4. Elementární funkce

4.1. Přehled elementárních funkcí

Jde o pojem spíše historický než matematický. Vymezuje se několik *základních elementárních funkcí* a z nich se pomocí konečného počtu algebraických operací a operací skládání vytvářejí další funkce, jež nazýváme *elementární funkce*. Platí, že s každou funkcí patří do množiny elementárních funkcí vždy i funkce inverzní, pokud ovšem existuje.

Základní elementární funkce:

– funkce *konstantní* ($y = c$);

– funkce *mocninné* ($y = x^r$ pro libovolné $r \in \boldsymbol{R}$, patří sem tedy i odmocniny a také např. nepřímá úměrnost);

– *goniometrické* funkce ($y = \sin x, \cos x, \operatorname{tg} x, \operatorname{cotg} x$) a funkce *cyklometrické* ($y = \arcsin x, \arccos x, \operatorname{arctg} x, \operatorname{arccotg} x$);

– *exponenciální* funkce ($y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$) a funkce *logaritmické* ($y = \log_a x$);

– *hyperbolické* funkce ($y = \operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x, \operatorname{th} x, \operatorname{coth} x$) a funkce *hyperbolometrické* ($y = \operatorname{argsh} x, \operatorname{argch} x, \operatorname{argth} x, \operatorname{argcoth} x$).

Algebraické funkce je název pro elementární funkce, které vzniknou z funkcí konstantních a z funkce $f(x) = x$ užitím operací sčítání, odčítání, násobení, dělení a odmocňování. Pokud nepoužijeme operaci odmocňování, dostaneme algebraické ***funkce racionální***. Algebraické funkce, které nejsou racionální, nazýváme ***iracionální***. Zvláštní případy algebraických funkcí: např. ***celá racionální funkce*** neboli funkce ***polynomická*** (algebraický polynom) a ***lomená racionální funkce***, patří mezi nejvýznamnější funkce studované v matematice.

Elementární funkce, které nejsou algebraické, se obvykle nazývají ***transcendentní***; ze základních elementárních funkcí mezi ně patří funkce exponenciální, logaritmické, goniometrické, cyklometrické, hyperbolické a hyperbolometrické, ale též mocninná funkce s iracionálním exponentem.

Elementární funkce mají velmi rozmanité vlastnosti (např. pokud jde o omezenost, monotónnost, paritu, periodičnost aj.) a proto společné vlastnosti lze formulovat jen na velmi obecné úrovni. (Uvidíme zejména, že elementární funkce jsou spojité ve všech bodech svého definičního oboru a mají derivaci ve všech vnitřních bodech svého definičního oboru. Derivací elementární funkce je opět elementární funkce. Naopak ovšem primitivní funkcí k funkci elementární nemusí být funkce elementární, o tom viz v kap.11.)

Příklady funkcí, které nejsou elementární:

Dirichletova funkce $\chi(x)$, funkce $\operatorname{sgn} x$, funkce $\lfloor\ \rfloor$ „dolní celá část“, funkce $\{\}$ „lomená část“ definovaná vztahem $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$.

Úloha 4.1.1. Znázorněte graficky funkci $y = \{x\}$ a dokažte, že je periodická s periodou 1.

Ani absolutní hodnota není považována za elementární funkci. Elementárními funkcemi nejsou ani jiné funkce definované „po částech“, jako např. funkce

$$y = \begin{cases} -x & \text{pro } x < 0 \\ x^2 & \text{pro } x \geq 0 \end{cases}.$$

(Tuto funkci bychom ovšem mohli nazvat „po částech elementární“).

4.2. Algebraické funkce

Při popisu jednotlivých funkcí nebo druhů funkcí někdy použijeme i některé pojmy, které jsou obsahem až pozdějších kapitol, ale kde určitou úroveň jejich znalosti lze předpokládat, ježto jsou obsahem středoškolského učiva matematiky. Jde tedy o jakési rozšířené zopakování středoškolského učiva.

a) ***Mocniny s přirozeným a celým exponentem***

Mocninu a^n pro $n \in \boldsymbol{N}$ definujeme jako součin n činitelů a. Z této definice ihned plynou vlastnosti mocnin, zejména

$\forall a, b \in \boldsymbol{R}, \forall r, s \in \boldsymbol{N}$:

(1) $a^r . a^s = a^{r+s}$, (4) $(ab)^r = a^r b^r$,

(2) $a^r : a^s = a^{r-s}$ (pokud $a \neq 0$, $r > s$), (5) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^r = \dfrac{a^r}{b^r}$ (pokud $b \neq 0$),

(3) $(a^r)^s = a^{rs}$, (6) $a^r = b^r \Leftrightarrow a = b$ (pokud $a,b > 0$).

K tomu přidejme ještě vlastnosti vyjádřené nerovnostmi

(7) $\forall a, b > 0$: $a^r < b^r \Leftrightarrow a < b$,

(8) $\forall a > 1, r < s \Rightarrow a^r < a^s$; $\forall a \in (0,1), r < s \Rightarrow a^r > a^s$.

Chceme-li rozšířit pojem mocniny rozšířením číselného oboru exponentu, přichází nejprve exponent 0. Mají-li zůstat v platnosti výše uvedené vlastnosti (1) – (5), je třeba podle (2) definovat

$\forall a \neq 0;\ a^0 = 1.$

Vlastnost (2) pak platí pro $r \geq s$ a u všech vlastností se musíme omezit na mocniny s nenulovým základem, neboť 0^0 není definována. Vlastnosti (6) a (7) ovšem pro $r = 0$ neplatí.

Dalším krokem je rozšíření pojmu mocnina pro exponent, jímž je celé číslo. Klíčovou vlastností je opět (2), podle níž se definuje (položíme-li $r = 0$, $s = k$)

$$\forall a \neq 0\ \ \forall k \in Z;\ a^{-k} = \frac{1}{a^k}.$$

Vlastnost (2) pak platí již bez omezení pro $r, s \in \boldsymbol{Z}$ a vlastnost (7) nabude tvaru

(7') $\forall r > 0\ \ \forall a, b > 0$: $a^r < b^r \Leftrightarrow a < b$, $\forall r < 0\ \ \forall a, b > 0 : a^r > b^r \Leftrightarrow a <$ b.

b) ***Odmocniny***

D: Pro každé přirozené číslo n definujeme n-tou odmocninu z nezáporného čísla a jako takové nezáporné číslo x, pro něž platí $x^n = a$. Označení: $x = \sqrt[n]{a}$.

Podle definice tedy $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$, např. $\left(\sqrt{3}\right)^2 = 3$.

Existence n-té odmocniny se zdá být zřejmá. Toto zdání podporují jednoduché příklady jako $\sqrt[3]{8} = 2$, neboť $2^3 = 8$. Jestliže však vyšetřujeme méně zřetelné případy, třeba $\sqrt[3]{\pi}$, je třeba si odpovědět na otázku, zda n-tá odmocnina pro každé $a \in \boldsymbol{R}$, $a \geq 0$ skutečně existuje a zda je to jediné číslo.

V (o existenci a jednoznačnosti n-té odmocniny): $\forall n \in N$, $\forall a \in \boldsymbol{R}$, $a \geq 0$ existuje právě jedno číslo $x \in \boldsymbol{R}$, $x \geq 0$, takové, že $x^n = a$.

Úloha 4.2.1. Zjednodušte roznásobením $U = \left(2\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)\left(3\sqrt{2}+2\sqrt{3}\right)$.

Úloha 4.2.2. Zjednodušte umocněním a usměrněním $V = \left(2\sqrt{3}+3\sqrt{2}\right)^2 / \left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)$.

K základním vlastnostem odmocnin patří:

V: $\forall a \in \boldsymbol{R}, a \geq 0, \forall m, n, r \in \boldsymbol{N}$):

(1) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$, (2) $\sqrt[nr]{a^r} = \sqrt[n]{a}$.

Důkaz:

ad (1): Pro levou a pravou stranu rovnosti platí: $L = x^m$, kde podle definice $x^n = a$; po umocnění na m-tou máme $x^{mn} = a^m$. $P = y$, kde podle definice je $y^n = a^m$. Je tedy $x^{mn} = y^n$ a z toho $x^m = y$, takže $L = P$.

ad (2): $L = x$, kde $x^{nr} = a^r$, což dává $x^n = a$. $P = y$, kde $y^n = a$. Tedy $x^n = y^n$ a z toho $x = y$, tj. $L = P$. □

c) ***Mocniny s racionálním exponentem***

Chceme-li rozšířit pojem mocniny na exponent racionální, vyjdeme ze základní vlastnosti n-té odmocniny z čísla a: $x^n = a$. Tedy položíme $x = a^t$ a po umocnění na n-tou je $a = x^n = a^{tn}$, tedy $tn = 1$, $t = 1/n$. To vede k definici ($\forall n \in N$ $\forall m \in Z$ $\forall a \in \boldsymbol{R}, a > 0$):

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}, \quad a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Vlastnosti mocnin zůstávají zachovány s tím, že musíme uvážit příslušné podmínky pro a, b, r, s.

Pojem mocniny lze rozšířit na libovolné reálné exponenty, ale mocnina s iracionálním exponentem již není algebraická funkce.

D: Nechť $a \in \boldsymbol{R}, a > 0, q \in Q'$. Pak definujeme $a^q = \sup\limits_{r\in Q,\, r<q} \left\{a^r\right\}$.

Výše uvedené vlastnosti mocnin (1) – (6), (7′), (8) platí pro libovolné reálné exponenty.

d) ***Polynomické funkce***

Jsou dány rovnicí $y = P(x)$, kde $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ je algebraický polynom. Pro $a_0 \neq 0$ jde o polynom a tedy i o polynomickou funkci n-tého stupně; $D(f) = \boldsymbol{R}$. Polynomická funkce obsahující jen liché mocniny x je lichá, pokud obsahuje jen sudé mocniny x, je sudá.

Při studiu polynomických funkcí se využívá poznatků z algebry, která se algebraickými polynomy zabývá. Zejména se využívá:

– dělení polynomů (se zbytkem),

– rozklad polynomu na součin kořenových činitelů a nerozložitelných kvadratických polynomů,

– věta o rovnosti polynomů. (Jestliže dva polynomy P, Q nejvýše n-tého stupně se rovnají v $n+1$ bodech, pak $P(x) = Q(x)$ na $\boldsymbol{R}$, tj. oba polynomy mají tentýž stupeň a tytéž koeficienty.)

Nyní uveďme některé zvláštní případy polynomických funkcí.

Mocninná funkce $y = x^n$ (s přirozeným exponentem n).

Grafem je parabola n-tého stupně. Pro n sudé je f sudá funkce, která pro $n \geq 2$ je na intervalu $(-\infty, 0\rangle$ klesající a na intervalu $\langle 0,+\infty)$ rostoucí, tedy v bodě 0 má minimum, $H(f) = \langle 0,+\infty)$, funkce je konvexní na $\boldsymbol{R}$. Při definici inverzní funkce se za obor prostoty bere interval $\langle 0,+\infty)$. Inverzní funkce $y = \sqrt[n]{x}$ je tedy definována na intervalu $\langle 0,+\infty)$ a stejný je i obor hodnot.

Pro n liché je f lichá funkce, je rostoucí na $\boldsymbol{R}$, $H(f) = \boldsymbol{R}$. Pro $n \geq 3$ je f konkávní na $(-\infty, 0\rangle$ a konvexní na $\langle 0,+\infty)$, v bodě 0 má inflexi. Ježto f je bijekcí $\boldsymbol{R}$ na $\boldsymbol{R}$, je inverzní funkce $y = \sqrt[n]{x}$ definována na $\boldsymbol{R}$ a má týž obor hodnot. Z tohoto důvodu je možné a účelné pro lichá n definovat n-tou odmocninu i ze záporných čísel; např. $\sqrt[3]{-8} = -2$.

Konstantní funkce

Jsou dány rovnicí $y = k$, kde k je konstanta; $H(f) = \{k\}$. Jsou to funkce současně neklesající i nerostoucí, sudé ($y = 0$ je současně i lichá). V každém bodě mají neostré lokální maximum i neostré lokální minimum. Grafem každé konstantní funkce $y = k$ v kartézské soustavě souřadnic je přímka rovnoběžná s osou x, resp. osa x ($y = 0$). V polární soustavě souřadnic je grafem konstantní funkce $\rho = r$ (kde $r > 0$), $\varphi \in \langle 0, 2\pi)$ kružnice se středem v počátku a s poloměrem r.

Lineární funkce

Jsou dány rovnicí $y = kx + q$, kde $k \neq 0$, q jsou reálné konstanty; $D(f) = H(f) = \boldsymbol{R}$. Pro $k > 0$ to jsou funkce rostoucí, pro $k < 0$ klesající, pro $q = 0$ jsou liché. Grafem každé lineární funkce v kartézské soustavě souřadnic je přímka, jež není rovnoběžná s osou x ani k ní kolmá. Konstanta k je *směrnicí* přímky, tj. $k = \operatorname{tg} \varphi$, kde φ je velikost orientovaného úhlu určeného osou x a touto přímkou; zpravidla bereme $\varphi \in (-\pi/2, \pi/2)$. Parametr q znamená *úsek na ose y*.

Pro $q = 0$ se lineární funkce nazývá též *přímá úměrnost*, kartézským grafem přímé úměrnosti je přímka procházející počátkem. Pro lineární funkci (zpravidla pro $q \neq 0$) se používá též název *lineární závislost*.

Grafem lineární funkce v polární soustavě souřadnic je Archimedova spirála.

Ježto lineární funkce jsou ryze monotonní, jsou i prosté. Funkce inverzní jsou opět lineární. Funkce $y = a - x$ a funkce $y = x$ jsou samy k sobě inverzní.

Lineární funkce je velmi důležitá v řadě problémů, v nichž se složitější průběh nějaké funkce nahrazuje (aproximuje) průběhem lineárním; např. při lineární interpolaci funkcí.

Úloha 4.2.3. Jsou dány dvě tabulkové hodnoty funkce f: $f(4{,}75) = 0{,}6758$, $f(4{,}80) = 0{,}6803$. Pomocí lineární interpolace stanovte $f(4{,}78)$.

[Danými dvěma body proložíme přímku, její rovnice je

$$y = 0{,}6758 + \frac{0{,}6803 - 0{,}6758}{4{,}80 - 4{,}75}(x - 4{,}75), \text{ tj. } y = 0{,}6758 + 0{,}09\,(x - 4{,}75)\,;$$

$f(4{,}78) = 0{,}6758 + 0{,}09.0{,}03 = 0{,}6758 + 0{,}0027 = 0{,}6785$.]

Kvadratické funkce

Jsou dány rovnicí $y = ax^2 + bx + c$, kde $a \neq 0$, b, c jsou konstanty; $D(f) = \boldsymbol{R}$, $H(f)$ je pro $a > 0$ interval typu $\langle m, +\infty)$, pro $a < 0$ je to interval typu $(-\infty, m\rangle$, kde m je minimum resp. maximum funkce f. Tohoto ostrého lokálního extrému nabývá funkce f v bodě $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$.

Grafem každé kvadratické funkce v kartézské soustavě souřadnic je (kvadratická) parabola; pro funkci $y = ax^2$ je její vrchol v počátku soustavy souřadnic.

e) ***Racionální lomené funkce***

Jsou to funkce dané rovnicí $y = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, kde $P(x)$, $Q(x)$ jsou polynomy. Je-li stupeň čitatele větší nebo roven stupni jmenovatele, dovedeme racionální lomenou funkci vyjádřit ve tvaru

$$y = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)},$$

kde $S(x)$ je podíl a $R(x)$ je zbytek při dělení $P(x)/Q(x)$.Tato úprava (které se říká „snížit stupeň čitatele pod stupeň jmenovatele“) se používá při integraci racionálních funkcí.

Úloha 4.2.4. Je dána funkce $y = \dfrac{x^3 - 5x^2 + 8x - 7}{x^2 + 3}$. Proveďte snížení stupně čitatele pod stupeň jmenovatele.

[Po provedeném dělení dostaneme $y = x - 2 + \dfrac{3x-1}{x^2+3}$.]

Úloha 4.2.5. Je dána funkce $y = \dfrac{x^5 - 1}{x^2 + 1}$. Proveďte snížení stupně čitatele pod stupeň jmenovatele, aniž provedete dělení.

[V čitateli vhodné členy přičítáme a odčítáme a zlomek rozdělíme na více zlomků. Dostaneme $y = x^3 - x + \dfrac{x-1}{x^2+1}$.]

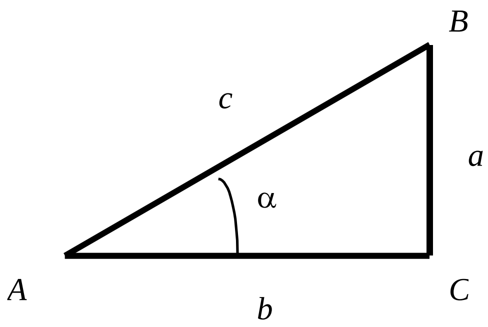
Lineární lomené funkce

Jsou to funkce s rovnicí $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$, kde a, b, c, d jsou reálné konstanty, přičemž platí $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$; $D(f) = R - \{-d/c\}$. Jsou to funkce prosté, grafem v kartézské soustavě souřadnic je rovnoosá hyperbola. Inverzní funkce jsou téhož typu, tj. jsou též lineární lomené. Zvláštním případem je funkce zvaná *nepřímá úměrnost* s rovnicí $y = \dfrac{a}{x}$, která je sama k sobě inverzní,

4.3. Goniometrické funkce a funkce cyklometrické

Pravoúhlé trojúhelníky

Podobnost trojúhelníků jako relace ekvivalence na množině všech pravoúhlých trojúhelníků, definuje rozklad této množiny na třídy. Z vlastnosti podobnosti plyne, že každá třída těchto trojúhelníků je určena jedním vnitřním ostrým úhlem a že všechny trojúhelníky z téže třídy ekvivalence se shodují v poměru odpovídajících si stran. Toho se využívá k definici *goniometrických funkcí ostrého úhlu*.



D: $\sin\alpha = \dfrac{a}{c}$, $\cos\alpha = \dfrac{b}{c}$,

$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{a}{b}$, $\operatorname{cotg}\alpha = \dfrac{b}{a}$.

Tato definice pracuje zpravidla s úhly v míře stupňové.

Odsud $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $\operatorname{cotg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

Z ΔABC dále plyne:

$\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$, $\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha$, $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, $\operatorname{tg}(90° - \alpha) = \operatorname{cotg}\alpha$.

Zvláštní hodnoty

Některé zvláštní hodnoty goniometrických funkcí lze odvodit (při použití Pythagorovy věty)

– z rovnostranného trojúhelníku s výškou: $\sin 30° = \dfrac{1}{2}$, $\sin 60° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$,

$\operatorname{tg} 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, $\operatorname{tg} 60° = \sqrt{3}$.

(podobně pro „kofunkce“ $\cos\alpha$ a $\operatorname{cotg}\alpha$).

– ze čtverce s úhlopříčkou: $\sin 45° = \cos 45° = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{tg} 45° = \operatorname{cotg} 45° = 1$.

Na této úrovni se přijímá jako důsledek definice, že když α roste od 0° do 90°, tak funkce sinus roste od 0 do 1, funkce tangens roste od 0 do $+\infty$, funkce kosinus klesá od 1 k 0 a funkce kotangens klesá od $+\infty$ k 0. Rovněž pomocí názoru se na této úrovni snese rozšíření funkcí: $\sin 0° = 0$, $\cos 0° = 1$, $\operatorname{tg} 0° = 0$, $\operatorname{cotg} 0°$ není definován; podobně $\sin 90° = 1$, $\cos 90° = 0$, $\operatorname{tg} 90°$ není definován, $\operatorname{cotg} 90° = 0$.

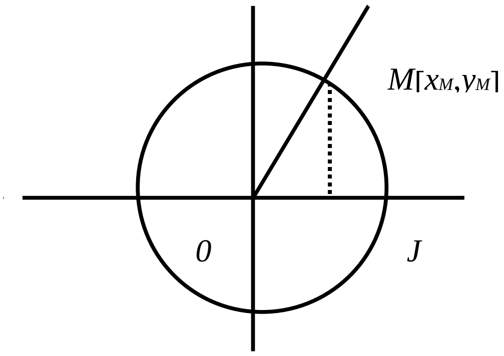
Užití jednotkové kružnice k definici goniometrických funkcí

Tato definice se obyčejně spojuje již s používáním míry obloukové, přičemž přepočet mezi velikostí úhlu α v míře stupňové a velikostí x v míře obloukové je dán vztahy

$$x = \frac{\pi}{180}\alpha\,,\ \alpha = \frac{180}{\pi}x\,.$$

Definice goniometrických funkcí pomocí jednotkové kružnice přináší jeden didaktický problém. Chceme-li zachovat označení x pro velikost úhlu v míře obloukové, musíme volit jiné označení pro souřadnicové osy, např. u, v. Chceme-li však zachovat označení os x, y, musíme volit jiné označení pro velikost úhlu, např. t, tedy nemůžeme přímo definovat $\sin x$, přestože právě tento zápis v matematické analýze nejvíce používáme.

D: Je-li O počátek pravoúhlé soustavy souřadnic, J jednotkový bod na ose x, $M(x_M, y_M)$ bod na jednotkové kružnici a t velikost orientovaného úhlu JOM, pak hodnota funkce $\cos t$ je definována jako x-ová souřadnice bodu M, $\cos t = x_M$, a hodnota funkce $\sin t$ je definována jako y-ová souřadnice bodu M, $\sin t = y_M$.



Vlastnosti plynoucí z definice funkcí

Z definice máme: $D(\sin) = D(\cos) = \boldsymbol{R}$, $H(\sin) = H(\cos) = \langle -1,1\rangle$. Z definice plyne rovněž periodičnost obou funkcí s periodou 2π: $\forall t \in \boldsymbol{R}$ $\forall k \in \boldsymbol{Z}$; $\sin(t + 2k\pi) = \sin t$, $\cos(t + 2k\pi) = \cos t$.

Z běžných vlastností lze dále přímo z jednotkové kružnice zjistit

– znaménka funkcí v jednotlivých kvadrantech I, II, III, IV;

– hodnoty funkcí pro úhly, pro něž je bod M na některé souřadnicové ose, tj. pro úhly 0, $\pi/2$, π, $3\pi/2$, …, zejména nulové body: $\sin t = 0 \Leftrightarrow t = k\pi$ ($\forall k \in \boldsymbol{Z}$), $\cos t = 0 \Leftrightarrow t = (2k + 1)\frac{\pi}{2}$ ($\forall k \in Z$);

– paritu funkcí, tj. $\forall t \in \boldsymbol{R}$: $\sin(-t) = -\sin t$ (funkce sinus je lichá), $\cos(-t) = \cos t$ (funkce kosinus je sudá);

– vzorce pro změnu velikosti úhlu o π: $\forall t \in \boldsymbol{R}$ $\sin(t \pm \pi) = -\sin t$, $\cos(t \pm \pi) = -\cos t$;

– nerovnost: $\forall t \in (0,+\infty)$ $\sin t < t$;

– parametrické vyjádření kružnice: $x = r\cdot\cos t$, $y = r\cdot\sin t$, $t \in \langle 0, 2\pi)$.

Ve školské matematice se nejčastěji setkáváme s označováním velikosti úhlů řeckými písmeny α, β, … a s mírou stupňovou, matematické analýze se ponejvíce pracuje s mírou obloukovou a s x jako označením velikosti úhlů v míře obloukové, tedy $\sin x$, $\cos x$, …

Funkce tangens a kotangens

Definice funkcí tangens a kotangens vychází z funkcí sinus a kosinus.

D: $\forall x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$ (tedy pro něž $\cos x \neq 0$) definujeme funkci tangens: $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$,

$\forall x \neq k\pi$ (tedy pro něž $\sin x \neq 0$) definujeme funkci kotangens: $\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$.

Vlastnosti funkcí $\operatorname{tg} x$ *a* $\operatorname{cotg} x$:

Funkce tangens je definována pro všechna $x \in (2k + 1)\frac{\pi}{2}$, tj. na množině

$D(\operatorname{tg}) = \boldsymbol{R} - \{(2k + 1)\frac{\pi}{2}$; $k \in \boldsymbol{Z}\}$; $H(\operatorname{tg}) = \boldsymbol{R}$.

Funkce kotangens je definována pro všechna $x \neq k\cdot\pi$, tj. na množině $D(\operatorname{cotg}) = \boldsymbol{R} - \{k\pi;\ k \in \boldsymbol{Z}\}$; $H(\operatorname{cotg}) = \boldsymbol{R}$.

Z definice funkcí tangens a kotangens a z vlastností funkcí sinus a kosinus dostáváme zejména tyto základní vlastnosti:

– znaménka funkcí v jednotlivých kvadrantech I, II, III, IV;

– hodnoty funkcí pro úhly, pro něž je bod M na některé souřadnicové ose, tj. pro úhly 0, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$, 2π, zejména nulové body: $\mathrm{tg}\, 0 = \mathrm{tg}\, \pi = 0$, $\mathrm{cotg}\, \frac{\pi}{2} = \mathrm{cotg}\, \frac{3\pi}{2} = 0$;

– paritu funkcí, tj. $\forall x \in D(f)$: $\mathrm{tg}(-x) = -\mathrm{tg}\, x$, $\mathrm{cotg}(-x) = -\mathrm{cotg}\, x$ (funkce liché);

– periodičnost funkcí: $\forall x \in D(f)$: $\mathrm{tg}(x \pm \pi) = \mathrm{tg}\, x$, $\mathrm{cotg}(x \pm \pi) = \mathrm{cotg}\, x$.

Vzorce pro goniometrické funkce:

Postupně lze vyvodit další skupiny vzorců. Je-li g libovolná ze čtyř základních goniometrických funkcí a označíme-li velikosti úhlů α, β, ..., jak je to běžné na střední škole, jde o vzorce, kde

- $g(\alpha \pm \beta)$ vyjadřujeme pomocí g.f. úhlů α, β, např.

  $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$; $\mathrm{tg}(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\mathrm{tg}\alpha \pm \mathrm{tg}\beta}{1 \mp \mathrm{tg}\alpha\, \mathrm{tg}\beta}$ (pro která α, β platí?);

- $g(2\alpha)$ vyjadřujeme pomocí g.f. jednoduchého úhlu α, např. $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$, $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$;

- $g(\frac{\alpha}{2})$ vyjadřujeme pomocí g.f. úhlu α, např. pro $\alpha \in \mathrm{I}$ je $\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}}$; nebo též $\sin^2 \alpha = \dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$, $\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}}$ tento vzorec se využívá např. při integraci goniometrických funkcí;

- $g(\alpha) \pm g(\beta)$ se vyjádří jako součin funkcí, např. $\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$;

- při integraci součinu g.f. se využívá obráceného vztahu a $g(\alpha)\cdot g(\beta)$ vyjadřujeme jako součet nebo rozdíl g.f., např.:

  $\sin m\alpha \cdot \cos n\alpha = \dfrac{1}{2}[\sin(m+n)\alpha + \sin(m-n)\alpha]$;

- velmi užitečný je vzorec $\dfrac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \mathrm{tg}^2 \alpha$.

Funkce cyklometrické

Pro základní g.f. se volí obory prostoty P, přičemž obory hodnot H se nemění:

$\sin x : P = \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$, $H = \langle -1, 1 \rangle$;

$\cos x : P = \langle 0, \pi \rangle$, $H = \langle -1, 1 \rangle$;

$\mathrm{tg}\, x : P = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$, $H = (-\infty, +\infty) = \boldsymbol{R}$;

$\mathrm{cotg}\, x : P = (0, \pi)$, $H = (-\infty, +\infty) = \boldsymbol{R}$.

Při definici cyklometrických funkcí se vymění úloha množin P a H.

D: Goniometrické funkce uvažujme na jejich oborech prostoty. Inverzní funkcí (s definičním oborem D) k funkci

sin x je funkce arcsin x (arkussinus), $D = \langle -1, 1\rangle$;

cos x je funkce arccos x (arkuskosinus), $D = \langle -1, 1\rangle$;

tg x je funkce arctg x (arkustangens), $D = (-\infty, +\infty)$;

cotg x je funkce arccotg x (arkuskotangens), $D = (-\infty, +\infty)$.

Přitom si uvědomíme, že např. $\forall x \in \langle -1, 1\rangle$, $\forall y \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\rangle$, znamenají zápisy $y = \arcsin x$, $x = \sin y$ přesně totéž.

Funkce arcsin x se vyskytuje v úlohách na určení definičního oboru funkcí.

Úloha 4.3.1. Určete definiční obor funkce f: $y = \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{3x+2}}$.

[Čitatel je definován na intervalu $\langle -1, 1\rangle$, jmenovatel na množině $x > -\frac{2}{3}$, tedy na intervalu $\left(-\frac{2}{3}, +\infty\right)$. Definiční obor $D(f)$ je průnikem obou intervalů, tedy $D(f) = \left(-\frac{2}{3}, 1\right\rangle$.]

Vlastnosti cyklometrických funkcí

Jelikož inverzní funkce zachovává monotónnost funkce výchozí, jsou funkce arcsin x, arctg x ve svých definičních oborech rostoucí, arccos x a arccotg x jsou klesající.

Ze vzorců pro funkce goniometrické lze odvodit odpovídající vzorce pro funkce cyklometrické, např:

Ježto $\cos t = \sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$, dostaneme po dosazení $\cos t = x$, (tedy i $t = \arccos x$):

$$x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \arccos x\right) \Rightarrow \forall x \in \langle -1, 1\rangle: \ \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}.$$

Podobně též $\forall x \in R$: $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x = \frac{\pi}{2}$.

Proto se z uvedených cyklometrických funkcí používá obvykle vždy jen jedna z každé dvojice, zpravidla funkce arcsin x a arctg x.

Jestliže ve vzorci pro $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$ položíme $\operatorname{tg} \alpha = x$, $\operatorname{tg} \beta = y$, tj. $\alpha = \operatorname{arctg} x$, $\beta = \operatorname{arctg} y$, dostaneme vzorec $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} \dfrac{x+y}{1-xy}$.

4.4. Funkce exponenciální a logaritmické

Exponenciální funkce

Nechť $a > 0$, $a \neq 1$. *Exponenciální funkce* jsou definovány rovnicí $y = a^x$, $D(f) = \boldsymbol{R}$ (plyne to z definice mocniny pro libovolný reálný exponent, viz 4.2.c).

Hodnotu mocniny s iracionálním exponentem, tedy exponenciální funkce pro iracionální hodnotu nezávisle proměnné x) lze najít i jako limitu posloupnosti a^r , kde $r \in Q$, $r \to x$. Tak třeba 2^π je limitou posloupnosti 2^r , kde r např. tvoří posloupnost dolních desetinných aproximací čísla π: 3; 3,1; 3,14; 3,141; 3,1415; 3,14159; ... Pak 2^r dává posloupnost 8; 8,5741...; 8,8152...; 8,8213...; 8,8244...; 8,82496..., takže např. $2^\pi \approx 8{,}8250$.

Podobně (užitím suprema množin) bychom mohli dokázat, že každé kladné číslo je při daném základu a hodnotou nějaké mocniny, tj. $H(f) = (0,+\infty)$.

Pro $a > 1$ je exponenciální funkce rostoucí, jak plyne z vlastnosti mocnin 4.2 (8). Pro $a < 1$ je exponenciální funkce klesající. V tomto případě je $(1/a) > 1$, platí pro každé $x_1 < x_2$

$\left(\frac{1}{a}\right)^{x_1} < \left(\frac{1}{a}\right)^{x_2}$ a po přechodu k převráceným hodnotám máme $a^{x_1} > a^{x_2}$.

Pro $a \in (0,1)$ je tedy $a^x = b^{-x}$, kde $b = 1/a > 0$.

Exponenciální funkci $y = a^x$ pro $a \in (0,1)$ lze tedy nahradit exponenciální funkcí $y = b^{-x}$ pro $b > 1$ (která je klesající), a to vede k závěru, že v podstatě není třeba se zabývat exponenciálními funkcemi se základem $a < 1$.

Grafu exponenciální funkce v kartézské soustavě říkáme *exponenciála*. Všechny exponenciály procházejí bodem [0;1]. Grafem exponenciální funkce v polární soustavě souřadnic je tzv. *logaritmická spirála*.

Zvlášť důležitá je exponenciální funkce $y = \mathrm{e}^x$ označovaná někdy též exp x.

Logaritmické funkce

Exponenciální funkce f: $y = a^x$ je pro $a > 0$ rostoucí (tedy i prostá) na celé množině $\boldsymbol{R}$, přičemž $H(f) = (0,+\infty)$. Existuje proto inverzní funkce $f^{-1} : x = a^y$, kterou nazýváme *logaritmická funkce* o základu a a kterou zapisujeme $y = \log_a x$; ta má $D(f^{-1}) = (0,+\infty)$, $H(f^{-1}) = \boldsymbol{R}$. Hodnotu logaritmické funkce nazýváme ***logaritmus***; někdy pojem logaritmus používáme i pro stručné označení logaritmické funkce. *Logaritmovat* nějaký výraz znamená určit jeho logaritmus.

Pro matematickou analýzu je nejdůležitější logaritmická funkce o základu e, pro niž máme zvláštní označení $\ln x = \log_{\mathrm{e}} x$ a název ***přirozený logaritmus*** (ln = logaritmus naturalis).

Z definice logaritmu plyne zejména:

(a) Zápis $x = a^y$ znamená přesně totéž jako $y = \log_a x$.

(b) $\forall x \in \boldsymbol{R}$: $\log a^x = x$, $\forall x > 0$: $a^{\log_a x} = x$.

(c) $\forall x \in \boldsymbol{R}$: $a^x = \mathrm{e}^{x \ln a}$ (neboť $a = \mathrm{e}^{\ln a}$).

Z prostoty exponenciálních a logaritmických funkcí plyne:

(d) $a^K = a^L \Leftrightarrow K = L$, $A = B$ $(> 0) \Leftrightarrow \log_a A = \log_a B$.

V obou případech (d) získáme závěr implikace *logaritmováním* jejího předpokladu.

Dekadický logaritmus, tj. logaritmus o základu 10, měl dříve výsadní postavení při numerických výpočtech (používání tabulek dekadických logaritmů), ale s rozšířením kalkulátorů a počítačů toto postavení ztratil.

Všechny logaritmické funkce o základu $a > 1$ jsou rostoucí a jejich grafy procházejí bodem [1;0] na ose x.

Úloha 4.4.1. Načrtněte grafy funkcí $y = \mathrm{e}^x$, $y = \ln x$.

Z výše uvedené vlastnosti (c) plyne, že místo exponenciálních funkcí $y = a^x$ o základu a lze uvažovat jen exponenciální funkce $y = \mathrm{e}^{kx}$ o základu e. Podobně na sebe lze převádět logaritmy o různých základech. Převodní vztahy lze odvodit např. takto (uvažujme logaritmus přirozený a logaritmus o základu a):

Rovnost $x = a^{\log_a x}$ logaritmujeme při základu e a dostaneme $\ln x = \ln a \,.\, \log_a x$.

Jestliže logaritmujeme rovnost $x = \mathrm{e}^{\ln x}$ při základu a, dostaneme $\log_a x = \log_a \mathrm{e} \,.\, \ln x$.

Z vlastností exponenciálních funkcí plynou ihned vlastnosti funkcí logaritmických:

$\forall x_1, x_2 > 0$: $\log_a (x_1.x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2$;

$\forall x_1, x_2 > 0$: $\log_a (x_1 : x_2) = \log_a x_1 - \log_a x_2$;

$\forall x > 0\ \ \forall m \in R$: $\log_a (x^m) = m.\log_a x$.

4.5. Funkce hyperbolické a hyperbolometrické

Hyperbolické funkce patří mezi elementární funkce a jsou definovány pomocí funkcí exponenciálních takto:

D: $\mathrm{sh}\, x = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}\right)$, $\mathrm{ch}\, x = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}\right)$, $\mathrm{th}\, x = \frac{\mathrm{sh}\, x}{\mathrm{ch}\, x}$, $\mathrm{coth}\, x = \frac{\mathrm{ch}\, x}{\mathrm{sh}\, x}$;

jsou to *hyperbolický sinus*, *kosinus*, *tangens* a *kotangens*.

Z definice je vidět, že pro první tři z těchto funkcí je $D(f) = \boldsymbol{R}$ (pro th x to plyne z toho, že $\forall x \in \boldsymbol{R}$: $\mathrm{ch}\, x > 0$). Lehce zjistíme, že funkce sh x má jediný nulový bod pro $x_0 = 0$, takže $D(\mathrm{coth}) = \boldsymbol{R} - \{0\}$.

Obory hodnot a průběh: $H(\mathrm{sh}) = \boldsymbol{R}$, funkce je rostoucí; $H(\mathrm{ch}) = \langle 1, +\infty)$, funkce je klesající na $(-\infty, 0\rangle$ a rostoucí na $\langle 0, +\infty)$, v bodě 0 má minimum 1.

$H(\mathrm{th}) = (-1;1)$, funkce je rostoucí; $H(\mathrm{coth}) = (-\infty ,-1) \cup (1,+\infty)$, na intervalu $(-\infty , 0)$ funkce klesá od -1 k $-\infty$, na intervalu $(0,+\infty)$ funkce klesá od $+\infty$ k 1. Pro funkce tangens i kotangens jsou přímky $y = 1$ a $y = -1$ asymptotami, asymptotou grafu funkce kotangens je též osa y.

Úlohy:

4.5.1. Do jednoho obrázku znázorněte grafy funkcí $y = \mathrm{sh}\, x$, $y = \mathrm{ch}\, x$, $y = \frac{1}{2}\mathrm{e}^x$.

4.5.2. Do jednoho obrázku znázorněte grafy funkcí $y = \mathrm{th}\, x$, $y = \mathrm{coth}\, x$.

Graf funkce $y = a.\mathrm{ch}\frac{x}{a}$ v kartézské souřadnicové soustavě se nazývá *řetězovka*. Je to křivka, kterou vytváří řetěz (nepružná nit) volně zavěšený ve dvou bodech.

Hyperbolické funkce mají řadu vlastností velmi podobných vlastnostem funkcí goniometrických. Z definice funkcí lze odvodit např.

(a) Funkce sh x, th x, coth x jsou liché, funkce ch x je sudá.

(b) $\forall x$: $\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1$.

(c) $\forall x \neq 0$: th x . coth $x = 1$.

(d) $\forall x_i \in R$: sh$(x_1 \pm x_2)$ = sh x_1 ch x_2 $\pm$ ch x_1 sh x_2 .

(e) $\forall x_i \in R$: ch$(x_1 \pm x_2)$ = ch x_1 ch x_2 $\mp$ sh x_1 sh x_2 .

(f) $\forall x_i \in R$: th$(x_1 \pm x_2)$ = $\dfrac{\operatorname{th} x_1 \pm \operatorname{th} x_2}{1 \pm \operatorname{th} x_1 \operatorname{th} x_2}$.

Hyperbolické funkce se vyskytují zejména v aplikacích a také se používají při výpočtu neurčitých integrálů pomocí hyperbolických substitucí.

Funkce sh x, th x a coth x jsou prosté, u funkce ch x vezmeme za obor prostoty interval $\langle 0,+\infty)$. Pak lze definovat funkce inverzní (zvané ***hyperbolometrické***):

– K funkci sh x je inverzní funkcí funkce argsh x (argument hyperbolického sinu), $D(f) = H(f) = \boldsymbol{R}$.

– K funkci ch x je inverzní funkcí funkce argch x (argument hyperbolického kosinu), $D(f) = \langle 1,+\infty)$, $H(f) = \langle 0,+\infty)$.

– K funkci th x je inverzní funkcí funkce argth x (argument hyperbolické tangens), $D(f) = (-1;1)$, $H(f) = \boldsymbol{R}$.

–K funkci coth x je inverzní funkcí funkce argcoth x (argument hyperbolické kotangens), $D(f) = (-\infty,-1) \cup (1,+\infty)$, $H(f) = \boldsymbol{R} - \{0\}$.

Ježto jsou hyperbolické funkce vyjádřeny pomocí exponenciální funkce, lze hyperbolometrické funkce vyjádřit pomocí funkce logaritmické, např.:

$$\operatorname{argsh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right), \quad \operatorname{argth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} .$$

\- * -