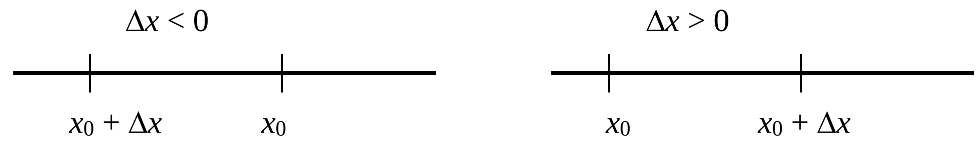
7. Derivace funkce

Derivace funkce patří mezi nejpoužívanější pojmy matematické analýzy. Derivace vyjadřuje rychlost změny a stojí proto i v základu četného praktického použití matematické analýzy.

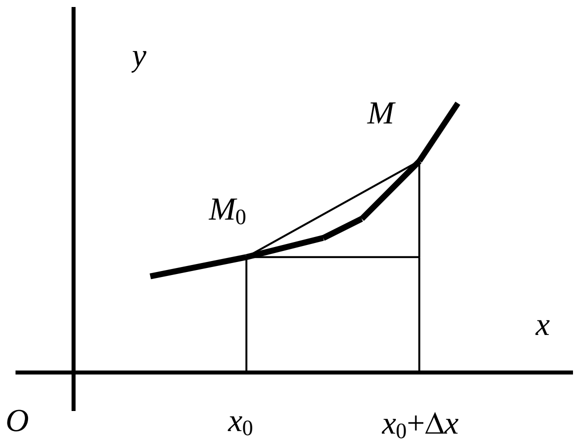
7.1. Pojem derivace funkce

Mějme funkci f, která je definována v nějakém okolí $U(x_0)$ bodu x_0 . Postoupíme-li z bodu x_0 o nějaké Δx (Δx je *přírůstek nezávisle proměnné*) , dostaneme novou hodnotu nezávisle proměnné $x_0 + \Delta x$ $(\in U(x_0))$; pro $\Delta x < 0$ je tato hodnota vlevo a pro $\Delta x > 0$ je vpravo od x_0 .



obr. 7.1.1.

Funkční hodnota se přitom změní z hodnoty $f(x_0)$ na hodnotu $f(x_0 + \Delta x)$ o rozdíl $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ (Δy je tzv. *přírůstek funkce*). Podíl $\Delta y/\Delta x$ je tzv. *diferenciální podíl*; jeho geometrickým významem je směrnice sečny ke grafu funkce, tj. tg α, kde α je úhel, který svírá sečna M_0M s osou x.



Obr. 7.1.2.

Úloha 7.1.1. Doplňte do obr. 7.1.2 označení: α, Δx, Δy.

Pro spojitou funkci f platí $\Delta x \to 0 \Rightarrow \Delta y \to 0$, takže pro $\Delta x \to 0$ je diferenciální podíl $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ výraz typu $\left[\dfrac{0}{0}\right]$.

D: Říkáme, že ***funkce f má v bodě x_0 derivaci***, právě když je f definována na nějakém okolí bodu x_0 a existuje (vlastní) limita

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Tuto limitu nazýváme ***derivace funkce f v bodě x_0*** a značíme ji $f'(x_0)$.

Derivace v bodě je tedy nějaké číslo.

Geometrický význam derivace funkce v bodě: $f'(x_0)$ znamená směrnici tečny grafu funkce v bodě M_0, tj. tg φ, kde φ je úhel který svírá tečna v bodě M_0 s osou x.

Úloha 7.1.2. Načrtněte dle obr. 7.1.2 obrázek, v němž vyznačíte geometrický význam derivace funkce v bodě.

Fyzikální význam derivace v bodě: Je-li zákon dráhy $s = s(t)$, pak diferenciální podíl $\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ znamená průměrnou rychlost a $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta s}{\Delta t} = v(t)$ znamená okamžitou rychlost.

Úloha 7.1.3. Podle definice vypočtěte derivaci funkce $y = x^2$ v bodě $x_0 = 3$.

Jestliže v definici derivace nahradíme limitu jednostrannou limitou, dostaneme definice jednostranných derivací (derivace zleva, zprava), které označujeme $f'(x_0-)$ a $f'(x_0+)$. Je-li $f'(x_0) = k$, pak existují obě jednostranné derivace a jsou rovny číslu k; také naopak, existují-li obě jednostranné derivace funkce f v bodě x_0 a rovnají se témuž číslu k, pak existuje derivace funkce f v bodě x_0 a je rovna k, jak plyne z vět o limitách.

Úloha 7.1.4. Vypočtěte obě jednostranné derivace funkce f: $y = |x|$ v bodě $x_0 = 0$.

Z výpočtu plyne, že funkce $y = |x|$ nemá v bodě 0 derivaci.

Jestliže limita diferenciálního podílu $\Delta y/\Delta x$ je pro $\Delta x \to 0$ rovna $+\infty$ nebo $-\infty$, pak mluvíme o nevlastních derivacích (též zleva, zprava). Výrok „existuje derivace“ však bude vždy znamenat „existuje vlastní derivace“.

Úlohy:

7.1.5. Je dána funkce f: $y = \sqrt{1-x^2}$. Ověřte, že $f'(1-) = +\infty$.

7.1.6. Určete derivaci funkce $y = x^2$ v bodě x.

Derivace jako funkce

D: Má-li funkce f derivaci v každém bodě x nějaké množiny M, říkáme, že ***má derivaci na množině M***; značíme ji f' nebo $f'(x)$.

Vidíme, že derivace funkce na množině M je opět funkce. Např. dle úlohy 7.1.6 derivací funkce $y = x^2$ na $\boldsymbol{R}$ je funkce $y = 2x$. Chceme-li pak zjistit derivaci $f'(x_0)$ v nějakém bodě x_0, stačí do $f'(x)$ dosadit x_0 za x. Např. pro f z úlohy 7.1.6 je $f'(3) = (2x)_{x=3} = 6$ (srovnej s úlohou 7.1.3).

Přehled označení derivací:

v bodě:	*jako funkce:*	*původ označení:*
$f'(x_0)$	y', f', $f'(x)$	Lagrange
$\dfrac{df(x_0)}{dx}$, $\left(\dfrac{df(x)}{dx}\right)_{x=x_0}$	$\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{df(x)}{dx}$, $\dfrac{d}{dx}(f(x))$	Leibniz
$Df(x_0)$	Dy, $Df(x)$	Cauchy

Každé z těchto označení má své výhody. Např. v Leibnizově je dobře vidět, podle které proměnné se derivuje, takže se dobře uplatňuje např. při manipulacích s funkcemi složenými a inverzními; Cauchyovo označování je vhodné např. při řešení diferenciálních rovnic operátorovou metodou; operaci definovanou operátorem *D* nazýváme zpravidla *derivování* (podle dané proměnné). Chceme-li v Lagrangeově označení zdůraznit proměnnou, podle níž se derivuje, napíšeme tuto proměnnou jako index, např. f_u'.

V (vztah mezi derivací a spojitostí): Má-li funkce *f* v bodě x_0 derivaci, je v něm spojitá.

Princip důkazu: dokážeme, že platí $\lim\limits_{\Delta x \to 0}\left(f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)\right) = 0$.

Úlohy: Dle definice derivace stanovte derivace funkcí

7.1.7. $y = x^n$ pro $n \in \boldsymbol{N}$.

7.1.8. $y = \sin x$ [pozor na to, jak se přitom využije spojitosti funkce kosinus].

7.2. Vlastnosti derivací

V (základní vlastnosti derivací): Nechť funkce $u = f(x)$, $v = g(x)$ mají na množině *M* derivace $u' = f'(x)$, $v' = g'(x)$ a $c \in R$. Pak funkce $c \cdot f$, $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$ a pro $g(x) \neq 0$ i f/g mají na *M* derivace a platí:

1° $(c.f)' = c.f'$,

2° $(u + v)' = u' + v'$, $(u - v)' = u' - v'$,

3° $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$,

4° $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.

Důkaz se provádí podle definice derivace, u součinu a podílu se přidá a odečte určitá pomocná funkce, využívá se tu též spojitosti.

Pravidla pro sčítání a pro násobení lze matematickou indukcí rozšířit na *n* členů (činitelů), $n \in \boldsymbol{N}$. Pro násobení tří funkcí tak např. máme $(u.v.w)' = u' \cdot v \cdot w + u \cdot v' \cdot w + u \cdot v \cdot w'$.

V (derivace složené funkce): Nechť existuje složená funkce $f \circ \varphi$ a nechť

1) funkce $u = \varphi(x)$ má v bodě *x* derivaci $\varphi'(x)$,

2) funkce $y = f(u)$ má v odpovídajícím bodě *u* $(=\varphi(x))$ derivaci $f'(u)$.

Pak funkce $f \circ \varphi$ má v bodě *x* derivaci $(f \circ \varphi)'(x) = (f'(u) \cdot \varphi'(x) =)\ (f \circ \varphi)'_u(x) \cdot \varphi'(x)$.

Úloha 7.2.1. Užitím věty o derivaci složené funkce máme najít derivaci funkce $y = \sin^2 x$.

Při označení podle Leibnize má pravidlo pro derivaci složené funkce tvar, jako úprava zlomků: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du}\dfrac{du}{dx}$.

V (derivace inverzní funkce): Nechť *f* je ryze monotónní na intervalu *J* a má tu derivaci *f*'. Pak inverzní funkce f^{-1} má derivaci na $f(J)$ a platí $(f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{f'(y)}$.

Důkaz obou vět se provádí dle definice derivace a používá se faktu, že $\Delta y \to 0 \Leftrightarrow \Delta x \to 0$.

Úloha 7.2.2. Užitím předchozí věty zjistěte derivaci funkce $y = \arcsin x$.

Při označení podle Leibnize má pravidlo pro derivaci inverzní funkce tvar, jako úprava zlomku: $\frac{dy}{dx} = 1 / \frac{dx}{dy}$.

7.3. Derivace elementárních funkcí

V (přehled vzorců pro derivace elementárních funkcí):

1° $(c)' = 0$ (derivace konstanty);

2° $(x^m)' = m\, x^{m-1}$ (platí pro libovolné $m \neq 0$); zvláště $(x)' = 1$;

3° $(a^x)' = a^x.\ln a$; zejména $(e^x)' = e^x$;

4° $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$; zejména $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$;

5° $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$;

6° $(\mathrm{tg}\, x)' = 1 + \mathrm{tg}^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$; $(\mathrm{cotg}\, x)' = -(1 + \mathrm{cotg}^2 x) = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$;

7° $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

8° $(\mathrm{arctg}\, x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$; $(\mathrm{arccotg}\, x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$;

9° $(\mathrm{sh}\, x)' = \mathrm{ch}\, x$; $(\mathrm{ch}\, x)' = \mathrm{sh}\, x$;

10° $(\mathrm{th}\, x)' = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$; $(\mathrm{coth}\, x)' = -\dfrac{1}{\mathrm{sh}^2 x}$;

11° $(\mathrm{argsh}\, x)' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$; $(\mathrm{argth}\, x)' = \dfrac{1}{1-x^2}$.

Důkaz se provádí užitím definice derivace (někde i s užitím speciálních limit), vlastností derivací, vět o derivaci složené funkce a inverzní funkce.

Úloha 7.3.1. Určete derivaci funkce $y = (\cos x)^{\sin x}$ pro x v 1. kvadrantu.

7.4. Diferenciál funkce

Řešíme problém: funkci f v okolí bodu x_0 aproximovat lineární funkcí g, tj. nalézt takovou lineární funkci g, aby platila podmínka

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - g(x)}{x - x_0} = 0.$$

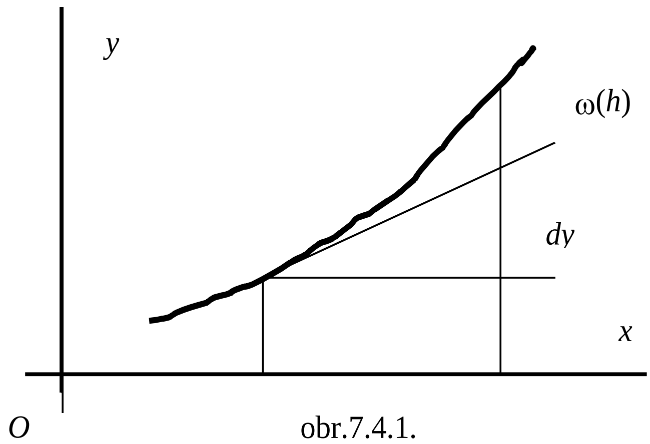
Označme $x = x_0 + h$; zřejmě $g(x) = f(x_0) + ah$, takže čitatel posledního zlomku lze zapsat jako $\omega(h) = f(x_0 + h) - f(x_0) - ah$. Výše uvedenou podmínku lze tak zapsat jako $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\omega(h)}{h} = 0$.

Z definice funkce $\omega(h)$ plyne, že přírůstek funkce $\Delta f(x_0)$ lze vyjádřit ve tvaru

$\Delta f(x_0)\ \ (= f(x_0 + h) - f(x_0)\ ) = ah + \omega(h)$.

D: Lineární část přírůstku funkce, tedy funkci ah, nazýváme ***diferenciál funkce f v bodě x_0***, označujeme jej $df(x_0)$ a funkci, která má diferenciál v bodě x_0, nazýváme ***diferencovatelnou v bodě x_0***. Funkci, která má diferenciál v každém bodě množiny M, nazýváme ***diferencovatelnou na množině M.***

V (existence a jednoznačnost diferenciálu): Funkce f je diferencovatelná v bodě x_0 $\Leftrightarrow$ má v bodě x_0 vlastní derivaci. Diferenciál $df(x_0)$ funkce f v bodě x_0 je pak jednoznačně určen vzorcem $df(x_0) = f'(x_0).h$, kde $h \in R$ je přírůstek nezávisle proměnné.



obr.7.4.1.

Předchozí věta tedy říká, že výroky „f má v bodě x_0 (vlastní) derivaci" a „f je v bodě x_0 diferencovatelná" jsou ekvivalentní, znamenají totéž. (U funkcí více proměnných je tomu jinak.)

Místo h používáme pro přírůstek nezávisle proměnné též označení Δx nebo dx a název *diferenciál nezávisle proměnné*. Je to motivováno skutečností, že diferenciál lineární funkce $y = x$ je $dx = 1.h$ $(= 1.\Delta x)$. Diferenciál funkce pak též zapisujeme $df(x_0) = f'(x_0).dx$. Výše uvedené poznatky nám umožňují definovat diferenciál funkce přímo uvedeným vzorcem.

D: ***Diferenciálem funkce f v bodě x_0*** nazýváme výraz $df(x_0) = f'(x_0).dx$, kde dx $(= \Delta x)$ je konstantní přírůstek (diferenciál) nezávisle proměnné. ***Diferenciálem funkce f na množině M*** nazýváme funkci $dy = f'(x).dx$, kde $x \in M$.

Ze vztahu $dy = f'(x).dx$ vidíme, že Leibnizův symbol $\dfrac{dy}{dx}$ pro derivaci funkce je skutečným zlomkem – podílem diferenciálu funkce a diferenciálu nezávisle proměnné. Také vzorce pro derivaci složené funkce a inverzní funkce (viz 7.2) lze chápat jako operace se skutečnými zlomky.

Úloha 7.4.1. Doplňte obrázek 7.4.1, který znázorňuje geometrický význam diferenciálu funkce jako přibližné hodnoty přírůstku funkce stanovené na tečně ke grafu funkce.

Užití diferenciálu

Užití diferenciálu *v přibližných výpočtech* je založeno na přibližné rovnosti

$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \Delta y \approx f(x_0) + dy$.

Úloha 7.4.2. Pomocí diferenciálu funkce vypočtěte přibližnou hodnotu $\sqrt{0{,}982}$.

[0,991]

Užití diferenciálu *při odhadu chyb* je založeno na tom, že když *h* (tedy *dx*) položíme rovno absolutní chybě měření, udává *df* přibližnou hodnotu absolutní chyby vypočtené hodnoty $y = f(x)$.

Úloha 7.4.3. Počítáme objem koule, jejíž průměr *x* jsme změřili s chybou δx. Určete chybu výsledku.

[$\delta V = \frac{\pi}{2} x^2\, \delta x$, $\frac{\delta V}{V} = 3\frac{\delta x}{x}$: relativní chyba výsledku je tedy rovna trojnásobku relativní chyby měření průměru.]

Diferenciál složené funkce

Mějme funkci $y = f(u)$, kde *u* je nezávisle proměnná. Pak její diferenciál je $df\ (= dy) = f'(u).du$. Určeme nyní df v případě, že u není nezávisle proměnná, ale $u = \varphi(x)$. Pak $df = [f \circ \varphi(x)]'.dx = f'(\varphi(x)).\varphi'(x)\, dx = f'(u).du$, neboť $du = \varphi'(x)\, dx$. Vidíme, že diferenciál funkce je invariantní při přechodu na složenou funkci. (Tuto vlastnost má pouze 1.diferenciál, viz 7.5, a používáme ji zejména při výpočtu neurčitých integrálů, viz 10.).

7.5. Derivace a diferenciály vyšších řádů

Funkce $y = \sin x$ má derivaci $y' = \cos x$. Toto je opět funkce, která má derivaci a platí $(y')' = -\sin x$.

D: Má-li funkce f' v bodě *x* (na množině *M*) derivaci $(f')'$, označíme tuto derivaci f'' a nazveme ***derivace druhého řádu*** (***druhá derivace***) funkce *f*. Podobně ***derivaci n-tého řádu*** (***n-tou derivaci***) $f^{(n)}$ definujeme vztahem $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$.

Označení podle Leibnize: $\frac{d^2 f}{dx^2}$ (čti „d dvě f podle dx na druhou“), $\frac{d^2 y}{dx^2}$, $\frac{d^2}{dx^2}\big(f(x)\big)$, $\frac{d^n y}{dx^n}$, $\left(\frac{d^n f}{dx^n}\right)_{x=x_0}$, apod. Označení podle Cauchyho: $D^2 f$, $D^n y$, apod.

Úlohy:

7.5.1. Určete všechny derivace funkce $y = 3x^2 - 2x - 1$.

7.5.2. Určete 2. derivaci funkce $y = \sin x$ v bodě $x_0 = \pi/2$.

Derivace y'', ..., $y^{(n)}$, $n \in \boldsymbol{N}$, $k \geq 2$, nazýváme *derivace vyšších řádů*. Upotřebíme je např. při vyšetřování průběhu funkce (viz kap. 9) nebo při určování koeficientů Taylorova rozvoje (viz kap.8). Má proto smysl uvažovat o vzorcích, které usnadní výpočet *n*-té derivace.

Některé vzorce pro n-tou derivaci elementárních funkcí

1) Funkce e^x: $\forall n \in N$ je $(e^x)^{(n)} = e^x$; podobně pro funkci a^x máme $(a^x)^{(n)} = a^x(\ln a)^n$.

2) Funkce sin *x*, cos *x*. Platí: $f^{(n+4)} = f^{(n)}$, takže takto lze zjistit derivaci libovolného řádu. Platí též vzorec $(\sin x)^{(n)} = \sin(x + n\frac{\pi}{2})$ a podobný pro $(\cos x)^{(n)}$.

3) Funkce sh x, ch x. Zde $f^{(n+2)} = f^{(n)}$.

4) Funkce x^n , $n \in \boldsymbol{N}$. Zde $(x^n)^{(n)} = n!$, $(x^n)^{(m)} = 0 \ \ \forall m \in \boldsymbol{N}$, $m > n$.

Leibnizovo pravidlo pro n-tou derivaci součinu:

$$(uv)^{(n)} = u^{(n)}v + \binom{n}{1}u^{(n-1)}v' + \binom{n}{2}u^{(n-2)}v''+\ldots+\binom{n}{n-1}u'v^{(n-1)} + uv^{(n)} .$$

Úloha 7.5.3. Určete 120. derivaci funkce $y = x^2.e^x$.

[$e^x(x^2 + 240\,x + 14280)$]

Diferenciály vyšších řádů

Podobně jako u derivací je možno definovat *diferenciál 2. řádu* (*2. diferenciál*) jako diferenciál diferenciálu funkce (diferenciál funkce pak nazýváme 1. diferenciál funkce).

Je-li x nezávisle proměnná, je dx konstantní přírůstek, takže pro funkci $y = f(x)$ je $d^2y = d(dy) = d(f'(x).dx) = (f'(x).dx)'.dx = f''(x).dx^2$. Vidíme, že v Leibnizově označení 2. derivace je $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ skutečný podíl 2. diferenciálu a 2. mocniny dx.

D: *Diferenciál n-tého řádu* (*n-tý diferenciál*) funkce f je definován rekurentním vztahem: $d^nf = d(d^{n-1}f)$.

V: Za předpokladu existence vlastní derivace n-tého řádu funkce $f(x)$, kde x je nezávisle proměnná, je $d^nf = f^{(n)}(x).dx^n$.

Úloha 7.5.4. Odvoďte vzorec pro druhý diferenciál složené funkce.

[$d^2y = f''(u)\,du^2 + f'(u)\,d^2u$, kde $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$]

Z výsledku je vidět, že diferenciály vyšších řádů nejsou invariantní vzhledem ke skládání funkcí (při přechodu na složenou funkci přibývá další člen: $f'(u)\,d^2u$).

7.6. Derivace různých typů funkcí

1) ***Funkce více proměnných***

Derivujeme vždy podle jedné proměnné a ostatní považujeme za konstantu; dostáváme tzv. *parciální derivace* s označením (např. pro funkci $z = f(x,y)$) $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}$, atd.

Úloha 7.6.1. Vypočtěte všechny parciální derivace 2. řádu pro funkci $z = x \sin xy$.

2) ***Funkce dané parametricky***

Nezávisle proměnná x i hodnota funkce y jsou vyjádřeny soustavou $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, kde $t \in (\alpha,\beta)$. Derivaci $\dfrac{dy}{dx}$ určíme pomocí diferenciálů (užitím uvedeného Leibnizova symbolu):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)\,dt}{\varphi'(t)\,dt} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$ (tedy derivace je též funkcí parametru).

Úlohy:

7.6.2. Odvoďte vzorec pro derivaci 2. řádu funkce dané parametricky.

[$\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right) = \dfrac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{(\varphi'(t))^3}$]

7.6.3. Funkce f je dána parametricky: $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$, $t \in \langle 0, \pi\rangle$. Vypočtěte $\dfrac{dy}{dx}$ a $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

3) ***Funkce dané implicitně***

Funkce $y = y(x)$ nechť je dána implicitní rovnicí $f(x,y) = 0$ pro $x \in (a,b)$. Na daném intervalu tedy platí identicky $f(x,y(x)) = 0$. Proto také derivace levé strany podle x je identicky rovna nule, tj. $\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{dy}{dx} = 0$ a z toho vypočteme $\dfrac{dy}{dx}$. Derivaci $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ vypočteme, když tuto rovnost znovu derivujeme podle x s tím, že $y = y(x)$.

Úloha 7.6.4. Vypočtěte 1. a 2. derivace funkce dané implicitní rovnicí $x^2 + y^2 - 25 = 0$.

[$y' = -\dfrac{x}{y}$, $y'' = -\dfrac{x^2 + y^2}{y^3}$]

4) ***Funkce dané graficky***

Mějme funkci f danou na intervalu J „hladkým“ grafem, cílem je nalezení grafu derivace. Zpravidla lze použít tento postup: Na J zvolíme přiměřeně „hustou“ množinu M bodů, do níž zahrneme zejména body, v nichž má funkce extrém nebo inflexi (viz kap.9). Dále sestrojíme bod $T[-1;0]$. Pro každý bod $x_i \in M$ pak:

– sestrojíme přímku $x = x_i$ (na níž pak – po jejím zjištění – vyznačíme hodnotu derivace funkce v bodě x_i) a její průsečík A_i s grafem funkce f;

– v bodě A_i sestrojíme tečnu t_i ke grafu funkce f;

– bodem T s ní vedeme rovnoběžku $t'_i \parallel t_i$ a stanovíme průsečík B'_i přímky t'_i s osou y; velikost orientované úsečky OB' je hodnotou $f'(x_i)$;

– úsečku OB' přeneseme na přímku $x = x_i$ od bodu x_i (ležícího na ose x) a dostaneme bod B grafu derivace.

Úloha 7.6.5. Popsaný postup grafického zjištění derivace funkce použijte na funkci na obr. 7.6.1.

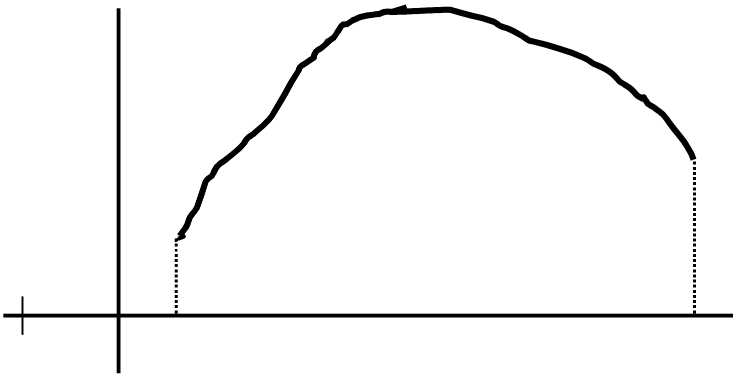
5) ***Funkce dané tabulkou***

Uvažujme tři po sobě jdoucí tabulkové hodnoty funkce f *v bodech* x_{-1}, x_0, x_1. Derivaci zprava $Df(x_0+)$ nahradíme „pravým diferenciálním podílem“ $\delta f(x_0+)$, derivaci zleva $Df(x_0-)$ „levým diferenciálním podílem“ $\delta f(x_0-)$ a derivaci $Df(x_0\ )$ aritmetickým průměrem hodnot “ $\delta f(x_0-)$ a $\delta f(x_0+)$, tedy

$$\delta f(x_0-) = \frac{f(x_0)-f(x_{-1})}{x_0-x_{-1}},\ \delta f(x_0+) = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0},\ Df(x_0) = \frac{1}{2}(\delta f(x_0-) + \delta f(x_0+)).$$

Úloha 7.6.6. Funkce f je dána tabulkou $f(3,7) = 50,653$, $f(3,8) = 54,872$, $f(3,9) = 59,319$. Vypočtěte derivaci $f'(3,8)$.

[$\delta f(3,8-) = 42,19$, $\delta f(3,8+) = 44,47$, $Df(3,8) = 43,33$; pro kontrolu: platí $f(x) = x^3$, takže $f'(3,8) = 43,32$, chyba výpočtu je menší než 0,03 %]



obr.7.6.1.

- * -