FORRITUNAR-
20 / KEPPNI / 21
FRAMHALDS-
SKÓLANNA

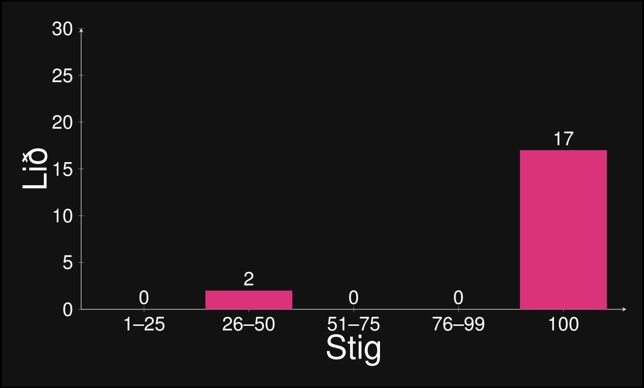
Lausnir á völdum dæmum

Dómarar og dæmahöfundar

- Arnar Bjarni Arnarson
- Aron Orri Fannarsson
- Atli Fannar Franklín
- Bergur Snorrason
- Bjarni Dagur Thor Kárason
- Bjarki Ágúst Guðmundsson
- Hannes Kristján Hannesson
- Sigurður Jens Albertsson
- Unnar Freyr Erlendsson

Pizzubestun

	Keppendur	Dómarar
Stysta lausn	8	14
Lengsta lausn	35	23
	Tími	Lið
Fyrsta lausn	0:16:02	Jackals



Pizzubestun

Dæmið

Gefinn er listi af pizzum sem þarf að panta, það þarf að finna hvaða pör lágmarka kostnað þegar er pantað er tvennutilboð (borgað fyrir dýrari pizzuna), einnig hægt að panta staka pizzu.

Pizzubestun

Lausn

Para saman dýrustu pizzurnar sem völ er á, ganga á listann þangað til allar pizzur eru paraðar saman. Ef það er ópöruð pizza eftir, þá er hún ópöruð og er pöntuð sem stök pizza.

Pizzubestun

Sýnidæmi

Prinsinn 2499
Piparinn 2399
Margherita 1899
Pepparinn 2099

Pizzubestun

Röðum

Sýnidæmi

Prinsinn 2499
Piparinn 2399
Pepparinn 2099
Margherita 1899

Pizzubestun

Pörum dýrustu ópöruðu pizzurnar saman

Sýnidæmi

Prinsinn 2499
Piparinn 2399
Pepparinn 2099
Margherita 1899

Pizzubestun

Pörum dýrustu ópöruðu pizzurnar saman

Sýnidæmi

Prinsinn 2499
Piparinn 2399
Pepparinn 2099
Margherita 1899

Pizzubestun

Pörum dýrustu ópöruðu pizzurnar saman

Sýnidæmi

Prinsinn 2499
Piparinn 2399
Pepparinn 2099
Margherita 1899

Svarið er þá 2499 + 2099 = 4598

Pizzubestun

Sýnidæmi

Guffi 3099
BaraDodlur 2899
Margherita 1899

Pizzubestun

Þetta er núþegar raðað

Sýnidæmi

Guffi 3099
BaraDodlur 2899
Margherita 1899

Pizzubestun

Pörum saman dýrustu ópöruðu pizzurnar saman

Sýnidæmi

Guffi 3099
BaraDodlur 2899
Margherita 1899

Pizzubestun

Ein stök pizza eftir

Sýnidæmi

Guffi 3099
BaraDodlur 2899
Margherita 1899

Pizzubestun

Ein stök pizza eftir

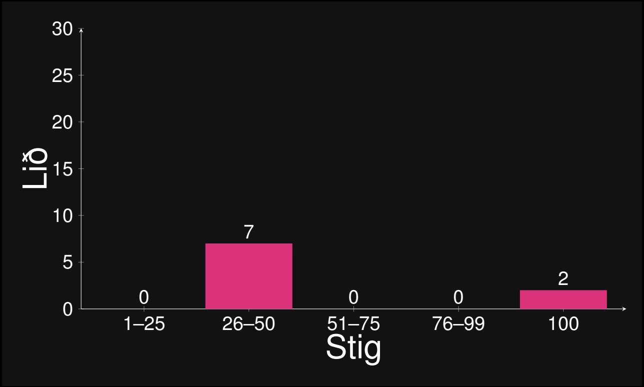
Sýnidæmi

Guffi 3099
BaraDodlur 2899
Margherita 1899

Svarið er þá 3099 + 1899 = 4998

Gangur

	Keppendur	Dómarar
Stysta lausn	10	21
Lengsta lausn	27	27
	Tími	Lið
Fyrsta lausn	3:44:15	Pandas.py



Gangur

Dæmið

Fólk er að labba á gangi ýmist til hægri eða vinstri. Segðu til hversu oft fólk mætist á gangnum.

Gangur

- Í fyrsta flokk er bara eitt > tákn og það er fremst.

Gangur

- Í fyrsta flokk er bara eitt > tákn og það er fremst.
- Nóg að telja fjölda < tákna og skrifa út.

Gangur

- Í fyrsta flokk er bara eitt > tákn og það er fremst.
- Nóg að telja fjölda < tákna og skrifa út.
- Í öðrum flokk eru öll > fyrir framan öll < tákn.

Gangur

- Í fyrsta flokk er bara eitt > tákn og það er fremst.
- Nóg að telja fjölda < tákna og skrifa út.
- Í öðrum flokk eru öll > fyrir framan öll < tákn.
- Hvert einasta > tákn mun því mæta hverju einasta < tákni.

Gangur

- Í fyrsta flokk er bara eitt > tákn og það er fremst.
- Nóg að telja fjölda < tákna og skrifa út.
- Í öðrum flokk eru öll > fyrir framan öll < tákn.
- Hvert einasta > tákn mun því mæta hverju einasta < tákni.
- Svarið er því fjöldi > tákna margfaldaður með fjölda < tákna.

Gangur

- Í hinum flokkunum eru gögnin eru ekki sniðin á neinn ákveðinn máta.

Gangur

- Í hinum flokkunum eru gögnin eru ekki sniðin á neinn ákveðinn máta.
- Þurfum að telja fyrir hvert < tákn hversu mörg > tákn koma á undan því.

Gangur

- Í hinum flokkunum eru gögnin eru ekki sniðin á neinn ákveðinn máta.
- Þurfum að telja fyrir hvert < tákn hversu mörg > tákn koma á undan því.
- Ítrum gegnum stafina og þegar við sjáum < tákn þá ítrum við í gegnum alla stafina fyrir framan og teljum.

Gangur

- Í hinum flokkunum eru gögnin eru ekki sniðin á neinn ákveðinn máta.
- Þurfum að telja fyrir hvert $<$ tákn hversu mörg $>$ tákn koma á undan því.
- Ítrum gegnum stafina og þegar við sjáum $<$ tákn þá ítrum við í gegnum alla stafina fyrir framan og teljum.
- Tímaflækjan er $\mathcal{O}(n^2)$.

Gangur

- Í hinum flokkunum eru gögnin eru ekki sniðin á neinn ákveðinn máta.
- Þurfum að telja fyrir hvert < tákn hversu mörg > tákn koma á undan því.
- Ítrum gegnum stafina og þegar við sjáum < tákn þá ítrum við í gegnum alla stafina fyrir framan og teljum.
- Tímaflækjan er $\mathcal{O}(n^2)$.
- Í staðin fyrir að ítra tvöfalt, teljum í leiðinni hversu oft við höfum séð > tákn upp að núverandi tákni.

Gangur

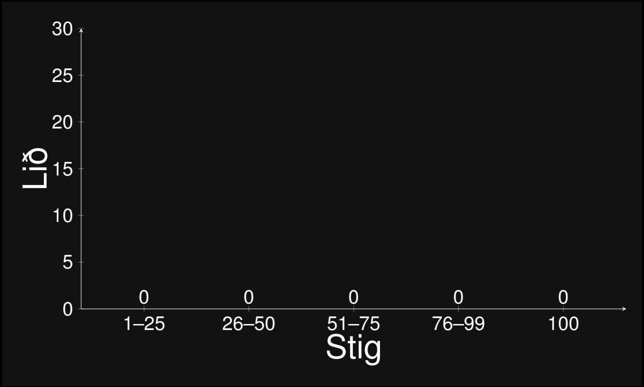
- Í hinum flokkunum eru gögnin eru ekki sniðin á neinn ákveðinn máta.
- Þurfum að telja fyrir hvert < tákn hversu mörg > tákn koma á undan því.
- Ítrum gegnum stafina og þegar við sjáum < tákn þá ítrum við í gegnum alla stafina fyrir framan og teljum.
- Tímaflækjan er $\mathcal{O}(n^2)$.
- Í staðin fyrir að ítra tvöfalt, teljum í leiðinni hversu oft við höfum séð > tákn upp að núverandi tákni.
- Þegar við sjáum < tákn þá bætum við gildinu á > teljaranum við summuna okkar.

Gangur

- Í hinum flokkunum eru gögnin eru ekki sniðin á neinn ákveðinn máta.
- Þurfum að telja fyrir hvert $<$ tákn hversu mörg $>$ tákn koma á undan því.
- Ítrum gegnum stafina og þegar við sjáum $<$ tákn þá ítrum við í gegnum alla stafina fyrir framan og teljum.
- Tímaflækjan er $\mathcal{O}(n^2)$.
- Í staðin fyrir að ítra tvöfalt, teljum í leiðinni hversu oft við höfum séð $>$ tákn upp að núverandi tákni.
- Þegar við sjáum $<$ tákn þá bætum við gildinu á $>$ teljaranum við summuna okkar.
- Tímaflækjan er $\mathcal{O}(n)$.

Talnalás

	Keppendur	Dómarar
Stysta lausn	?	70
Lengsta lausn	?	74
	Tími	Lið
Fyrsta lausn	?	?



Talnalás

Dæmið

Gefin upphafs- og lokatalan á talnalási, finnið stystu leið til að snúa skífunum þannig að talan á lásinum sé happatala eftir hvert skref.

Talnalás

Dæmið

Gefin upphafs- og lokatalan á talnalási, finnið stystu leið til að snúa skífunum þannig að talan á lásinum sé happatala eftir hvert skref.

Lausn

- Hugsum um hverja happatölu sem hnút í neti

Talnalás

Dæmið

Gefin upphafs- og lokatalan á talnalási, finnið stystu leið til að snúa skífunum þannig að talan á lásinum sé happatala eftir hvert skref.

Lausn

- Hugsum um hverja happatölu sem hnút í neti
- Setjum legg á milli tveggja happatala ef það er hægt að komast frá einni yfir á hina með því að snúa einni skífu um eitt sæti

Talnalás

Dæmið

Gefin upphafs- og lokatalan á talnalási, finnið stystu leið til að snúa skífunum þannig að talan á lásinum sé happatala eftir hvert skref.

Lausn

- Hugsum um hverja happatölu sem hnút í neti
- Setjum legg á milli tveggja happatala ef það er hægt að komast frá einni yfir á hina með því að snúa einni skífu um eitt sæti
- Notum Breadth-First Search til að finna stystu leið í netinu

Talnalás

Dæmið

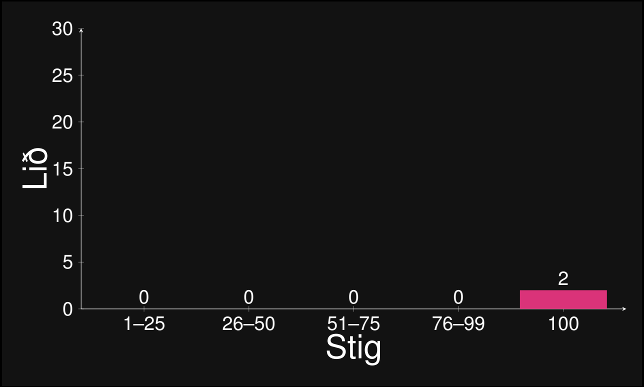
Gefin upphafs- og lokatalan á talnalási, finnið stystu leið til að snúa skífunum þannig að talan á lásinum sé happatala eftir hvert skref.

Lausn

- Hugsum um hverja happatölu sem hnút í neti
- Setjum legg á milli tveggja happatala ef það er hægt að komast frá einni yfir á hina með því að snúa einni skífu um eitt sæti
- Notum Breadth-First Search til að finna stystu leið í netinu
- Höldum utan um hvaðan við komum í leitinni til að endurskapa stystu leiðina

Nafnagift

	Keppendur	Dómarar
Stysta lausn	53	60
Lengsta lausn	112	65
	Tími	Lið
Fyrsta lausn	1:02:10	Pizza Time



Nafnagift

Dæmið

Börnin þín tvö hafa hvort um sig ákveðið nafn á kettling. Þú vilt nefna kettlinginn með sem stysta nafn þannig að bæði nöfnin sem börnin þín völdu séu hlutrunur í nafni ketlingsins.

Nafnagift

Lausn

Þetta dæmi er náskylt því að finna lengstu sameiginlegu hlutrunu tveggja strengja. Lengsta sameiginlega hlutruna strengjanna inniheldur einmitt þá stafi sem við getum notað til að stytta nafn kettlingsins. Við getum fundið lengstu sameiginlegu hlutrununa með tvívíðri kvikri bestun í $\mathcal{O}(n \cdot m)$ tíma ef n og m eru lengdir strengjanna. Við smíðum svo lausnina með því að taka þá stafi sem koma fyrir í strengjunum tveimur áður en fyrsti stafurinn í lengstu sameiginlegu hlutrununni birtist og setja fremst í lausnina ásamt fyrsta stafnum í lengstu sameiginlegu hlutruninni. Við höldu þessu svo áfram þangað til ekkert er eftir af strengjunum tveimur.

Nafnagift

```
Nafn 1: "zyzxwfxxqf"

Nafn 2: "bjarkixerxsvakaxduglegur"

LCS:

Lausn:
```

Nafnagift

```
Nafn 1: "zyzxwfxxqf"

Nafn 2: "bjarkixerxsvakaxduglegur"

LCS: "xxx"

Lausn:
```

Nafnagift

```
Nafn 1: "zyzxwfxxqf"
            ^  ^^

Nafn 2: "bjarkixerxsvakaxduglegur"
               ^  ^     ^

LCS: "xxx"

Lausn:
```

Nafnagift

```
Nafn 1:    "xwfxxqf"
            ^  ^^

Nafn 2: "bjarkixerxsvakaxduglegur"
               ^  ^     ^

LCS: "xxx"

Lausn: "zyz"
```

Nafnagift

```
Nafn 1:    "xwfxxqf"
            ^  ^^

Nafn 2:       "xerxsvakaxduglegur"
               ^  ^     ^

LCS: "xxx"

Lausn: "zyzbjarki"
```

Nafnagift

```
Nafn 1:     "wfxxqf"
               ^^
Nafn 2:        "erxsvakaxduglegur"
                  ^     ^
LCS: "xxx"

Lausn: "zyzbjarkix"
```

Nafnagift

```
Nafn 1:       "xxqf"
               ^^
Nafn 2:        "erxsvakaxduglegur"
                  ^     ^
LCS: "xxx"

Lausn: "zyzbjarkixwf"
```

Nafnagift

```
Nafn 1:       "xxqf"
               ^^
Nafn 2:          "xsvakaxduglegur"
                  ^     ^
LCS: "xxx"

Lausn: "zyzbjarkixwfer"
```

Nafnagift

```
Nafn 1:         "xqf"
                  ^
Nafn 2:            "svakaxduglegur"
                         ^
LCS: "xxx"

Lausn: "zyzbjarkixwferx"
```

Nafnagift

```
Nafn 1:         "xqf"
                 ^
Nafn 2:                 "xduglegur"
                         ^
LCS: "xxx"

Lausn: "zyzbjarkixwferxsvaka"
```

Nafnagift

```
Nafn 1:         "qf"

Nafn 2:                 "duglegur"

LCS: "xxx"

Lausn: "zyzbjarkixwferxsvakax"
```

Nafnagift

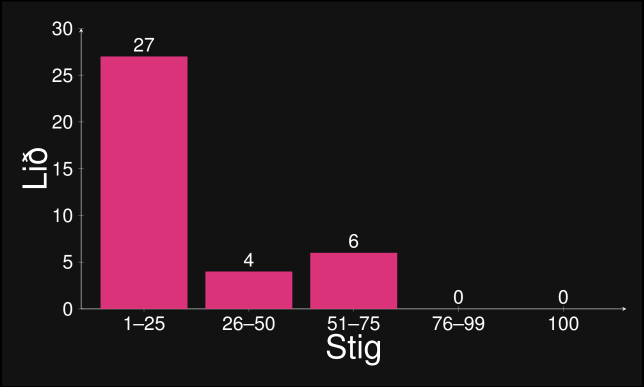
```
Nafn 1:

Nafn 2:                 "duglegur"

LCS: "xxx"

Lausn: "zyzbjarkixwferxsvakaxqf"
```

Nafnagift

```
Nafn 1:

Nafn 2:

LCS: "xxx"

Lausn: "zyzbjarkixwferxsvakaxqfduglegur"
```

Frumtölutalning

	Keppendur	Dómarar
Stysta lausn	?	151
Lengsta lausn	?	151
	Tími	Lið
Fyrsta lausn	?	?



Frumtölutalning

Dæmið

Gefnar heiltölur a og b, hvað eru margar frumtölur á milli a og b?

Frumtölutalning

Dæmið

Gefnar heiltölur a og b, hvað eru margar frumtölur á milli a og b?

Stigahópar

- Litlar tölur: $a, b \leq 10^3$

Frumtölutalning

Dæmið

Gefnar heiltölur a og b, hvað eru margar frumtölur á milli a og b?

Stigahópar

- Litlar tölur: $a, b \leq 10^3$
- Stórar tölur en lítið bil: $a, b \leq 10^9$, $b - a \leq 10^3$

Frumtölutalning

Dæmið

Gefnar heiltölur a og b, hvað eru margar frumtölur á milli a og b?

Stigahópar

- Litlar tölur: $a, b \leq 10^3$
- Stórar tölur en lítið bil: $a, b \leq 10^9$, $b - a \leq 10^3$
- Mjög stórar tölur en lítið bil: $a, b \leq 10^{18}$, $b - a \leq 10^5$

Frumtölutalning

Dæmið

Gefnar heiltölur a og b, hvað eru margar frumtölur á milli a og b?

Stigahópar

- Litlar tölur: $a, b \leq 10^3$
- Stórar tölur en lítið bil: $a, b \leq 10^9$, $b - a \leq 10^3$
- Mjög stórar tölur en lítið bil: $a, b \leq 10^{18}$, $b - a \leq 10^5$
- Frekar stórar tölur og stórt bil: $a, b \leq 10^{15}$, $b - a \leq 10^7$

Frumtölutalning

Dæmið

Gefnar heiltölur a og b, hvað eru margar frumtölur á milli a og b?

Stigahópar

- Litlar tölur: $a, b \leq 10^3$
- Stórar tölur en lítið bil: $a, b \leq 10^9$, $b - a \leq 10^3$
- Mjög stórar tölur en lítið bil: $a, b \leq 10^{18}$, $b - a \leq 10^5$
- Frekar stórar tölur og stórt bil: $a, b \leq 10^{15}$, $b - a \leq 10^7$
- Nokkuð stórar tölur og mjög stórt bil: $a, b \leq 10^{11}$

Frumtölutalning

Dæmið

Gefnar heiltölur a og b, hvað eru margar frumtölur á milli a og b?

Stigahópar

- Litlar tölur: $a, b \leq 10^3$
- Stórar tölur en lítið bil: $a, b \leq 10^9$, $b - a \leq 10^3$
- Mjög stórar tölur en lítið bil: $a, b \leq 10^{18}$, $b - a \leq 10^5$
- Frekar stórar tölur og stórt bil: $a, b \leq 10^{15}$, $b - a \leq 10^7$
- Nokkuð stórar tölur og mjög stórt bil: $a, b \leq 10^{11}$
- Gætum þurft að sameina mismunandi reiknirit til að ná öllum hópunum

Frumtölutalning

Lítil bil

- Skoðum hverja einustu tölu n á bilinu

Frumtölutalning

Lítil bil

- Skoðum hverja einustu tölu n á bilinu
- Athugum hvort n sé frumtala

Frumtölutalning

Lítil bil

- Skoðum hverja einustu tölu n á bilinu
- Athugum hvort n sé frumtala
  - Athugum hvort n deilir einhverja af tölunum $2, 3, \ldots, n-1$

Frumtölutalning

Lítil bil

- Skoðum hverja einustu tölu n á bilinu
- Athugum hvort n sé frumtala
  - Athugum hvort n deilir einhverja af tölunum $2, 3, \ldots, n-1$
  - Nóg að athuga $2, 3, \ldots, \sqrt{n}$
    - Ef d er deilir n, þá er n/d líka deilir

Frumtölutalning

Lítil bil

- Skoðum hverja einustu tölu n á bilinu
- Athugum hvort n sé frumtala
  - Athugum hvort n deilir einhverja af tölunum $2, 3, \ldots, n-1$
  - Nóg að athuga $2, 3, \ldots, \sqrt{n}$
    - Ef d er deilir n, þá er n/d líka deilir
  - Fyrir mjög stór n, notum aðferð Miller-Rabin

Frumtölutalning

Stór bil

- Höfum ekki tíma til að skoða hverja tölu fyrir sig

Frumtölutalning

Stór bil

- Höfum ekki tíma til að skoða hverja tölu fyrir sig
- Notum “sigtisaðferð”

Frumtölutalning

Stór bil

- Höfum ekki tíma til að skoða hverja tölu fyrir sig
- Notum “sigtisaðferð”

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Frumtala	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Frumtölutalning

Stór bil

- Höfum ekki tíma til að skoða hverja tölu fyrir sig
- Notum "sigtisaðferð"

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Frumtala	0	1	1	0	1	0	1	0	1	0

Frumtölutalning

Stór bil

- Höfum ekki tíma til að skoða hverja tölu fyrir sig
- Notum “sigtisaðferð”

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Frumtala	0	1	1	0	1	0	1	0	0	0

Frumtölutalning

Stór bil

- Höfum ekki tíma til að skoða hverja tölu fyrir sig
- Notum “sigtisaðferð”

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Frumtala	0	1	1	0	1	0	1	0	0	0

- Nóg að halda bara utan um tölurnar á bilinu a til b

Frumtölutalning

Stór bil

- Höfum ekki tíma til að skoða hverja tölu fyrir sig
- Notum “sigtisaðferð”

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Frumtala	0	1	1	0	1	0	1	0	0	0

- Nóg að halda bara utan um tölurnar á bilinu a til b
- Nóg að gera þetta bara fyrir deila upp að $\sqrt{b}$

Frumtölutalning

Síðasti hópurinn: $a, b \leq 10^{11}$

Frumtölutalning

Síðasti hópurinn: $a, b \leq 10^{11}$

- Skiptum bilinu upp í 10 000 smærri bil af stærð 10^7

Frumtölutalning

Síðasti hópurinn: $a, b \leq 10^{11}$

- Skiptum bilinu upp í 10 000 smærri bil af stærð 10^7
- Forreiknum fjölda frumtala á hverju bili með sigtisaðferð

Frumtölutalning

Síðasti hópurinn: $a, b \leq 10^{11}$

- Skiptum bilinu upp í 10 000 smærri bil af stærð 10^7
- Forreiknum fjölda frumtala á hverju bili með sigtisaðferð
- Geymum svörin fyrir þessi bil í fylki í lausninni okkar

Frumtölutalning

Síðasti hópurinn: $a, b \leq 10^{11}$

- Skiptum bilinu upp í 10 000 smærri bil af stærð 10^7
- Forreiknum fjölda frumtala á hverju bili með sigtisaðferð
- Geymum svörin fyrir þessi bil í fylki í lausninni okkar
- Notum fylkið til að hoppa hratt yfir stór bil

Frumtölutalning

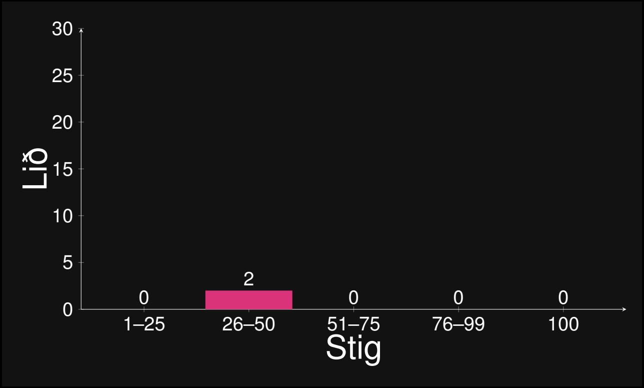
Síðasti hópurinn: $a, b \leq 10^{11}$

- Skiptum bilinu upp í 10 000 smærri bil af stærð 10^7
- Forreiknum fjölda frumtala á hverju bili með sigtisaðferð
- Geymum svörin fyrir þessi bil í fylki í lausninni okkar
- Notum fylkið til að hoppa hratt yfir stór bil

- Eða nota aðferð Meissel-Lehmer

Teningakast

	Keppendur	Dómarar
Stysta lausn	?	51
Lengsta lausn	?	51
	Tími	**Lið**
Fyrsta lausn	?	?



Teningakast

Dæmið

Þú færð uppskrift að teningakasti og gefna útkomu. Er þetta gildur möguleiki?

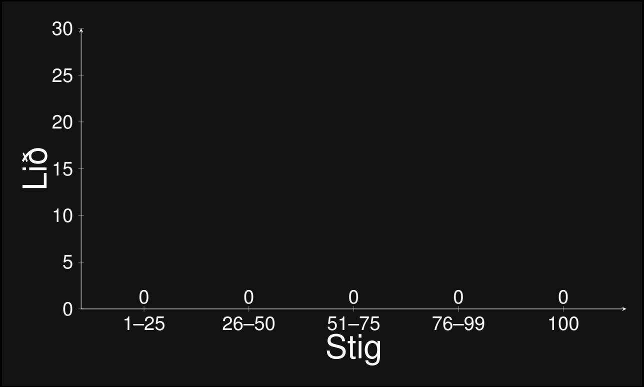
Teningakast

Lausn

Fyrst þarf að athuga hvort kastið sé of lágt eða hátt. Til dæmis er ekki hægt að fá 1 eða 13 á `2d6` því hæsta útkoman er 12 og minnsta 2. Ef einhver teningur með `!` kemur fyrir með + fyrir framan er engin hæsta tala og svarið getur verið hversu hátt sem vera skal. Ef það er − fyrir framan er engin minnsta tala. Fyrir utan þetta er aðeins eitt sértilfelli. Ef aðeins er einn `!` teningur og fastar í inntaki er ekki hægt að fá margfeldi af hliðarfjölda þess tenings. Til dæmis er hægt að fá 7 og 9 á `1d4!` en ekki 8. Athuga að í þessu samhengi telst teningur með eina hlið sem fasti því það fæst alltaf sama útkoma.

Teningasafn

	Keppendur	Dómarar
Stysta lausn	?	31
Lengsta lausn	?	31
	Tími	**Lið**
Fyrsta lausn	?	?



Teningasafn

Dæmið

Skila á $1^k + 2^k + \cdots + n^k$ mátað við $10^9 + 7$.

Teningasafn

Lausn

Fyrir minnsta stigaflokkinn dugar að reikna þetta beint. Athugum hins vegar að taka þarf afganginn með $10^9 + 7$ jafn óðum því n^k getur verið allt of stórt annars. Í python fæst þá TLE en í C/C++ fæst overflow. Fyrir næsta stigaflokk er $k \leq 3$. Þegar $k = 1$ er verið að reikna $1 + 2 + \cdots + n$. Þekkt er að þetta er jafnt $n(n+1)/2$. Eins fyrir $k = 2$ er svarið $n(n+1)(2n+1)/6$ og fyrir $k = 3$ er svarið $n^2(n+1)^2/4$.

Lausn

Fyrir almenn k er til almenn formúla eins og þær á undan. Þetta kallast jafna Faulhaber. Hún segir

$$\sum_{i=1}^{n} i^k = \frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^{k} \binom{k+1}{i} B_i n^{k+1-i}$$

þar sem B_i er i-ta Bernoulli talan. Reikna má þær út með formúlunni

$$B_n = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \frac{B_k}{n-k+1}$$

og $B_0 = 1$. Byrja þarf þá á því að reikna út fyrstu k Bernoulli-tölurnar í $\mathcal{O}(k^2)$ tíma og svo nota jöfnu Faulhaber til að reikna út svarið $\mathcal{O}(k)$ tíma. Heildarkeyrslutími er því $\mathcal{O}(k^2)$.

Skemmtileg tölfræði

- Minnsti fjöldi lína sem þarf til að leysa öll dæmi í Alfa: 780
- Fjöldi committa í Git repositoryinu okkar: 155
- Heildarfjöldi lína í öllum skrám sem við koma verkefnunum: 47381232

FORRITUNARKEPPNI FRAMHALDSSKÓLANNA 20 / 21

Verðlaunaafhending

Nafnaverðlaunin

Uppáhalds liðið mitt

Flottasta þemað

The PowerPuff girls

Úrslit

Delta

Beta

Úrslit

Alfa

Takk fyrir okkur!