

## 13. Nevlastní integrály

### 13.1. Nevlastní integrál vlivem meze

V definici Riemannova integrálu bylo podstatné, že funkce je omezená na uzavřeném intervalu. Pojem Riemannova určitého integrálu však lze rozšířit i na případy, že interval integrace je nekonečný, např.  $\langle a, +\infty \rangle$  nebo že funkce není omezená. Nejprve uvážíme první možnost.

**D:** Je-li funkce  $f$  definována na intervalu  $\langle a, +\infty \rangle$  a je integrace schopná na každém intervalu  $\langle a, K \rangle$ , kde  $K > a$  je reálné číslo, pak  $\lim_{K \rightarrow +\infty} \int_a^K f(x) dx$  označíme  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  a nazveme **nevlastní integrál vlivem meze** z funkce  $f$  na intervalu  $\langle a, +\infty \rangle$ . Je-li uvedená limita vlastní, říkáme, že nevlastní integrál **konverguje** (je *konvergentní*), je-li tato limita nevlastní nebo neexistuje, říkáme, že nevlastní integrál **diverguje** (je *divergentní*).

Definice nevlastního integrálu dává návod i pro jeho výpočet.

**Úlohy:**

**13.1.1.** Vypočtěte  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ .

[  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{K \rightarrow +\infty} \int_1^K \frac{dx}{x^2} = \lim_{K \rightarrow +\infty} \left[ -\frac{1}{x} \right]_{x=1}^K = \lim_{K \rightarrow +\infty} \left( 1 - \frac{1}{K} \right) = 1$ , zadaný integrál konverguje. ]

**13.1.2.** Vypočtěte  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ .

[  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{K \rightarrow +\infty} \int_1^K \frac{dx}{x} = \lim_{K \rightarrow +\infty} [\ln x]_{x=1}^K = \lim_{K \rightarrow +\infty} (\ln K - \ln 1) = +\infty$ , zadaný integrál diverguje. ]

*Geometrická interpretace* pro  $f \geq 0$ : obsah nekonečného obrazce, části jehož hranice leží na přímce  $x = a$ , na ose  $x$  a na grafu funkce  $f$  (načrtněte obrázek!).

**Rozšíření definice:**

Podobně definujeme  $\int_{-\infty}^b f(x) dx$  jako  $\lim_{H \rightarrow -\infty} \int_H^b f(x) dx$  a definujeme též

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$  jako  $\lim_{H \rightarrow -\infty} \lim_{K \rightarrow +\infty} \int_H^K f(x) dx$  (jde o dvojnou limitu). Výpočet této dvojné limity

lze převést na výpočet dvou jednoduchých limit. Nechť  $c$  je libovolné reálné číslo;

pak platí  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^{+\infty} f(x) dx$ .

### Úlohy:

**13.1.3.** Vypočtete  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ .

$$\left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2} + \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{H \rightarrow -\infty} [\arctg x]_{x=H}^0 + \lim_{K \rightarrow +\infty} [\arctg x]_{x=0}^K = \right. \\ \left. = 0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} - 0 = \pi. \right]$$

**13.1.4.** Vypočtete  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x dx}{1+x^2}$ .

$$\left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^0 \frac{x dx}{1+x^2} + \int_0^{+\infty} \frac{x dx}{1+x^2} = \lim_{H \rightarrow -\infty} \left[ \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \right]_{x=H}^0 + \lim_{K \rightarrow +\infty} \left[ \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \right]_{x=0}^K = \right. \\ \left. = 0 - (+\infty) + (+\infty) - 0, \text{ limita neexistuje, tedy daný integrál je divergentní. } \right]$$

Někdy se definuje tzv. **hlavní hodnota nevlastního integrálu**  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$  s označením

v.p.  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ , a to jako  $\lim_{K \rightarrow +\infty} \int_{-K}^K f(x) dx$  (tj. místo dvojné limity jde o limitu jednoduchou, kde  $H = -K$ ). Jestliže existuje vlastní limita, pak říkáme, že daný nevlastní integrál *konverguje ve smyslu hlavní hodnoty*. Písmena v.p. jsou zkratkou pro valeur principal [čti valér přénsipál].

**Úloha 13.1.5.** Vypočtete v.p.  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x dx}{1+x^2}$ .

$$\left[ \text{V.p. } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x dx}{1+x^2} = \lim_{K \rightarrow +\infty} \int_{-K}^K \frac{x dx}{1+x^2} = \frac{1}{2} \lim_{K \rightarrow +\infty} (\ln(1+K^2) - \ln(1+(-K)^2)) = \lim_{K \rightarrow +\infty} \ln \frac{1+K^2}{1+K^2} = \right. \\ \left. = 0. \text{ V úloze 13.1.4. Jsme viděli, že zadaný integrál (dvojná limita) diverguje, ale nyní jsme zjistili, že ve smyslu hlavní hodnoty konverguje.} \right]$$

## 13.2. Nevlastní integrál vlivem funkce

Druhé rozšíření Riemannova integrálu je pro případ, že funkce  $f$  je definována na  $\langle a, b \rangle$ , ale není na tomto intervalu omezená.

**D:** Je-li funkce  $f$  integrace schopná na každém intervalu  $\langle a, s \rangle$ , kde  $a < s < b$ , a není omezená v levém okolí bodu  $b$  (který nazveme *singulární bod*), pak  $\lim_{s \rightarrow b-} \int_a^s f(x) dx$  označíme  $\int_a^b f(x) dx$  a nazveme **nevlastní integrál vlivem funkce** z funkce  $f$  na intervalu  $\langle a, b \rangle$ . Je-li uvedená limita vlastní, říkáme, že nevlastní integrál *konverguje*, je-li tato limita nevlastní nebo neexistuje, říkáme, že nevlastní integrál *diverguje*.

Je třeba dát pozor na to, že ze zápisu integrálu nemusí být hned patrné, zda jde o určitý integrál Riemannův nebo integrál nevlastní.

Podobně, když funkce není omezená v pravém okolí bodu  $a$ , když tedy je bod  $a$  singulární, definujeme nevlastní integrál vlivem funkce na intervalu  $(a, b)$ ; označení integrálu je stejné.

**Úlohy:**

**13.2.1.** Vypočtěte  $I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ .

[ Funkce není omezená v pravém okolí počátku, tj. bod 0 je singulární, je však integrace schopná na každém intervalu  $\langle s, 1 \rangle$ , kde  $s \in (0, 1)$ .

$$I = \lim_{s \rightarrow 0+} \int_s^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{s \rightarrow 0+} [2\sqrt{x}]_{x=s}^1 = \lim_{s \rightarrow 0+} (2 - 2\sqrt{s}) = 2. ]$$

**13.2.2.** Proveďte geometrickou interpretaci příkladu 1.

Je-li na daném intervalu integrace více singulárních bodů, rozdělíme tento interval na podintervaly tak, aby na každém z nich byl singulární bod nejvýše jeden (jako krajní bod), a vyšetřujeme integrály z dané funkce na jednotlivých podintervalech. Jsou-li všechny tyto integrály konvergentní, pak je konvergentní i výchozí integrál a je roven součtu komponent.

### 13.3. Vlastnosti nevlastních integrálů

Oba druhy nevlastních integrálů lze formálně sloučit do vyjádření:  $\int_a^A f(x) dx$ ,

kde  $A$  je (jediný) singulární bod: buď  $A = +\infty$  nebo  $A \in \mathbf{R}$ ,  $A > a$ , přičemž funkce  $f$  není omezená v levém okolí bodu  $A$ .

**V (lineární vlastnosti):** Jsou-li integrály  $\int_a^A f(x) dx$ ,  $\int_a^A g(x) dx$  konvergentní a  $c \in \mathbf{R}$  je libovolné číslo, pak

(1)  $\int_a^A [f(x) + g(x)] dx$  konverguje a je roven součtu integrálů obou komponent,

(2)  $\int_a^A c f(x) dx$  konverguje a rovná se  $c \int_a^A f(x) dx$ .

I některé další vlastnosti Riemannova integrálu se přenášejí na integrály nevlastní. Např.  $\forall p \in \langle a, A \rangle$  platí pro konvergentní integrál

$$\int_a^A f(x) dx = \int_a^p f(x) dx + \int_p^A f(x) dx.$$

### 13.4. Kriteria konvergence nevlastních integrálů

**V** (srovnávací kriterium): Necht'  $0 \leq f(x) \leq g(x)$  na  $\langle a, A \rangle$ , kde  $a < A \leq +\infty$ , funkce  $f, g$  jsou integrace schopné na každém intervalu  $\langle a, s \rangle$ , kde  $s \in (a, A)$ ,  $A$  je (jediný) singulární bod. Pak

(1) z konvergence  $\int_a^A g(x) dx$  plyne konvergence  $\int_a^A f(x) dx$

(2) z divergence  $\int_a^A f(x) dx$  plyne divergence  $\int_a^A g(x) dx$ .

*Princip důkazu:* Pro  $t \in \langle a, A \rangle$  označíme  $F(t) = \int_a^t f(x) dx$ ,  $G(t) = \int_a^t g(x) dx$ . Obě funkce jsou rostoucí a platí  $0 \leq F(t) \leq G(t)$ . Tvrzení pak plynou z definice konvergence a divergence.  $\square$

Z definice konvergence plyne:

**V:**  $\forall c \in \langle a, A \rangle$  platí, že integrály  $\int_a^A f(x) dx$  a  $\int_c^A f(x) dx$  současně konvergují nebo divergují.

Při použití srovnávacího kriteria proto není třeba uvažovat celý interval  $\langle a, A \rangle$ , ale nerovnost mezi funkcemi stačí dokázat jen na jeho části  $\langle c, A \rangle$ .

**V** (o absolutní hodnotě integrálu): Jestliže konverguje  $\int_a^A |f(x)| dx$ , pak konverguje i

$\int_a^A f(x) dx$  a platí  $\left| \int_a^A f(x) dx \right| \leq \int_a^A |f(x)| dx$ .

**Úloha 13.4.1.** Zajímá nás konvergence integrálu  $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx$ .

[ Jelikož  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$  je konvergentní a platí  $|\sin x| \leq 1$ , tj. též  $\left| \frac{\sin x}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2}$ , je také zadaný integrál konvergentní. ]

Nacházíme hlubokou analogii mezi nevlastními integrály a číselnými řadami, založenou nejen na formální podobnosti, ale i na věcných souvislostech, o níž bude více v kapitole 15. Např. stejně jako u číselných řad zavádíme i u nevlastních integrálů pojem absolutní a neabsolutní konvergence.

**D:** Říkáme, že  $\int_a^A f(x) dx$  je *absolutně konvergentní* (konverguje absolutně), právě

když současně s ním konverguje také  $\int_a^A |f(x)| dx$ . V případě, že  $\int_a^A f(x) dx$  konverguje

a  $\int_a^A |f(x)| dx$  diverguje, nazýváme daný nevlastní integrál *neabsolutně konvergentní*.

Nevlastní integrály mohou záviset ještě na parametru. Dostáváme tak nevlastní integrály závislé na parametru, např.

$$I(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y) dx.$$

Pomocí nevlastních integrálů závislých na parametru jsou pro kladné hodnoty argumentů definovány známé funkce Beta a Gama:

$$B(u, v) = \int_0^1 x^{u-1} (1-x)^{v-1} dx, \quad \Gamma(s) = \int_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-x} dx.$$

- \* - .