8. Základní věty diferenciálního počtu

8.1. Úvod

V (Fermatova): Nechť funkce f je definována na M a nabývá v některém vnitřním bodě $x_0 \in M$ své největší nebo nejmenší hodnoty. Má-li f v bodě x_0 derivaci, pak $f'(x_0) = 0$.

Princip důkazu: Uvažujeme znaménko podílu $d(x) = \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ v levém a pravém okolí bodu x_0, v němž nabývá své největší (nejmenší) hodnoty. Z věty o limitě nerovnosti pak plyne $f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} d(x) = 0$. □

Fermatovu větu lze vztáhnout na lokální extrém a jeho okolí, tato věta má tedy lokální charakter a lze ji formulovat takto: má-li funkce f v bodě x_0 lokální extrém a má v něm derivaci, pak se tato derivace rovná nule. Tedy:

V: Nutnou podmínkou existence lokálního extrému funkce f v bodě x_0 je, že v něm derivace $f'(x_0)$ buď neexistuje nebo je rovna nule.

Pro diferencovatelnou funkci f je nutnou podmínkou rovnost $f'(x_0) = 0$.

8.2. Věty o střední hodnotě

Uvedeme zde trojici vět (Rolleova, Lagrangeova, Cauchyova), které jsou obvykle nazývány větami o střední hodnotě diferenciálního počtu. Jádrem je věta Lagrangeova.

V (Rolleova): Nechť funkce f
1) je spojitá na intervalu $\langle a,b\rangle$,
2) má derivaci na intervalu (a,b),
3) splňuje rovnost $f(a) = f(b)$.
Pak v intervalu (a,b) existuje bod ξ tak, že $f'(\xi) = 0$.

Důkaz: Podle 2.Weierstrassovy věty nabývá funkce f v nějakém bodě $c_1 \in \langle a,b\rangle$ své nejmenší hodnoty a v nějakém bodě $c_2 \in \langle a,b\rangle$ své největší hodnoty. Kdyby c_1 i c_2 byly oba krajními body intervalu $\langle a,b\rangle$, platilo by $f(x) = konst.$, takže za ξ bychom mohli vzít libovolný bod intervalu (a,b). Je-li jeden z bodů c_1, c_2 vnitřním bodem intervalu (a,b) (označme jej c), pak tvrzení plyne z Fermatovy věty, kde $\xi = c$. □

Takových bodů, v nichž je derivace funkce f rovna 0, může být i více; např. funkce $\sin x$ na $\langle 0,2\pi\rangle$ splňuje předpoklady Rolleovy věty a její derivace je nulová v bodech $\frac{\pi}{2}$ a $\frac{3\pi}{2}$.

Úlohy:

8.2.1. Proveďte grafickou ilustraci Rolleovy věty.

8.2.2. Formou protipříkladů ukažte, že všechny tři předpoklady Rolleovy věty jsou nutné. Uveďte tedy příklady tří funkcí f_1, f_2, f_3, pro něž neplatí tvrzení Rolleovy věty, a to tak, že
1) funkce f_1 je nespojitá v jediném bodě intervalu $\langle a,b\rangle$, ale předpoklady 2 a 3 jsou splněny;
2) funkce f_2 nemá derivaci v jediném bodě intervalu (a,b), ale předpoklady 1 a 3 jsou splněny;
3) pro funkci f_3 platí $f_3(a) \neq f_3(b)$, ale předpoklady 1 a 2 jsou splněny.

V (Lagrangeova): Nechť funkce f

1) je spojitá na intervalu $\langle a,b \rangle$,

2) má derivaci na intervalu (a,b),

Pak v intervalu (a,b) existuje bod ξ tak, že platí $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi)$.

Důkaz: Zavedeme pomocnou funkci $F(x) = f(x) - f(a) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$ a ověříme, že jsou pro ni splněny předpoklady Rolleovy věty. Z tvrzení Rolleovy věty pro funkci F pak plyne tvrzení věty Lagrangeovy. □

Úlohy

8.2.3. Proveďte grafickou ilustraci Lagrangeovy věty.

8.2.4. Formou protipříkladů (dle 8.2.2) ukažte, že oba předpoklady Lagrangeovy věty jsou nutné.

Lagrangeova věta se používá v různých tvarech; některé uvedeme.

Položíme-li $a = x_0$, $b = x_0 + \Delta x$ a označíme-li θ číslo z intervalu $(0,1)$, lze tvrzení upravit takto: Pak existuje $\theta \in (0,1)$ tak, že platí $f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + f'(x_0 + \theta\, \Delta x) \cdot \Delta x$.

Označíme-li $x = x_0 + \Delta x$, lze vztah z Lagrangeovy věty zapsat ve tvaru
$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) \cdot f'(x_0 + \theta\,(x - x_0))$.

Jiný zápis: $\Delta y = f'(x_0 + \theta\, \Delta x) \cdot \Delta x$, ukazuje, proč se Lagrangeově větě říká též *věta o přírůstku funkce.*

Lagrangeova věta má četné důsledky, z nichž některé lze posuzovat jako samostatné a významné výsledky matematické analýzy (viz 8.3).

V (Cauchyho věta, zvaná též *zobecněná věta o střední hodnotě*): Nechť funkce f, g

1) jsou spojité na intervalu $\langle a,b \rangle$,

2) mají derivace na intervalu (a,b),

3) $g'(x) \neq 0$ na intervalu (a,b).

Pak v intervalu (a,b) existuje bod ξ tak, že platí $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$.

Důkaz: Předně $g(a) \neq g(b)$, neboť jinak by podle Rolleovy věty existoval bod $\xi_r \in (a,b)$ tak, že by $g'(\xi_r) = 0$, což by bylo ve sporu s předpokladem 3 . Zavedeme pomocnou funkci

$$F(x) = [f(b) - f(a)] \cdot [g(x) - g(a)] - [f(x) - f(a)] \cdot [g(b) - g(a)]$$

a ověříme, že jsou pro F na $\langle a,b \rangle$ splněny předpoklady Rolleovy věty. V (a,b) tedy existuje ξ tak, že $F'(\xi) = 0$, tedy $[f(b) - f(a)] \cdot g'(\xi) - f'(\xi) \cdot [g(b) - g(a)] = 0$, z čehož plyne tvrzení. □

Cauchyova věta se používá např. k důkazu l'Hospitalova pravidla (viz 8.3).

Všimněme si ještě vztahu uvedených tří vět o střední hodnotě: implikace (R) $\Rightarrow$ (L), (R) $\Rightarrow$ (C) znázorňují, že pomocí Rolleovy věty jsme dokázali zbývající dvě. Avšak také je (L) $\Rightarrow$ (R), neboť tvrzení Rolleovy věty lze chápat jako zvláštní případ tvrzení věty Lagrangeovy, když platí $f(a) = f(b)$. Stejně tak lze ukázat, že Lagrangeova věta je zvláštním případem věty Cauchyovy, tj. (C) $\Rightarrow$ (L), jestliže $g(x) = x$. Jsou tedy všechny tři věty o střední hodnotě navzájem ekvivalentní. □

8.3. Některé důsledky vět o střední hodnotě

Nejprve uvedeme dva typické důsledky vět o střední hodnotě; na jednom je založen pojem neurčitého integrálu, druhý umožňuje jednoduchý výpočet limit funkcí.

V (o konstantní funkci): Funkce f je na intervalu (a,b) konstantní $\Leftrightarrow$ má na (a,b) derivaci a $\forall x \in (a,b)$ platí $f'(x) = 0$.

Důkaz: Z definice derivace plyne, že funkce konstantní na (a,b) má na (a,b) derivaci rovnu 0 (viz 7). Naopak nechť na (a,b) je $f'(x) = 0$. Dokážeme, že pro každé dva body $x_1, x_2 \in (a,b)$ platí $f(x_1) = f(x_2)$. Zvolme označení tak, aby $x_1 < x_2$. Pak na intervalu $\langle x_1, x_2\rangle$ jsou splněny předpoklady Lagrangeovy věty, tedy existuje bod $\xi \in \langle x_1, x_2\rangle$ tak, že je

$$f(x_2) = f(x_1) + (x_2 - x_1) \cdot f'(\xi).$$

Rovnost $f(x_2) = f(x_1)$ plyne z toho, že derivace ve výše uvedeném vztahu je nulová. □

Důsledek: Mají-li dvě funkce f, g na (a,b) stejné derivace, tj. $f'(x) = g'(x)$, pak se na tomto intervalu liší jen o konstantu, tj. $\exists C \in R$ tak, že na (a,b) je $f(x) = g(x) + C$.

Tímto důsledkem jsou vytvořeny předpoklady k definici pojmu neurčitý integrál. Tedy primitivní funkcí např. k funkci $\cos x$ je nejen funkce $\sin x$, ale také každá funkce tvaru $\sin x + C$, kde $C \in \boldsymbol{R}$. *Neurčitý integrál* jako množina všech primitivních funkcí k funkci f je podle důsledku Lagrangeovy věty množinou všech funkcí tvaru $F(x) + C$, kde F je jedna z primitivních funkcí k funkci f a C je libovolná (integrační) konstanta (viz 11).

Následující věta se týká výpočtu limit typu $\left[\frac{0}{0}\right]$. Podobnou větu lze vyslovit i pro limity typu $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ a obě pak použít k výpočtu několika dalších typů limit.

V (L'Hospitalovo pravidlo): Nechť
1° funkce f, g mají derivace v $P(a)$, kde $a \in \boldsymbol{R}^*$,
2° $\lim_{x\to a} f(x) = 0$, $\lim_{x\to a} g(x) = 0$,
3° existuje vlastní nebo nevlastní $\lim_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = K$.
Pak existuje i $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ a rovná se K.

Princip důkazu (pro $a \in \boldsymbol{R}$, $x \to a+$): Podle 2° lze doplnit definici funkcí f, g tak, aby byly spojité v $U(a)$, když položíme $f(a) = g(a) = 0$. Existuje pak interval $\langle a, b\rangle \subset U(a+)$ tak, že obě funkce f, g jsou na něm spojité a na (a, b) mají derivaci. Předpoklady Cauchyovy věty jsou tak splněny nejen na intervalu $\langle a, b\rangle$, ale na každém podintervalu $\langle a, x\rangle \subset \langle a, b\rangle$. Podle Cauchyovy věty pak na každém intervalu $\langle a, x\rangle$ existuje bod ξ tak, že

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Pro $x \to a+$ je též $\xi \to a+$. Podle předpokladu existuje $\lim_{\xi\to a+} \dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = K$ a vzhledem k rovnosti $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$ má stejnou limitu pro $x \to a+$ i podíl na její levé straně. □

Úlohy:

8.3.1. Vypočtěte $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\operatorname{arctg}(x-2)}{x^2-4}$. $\left[\dfrac{1}{4}\right]$

8.3.2. Vypočtěte $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x-1}$. [1]

8.3.3. Vypočtěte $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{6x^3+5x+4}{3x^3+2x^2+1}$. [2]

Z důkazu věty je zřejmé, že l'Hospitalovo pravidlo platí i pro jednostranné limity, což už jsme měli i v úloze 8.3.3.

Úloha 8.3.4. Vypočtěte $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\ln x}{\operatorname{cotg} x}$. [0]

L'Hospitalovo pravidlo neplatí naopak a to v tomto smyslu: z existence limity podílu funkcí neplyne existence limity podílu jejich derivací nebo, což je totéž, z neexistence limity podílu derivací ještě neplyne neexistence limity podílu funkcí. Např. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin|x|}{|x|}=1$.

Někdy je potřebné použít l'Hospitalovo pravidlo i vícekrát, případně provádět při výpočtu úpravy, které postup zjednoduší.

Úloha 8.3.5. Vypočtěte $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{\sin^2 x}$. $\left[\dfrac{9}{2}\right]$

Při výpočtu limit typu $[0\cdot\infty]$ součinu funkcí $f\cdot g$ upravíme součin funkcí na podíl $f/(1/g)$ nebo naopak $g/(1/f)$ tak, aby to bylo vhodné pro použití l'Hospitalova pravidla (tedy např. funkci logaritmickou je zpravidla nejvhodnější nechat v čitateli).

Úloha 8.3.6. Vypočtěte $\lim\limits_{x\to 0+} x\ln x$. [0]

Počítáme-li limitu typu $[\infty-\infty]$ rozdílu funkcí $f-g$, upravíme rozdíl funkcí na podíl: $f-g = 1/(1/f)-1/(1/g) = (1/g-1/f)\,/\,(1/fg)$.

Úloha 8.3.7. Vypočtěte $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{cotg}^2 x-\dfrac{1}{x^2}\right)$.

[$-\dfrac{2}{3}$; před použitím l'Hospitalova pravidla nejprve získaný zlomek vhodně rozložíme na součin funkcí.]

U limit typu $[0^0]$, $[\infty^0]$ a $[1^\infty]$ pro funkce $f^{\,g}$ postupujeme tak, že tuto funkci nejprve upravíme na tvar $e^{g\cdot\ln f(x)}$, limitu přeneseme do exponentu (podle věty o limitě složené funkce) a v exponentu dostaneme limitu typu $[0\cdot\infty]$.

Úloha 8.3.8. Vypočtěte $\lim\limits_{x\to 0+} x^{\sin x}$. [1]

8.4. Taylorův vzorec

Mějme funkci f, $U(x_0)\subset D(f)$; h nechť je přírůstek nezávisle proměnné a nechť platí $f(x_0+h)\in U(x_0)$. Hodnotu $f(x_0+h)$ dovedeme vyjádřit přesně pomocí Lagrangeovy věty

$f(x_0 + h) = f(x_0) + h.\, f'(x_0 + \theta h)$,

kde $\theta \in (0, 1)$, a přibližně užitím diferenciálu

$f(x_0 + h) = f(x_0) + h.\, f'(x_0)$.

1. vzorec je sice přesný, ale na závadu někdy může být (např. při numerických výpočtech), že neznáme θ. Druhý vzorec dává aproximaci funkce f lineární funkcí, což je na jedné straně výhodné pro jednoduchost této aproximace, na druhé straně je lineární aproximace v některých případech nedostatečně přesná. Položme

$f(x_0 + h) = f(x_0) + h.\, f'(x_0) + R(h)$,

kde $R(h)$ je nějaký „zbytek". Platí tedy

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - f'(x_0) = \frac{R(h)}{h}\text{, takže } \lim_{h\to 0}\frac{R(h)}{h} = 0.$$

Zbytek $R(h)$ je tedy „vyššího řádu" než h, „jde k 0 rychleji než h", např. může být typu $a.h^2$.

Chtěli bychom nyní zachovat jednoduchost aproximace hodnoty $f(x_0 + h)$, ale přitom zvýšit přesnost. Můžeme toho dosáhnout tím že $f(x_0 + h)$ aproximujeme mnohočlenem v h stupně n; tento mnohočlen označíme $T_n(h)$. Při vhodném postupu bude zbytek, tedy rozdíl $f(x_0 + h) - T_n(h)$, záviset až na h^{n+1}.

V (Taylorova): Nechť funkce f má v $U(x_0)$ spojité derivace až do řádu $n+1$. Pak pro každé $x \in U(x_0)$ platí (označíme-li $h = x - x_0$) tzv. ***Taylorův vzorec***:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}h + \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n + R_n(h),$$

kde $R_n(h)$, tzv. ***zbytek***, lze psát ve tvaru

Lagrangeově: $R_n(h) = \dfrac{f^{(n+1)}(x_0+\theta h)}{(n+1)!}h^{n+1}$, kde $\theta \in (0,1)$, nebo

Cauchyově: $R_n(h) = \dfrac{f^{(n+1)}(x_0+\bar\theta h)}{n!}(1-\bar\theta)^n h^{n+1}$, kde $\bar\theta \in (0,1)$.

V *důkazu* se používají pomocné funkce a Rolleova věta.

Druhý obvyklý tvar Taylorova vzorce dostaneme po dosazení $h = x - x_0$:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x - x_0),$$

Koeficienty $\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$ se nazývají ***Taylorovy koeficienty***.

Položíme-li $x_0 = 0$, což je např. u elementárních funkcí častý a přirozený požadavek, dostaneme zvláštní případ Taylorova vzorce pro okolí bodu 0, a tento vzorec se někdy nazývá ***Maclaurinův*** (čti mekloren):

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x),$$

Prvních $n+1$ členů na pravé straně Taylorova (Maclaurinova) vzorce tvoří Taylorův polynom $T_n(x)$, takže platí $f(x) = T_n(x) + R_n(x)$. Pokud na nějakém $U(x_0)$ je $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n(x) = 0$. je Taylorův polynom aproximací funkce f. Polynom $T_n(x)$ se také nazývá ***Taylorův*** (***Maclaurinův***) rozvoj funkce f; zde je to rozvoj podle vzorce, ale pracujeme rovněž s rozvojem funkce v mocninnou řadu.

V (přehled Maclaurinových rozvojů některých elementárních funkcí):

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} + R_{2m-1}(x)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^{m-1}\frac{x^{2m}}{(2m)!} + R_{2m}(x)$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{2m-1} + R_{2m-1}(x)$$

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} + R_{2m-1}(x)$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2m}}{(2m)!} + R_{2m}(x)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + R_n(x)$$

$$(1+x)^r = 1 + \binom{r}{1}x + \binom{r}{2}x^2 + \binom{r}{3}x^3 + \ldots + \binom{r}{n}x^n + R_n(x) \quad (\forall r \in \boldsymbol{R})$$

Jestliže zjišťujeme, pro která x platí $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n(x) = 0$, dostaneme, že u funkcí e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$ je to pro $x \in \boldsymbol{R}$, u funkce $\operatorname{arctg} x$ pro $x \in \langle -1, 1\rangle$, u funkce $\ln(1 + x)$ pro $x \in (-1, 1\rangle$ a u funkce $(1 + x)^r$ pro $x \in (-1, 1)$ nebo na intervalu širším v závislosti na r.

Úlohy (na Maclaurinův rozvoj funkcí)

8.4.1. Určete Taylorovy koeficienty rozvojů funkcí uvedených v předchozím přehledu (použitím obecného vzorce).

[V podstatě jde o využití vhodných pravidel pro výpočet derivací vyšších řádů pro zadanou funkci.]

8.4.2. Najděte rozvoj funkcí e^{-x}, $\sin 3x$.

8.4.3. Odvoďte rozvoj funkcí $\dfrac{1}{1+x}$, $\sqrt{1+x}$.

8.4.4. Určete první členy rozvoje funkcí $(x + 1).\operatorname{ch} 2x$, $x.e^{-2x}$ až po členy s x^5.

8.4.5. Zobrazte na grafickém kalkulátoru (nebo na počítači pomocí vhodného SW systému) funkci $y = \cos x$ společně s jejími aproximacemi danými Maclaurinovým rozvojem:

$$f_1(x) = 1,\ \ f_2(x) = 1 - \frac{x^2}{2},\ \ f_3(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24},\ \ f_4(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720}.$$

Sledujte, jak se rozšiřuje interval těch $x \in \boldsymbol{R}$, pro něž $\cos x \approx f_k(x)$, $k = 1, 2, 3, 4$.

8.4.6. Totéž proveďte pro funkce $\sin x$, $\mathrm{ch}\, x$, $\mathrm{sh}\, x$, $\mathrm{arctg}\, x$, případně i pro jiné.

\- * -