącznie dla przebiegów aperiodycznych. W przypadku gdy przebieg uchybu wskazuje przeregulowanie, stosowanie kryterium (8.36) prowadzi do błędnych wyników. Dla przebiegów oscylacyjnych stosuje się kryteria (8.35) i (8.38), bowiem wartości całek I_0 i I_2 nie zależą od znaku funkcji $e_d(t)$ a jedynie od wartości bezwzględnej tej funkcji lub jej drugiej potęgi.

Oprócz wymienionych kryteriów stosuje się inne kryteria jakości układów sterowania.



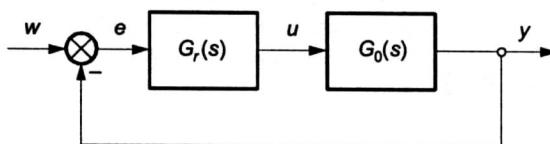
Rys. 8.10. Interpretacja graficzna całkowych kryteriów jakości: a) układ astatyczny – przebieg aperiodyczny; b) układ astatyczny – przebieg oscylacyjny; c) układ statyczny – przebieg aperiodyczny; d) układ statyczny – przebieg oscylacyjny

Przykład 8.4

Dany jest układ regulacji o strukturze takiej jak na rysunku 8.11, przy czym transmitancje obiektu i regulatora mają postać:

$$G_0(s) = \frac{1}{Ts + 1}; \quad G_r(s) = K \quad (8.40)$$

Wyznaczyć uchyb ustalony i uchyb przejściowy.



Rys. 8.11. Schemat blokowy układu regulacji

Gdy sygnał wejściowy jest skokiem jednostkowym $w(t) = 1(t)$, transmitancja uchybową układu ma postać:

$$G_{e/w}(s) = \frac{1}{1 + G_0(s)G_r(s)} \quad (8.41)$$

$$G_{e/w}(s) = \frac{Ts + 1}{Ts + 1 + K} \quad (8.42)$$

stąd

$$e_u(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s e(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s G_{e/w}(s) w(s) = \frac{1}{1+K} \quad (8.43)$$

Chcąc wyliczyć uchyb przejściowy, wyliczamy transformatę uchybu:

$$e(s) = \frac{1}{s} G_{e/w}(s) \quad (8.44)$$

$$e(s) = \frac{Ts + 1}{s(Ts + 1 + K)}$$

Przebieg czasowy uchybu wyznaczamy, obliczając transformatę odwrotną wyrażenia (8.44), na przykład przez rozkład na ułamki proste

$$e(t) = L^{-1} \left[\frac{s + \frac{1}{T}}{s \left(s + \frac{1+K}{T} \right)} \right] = L^{-1} \left[\frac{A}{s} \right] + L^{-1} \left[\frac{B}{s + \frac{1+K}{T}} \right] \quad (8.45)$$

Wartości A i B wyznaczamy z układu równań otrzymanego z tożsamości

$$A \left(s + \frac{1+K}{T} \right) + Bs \equiv s + \frac{1}{T} \quad (8.46)$$

a więc z układu:

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ A \frac{1+K}{T} = \frac{1}{T} \end{cases} \quad (8.47)$$

stąd:

$$A = \frac{1}{1+K}, \quad B = \frac{K}{1+K} \quad (8.48)$$

zatem

$$e(t) = \left[\frac{1}{1+K} + \frac{K}{1+K} \exp \left(-\frac{1+K}{T} t \right) \right] \cdot 1(t) \quad (8.49)$$

Przebieg ten nie może być jednak funkcją podcałkową we wzorach (8.35)–(8.38), gdyż zawiera zarówno uchyb przejściowy, jak i uchyb ustalony. Oddzielając przebieg ustalony

$$e_u = \frac{1}{1+K} \cdot 1(t) \quad (8.50)$$

od wyrażenia (8.49), otrzymujemy uchyb przejściowy w postaci

$$e_d(t) = \frac{K}{1+K} \exp\left(-\frac{1+K}{T}t\right) \cdot 1(t) \quad (8.51)$$

Wyznaczmy teraz wartość całki z kwadratu uchybu:

$$I_2 = \int_0^{\infty} e_d^2(t) dt \quad (8.52)$$

$$I_2 = \frac{K^2}{(1+K)^2} \int_0^{\infty} \exp\left(-2\frac{K+1}{T}t\right) dt = \frac{-K^2 T}{2(1+K)^3} \exp\left(-\frac{K+1}{T}t\right) \Big|_0^{\infty} \quad (8.53)$$

stąd

$$I_2 = \frac{K^2 T}{2(1+K)^3} \quad (8.54)$$

Wartość kryterium całkowego I_2 jest w tym przypadku zależna od dwóch parametrów K i T . Osiągnie ona minimum, gdy stała czasowa T będzie jak najmniejsza, a współczynnik wzmocnienia regulatora K jak największy.

Wartość całki, np. I_0 , możemy wyrazić też następująco

$$I_0 = \lim_{s \rightarrow 0} E_p(s) \quad (8.55)$$

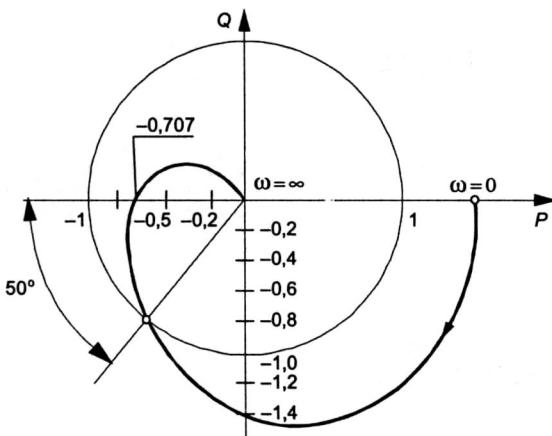
8.3.3. Kryteria częstotliwościowe

Jak wiadomo z poprzednich rozdziałów, podstawowym warunkiem dobrego działania układu regulacji jest jego stabilność. Kryterium Nyquista mówi, że gdy charakterystyka amplitudowo-fazowa stabilnego układu otwartego nie obejmuje punktu $(-1, j0)$, to układ zamknięty jest też stabilny. Przejście charakterystyki przez punkt $(-1, j0)$ jest przypadkiem krytycznym, w którym układ jest na granicy stabilności. Odległość charakterystyki częstotliwościowej od punktu krytycznego $(-1, j0)$ jest miarą zapasu stabilności.

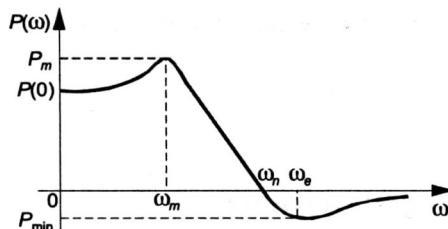
Zasadniczymi parametrami określonymi na podstawie charakterystyk częstotliwościowych układu są:

- zapas stabilności (modułu i fazy) – (rys. 8.12);
- pulsacja odcięcia ω_n charakterystyki widmowej części rzeczywistej $P(\omega)$ transmitancji układu zamkniętego $G_z(j\omega)$, czyli pulsacja, przy której charakterystyka rzeczywista (lub styczna do niej, wystawiona w punkcie przegięcia części opadającej) przecina oś odciętych (rys. 8.13);
- maksymalna wartość modułu M_p transmitancji widmowej układu zamkniętego (rys. 8.14).

Parametry określone w punktach b) i c) mają ścisły związek z przebiegiem odpowiedzi skokowej układu zamkniętego. Duże znaczenie ma także kształt przebiegu charakterystyki części rzeczywistej $P(\omega)$.



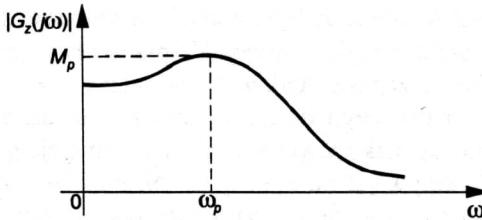
Rys. 8.12. Charakterystyka amplitudowo-fazowa; zapas modułu wynosi $1/0,707 = 1,41$; zapas fazy wynosi $\Delta\phi_0 = 50^\circ$



Rys. 8.13. Parametry charakterystyki rzeczywistej transmitancji układu zamkniętego

Oceniane jest również przenoszone pasmo, a więc zakres częstotliwości, w którym układ zamknięty przenosi sygnały zadane. Miarą pasma częstotliwości przenoszonych przez układ jest wartość graniczna ω_g , dla której logarytm modułu transmitancji widmowej zmniejsza się do wartości -3 dB , czyli

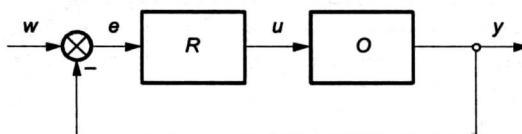
$$|G_z(j\omega_g)| = 0,707.$$



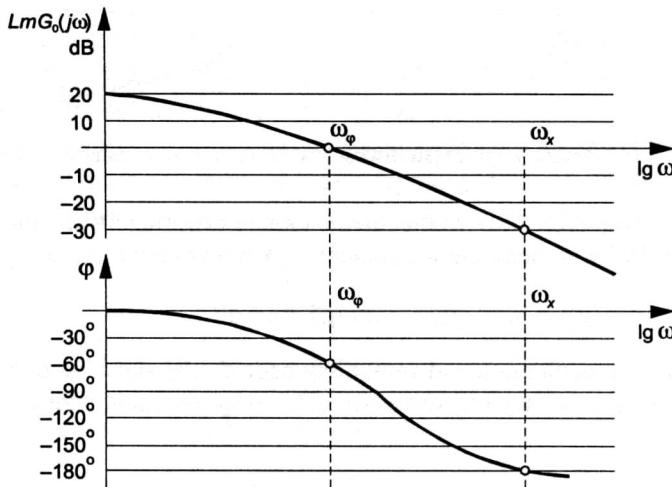
Rys. 8.14. Charakterystyka modułu transmitancji układu zamkniętego

Przykład 8.5

Układ regulacji ma strukturę przedstawioną na rysunku 8.15. Charakterystyki częstotliwościowe logarytmiczne obiektu regulacji są przedstawione na rysunku 8.16. Wyznaczyć największe możliwe wzmocnienie K_p regulatora, które zapewni zapas fazy co najmniej 30° i zapas modułu nie mniejszy niż 6 dB.



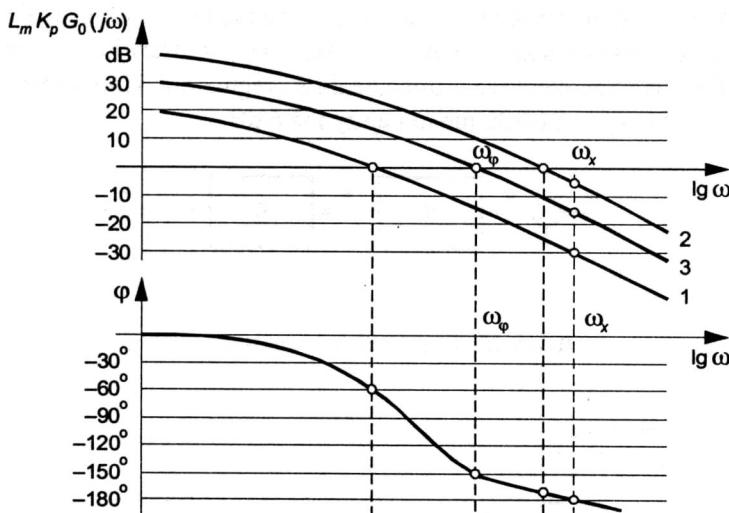
Rys. 8.15. Schemat blokowy układu regulacji



Rys. 8.16. Charakterystyki częstotliwościowe obiektu regulacji

Układ zamknięty bez regulatora (tzn. dla $K_p = 1$) będzie stabilny z zapasem fazy około 120° i zapasem modułu około 30 dB. Podane wartości przewyższają znacznie te wymagane w przykładzie, ale większe wzmocnienie umożliwia zmniejszenie uchybu

ustalonego, należy się zatem starać, by było ono jak największe. Zmiana wzmacnienia nie powoduje zmiany charakterystyki fazowej, ale przesuwa w pionie charakterystykę amplitudową. Dla uzyskania zapasu modułu 6 dB należy przesunąć charakterystykę amplitudową w górę o 24 dB, czyli dodać w układzie otwartym wzmacniacz o takim właśnie wzmacnieniu. Jednak wówczas zapas fazy zmniejsza się do dopuszczalnej wartości i osiągnie 10° (krzywa 2 na rys. 8.17). Należy więc dobrać wzmacnienie wzmacniacza ze względu na zapas fazy. Charakterystyka fazowa przewyższa poziom -180° o zadaną wartość 30° dla częstotliwości ω . Jeżeli dla tej częstotliwości charakterystyka amplitudowa będzie przecinała poziom 0 dB (krzywa 3 na rys. 8.17), to układ zamknięty będzie miał zapas fazy 30° .



Rys. 8.17. Zmiana charakterystyk częstotliwościowych układu ze zmianą wzmacnienia regulatora

Będzie to osiągnięte, gdy wzmacnienie układu wzrośnie o 14 dB. Takie więc powinno być wzmacnienie wzmacniacza, które w mierze liniowej ma wartość

$$K_p = 5, \quad \text{gdyż} \quad 20 \lg 5 = 14 \text{ dB.}$$

Przy tym wzmacnieniu układ zamknięty będzie miał zapas modułu (odczytywany na rysunku 8.17 dla pulsacji ω_x) równy 16 dB, a więc znacznie przewyższający żadaną wartość.

8.3.4. Metoda miejsc geometrycznych pierwiastków (wartości własnych)

Transmitancję układu zamkniętego możemy określić jako stosunek wielomianów

$$G_z(s) = \frac{d(s)}{c(s)} \quad (8.56)$$

Jeżeli założymy, że d i c nie mają wspólnego dzielnika, wtedy wartości s takie, że równanie charakterystyczne $c(s) = 0$ będą reprezentować punkty, dla których $G_z(s)$ jest nieskończona. Wartości s będziemy wówczas nazywać **biegunami** funkcji $G_z(s)$. Wartości s , dla których $d(s) = 0$ są punktami, gdzie $G_z(s) = 0$, są nazywane **zerami**. Bieguny i zera w pełni opisują $G_z(s)$ z wyjątkiem stałych wielokrotnych. Inaczej mówiąc, bieguny są to pierwiastki mianownika (równania charakterystycznego), a zera są to pierwiastki licznika.

Istnieje ścisła relacja pomiędzy wartościami własnymi (biegunami układu zamkniętego), czyli pierwiastkami równania charakterystycznego, a jakością regulacji. Dlatego pozytycznym postępowaniem projektowym byłoby takie postępowanie, w którym pewne nieznane parametry układu są ustalone w taki sposób, że rozmieszczenie pierwiastków (biegunów układu) zapewnia dobrą jakość regulacji. Najprostsza sytuacja przy projektowaniu zachodzi wtedy, gdy tylko jeden parametr układu regulacji jest nieznany. Jeżeli uważa się ten parametr za zmienną niezależną, to wszystkie pierwiastki stają się zmiennymi zależnymi od tego nieznanego parametru. Wtedy na płaszczyźnie zmiennych zespolonych (na płaszczyźnie s) pojawią się tzw. **krzywe pierwiastkowe**, po których poruszają się pierwiastki równania charakterystycznego w funkcji tego parametru. Taki zbiór punktów nazywa się **miejscem geometrycznym pierwiastków**.

Jeżeli miejsce geometryczne pierwiastków na płaszczyźnie s jest wyznaczone, to nieznaną wartość parametru, pożądaną dla zapewnienia odpowiedniej jakości regulacji układu, można wybrać na podstawie tego znanego rozmieszczenia.

Zbadajmy znaczenie lokalizacji na płaszczyźnie s wartości własnych, tzn. pierwiastków równania charakterystycznego układu. Płaszczyzna s , mająca oś rzeczywistą, czyli $\text{Re } s$, i oś urojoną, czyli $\text{Im } s$, obejmuje potencjalnie nieskończoną liczbę możliwych lokalizacji wartości własnych $s = \alpha + j\beta$ układu.

Rozważmy układ, którego równanie charakterystyczne ma jeden pierwiastek rzeczywisty albo pojedynczą parę pierwiastków zespolonych sprzężonych, na który działa wymuszenie impulsowe. Pytamy w jaki sposób zmienia się odpowiedź skokowa, gdy zmienia się lokalizacja wartości własnych na płaszczyźnie s .

Jeżeli

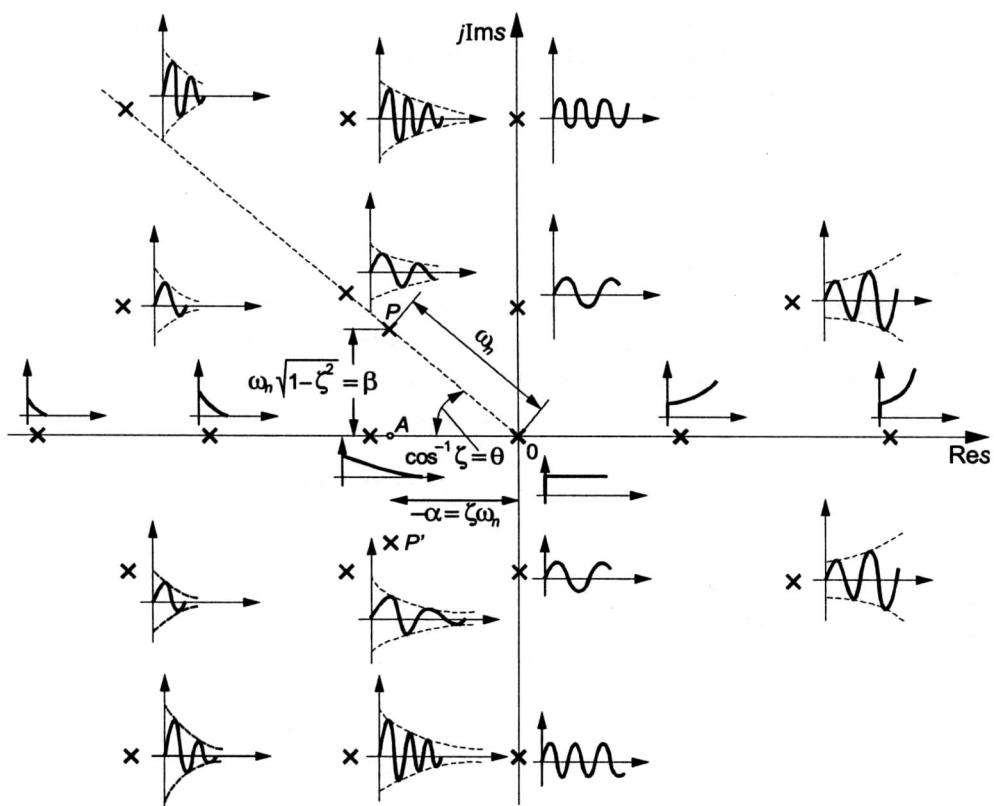
$$G_z(s) = \frac{1}{s + \sigma} \quad (8.57)$$

to odpowiedź impulsowa będzie funkcją wykładniczą

$$g(t) = e^{-\sigma t} \cdot 1(t) \quad (8.58)$$

Kiedy $\sigma > 0$, bieguny położone są w płaszczyźnie, gdzie $s < 0$. Możemy powiedzieć, że odpowiedź impulsowa jest **stabilna**. Jeżeli $\sigma < 0$, to bieguny położone są na prawo od początku układu współrzędnych. Ponieważ wyrażenie wykładnicze rośnie tutaj z czasem, odpowiedź impulsowa jest oznaczona jako **niestabilna**.

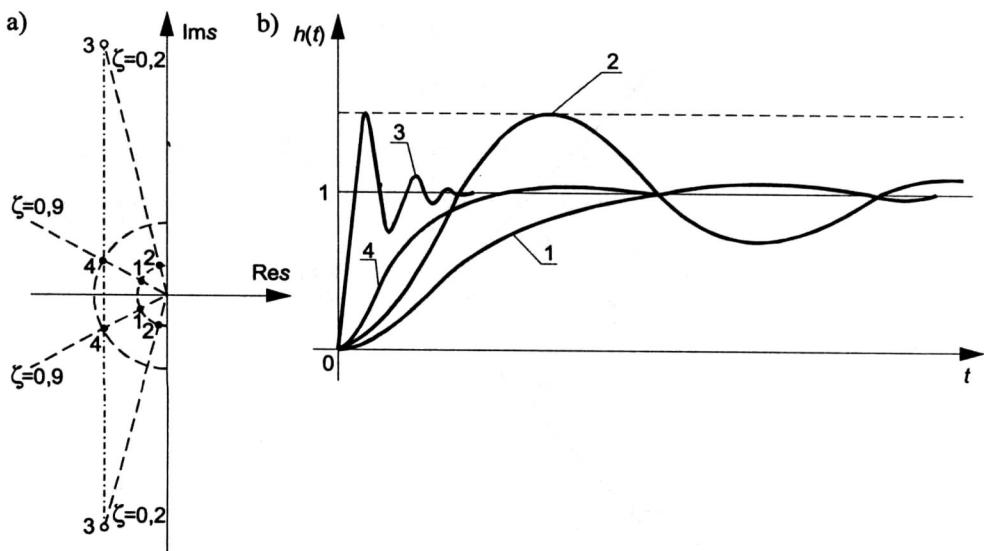
Rysunek 8.18. pokazuje kształt odpowiedzi impulsowych związanych z różną lokalizacją wartości własnych.



Rys. 8.18. Przebiegi przejęciowe w zależności od położenia pierwiastka na płaszczyźnie s

Pierwiastki leżące najbliżej osi urojonej reprezentują składowe rozwiązań zanikające najwolniej, a więc determinujące szybkość działania układu. Oddalenie pierwiastków zespolonych od osi rzeczywistej decyduje o częstotliwości drgań tłumionych w odpowiedzi oscylacyjnej. Oddalenie pierwiastków od początku układu współrzędnych mówi o tzw. **częstotliwości drgań własnych układu** – parametrze nie ujawniającym się bezpośrednio w odpowiedzi skokowej. Poglądową zależność między rozmieszczeniem decydującej pary wartości własnych na płaszczyźnie zespolonej a charakterystyką skokową przedstawia rysunek 8.19.

Dla układów drugiego i trzeciego rzędu istnieją nomogramy wykreślone w płaszczyźnie współczynników równania charakterystycznego (wykresy Wyszniegradzkiego), pozwalające określić stopień stabilności układu bez konieczności obliczenia pierwiastków równania charakterystycznego.



Rys. 8.19. Związek między rozkładem wartości własnych a przebiegiem odpowiedzi skokowej:
a) rozkłady wartości własnych; b) odpowiedzi skokowe

Analiza tych nomogramów pozwala na wyznaczenie obszarów stabilności oraz **stopni stabilności**, na podstawie których określa się przybliżoną wartość czasu regulacji.

Przeregulowanie odpowiedzi skokowej jest determinowane **stopniem oscylacyjności** μ (rys. 8.20), definiowanym jako

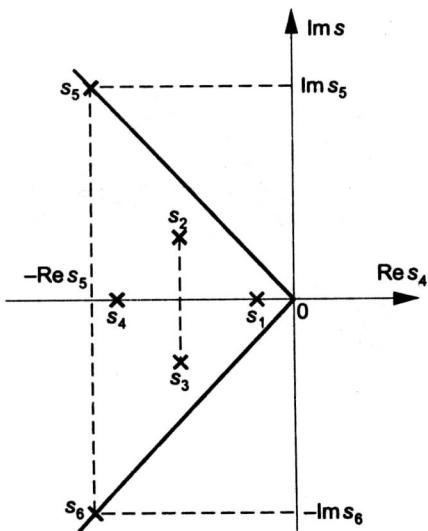
$$\mu = \max_k \frac{|Im s_k|}{|Re s_k|} \quad (8.59)$$

Im mniejsza wartość μ , tym mniejsze przeregulowanie A_1 i tym mniejsza liczba oscylacji w czasie t_r . Stopień oscylacyjności jest związyany ze stosunkiem dwóch kolejnych przeregulowań zależnością

$$e^{-\pi/\mu} = \frac{A_{n+1}}{A_n} \quad (8.60)$$

W przypadku członu oscylacyjnego stopień oscylacyjności wiąże się następująco ze współczynnikiem tłumienia ζ

$$\mu = \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} \quad (8.61)$$



Rys. 8.20. Stopień oscylacyjności, interpretacja graficzna

9. Synteza układów liniowych sterowania automatycznego

9.1. Wprowadzenie

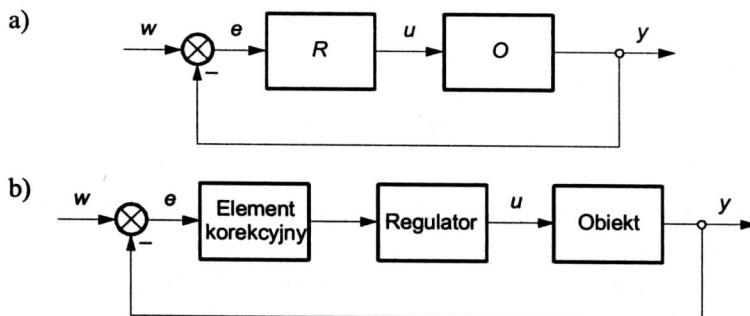
Podstawowy problem syntezy, czyli projektowania układu sterowania, można sformułować następująco:

Dla danego obiektu znany jest model matematyczny oraz ograniczenia narzucone na poszczególne sygnały, a także określony zasób informacji o jego warunkach pracy i występujących zakłóciach. Należy dla tego obiektu dobrać układ sterowania, który zapewni wykonanie postawionych zadań – przy spełnieniu wymagań dotyczących stabilności, dokładności (w stanach ustalonych i przejściowych) oraz charakteru przebiegów dynamicznych (spełni narzucone kryterium jakości sterowania).

Zatem, synteza układów sterowania polega na doborze takiej struktury układu i parametrów regulatora, by układ mógł wykonać postawione przed nim zadania.

Postępowanie jest więc dwuetapowe. W pierwszym etapie należy określić strukturę układu regulacji i typ regulatora (członu korekcyjnego). Zadania tego etapu są najtrudniejszymi zagadnieniami zarówno teorii, jak i praktyki sterowania. Drugi etap polega na doborze wartości parametrów regulatora.

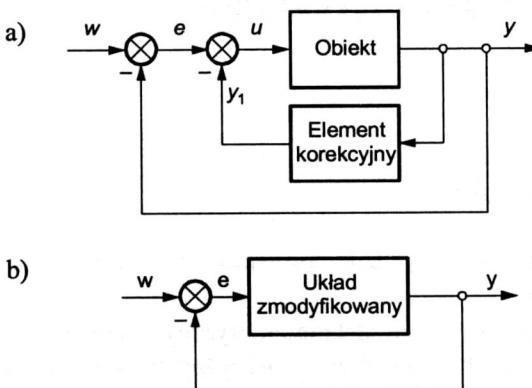
Najczęściej stosowana jest **struktura szeregowa**, w której regulator jest włączony w tor głównego układu regulacji, czyli szeregowo z obiektem (rys. 9.1a). Sygnałem wejściowym regulatora jest sygnał uchybu $e(t)$, sygnałem wyjściowym – sterowanie obiektu $u(t)$.



Rys. 9.1. Struktura szeregowa układu regulacji (a) i włączanie członu korekcyjnego przed regulatorem (b)

Niekiedy przed regulatorem włączany jest dodatkowo element (człon) korekcyjny, którego zadaniem jest wstępne uformowanie sygnału uchybu (rys. 9.1b).

Inną, często stosowaną – zwłaszcza w automatyce napędu – strukturą układu regulacji jest **struktura z dodatkowym sprzężeniem zwrotnym** (rys. 9.2a), w którym element korekcyjny jest włączany w tor dodatkowego sprzężenia zwrotnego wokół obiektu.



Rys. 9.2. Struktura układu regulacji z wewnętrznym sprzężeniem zwrotnym (a); skorygowany układ zamknięty regulacji (b)

W obu wymienionych przypadkach regulator i element korekcyjny mają za zadanie taką modyfikację właściwości obiektu, by działanie skorygowanego układu zamkniętego (rys. 9.2b) było zadowalające z punktu widzenia przyjętego kryterium jakości. Kryterium to łączy zwykle wiele elementów – chodzi nie tylko o uzyskanie odpowiednich parametrów odpowiedzi skokowej na wymuszenie zewnętrzne $w(t)$, ale również o odporność na zakłócenia, zwłaszcza oddziałujące na wejście obiektu. Ta odporność na zakłócenia może być wyrażona na przykład przez wymagania narzucone na przebieg sygnału uchybu w odpowiedzi na zakłócenia skokowe.

Podstawowymi wymaganiami stawianymi jednowymiarowym układom regulacji automatycznej są:

- dokładność statyczna,
- zakres regulacji wielkości wyjściowej,
- pasmo robocze (pasmo przenoszonych częstotliwości),
- zapas stabilności.

Synteza ma na celu zarówno poprawę właściwości statycznych (w stanie ustalonym), jak i dynamicznych (dotyczących przebiegu przejściowego). Może być ona prowadzona różnymi metodami. Co więcej, może prowadzić do różnych poprawnych wyników. Wynika to stąd, że przy projektowaniu jest zwykle więcej niewiadomych niż danych i spośród wielu możliwych rozwiązań trzeba wybrać jedno, zdaniem projektanta najlepsze. Najmniej przesłanek dyrektywnych istnieje w stosunku do wyboru struk-

tury układu – tu największą rolę odgrywa doświadczenie i wyczucie projektanta. Dóbór parametrów jest ściślej określony i w dużej mierze wynika z procedury obliczeniowej. Celem projektowania jest zawsze osiągnięcie żądanego przebiegu czasowego wielkości regulowanej, określonego jego parametrami (np. przeregulowanie, czas regulacji itp.). Stosowanie innych kryteriów niż bezpośrednie jest tylko etapem pośrednim, prowadzącym do tego ostatecznego celu. Wymagania przy tym są często sprzeczne i projektant musi dokonywać wyboru, będącego kompromisem między tymi żądaniami. I tak na przykład żądania dużej dokładności statycznej i odpowiedniego zapasu stabilności kłócą się ze sobą: pierwsze wymaga zastosowania dużego wzmacnienia w układzie otwartym, drugie – małego.

9.2. Synteza metodami klasycznymi

Rozwiązywanie postawionego podstawowego zadania syntezy można otrzymać, korzystając z podanych w poprzednich rozdziałach sposobów badania dokładności, stabilności i wyznaczania przebiegów przejściowych. Wtedy, przy zastosowaniu metod, które będziemy nazywać klasycznymi, tok postępowania jest analogiczny do postępowania w znanych inżynierskich sposobach projektowania, stosowanych w wielu dziedzinach techniki. Mianowicie, po ustaleniu danych wyjściowych i wynikających z nich założeń, wybiera się pierwsze wstępne rozwiązanie. Wybór ten jest dokonywany na podstawie wiedzy, doświadczenia i intuicji projektanta, przy uwzględnieniu możliwości realizacji i po przybliżonej ocenie jej kosztu. Następnie wyznacza się odpowiednie wielkości oraz wskaźniki, charakteryzujące projektowane urządzenia, które są potrzebne do oceny przyjętego pierwszego wariantu rozwiązania. Na podstawie tych wyników wprowadza się odpowiednie zmiany i otrzymuje drugi wariant rozwiązania, który z kolei zostaje oceniony, skorygowany itd. W ten sposób, po wielu kolejnych modyfikacjach, dochodzi się do rozwiązania spełniającego postawione wymagania.

W klasycznej metodzie syntezy układów sterowania najpierw zestawia się dane wyjściowe obejmujące zadanie stawiane układowi, model matematyczny obiektu, ograniczenia i warunki pracy. Na tej podstawie określa się wymagania i ustala założenia.

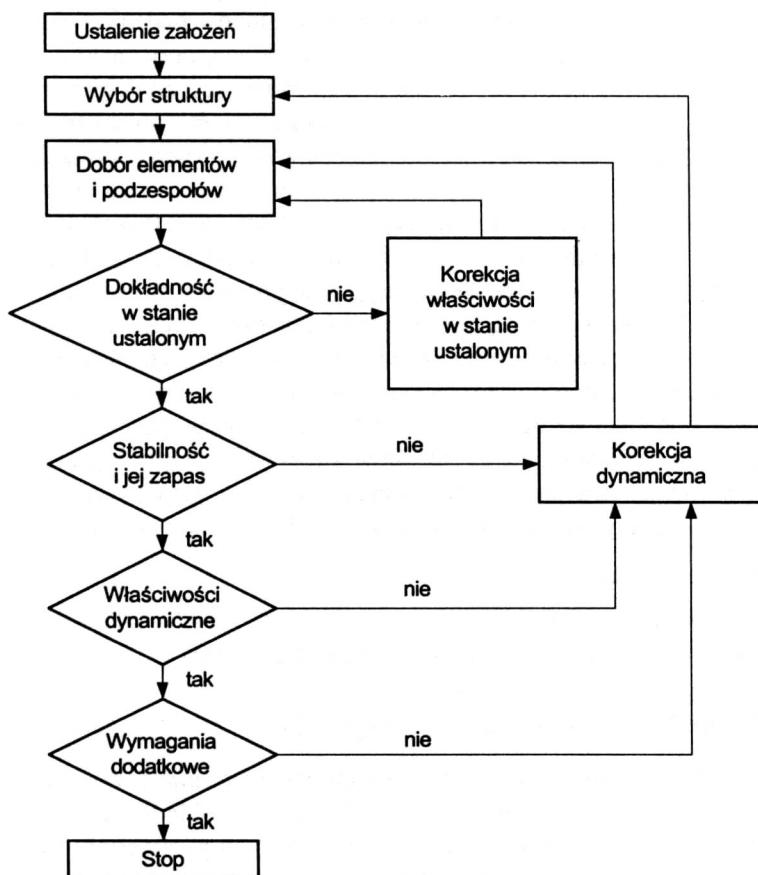
Podstawowe wymagania to:

- dokładność w stanach ustalonych;
- zakres, w jakim wielkość wyjściowa ma być regulowana;
- stabilność i odpowiedni jej zapas;
- charakter przebiegu procesów przejściowych (pasmo przenoszonych częstotliwości).

Poza tym różnym układowom, zależnie od ich przeznaczenia i właściwości obiektu sterowanego, stawia się wymagania dodatkowe (jak np. dokładność w stanach dynamicznych, zmniejszona wrażliwość na zmiany niektórych parametrów i na określone zakłócenia, rodzaje elementów, które należy zastosować ze względów bezpieczeństwa czy niezawodności itp.).

Po przyjęciu założeń dokonuje się wyboru struktury układu, dobiera wstępnie elementy i podzespoły, sprawdza dokładność w stanie ustalonym oraz zakres regulacji. Jeżeli nie odpowiadają one tym założonym, wprowadza się odpowiednią korekcję właściwości statycznych przez zmiany parametrów, nastaw niektórych elementów lub przez wymianę tych elementów na inne. Gdy – w wyniku odpowiednich modyfikacji – udało się uzyskać wymaganą dokładność w stanie ustalonym i zakres regulacji, należy zbadać stabilność tego układu.

Trzeba tu podkreślić, że wymaganie dotyczące stabilności powinno być zawsze spełnione przy wszelkich przewidywanych dla rozważanego układu warunkach pracy. Ponieważ jego parametry mogą ulegać zmianie (np. zależnie od warunków otoczenia oraz przebiegu procesu technologicznego w obiekcie sterowania) należy zapewnić stabilność w najbardziej niekorzystnym przypadku. Uzyskuje się to przez zaprojektowanie układu z odpowiednim marginesem bezpieczeństwa, biorąc pod uwagę stabilność i jakość regulacji. Nieraz dogodnie jest to wyrazić np. przez **zapas amplitudy** i **zapas fazy**. Opisany wyżej tok postępowania przedstawiono schematycznie na rysunku 9.3.



Rys. 9.3. Schemat postępowania podczas syntezy układu sterowania metodami klasycznymi

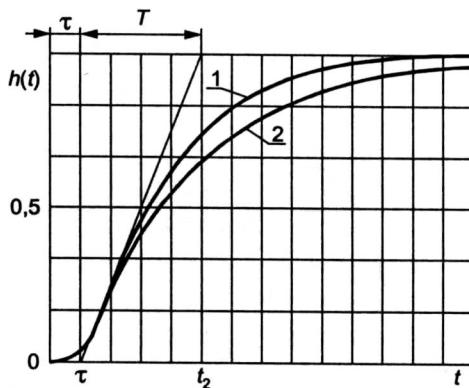
9.3. Dobór parametrów regulatora

9.3.1. Metoda Zieglera–Nicholsa

Dobór nastaw regulatorów do danego obiektu regulacji przeprowadzamy różnymi metodami, wykorzystując różnego typu przesłanki. Najbardziej znany i najprostszym do stosowania są reguły sformułowane przez Zieglera i Nicholsa na początku lat 40. XX w., w wyniku prowadzonych przez nich badań doświadczalnych. Jak wykazano znacznie później, reguły te prowadzą do minimalizacji całki z modułu uchybu (kryterium całkowe). Korzystanie z tych reguł wymaga wstępnego wprowadzenia dwóch pojęć:

- 1) wzmacnienia krytycznego K_{kr} ,
- 2) okresu drgań krytycznych T_{os} .

Wzmocnienie krytyczne K_{kr} jest to wzmacnienie regulatora proporcjonalnego, który połączony szeregowo z obiektem spowoduje znalezienie się układu zamkniętego na granicy stabilności, a więc pojawienie się niegasących drgań okresowych. Okres tych drgań nazywany jest **okresem drgań krytycznych** T_{os} . Ponieważ bezpośrednie doświadczalne wyznaczenie tych parametrów niemal nigdy nie będzie możliwe (choćby ze względów bezpieczeństwa), podano metody pośrednie wyznaczenia tych parametrów.



Rys. 9.4. Przybliżenie odpowiedzi skokowej obiektu statycznego

Metody te oparte są na przybliżeniu odpowiedzi skokowej obiektu statycznego wyższego rzędu – rysunek 9.4, krzywa 1 jest charakterystyką skokową członu inercyjnego pierwszego rzędu z opóźnieniem (krzywa 2) o transmitancji operatorowej

$$G_0(s) = \frac{1}{Ts + 1} e^{-s\tau} \quad (9.1)$$

przy czym

$$T = t_2 - \tau.$$

Według Zieglera i Nicholsa parametry K_{kr} i T_{os} wyrażone są wzorami:

$$K_{kr} = \frac{t_2 - \tau}{\tau}, \quad T_{os} = 4\tau \quad (9.2)$$

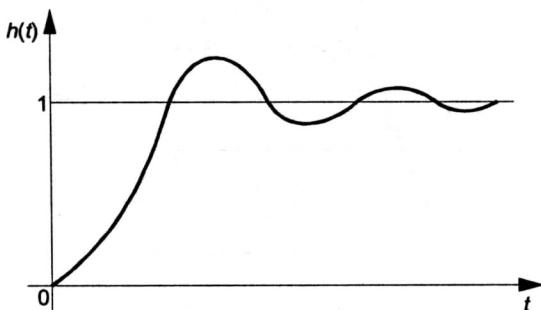
W tabeli 9.1 K oznacza iloczyn wzmocnienia regulatora i wzmocnienia obiektu

$$K = K_r K_0 \quad (9.3)$$

Przyjęcie nastaw regulatorów z tabeli 9.1, a więc według wskazań Zieglera i Nicholsa, pozwala uzyskać przebiegi przejściowe o charakterze zbliżonym do przedstawionego na rysunku 9.5. Przeregulowanie jest rzędu 15÷20%, a liczba oscylacji nie przekracza dwóch.

Tabela 9.1
Nastawy regulatorów według Zieglera i Nicholsa

| Regulator | K/K_{kr} | T_i/T_{os} | T_d/T_{os} |
|-----------|------------|--------------|--------------|
| P | 0,5 | – | – |
| PI | 0,45 | 0,83 | – |
| PID | 0,6 | 0,5 | 0,125 |



Rys. 9.5. Odpowiedź skokowa układu regulacji przy nastawach regulatora według Zieglera i Nicholsa

Bardziej szczegółową analizę doboru nastaw regulatorów przeprowadził zespół pracujący pod kierunkiem Cypkina. Opublikował on zestaw nomogramów, umożliwiający dobór nastaw regulatorów dla trzech zasadniczych kryteriów jakości:

- 1) przebiegu aperiodycznego o najkrótszym czasie regulacji,
- 2) minimum całki z kwadratu uchybu,
- 3) przebiegu o 20% przeregulowaniu i najkrótszym czasie regulacji.

Nomogramy te opracowano dla regulatorów P, I, PI i PID, przy czym uwzględniano zarówno obiekty statyczne opisane transmitancją operatorową (9.1), jak i astaticzne o transmitancji

$$G_0(s) = \frac{K_0}{s(Ts + 1)} e^{-s\tau_1} \quad (9.4)$$

9.3.2. Metoda charakterystyk częstotliwościowych

Dobór regulatora lub członu korekcyjnego możemy również przeprowadzić na podstawie analizy charakterystyk częstotliwościowych układu, posługując się charakterystykami logarytmicznymi, liniowo-logarytmicznymi lub liniowymi. Określić z nich można przede wszystkim:

- zapas stabilności;
- czas regulacji (oceniany na podstawie pulsacji przecięcia);
- przeregulowanie (ocenianie na podstawie zapasu fazy), czyli podstawowe parametry przebiegu odpowiedzi skokowej.

Tok postępowania jest następujący:

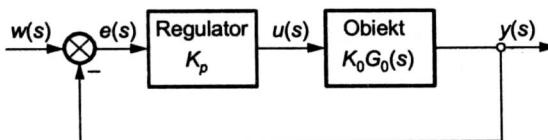
1. Wykreślić charakterystyki częstotliwościowe obiektu.
2. Wyznaczyć minimalną wartość wzmacnienia, konieczną ze względu na ograniczenie uchybu ustalonego.
3. Wyznaczyć minimalne wartości zapasu modułu i zapasu fazy, konieczne ze względu na ograniczenie przeregulowania oraz obszar zabroniony dla charakterystyki częstotliwościowej układu otwartego.
4. Wyznaczyć minimalną wartość pulsacji przecięcia ω_0 (powyżej której moduł transmitancji układu otwartego jest mniejszy od jedności) układu skorygowanego, konieczną ze względu na ograniczenie czasu regulacji.
5. Wybrać typ regulatora spośród będących do dyspozycji i naszkicować charakterystkę układu z reguatorem, spełniającego warunki 2.–4.
6. Sprawdzić, czy warunki 2.–4. są spełnione.
7. Jeśli wybrany typ regulatora nie spełnia postawionych warunków, bez względu na dobór nastaw, wybrać inny regulator i powtórzyć postępowanie.

9.3.3. Metoda linii pierwiastkowych

Metoda linii pierwiastkowych (metoda miejsc geometrycznych pierwiastków) umożliwia wyznaczenie położenia pierwiastków równania charakterystycznego układu zamkniętego na podstawie rozmieszczenia zer i biegunów transmitancji układu otwar-

tego. Ze zmianą wzmocnienia układu otwartego pierwiastki te poruszają się po liniach pierwiastkowych, będących miejscem geometrycznym pierwiastków.

Rozpatrzymy prosty układ ze sprzężeniem zwrotnym przedstawiony na rysunku 9.6.



Rys. 9.6. Schemat blokowy układu regulacji

Transmitancja układu zamkniętego wynosi

$$G_z(s) = \frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{K_p K_0 G_0(s)}{1 + K_p K_0 G_0(s)} \quad (9.5)$$

Równanie charakterystyczne, którego pierwiastki są biegunami transmitancji, ma postać

$$1 + K_p K_0 G_0(s) = 0 \quad (9.6)$$

Pierwiastki równania charakterystycznego układu zamkniętego (9.6) zależą od współczynnika wzmocnienia K_p , tym samym możemy mieć wpływ na odpowiedź dynamiczną układu zamkniętego przez dobór K_p . W.R. Evans proponuje zaznaczenie wszystkich możliwych pierwiastków równania (9.6) przy współczynniku K_p zmieniającym się od zera do nieskończoności. Dodatkowo, analizując skutki wprowadzenia dodatkowych biegunów i zer, możemy ocenić ich wpływ na dynamikę układu. Metoda ta pozwala nie tylko na dobór wzmocnienia, ale również jest pomocna przy projektowaniu kompensacji dynamicznej. Analogicznie można rozszerzyć zastosowanie tej metody do analizy zmian innych parametrów obiektu sterowania w celu otrzymania optymalnego układu regulacji. Wykres wszystkich możliwych pierwiastków równania (9.6) w zależności od pewnych zmiennych (np. wzmocnienia układu lub innych parametrów) nazywamy linią pierwiastkową, natomiast metoda nazywana jest metodą linii pierwiastkowych Evansa.

W dalszej części podrozdziału wyjaśnimy mechanizm konstruowania wykresu pierwiastków przy wykorzystaniu wzmocnienia jako zmiennego parametru. Założymy, że transmitancja układu otwartego $K_p K_0 G_0(s)$ jest funkcją wymierną, której licznik ma postać $K_p K_0 b(s)$, gdzie $b(s)$ jest wielomianem stopnia m

$$b(s) = s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_m = (s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_m) = \prod_{i=1}^m (s - z_i) \quad (9.7)$$

Mianownik tej funkcji jest wielomianem $a(s)$ n -tego stopnia, przy czym $n \geq m$

$$a(s) = s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n = \prod_{i=1}^n (s - p_i) \quad (9.8)$$

Dla potrzeb naszej analizy założymy, że wzmacnienie obiektu K_0 jest dodatnie, oraz zdefiniujmy parametr miejsca geometrycznego jako

$$K = K_p K_0 \quad (9.9)$$

Miejsca zerowe (pierwiastki) $b(s) = 0$ są zerami transmitancji $G_z(s)$ i oznaczamy je jako z_i , podobnie miejsca zerowe (pierwiastki), $a(s) = 0$, są biegunami transmitancji $G_z(s)$ i oznaczamy je jako p_i .

Możemy teraz przedstawić położenie pierwiastków równania (9.6) na kilka możliwych sposobów. Każde z poniższych równań ma te same pierwiastki:

$$1 + KG_0(s) = 0 \quad (9.10a)$$

$$1 + K \frac{b(s)}{a(s)} = 0 \quad (9.10b)$$

$$a(s) + Kb(s) = 0 \quad (9.10c)$$

$$G_0(s) = -\frac{1}{K} \quad (9.10d)$$

Równania (9.10) określa się często jako formuły pierwiastków równania charakterystycznego. Linia pierwiastkowa jest zbiorem wartości s , dla których w równaniach (9.10) zachowana jest dodatnia wartość K (oraz K_p). Ponieważ rozwiązaniami równań (9.10) są pierwiastki układu zamkniętego, można powiedzieć, że metoda linii pierwiastkowych jest sposobem wnioskowania o właściwościach układu zamkniętego na podstawie transmitancji układu otwartego $KG_0(s)$. Do celów prezentacji przyjęliśmy tutaj, że $G_0(s)$ jest stosunkiem dwóch monicznych wielomianów, $b(s)$ i $a(s)$. W poprzednich i następnych rozdziałach $G_0(s)$ oznacza funkcję przejścia obiektu regulacji i zawiera stałą K_0 .

Przykład 9.1

Transmitancja obiektu ma postać

$$G_0(s) = \frac{K_0}{s(s+1)} \quad (9.11)$$

Wyznaczyć położenie pierwiastków układu zamkniętego ze względu na K_p , wykorzystując przyjęte formy zapisu:

$$\begin{aligned} m &= 0, & K_0 &= 1, & b(s) &= 1, & K_p &= K \\ n &= 2, & a(s) &= s^2 + s, & p_i &= 0, -1 \end{aligned} \quad (9.12)$$

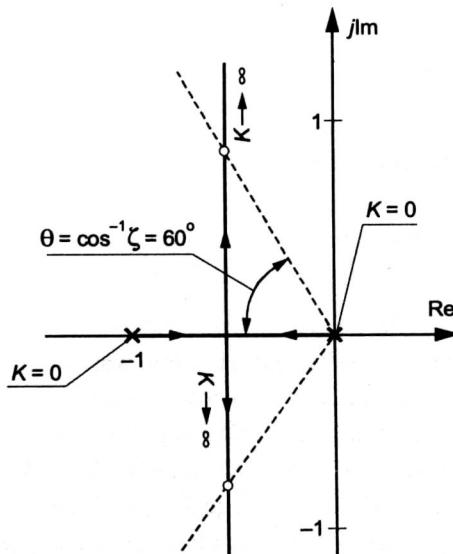
Charakterystyka pierwiastków jest graficznym przedstawieniem pierwiastków równania kwadratowego

$$s^2 + s + K = 0 \quad (9.13)$$

Rozwiązań równania (9.13) mają postać

$$s_1, s_2 = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{1-4K}}{2} \quad (9.14)$$

Szkic położenia pierwiastków przedstawia rysunek 9.7.



Rys. 9.7. Położenie pierwiastków

Dla $0 \leq K \leq \frac{1}{4}$ pierwiastki przyjmują wartości rzeczywiste z przedziału $(-1, 0)$.

Dla $K = \frac{1}{4}$ istnieją dwa pierwiastki o wartościach równych $-\frac{1}{2}$, dla $K > \frac{1}{4}$ pierwiastki są liczbami zespolonymi, których część rzeczywista ma wartość $-\frac{1}{2}$, natomiast

część urojona wzrasta proporcjonalnie do \sqrt{K} . Linie przerywane na rysunku 9.7 przedstawiają linie stałej wartości założonego tłumienia równego 0,5. Na przecięciu tych linii z wykresem, znajdują się pierwiastki dla współczynnika tłumienia równego 0,5. Biegunki $G_0(s)$ zaznaczono symbolem x, natomiast punkty, w których wykres przecina linię współczynnika tłumienia, oznaczono kropkami. Możemy obliczyć K w punktach, dla których wykres przecina linię $= 0,5$, ponieważ wiemy, że dla współczynnika tłumienia równego 0,5 – kąt $\Theta = 60^\circ$, natomiast wartość części urojonej pierwiastka jest o $\sqrt{3}$ większa od wartości części rzeczywistej. Jako że wartość rzeczywista wynosi $1/2$, to z równania (9.14) otrzymamy

$$\frac{\sqrt{4K - 1}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (9.15)$$

stąd $K = 1$.

Analizując wzory (9.13) i (9.14), a także rysunek 9.7, możemy zaobserwować pewne własności tego prostego wykresu. Po pierwsze, istnieją dwa pierwiastki, a tym samym dwie gałęzie charakterystyki pierwiastków. Dla $K = 0$ gałęzie te zaczynają się w biegunkach $G_0(s)$ (odpowiednio 0; -1), jak to jest dla $K = 0$ w układzie z pętlą otwartą. Wraz ze wzrostem K pierwiastki zaczynają się do siebie zbliżać, spotykając się w $s = -1/2$, w tym punkcie następuje ich oderwanie od osi rzeczywistej. Po przekroczeniu punktu rozgałęzienia wartości części rzeczywistych obydwu pierwiastków pozostają równe i stałe (-1/2), natomiast części urojone rosną odpowiednio do plus, minus nieskończoności. Z punktu widzenia projektanta można zauważyc, iż zmieniając wartość K , możemy umiejscowić biegunki układu zamkniętego w dowolnych punktach należących do charakterystyki pierwiastków. Jeżeli dla pewnych punktów charakterystyki otrzymujemy zadawalające przebiegi nieustalone układu, możemy zakończyć projektowanie, dobierając odpowiadające tym punktom wartości K . Gdy przypadek powyższy nie zachodzi, pozostaje nam взять pod uwagę bardziej złożone regulatory.

Jak podkreślaliśmy wcześniej, metoda Evansa nie ogranicza się wyłącznie do wyznaczania wzmocnienia układu. Opierając się na tej metodzie, możemy wyznaczyć charakterystyki pierwiastków, w zależności od dowolnego parametru z równania charakterystycznego i tym samym dobrać pożądane wartości tych parametrów.

Przykład 9.2

Rozważmy obiekt o poniższej funkcji przejścia, w której c jest szukanym parametrem.

$$G_0(s) = \frac{1}{s(s + c)} \quad (9.16)$$

Wyznaczyć charakterystykę pierwiastków ze względu na c .

Równaniem charakterystycznym układu zamkniętego (9.10a) jest

$$1 + G_0(s) = 0 \quad (9.17)$$

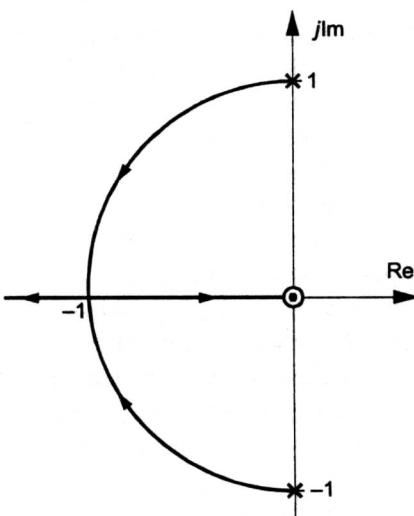
lub

$$s^2 + cs + 1 = 0 \quad (9.18)$$

Z łatwością wyliczamy rozwiązania równania (9.18)

$$s_1, s_2 = -\frac{c}{2} \pm \frac{\sqrt{c^2 - 4}}{2} \quad (9.19)$$

Rozmieszczenie miejsc zerowych w zależności od parametru c przedstawia rysunek 9.8.



Rys. 9.8. Położenie pierwiastków

Zauważmy, że gdy $c = 0$ pierwiastki leżą w x i mają charakter oscylacyjny, podczas gdy współczynnik tłumienia wzrasta wraz ze wzrostem c . Dla $c = 2$ mamy $s = -1$, w tym punkcie obydwie gałęzie charakterystyki gwałtownie zmieniają kierunek i poruszają się wzdłuż osi rzeczywistej. Punkt ten nazywamy punktem zbieżności. Naturalnie, wyznaczanie charakterystyki pierwiastków z równań kwadratowych jest łatwe. W ten sposób rozwiązaliśmy równania (9.13) i (9.18), otrzymując wynik w postaci równań (9.14) lub (9.19). Bezpośrednio po tym przystąpiliśmy do wykreślenia wykresu w zależności od K lub c . Aby metoda była użyteczna, konieczna jest możliwość rozciągnięcia jej na układy wyższych rzędów i otrzymania konkretnych (użytecznych, jasnych) rozwiązań.

Ogólne właściwości charakterystyki pierwiastków i zasady tworzenia złożonych wykresów pierwiastków zostały przedstawione przez Evansa i składają się na metodę wyznaczania charakterystyki pierwiastków.

9.4. Synteza układów sterowania z uwzględnieniem wskaźników jakości. Metoda przestrzeni stanów

Stosując klasyczną metodę syntezy liniowych układów sterowania (podrozdz. 9.2), dochodzi się do wielowariantowych rozwiązań, spełniających przyjęte założenie i dodatkowe wymagania, a także charakteryzujących się dobrymi właściwościami statycznymi i dynamicznymi. Gdy uwzględnia się wrażliwość na zmiany poszczególnych parametrów układu oraz różne dodatkowe kryteria, to liczba wariantów ulegnie odpowiedniemu zmniejszeniu. Jednak w dalszym ciągu istnieje konieczność wyboru jednego z nich i decyzja ta należy do projektanta. Można zatem stwierdzić, że metoda klasyczna syntezy układu sterowania umożliwia przyjęcie jednego z dobrych rozwiązań, natomiast nie daje wystarczającej podstawy dla ustalenia, które z nich (dla narzuconego kryterium) jest optymalne.

Ograniczeń takich nie mają inne metody syntezy układów sterowania, np. metody wykorzystujące wskaźniki jakości. Umożliwiają one wyznaczenie rozwiązań optymalnych, tzn. takich, które zapewniają minimalizację przyjętego wskaźnika jakości – przy spełnieniu warunków wynikających z narzuconych ograniczeń.

Wskaźniki jakości bywają różne, w zależności od rodzaju układu, warunków jego pracy i postawionych mu wymagań. Najczęściej formułuje się je jako funkcjonały całkowe, które dla jednowymiarowych ciągłych i stacjonarnych układów sterowania mają postać

$$I = \int_{t_0}^{t_f} f \left[y(t), y^{(1)}(t), \dots, y^{(k)}(t), u(t) \right] dt \quad k \leq n - 1 \quad (9.20)$$

gdzie n – rząd równania opisującego układ sterowania, k – rząd pochodnej.

Jak wynika z zależności (9.20), wskaźnik jakości jest funkcją wielkości sterowanej i jej pochodnych oraz wielkości sterującej.

Wskaźnik jakości często jest sumą funkcjonalu całkowego i funkcji ustalonej na podstawie dodatkowych wymagań, np. przy uwzględnieniu kosztu sterowania lub dopuszczalnego zużycia energii w czasie procesu sterowania.

Ograniczeniami są zawsze zależności opisujące układ. Poza tym można wprowadzić różne inne ograniczenia w postaci równań lub nierówności. Często ograniczeniem jest dopuszczalna największa wartość niektórych sygnałów.

Przy takim sformułowaniu problemu sterowania występują dwa zagadnienia:

- 1) znalezienie struktury i parametrów układu, przy których dla danych ograniczeń i zadanych typowych przebiegów sygnału sterującego, wskaźnik jakości osiąga minimalną wartość – jest to zagadnienie syntezy układu sterowania;
- 2) wyznaczanie takiego sterowania $u(t)$, które przeprowadza dany układ z pewnego stanu początkowego do pewnego stanu końcowego, w sposób zapewniający minimalizację wskaźnika jakości, przy zachowaniu narzuconych ograniczeń.

Problemy z tym związane dotyczą syntezy sterowania optymalnego. Rozważania przeprowadza się przy zastosowaniu metody opisu układu za pomocą zmiennych stanu.

Ponieważ całkowe kryteria jakości stosuje się w przypadkach, gdy głównym celem staje się ocena jakości pracy układu w sensie średnim, w wybranym przedziale czasowym często stosuje się kryterium całki kwadratu uchybu w postaci

$$J = \int_0^{t_s} (x^T Q x + u^T R u) dt \quad (9.21)$$

gdzie:

Q i R – dodatnio określone macierze wagowe,
 x i u – wektory, odpowiednio: stanu i sterowań.

Kryterium jakości w formie kwadratowej (9.21) zawiera odchylenia zarówno zmiennych stanu x , jak i zmiennych sterujących u od ich wartości optymalnych dla stanu ustalonego w zakresie rozpatrywanego przedziału czasu sterowania t_s .

Jeżeli układ sterowania opisany jest równaniem stanu

$$x(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (9.22)$$

i czas sterowania t_s jest zadany, zadnie polega na wyznaczeniu sterowania $u^*(t)$ spełniającego równanie (9.22) oraz minimalizującego funkcjonał (wskaźnik jakości) (9.21).

W zagadnieniach związanych z syntezą często spotykany jest wskaźnik jakości będący całką kwadratu uchybu w postaci

$$J_E = \int_0^{+\infty} E_d^2(t) dt \quad (9.23)$$

która wyznacza się dla typowych stanów przejściowych w rozważanym układzie.

Jeżeli będzie dany układ o określonej strukturze i będziemy badać jego odpowiedź na wymuszenie typu skok jednostkowy, to dojdziemy do wniosku, że wartość J_E zależy od właściwości dynamicznych podanych w podrozdziale 8.3. Gdy układ jest stabilny asymptotycznie, a jego parametry są tak dobrane, że odpowiedź jednostkowa ma przebieg aperiodyczny, to wtedy przy zmniejszeniu wskaźnika jakości określonego wzorem (9.21) zmniejszają się czasy t_m , t_r oraz maksymalne przeregulowanie.

10. Podstawowe algorytmy sterowania

10.1. Wprowadzenie

W rozdziale tym przedstawiono podstawowe algorytmy sterowania wykorzystywane w przemysłowych układach sterowania (w regulatorach pneumatycznych, hydraulicznych i elektronicznych). Ponadto omówiono wpływ całkowych i różniczkowych algorytmów sterowania na odpowiedź układu.

10.2. Algorytm sterowania proporcjonalnego

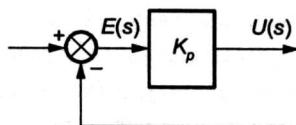
W regulatorze z proporcjonalnym algorytmem sterowania, w skrócie typu P, związek pomiędzy sygnałem wyjściowym regulatora $u(t)$ a sygnałem uchybu $e(t)$ jest następujący

$$u(t) = K_p e(t) \quad (10.1)$$

lub po zastosowaniu transformaty Laplace'a

$$\frac{U(s)}{E(s)} = K_p \quad (10.2)$$

gdzie K_p jest nazwane wzmocnieniem proporcjonalnym.



Rys. 10.1. Schemat blokowy fragmentu układu z regulatorem typu P

Bez względu na typ, regulator proporcjonalny jest wzmacniaczem z nastawianym wzmocnieniem. Wyobraźmy sobie regulator proporcjonalny jako wzmacniacz z gałką do nastawiania wzmocnienia. Schemat blokowy z takim regulatorem jest pokazany na rysunku 10.1.

10.3. Algorytm sterowania całkowego

W regulatorze z całkowym algorytmem sterowania, w skrócie typu I, przyrost wartości sygnału wyjściowego $u(t)$ zmienia się proporcjonalnie do sygnału uchybu $e(t)$, czyli

$$\frac{du(t)}{dt} = K_i e(t) = \frac{1}{T_i} e(t) \quad (10.3)$$

lub

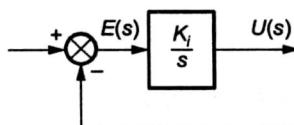
$$u(t) = K_i \int_0^t e(t) dt \quad (10.4)$$

gdzie K_i jest nastawną stałą.

Transmitancja regulatora całkowego ma postać

$$\frac{U(s)}{E(s)} = \frac{K_i}{s} = \frac{1}{T_i s} \quad (10.5)$$

Jeśli wartość $e(t)$ jest stała przez czas T_i , to wartość $u(t)$ podwoi się po upływie tego czasu. Dla wartości uchybu $e(t)$ równej zero wartość $u(t)$ pozostaje niezmienna. Rysunek 10.2 pokazuje schemat blokowy fragmentu układu z takim regulatorem.



Rys. 10.2. Schemat blokowy fragmentu układu z regulatorem typu I

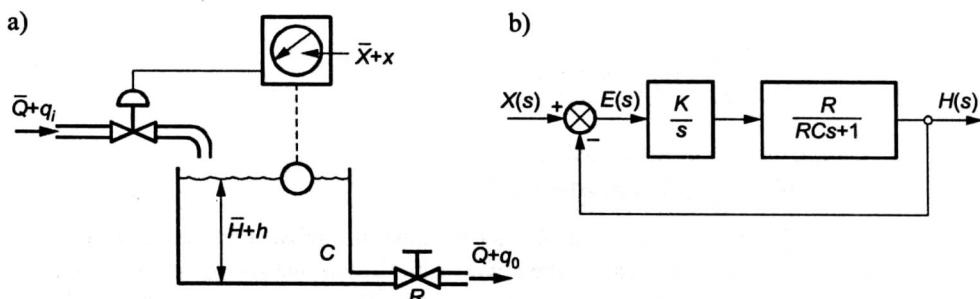
W sterowaniu proporcjonalnym obiektu, którego transmitancja nie ma integratora $1/s$, w odpowiedzi na skokowy sygnał wejściowy występuje uchyb w stanie ustalonym. Taki uchyb ustalony może być wyeliminowany, jeśli w regulatorze doda się algorytm sterowania całkowego. Jego zastosowanie stabilizuje pracę układu i zmniejsza uchyb ustalony. Zapas stabilności jest dowolnie duży, jednak pogarszają się nieznacznie właściwości dynamiczne (obniża się górna granica pasma przenoszenia).

Przykład 10.1

Przeprowadźmy analizę układu regulacji poziomu cieczy w zbiorniku, przedstawionego na rysunku 10.3a, przy wykorzystaniu regulatora z algorymem całkowym. W poprzednich rozdziałach stwierdzono, że sterowanie proporcjonalne układu poziomowania cieczy, przy skokowym sygnale wejściowym, da uchyb w stanie ustalonym.

Teraz pokażemy, że taki uchyb może być wyeliminowany, jeśli regulator będzie zawierał algorytm sterowania całkowego.

Przyjmując, że jest nam znany model układu – w skrajnym przypadku może on być nieliniowy – dokonujemy jego linearizacji wokół wartości $\bar{X}, \bar{Q}_i, \bar{H}, \bar{Q}_0$ (punkt pracy), zakładając małe odchylenia x, q_i, h i q_o . Początek układu współrzędnych ustawiamy w punkcie pracy, wtedy układ można traktować jako stabilny. Przy tych założeniach można otrzymać schemat blokowy układu, jak to pokazano na rysunku 10.3b.



Rys. 10.3. Układ regulacji poziomu cieczy: a) schemat ideowy; b) schemat blokowy

Transmitancja układu zamkniętego pomiędzy $H(s)$ i $X(s)$ ma postać

$$\frac{H(s)}{X(s)} = \frac{G_r(s)G_0(s)}{1 + G_r(s)G_0(s)} = \frac{KR}{RCs^2 + s + KR} \quad (10.6)$$

Stąd

$$\frac{E(s)}{X(s)} = \frac{X(s) - H(s)}{X(s)} = \frac{RCs^2 + s}{RCs^2 + s + KR} \quad (10.7)$$

Ponieważ układ jest stabilny, dla jednostkowej odpowiedzi skokowej uchyb statyczny otrzymujemy z twierdzenia o wartości końcowej w następujący sposób

$$e_u = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \frac{s(RCs^2 + s)}{RCs^2 + s + KR} \frac{1}{s} = 0 \quad (10.8)$$

Wynika stąd, że sterowanie całkowe układem poziomowania cieczy eliminuje uchyb statyczny w odpowiedzi na skokowy sygnał wejściowy. Jest to ważna zaleta w stosunku do układu tylko z regulatorem proporcjonalnym, który daje uchyb ustalony.

10.4. Algorytm sterowania proporcjonalno-całkowego

Algorytm pracy regulatora proporcjonalno-całkowego, w skrócie typu PI, zdefiniowany jest wzorem

$$u(t) = K_p e(t) + \frac{K_p}{T_i} \int_0^t e(t) dt \quad (10.9)$$

a transmitancja regulatora ma postać

$$\frac{U(s)}{E(s)} = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} \right) \quad (10.10)$$

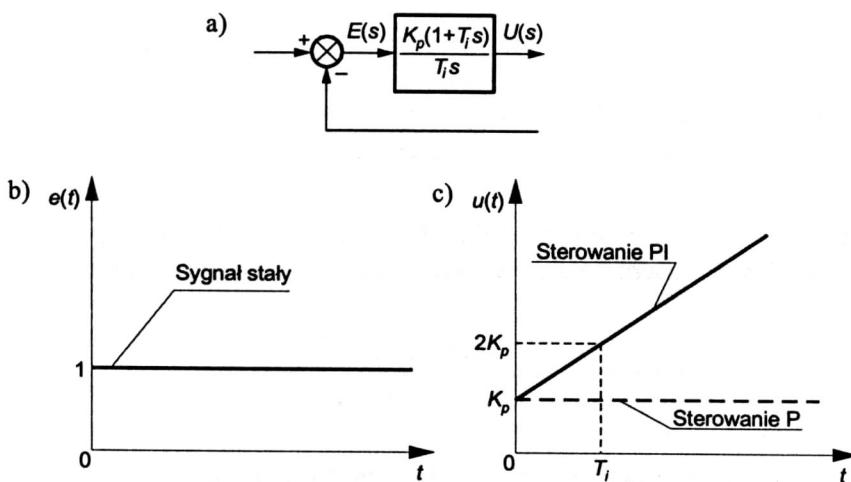
gdzie:

K_p – wzmocnienie proporcjonalne,

T_i – czas całkujący lub czas zdwojenia.

Zarówno K_p , jak i T_i są nastawne. Czas całkujący umożliwia zmianę parametrów algorytmu całkowego, podczas gdy zmiana wartości K_p wpływa zarówno na część proporcjonalną, jak i na część całkową algorytmu sterowania. Odwrotność czasu całkującego T_i jest nazywana **szybkością działania całkującego**. Szybkość działania całkującego jest liczbą, która wskazuje, ile razy na minutę część proporcjonalna algorytmu sterowania jest zdublowana – mierzona w powtarzeniach na minutę.

Rysunek 10.4a pokazuje schemat blokowy fragmentu układu z regulatorem proporcjonalno-całkowym. Jeśli sygnał uchybu $e(t)$ jest jednostkową funkcją skokową, jak to pokazano na rysunku 10.4b, to sygnał wyjściowy regulatora $u(t)$ przyjmuje postać pokazaną na rysunku 10.4c.



Rys. 10.4. Fragment układu z regulatorem typu PI: a) schemat blokowy; b) sygnał wejściowy regulatora; c) sygnał wyjściowy regulatora

10.5. Algorytm sterowania proporcjonalno-różniczkowego

Algorytm pracy regulatora proporcjonalno-różniczkowego, w skrócie typu PD, zdefiniowany jest wzorem

$$u(t) = K_p e(t) + K_p T_d \frac{de(t)}{dt} \quad (10.11)$$

a transmitancja regulatora ma postać

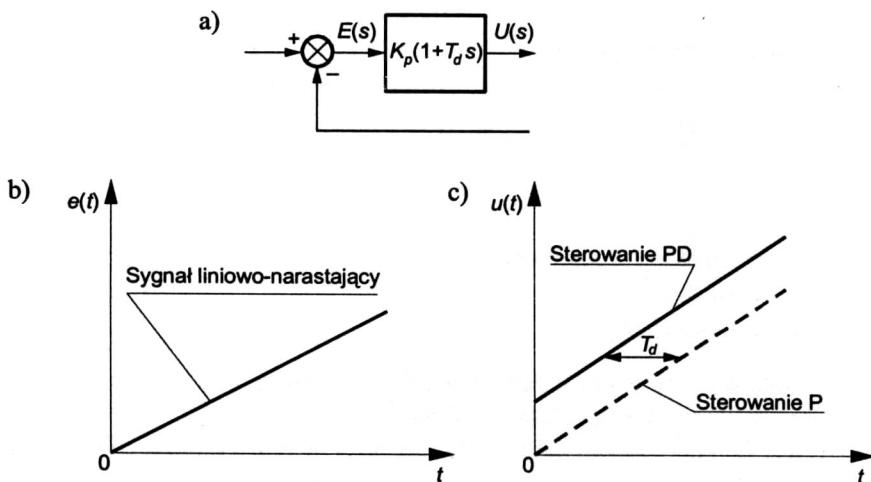
$$\frac{U(s)}{E(s)} = K_p (1 + T_d s) \quad (10.12)$$

gdzie:

K_p – wzmocnienie proporcjonalne,

T_d – stała nazywana czasem różniczkującym lub czasem wyprzedzenia.

Zarówno K_p , jak i T_d są nastawne. Algorytm sterowania różniczkowego, czasem nazywany sterowaniem szybkością, ma miejsce, gdy wartość sygnału wyjściowego regulatora jest proporcjonalna do szybkości zmiany sygnału uchybu. Czas różniczkujący T_d jest miarą tego, w jakim stopniu sterowanie PD wyprzedza sterowanie z regulatorem proporcjonalnym P. Rysunek 10.5a przedstawia schemat blokowy fragmentu układu z regulatorem proporcjonalno-różniczkowym.



Rys. 10.5. Fragment układu z regulatorem typu PD: a) schemat blokowy; b) sygnał wejściowy regulatora; c) sygnał wyjściowy regulatora

Jeśli sygnał uchybu $e(t)$ jest funkcją liniowo narastającą, jak to pokazano na rysunku 10.5b, to sygnał wyjściowy regulatora $u(t)$ przybiera postać pokazaną na rysun-

ku 10.5c. Jak można zobaczyć na rysunku, różniczkowy algorytm sterowania ma charakter wyprzedzający, „podbija” on sygnał wyjściowy.

Algorytm sterowania różniczkowego ma tę zaletę, że jest wyprzedzający, ale ma także wady: wzmacnia sygnały szumów i może powodować efekt nasycenia w urządzeniu wykonawczym. Algorytm sterowania różniczkowego nie jest stosowany samodzielnie, ponieważ jest on przydatny tylko w stanach przejściowych. Algorytm ten stabilizuje układ, nie pogarszając właściwości dynamicznych, uchyb ustalony jest znacznie większy niż przy algorytmie całkowym, przy równoczesnym zwiększeniu zapasu stabilności.

10.6. Algorytm sterowania proporcjonalno-całkowo-różniczkowego

Połączenie algorytmu sterowania proporcjonalnego, algorytmu sterowania całkowego i algorytmu sterowania różniczkowego nazywane jest algorytmem sterowania proporcjonalno-całkowo-różniczkowego, w skrócie PID. Ten połączony algorytm ma zalety każdego z trzech wcześniej wspomnianych algorytmów. Równanie regulatora PID ma postać

$$u(t) = K_p e(t) + \frac{K_p}{T_i} \int_0^t e(t) dt + K_p T_d \frac{de(t)}{dt} \quad (10.13)$$

a transmitancja regulatora ma postać

$$\frac{U(s)}{E(s)} = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) \quad (10.14)$$

gdzie:

K_p – wzmacnienie proporcjonalne,

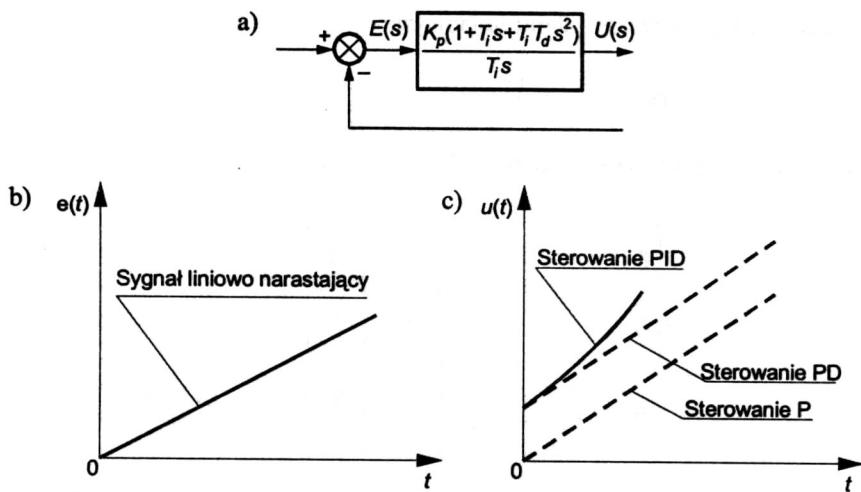
T_i – czas całkujący,

T_d – czas różniczkujący.

Schemat blokowy fragmentu układu z regulatorem proporcjonalno-całkowo-różniczkowym przedstawiony jest na rysunku 10.6a.

Jeśli $e(t)$ jest funkcją liniowo narastającą, jak pokazano na rysunku 10.6b, to sygnał wyjściowy regulatora $u(t)$ przybiera postać jak na rysunku 10.6c.

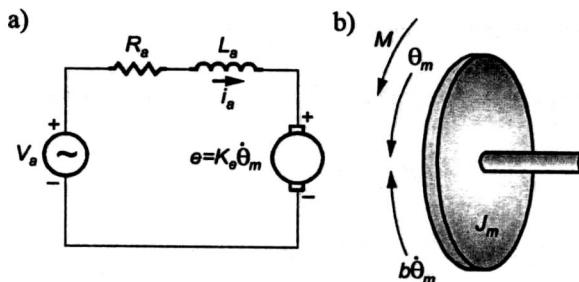
Dynamiczne i statyczne charakterystyki czujnika lub elementu pomiarowego mają decydujący wpływ na wartość wskazań zmiennej wyjściowej, a co za tym idzie na dokładność układu sterowania. Właściwości dynamiczne czujnika powinny przewyższać właściwości dynamiczne obiektu i wtedy funkcję przejścia czujnika, czyli transmitancję sprzężenia zwrotnego, można przyjąć za stałą.



Rys. 10.6. Fragment układu z regulatorem typu PID: a) schemat blokowy; b) sygnał wejściowy regulatora; c) sygnał wyjściowy regulatora

10.7. Regulacja prędkości silnika prądu stałego

Rozpatrzmy przykład silnika prądu stałego. Schemat jego obwodu elektrycznego przedstawiono na rysunku 10.7a, a model mechaniczny na rysunku 10.7b.



Rys. 10.7. Silnik prądu stałego: a) obwód elektryczny; b) model mechaniczny wirnika

Moment bezwładności wirnika wynosi J_m , opory ruchu reprezentuje współczynnik b , a moment czynny $M = K_t i_a$. Równanie dynamiczne ruchu układu ma postać

$$J_m \ddot{\theta}_m + b\dot{\theta}_m = K_t i_a \quad (10.15)$$

Równanie obwodu elektrycznego

$$L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a = V_a - K_e \dot{\theta}_m \quad (10.16)$$

Jeżeli zdefiniujemy wektor stanu układu jako

$$x = [\theta_m, \dot{\theta}_m, i_a]^T,$$

to standardowe macierze układu i sterowania mają postać

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{b}{J_m} & \frac{K_t}{J_m} \\ 0 & -\frac{K_e}{L_a} & -\frac{R_a}{L_a} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L_a} \end{bmatrix} \quad (10.17)$$

gdzie $u \stackrel{\Delta}{=} v_a$.

Równania (10.15) i (10.16) zapiszemy obecnie z uwzględnieniem zakłócenia M_z w postaci:

$$J_m \ddot{\theta}_m + b \dot{\theta}_m = K_t i_a + M_z \quad (10.18)$$

$$K_e \dot{\theta}_m + L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a = v_a \quad (10.19)$$

gdzie M_z jest momentem zakłócającym.

Definiując sygnał wyjściowy jako $y \stackrel{\Delta}{=} \dot{\theta}_m$ i zakłócający $z \stackrel{\Delta}{=} M_z$, otrzymujemy

$$J_m \dot{y} + b y = K_t i_a + z \quad (10.20)$$

$$K_e y + L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a = v_a \quad (10.21)$$

Stosując do powyższych równań różniczkowych przekształcenie Laplace'a, przy zerowych warunkach początkowych otrzymujemy równania algebraiczne:

$$s J_m Y(s) + b Y(s) = K_t I_a(s) + Z(s) \quad (10.22)$$

$$K_e Y(s) + s L_a I_a(s) + R_a I_a(s) = V_a(s) \quad (10.23)$$

Po wyznaczeniu z z równania (10.23) $I_a(s)$ i podstawieniu do wyrażenia (10.22), otrzymujemy

$$(J_m L_a s^2 + b L_a s + J_m R_a s + b R_a + K_t K_e) Y(s) = K_t V_a(s) + Z(s) \quad (10.24)$$

stąd

$$Y(s) = \frac{A}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)} V_a(s) + \frac{B}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)} Z(s) \quad (10.25)$$

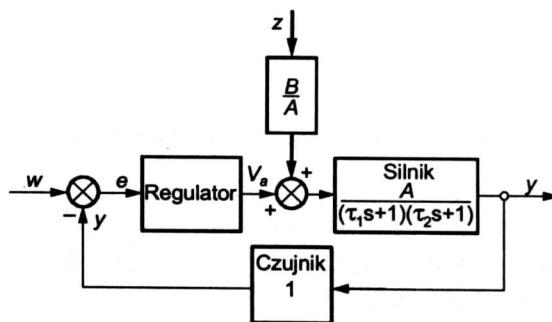
gdzie:

$$A = \frac{K_t}{bR_a + K_t K_e}, \quad B = \frac{1}{bR_a + K_t K_e} \quad (10.26)$$

$$\tau_{1,2}^{-1} = \frac{(J_m R_a + bL_a)^+ - \sqrt{(J_m R_a + bL_a)^2 - 4 J_m L_a (bR_a + K_t K_e)}}{2 J_m L_a} \quad (10.27)$$

Jeżeli $b = 0$ i L_a jest małe, wtedy stała $\tau_2 = L_a / R_a$ nazywana jest elektryczną stałą czasową, zaś stała $\tau_1 = R_a J_m / K_t K_e$ nazywana jest elektromechaniczną stałą czasową.

Na podstawie równania (10.25) możemy narysować i przekształcić schemat blokowy układu regulacji prędkości silnika prądu stałego do postaci pokazanej na rysunku 10.8.



Rys. 10.8. Schemat blokowy układu regulacji prędkości silnika

Zakładając, że w układzie zastosowany będzie regulator typu P, otrzymujemy:

$$G_r(s) = K$$

$$G_0(s) = \frac{A}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)} \quad (10.28)$$

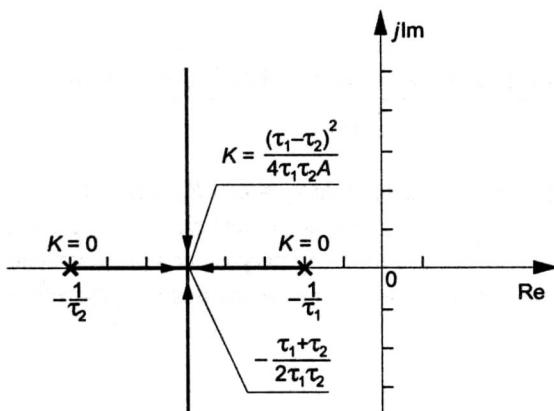
Równanie charakterystyczne układu zamkniętego $\frac{G_r(s)G_0(s)}{1 + G_r(s)G_0(s)}$ ma postać

$$\tau_1 \tau_2 s^2 + (\tau_1 + \tau_2)s + 1 + AK = 0 \quad (10.29)$$

Pierwiastki równania charakterystycznego są funkcją wzmocnienia K

$$s_{1,2} = \frac{-(\tau_1 + \tau_2) \pm \sqrt{(\tau_1 + \tau_2)^2 - 4\tau_1\tau_2(1 + AK)}}{2\tau_1\tau_2} \quad (10.30)$$

i zostały przedstawione na rysunku 10.9 dla zmieniającej się wartości K .



Rys. 10.9. Lokalizacja biegunów na płaszczyźnie zmiennej zespolonej

Rysunek (10.9) pokazuje, że pierwiastki lokują się w przedziale od $-1/\tau_1$ do $-1/\tau_2$ dla przypadku układu w pętli otwartej ($K = 0$) i zaczynają się do siebie zbliżać wraz ze wzrostem wartości K w przedziale $0 < K \leq (\tau_1 - \tau_2)^2 / 4\tau_1\tau_2 A$, co oznacza pomniejszenie stałej czasowej układu. Dla wartości $K > (\tau_1 - \tau_2)^2 / 4\tau_1\tau_2 A$ składowa rzeczywista pierwiastków nie zależy od K , natomiast składowa urojona rośnie, i w ten sposób czas odpowiedzi układu powinien zmaleć, lecz towarzyszy temu zmniejszenie współczynnika tłumienia, a tym samym – większe przeregulowanie i wzrost czasu odpowiedzi. Ograniczenia regulacji proporcjonalnej polegają na tym, że dla układów wyższych rzędów duże wartości wzmocnienia proporcjonalnego zasadniczo prowadzą do utraty stabilności. Dla większości układów istnieje górną granicą wzmocnienia proporcjonalnego, dla którego zachowana jest dostatecznie tłumiona, stabilna odpowiedź, ale granica ta może zawierać niedopuszczalnie duży błąd stanu ustalonego. Odpowiedź dynamiczna często wyznacza granicę wielkości K , a tym samym – wyznacza granicę wielkości redukcji błędu przy użyciu jedynie regulatora proporcjonalnego. Jedyną metodą polepszenia sterowania w stanach ustalonych, bez konieczności stosowania nad wyraz dużych wzmocnień, jest wprowadzenie regulatora całkującego.

Przy założeniu, że w układzie wprowadzimy dodatkowo regulację całkującą, transmitancja regulatora przyjmie postać

$$G_r(s) = \frac{K}{T_i s} \quad (10.31)$$

gdzie $\frac{1}{T_i}$ jest miarą szybkości odpowiedzi.

Najistotniejszym zadaniem regulatora całkującego jest zmniejszenie lub wyeliminowanie błędu w stanie ustalonym, lecz jest to okupione pogorszeniem odpowiedzi stanu przejściowego. Stała T_i jest czasem, po którym na wyjściu elementu całkującego pojawi się wartość $1 \cdot K$, po podaniu na jego wejściu sygnału jednostkowego. Taki układ posiada podstawową zaletę polegającą na zapewnieniu określonej (ograniczonej) wartości sygnału sterującego bez sygnału błędu na wyjściu. Jest to możliwe, ponieważ sterowanie $u(t)$ jest w większym stopniu funkcją poprzednich wartości $e(t)$ niż jej obecnej wartości, jak to ma miejsce w regulatorze proporcjonalnym.

Poprzednie wartości $e(t)$ (błędów) „podławowują” element całkujący do pewnej wartości, która pozostanie stała, nawet jeśli błąd wyniesie zero i pozostanie na tym poziomie. Ostatnią sprawą jest odpowiedź dynamiczna. Dla tego przypadku przyjrzyjmy się równaniu charakterystycznemu, które obecnie wygląda jak niżej

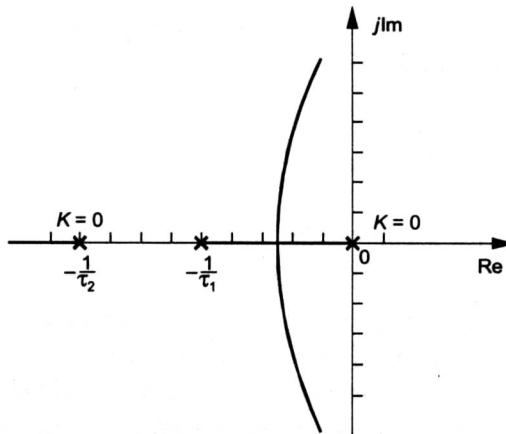
$$\tau_1 \tau_2 s^3 + (\tau_1 + \tau_2)s^2 + s + A \frac{K}{T_i} = 0 \quad (10.32)$$

Zwiększenie wzmacnienia K/T_i takiego układu doprowadzi do nieznacznego przesunięcia pierwiastków dla danych wartości K . Pierwiastki równania (10.32) zmieniają się w zależności od zmiany wartości wzmacnienia K . Zależność tę przedstawia rysunek 10.10. Trzeba zauważyć, że dwa pierwiastki przesuwają się w kierunku prawej półpłaszczyzny wraz ze wzrostem K . Jeśli projektant zamierza zwiększyć dynamikę odpowiedzi przy dużym całkowitym wzmacnieniu, to odpowiedź będzie miała charakter oscylacyjny. Sposobem uniknięcia takiej niekorzystnej cechy, dla niektórych przypadków, jest jednoczesne zastosowanie sterowania proporcjonalnego i całkującego.

Pomimo tego, że regulacja całkowa polepsza śledzenie odpowiedzi w stanach ustalonych, spowalnia jednak czas odpowiedzi przy niezmiennym przeregulowaniu. Przy równoczesnym zastosowaniu regulacji proporcjonalnej, czyli regulatora typu PI, napięcie sterujące v_a dla rozważanego przypadku przyjmie postać

$$v_a = K \left[w - y + \frac{1}{T_i} \int_o^t (w - y) d\eta \right] \quad (10.33)$$

gdzie K to wzmacnienie proporcjonalne.



Rys. 10.10. Lokalizacja pierwiastków równania charakterystycznego

Jeśli przekształcimy równanie obiektu (10.28) na równanie w dziedzinie czasu, oraz uwzględnimy równanie regulatora PI i zróżniczkujemy jednokrotnie celem usunięcia stałych, to równanie ruchu zapiszemy jako

$$\tau_1 \tau_2 \ddot{y} + (\tau_1 + \tau_2) \dot{y} + \dot{y} = A \left[K[\dot{w} - \dot{y}] + \left(\frac{K}{T_i} \right) (w - y) \right] + B \dot{z} \quad (10.34)$$

Tak jak w przypadku regulacji całkowej, gdy zakłócenie (moment) i prędkość zadana są stałe, $\dot{z} = 0$ i $\dot{w} = 0$, wtedy równanie charakterystyczne układu $G_z(s) = Y(s)/W(s)$ (odpowiadające równaniu (10.34)) zapiszemy następująco

$$\tau_1 \tau_2 s^3 + (\tau_1 + \tau_2) s^2 + (1 + AK) s + A \frac{K}{T_i} = 0 \quad (10.35)$$

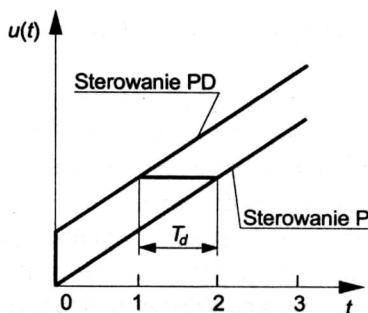
Teraz łatwo zauważyc, że dobierając K i T_i , projektant może niezależnie ustawić wartości współczynników przy s i wartości stałe, i w ten sposób niezależnie regulować dwa spośród trzech parametrów w równaniu charakterystycznym, tym samym zapewniając lepszą odpowiedź przejściową, niż to miało miejsce przy zastosowaniu wyłącznie regulacji całkowej.

W przypadku zastosowania regulacji różniczkującej napiszemy

$$G_r(s) = KT_d s \quad (10.36)$$

W praktyce czysty element różniczkujący nie występuje. Stosuje się go w połączeniu z proporcjonalnym i całkującym, by zwiększyć tłumienie i poprawić stabilność układu. Innym powodem niewykorzystania samego działania różniczkującego jest to, iż gdy $e(t)$ pozostaje stałe, na wyjściu z regulatora różniczkującego otrzymujemy zero i wymagany jest element proporcjonalny lub całkujący, w celu zapewnienia sygnału sterującego w tym czasie. W efekcie regulator z elementem różniczkującym generuje

odpowiedź z wyprzedzeniem. Odpowiedź regulatora PD wyprzedza odpowiedź regulatora P o T_D sekund, co pokazano na rysunku 10.11 dla wzrastającego liniowo błędu $e(t)$.



Rys. 10.11. Charakterystyka czasowa regulatora PD

Celem zmniejszenia błędów stanów ustalonych i przejściowych, możemy połączyć wszystkie trzy uprzednio omówione rodzaje regulacji, by otrzymać regulację proporcjonalno-całkowo-różniczkową: PID. W takim przypadku sygnał regulacji jest liniową kombinacją błędu, czasu całki błędu i czasu szybkości zmiany błędu. Wszystkie trzy otrzymane stałe można regulować. Połączenie PID może czasami zmniejszyć do akceptowanego poziomu błąd, zachowując jednocześnie stabilność i tłumienie na dostatecznym poziomie. Regulatorzy PID są powszechnie stosowane w przemyśle.

Ogólnie transmitancja regulatora PID przyjmuje postać

$$G_R(s) = K \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_D s \right) \quad (10.37)$$

By zaprojektować konkretny układ regulacji projektant musi jedynie dobrać stałe K , T_i i T_D , by osiągnąć zamierzony rezultat. Ten proces doboru nazywamy strojeniem regulatora. Kryteria strojenia bazują na zasadach przedstawionych w poprzednim rozdziale. Zwiększenie wartości K i $1/T_i$ służy zmniejszeniu błędu układu, lecz może nie zapewniać dostatecznej stabilności, podczas gdy wzrost T_D prowadzi do poprawienia stabilności.

Dla rozważanego przykładu regulacji prędkości silnika z regulatorem PID napięcie sterujące v_a przyjmuje postać

$$v_a = K \left[w - y + \frac{1}{T_i} \int_0^t (w - y) d\eta + T_D (\dot{w} - \dot{y}) \right] \quad (10.38)$$

Różniczkując równanie układu w pętli zamkniętej otrzymujemy

$$\tau_1 \tau_2 \ddot{y} + (\tau_1 + \tau_2) \dot{y} + \dot{y} = A \left[K[\dot{w} - \dot{y}] + \frac{K}{T_i} (w - y) + KT_D (\ddot{w} - \ddot{y}) \right] + B \dot{z} \quad (10.39)$$

Uwzględniając uwagi odnośnie regulacji całkowej, równanie charakterystyczne zapiszemy jako

$$\tau_1 \tau_2 T_i s^3 + T_i [(\tau_1 + \tau_2) + AKT_D] s^2 + T_i (1 + AK) s + AK = 0 \quad (10.40)$$

Jeśli równanie to podzielimy przez $\tau_1 \tau_2 T_i$, otrzymujemy trzy współczynniki i trzy parametry (K , T_i i T_D). Tak oto, teoretycznie, możemy wyznaczyć położenie biegunów w zależności od potrzeb. Dołączenie działania różniczkującego do takiego układu pozwala na pełniejsze kształtowanie jego dynamiki.

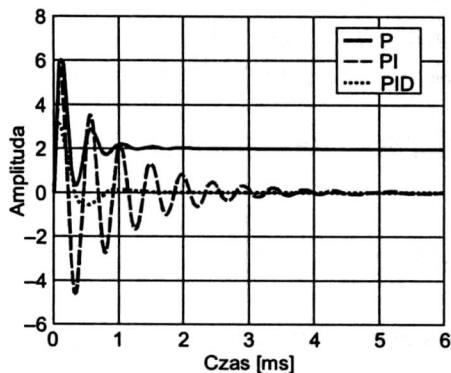
Rozważmy omawiany silnik prądu stałego i skutek regulacji P, PI i PID na odpowiedź układu. Rysunek 10.12a ilustruje wpływ regulacji P, PI oraz PID na zakłócenie pracy układu sygnałem skokowym. Zauważamy iż dodanie elementu całkującego powoduje wzrost oscylacji odpowiedzi, lecz obniża wartość błędu, natomiast element różniczkowy obniża oscylacje. Odpowiedź układu na jednostkowe wymuszenie skokowe pokazuje rysunek 10.12b. Daje się tutaj zauważać obecność uchybu w stanie ustalonym dla regulacji P. Należy zauważać także zmniejszenie oscylacji spowodowane dołączeniem elementu różniczkowego. Odpowiedzi te zostały wyznaczone przy użyciu MATLAB-a. Jako przykład, dla regulatora PI transmitancja zakłóceniowa wynosi

$$\frac{Y(s)}{Z(s)} = \frac{T_i Bs}{T_i \tau_1 \tau_2 s^3 + T_i (\tau_1 + \tau_2) s^2 + T_i (1 + AK) s + AK},$$

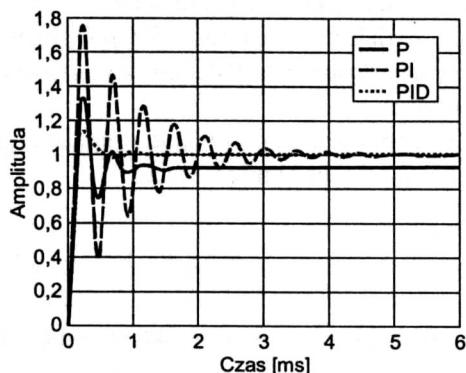
natomiast transmitancja względem sygnału wejściowego ma postać

$$\frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{AK(T_i s + 1)}{T_i \tau_1 \tau_2 s^3 + T_i (\tau_1 + \tau_2) s^2 + T_i (1 + AK) s + AK} \quad (10.41)$$

a)



b)



Rys. 10.12. Odpowiedzi na: a) zakłócenie sygnałem skokowym;
b) wymuszenie skokiem jednostkowym

11. Sterowanie cyfrowe

11.1. Wprowadzenie do sterowania cyfrowego

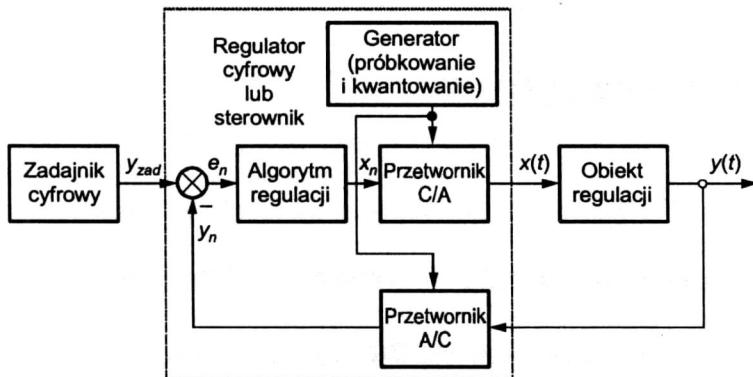
Teoria liniowych, impulsowych układów sterowania, oparta na równaniach różnicowych lub przekształceniu Z , wywołała zainteresowanie teoretyków sterowania, wyprzedzając o ponad 10 lat realizację techniczną sterowania cyfrowego. Poprawność i pozyteczność pewnych działań tej teorii zostały potwierdzone przez współczesne badania dotyczące bezpośredniego sterowania cyfrowego. Typowe regulatory analogowe (pneumatyczne, elektroniczne lub hydrauliczne) są stosunkowo małymi urządzeniami, które są umieszczone w poszczególnych pętlach, a przyłączająca większość z nich wykorzystuje prawa sterowania P, PI lub PID. Regulatory analogowe wytwarzają ciągły w czasie sygnał wyjściowy w odpowiedzi na ciągły sygnał wejściowy. Regulatory cyfrowe przetwarzają sygnał tylko w chwilach próbkowania – wytwarzają ciąg czasowy sygnałów wyjściowych. Sterowanie cyfrowe różni się więc od sterowania analogowego w dwu istotnych aspektach:

- 1) wejście regulatora cyfrowego musi być skwantowane (konieczne jest przekształcenie analogowo-cyfrowe, jeżeli sygnał pierwotny jest analogowy);
- 2) obliczenia cyfrowe są wykonywane tylko dla dyskretnego czasu zamiast w sposób ciągły; potrzebny jest więc impulsator po stronie wejściowej i ekstrapulator po stronie wyjściowej regulatora.

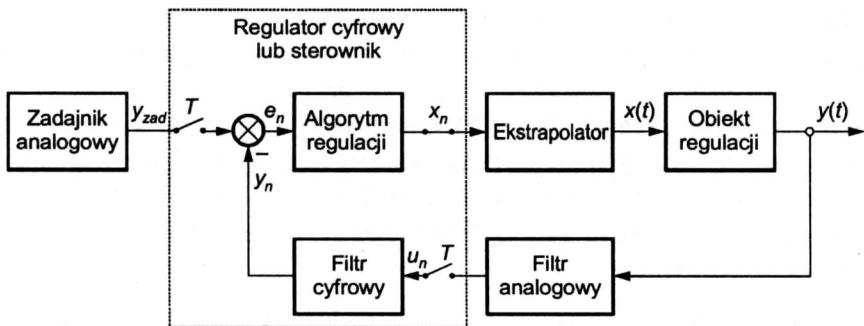
11.2. Parametry sterowania cyfrowego

Większość oprzyrządowania używana w układach sterowania jest analogowa co do swej natury, tak że sygnały wejściowe z oprzyrządowania analogowego muszą być próbkowane i kwantowane przez przetwornik analogowo-cyfrowy dla wprowadzenia ich do regulatora cyfrowego. Podobnie sygnały wyjściowe z regulatora są impulsowe i jeżeli nie stosuje się końcowych elementów sterowania, takich jak np. silniki kroko-wie, zaprojektowanych do pracy z sygnałami impulsowymi, wyjście musi być prze-

kształcone po każdym impulsie na postać zbliżoną do analogowej, w kształcie schodkowym lub trapezoidalnym. Rysunki 11.1 i 11.2 ilustrują dwa sposoby rysowania układów regulacji.



Rys. 11.1. Sterowanie cyfrowe z przetwornikami C/A i A/C



Rys. 11.2. Sterowanie cyfrowe z impulsatorem o okresie próbkowania T

Aby przejść na postać cyfrową sygnału (rys. 11.1), z którą mamy do czynienia w sterowniku, należy przekształcić sygnał z postaci analogowej na cyfrową lub odwrotnie, w specjalnych modułach. Sprowadza się to – w wielkim uproszczeniu – do próbkowania sygnału w chwilach T przy użyciu impulsatorów (rys. 11.2), natomiast cyfrowy sygnał wyjściowy x_n jest aproksymowany przez ekstrapulator do postaci zbliżonej do analogowej. Ponadto, często stosuje się filtry analogowe i/lub cyfrowe w torze sprzężenia zwrotnego.

11.2.1. Próbkowanie sygnału

Próbkowanie sygnału polega na określaniu wartości amplitudy przebiegu w wybranych chwilach czasowych. Zasadniczą sprawą przy próbkowaniu jest dokładność,

z jaką ciąg otrzymanych wartości dyskretnych reprezentuje funkcję ciągłą. Dokładność ta wynika z twierdzenia Shannona–Kotielnikowa o próbkowaniu

$$T \leq \frac{1}{2f_g} \quad (11.1)$$

gdzie:

T – czas próbkowania (czas pomiędzy pobraniem kolejnych próbek),

f_g – maksymalna częstotliwość sygnału próbkowanego (częstotliwość graniczna).

Wybierając dłuższe okresy próbkowania, możemy zmniejszyć koszt sterowania oraz powiększyć złożoność algorytmów sterowania. Z drugiej strony, okres próbkowania musi być dostatecznie krótki, aby umożliwić skuteczne sterowanie. Na wybór okresu próbkowania wpływają również:

- dynamika sterowanego obiektu,
- typy zmian zadanego sygnału,
- oczekiwane zakłócenia,
- żądana dokładność regulacji,
- algorytm sterowania, którego ma się używać.

W procesach wolnozmiennych wystarczającą częstotliwością próbkowania jest 1 Hz, tzn. $T = 1$ s, np. przy przepływach cieczy, ale przy sterowaniu ciśnieniem cieczy potrzebne jest już 10 Hz, tzn. $T = 0,1$ s.

11.2.2. Kwantyzacja sygnału

Kwantyzacja sygnału jest procesem nieliniowym, polegającym na zastępowaniu zmiennej ciągłej zmienną skokową, co w połączeniu z próbkowaniem umożliwia dyskretyzację sygnału. W procesie tym przyjmuje się dla sygnału równe skoki amplitudy, zwane kwantami. Kolejnym próbkom przebiegu są przyporządkowane określone wartości poziomów, zwane poziomami kwantowania. Ponieważ sygnał analogowy może przyjmować nieskończoną liczbę poziomów, podczas gdy w praktyce mamy do dyspozycji określony zbiór poziomów, tak więc w wyniku kwantowania otrzymuje się przybliżoną postać sygnału, obarczoną pewnym błędem kwantowania. Dokładność tego przybliżenia zależy od liczby poziomów kwantowania, będących do dyspozycji. Im liczba poziomów kwantowania jest większa, tym średni błąd kwantyzacji jest mniejszy, ale wymagana jest większa liczba bitów do zakodowania wyniku.

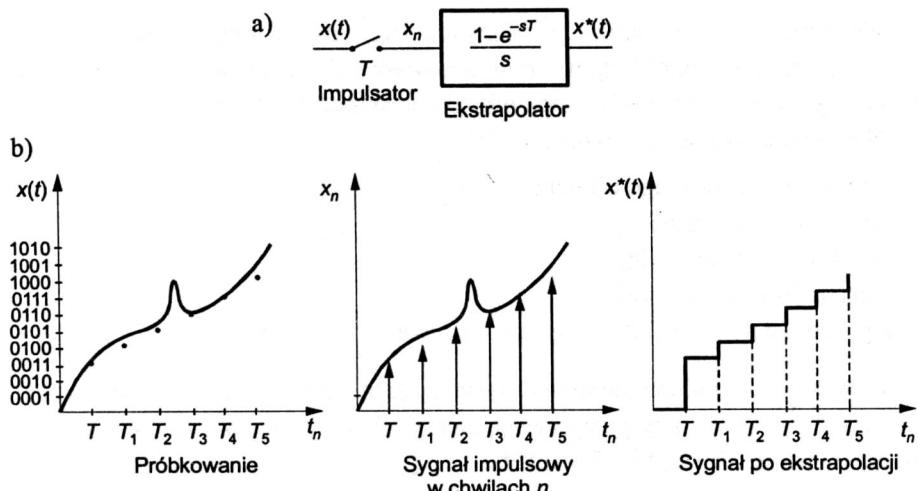
11.2.3. Ekstrapolacja sygnału

Całkowite odtworzenie sygnału ciągłego z jego postaci impulsowej jest w ogólności niemożliwe. Jednakże przybliżone odtworzenie może być przeprowadzone np.

przez ekstrapulator zerowego rzędu ZOH (ang. Zero-Order-Hold), przybliżenie prostokątami. Transmitancja tego ekstrapulatora jest równa

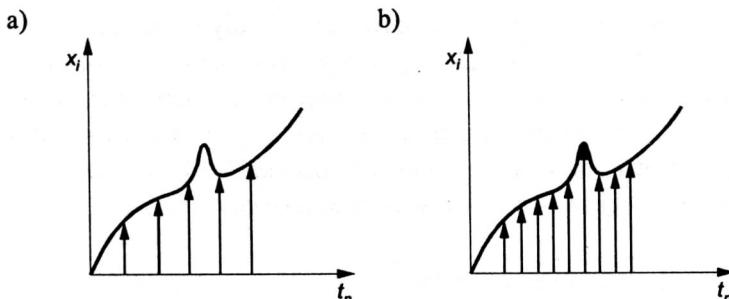
$$G(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s} \approx e^{-sT/2} \quad (11.2)$$

Rysunek 11.3 pokazuje, jak sygnał ciągły $y(t)$ jest w przybliżeniu aproksymowany z jego danych próbkowanych przez ekstrapulator zerowego rzędu.



Rys. 11.3. Odtworzenie sygnału ciągłego $x(t)$ przez ekstrapulator ZOH: a) schemat blokowy impulsatora i ekstrapulatora; b) postać sygnału w punktach charakterystycznych

Natomiast rysunek 11.4 ilustruje, jak znacząco wpływa moment rozpoczęcia próbkowania, a przede wszystkim częstotliwość próbkowania na wierność odtwarzanego sygnału.



Rys. 11.4. Wpływ parametrów próbkowania na postać sygnału po ekstrapolacji: a) przesunięcie momentu rozpoczęcia próbkowania; b) dwukrotne zwiększenie częstotliwości próbkowania

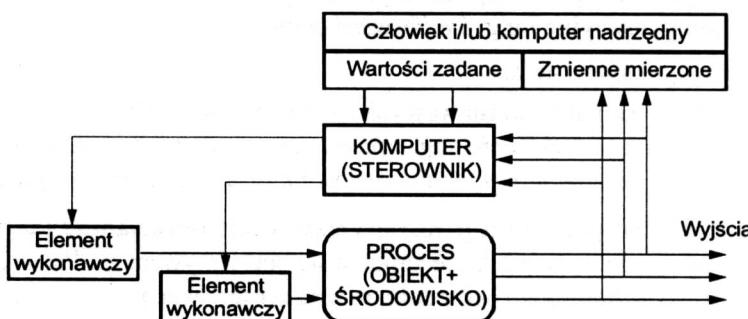
Należy podkreślić, że w rzeczywistych układach kwantowanie sygnału jest na tyle duże ($12\div16$ bitów), iż pozwala uzyskać bardzo duże dokładności sygnałów. Podobnie jest z częstotliwością próbkowania, $T = 1$ ms pozwala próbować z częstotliwością 1000 Hz, co jest wystarczające w zdecydowanej większości procesów przemysłowych.

11.2.4. Modele dyskretnie

Ze względu na dyskretny charakter sygnałów występujących w układach sterowania cyfrowego, do opisu dynamiki obiektów sterowania konieczne są **modele dyskretnie w czasie**. Ponieważ zdolność rozdzielcza obecnie stosowanych przetworników analogowo-cyfrowych umożliwia albo całkowite pominiecie zjawiska dyskretyzacji amplitudy sygnału, albo jego uwzględnienie za pomocą addytywnego szumu pomiarowego o zerowej wartości średniej, więc dyskretyzacja czasowa jest jedną dyskretyzacją, jaką należy uwzględnić. Dlatego modele dyskretnie w czasie są nazywane krótko **modelami dyskretnymi**. Podstawowym modelem obiektu dynamicznego, dyskretnego jest model różnicowy, tzn. dany w postaci równania różnicowego. Jeżeli wystarczy opis obiektu dla małych odchyleń od jego punktu pracy ustalonej (co jest najczęściej spotykanym przypadkiem), równanie to jest liniowe. Wówczas możliwe jest również stosowanie innych modeli, np. transmitancji operatorowych dyskretnych lub transmitancji widmowych dyskretnych. Różnorodność stosowanych modeli dyskretnych wynika stąd, że dostarczają one wzajemnie uzupełniających się obrazów zachowania obiektu, a dla różnych celów dogodnie jest posługiwać się różnymi modelami.

11.3. Podstawowe struktury systemów sterowania

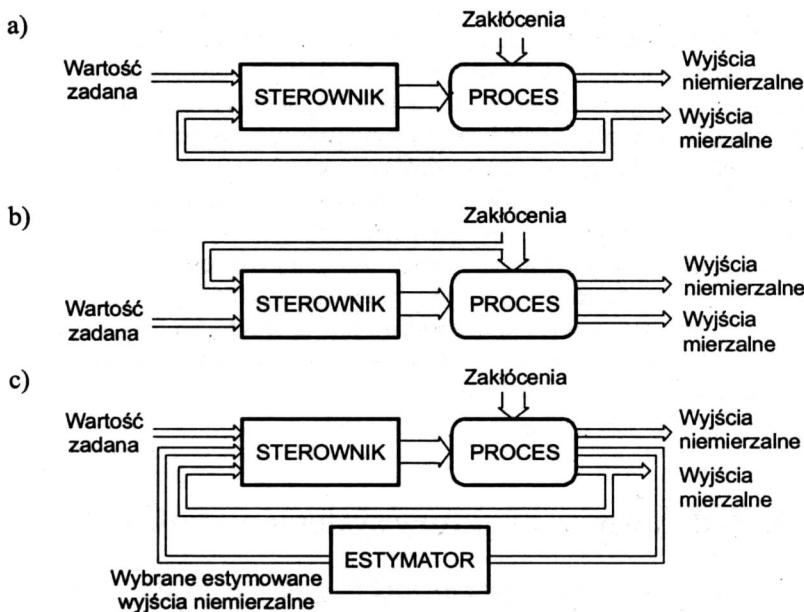
Bezpośrednie sterowanie cyfrowe DDC (ang. *Direct Digital Control*) polega nałączeniu komputera (sterownika) w pętlę sprzężenia zwrotnego lub pętlę kompensacyjną oraz zastosowaniu trójczłonowego algorytmu sterowania PID, dobrze znanego w technice analogowej. Można oczywiście zastosować inne algorytmy, jednak ten w 90% problemów jest wystarczający. W małych systemach stosuje się kilka pętli, natomiast w dużych do kilkuset (rys. 11.5).



Rys. 11.5. System z bezpośrednim sterowaniem cyfrowym

Należy podkreślić, że w tym przykładzie sterownik znajduje się w bezpośredniej warstwie sterowania, natomiast wartość zadana jest podawana przez człowieka lub pochodzi z komputera nadzornej warstwy sterowania.

Podstawowe struktury systemów sterowania przedstawiono na rysunku 11.6. Najczęściej używana jest struktura ze sterownikiem umieszczonym w miejsce klasycznego regulatora, czyli struktura ze sprzężeniem zwrotnym (ang. *feedback control*) (rys. 11.6a).



Rys. 11.6. Podstawowe struktury DDC
(objaśnienia w tekście)

Jeżeli wpływ zakłóceń jest znaczny, a system regulacji nie jest w stanie zapewnić naruconej miary jakości regulacji (spełnić kryterium jakości regulacji), to wtedy stosujemy sterowanie kompensacyjne (ang. *feedforward control*).

Działanie jego opiera się na:

- bezpośrednim pomiarze podstawowych zakłóceń (rys. 11.6b),
- pośrednim pomiarze zakłóceń (ang. *inferential control, internal model control, model algorithmic control, model predictive control, dead time control*) (rys. 11.6c).

W literaturze spotyka się też określenie sterowanie invariantne (ang. *invariant control*), tzn. że sygnał na wyjściu nie zmienia się pod wpływem zakłóceń. Sterowanie kompensacyjne z pomiarem pośrednim można zrealizować przez pomiar wielkości pośredniej, na podstawie której estymuje się wielkość zakłócenia lub pomiar dwóch wielkości, przed i za miejscem działania zakłóceń.

11.4. Podstawowe algorytmy regulacji cyfrowej bezpośredniej

Algorytmy regulacji cyfrowej bezpośredniej można podzielić na dwie grupy:

- 1) algorytmy pozycyjne (położeniowe), określające wartość absolutną sygnału sterującego element wykonawczy;
- 2) algorytmy prędkościowe (przyrostowe), określające każdorazową zmianę wartości sygnału sterującego element wykonawczy.

11.4.1. Algorytm pozycyjny (położeniowy)

Algorytm pozycyjny PID ma postać

$$x_n = K_P e_n + K_I \sum_{i=0}^n e_i T + K_D \frac{\Delta e_n}{T} + \bar{x} \quad (11.3)$$

przy czym:

T – okres próbkowania;

$e_n = y_{zad} - y_n$ – uchyb regulacji w n -tej chwili;

x_n – wartość absolutna sygnału sterującego element wykonawczy w n -tej chwili;

\bar{x} – wartość średnia sygnału sterującego element wykonawczy w przypadku zerowego uchybu regulacji w chwilach $0, 1, \dots, n$;

$\Delta e_n / T$ – aproksymacja sygnałem prostokątnym pochodnej sygnału uchybu.

Aproksymacja pochodnej sygnału uchybu występująca we wzorze (11.3) powoduje w przypadku nagłej zmiany uchybu (spowodowanej przez zakłócenie lub zmianę wartości zadanej) duże zmiany wartości sygnału sterującego x_n . Może to powodować niebezpieczne przeregulowanie i oscylacje. Jednym ze sposobów likwidującym powyższą wadę jest zastosowanie do opisu pochodnej sygnału czteropunktowej różnicy centralnej. Dla sygnału wyjściowego y_n zależność ta ma postać

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y_n}{T} &= \frac{1}{4} \left(\frac{y_n - y^+}{1,5T} + \frac{y_{n-1} - y^+}{0,5T} - \frac{y_{n-2} - y^+}{0,5T} - \frac{y_{n-3} - y^+}{1,5T} \right) = \\ &= \frac{1}{6T} (y_n + 3y_{n-1} - 3y_{n-2} - y_{n-3}) \end{aligned} \quad (11.4)$$

przy czym $y^+ = \frac{y_n + y_{n-1} + y_{n-2} + y_{n-3}}{4}$.

W przypadku gdy wartość zadana y_{zad} jest stała, wtedy przyrost $\frac{\Delta e_n}{T}$ określa zależność

$$\frac{\Delta e_n}{T} = \frac{1}{6T} (e_n + 3e_{n-1} - 3e_{n-2} - e_{n-3}) \quad (11.5)$$

Stąd algorytm pozycyjny (11.3) przyjmuje postać

$$x_n = K_P e_n + K_I \sum_{i=0}^n e_i T + \frac{K_D}{6T} (e_n + 3e_{n-1} - 3e_{n-2} - e_{n-3}) + \bar{x} \quad (11.6)$$

Algorytm pozycyjny ma pewne wady wymienione poniżej.

- Obliczona przez jednostkę centralną każda nowa wartość sygnału sterującego x_n musi być przekazana do elementu nastawczego w postaci sygnału analogowego i utrzymana na wartości nie zmienionej, przez okres T realizacji algorytmu regulacji. Wymaga to złożonego układu wyjść analogowych, w którym dla każdego elementu wykonawczego musi być przewidziany albo oddzielny przetwornik cyfro-analogowy, albo element pamięci analogowej.
- Wymagainicjalizacji przy przełączaniu zmiennej regulowanej ze sterowania ręcznego na regulację automatyczną cyfrową. Najdogodniej jest przeprowadzaćinicjalizację przy założeniu zerowego uchybu regulacji i zerowej sumy błędów. Wtedy jednak, dla zapewnienia bezuderzeniowego przełączenia, wartość początkowa \bar{x} musi odpowiadać pozycji elementu wykonawczego w chwili przełączania, czyli musi być równa aktualnej wartości sygnału sterującego x_a elementu wykonawczego. Można to uzyskać:
 - ustalając wartość początkową \bar{x} na wartości x_a ręcznie, z pulpu sterowniczego systemu; rozwiązanie takie jest jednak bardzo kłopotliwe;
 - ustalając wartość początkową \bar{x} automatycznie na wartości x_a , co wymaga pomiaru tej ostatniej i w związku z tym – znacznej rozbudowy drogiego układu wejść analogowych.
- Utrudnia realizację przełączeń z regulacji cyfrowej na analogową lub sterowanie ręczne, gdyż przełączenie takie – aby było bezuderzeniowe – wymaga uprzedniego zrównania aktualnego sygnału sterującego x_a , generowanego przez regulator analogowy lub nastawnik ręczny z sygnałem generowanym przez jednostkę centralną. W tym celu również jest konieczne wprowadzenie sygnału analogowego x_a do jednostki centralnej.
- Wymaga skomplikowanych zabezpieczeń przed nieograniczonym narastaniem wartości sygnału sterującego x_n w wyniku niemożności wyzerowania uchybu regulacji, np. w przypadku uszkodzenia elementu pomiarowego lub osiągnięcia obszaru nasycenia charakterystyki elementu wykonawczego. Zabezpieczenie to realizuje się np:
 - ograniczając maksymalną wartość, którą może przyjąć suma w algorytmie pozycyjnym;
 - wykrywając chwilę osiągnięcia nasycenia przez element wykonawczy i przerywając od tej chwili sumowanie błędów do chwili, gdy element wykonawczy wyjdzie z obszaru nasycenia.

11.4.2. Algorytm prędkościowy (przyrostowy)

Algorytm prędkościowy PID otrzymuje się w wyniku różnicowania algorytmu pozycyjnego opisanego równaniem (11.6)

$$\begin{aligned}\Delta x_n = x_n - x_{n-1} &= K_P(e_n - e_{n-1}) + \\ &+ K_I e_n T + \frac{K_D}{6T}(e_n + 2e_{n-1} - 6e_{n-2} + 2e_{n-3} + e_{n-4})\end{aligned}\tag{11.7}$$

W przypadku tego algorytmu jednostka centralna generuje przyrosty sygnału sterującego element wykonawczy w ciągu każdego okresu T , przyrosty te można uważać za proporcjonalne do prędkości zmian tego sygnału, co uwypuklono w nazwie tego algorytmu.

Zasadniczą zaletą algorytmu pozycyjnego, w porównaniu z algorytmem prędkościowym, jest różnica w sposobie realizacji kłopotliwego całkowania (ściślej – sumowania, które tu znika). W przypadku algorytmu prędkościowego całkowanie jest realizowane poza regulatorem, przez element sterowany generowanymi przez jednostkę centralną sygnałami Δx_n . Tym elementem wykonawczym musi być człon całkujący np. silnik krokowy, którego obrót lub przesunięcie x_n w n -tej chwili można przedstawić w postaci

$$x_n = x_0 + \sum_{i=0}^n \Delta x_i = x_1 + \sum_{i=1}^n \Delta x_i = \dots = x_{n-1} + \Delta x_n\tag{11.8}$$

Niestety, podczas skokowej zmiany wartości zadanej, algorytm (11.7) powoduje gwałtowną zmianę sygnału sterującego. Po podstawieniu:

$$e_n = y_{zad} - y_n,$$

$$e_{n-1} = y_{zad} - y_{n-1},$$

$$e_{n-2} = y_{zad} - y_{n-2},$$

...

otrzymamy wyrażenie (11.9)

$$\begin{aligned}\Delta x_n &= K_P(-y_n + y_{n-1}) + K_I(y_{zad} - y_n)T + \\ &+ \frac{K_D}{6T}(y_n + 2y_{n-1} - 6y_{n-2} + 2y_{n-3} + y_{n-4})\end{aligned}\tag{11.9}$$

Człon „całkujący” $K_I(y_{zad} - y_n)T$ jest jedynym członem zawierającym wartość zadawaną y_{zad} , jego usunięcie doprowadzi więc do dryftu zmiennej regułowanej. Dlatego w algorytmie tym musi zawsze występować człon całkujący.

Algorytm prędkościowy jest pozbawiony wymienionych poprzednio wad algorytmu pozycyjnego, zauważać można, że:

- w przypadku stosowania algorytmu prędkościowego nie trzeba tak złożonych układów wyjść analogowych, jak w przypadku stosowania algorytmu pozycyjnego, gdyż całkowanie realizowane jest poza regulatorem na członach całkujących, które spełniają rolę przetwornika cyfrowo-analogowego, sumatora i elementu pamięci;
- realizacja przełączeń z regulacji cyfrowej na analogową, lub sterowania ręcznego na automatyczne, i na odwrót, jest bardzo uproszczona w porównaniu z algorytmem pozycyjnym; aby uzyskać przełączenie bezuderzeniowe, np. ze sterowania ręcznego na automatyczne, wystarczy przyjąć $y_n = y_{n-1} = y_{n-2} = y_{n-3} = y_{n-4} = y_{zad}$, w wyniku czego $\Delta x_n = 0$ i w chwili przełączenia element wykonawczy nie zmienia swojego stanu.

W przypadku stosowania algorytmu prędkościowego nie grozi niebezpieczeństwo nieograniczonego narastania wartości sygnału sterującego. Jeżeli bowiem sygnał uchybu regulacji nie ulegnie zmianie przez kolejne cztery okresy próbkowania, to sygnał sterujący elementu wykonawczego również przestanie się zmieniać.

11.4.3. Modyfikacje algorytmów

Często spotyka się zmodyfikowane wersje algorytmu prędkościowego PID. Jedna z możliwych modyfikacji jest uzasadniona tym, że składowa proporcjonalna

$$K_P(e_n - e_{n-1})$$

oraz składowa całkująca

$$K_i e_n T$$

mogą mieć różne znaki. Zachodzi to wówczas, gdy zmienna regułowana $y(t)$ zbliża się do wartości zadanej. Jeżeli natomiast zmienna regułowana oddala się od wartości zadanej, składowe te mają znaki jednakowe. Właściwość ta jest bardzo pożądana dla wartości zmiennych regułowanych bliskich wartości zadanej, gdyż zapobiega przeregulowaniom generowanym przez człon całkujący. W przypadku wartości $y(t)$ odległych od wartości zadanej, właściwość ta wydłuża czas regulacji. Aby temu zapobiec, wokół wartości zadanej wprowadza się strefę krytyczną o szerokości ok. 5% pełnego zakresu zmian zmiennej regułowanej y_{\max} i dla wartości $y(t)$ leżących poza tą strefą, a więc dla

$$|e_i| > 0,05 y_{\max} \quad (11.10)$$

akceptuje się tylko te składowe proporcjonalne $K_P(e_n - e_{n-1})$, które mają ten sam znak, co składowe całkujące. Dalszą poprawę algorytmu prędkościowego PID można uzyskać, wprowadzając większy współczynnik wzmacnienia K_p , dla wartości $|e_i| > 0,05 y_{\max}$, a mniejszy współczynnik wzmacnienia dla wartości $|e_i| < 0,05 y_{\max}$.

W przypadku najczęściej spotykanych stałowartościowych układów regulacji jest stosowana modyfikacja polegająca na tym, że działaniu różniczkującemu poddaje się tylko zmienną regulowaną, a nie poddaje się wartości zadanej.

W przypadku staranego odfiltrowania szumów z sygnału zmiennej regulowanej, człon różniczkujący może być aproksymowany różnicą dwupunktową

$$\frac{\Delta e_n}{T} = \frac{e_n - e_{n-1}}{T} \quad (11.11)$$

Algorytm prędkościowy PID ma wtedy postać

$$\begin{aligned} \Delta x_n = K_P(-y_n + y_{n-1}) + K_I(y_{zad} - y_n)T + \\ + \frac{K_D}{T}(2y_{n-1} - y_{n-2} - y_n) \end{aligned} \quad (11.12)$$

11.5. Dobór parametrów algorytmów podstawowych

Zasadnicza różnica między metodami doboru parametrów algorytmów regulacji dla regulatorów analogowych i układów bezpośredniej regulacji cyfrowej polega na tym, że te ostatnie wymagają uwzględnienia dodatkowego parametru, którym jest częstotliwość próbkowania.

11.5.1. Dobór parametrów na podstawie tablic nastaw dla regulatorów analogowych

Ze względu na istnienie stosunkowo dobrze opracowanych tablic do określenia nastaw typowych regulatorów analogowych, interesujące są możliwości korzystania z tych tablic do określenia parametrów odpowiadających tym regulatorom algorytmów regulacji cyfrowej. Możliwość ta wynika stąd, że transmitancję operatorową elementu pamięci analogowej można aproksymować transmitancją elementu o czasie opóźnienia równym połowie okresu próbkowania

$$\frac{1 - e^{-sT}}{s} \approx e^{-sT/2} \quad (11.13)$$

Dzięki temu, przebiegi przejściowe zmiennej regulowanej w układzie regulacji cyfrowej będą – przy jednakowych pobudzeniach – bardzo niewiele różnić się od przebiegów uzyskanych w układzie regulacji analogowej. Umożliwia to dobór nastaw dla typowego regulatora analogowego, a następnie – określenie parametrów odpowiadających mu algorytmu regulacji cyfrowej.

11.5.2. Zmodyfikowane reguły Zieglera–Nicholsa dla algorytmów regulacji cyfrowej

Takahashi zaproponował bezpośrednie wykorzystanie reguł Zieglera–Nicholsa do doboru parametrów algorytmów regulacji cyfrowej w postaci:

- regulacja P, algorytm pozycyjny

$$x_n = K_P (y_{zad} - y_n),$$

- regulacja PI, algorytm prędkościowy

$$x_n = K_P (-y_n + y_{n-1}) + K_I (y_{zad} - y_n)T,$$

- regulacja PID, algorytm prędkościowy

$$x_n = K_P (-y_n + y_{n-1}) + K_I (y_{zad} - y_n)T +$$

$$+ \frac{K_D}{T} (2y_{n-1} - y_{n-2} - y_n).$$

Oznaczając przez T_{rezP} i K_{grP} okres drgań układu regulacji proporcjonalnej na granicy stabilności oraz graniczny współczynnik wzmacnienia regulatora proporcjonalnego, można określić parametry algorytmów regulacji zgodnie z tabelą 11.1.

Tabela 11.1
Nastawy regulatorów wg Zieglera i Nicholsa

| Typ regulatora | K_P | K_I | K_D |
|----------------|-------------------------|---------------------------------|---------------------------------|
| Regulator P | $0,5K_{grP}$ | – | – |
| Regulator PI | $0,45K_{grP} - 0,5K_IT$ | $0,54 \frac{K_{grP}}{T_{rezP}}$ | – |
| Regulator PID | $0,6K_{grP} - 0,5K_IT$ | $1,2 \frac{K_{grP}}{T_{rezP}}$ | $\frac{3}{40} K_{grP} T_{rezP}$ |

11.5.3. Eksperymentalna optymalizacja parametrów algorytmów regulacji

Uważając parametry, wyznaczone na podstawie którejś z poprzednio omówionych metod, za pierwsze przybliżenie, system cyfrowy można wykorzystać do określenia takich parametrów algorytmu regulacji, które minimalizują określony wskaźnik jakości, np. wariancję błędu regulacji, w warunkach oddziaływania na obiekt zakłóceń rzeczywistych. Korzysta się w tym celu z odpowiedniej metody optymalizacji. Postępowanie takie jest rozpowszechnione w przypadku dużych wymagań stawianych jakości regulacji [27].

12. Synteza układów przełączających

12.1. Wprowadzenie

12.1.1. Pojęcia podstawowe

System dwójkowy (binarny) jest sposobem zapisu liczb z wykorzystaniem symboli 0 i 1. Ogólny zapis liczb w systemie binarnym wyraża zależność (12.1).

$$L_2 = \sum_{i=n-1}^0 b_i \cdot 2^i \quad (12.1)$$

Reprezentacja dziesiętna stanowi wygodniejszą formę zapisu liczby binarnej. Jeśli zmiennej x_i przypiszemy 1, a zmiennej \bar{x}_i przypiszemy 0, to w prosty sposób uzyskuje się reprezentację binarną. Przykładowo wyrażeniu $x_4x_3\bar{x}_2\bar{x}_1$ odpowiada liczba binarna 1100, a odpowiadająca jej liczba w reprezentacji dziesiętnej wynosi: $1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 12$.

Układem przełączającym nazywamy urządzenie sterujące, zbudowane z elementów, które mogą znajdować się w dwóch różnych stanach, określonych jako stan spoczynkowy i stan wzbudzony.

Elementy przełączające, z których zbudowany jest układ przełączający, łączą lub przerywają przepływ energii w obwodzie, np.: przekaźniki i przełączniki elektryczne łączące przepływ energii elektrycznej, rozdzielacze pneumatyczne zmieniają kierunek przepływu sprężonego powietrza, natomiast rozdzielacze hydrauliczne sterują kierunkiem przepływu płynu hydraulicznego.

Funkcją przełączającą $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ nazywamy takie odwzorowanie, które dla kombinacji argumentów x_1, x_2, \dots, x_n przyjmujących wartości 0 lub 1 przyporządkowane jest rozwiązanie ze zbioru $\{0, 1\}$.

Czynnik jedynki (konstytuenta jedynki) m_i jest taką funkcją przełączającą, która przyjmuje wartość równą 1 tylko dla jednej kombinacji wartości zmiennych, wyrażonej w postaci iloczynu.

Czynnik zera (konstytuenta zera) M_i jest taką funkcją przełączającą, która przyjmuje wartość 0 tylko dla jednej kombinacji wartości zmiennych, wyrażonej w postaci sumy.

Zupełnie normalną postacią sumy (postacią kanoniczną dysjunkcyjną) funkcji przełączającej nazywamy sumę tych czynników jedynki (konstytuent jedynki), które są równe 1 dla tych samych kombinacji wartości argumentów co zadana funkcja.

Postać ogólną wyraża poniższa zależność

$$F = \sum_{i=1}^{2^n} m_i f_i \quad (12.2)$$

gdzie f_i jest iloczynem argumentów, a n jest liczbą argumentów.

Zupełnie normalną postacią iloczynu (postacią kanoniczną koniunkcyjną) funkcji przełączającej nazywamy sumę tych czynników zera (konstytuent zera), które są równe 0 dla tych samych kombinacji wartości argumentów co zadana funkcja.

Postać ogólną wyraża zależność

$$F' = \prod_{i=1}^{2^n} (M_i + f_i) \quad (12.3)$$

Faktoryzacja ma na celu uzyskanie najmniejszej złożoności układu. Realizuje się to poprzez rezygnację z postaci normalnej funkcji. Wykorzystuje się tutaj prawa rozdzielności oraz prawa de Morgana.

12.1.2. Algebra Boole'a

Algebra Boole'a jest systemem umożliwiającym opis układów przełączających. W notacji formalnej algebrę Boole'a zapisujemy jako uporządkowaną piątkę $A = (X, 0, 1, +, \cdot)$, gdzie:

$X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ – zbiór elementów,

0 – element neutralny operacji dysjunkcji (sumy),

1 – element neutralny operacji koniunkcji (iloczynu),

+ – symbol operacji dysjunkcji,

· – symbol operacji koniunkcji.

Po dokonaniu założeń:

$$\forall x_i \in X \text{ dla } i = 1, \dots, n,$$

$$\forall x_i \in X \exists \bar{x}_i \in X \text{ dla } i = 1, \dots, n,$$

spełnione są następujące aksjomaty algebra Boole'a:

$$A0 \quad x_1 + x_2 \in X$$

$$A0^* \quad x_1 \cdot x_2 \in X$$

$$A1 \quad x_1 + 0 = x_1$$

$$A1^* \quad x_1 \cdot 1 = x_1$$

działania na elementach neutralnych

$$A2 \quad x_1 + x_2 = x_2 + x_1$$

$$A2^* \quad x_1 \cdot x_2 = x_2 \cdot x_1$$

prawa przemienności

$$A3 \quad x_1(x_2 + x_3) = x_1x_2 + x_1x_3$$

$$A3^* \quad x_1 + x_2x_3 = (x_1 + x_2)(x_1 + x_3)$$

prawa rozdzielności

$$A4 \quad x_1 + \bar{x}_1 = 1$$

$$A4^* \quad x_1 \cdot \bar{x}_1 = 0$$

prawa dopełnienia

$$A5 \quad x_1 + (x_2 + x_3) = (x_1 + x_2) + x_3$$

$$A5^* \quad x_1(x_2 \cdot x_3) = (x_1 \cdot x_2) \cdot x_3$$

prawo łączności

$$A6 \quad \bar{0} = 1$$

$$A6^* \quad \bar{1} = 0$$

| | | | | |
|-----|--|------|--|---|
| A7 | $x_1 + 1 = 1$ | A7* | $x_1 \cdot 0 = 0$ | prawa działań na elementach neutralnych |
| A8 | $x_1 + x_1 = x_1$ | A8* | $x_1 \cdot x_1 = x_1$ | prawa idempotentności |
| A9 | $\bar{\bar{x}}_1 = x_1$ | A9* | $\bar{\bar{x}}_1 = x_1$ | podwójna negacja |
| A10 | $\overline{x_1 + x_2} = \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2$ | A10* | $\overline{x_1 \cdot x_2} = \bar{x}_1 + \bar{x}_2$ | prawa de Morgana |
| A11 | $x_1 + x_1 x_2 = x_1$ | A11* | $x_1(x_1 + x_2) = x_1$ | prawa pochłaniania |
| A12 | $x_1 + \bar{x}_1 x_2 = x_1 + x_2$ | A12* | $x_1(\bar{x}_1 + x_2) = x_1 x_2$ | |

Dodatkowe wyjaśnienie oznaczeń wprowadzonych powyżej:

\bar{x}_i – zanegowany argument x_i ,

$\bar{\bar{x}}_i$ – podwójnie zanegowany argument x_i .

Aksjomaty z oznaczeniem gwiazdki „*” odnoszą się do operacji iloczynu.

Aksjomaty od A1 do A5 jednoznacznie definiują algebrę Boole'a, a pozostałe prawa z nich wynikają.

12.1.3. Ważniejsze funkcje przełączające

Funkcją przełączającą $f(x_1, \dots, x_n)$ n -zmiennych nazywa się odwzorowanie

$$f: D \rightarrow \{0, 1\}^n,$$

gdzie $D \subset \{0, 1\}^n$, a uporządkowana piątka $(\{0, 1\}, 0, 1, \cdot, +)$ jest algebrą Boole'a.

Jeśli $D^n = \{0, 1\}^n$, to funkcję przełączającą nazywamy zupełną lub w pełni określona.

W przypadku gdy istnieją kombinacje argumentów, dla których funkcja nie jest określona, tzn. może przyjąć wartość 0 lub 1 (oznacza się to symbolem \emptyset), to nazywamy ją niezupełną.

Poniżej przytoczono kilka najważniejszych funkcji przełączających, nazywanych również funkcjami Boole'a, a w tabeli 12.1 podano wartości tych funkcji dla kombinacji argumentów x_1 i x_2 .

- $f(x_1) = x_1$ – zmienna x_1 ,
- $f(x_1) = \bar{x}_1$ – negacja zmiennej x_1 ,
- $f(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$ – koniunkcja, iloczyn zmiennych x_1 i x_2 („i”),
- $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ – dysjunkcja, suma zmiennych x_1 i x_2 („lub”),
- $f(x_1, x_2) = \bar{x}_1 x_2 + x_1 \bar{x}_2$ – suma modulo 2, różnica symetryczna („albo”),
- $f(x_1, x_2) = \bar{x}_1 \bar{x}_2$ – operacja Pierce'a („NOR”),
- $f(x_1, x_2) = \bar{x}_1 + \bar{x}_2$ – operacja Sheffera („NAND”).

Tabela 12.1
 Wartości funkcji Boole'a dla kombinacji argumentów
 (objaśnienia w tekście, s. 253)

| a) | <table border="1"> <thead> <tr> <th>x_1</th><th>$f(x_1)$</th></tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0</td><td>0</td></tr> <tr> <td>1</td><td>1</td></tr> </tbody> </table> | x_1 | $f(x_1)$ | 0 | 0 | 1 | 1 | b) | <table border="1"> <thead> <tr> <th>x_1</th><th>$f(x_1)$</th></tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0</td><td>1</td></tr> <tr> <td>1</td><td>0</td></tr> </tbody> </table> | x_1 | $f(x_1)$ | 0 | 1 | 1 | 0 | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|-------|---|---------------|----------|---------------|---|---|---|----|---|-------|----------|---|---|---|---|---|----|---|-------|-------|---------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| x_1 | $f(x_1)$ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 0 | 0 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1 | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| x_1 | $f(x_1)$ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 0 | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1 | 0 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| c) | <table border="1"> <thead> <tr> <th>x_1</th><th>x_2</th><th>$f(x_1, x_2)$</th></tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr> <td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr> <tr> <td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr> <td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr> </tbody> </table> | x_1 | x_2 | $f(x_1, x_2)$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | d) | <table border="1"> <thead> <tr> <th>x_1</th><th>x_2</th><th>$f(x_1, x_2)$</th></tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr> <td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr> <td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr> <td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr> </tbody> </table> | x_1 | x_2 | $f(x_1, x_2)$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| x_1 | x_2 | $f(x_1, x_2)$ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 0 | 0 | 0 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 0 | 1 | 0 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1 | 1 | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1 | 0 | 0 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| x_1 | x_2 | $f(x_1, x_2)$ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 0 | 0 | 0 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 0 | 1 | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1 | 1 | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1 | 0 | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| e) | <table border="1"> <thead> <tr> <th>x_1</th><th>x_2</th><th>$f(x_1, x_2)$</th></tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr> <td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr> <td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr> <tr> <td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr> </tbody> </table> | x_1 | x_2 | $f(x_1, x_2)$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | f) | <table border="1"> <thead> <tr> <th>x_1</th><th>x_2</th><th>$f(x_1, x_2)$</th></tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr> <tr> <td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr> <tr> <td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr> <tr> <td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr> </tbody> </table> | x_1 | x_2 | $f(x_1, x_2)$ | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| x_1 | x_2 | $f(x_1, x_2)$ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 0 | 0 | 0 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 0 | 1 | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1 | 1 | 0 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1 | 0 | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| x_1 | x_2 | $f(x_1, x_2)$ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 0 | 0 | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 0 | 1 | 0 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1 | 1 | 0 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1 | 0 | 0 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| g) | <table border="1"> <thead> <tr> <th>x_1</th><th>x_2</th><th>$f(x_1, x_2)$</th></tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr> <tr> <td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr> <td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr> <tr> <td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr> </tbody> </table> | x_1 | x_2 | $f(x_1, x_2)$ | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| x_1 | x_2 | $f(x_1, x_2)$ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 0 | 0 | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 0 | 1 | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1 | 1 | 0 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1 | 0 | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

12.1.4. Realizacja funkcji przełączających

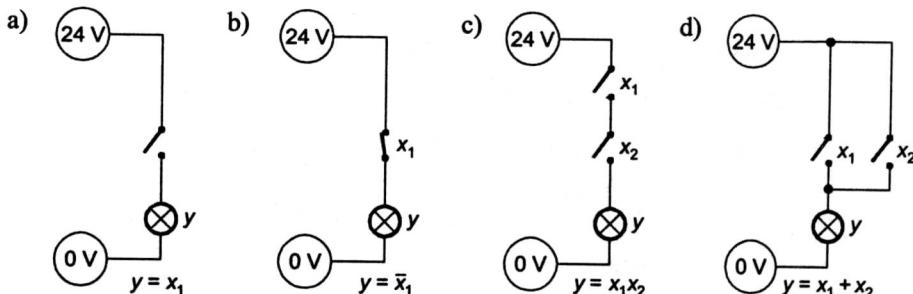
Ze względu na zasadę działania, elementy do syntezy układów przełączających można podzielić na elektryczne elementy stykowe, elektryczne elementy bezstykowe i elementy płynowe.

Układy przełączające z elektrycznymi elementami stykowymi

W syntezie układów przełączających z elementami stykowymi wykorzystuje się przekaźniki, styczniki i łączniki.

Sposób realizacji podstawowych funkcji logicznych przedstawiono na rysunku 12.1. Styk normalnie otwarty (no) przedstawiony na rysunku 12.1a odpowiada funkcji powtórzenia, natomiast styk normalnie zamknięty (nz) z rysunku 12.1b realizuje

funkcję negacji. Przez połączenie szeregowo styków normalnie otwartych realizuje się funkcję iloczynu (koniunkcji), a przez ich połączenie równolegle – funkcję sumy (dysjunkcji), co przedstawiono na rysunkach 12.1c i 12.1d.

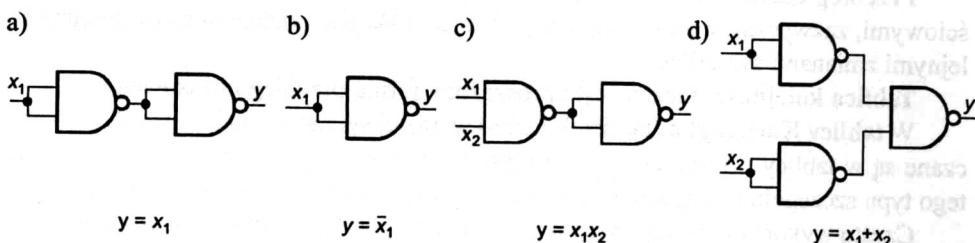


Rys. 12.1. Realizacja funkcji przełączających z wykorzystaniem elementów stykowych (objaśnienia w tekście)

Układy przełączające z elektrycznymi elementami bezstykowymi

Do elektrycznych elementów bezstykowych zaliczamy elementy magnetyczne, diody, lampy elektronowe, tranzystory, elementy scalone. Obecnie wykorzystywane są wyłącznie bramki logiczne w postaci układów scalonych o różnej skali integracji.

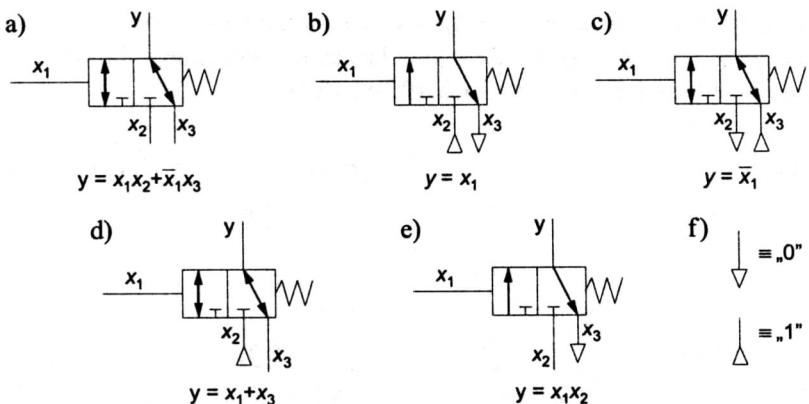
W przypadku bramki typu NAND („nie i”), po odpowiednim połączeniu jednego lub kilku elementów, istnieje możliwość uzyskania wszystkich podstawowych typów bramek logicznych, co przedstawiono na rysunku 12.2.



Rys. 12.2. Realizacja funkcji logicznych z wykorzystaniem bramki typu NAND („nie i”):
a) funkcja powtórzenia; b) funkcja NOT; c) funkcja AND; d) funkcja OR

Układy przełączające z elementami płynowymi

W układach przełączających z elementami płynowymi nośnikiem informacji jest sygnał pneumatyczny lub hydrauliczny. Ze względu na zasadę działania, elementy płynowe dzieli się na elementy strumieniowe i rozdzielacze. Sposób realizacji funkcji przełączającej z wykorzystaniem rozdzielacza trójdrogowego, dwupołożeniowego, przedstawiono na rysunku 12.3. Wykorzystując rozdzielacz tego typu, poprzez odpowiednie połączenie wejść, można zrealizować podstawowe funkcje logiczne.



Rys. 12.3. Sposób realizacji funkcji logicznych z wykorzystaniem rozdzielacza 3/2: a) postać ogólna; b) potwierdzenie; c) negacja; d) suma logiczna; e) iloczyn logiczny; f) wyjaśnienie symboli

12.2. Układy kombinacyjne

12.2.1. Sposoby opisu układów kombinacyjnych

Opis słowny jest najczęstszą formą zadawania układów przełączających. Polega on na przyporządkowaniu sygnałom wejściowym X sygnałów wyjściowych Y .

Tablica zależności w postaci ciągów zero-jedynkowych jest prostszą formą opisu układu. Określa ona wartości sygnałów X i odpowiadające im sygnały Y (tab. 12.2).

Przebieg czasowy pokazuje zależności pomiędzy sygnałami wejściowymi i wyjściowymi, zazwyczaj w skali mierzonej taktami. **Takt** jest odstępem czasu między kolejnymi zmianami sygnałów.

Tablica kolejności łączeń jest uproszczoną formą przebiegu czasowego.

W tablicy Karnaugha (tablica Veitcha) wartości sygnałów wyjściowych Y umieszczane są w tablicy o współrzędnych określonych przez sygnały wejściowe X . Tablice tego typu szczególnie przydatne są podczas upraszczania funkcji przełączających.

Często wykorzystywana formą opisu układów przełączających jest **zależność matematyczna**. Zależność taką może mieć postać zupełnie normalną (postać kanoniczną) lub uproszczoną.

Sposoby opisu wykorzystujące postać kanoniczną funkcji przełączającej przedstawiono poniżej.

- Zupełnie normalna postać sumy (postać kanoniczna dysjunkcyjna)

$$y = \bar{x}_3\bar{x}_2\bar{x}_1 + x_3\bar{x}_2\bar{x}_1 + x_3\bar{x}_2x_1 + x_3x_2x_1$$
 i jej zapis skrócony $y = \sum (0, 4, 5, 7)_{x_1x_2x_3}$.
- Zupełnie normalna postać iloczynu (postać kanoniczna koniunkcyjna)

$$y = (x_3 + x_2 + \bar{x}_1)(x_3 + \bar{x}_2 + x_1)(x_3 + \bar{x}_2 + \bar{x}_1)(\bar{x}_3 + \bar{x}_2 + x_1)$$
 i jej zapis skrócony

$$y = \prod(1, 2, 3, 6)_{x_1x_2x_3}$$
.

Tabela 12.2

Sposoby opisu funkcji przełączających: a) tablica zależności; b) przebiegi czasowe; c) tablica kolejności łączeń; d) tablica Karnauga; e) zależność matematyczna

| a) | <table border="1"> <thead> <tr> <th>Takty</th><th>1</th><th>2</th><th>3</th><th>4</th><th>5</th><th>6</th><th>7</th><th>8</th></tr> </thead> <tbody> <tr> <td>x_1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr> <td>x_2</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr> <td>x_3</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr> <tr> <td>$f(x_1, x_2, x_3)$</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr> </tbody> </table> | Takty | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | x_1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | x_2 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | x_3 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | $f(x_1, x_2, x_3)$ | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
|--------------------|---|----------|----|----|----|----|-------|---|---|---|-------|---|---|---|---|---|---|---|---|-------|---|---|---|---|---|---|---|---|-------|---|---|---|---|---|---|---|---|--------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Takty | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| x_1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| x_2 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| x_3 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| $f(x_1, x_2, x_3)$ | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| b) | <table border="1"> <thead> <tr> <th>x_1</th><th></th><th></th><th></th><th></th><th></th><th></th><th></th><th></th></tr> </thead> <tbody> <tr> <td>x_1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr> <td>x_2</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr> <td>x_3</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr> <td>$f(x_1, x_2, x_3)$</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> </tbody> </table> | x_1 | | | | | | | | | x_1 | | | | | | | | | x_2 | | | | | | | | | x_3 | | | | | | | | | $f(x_1, x_2, x_3)$ | | | | | | | | |
| x_1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| x_1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| x_2 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| x_3 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| $f(x_1, x_2, x_3)$ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| c) | <table border="1"> <thead> <tr> <th>x_1</th><th></th><th></th><th></th><th></th><th></th><th></th><th></th><th></th></tr> </thead> <tbody> <tr> <td>x_1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr> <td>x_2</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr> <td>x_3</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr> <td>$f(x_1, x_2, x_3)$</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> </tbody> </table> | x_1 | | | | | | | | | x_1 | | | | | | | | | x_2 | | | | | | | | | x_3 | | | | | | | | | $f(x_1, x_2, x_3)$ | | | | | | | | |
| x_1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| x_1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| x_2 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| x_3 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| $f(x_1, x_2, x_3)$ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| d) | <table border="1"> <thead> <tr> <th>x_1x_2</th><th>00</th><th>01</th><th>11</th><th>10</th></tr> <tr> <th>x_3</th><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr> <tr> <td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr> </tbody> </table> | x_1x_2 | 00 | 01 | 11 | 10 | x_3 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| x_1x_2 | 00 | 01 | 11 | 10 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| x_3 | 1 | 0 | 0 | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| e) | $f(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_2 \bar{x}_3 + x_1 x_3$ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

12.2.2. Minimalizacja funkcji przełączających

Celem minimalizacji funkcji przełączających jest zmniejszenie liczby elementów, a tym samym kosztu urządzenia. Dodatkowo mniejsza liczba połączeń i elementów zwiększa trwałość i niezawodność urządzenia. Istnieje wiele sposobów minimalizacji funkcji przełączających.

Do podstawowych należą:

- 1) Metoda przekształceń formalnych,
- 2) Minimalizacja z wykorzystaniem tablicy Karnaugha,
- 3) Metoda Quine'a-McCluskeya,
- 4) Metoda współczynników nieoznaczonych,
- 5) Metoda harwardzka,
- 6) Metoda tablic niezgodności,
- 7) Metoda redukcji quasi-implikantów.

W przypadku syntezy układów o małej liczbie wejść wygodne jest przeprowadzanie minimalizacji z wykorzystaniem metod 1) i 2).

Metoda przekształceń formalnych

Metoda przekształceń formalnych stosowana jest w przypadku, gdy funkcja dana jest w postaci wyrażenia algebraicznego. Wykorzystuje się wtedy aksjomaty i prawa algebry Boole'a. W przypadku gdy upraszczany układ kombinacyjny zadany jest w postaci schematu logicznego, realizowaną przez układ funkcję wyznacza się na drodze analizy.

Metoda tablicy Karnaugha

Upraszczając funkcję przełączającą przy wykorzystaniu tablicy Karnaugha, należy pamiętać o następujących problemach:

- wiersze i kolumny tablicy Karnaugha opisane są w kodzie Greya, tzn. każdy kolejny wiersz i kolumna różnią się od siebie o negację jednej zmiennej;
- zakreślając jedynki (zera), tworzy się grupy liczące 2, 4, 8, 16 ... elementów;
- zawsze zakreśla się grupy z największą możliwą ilością jedynek (zer), przy czym należy pamiętać o możliwości sklejenia ze sobą krawędzi równoległych tablicy;
- grupy mogą posiadać części wspólne;
- liczba grup jedynek (zer) odpowiada liczbie składników sumy (iloczynu) poszukiwanej funkcji;
- w przypadku kiedy istnieje możliwość zakreślenia grup na kilka sposobów, arbitralnie wybiera się jeden z nich;
- dana grupa reprezentuje iloczyn (sumę) tych zmiennych, które nie zmieniają swojej wartości.

Tabela 12.3
Tablica Karnaugh'a

| $x_3x_4 \backslash x_1x_2$ | 00 | 01 | 11 | 10 |
|----------------------------|----|----|----|----|
| 00 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 01 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 11 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 10 | 1 | 0 | 1 | 1 |

Diagram illustrating the grouping of minterms in the Karnaugh map:

- Group G_1 covers minterms 00, 10, and 11.
- Group G_2 covers minterms 00, 01, and 11.
- Group G_3 covers minterms 11 and 10.

W tabeli 12.3 przedstawiono sposób zakreślania grup jedynek. Czteroelementowa grupa G_1 powstała poprzez sklejenie krawędzi tablicy. W grupie tej nie zmieniają się wartości zmiennych x_2 i x_4 . Ponieważ zakreślono grupy jedynek, a zmienne przyjmują wartość 0, to funkcja G_1 będzie iloczynem negacji tych zmiennych. Dlatego $G_1 = \bar{x}_2\bar{x}_4$. Funkcje pozostałych grup określono na podobnej zasadzie, otrzymując $G_2 = x_1x_2x_4$ i $G_3 = x_1x_3$. Ostatecznie poszukiwaną przez nas funkcję przedstawia zależność:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = G_1 + G_2 + G_3 \quad (12.4)$$

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \bar{x}_2\bar{x}_4 + x_1x_2x_4 + x_1x_3$$

12.2.3. Synteza układów kombinacyjnych

Synteza abstrakcyjna

Synteza abstrakcyjna polega na ustaleniu liczby stanów wejść i wyjść oraz związków zachodzących pomiędzy nimi przy wykorzystaniu opisu słownego, wykresu czasowego, tablicy łączzeń lub innych sposobów podanych w rozdziale 12.2.1.

Synteza strukturalna

Celem syntezy strukturalnej jest wykreślenie schematu logicznego. Realizuje się to po uprzednim zakodowaniu sygnałów wejściowych i wyjściowych oraz minimalizacji funkcji wyjściowej.

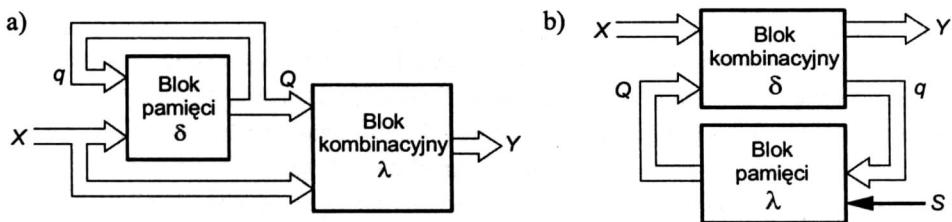
Synteza techniczna

W trakcie syntezy technicznej wykresla się schemat montażowy z wykorzystaniem wybranych elementów o odpowiednich charakterystykach statycznych i dynamicznych.

12.3. Układy sekwencyjne

Układami sekwencyjnymi nazywamy takie układy przełączające, w których do określenia stanu wyjść Y w chwili t_k nie wystarcza tylko znajomość stanu wejść X , lecz konieczna jest dodatkowo znajomość stanu wejść w chwilach poprzedzających, np. t_{k-1} . Zapamiętanie stanów w chwilach poprzednich realizuje się poprzez zastosowanie elementów pamięci, dlatego układy sekwencyjne nazywamy układami z pamięcią.

Ogólny schemat układu sekwencyjnego przedstawiono na rysunku 12.4. Na rysunku 12.4a wyszczególniono blok układu pamięci, objęty pętlą sprzężeń zwrotnych oraz blok układu kombinacyjnego. Dodatkowo na rysunku 12.4b w układzie sekwencyjnym, w obwodzie sprzężeń zwrotnych, wyszczególniony został sygnał synchronizujący S .



Rys. 12.4. Schematy ogólnego układu sekwencyjnego: a) z wyszczególnieniem bloku pamięci; b) z wyróżnionym wejściem synchronizującym S

12.3.1. Pojęcia podstawowe

Poniżej zamieszczono objaśnienia oznaczeń i terminów zastosowanych do opisu układów sekwencyjnych:

Stan wejść $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Stan wyjść $Y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$.

Stan elementów pamięci (stan wewnętrzny pamięci) $Q = (Q_1, Q_2, \dots, Q_k)$.

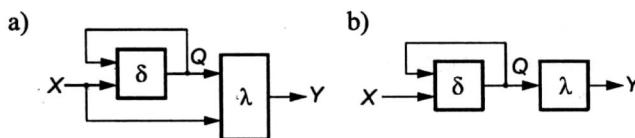
Stan wzbudzeń (stan wejść elementów pamięci) $q = (q_1, q_2, \dots, q_l)$, gdzie $l \geq k$.

Stan wyjścia Y w układach sekwencyjnych określony jest przez funkcję wyjść λ . Ze względu na tę funkcję układy sekwencyjne dzieli się na automaty **Mealy'ego i Moore'a**.

W **automacie Mealy'ego** stan wyjścia Y zależy zarówno od stanu wejść X , jak i od stanu wewnętrznego Q . Funkcję wyjść λ dla tego typu układu zapisujemy w postaci zależności

$$Y(t) = \lambda[X(t), Q(t)] \quad (12.5)$$

Schemat blokowy tego automatu przedstawiono na rysunku 12.5a.



Rys. 12.5. Struktura układów sekwencyjnych: a) Mealy'ego; b) Moore'a

W **automacie Moore'a** stan wyjścia Y zależy jedynie od stanu wewnętrznego Q , co przedstawia zależność

$$Y(t) = \lambda[Q(t)] \quad (12.6)$$

Ilustruje to rysunek 12.5b.

Funkcja przejść automatu δ wyraża zależność pomiędzy stanem wewnętrznym układu w chwili obecnej $Q(t)$ a stanem wejścia $X(t)$ i stanem wewnętrznym automatu w chwili poprzedniej $Q(t-1)$

$$Q(t) = \delta[X(t), Q(t-1)] \quad (12.7)$$

Układem autonomicznym nazywamy taki układ, który nie ma żadnych wejść poza wejściem taktującym. W zależności od sposobu, w jaki zezwala się na zmianę stanu elementów pamięci, układy sekwencyjne można podzielić na **synchroniczne** i **asynchroniczne**.

W **układach synchronicznych** stan wejścia X może oddziaływać na element pamięci tylko w ścisłe określonych momentach wyznaczonych sygnałem pochodząącym z wejścia synchronizującego S .

W **układach asynchronicznych** stan wejścia X oddziaływało bezpośrednio na elementy pamięci. Układy asynchroniczne można traktować jako **układy asynchroniczne statyczne** w przypadku, gdy zmiany stanu wewnętrznego i stanu wejścia są wywoływanie bezpośrednio stanem wejścia, lub jako **układy asynchroniczne dynamiczne**, gdy zmiana stanu wewnętrznego i stanu wyjścia dokonuje się pod wpływem dynamicznych stanów wejścia, tzn. znaczenie ma charakter zmian sygnałów wejściowych.

Stan stabilny układu sekwencyjnego jest stanem trwałym. Występuje wtedy, gdy stan pracy elementu pamięci Q odpowiada stanowi wzbudzenia q , a jego zmiana możliwa jest dopiero po podaniu zewnętrznego sygnału wejściowego.

Stan niestabilny układu sekwencyjnego jest stanem nietrwałym. Występuje wtedy, gdy stan pracy elementu pamięci Q nie odpowiada stanowi wzbudzenia q . Dzieje się tak wówczas, kiedy zmiana stanu elementów pamięci jest uzależniona od sygnałówewnętrznych.

Zjawisko hazardu jest związane z rzeczywistymi charakterystykami układów logicznych wykorzystywanych w syntezie układów przełączających. Prowadzi to do sytuacji, w której układ zaprojektowany poprawnie pod względem logicznym działa nieprawidłowo ze względu na pojawianie się niepożądanych, krótkotrwałych sygnałów wejściowych. Zjawisko hazardu eliminuje się poprzez wprowadzenie do układu tzw. **grupy antyhazardowej**.

W układach stykowych zjawisko hazardu jest konsekwencją niejednoczesnej zmiany położenia zestyków przekaźnika, tak że zachodzi zależność $x + \bar{x} \neq 1$ albo $x\bar{x} \neq 0$. W układach bezstykowych zjawisko hazardu jest związane z różnym czasem propagacji sygnału przez poszczególne elementy logiczne.

Zjawisko wyścigu jest konsekwencją różnych czasów zadziałania elementów pamięci. W układach rzeczywistych nie jest możliwe osiągnięcie jednoczesnej zmiany stanu jednego lub więcej elementów pamięci. W przypadku kiedy mamy do czynienia z dwoma elementami pamięci, to jeden z nich zadziała nieco wcześniej. Sytuacja taka wiąże się z koniecznością uwzględnienia przy projektowaniu układu sekwencyjnego następujących możliwości:

- obydwa elementy pamięci zmieniły swój stan jednocześnie,
- pierwszy element pamięci zmienił swój stan wcześniej,
- drugi element pamięci zmienił swój stan wcześniej.

W zależności od tego, w jaki sposób zmienia się stan wewnętrzny układu przełączającego po zaistnieniu zjawiska wyścigu, mówimy o:

- wyścigu niekrytycznym, gdy układ po przejściu różnych dróg dochodzi w każdym przypadku do tego samego stanu stabilnego;
- wyścigu krytycznym, gdy układ po przejściu różnych dróg dochodzi w każdym przypadku do innego stanu stabilnego.

Zamknięty cykl drgań w układzie sekwencyjnym występuje wtedy, gdy grupa elementów pamięci przełączana jest cyklicznie do momentu pojawienia się zewnętrznego sygnału wejściowego. Odpowiada to sytuacji, gdy układ sekwencyjny przechodzi wielokrotnie przez te same stany niestabilne dając do osiągnięcia stanu stabilnego.

12.3.2. Synteza układów sekwencyjnych

Syntezę układu sekwencyjnego, w zależności od stopnia komplikacji warunków działania urządzenia, można przeprowadzić różnymi metodami. Są to metody:

- intuicyjna,
- algorytmiczna,
- tablic kolejności łączeń,
- tablic przejść-wyjść, nazywana metodą Huffmana.

W dalszej części przedstawiono opis metod wykorzystujących tablicę kolejności łączeń i metodę Huffmana. Ze względu na charakter kolejnych etapów projektowania układów sekwencyjnych, wprowadzono podział na:

- syntezę abstrakcyjną,
- syntezę strukturalną,
- syntezę techniczną.

12.3.2.1. Opis układów sekwencyjnych

W każdym przypadku syntezą układów sekwencyjnych wymaga określenia warunków działania urządzenia. Niektóre z metod opisu są uniwersalne, tak jak np. opis słowny, inne natomiast w sposób szczególny są wykorzystywane przez określoną metodę syntezы. Poniżej przedstawiono kilka podstawowych sposobów opisu układów sekwencyjnych.

Opis słowny jest najczęstszą formą zadawania układów przełączających. Polega on na przyporządkowaniu sygnałom wejściowym X , zadawanym w odpowiedniej kolejności, sygnałów wyjściowych Y .

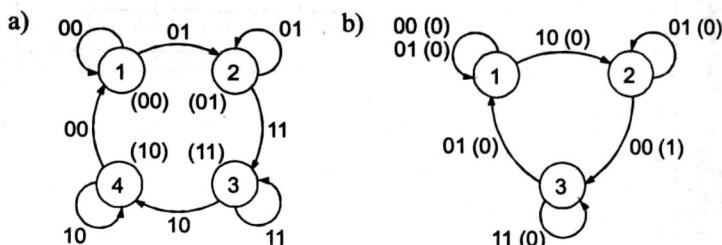
Tablice zależności w postaci ciągów zero-jedynkowych pozwalają uprościć sposób opisu układu. Określają one wartości i kolejność występowania sygnałów X i odpowiadających im sygnałów Y .

Przebiegi czasowe określa się w identyczny sposób jak dla układów kombinacyjnych.

Tablica łączeń jest uproszczoną formą przebiegu czasowego. W syntezie układów sekwencyjnych zawiera informację o stanie wejść X i wyjść Y zadanych w odpowiedniej kolejności.

Liczba łączenia jest liczbą dziesiętną odpowiadającą kombinacji wejść i wyjść układu w danym taktie. Określa się ją poprzez przypisanie każdej ze zmiennych liczb od 2^0 do 2^{r-1} , gdzie r jest liczbą zmiennych.

Graf układu stosuje się do opisu układów sekwencyjnych. Wierzchołkom grafu przypisuje się numery kolejnych stanów wewnętrznych Q układu. Łuki skierowane grafu opisane są stanami wejść X_n , powodującymi przejście ze stanu Q_i do stanu Q_j . W przypadku układów asynchronicznych dodaje się dodatkowo łuki opisane stanami X , które nie powodują zmiany stanu w układzie. W automatach Moore'a (rys. 12.6a) stany wyjść Y przypisuje się wierzchołkom grafu, ponieważ są one zależne wyłącznie od Q . W automatach Mealy'ego (rys. 12.6b) łuki skierowane opisuje się dodatkowo stanami wyjść Y_m zgodnie z opisującą je funkcją wyjść λ .



Objaśnienia:

- 1 – wierzchołek grafu, opisuje stan wewnętrzny układu
- łuk skierowany grafu, prezentuje kierunek przepływu informacji
- (11) (0) – opis stanu pamięci
- 10 – opis stanu wejść

Rys. 12.6. Grafy: a) układu Moore'a; b) układu Mealy'ego

Tablica przejść i wyjść jest podstawowym sposobem opisu układów sekwencyjnych. Tablica o współrzędnych opisanych stanami wejść X_i i stanami pamięci Q zawiera informacje o nowych stanach Q i sygnalach Y . Pozwala to określić, dla jakiej kombinacji stanów wejść X_n nastąpi przejście ze stanu wewnętrznego Q_i do stanu Q_j , i w jaki sposób zmieni się stan wyjść Y_m układu.

12.3.2.2. Metoda tablic kolejności łączeń

Posługując się ogólnym schematem blokowym syntezy układów sekwencyjnych, wyróżniono 3 etapy projektowania, do których należą:

- 1) synteza abstrakcyjna,
- 2) synteza strukturalna,
- 3) synteza techniczna.

Znaczenie poszczególnych etapów projektowania objaśniono w dalszej części podrozdziału.

Synteza abstrakcyjna

Podstawowym zadaniem w syntezie układów przełączających na podstawie tablicy kolejności łączeń jest określenie, czy układ jest rozwiązywalny, ile elementów pamięci potrzeba, by układ był rozwiązywalny i w jaki sposób będzie wyglądała tablica wzbudzeń (tab. 12.4). Poniżej zamieszczono wyjaśnienia dotyczące tablicy wzbudzeń.

Tabela 12.4

Najpierw w tablicy prezentowane są wyłącznie stany wejść dla $X = \{x_1, x_2, x_3\}$. Pierwszy krok syntezy układu polega na przyporządkowaniu każdemu z taktów liczby łączenia. Jak widać, takty 2 i 8 posiadają tą samą liczbę łączenia 5. Oznacza to, że układ jest nierozwiązywalny. Konieczne jest dodanie elementu pamięci P_1 tak, aby rozróżnić takty 2 i 8. Zakładamy, że element pamięci powinien wyróżnić takt 2. W tym celu wybieramy takt poprzedni, tj. 1, i takt następny, tj. 3, i dzielimy je, wprowadzając takty 1a, 1b oraz 3a i 3b. Stan pamięci pojawia się w takcie 1b i trwa aż do końca taktu 3a. Procedura ta jest konieczna ze względu na konieczność eliminacji zjawiska wyścigu. Powtórnie dokonujemy określenia liczby łączenia. Ponieważ każdy z taktów posiada inną liczbę łączenia, układ jest rozwiązywalny i można przystąpić do sporządzenia tablicy stanów wzbudzeń. W tej części konieczne było wyróżnienie trzech sytuacji: stała jedynka, stałe zero i sygnał nieokreślony (1 lub 0).

Ze względu na zastosowanie elementów pamięci posiadających dwa wejścia: załączające S i wyłączające R , konieczne jest przestrzeganie następujących zasad:

- sygnał S pojawia się w takcie poprzedzającym załączenie pamięci i trwa jeden takt;
- kolejne takty, aż do przedostatniego taktu działania pamięci, stan wejścia S może przyjmować wartości dowolne (stan nieokreślony);
- sygnał R pojawia się w ostatnim taktie działania pamięci i trwa jeden takt;
- przez pozostałe takty, aż do taktu, w którym pojawia się sygnał S , sygnał R może przyjmować wartości dowolne (stan nieokreślony).

W przypadku stosowania elementów pamięci mających jedno wejście podtrzymujące stan wyjść nie wyróżnia się stanów nieokreślonych. Załączenie elementu pamięci trwa przez cały czas obecności sygnału wzbudzenia.

Często zdarza się, że w układach mamy do czynienia ze zjawiskiem wyścigu, którego istnienie należy uwzględnić na początku syntezy.

Możliwe są trzy przypadki:

- 1) dwa sygnały pojawiają się jednocześnie (tab. 12.5a),
- 2) dwa sygnały zanikają jednocześnie (tab. 12.5b),
- 3) następuje jednoczesne wyłączenie i załączenie sygnałów (tab. 12.5c).

Fakt występowania wyścigu zaznaczono za pomocą kółek. Wyeliminowanie tego zjawiska realizuje się poprzez uwzględnienie dodatkowych kombinacji związanych z niejednoczesnym pojawianiem się lub zanikiem sygnałów. Przykładowo w tabeli 12.5a z powyższym problemem mamy do czynienia na początku taktu 3. Uwzględnienie dodatkowych kombinacji sygnałów odpowiadających liczbie łącznia 5 i 6 zapobiega wyścigowi. Jak łatwo zauważyc, uwzględnienie liczby łącznia 6 wymaga wprowadzenia dodatkowego elementu pamięci.

Tabela 12.5
Przykłady wyścigu w tablicy kolejności łączień
Objaśnienia w tekście

| a) | 2 | 3 | 4 | 5 | | b) | 3 | 4 | 5 | 6 | | c) | 2 | 3 | 4 | 5 | | |
|-------|---|---|---|---|---|----|---|---|---|---|---|----|---|---|---|---|---|---|
| x_1 | | ○ | | | | | | | | ○ | | | | | | | | |
| x_2 | | ○ | | | | | | | | ○ | | | | | | | | |
| x_3 | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | 4 | 5 | 6 | 7 | 6 | 2 | 1 | 3 | 7 | 5 | 6 | 4 | 2 | 3 | 1 | 7 | 5 | 4 |

Syntezja strukturalna

Tablica kolejności łączień pozwala na określenie funkcji wzbudzeń. Na początku wprowadza się oznaczenie pól tablic Karnaugha odpowiednimi numerami taktów, co przedstawia tabela 12.6a. Przykładowo w tabeli 12.6b numery taktów zastąpiono war-

tościami wzbudzenia S_{x2} , przy czym „–” oznacza wartość nieokreoloną z warunku działania układu, a pusté pole – wartość nieokreoloną nieuwzględnianą w warunkach działania układu. Zakreślona grupa odpowiada funkcji $S_{x2} = \bar{x}_3\bar{x}_4$. Po wyznaczeniu wszystkich funkcji wzbudzeń sporządza się schemat logiczny układu.

Tabela 12.6

Wyznaczanie funkcji wzbudzeń: a) tablica Karnauga z zaznaczonymi numerami taktów;
b) tablica dla wzbudzenia S_{x2}

| a) | x_1x_2 | 00 | 01 | 11 | 10 |
|----|----------|----|----|----|----|
| | x_3x_4 | 00 | 01 | 11 | 10 |
| | 00 | | 5 | 4 | 3b |
| | 01 | | | | 3a |
| | 11 | 1b | | | 2 |
| | 10 | 1a | 6 | 7 | 8 |

| b) | x_1x_2 | 00 | 01 | 11 | 10 |
|----|----------|----|----|----|----|
| | x_3x_4 | 00 | 01 | 11 | 10 |
| | 00 | | – | – | 1 |
| | 01 | | | | 0 |
| | 11 | 0 | | | 0 |
| | 10 | 0 | – | 0 | 0 |

Synteza techniczna

Ta część syntezy polega na określeniu sposobu realizacji gotowego urządzenia. Istotne znaczenie ma typ elementów, z których wykonane zostanie urządzenie. Jeśli istnieje taka potrzeba, należy uwzględnić sposób rozmieszczenia elementów oraz to, jak i za pomocą jakich środków technicznych, zrealizowane zostaną połączenia logiczne.

Przykład 12.1

Zaprojektować układ sterowania przenośnika taśmowego. Układ sterowania wyposażono w dwa przyciski P_1 (START) i P_2 (STOP). Wciśnięcie przycisku START powoduje załączenie sygnalizatora dźwiękowego D i sygnalizatora świetlnego Z .

Tabela 12.7

Przebieg sygnałów wejściowych i wyjściowych układu sterowania

| Stan wejśc | Sygnały | Takty | 1 | 2 | 3 | 4 |
|------------|---------|-------|---|---|---|---|
| | | | | | | |
| | P_1 | | | | | |
| | P_2 | | | | | |
| | D | | | | | |
| | Z | | | | | |
| | S | | | | | |

Sygnal akustyczny wyłącza się z chwilą zwolnienia przycisku START. W tym momencie następuje załączenie silnika S przenośnika taśmowego. Wyłączenie przenośnika taśmowego i sygnalizatora optycznego następuje po wciśnięciu i zwolnieniu przycisku STOP. Tablica kolejności łączenia z tabeli 12.7 prezentuje zasadę działania układu.

Rozwiążanie

Synteza abstrakcyjna

a) Opis układu

Zapisując liczby łączenia dla stanu wejść układu można zauważyć, że w taktach 1 i 3 powtarza się liczba łączenia 0. Rozwiążanie układu wymaga wprowadzenia elementu pamięci M od połowy taktu 2, aż do połowy taktu 4. Poza sygnałami wyjściowymi D , Z i S sterującymi sygnalizatorem dźwiękowym, sygnalizatorem świetlnym i silnikiem elektrycznym napędzającym taśmociąg, należy określić sposób sterowania pamięcią M z wejściem ustawiającym S_{M1} i wejściem kasującym R_{M1} (tab. 12.8).

Tabela 12.8
Tablica kolejności łączenia
dla układu sterowania taśmociągiem

| | | Takty | | 1 | | 2 | | 3 | | 4 | |
|---------------|-----------------|---------|-------|---|---|-------|---|---|---|-------|-------|
| | | Sygnały | | | | a b | | | | a b | |
| Stan wejść | 2^0 | P_1 | | | | | | | | | |
| | 2^1 | P_2 | | | | | | | | | |
| | Liczba łączenia | | 0 | | 1 | | 0 | | 2 | | |
| Stan pamięci | 2^2 | M | | | | | | | | | |
| | Liczba łączenia | | 0 | | 1 | | 5 | | 4 | | 6 2 |
| Stan wzbudzeń | S_{M1} | | | | | | | | | | |
| | R_{M1} | | | | | | | | | | |
| Stan wyjścia | D | | | | | | | | | | |
| | Z | | | | | | | | | | |
| | S | | | | | | | | | | |

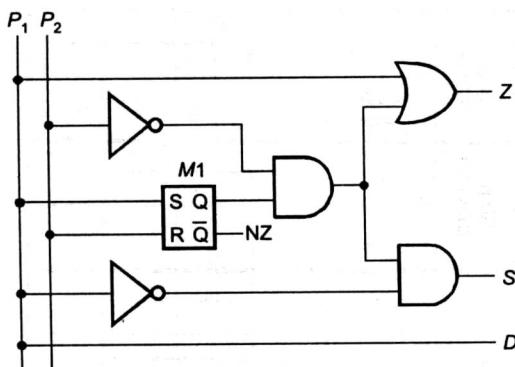
Synteza strukturalna

- a) Minimalizacja funkcji opisujących działanie układu z wykorzystaniem tablic Karnauga (tab. 12.9),
 b) Schemat logiczny rozwiązania przedstawiono na rysunku 12.7.

Tabela 12.9

Tablice Karnauga sporządzone na podstawie tablicy kolejności łączenia i odpowiadające im funkcje przełączające

| <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th>$P_2 M \backslash P_1$</th> <th>0</th> <th>1</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>00</td> <td>0</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>01</td> <td>-</td> <td>-</td> </tr> <tr> <td>11</td> <td>0</td> <td>-</td> </tr> <tr> <td>10</td> <td>0</td> <td>-</td> </tr> </tbody> </table> | $P_2 M \backslash P_1$ | 0 | 1 | 00 | 0 | 1 | 01 | - | - | 11 | 0 | - | 10 | 0 | - | <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th>$P_2 M \backslash P_1$</th> <th>0</th> <th>1</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>00</td> <td>-</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>01</td> <td>0</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>11</td> <td>1</td> <td>-</td> </tr> <tr> <td>10</td> <td>-</td> <td>-</td> </tr> </tbody> </table> | $P_2 M \backslash P_1$ | 0 | 1 | 00 | - | 0 | 01 | 0 | 0 | 11 | 1 | - | 10 | - | - | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|-------------------------|-----------------------------|---|----|---|---|----|---|---|----|---|---|----|---|---|---|------------------------|---|---|----|---|---|----|---|---|----|---|---|----|---|---|---|------------------------|---|---|----|---|---|----|---|---|----|---|---|----|---|---|
| $P_2 M \backslash P_1$ | 0 | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 00 | 0 | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 01 | - | - | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 11 | 0 | - | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 10 | 0 | - | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| $P_2 M \backslash P_1$ | 0 | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 00 | - | 0 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 01 | 0 | 0 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 11 | 1 | - | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 10 | - | - | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| $S_{M1} = P_1$ | $R_{M1} = P_2$ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th>$P_2 M \backslash P_1$</th> <th>0</th> <th>1</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>00</td> <td>0</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>01</td> <td>0</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>11</td> <td>0</td> <td>-</td> </tr> <tr> <td>10</td> <td>0</td> <td>-</td> </tr> </tbody> </table> | $P_2 M \backslash P_1$ | 0 | 1 | 00 | 0 | 1 | 01 | 0 | 1 | 11 | 0 | - | 10 | 0 | - | <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th>$P_2 M \backslash P_1$</th> <th>0</th> <th>1</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>00</td> <td>0</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>01</td> <td>1</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>11</td> <td>0</td> <td>-</td> </tr> <tr> <td>10</td> <td>0</td> <td>-</td> </tr> </tbody> </table> | $P_2 M \backslash P_1$ | 0 | 1 | 00 | 0 | 1 | 01 | 1 | 1 | 11 | 0 | - | 10 | 0 | - | <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th>$P_2 M \backslash P_1$</th> <th>0</th> <th>1</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>00</td> <td>0</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>01</td> <td>1</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>11</td> <td>0</td> <td>-</td> </tr> <tr> <td>10</td> <td>0</td> <td>-</td> </tr> </tbody> </table> | $P_2 M \backslash P_1$ | 0 | 1 | 00 | 0 | 0 | 01 | 1 | 0 | 11 | 0 | - | 10 | 0 | - |
| $P_2 M \backslash P_1$ | 0 | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 00 | 0 | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 01 | 0 | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 11 | 0 | - | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 10 | 0 | - | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| $P_2 M \backslash P_1$ | 0 | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 00 | 0 | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 01 | 1 | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 11 | 0 | - | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 10 | 0 | - | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| $P_2 M \backslash P_1$ | 0 | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 00 | 0 | 0 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 01 | 1 | 0 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 11 | 0 | - | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 10 | 0 | - | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| $D = P_1$ | $Z = P_1 + \bar{P}_2 M$ | $Z = \bar{P}_1 \bar{P}_2 M$ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |



Rys. 12.7. Schemat logiczny układu sterowania przenośnika taśmowego:
 NZ – niewykorzystane wyjście

12.3.2.3. Metoda tablic przejść-wyjść (metoda Huffmana)

Synteza abstrakcyjna

Metoda ta w szczególny sposób wykorzystuje zapis warunków pracy w postaci grafu działania i tablicy przejść-wyjść. Graf działania przydatny jest podczas analizowania warunków pracy urządzenia, do syntezy natomiast przydatna jest przede wszystkim tablica przejść-wyjść zawierająca wszystkie warunki działania urządzenia. Pierwotną tablicę należy jeszcze uprościć, decydując czy będzie to automat Moore'a, czy Mealy'ego. Otrzymaną w ten sposób tablicę minimalną koduje się.

Upraszczanie tablic przejść-wyjść

Minimalizacja pierwotnej tablicy przejść polega na zastąpieniu dwóch lub więcej stanów równoważnych jednym, tak by nie zmienił się sposób działania układu. Dwa wiersze pierwotnej tablicy przejść są równoważne, gdy:

- stany stabilne znajdują się w jednakowych kolumnach,
- wyjścia odpowiadające obu wierszom są jednakowe,
- przy dowolnej zmianie stanu wejść układ przechodzi z rozpatrywanych stanów do stanów jednakowych lub równoważnych.

W przypadku gdy automat ma mniejszą liczbę stanów wewnętrznych Q niż liczba stanów wejść X , pierwotną tablicę przejść można uprościć, skracając ze sobą stany zgodne. We wszystkich kolumnach stanów zgodnych tablicy przejść powinny znajdować się:

- jednakowe numery stanów (a, a),
- numer stanu i stan nieokreślony ($a, -$ lub $-, a$),
- wyłącznie stany nieokreślone ($-, -$).

Przykłady upraszczania tablic przejść-wyjść dla układu Moore'a przedstawiono w tabeli 12.10, a dla układu Mealy'ego – w tabeli 12.11.

Tabela 12.10

Przykład skracania stanów zgodnych tablic przejść-wyjść dla układu Moore'a:

a) wiersze tablicy pierwotnej; b) wiersze po skróceniu

a)

| $Q \backslash x_1x_2$ | 00 | 01 | 11 | 10 | y_1y_2 |
|-----------------------|-----|----|----|-----|----------|
| 1 | (1) | 3 | - | 7 | 0- |
| 7 | 1 | - | 6 | (7) | 01 |
| | | | | | |

b)

| $Q \backslash x_1x_2$ | 00 | 01 | 11 | 10 | y_1y_2 |
|-----------------------|-----|----|----|-----|----------|
| 1,7 | (1) | 3 | 6 | (7) | 01 |
| | | | | | |

Tabela 12.11

Przykład skracania stanów zgodnych tablic przejść-wyjść dla układu Mealy'ego:
 a) wiersze tablicy pierwotnej; b) wiersze tablicy przejść po skróceniu; c) tablica wyjść

| | x_1x_2 | 00 | 01 | 11 | 10 | y_1y_2 |
|-----|----------|-----|----|-----|----|----------|
| Q | | | | | | |
| 1 | (1) | 2 | - | 4 | 00 | |
| 2 | 1 | (2) | 5 | - | 01 | |
| 5 | - | 2 | 5 | (4) | 01 | |
| | I | I | I | I | I | |

| | x_1x_2 | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---------|----------|-----|-----|----|----|
| Q | | | | | |
| 1, 2, 5 | (1) | (2) | (5) | 4 | |
| | I | I | I | I | |

| | x_1x_2 | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---------|----------|----|----|----|----|
| Q | | | | | |
| 1, 2, 5 | 00 | 01 | 01 | 10 | |
| | I | I | I | I | |

Synteza strukturalna

Zakodowana tablica przejść-wyjść pozwala na skonstruowanie tablic Karnaugha dla funkcji wyjść i wzbudzeń. Na podstawie tych funkcji tworzy się schemat logiczny układu.

Kodowanie stanów wewnętrznych

W syntezie układów sekwencyjnych posługujemy się systemem binarnym. W tablicach przejść-wyjść stany pamięci Q_i numeruje się kolejno wykorzystując liczby dziesiętne (lub umownie dowolne inne oznaczenia). Przyporządkowując kolejno każdej z liczb dziesiętnych liczbę binarną, realizujemy tzw. kodowanie stanów wewnętrznych. Zakodowanie K stanów wewnętrznych wymaga użycia k cyfr liczby binarnej, przy czym pomiędzy K i k zachodzi zależność (12.8).

$$2^{k-1} < K \leq 2^k \quad (12.8)$$

Liczba k określa liczbę elementów pamięci.

Przykładowo dla tablicy przejść-wyjść, przedstawionej w tabeli 12.10b, konieczne jest przypisanie nowej numeracji stanów wewnętrznych Q , a następnie zakodowanie tak przygotowanej tablicy. Poszczególne etapy kodowania przedstawia tabela 12.12a. Pierwsza kolumna tabeli zawiera numerację wierszy połączonych w wyniku minimalizacji. Druga kolumna odpowiada nowej numeracji stanów wewnętrznych. Trzecia kolumna odpowiada sposobowi kodowania stanów wewnętrznych. Po podstawieniu liczb binarnych odpowiednim stanom wewnętrzny dostajemy tabelę 12.12b.

Od sposobu kodowania zależy złożoność realizowanego układu, co szerzej omówiono.

Synteza techniczna

Syntezę techniczną przeprowadza się identycznie jak w metodzie z wykorzystaniem tablicy kolejności łączeń.

Tabela 12.12

Kodowanie tabeli przejść-wyjścia

Objaśnienia w tekście

| | | | |
|----|-----|---|----|
| a) | 1,7 | 1 | 00 |
| | 2,3 | 2 | 01 |
| | 4,6 | 3 | 11 |
| | 5 | 4 | 10 |

| | | | | | | |
|----|----------|----|----|----|----|----------|
| b) | x_1x_2 | 00 | 01 | 11 | 10 | y_1y_2 |
| | Q | 00 | 01 | 11 | 10 | 01 |
| | 00 | 00 | 01 | 11 | 00 | 01 |

Przykład 12.2

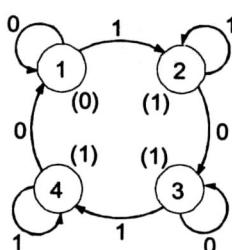
Zaprojektować układ załączenia żarówki Z przyciskiem P , wykorzystując metodę Huffmana. Układ powinien spełniać następujące założenia:

- wciśnięcie przycisku P powoduje załączenie żarówki Z ,
- wyłączenie żarówki następuje po ponownym wciśnięciu i zwolnieniu przycisku P .

Rozwiązańe**Synteza abstrakcyjna****a) Opis układu**

Stan wejść jest reprezentowany przez jeden sygnał $X = \{P\}$. Stan wyjścia reprezentuje jeden sygnał $Y = \{Z\}$. W układzie pracującym jako automat Moore'a można wyróżnić 4 stany wewnętrzne:

- 1) stan początkowy, przycisk nie został wciśnięty, żarówka się nie pali;
- 2) przycisk wciśnięty, żarówka załączona, poprzednio żarówka wyłączona;
- 3) przycisk zwolniony, żarówka załączona;
- 4) przycisk wciśnięty, żarówka załączona, poprzednio żarówka załączona.

b) Graf działania i pierwotna tablica automatu Moore'a (rys. 12.8 i tab. 12.13)**Rys. 12.8. Graf działania****Tabela 12.13**

Tablica pierwotna

| $Q \setminus P$ | 0 | 1 | y |
|-----------------|---|---|-----|
| 1 | 1 | 2 | 0 |
| 2 | 3 | 2 | 1 |
| 3 | 3 | 4 | 1 |
| 4 | 1 | 4 | 1 |

c) Minimalizacja pierwotnej tablicy przejść

W rozważanym przypadku tablica uproszczona będzie wyglądać tak samo jak tablica pierwotna, ze względu na brak stanów równoważnych i stanów zgodnych.

d) Kodowanie stanów wewnętrznych

Poszukujemy liczby sygnałów potrzebnych do zakodowania 4 stanów wewnętrznych Q . Z zależności $2^{N-1} < K \leq 2^N$ dla $K = 4$ stanów wewnętrznych dostajemy $N = 2$ linie sprzężeń zwrotnych. Odtąd stan pamięci będziemy opisywać: $Q = \{Q_1, Q_2\}$. Zgodnie z podanym sposobem kodowania z tabeli 12.14a, opierając się na tablicy przejść-wyjścia, sporządzamy tablice wzbudzeń (tab. 12.14b i c) i tablicę wyjść układowu (tab. 12.14d).

Tabela 12.14

Sposób kodowania (a), tablice wzbudzeń pamięci Q_1 (b) i Q_2 (c), tablica wyjść (d)

a)

| Q | Q_1 | Q_2 |
|---|-------|-------|
| 1 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | 1 |
| 3 | 1 | 1 |
| 4 | 1 | 0 |

b)

| $q_1 q_2 \backslash P$ | 0 | 1 |
|------------------------|---|---|
| 00 | 0 | 0 |
| 01 | 1 | 0 |
| 11 | 1 | 1 |
| 10 | 0 | 1 |

c)

| $q_1 q_2 \backslash P$ | 0 | 1 |
|------------------------|---|---|
| 00 | 0 | 1 |
| 01 | 1 | 1 |
| 11 | 1 | 0 |
| 10 | 0 | 0 |

d)

| $Q_1 Q_2 \backslash P$ | 0 | 1 |
|------------------------|---|---|
| 00 | 0 | - |
| 01 | 1 | 1 |
| 11 | 1 | 1 |
| 10 | - | 1 |

Synteza strukturalna

a) Minimalizacja funkcji przejść-wyjścia z tablic Karanaugha

W wyniku minimalizacji otrzymujemy następujące funkcje przejść i wyjścia:

$$Q_1 = \bar{P}q_2 + Pq_1 + q_1q_2,$$

$$Q_2 = \bar{P}q_2 + P\bar{q}_1 + \bar{q}_1q_2,$$

$$Z = P + Q_2.$$

Ze względu na możliwość występowania hazardu w tablicach wzbudzeń pamięci (tab. 12.14b i c) dodano grupy antyhazardowe q_1q_2 oraz \bar{q}_1q_2 .

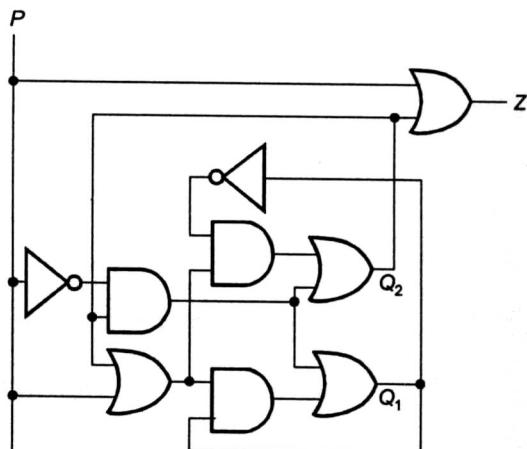
Do realizacji układu potrzeba dwóch negacji, 5 iloczynów i 5 sum. Łatwo zauważać, że równania przejść po przekształceniu:

$$Q_1 = \bar{P}q_2 + q_1(P + q_2),$$

$$Q_2 = \bar{P}q_2 + \bar{q}_1(P + q_2),$$

zawierają wspólne czynniki $\bar{P}q_2$ oraz $(P + q_2)$, co pozwala zmniejszyć liczbę potrzebnych elementów do dwóch negacji, 3 iloczynów i 4 sum logicznych.

b) Schemat logiczny rozwiązania przedstawiono na rysunku 12.9.



Rys. 12.9. Schemat logiczny układu sterowania oświetleniem