Katedra informatiky
Přírodovědecká fakulta
Univerzita Palackého v Olomouci

Lineární algebra

Poznámky k přednášce

Michal Krupka

Olomouc, 11. května 2020

Úvod

Text slouží jako učební text k předmětu Algebra 1 vyučovaný na Katedře informatiky UP v Olomouci v LS 2019/20. V průběhu semestru ho budu postupně upravovat. Text je rozpracovaný, některé části budou obsahovat jen stručně podanou teorii. Další informace a příklady si studenti doplní na přednáškách a cvičeních.

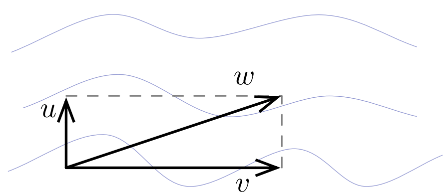
Obsah

Kapitola 1

Vektory a vektorové prostory

1.1 Motivace

S vektory se setkáváme ve fyzice, matematice i informatice[1]. Důležité fyzikální vektory jsou například vektor rychlosti, zrychlení, síly. Na nich lze dobře pochopit základní vlastnosti vektorů, které jsou pak vtěleny do jejich matematické definice. Pokud se například snažím přeplavat řeku rychlostí $\boldsymbol{u}$ ($\boldsymbol{u}$ je vektor; jistě záleží na směru, kterým plavu) a samotná řeka teče rychlostí $\boldsymbol{v}$ (opět vektor), bude má výsledná rychlost určena těmito vektory podle obr. 1.1.



Obrázek 1.1: $\boldsymbol{u}$: rychlost plavce ve stojaté vodě, $\boldsymbol{v}$: rychlost proudu vody, $\boldsymbol{w}$: skutečná rychlost plavce.

Toto pozorování nás vede k poznatku, že vektory rychlosti lze *sčítat* (*skládat*) podle známého rovnoběžníkového pravidla. Totéž platí i pro další fyzikální vektory, jako jsou např. už zmíněné vektory zrychlení a síly.

Z reality lze odpozorovat i další vlastnosti vektorů: proti proudu řeky lze plavat takovou rychlostí, že plavec zůstává na místě. Plaval rychlostí danou tzv. *opačným* (*inverzním*) vektorem k vektoru rychlosti proudu. Součtem těchto vektorů je tzv. *nulový vektor*. Každý

[1] V informatice, zejména programování, se ovšem pojem vektor používá i pro něco jiného: jednorozměrné pole.

vektor lze také vynásobit číslem. Pokud například při plavání zdvojnásobím své úsilí, bude vektor mé rychlosti dvojnásobkem původního vektoru.

Pojem vektoru a s ním související další pojmy patří k základním matematickým pojmům používaným i mimo matematiku, jak už bylo řečeno, kromě fyziky i v informatice. V matematice se kromě lineární algebry vektory používají v mnoha oblastech, například v geometrii. Matematická definice vektoru zavádí abstraktní pojem, který je tvořen některými vlastnostmi vektorů převzatými z reality. Které vlastnosti to jsou, je věcí volby. V základní definici, jak se v matematice ujala, se například nehovoří o délce vektoru a úhlu (odchylce) mezi dvěma vektory (budeme o nich mluvit později). Následuje tedy definice.

1.2 Struktura vektorového prostoru

Řekneme, že na množině U je dána *struktura vektorového prostoru* (*nad reálnými čísly*; jiné typy vektorových prostorů zde neuvažujeme), jestliže každým dvěma prvkům $u, v \in U$ je přiřazen prvek $u+v \in U$ a každému prvku $u \in U$ a číslu $r \in \mathrm{R}$ je přiřazen prvek ru (značený také $r \cdot u$) tak, že pro všechna $u, v, w \in U$ a $r, s \in \mathrm{R}$ jsou splněny následující podmínky:

$$\text{existuje prvek } \mathbf{0} \in U \text{ tak, že } 0 \cdot u = \mathbf{0} \text{ pro každé } u \in U, \tag{1.1}$$

$$u+v = v+u, \tag{1.2}$$

$$(u+v)+w = u+(v+w), \tag{1.3}$$

$$1 \cdot u = u, \tag{1.4}$$

$$r \cdot (s \cdot u) = (rs) \cdot u, \tag{1.5}$$

$$(r+s) \cdot u = r \cdot u + s \cdot u, \tag{1.6}$$

$$r \cdot (u+v) = r \cdot u + r \cdot v. \tag{1.7}$$

Je-li na množině U dána struktura vektorového prostoru, hovoříme o U jako o *vektorovém prostoru*. Prvkům vektorového prostoru říkáme *vektory*, reálným číslům v souvislosti s vektorovými prostory říkáme také *skaláry*. Vektor $u+v$ nazýváme *součet vektorů* u *a* v, vektor ru *násobek vektoru* u *číslem* (*skalárem*) r. Vektor $\mathbf{0}$ značíme většinou stejně jako nulu, tedy 0, a nazýváme jej *nulový vektor*.

Příklad 1.1. Základním příkladem vektorového prostoru je množina R^n, tedy množina všech uspořádaných n-tic reálných čísel se sčítáním vektorů a násobením skalárem daným obvyklým způsobem po složkách. Tato struktura vektorového prostoru na R^n se nazývá *kanonická*. Pokud neřekneme jinak (a to kromě úloh k této kapitole nikdy neřekneme), uvažujeme množinu R^n vždy automaticky s kanonickou strukturou vektorového prostoru. Proto můžeme o R^n mluvit jako o vektorovém prostoru a říkat „vektorový prostor R^n“, aniž bychom specifikovali, jakou strukturu vektorového prostoru máme na mysli. Vektorovému prostoru R^n také říkáme *aritmetický vektorový prostor*.

Je ovšem nutné pochopit, že nejen $\mathbb{R}^n$ je vektorový prostor. Například fyzikální vektory jistě nejsou n-ticemi reálných čísel (a neexistuje jednoznačný způsob, jak jim n-tice reálných čísel přiřadit!).

Příklad 1.2. Označme P_n množinu všech polynomů stupně nejvýše n. Sčítání polynomů a násobení polynomů číslem definuje na množině P_n strukturu vektorového prostoru. (Používá se například v šifrování.)

Věta 1.1. *Pro vektorový prostor U platí:*

1. *Pro každé $u \in U$ platí $\mathbf{0} + u = u$.*
2. *Pro každé $u \in U$ existuje jediný vektor $-u \in U$ tak, že $u + (-u) = \mathbf{0}$.*
3. *Pro každé číslo r je $r \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$.*

Důkaz. Cvičení.

Vektor $-u$ nazýváme *vektor opačný (inverzní) k vektoru* u. Platí tedy $u + (-u) = \mathbf{0}$. Přičítání opačného vektoru značíme jako odečítání: $u + (-v) = u - v$.

ÚLOHY KE KAPITOLE 1

1.1. Definujte na jednoprvkové množině $\{u\}$ a dvojprvkové množině $\{u, v\}$ strukturu vektorového prostoru.

1.2. Ukažte, že v Příkladu 1.2 je opravdu vektorový prostor.

1.3. Definujte strukturu vektorového prostoru na intervalu $(0, +\infty)$.

1.4. Definujte na množině $\mathbb{R}$ jinou než kanonickou strukturu vektorového prostoru.

1.5. Dokažte, že $\mathbb{R}^n$ s kanonickou strukturou vektorového prostoru je opravdu vektorový prostor.

1.6. Dokažte Větu 1.1.

Kapitola 2

Podprostory a součiny vektorových prostorů

2.1 Lineární kombinace

Lineární kombinace vektorů $u_1, \dots, u_k \in U$ *s koeficienty* $r^1, \dots, r^k$ je libovolný vektor $r^1 u_1 + \dots + r^k u_k$. O vektorech $u_1, \dots, u_k$ říkáme, že jsou *lineárně závislé*, pokud existují koeficienty $r^1, \dots, r^k \in \mathbb{R}$, z nichž alespoň jeden není nulový, tak, že příslušná lineární kombinace je nulový vektor.

Pokud bychom nepožadovali, aby alespoň jeden koeficient byl nenulový, existovaly by takové koeficienty vždy, protože ať jsou vektory $u_1, \dots, u_k$ jakékoli, vždy platí $0 \cdot u_1 + \dots + 0 \cdot u_k = 0$.

Vektory $u_1, \dots, u_k$ se nazývají *lineárně nezávislé*, pokud nejsou lineárně závislé. Tuto podmínku lze zformulovat i takto: pokud je lineární kombinace vektorů $u_1, \dots, u_k$ nulová, jsou všechny její koeficienty nulové. Neboli: z $r^1 u_1 + \dots + r^k u_k = 0$ plyne $r^1 = \dots = r^k = 0$. Tato podmínka se dobře prakticky ověřuje.

Věta 2.1. *Vektory jsou lineárně nezávislé, právě když žádný z nich není lineární kombinací ostatních.*

Věta 2.2. *Jsou-li vektory* $u_1, \dots, u_k$ *lineárně nezávislé, pak pro každý vektor* $v \in U$ *existuje nejvýše jedna* k*-tice čísel* $(r^1, \dots, r^k)$ *taková, že* $r^1 u_1 + \dots + r^k u_k = v$.

To lze zformulovat i takto: rovnice $r^1 u_1 + \dots + r^k u_k = v$ (kde neznámé jsou čísla $r^1, \dots, r^k$) má nejvýše jedno řešení.

V definici lineární nezávislosti jsme to požadovali jen pro $v = 0$.

Lineárním obalem množiny $K \subseteq U$ rozumíme množinu všech lineárních kombinací všech konečných n-tic vektorů z K pro všechna přirozená čísla n. Lineární obal množiny K značíme

$\langle K \rangle$. Pokud je množina K konečná, $K = \{u_1, \dots, u_k\}$, značíme jej také $\langle u_1, \dots, u_k \rangle$. Říkáme, že množina K *generuje* vektorový prostor U, pokud $\langle K \rangle = U$.

Pokud množina $\{u_1, \dots, u_k\}$ generuje vektorový prostor U, má pro libovolné $v \in U$ rovnice $r^1 u_1 + \cdots + r^k u_k = v$ vždy alespoň jedno řešení. (To není žádný hluboký poznatek, jen přeformulování definice.)

Věta 2.3. *Pro libovolnou množinu $K \subseteq U$ platí $\langle \langle K \rangle \rangle = \langle K \rangle$.*

Důkaz. Jak víme, základní způsob důkazu rovnosti dvou množin je dokázat, že každá z množin je podmnožinou té druhé. Inkluze $\langle K \rangle \subseteq \langle \langle K \rangle \rangle$ je jednoduchá a plyne z úlohy 2.4.

Dokážeme, že $\langle \langle K \rangle \rangle \subseteq \langle K \rangle$. Uděláme to tak, že ukážeme, že každý prvek $w \in \langle \langle K \rangle \rangle$ je prvkem množiny $\langle K \rangle$. Jelikož w je prvkem lineárního obalu množiny $\langle K \rangle$, existují vektory $v_1, \dots, v_l \in \langle K \rangle$ a čísla $s^1, \dots, s^l$ tak, že

$$w = s^1 v_1 + \cdots + s^l v_l. \tag{2.1}$$

Každý z vektorů v_i je ovšem lineární kombinací nějakých vektorů z K: $v_i = r_i^1 u_{i,1} + \cdots + r_i^{k_i} u_{i,k_i} = v_i$, kde $u_{i,1}, \dots, u_{i,k_i} \in K$. Dosazením do (2.1) zjistíme, že vektor w je lineární kombinací vektorů z K, a tedy je prvkem množiny $\langle K \rangle$.

2.2 Podprostor a součin

Mějme neprázdnou podmnožinu V vektorového prostoru U splňující $\langle V \rangle = V$. Jinými slovy, pro libovolných k vektorů $v_1, \dots, v_k \in V$ a libovolných k čísel $r^1, \dots, r^k \in \mathbb{R}$ vždy platí $r^1 v_1 + \cdots + r^k v_k \in V$. Díky této vlastnosti lze na množině V zavést strukturu vektorového prostoru *zúžením* sčítání vektorů a násobení skalárem na V. Množinu V vždy uvažujeme s touto strukturou a nazýváme *vektorovým podprostorem* vektorového prostoru U.

Každá z následujících dvou podmínek je ekvivalentní podmínce pro to, aby V byl vektorový podprostor U:

1. Pro libovolné dva vektory $v_1, v_2 \in V$ a čísla r^1, r^2 platí $r^1 v_1 + r^2 v_2 \in V$.
2. Pro každé dva vektory $v_1, v_2 \in V$ platí $v_1 + v_2 \in V$ a pro každý vektor $v \in V$ a číslo r platí $rv \in V$.

Věta 2.4. *Průnik dvou vektorových podprostorů vektorového prostoru U je opět vektorový podprostor U.*

Důkaz. Cvičení.

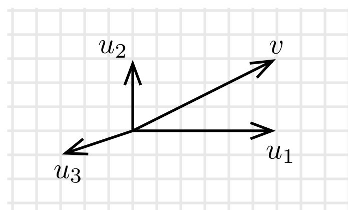
Jsou-li U a V vektorové prostory, lze na množině $U \times V$ (kartézský součin množin U a V) zavést strukturu vektorového prostoru tak, že se sčítání vektorů a násobení skalárem definuje takto:

$$(u_1, v_1) + (u_2, v_2) = (u_1 + u_2, v_1 + v_2), \tag{2.2}$$
$$r \cdot (u, v) = (ru, rv) \tag{2.3}$$

pro libovolné vektory $u_1, u_2, u \in U$, $v_1, v_2, v \in V$ a číslo $c \in \mathbb{R}$. Vektorový prostor $U \times V$ se nazývá *součin vektorových prostorů U a V*.

ÚLOHY KE KAPITOLE 2

2.1. Na obr. 2.1 jsou znázorněny vektory u_1, u_2, u_3. Vyjádřete každý z nich jako lineární kombinaci ostatních dvou. Vyjádřete vektor v několika různými způsoby jako lineární kombinaci vektorů u_1, u_2, u_3.



Obrázek 2.1: Obrázek k úloze 2.1

2.2. Je jeden vektor lineárně nezávislý?

2.3. Platí, že pokud jsou vektory lineárně nezávislé, nelze žádný z nich vyjádřit jako lineární kombinaci ostatních? Proč? Platí, že pokud jsou lineárně závislé, lze každý z nich vyjádřit jako lineární kombinaci ostatních? Proč? Uveďte příklady.

2.4. Dokažte, že pro každou množinu K ve vektorovém prostoru platí $K \subseteq \langle K \rangle$.

2.5. Jsou dány následující reálné funkce reálné proměnné:

$$f_1(x) = x + 1 \qquad f_2(x) = x^2 \qquad f_3(x) = x, \qquad f_4(x) = \sin x$$
$$f_5(x) = \frac{x}{13}, \qquad f_6(x) = 0, \qquad f_7(x) = 1, \qquad f_8(x) = \frac{13}{x}.$$

Zjistěte, grafy kterých z nich jsou vektorovými podprostory $\mathbb{R}^2$. (Graf funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je množina uspořádaných dvojic prvků $\mathbb{R}$ a jejich obrazů. Někdy se graf funkce ztotožňuje se samotnou funkcí.)

2.6. Charakterizujte všechny vektorové podprostory $\mathbb{R}^2$.

2.7. Jsou všechny vektorové podprostory $\mathbb{R}^2$ grafem nějaké funkce z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$? Jsou všechny jednorozměrné vektorové podprostory $\mathbb{R}^2$ grafem nějaké funkce z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$?

2.8. Charakterizujte všechny vektorové podprostory v $\mathbb{R}^3$.

2.9. Ověřte, že vztahy (2.2) a (2.3) opravdu definují na množině $U \times V$ strukturu vektorového prostoru.

Kapitola 3

Báze vektorových prostorů

3.1 Báze, dimenze a souřadnice

Uspořádanou m-tici $\alpha = (u_1, \ldots, u_m)$ vektorů vektorového prostoru U nazýváme jeho *báze* (celý pojem je tedy *báze vektorového prostoru*), pokud jsou vektory $u_1, \ldots, u_m$ lineárně nezávislé a pokud množina $\{u_1, \ldots, u_m\}$ generuje vektorový prostor U.

Následující Věta 3.1 poznatek, který je hluboký:

Věta 3.1. *Všechny báze vektorového prostoru U mají stejný počet prvků.*

Tuto větu lze dokázat pomocí následujících tvrzení. První z nich je variantou základní *Steinitzovy věty o výměně*:

Věta 3.2. *Mějme konečnou množinu vektorů $K = \{u_1, \ldots, u_k\} \subseteq U$ a nenulový vektor $v \in \langle K \rangle$. Pak existuje číslo $i \in \{1, \ldots, k\}$ takové, že když vektor u_i v množině K nahradíme vektorem v, bude výsledná množina generovat týž vektorový podprostor jako množina K. Jinak řečeno, pro množinu $\bar{K} = \{u_1, \ldots, u_{i-1}, v, u_{i+1}, \ldots, u_k\}$ platí $\langle \bar{K} \rangle = \langle K \rangle$.*

Důkaz Věty 3.2. Jelikož vektor v leží v lineárním obalu množiny K, je nějakou lineární kombinací vektorů $u_1, \ldots, u_k$. Je tedy

$$v = r^1 u_1 + \cdots + r^k u_k \tag{3.1}$$

pro nějaká čísla $r^1, \ldots, r^k$. Některé z těchto čísel je určitě nenulové, protože vektor v je nenulový.

Označme i jeden z indexů, pro které je $r^i \neq 0$. Pak (jak se můžete přesvědčit úpravou vztahu (3.1))

$$u_i = \frac{1}{r^i}(-r^1 u_1 - \cdots - r^{i-1} u_{i-1} + v - r^{i+1} u_{i+1} - \cdots - r^k u_k). \tag{3.2}$$

Pomocí vztahů (3.1) a (3.2) už můžeme dokázat tvrzení věty. Pokud je vektor w lineární kombinací vektorů $u_1, \dots, u_k$, pak dosazením za u_i podle (3.2) ho vyjádříme jako lineární kombinaci vektorů $u_1, \dots, u_{i-1}, v, u_{i+1}, \dots, u_k$. Naopak, pokud je vektor lineární kombinací vektorů $u_1, \dots, u_{i-1}, v, u_{i+1}, \dots, u_k$, vyjádříme ho dosazením z (3.1) jako lineární kombinaci vektorů $u_1, \dots, u_k$. Takže $\langle \bar{K} \rangle = \langle K \rangle$.

Věta 3.3. *Je-li v předchozí větě $L \subseteq K$ taková množina, že $v \notin \langle L \rangle$, pak číslo i lze vybrat tak, že $u_i \notin L$.*

Důkaz. Jelikož v není lineární kombinací vektorů z L, musí být na pravé straně (3.1) alespoň jeden vektor s nenulovým koeficientem, který neleží v L. To bude náš vektor u_i.

V následující větě značí $|K|$ a $|L|$ počet prvků množiny K a počet prvků množiny L.

Věta 3.4. *Jestliže $L \subseteq U$ je lineárně nezávislá množina s l prvky (tedy $|L| = l$) a $K \subseteq U$ konečná množina generující U, pak existuje l prvků z K, které když nahradíme všemi prvky z L, pak nová množina bude stále generovat U.*

Důkaz. Pomocí Věty 3.2 postupně nahradíme některé vektory množiny K všemi vektory množiny L. Díky Větě 3.3 to můžeme udělat tak, že vždy nahradíme vektor původní množiny K, nikdy ne už přidaný vektor množiny L. T

Z tohoto tvrzení samozřejmě plyne, že $|L| \leq |K|$.

Důkaz Věty 3.1. Jestliže K a L jsou dvě množiny vektorů tvořících bázi, pak podle Věty 3.4 platí $|L| \leq |K|$ a také $|K| \leq |L|$.

Počet prvků báze vektorového prostoru se nazývá jeho *dimenzí*.

Vektorový prostor U nemusí mít žádnou bázi, a tedy ani dimenzi. O takových vektorových prostorech říkáme, že mají nekonečnou dimenzi. I takové vektorové prostory se někdy v praxi hodí (v informatice např. v počítačové grafice).

O dimenzi vektorového prostoru U se dá říci, že to je největší možný počet lineárně nezávislých vektorů v U. U prostorů s nekonečnou dimenzí báze neexistuje proto, že lze nalézt libovolný konečný počet vektorů, které jsou lineárně nezávislé. Proto největší takový počet neexistuje. Dimenze U se dá také charakterizovat jeko nejmenší možný počet vektorů generujících U. Obě tvrzení si dokážete jako cvičení.

Je-li $\alpha = (u_1, \dots, u_m)$ báze vektorového prostoru U, pak rovnice $r^1 u_1 + \cdots + r^m u_m = v$ má právě jedno řešení $(r^1, \dots, r^m)$. Čísla $r^1, \dots, r^m$ obvykle značíme (pořadě) $v^1_\alpha, \dots, v^m_\alpha$, případně jen $v^1, \dots, v^m$ (pokud je báze, ve které vektor v vyjadřujeme, zřejmá z kontextu). Celou m-tici $(v^1_\alpha, \dots, v^m_\alpha)$ značíme v_α a nazýváme *souřadnicemi vektoru v v bázi α*. V případě, že nešetříme místem, ji píšeme do sloupce:

$$v_\alpha = \begin{pmatrix} v_\alpha^1 \\ v_\alpha^2 \\ \vdots \\ v_\alpha^m \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

m-ticím čísel jsme běžně zvyklí říkat vektory a mluvit např. o *násobení matice vektorem*. Jak víme, ve skutečnosti se o vektory opravdu jedná, a to konkrétně o vektory z vektorového prostoru R^m. Nesmíme ale zapomínat, že nejde o jediný možný typ vektorů.

Příklad 3.1. m-tice $\alpha = (u_1, \dots, u_m)$ vektorů v aritmetickém vektorovém prostoru R^m, kde

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots \quad , u_m = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

je báze vektorového prostoru R^m zvaná *kanonická báze*.

Sčítání vektorů a násobení skalárem lze počítat pomocí souřadnic. Pro libovolné dva vektory $v, w \in U$ a číslo r totiž platí:

$$(v+w)_\alpha = v_\alpha + w_\alpha, \tag{3.4}$$

$$(rv)_\alpha = r(v_\alpha), \tag{3.5}$$

kde na pravé straně sčítáme a násobíme číslem m-tici čísel.

3.2 Báze podprostorů

Jak víme, vektorový podprostor $V \subseteq U$ je sám vektorovým prostorem. Můžeme se tedy bavit i o jeho bázi a dimenzi. Co se o nich dá říci, ukazují následující tvrzení.

Věta 3.5. *Je-li* $\dim U = m$ *a* $V \subseteq U$ *je vektorový podprostor, pak* V *má bázi a* $\dim V \leq m$.

Důkaz. Je-li $(v_1, \dots, v_l)$ lineárně nezávislá l-tice vektorů z V, pak podle Věty 3.4 je $l \leq m$ (stačí vzít K jako množinu všech vektorů nějaké báze prostoru U a $L = \{v_1, \dots, v_l\}$). Proto existuje největší možný počet lineárně nezávislých vektorů v V, a tedy báze a dimenze.

Nerovnost plyne z toho, co je napsáno na začátku důkazu.

Věta 3.6. *Je-li* $\dim U = m$ *a* $V \subseteq U$ *je vektorový podprostor dimenze* n*, pak existuje báze* U*, jejíchž prvních* n *vektorů tvoří bázi* V.

Důkaz. Plyne přímo z Věty 3.4.

3.3 Matice přechodu

Je-li $\bar{\alpha} = (\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_m)$ druhá báze vektorového prostoru V, můžeme každý vektor báze α vyjádřit v této druhé bázi a souřadnice dát do tabulky:

$$\mathbf{M}_{\bar{\alpha},\alpha} = \begin{pmatrix} (u_1)^1_{\bar{\alpha}} & (u_2)^1_{\bar{\alpha}} & \cdots & (u_m)^1_{\bar{\alpha}} \\ (u_1)^2_{\bar{\alpha}} & (u_2)^2_{\bar{\alpha}} & \cdots & (u_m)^2_{\bar{\alpha}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (u_1)^m_{\bar{\alpha}} & (u_2)^m_{\bar{\alpha}} & \cdots & (u_m)^m_{\bar{\alpha}} \end{pmatrix}. \tag{3.6}$$

Možná už jste slyšeli, že takovým tabulkám čísel se říká *matice*. Uvedená matice má m řádků a m sloupců, proto se jí říká *čtvercová*. Matice mohou mít i jiný počet řádků než sloupců.

Jak lze snadno ověřit pomocí (3.4) a (3.5), pro každý vektor v platí

$$v_{\bar{\alpha}} = \mathbf{M}_{\bar{\alpha},\alpha} \cdot v_{\alpha}. \tag{3.7}$$

To je *násobení matice vektorem*, podrobnosti se dozvíte na přednášce a cvičení.

Matici $M_{\bar{\alpha},\alpha}$ tedy můžeme použít k výpočtu souřadnic vektoru v v bázi $\bar{\alpha}$ z jeho souřadnic v bázi α. Matice $M_{\bar{\alpha},\alpha}$ se nazývá *matice přechodu od báze* α *k bázi* $\bar{\alpha}$.

Pro matice přechodu také platí

$$\mathbf{M}_{\bar{\alpha},\alpha} \cdot \mathbf{M}_{\alpha,\bar{\alpha}} = \mathbf{E}_m, \tag{3.8}$$

$$\mathbf{M}_{\bar{\alpha},\alpha'} \cdot \mathbf{M}_{\alpha',\alpha} = \mathbf{M}_{\bar{\alpha},\alpha}, \tag{3.9}$$

kde α, α' a $\bar{\alpha}$ jsou libovolné báze a $\mathbf{E}_m$ je jednotková matice.

Vztah (3.8) říká, že matice $\mathbf{M}_{\alpha,\bar{\alpha}}$ je inverzní k matici $\mathbf{M}_{\bar{\alpha},\alpha}$ (a naopak). Vztah (3.9) umožňuje podstatné zjednodušení některých výpočtů, jak ještě uvidíme v dalším textu.

O násobení matic, jednotkové matici a inverzní matici k dané matici se podrobnosti rovněž dozvíte na přednášce a cvičení.

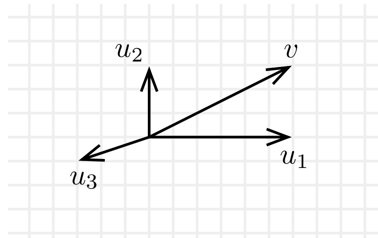
ÚLOHY KE KAPITOLE 3

3.1. Ověřte rovnice (3.4) a (3.5).

3.2. Dokažte tvrzení z textu: dimenze vektorového prostoru U je největší možný počet lineárně nezávislých vektorů v U a nejmenší možný počet vektorů generujících U.

3.3. Na obr. 3.1 jsou znázorněny vektory u_1, u_2, u_3 a v v dvojrozměrném vektorovém prostoru U. Odhadněte z obrázku souřadnice vektoru v vzhledem k bazím $\alpha_1 = (u_1, u_2)$, $\alpha_2 = (u_2, u_3)$ a $\alpha_3 = (u_3, u_1)$.

3.4. Je dvojice (u_3, v) z obr. 3.1 báze? Odhadněte to z obrázku a pak ověřte výpočtem pomocí souřadnicového vyjádření těchto vektorů v jedné z bazí α_1, α_2, α_3 (nebo ve více).



Obrázek 3.1: Obrázek k úloze 3.3

3.5. Najděte bázi $\beta = (w_1, w_2)$ vektorového prostoru z úlohy 3.3 tak, aby

1. $(u_1)_\beta = (1,1)$ a $(u_2)_\beta = (1,-1)$,
2. $(u_1)_\beta = (1,1)$ a $(u_2)_\beta = (3,-3)$,
3. $(u_1)_\beta = (128, \frac{1}{8192})$ a $(u_2)_\beta = (256, \frac{1}{1024})$.

Vektory w_1 a w_2 vyjádřete pomocí jedné z bazí α_1, α_2, α_3. Výsledek nejprve zkuste odhadnout z obrázku (pokud to lze), pak ho ověřte výpočtem. Pokud to lze, načrtněte bázi do obrázku.

3.6. Vypočtěte

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

3.7. Jak vypadá matice přechodu $\mathrm{M}_{\alpha,\alpha}$?

3.8. Napište všech šest možných netriviálních matic přechodu mezi bázemi $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ z úlohy 3.3 a zkuste je mezi sebou násobit.

3.9. Uveďte příklad vektorového prostoru dimenze 1, jehož prvky jsou uspořádané dvojice reálných čísel.

3.10. O polynomech jedné proměnné jsme už hovořili. Ukažte, že množina P všech polynomů libovolného stupně (se standardním sčítáním polynomů a násobním číslem) je vektorový prostor nekonečné dimenze.

3.11. Ukažte, že vektorový prostor P z předchozí úlohy je vektorovým podprostorem vektorového prostoru všech reálných funkcí $\mathrm{R} \to \mathrm{R}$ (polynomy v této úloze chápeme jako reálné funkce).

Kapitola 4

Lineární zobrazení

K pochopení pojmu lineárního zobrazení potřebujeme nejprve chápat obecný pojem zobrazení. Pokud budete mít s touto kapitolou problémy, mohlo by pomoci zopakovat si základy zobrazení z prvního semestru.

4.1 Definice a příklady

Zobrazení $\lambda : U \to V$ vektorových prostorů U a V se nazývá *lineární* (někdy též *homomorfismus vektorových prostorů*), jestliže pro každé vektory $u_1, u_2, u \in U$ a skalár r platí

$$\lambda(u_1 + u_2) = \lambda(u_1) + \lambda(u_2), \tag{4.1}$$

$$\lambda(ru) = r\lambda(u). \tag{4.2}$$

Podmínky (4.1) a (4.2) jsou ekvivalentní podmínce

$$\lambda(r^1 u_1 + r^2 u_2) = r^1 \lambda(u_1) + r^2 \lambda(u_2) \tag{4.3}$$

(pro každé $u_1, u_2 \in U$, $r^1, r^2 \in \mathrm{R}$).

Je-li lineární zobrazení prosté, nazývá se také *monomorphismus*. Surjektivnímu lineárnímu zobrazení se také říká *epimorfismus*.

Z definice lineárního zobrazení ihned plyne, že $\lambda(0) = 0$ (tj. obraz nulového vektoru v U je nulový vektor ve V). To lze dokázat různými způsoby, můžeme zkusit například tento:

$$\lambda(0) = \lambda(0 - 0) = \lambda(0) - \lambda(0) = 0.$$

Je-li $\alpha = (u_1, \ldots, u_m)$ báze vektorového prostoru U, platí pro každý vektor $u \in U$ (s použitím (4.3)):

$$\lambda(u) = \lambda(u_\alpha^1 u_1 + \cdots + u_\alpha^m u_m) = u_\alpha^1 \lambda(u_1) + \cdots + u_\alpha^m \lambda(u_m).$$

Hodnota zobrazení λ ve vektoru u tedy závisí jen na jeho hodnotách v prvcích báze α a na souřadnicích vektoru u v bázi α. Lineární zobrazení λ je tedy jednoznačně určeno hodnotami $\lambda(u_1),\ldots,\lambda(u_m) \in V$. Tento poznatek je důležitý sám o sobě. Současně také umožňuje zavést pojem matice lineárního zobrazení.

Příklad 4.1 (Identita)**.** Uvažme identické zobrazení (identitu) Id_U na vektorovém prostoru U, tedy zobrazení $\mathrm{Id}_U : U \to U$, které každému vektoru $u \in U$ přiřazuje týž vektor u. Jinými slovy, zobrazení je dáno předpisem

$$\mathrm{Id}_U(u) = u. \tag{4.4}$$

Ukážeme, že zobrazení je lineární. Uděláme to tak, že dokážeme, že zobrazení splňuje podmínku (4.3). V důkazu přitom třikrát použijeme vlastnost (4.4).

Levá strana (4.3) se pro naše zobrazení upraví takto:

$$\mathrm{Id}_U(r^1u_1 + r^2u_2) = r^1u_1 + r^2u_2,$$

pravá:

$$r^1\mathrm{Id}_U(u_1) + r^2\mathrm{Id}_U u_2 = r^1u_1 + r^2u_2.$$

Levá a pravá strana se tedy rovnají a důkaz je proveden

Příklad 4.2 (Konstanta)**.** Konstantní zobrazení (konstanta) dvou vektorových prostorů U a V je zobrazení $f : U \to V$, které každému vektoru vektorového prostoru U přiřazuje týž vektor z V. Jinými slovy, existuje vektor $v_0 \in V$ takový, že pro každý vektor $u \in U$ platí $f(u) = v_0$ (všimněte si, že podmínka obsahuje kvantifikátor *existuje* a po něm kvantifikátor *pro každý*).

Pokusíme se zjistit, zda, případně za jakých okolností, je konstantní zobrazení lineární. Odpověď na to je ve skutečnosti snadná, protože už víme, že pro každé lineární zobrazení λ se nulový vektor zobrazí na nulový vektor, neboli $\lambda(0) = 0$. Jelikož pro naše zobrazení f platí $f(0) = v_0$, musí být $v_0 = 0$. Budeme ale předstírat, že tato skutečnost nám není známa a podíváme se na naši konstantu od začátku.

V případě, že f je lineární, musí pro libovolný vektor $u \in U$ platit

$$v_0 = f(u+u) = f(u) + f(u) = v_0 + v_0,$$

neboli

$$v_0 = v_0 + v_0.$$

Přičtením $-v_0$ k oběma stranám dostaneme

$$0 = v_0.$$

Dospěli jsme tedy znovu ke stejnému výsledku: aby zobrazení f bylo lineární, musí být $v_0 = 0$.

To ale ještě není konec, protože pro tuto možnost ještě nevíme, zda zobrazení je lineární, nebo ne. Abychom to zjistili, ověříme platnost podmínky (4.3) (za předpokladu $v_0 = 0$). Levá strana:

$$f(r^1 u_1 + r^2 u_2) = 0,$$

pravá strana:

$$r^1 f(u_1) + r^2 f u_2 = r^1 \cdot 0 + r^2 \cdot 0 = 0 + 0 = 0.$$

Levá a pravá strana se tedy rovnají a máme úplnou odpověď: ze všech konstantních zobrazení $f : U \to V$ je lineární jedině nulové. Neboli: konstantní zobrazení $f : U \to V$ dané předpisem $f(u) = v_0$ pro pevné v_0 je lineární právě když $v_0 = 0$.

Příklad 4.3 (Sčítání vektorů)**.** Sčítání vektorů vektorového prostoru U je zobrazení, které dvojici vektorů $u, v \in U$ přiřadí třetí vektor prostoru U značený $u + v$. Je to tedy zobrazení z množiny $U \times U$ do množiny U. Víme ze druhé kapitoly, že množinu $U \times U$ můžeme opět chápat jako vektorový prostor. Zobrazení $f : U \times U \to U$, které dvojici vektorů přiřadí jejich součet, je tedy zobrazení vektorových prostorů a můžeme se ptát, zda je lineární.

Ještě si ujasníme značení. Prvky prostoru $U \times U$ jsou dvojice vektorů z U, tedy například (u, v), kde u i v jsou vektory z U. Obraz takové dvojice při zobrazení f je součet jejích složek, tedy

$$f(u, v) = u + v. \tag{4.5}$$

Formalista by nás upozornil, že vlevo by se mělo psát $f((u, v))$, protože obraz prvku x při zobrazení f je $f(x)$ a v našem případě $x = (u, v)$. My si ale jedny závorky odpustíme a ani nás to nepoplete. A druhá poznámka: možná bychom měli ale být důslednější a dvojici (u, v) psát do sloupce:

$$f \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = u + v. \tag{4.6}$$

Při zjišťování, zda je f lineární, použijeme pro změnu přímo definici lineárního zobrazení, tedy podmínky (4.1) a (4.2). Podmínka (4.1) říká, že součet dvou vektorů se má zobrazit na součet jejich obrazů. Naše dva vektory jsou ovšem dvě dvojice vektorů, označíme si je třeba (u_1, v_1) a (u_2, v_2). Jejich součet (jakožto součet ve vektorovém prostoru $U \times U$!) je dvojice $(u_1 + u_2, v_1 + v_2)$ — to plyne přímo z definice součinu vektorových prostorů, konkrétně ze vztahu (2.2).

Podmínka (4.1) vypadá v našem případě takto:

$$f\left(\begin{pmatrix}u_1\\v_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}u_2\\v_2\end{pmatrix}\right)=f\begin{pmatrix}u_1\\v_1\end{pmatrix}+f\begin{pmatrix}u_2\\v_2\end{pmatrix}.$$

Takže začneme psát levou stranu podmínky pro naše dvě dvojice a pokusíme se dobrat k pravé straně:

$$\begin{aligned}f\left(\begin{pmatrix}u_1\\v_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}u_2\\v_2\end{pmatrix}\right)&=f\begin{pmatrix}u_1+u_2\\v_1+v_2\end{pmatrix}=(u_1+u_2)+(v_1+v_2)\\&=(u_1+v_1)+(u_2+v_2)=f\begin{pmatrix}u_1\\v_1\end{pmatrix}+f\begin{pmatrix}u_2\\v_2\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Tak se nám to povedlo. Použili jsme postupně vztah (2.2), definici zobrazení f (4.6), asociativitu a komutativitu sčítání vektorů a nakonec opět definici zobrazení f.

Teď ještě dokázat podmínku (4.2). Udělám to už jen stručně:

$$f\left(r\cdot\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}\right)=f\begin{pmatrix}ru\\rv\end{pmatrix}=ru+rv=r(u+v)=r\cdot f\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}$$

(už sami si najděte vztahy, které jsem tady použil).

Dokázali jsme tedy, že sčítání vektorů je lineární zobrazení.

4.2 Obraz a jádro lineárního zobrazení

Množina $\lambda(U)$, tedy obraz množiny U při zobrazení λ se nazývá *obraz (image) zobrazení* λ. Značí se také $\mathrm{im}\lambda$. Připomeňme, že $\lambda(U)$ je množina všech vektorů z V, které jsou obrazy vektorů z U, tedy $\lambda(U)=\{v\in V \mid \text{existuje } u\in U \text{ takové, že } v=\lambda(u)\}$.

Odtud plyne následující jednoduché tvrzení:

Věta 4.1. *$\lambda(U)$ je vektorový podprostor vektorového prostoru V.*

Důkaz. Jak víme, stačí dokázat, že pro libovolné dva vektory z $\lambda(U)$ leží libovolná jejich lineární kombinace v $\lambda(U)$. Zvolme tedy $v_1,v_2\in\lambda(U)$ a čísla r^1,r^2. Dokážeme, že $r^1v_1+r^2v_2$ leží v $\lambda(U)$.

Jelikož $v_1,v_2\in\lambda(U)$, pak podle definice existují vektory $u_1,u_2\in U$ jejichž obrazy při zobrazení λ jsou vektory v_1 a v_2. Zkoumaná lineární kombinace má tedy tvar $r^1\lambda(u_1)+r^2\lambda(u_2)$. Jelikož λ je lineární zobrazení, platí $r^1\lambda(u_1)+r^2\lambda(u_2)=\lambda(r^1u_1+r^2u_2)$. Zkoumanou lineární kombinaci jsme tedy vyjádřili jako obraz nějakého vektoru z U (konkrétně vektoru $r^1u_1+r^2u_2$).

Tedy $r^1\lambda(u_1)+r^2\lambda(u_2)\in\lambda(U)$, což dokazuje, že $\lambda(U)\subseteq V$ je vektorový podprostor.

Množina $\ker\lambda = \{u \in U \mid \lambda(u) = 0\}$ (tedy vzor množiny $\{0\}$ při zobrazení λ) se nazývá *jádro lineárního zobrazení* λ.

Věta 4.2. *$\ker\lambda$ je vektorový podprostor vektorového prostoru U.*

Důkaz. Cvičení.

V následujících příkladech se vrátíme k příkladům lineárních zobrazení z minulé podkapitoly a podíváme se na jejich jádro a obraz.

Příklad 4.4 (Identita)**.** Jádrem identity Id_U je množina $\{0\}$ obsahující jen nulový vektor prostoru U. Každý jiný vektor než nulový se totiž zobrazí na nenulový vektor (sebe sama). Obrazem této identity je samozřejmě celý vektorový prostor U.

Příklad 4.5 (Nulové zobrazení)**.** Jádrem nulového konstantního zobrazení $f : U \to V$, které každému vektoru z U přiřazuje nulový vektor z V, je celá množina U, protože pro libovolný vektor $u \in U$ platí $f(u) = 0$. Obrazem nulového zobrazení je množina $\{0\}$. Na žádný jiný vektor z V se vektoru z U nezobrazují.

Příklad 4.6 (Sčítání vektorů)**.** Co je jádrem a obrazem zobrazení $f : U \times U \to U$ daného předpisem $f(u,v) = u + v$? Podle definice to má být množina všech vektorů $(u,v) \in U \times U$ (vektory z $U \times U$ jsou dvojice) takových, že $f(u,v) = 0$, tedy $u + v = 0$. Je to tedy množina všech dvojic $(u,-u)$, kde $u \in U$. Symbolicky: $\ker f = \{(u,-u) \in U \times U \mid u \in U\}$.

Obraz zobrazení f je celá množina U, protože každý vektor $w \in U$ je součtem nějakých dvou vektorů (např. $w = 0 + w$).

Teď si postupně ukážeme několik základních vlastností jádra a obrazu lineárního zobrazení $\lambda : U \to V$: jaký vztah mají jejich dimenze a jak souvisí s injektivitou zobrazení. Začneme pomocným tvrzením.

Věta 4.3. *Jestliže $(u_1, \ldots, u_m)$ je báze vektorového prostoru U, pak vektory $\lambda(u_1), \ldots, \lambda(u_m)$ generují vektorový prostor $\lambda(U)$.*

Důkaz. Je to vcelku jednoduché cvičení na pojem obrazu zobrazení, důkaz nechám na vás.

Věta 4.4. *$\dim\lambda(U) = \dim U - \dim\ker\lambda$.*

Důkaz. Označme $m = \dim U$, $k = \dim\ker\lambda$, $l = \dim\lambda(U)$. Podle Věty 3.6 existuje báze $(u_1, \ldots, u_m)$ vektorového prostoru U tak, že jejích prvních k vektorů tvoří bázi vektorového podprostoru $\ker\lambda$.

Vektory $u_1, \ldots, u_k$ leží v jádru zobrazení λ, což přesně podle definice jádra znamená, že se všechny zobrazí na nulový vektor: $\lambda(u_1) = \cdots = \lambda(u_k) = 0$.

Podle předchozí věty je prostor $\lambda(U)$ generovaný vektory $\lambda(u_1), \ldots, \lambda(u_m)$. Prvních k těchto vektorů je ovšem nulových, takže prostor $\lambda(U)$ je generovaný i vektory $\lambda(u_{k+1}), \ldots,$

$\lambda(u_m)$. Ukážeme, že tyto vektory jsou lineárně nezávislé (a tvoří tedy bázi vektorového prostoru $\lambda(U)$).

Víme, co dělat, když máme ověřit lineární nezávislost vektorů. Napíšeme si takovou rovnici:

$$r^{k+1}\lambda(u_{k+1}) + \cdots + r^m\lambda(u_m) = 0 \tag{4.7}$$

a pokusíme se z ní odvodit, že čísla $r^{k+1}, \ldots r^m$ jsou všechna nulová. Jelikož zobrazení λ je lineární, můžeme rovnici přepsat takto (podle (4.3) rozšířeném na víc vektorů):

$$\lambda(r^{k+1}u_{k+1} + \cdots + r^m u_m) = 0. \tag{4.8}$$

Vidíme, že vektor $r^{k+1}u_{k+1} + \cdots + r^m u_m$ leží v jádru lineárního zobrazení λ. Musí tedy být lineární kombinací vektorů $u_1, \ldots, u_k$. Takže pro nějaká čísla $s^1, \ldots, s^k$ musí platit

$$r^{k+1}u_{k+1} + \cdots + r^m u_m = s^1 u_1 + \cdots + s^k u_k,$$

neboli

$$s^1 u_1 + \cdots + s^k u_k - r^{k+1}u_{k+1} - \cdots - r^m u_m = 0.$$

Vektory $u_1, \ldots, u_m$ ovšem tvoří bázi vektorového prostoru U. Jsou tedy lineárně nezávislé a všechna čísla $s^1, \ldots, s^k, r^{k+1}, \ldots r^m$ jsou nulová. To jsme potřebovali dokázat (přesně řečeno, stačilo nám to dokázat pro čísla $r^{k+1}, \ldots r^m$, zbytek je bonus). Vektory $\lambda(u_{k+1}), \ldots, \lambda(u_m)$ jsou tedy lineárně nezávislé a tvoří tak bázi vektorového prostoru $\lambda(U)$. Jejich počet je $m-k$, takže $\dim\lambda(U) = m-k$, což jsme potřebovali dokázat.

Věta 4.5. *Lineární zobrazení je prosté, právě když je jeho jádro rovno* $\{0\}$.

Důkaz. Tvrzení má tvar ekvivalence („právě když"), proto dokážeme obě implikace.

Nejprve budeme předpokládat, že lineární zobrazení $\lambda : U \to V$ je prosté. Víme, že $0 \in U$ leží v jeho jádru. Kdyby v něm ležel i jiný vektor $u \in U$, pak $\lambda(u) = 0$ a z injektivnosti plyne $u = 0$. Proto v jádru neleží žádný jiný vektor než nulový.

Předpokládejme naopak, že $\ker\lambda = \{0\}$ a zvolme dva vektory $u_1, u_2 \in U$. Co by se stalo, kdyby $\lambda(u_1) = \lambda(u_2)$? To by znamenalo, že $\lambda(u_1) - \lambda(u_2) = 0$, což ovšem podle definice lineárního zobrazení znamená, že $\lambda(u_1 - u_2) = 0$. Vektor $u_1 - u_2$ tedy leží v jádru zobrazení λ, takže podle předpokladu $u_1 - u_2 = 0$ (0 je jediný vektor ležící v jádru). Z toho plyne, že $u_1 = u_2$, což dokazuje injektivnost (vyšli jsme z předpokladu, že $\lambda(u_1) = \lambda(u_2)$ a dospěli k závěru, že pak $u_1 = u_2$).

4.3 Matice lineárního zobrazení

Kromě báze $\alpha = (u_1, \dots, u_m)$ vektorového prostoru U zvolme navíc bázi $\beta = (v_1, \dots, v_n)$ vektorového prostoru V a vyjádřeme v ní prvky $\lambda(u_1), \dots, \lambda(u_m)$. Dostaneme n-tice

$$\lambda(u_1)_\beta = \begin{pmatrix} \lambda(u_1)^1_\beta \\ \lambda(u_1)^2_\beta \\ \vdots \\ \lambda(u_1)^n_\beta \end{pmatrix} \quad \dots \quad \lambda(u_m)_\beta = \begin{pmatrix} \lambda(u_m)^1_\beta \\ \lambda(u_m)^2_\beta \\ \vdots \\ \lambda(u_m)^n_\beta \end{pmatrix}.$$

Pro souřadnicové vyjádření vektoru $\lambda(u)$ v bázi β platí

$$\begin{aligned} \lambda(u)_\beta &= u^1_\alpha \lambda(u_1)_\beta + \dots + u^m_\alpha \lambda(u_m)_\beta \\ &= u^1_\alpha \begin{pmatrix} \lambda(u_1)^1_\beta \\ \lambda(u_1)^2_\beta \\ \vdots \\ \lambda(u_1)^n_\beta \end{pmatrix} + \dots + u^m_\alpha \begin{pmatrix} \lambda(u_m)^1_\beta \\ \lambda(u_m)^2_\beta \\ \vdots \\ \lambda(u_m)^n_\beta \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

To lze napsat jako součin jisté matice s vektorem u_α:

$$\lambda(u)_\beta = \mathrm{M}^\lambda_{\beta,\alpha} \cdot u_\alpha, \tag{4.9}$$

kde matice $\mathrm{M}^\lambda_{\beta,\alpha}$ je dána takto:

$$\mathrm{M}^\lambda_{\beta,\alpha} = \begin{pmatrix} \lambda(u_1)^1_\beta & \lambda(u_2)^1_\beta & \cdots & \lambda(u_m)^1_\beta \\ \lambda(u_1)^2_\beta & \lambda(u_2)^2_\beta & \cdots & \lambda(u_m)^2_\beta \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda(u_1)^n_\beta & \lambda(u_2)^n_\beta & \cdots & \lambda(u_m)^n_\beta \end{pmatrix}. \tag{4.10}$$

Matice obsahuje ve sloupcích souřadnice obrazů vektorů báze α v bázi β. Jmenuje se *matice lineárního zobrazení λ vzhledem k bazím α a β.*

Jak vidíme z (4.10), matice $M^\lambda_{\beta,\alpha}$ se zkonstruuje tak, že se do sloupců napíší souřadnicová vyjádření obrazů vektorů báze α v bázi β. To je dobré si zapamatovat, protože je to praktický způsob, jak matici lineárního zobrazení sestavit.

Užitečnost matice lineárního zobrazení vyplývá ze vztahu (4.9). Ten ukazuje, že známe-li matici lineárního zobrazení vzhledem k bazím α a β, lze s její pomocí vypočítat souřadnice obrazu libovolného vektoru (v bázi β), známe-li jeho souřadnice v bázi α.

Mějme třetí vektorový prostor W a jeho bázi γ a lineární zobrazení $\mu : V \to W$. Z asociativity násobení matic lze snadno odvotit následující stěžejní vzorec:

$$M^{\mu\circ\lambda}_{\gamma,\alpha} = M^\mu_{\gamma,\beta} \cdot M^\lambda_{\beta,\alpha}. \tag{4.11}$$

Lineární zobrazení $\lambda : U \to U$ se nazývá *lineární transformace vektorového prostoru* U. Pro bázi α prostoru U značíme matici $\mathrm{M}^{\lambda}_{\alpha,\alpha}$ jednoduše M^{f}_{α} a říkáme jí *matice lineární transformace* λ *vzhledem k bázi* α.

Matice přechodu mezi dvěma bázemi je speciálním případem matice lineárního zobrazení. Podrobnosti najdete v úloze 4.12.

ÚLOHY KE KAPITOLE 4

4.1. Ukažte, že podmínky (4.1) a (4.2) jsou opravdu ekvivalentní podmínce (4.3).

4.2. Zjistěte podle definice, které z funkcí z úlohy 2.5 jsou lineárními zobrazeními.

4.3. Charakterizujte všechna lineární zobrazení z R do R.

4.4. Dokažte, že jádro lineárního zobrazení je vektorový podprostror.

4.5. Dokažte Větu 4.3.

4.6. Dokažte, že libovolný násobek lineárního zobrazení $\lambda : U \to V$ je lineární zobrazení. Dokažte, že součet libovolných dvou lineárních zobrazení $\lambda_1, \lambda_2 : U \to V$ je lineární zobrazení. (Násobek zobrazení λ číslem r je zobrazení značené $r\lambda$ a definované předpisem $(r\lambda)(u) = r \cdot \lambda(u)$. Součet zobrazení λ_1, λ_2 je zobrazení znašené $\lambda_1 + \lambda_2$ a definované předpisem $(\lambda_1 + \lambda_2)(u) = \lambda_1(u) + \lambda_2(u)$.)

4.7. Je dáno zobrazení $f : \mathrm{R} \times U \to U$, které dvojici čísla $r \in \mathrm{R}$ a vektoru $u \in U$ přiřadí násobek vektoru u číslem r. Je tedy dáno předpisem $f(r,u) = ru$. Je to lineární zobrazení?

4.8. Pro zadané číslo $r \in \mathrm{R}$ definujme zobrazení $f_r : U \to U$ předpisem $f_r(u) = ru$. Je toto zobrazení lineární?

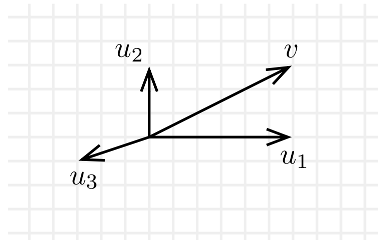
4.9. Mějme zobrazení $\mathrm{d} : \mathrm{P}_n \to \mathrm{P}_n$, které každému polynomu přiřadí jeho derivaci. Ukažte, že d je lineární zobrazení a najděte jeho jádro a obraz. Zkonstruujte jeho matici vzhledem k nějaké bázi prostoru P_n.

4.10. Lineární zobrazení zobrazí vektor o souřadnicích $(1,2,-1)$ na číslo 1 a vektor o souřadnicích $(2,-4,0)$ na číslo -2. Na jaké číslo zobrazí vektor o souřadnicích $(0,4,-1)$? A vektor o souřadnicích $(2,0,2)$?

4.11. Pro funkce z úlohy 2.5, které jsou lineárními zobrazeními, napište jejich matice vzhledem k bázi $\alpha = (1)$.

4.12. Dokažte, že pro báze α a β vektorového prostoru U platí $\mathrm{M}_{\beta,\alpha} = \mathrm{M}^{\mathrm{id}_U}_{\beta,\alpha}$, kde id_U je identické zobrazení prostoru U, tedy zobrazení dané předpisem $\mathrm{id}_U(u) = u$.

4.13. Vraťme se k úloze 3.3 a uvažujme lineární zobrazení $\lambda : U \to \mathrm{R}$ takové, že $\lambda(u_1) = 1$ a $\lambda(u_3) = 1$. Napište matice $\mathrm{M}^{\lambda}_{\beta,\alpha}$, kde α jsou postupně báze α_1, α_2 a α_3 a β je báze R tvořená vektorem -1. Čemu se rovná $\lambda(v)$? Ověřte na nalezených maticích. Abyste měli obrázek po ruce zopakuji ho tady.



Obrázek 4.1: Obrázek k úloze 3.3 znovu

4.14. Podobně jako v předchozím příkladě napište všechny matice $\mathbf{M}^{\lambda}_{\alpha,\beta}$, kde $\lambda : \mathbf{R} \to U$ je lineární zobrazení takové, že $\lambda(1) = v$ a báze α a β jsou stejné jako v předchozím příkladě. Čemu se rovná $\lambda(2)$? Ověřte na nalezených maticích.

4.15. Navažme ještě jednou na úlohu 3.3 a uvažme lineární zobrazení $\lambda : U \to U$ takové, že $\lambda(u_1) = u_2$ a $\lambda(u_2) = u_3$. Najděte matice zobrazení λ vzhledem ke všem možným dvojicím bazí α_1, α_2 a α_3. Čemu se rovná $\lambda(v)$? Odhadněte a pak ověřte na nalezených maticích.

Kapitola 5

Více o maticích

5.1 Hodnost

Uvažujme matici M o m sloupcích a n řádcích. Její sloupce jsou vektory v R^m, řádky vektory v R^n. Součin matice s vektorem $u \in \mathrm{R}^m$, tedy $M \cdot u$ je vektor v R^n. Zobrazení $\lambda^M : \mathrm{R}^m \to \mathrm{R}^n$ dané předpisem

$$\lambda^M(u) = M \cdot u \tag{5.1}$$

je lineární zobrazení a matice M je jeho maticí vzhledem ke kanonickým bazím v R^m a R^n.

Každá hodnota $\lambda^M(u)$ je podle uvedeného vzorečku lineární kombinací sloupců matice s koeficienty danými složkami vektoru u. Všechny možné takové lineární kombinace tedy tvoří obraz lineárního zobrazení λ^M, neboli množinu $\mathrm{im}\,\lambda^M$. Jde, jak víme, o vektorový podprostor vektorového prostoru R^n, a to o podprostor generovaný sloupci matice. Jeho dimenze se nazývá *hodnost matice M* a značí $\mathrm{rank}\,M$.

Dá se také říci, že hodnost matice M je maximální počet jejích lineárně nezávislých sloupců. (Prostě ze sloupců matice postupně odebíráme sloupce, které jsou lineární kombinací ostatních, dokud to jde. Zbytek je báze podprostoru generovaného sloupci a počet sloupců v ní je tedy jeho dimenze.)

Hodnost matice M je také rovna dimenzi vektorového podprostoru prostoru R^m generovaného řádky matice. Toto zajímavé tvrzení není obtížné dokázat, ale my to tady dělat nebudeme.

Maximální možná hodnost matice M je tedy rovna $\min(m,n)$.

5.2 Permutace

Přečtěte si v materiálech, které jsem vám rozdal.

5.3 Determinant

Přečtěte si v materiálech, které jsem vám rozdal.

5.4 Inverzní matice

Mějme čtvercovou matici M o m řádcích a sloupcích. *Inverzní maticí matice* M nazýváme matici N takovou, že

$$M \cdot N = N \cdot M = I \tag{5.2}$$

(jednotková matice).

Chápeme-li matici M jako matici lineárního zobrazení λ^M (nebo libovolného jiného; je to jedno), pak N musí být podle (4.11) matice inverzního zobrazení k zobrazení λ. Proto

Věta 5.1. *Inverzní matice k matici M existuje právě když zobrazení λ^M je izomorfismus a to je právě když matice M je regulární.*

Inverzní matici k matici M značíme M^{-1}.

Na cvičení si ukážete jednoduchý způsob, jak k dané čtvercové matici inverzní matici najít.

Kapitola 6

Soustavy lineárních rovnic

6.1 Základy

Soustava n lineárních rovnic o m neznámých je soustava rovnic

$$\begin{aligned} a^1_1 x^1 + a^1_2 x^2 + \cdots + a^1_m x^m &= b^1 \\ a^2_1 x^1 + a^2_2 x^2 + \cdots + a^2_m x^m &= b^2 \\ &\vdots \\ a^n_1 x^1 + a^n_2 x^2 + \cdots + a^n_m x^m &= b^n \end{aligned} \tag{6.1}$$

(Nezapomeňte, že horní indexy jsou jen indexy, nikoli mocniny; jak jsem říkal na přednášce, tento zápis používal Einstein, tak nemůže být hloupý.)

Symboly $x^1, \ldots, x^m$ označují *neznámé* soustavy rovnic. Ostatní symboly v (6.1) značí konkrétní čísla: čísla a^j_i jsou *koeficienty* soustavy a b^j *pravé strany* ($i \in \{1, \ldots, m\}$, $j \in \{1, \ldots, n\}$).

Jsou-li všechny pravé strany rovny nule, říkáme, že soustava rovnic je *homogenní*. Obecný případ je pak *nehomogenní* soustava lineárních rovnic.

Řešení soustavy rovnic (6.1) je m-tice čísel $u = (u^1, \ldots, u^m)$ taková, že když v rovnicích za každou neznámou x^i dosadíme hodnotu u^i, dostaneme rovnosti.

Obecně vzato, soustava rovnic by mohla mít jedno řešení, mohla by jich mít i víc, a také by nemusela mít řešení žádné. Všechny tyto možnosti mohou u soustav lineárních rovnic nastat s tím, že pokud je řešení více než jedno, je jich vždy nekonečně mnoho (není těžké najít příklady). Proto obecně mluvíme o *množině řešení soustavy rovnic*, která tedy může být jednoprvková, nekonečná nebo prázdná.

Řešení soustavy lineárních rovnic se většinou hledá pomocí *ekvivalentních úprav*, které spočívají v postupném převádění soustavy na jinou soustavu tak, aby se množina řešení nezměnila. Jsou to úpravy, pro které platí, že každé řešení původní soustavy je i řešením soustavy upravené a že od upravené soustavy se lze opět pomocí takové úpravy vrátit k soustavě původní. Základní ekvivalentní úpravy soustav lineárních rovnic jsou tyto:

1. Výměna dvou rovnic. Opačná úprava: tatáž výměna dvou rovnic.
2. Vynásobení rovnice nenulovým číslem. Opačná úprava: vynásobení rovnice převrácenou hodnotou čísla.
3. Přičtení k-násobku jedné rovnice k druhé. Opačná úprava: přičtení $(-k)$-násobku první rovnice k druhé.

6.2 Maticový tvar

Když označíme

$$M = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_m^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_m^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^n & a_2^n & \cdots & a_m^n \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^m \end{pmatrix}, \quad v_0 = \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \\ \vdots \\ b^n \end{pmatrix},$$

můžeme soustavu rovnic (6.1) přepsat takto:

$$M \cdot u = v_0. \tag{6.2}$$

Je to tzv. *maticový tvar* soustavy rovnic (6.1). (Jde vlastně o jednu rovnici, ale vektorovou; na levé i pravé straně rovnice máme vektor.) Dává nám lépe pochopit, o co v soustavách rovnic jde. Máme dánu matici M a číselný vektor v_0, který má stejně složek jako matice M řádků. A hledáme číselný vektor u, který splňuje rovnici (6.2). V soustavách lineárních rovnic je tedy neznámou vektor. O tomto tématu ještě více za chvíli.

Matici M nazýváme *maticí soustavy* (6.1), vektor v_0 *vektorem pravých stran* a vektor u *vektorem neznámých*.

Ekvivalentní úpravy soustavy rovnic uvedené před chvílí se tedy dají vyjádřit násobením regulární maticí. Máme-li regulární čtvercovou matici A typu $n \times n$, pak jistě pro každý vektor u splňující rovnici (6.2) platí i

$$(A \cdot M) \cdot u = A \cdot v_0$$

(což by byl maticový tvar soustavy rovnic po úpravě). A vzhledem k tomu, že matice A je regulární, má i inverzi, takže úpravou nové rovnice se můžeme dostat zpět ke staré:

$$(A^{-1} \cdot A \cdot M) \cdot u = (A^{-1} \cdot A) \cdot v_0,$$

takže

$$M \cdot u = v_0.$$

Jak vyjádřit jednoduché řádkové úpravy matic násobením jinými maticemi jsme si už ukazovali na dřívějších přednáškách. Ukážu jen dva jednoduché příklady.

Výměnu prvního a druhého řádku v matici o třech řádcích realizujeme vynásobením maticí

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Přičtení dvojnásobku prvního řádku ke druhému maticí

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Obě matice jsou regulární. Jejich inverzní matice realizují opačnou řádkovou úpravu. Tedy v případě první matice opět výměnu prvních dvou řádků (inverzní matice je tedy tatáž), v případě druhé odečtení dvojnásobku prvního řádku od druhého.

Když děláme základní ekvivalentní úpravy soustavy rovnic (6.1), pracujeme samozřejmě i s pravými stranami. Stejně, když upravujeme matici M v maticovém tvaru (6.2), musíme upravovat i vektor pravých stran (v uvedeném výpočtu násobíme maticí A i vektor pravých stran). To si můžeme zjednodušit vytvořením nové matice $\bar{M}$, která vznikne z matice M přidáním vektoru pravých stran. Symbolicky:

$$\bar{M} = (M \mid v_0)$$

Matici $\bar{M}$ říkáme *rozšířená matice soustavy rovnic* (6.1). Řádkové úpravy pak můžeme dělat prostě na ní.

Systematicky se řádkové úpravy matice $\bar{M}$ dělají tak, že ji převádíme *Gaussovou eliminační metodou* na tzv. *schodovitý tvar*. Z něj se pak množina řešení soustavy dá snadno zjistit. Podrobnosti se dozvíte na cvičení.

Maticový tvar nám ještě pomůže k tomuto poznatku: součin $M \cdot u$ představuje lineární kombinaci sloupců matice M s koeficienty rovnými složkám vektoru u (to už víme). Aby soustava měla řešení, musí být vektor pravých stran lineární kombinací sloupců matice M. (Jinými slovy, musí ležet ve vektorovém podprostoru R^n generovaném sloupci matice.) Rozšířená matice soustavy musí mít tedy stejnou hodnost, jako matice M, protože vektorový podprostor generovaný sloupci matic M a $\bar{M}$ musí být týž (a má tedy stejnou dimenzi, což je hodnost matice). Dostáváme první důležitý teoretický poznatek o soustavách lineárních rovnic:

Věta 6.1 (Frobeniova)**.** *Soustava rovnic (6.1) má řešení právě když hodnost matice soustavy je rovna hodnosti rozšířené matice soustavy.*

6.3 Lineární zobrazení v soustavách lineárních rovnic

Jak víme, zobrazení, které číselnému vektoru přiřadí jeho součin s nějakou maticí, je lineární. Přesněji řečeno, pro matici M zavedenou dříve, je zobrazení $\lambda^M : \mathrm{R}^m \to \mathrm{R}^n$, které vektoru $u \in \mathrm{R}^m$ přiřadí součin $M \cdot u$ lineární. Podle toho, jak jsem zobrazení teď definoval, je lze zadat předpisem

$$\lambda^M(u) = M \cdot u. \tag{6.3}$$

Naši soustavu lineárních rovnic v maticovém tvaru (6.2) tedy můžeme přepsat takto:

$$\lambda^M(u) = v_0. \tag{6.4}$$

Naopak, libovolné lineární zobrazení $\lambda : U \to V$ lze po volbě bazí α vektorového prostoru U a β vektorového prostoru V charakterizovat maticí $M^{\lambda}_{\beta,\alpha}$. Úvahy o soustavách lineárních rovnic se tedy nevztahují jen na lineární zobrazení aritmetických vektorových prostorů, ale na všechna lineární zobrazení libovolných vektorových prostorů konečné dimenze.

Podívejme se nyní, co lze říci o soustavách lineárních rovnic z pohledu lineárních zobrazení. Začneme homogenními soustavami.

Homogenní soustava lineárních rovnic zapsaná ve tvaru (6.4) je

$$\lambda^M(u) = 0. \tag{6.5}$$

Množina řešení soustavy je tedy přesně jádro lineárního zobrazení λ^M. Ze znalosti toho, jak vypadá jádro lineárního zobrazení (Věta 4.2), tedy můžeme říci, že množina všech řešení soustavy je určitě vektorový podprostor R^m. K nalezení řešení stačí nalézt bázi tohoto podprostoru, protože všechna další řešení jsou pak lineárními kombinacemi prvků báze. Taková báze se nazývá *fundamentální systém řešení* dané homogenní soustavy lineárních rovnic.

Počet vektorů fundamentálního systému řešení vyplývá z Věty 4.4. Je roven dimenzi jádra zobrazení λ^M a hodnost matice M je rovna dimenzi obrazu $\lambda^M(\mathrm{R}^m)$. Počet vektorů fundamentálního systému řešení je tedy $m - \operatorname{rank} M$.

Teď se budeme věnovat nehomogenním soustavám lineárních rovnic. Množina vektorů $u \in \mathrm{R}^m$ splňujících nehomogenní vektorovou rovnici (6.4), již není vektorovým podprostorem vektorového prostoru R^m. To je jasné například z této úvahy: kdyby vektor u byl řešením rovnice pro $v_0 \neq 0$ a množina všech řešení byla vektorovým podprostorem, pak by i vektor $2u$ byl řešením. Platilo by tedy

$$v_0 = \lambda^M(2u) = 2\lambda^M(u) = 2v_0.$$

Vlastnost $v_0 = 2v_0$ má ovšem pouze nulový vektor, kterážto možnost je ovšem vyloučena předpokladem.

Strukturu množiny všech řešení rovnice charakterizuje následující věta. Pracuje s přidruženou homogenní rovnicí (6.5).

Věta 6.2. *Jestliže $u_0 \in \mathrm{R}^m$ je vektor splňující rovnici (6.4), pak vektor $u' \in \mathrm{R}^m$ je řešením (6.4), právě když existuje řešení u homogenní rovnice (6.5) takové, že*

$$u' = u + u_0. \tag{6.6}$$

Důkaz. Tvrzení má tvar ekvivalence. Dokážeme zvlášť oba směry. Předpokládejme, že u' je řešením rovnice (6.4) a položme $u = u' - u_0$. Pak $u' = u + u_0$ a

$$\lambda^M(u) = \lambda^M(u' - u_0) = \lambda^M(u') - \lambda^M(u_0) = v_0 - v_0 = 0.$$

Vektor u je tedy řešením homogenní rovnice a implikace zjeva doprava je dokázána.

Předpokládejme naopak, že pro nějaké řešení u homogenní rovnice platí (6.6). Pak

$$\lambda^M(u') = \lambda^M(u + u_0) = \lambda^M(u) + \lambda^M(u_0) = 0 + v_0 = v_0.$$

Vektor u' je tedy řešením nehomogenní rovnice.

Tím je důkaz hotov.

Důkaz bylo možné vést stejným způsobem pomocí matice M místo lineárního zobrazení λ^M. Používat lineární zobrazení ale považuji za vhodnější.

Tvrzení předchozí věty se často formuluje takto: *Obecné řešení nehomogenní rovnice (6.4) je rovno součtu obecného řešení přidružené homogenní rovnice (6.5) a partikulárního řešení nehomogenní rovnice (6.4).*

K nalezení obecného řešení nehomogenní rovnice stačí najít její jedno konkrétní (*partikulární*) řešení a obecné řešení rovnice homogenní. Tento poznatek má význam i pro jiné typy rovnic (diferenciální, diferenční) používané v různých oblastech matematiky, fyziky i techniky.

Na závěr ukážeme několik výsledků pro soustavy rovnic o stejném počtu rovnic jako neznámých. Máme tedy $n = m$ a matice soustavy je čtvercová.

Věta 6.3. *Soustava rovnic (6.2) se čtvercovou maticí má právě jedno řešení, právě když matice M je regulární. Toto řešení pak lze vypočítat vztahem*

$$u = M^{-1} \cdot v_0. \tag{6.7}$$

Důkaz. Cvičení.

Následující věta ukazuje, jek lze řešení soustavy rovnic s regulární čtvercovou maticí vypočítat přímým dosazením do vzorečku.

Věta 6.4 (Cramerovo pravidlo). *Označme M_i matici vzniklou z matice M nahrazením i-tého sloupce vektorem v_0. Pak je-li matice M čtvercová a regulární, platí pro i-tou složku u^i řešení soustavy (6.2) vztah*

$$u^i = \frac{\det M_i}{\det M}. \tag{6.8}$$

ÚLOHY KE KAPITOLE 6

6.1. Proč nemůže mít soustava lineárních rovnic právě dvě řešení?

6.2. Dokažte Větu 6.3.

Kapitola 7

Vlastní hodnoty a vlastní vektory

7.1 Lineární transformace

Lineární zobrazení $f\colon U \to U$ nazýváme *lineární transformace vektorového prostoru U.*

Příklady lineárních transformací $U \to U$, kde $\dim U = 2$ a je dána báze $\alpha = (u_1, u_2)$ vektorového prostoru U. (Souřadnice vektorů značíme horními indexy, takže u^1 a u^2 v následujících předpisech znamená souřadnice vektoru u v bázi α, a tedy platí $u = u^1 u_1 + u^2 u_2$.)

$$\begin{aligned} f(u) &= ru \\ f(u) &= ru^1 u_1 + su^2 u_2 \\ f(u) &= u^2 u_1 + u^1 u_2 \\ f(u) &= (u^1 + u^2) u_1 \\ f(u) &= u + u^2 u_1 \end{aligned}$$

Matice těchto lineárních transformací v bázi α jsou (pořadě):

$$\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Je užitečné zkusit si všechny tyto transformace graficky znázornit, aby bylo poznat, na které vektory se vektory prostoru U zobrazují.

Zvláštním případem lineární transformace je *projekce na podprostor*, což je lineární transformace f splňující $f \circ f = f$. (Předposlední příklad.) Její matice M v bázi α splňuje $M \cdot M = M$.

7.2 Vlastní hodnoty a vlastní vektory

Číslo λ je *vlastní hodnota* (*vlastní číslo*) lineární transformace f, pokud existuje nenulový vektor v takový, že $f(v) = \lambda v$. Vektory v, které tuto podmínku splňují (tedy i nulový vektor), se nazývají *vlastní vektory příslušné vlastní hodnotě* λ.

Předpoklad nenulovosti vektoru v v definici vlastní hodnoty je podstatný, protože jinak by bylo každé číslo vlastní hodnotou. Aby ale platila tvrzení uvedená v dalším odstavci, je vhodné mezi vlastní vektory zahrnout i nulový vektor.

Pro dva různé vlastní vektory v_1 a v_2 příslušné téže vlastní hodnotě λ lze snadno dokázat, že libovolná jejich lineární kombinace $r^1 v_1 + r^2 v_2$ je opět vlastní vektor příslušný λ (zkuste si to, nebojte se). Proto lze hovořit o *vlastním podprostoru příslušném vlastní hodnotě* λ. (Je to samozřejmě *vektorový* podprostor.)

Pro matici M^f_α lineární transformace f v bázi α, vlastní hodnotu λ a vlastní vektor v platí

$$M^f_\alpha \cdot v_\alpha = \lambda v_\alpha. \tag{7.1}$$

Obecně se čtvercová matice M se číslo λ a nenulový číselný vektor v splňující

$$M \cdot v = \lambda v \tag{7.2}$$

nazývají *vlastní hodnota* (*vlastní číslo*) a *příslušný vlastní vektor matice* M. (Za vlastní vektor bereme opět navíc i nulový číselný vektor.)

Vlastní hodnoty lineární transformace a její matice jsou tedy stejné. A pokud je v vlastní vektor lineární transformace f příslušný vlastní hodnotě λ, tak souřadnicové vyjádření tohoto vektoru je vlastní vektor matice transformace f příslušný téže vlastní hodnotě.

Vlastní hodnoty a vlastní vektory dané čtvercové matice lze vypočítat takto. Jelikož pro číselný vektor v platí $v = I \cdot v$ (I je jednotková matice), tak rovnici (7.2) můžeme přepsat takto:

$$M \cdot v = (\lambda I) \cdot v,$$

neboli

$$(M - \lambda I) \cdot v = 0. \tag{7.3}$$

Nenulový číselný vektor v splňuje poslední rovnici, jedině když matice $M - \lambda I$ nemá maximální hodnost, tedy není regulární. Její determinant musí tedy být roven nule:

$$\det(M - \lambda I) = 0,$$

což je rovnice, jejímž vyřešením dostaneme vlastní hodnoty λ. K nim pak vlastní vektory dopočítáme jako řešení soustavy rovnic (7.3) s dosazeným λ.

Je užitečné vyzkoušet si nalezení vlastních hodnot a vlastních vektorů všech matic uvedených na začátku této kapitoly. Uvidíte, že takové matice nemusejí mít žádnou vlastní hodnotu nebo mohou mít jednu nebo dvě. Když mají jednu vlastní hodnotu, může mít příslušný vlastní prostor dimenzi 1 nebo 2.

Příklad 7.1. Najdeme vlastní hodnoty a vlastní vektory matice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Matice $M - \lambda I$ je rovna

$$M - \lambda I = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}.$$

Podle výše uvedeného postupu jsou vlastní čísla λ ta čísla, pro která mná matice nulový determinant.

Snadno vypočítáme, že $\det(M - \lambda I) = (1-\lambda)^2$, což je rovno nule jen pro $\lambda = 1$. To je tedy jediné vlastní číslo matice M.

Příslušné vlastní vektory zjistíme vyřešením soustavy rovnic (7.3), neboli

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dostaneme $v^2 = 0$ (v^1 libovolné), takže vlastní prostor příslušný vlastní hodnotě $\lambda = 1$ má v tomto případě dimenzi 1.

Na přednášce jsme si ukazovali několik aplikací vlastních hodnot a vlastních vektorů, včetně hledání stránkového ohodnocení (*Page Rank*) webových stránek.

Kapitola 8

Skalární součin

Skalární součin na vektorovém prostoru je struktura, pomocí níž lze definovat délku vektoru a odchylku mezi vektory. V této kapitole uvádíme základní vlastnosti skalárního součinu.

8.1 Skalární součin

Skalární součin na vektorovém prostoru U je zobrazení $\cdot : U \times U \to \mathrm{R}$, které je pozitivně definitní symetrickou bilineární formou, což znamená, že pro každé tři vektory $u, v, w \in U$ a dva skaláry $c, d \in \mathrm{R}$ platí

$$\begin{aligned} u \cdot u &> 0 \quad \text{pro } u \neq 0, && \text{(pozitivní definitnost)} \\ u \cdot v &= v \cdot u, && \text{(symetrie)} \\ (cu + dv) \cdot w &= c(u \cdot w) + d(v \cdot w). && \text{(linearita v prvním argumentu)} \end{aligned}$$

Vektorové prostory se skalárním součinem se někdy nazývají *unitární prostory*. V celé této kapitole budeme pracovat s vektorovým prostorem U dimenze m, na kterém je dán skalární součin.

Na vektorovém prostoru R^m je definován tzv. *standardní skalární součin* známým předpisem

$$u \cdot v = u^1 v^1 + u^2 v^2 + \cdots + u^m v^m, \tag{8.1}$$

kde u^i resp. v^i jsou složky vektorů u resp. v.

Z definice lze odvodit další vztahy platné pro skalárního součin, například

$$\begin{aligned} u \cdot 0 &= 0, && (8.2) \\ w \cdot (cu + dv) &= c(w \cdot u) + d(w \cdot v). && \text{(linearita ve druhém argumentu)} \end{aligned}$$

Podmínkám linearity v prvním a druhém argumentu říkáme dohromady podmínka *bilinearity*. Díky ostatním vlastnostem skalárního součinu ovšem druhá plyne z první.

Vektory $u, v \in U$ se nazývají *kolmé* (*ortogonální*), jestliže $u \cdot v = 0$.

Základní vlastností skalárního součinu je *Schwarzova nerovnost*. Uvádíme ji v následující větě. V literatuře najdeme mnoho různých důkazů Schwarzovy nerovnosti, žádný z nich není příliš intuitivní (podobně jako sama nerovnost). Důkaz vybraný zde má alespoň tu výhodu, že je krátký.

Věta 8.1 (Schwarzova nerovnost)**.** *Pro každé dva vektory u a v prostoru U platí*

$$(u \cdot v)^2 \leq (u \cdot u)(v \cdot v). \tag{8.3}$$

Rovnost nastává, právě když jsou vektory u a v lineárně závislé.

Důkaz. Jsou-li vektory u a v lineárně závislé, je u násobkem v nebo v násobkem u. V obou případech snadno dostaneme, že se levá a pravá strana nerovnosti (8.3) rovnají.

Nyní předpokládejme, že vektory u a v jsou lineárně nezávislé. Pro libovolné číslo x pak platí $(xu + v) \cdot (xu + v) > 0$. Z bilinearity dostáváme

$$(u \cdot u)x^2 + 2(u \cdot v)x + v \cdot v > 0.$$

Vlevo máme kvadratický polynom v proměnné x. Jeho diskriminant

$$D = 4(u \cdot v)^2 - 4(u \cdot u)(v \cdot v)$$

musí být záporný, což znamená přesně $(u \cdot v)^2 < (u \cdot u)(v \cdot v)$.

Vektor $u \in U$ se nazývá *kolmý na vektorový podprostor* $V \subseteq U$, jestliže je kolmý na libovolný vektor $v \in V$. *Ortogonální doplněk vektorového podprostoru* $V \subseteq U$ je vektorový podprostor U, složený z vektorů kolmých ke každému vektoru z V. Dva vektorové podprostory $V_1, V_2 \subseteq U$ jsou *kolmé* (*ortogonální*), jsou-li libovolné dva vektory $v_1 \in V_1$ a $v_2 \in V_2$ kolmé.

8.2 Délka a odchylka

Délka vektoru u (také *norma*) se značí $\|u\|$ a je definována předpisem

$$\|u\| = \sqrt{u \cdot u}. \tag{8.4}$$

Pokud $\|u\| = 1$, vektor se nazývá *jednotkový*. Každý vektor má nenulovou délku, právě když je nenulový. Z libovolného nenulového vektoru můžeme vytvořit jednotkový vektor tzv. *normováním*, které spočívá ve vynásobení vektoru převrácenou hodnotou jeho délky:

$$u_0 = \frac{1}{\|u\|}u.$$

Pomocí délek vektorů lze Schwarzovu nerovnost přepsat takto:

$$|u \cdot v| \leq \|u\| \|v\| . \tag{8.5}$$

S použitím této nerovnosti můžeme celkem snadno dokázat tři základní vlastnosti délky vektoru:

Věta 8.2. *Pro libovolné dva vektory $u, v \in U$ a číslo $c \in \mathrm{R}$ platí*

$$\|u\| > 0 \quad \textit{pro } u \neq 0, \tag{8.6}$$

$$\|cu\| = |c| \|u\| , \tag{8.7}$$

$$\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\| . \tag{8.8}$$

Podmínce (8.8) se říká *trojúhelníková nerovnost.*

Důkaz Věty 8.2. První dvě podmínky plynou přímo z definice skalárního součinu. Dokážeme trojúhelníkovou nerovnost. Podle nerovnosti (8.5) a vlastností skalárního součinu platí

$$\begin{aligned} \|u+v\|^2 &= (u+v) \cdot (u+v) = u \cdot u + 2(u \cdot v) + v \cdot v = \|u\|^2 + 2(u \cdot v) + \|v\|^2 \\ &\leq \|u\|^2 + 2|u \cdot v| + \|v\|^2 \leq \|u\|^2 + 2\|u\| \|v\| + \|v\|^2 = (\|u\| + \|v\|)^2, \end{aligned}$$

odkud již trojúhelníková nerovnost snadno plyne.

Podmínky (8.6), (8.7) a (8.8) se v matematice používají k definici délky vektoru na vektorovém prostoru, která není vypočítána ze skalárního součinu pomocí vztahu (8.4). Následující příklad ukazuje dva nejdůležitější příklady, které se používají i v informatice (analýze dat).

Příklad 8.1. Následující dvě zobrazení $\|\cdot\|_1 : \mathrm{R}^m \to \mathrm{R}$ a $\|\cdot\|_\infty : \mathrm{R}^m \to \mathrm{R}$ splňují podmínky (8.6), (8.7) a (8.8):

$$\begin{aligned} \|u\|_1 &= \left|u^1\right| + \left|u^2\right| + \cdots + \left|u^m\right| , \\ \|u\|_\infty &= \max\left(\left|u^1\right|, \left|u^2\right|, \ldots, \left|u^m\right|\right) . \end{aligned}$$

Nyní ukážeme, jak lze pomocí skalárního součinu a délky vektoru definovat odchylku vektorů. Podle nerovnosti (8.5) platí

$$\frac{|u \cdot v|}{\|u\| \, \|v\|} \leq 1,$$

takže arkus kosinus v následující definici vždy existuje. *Odchylka* $\vartheta_{u,v}$ *vektorů u a v* je definována předpisem

$$\vartheta_{u,v} = \arccos \frac{u \cdot v}{\|u\| \, \|v\|} . \tag{8.9}$$

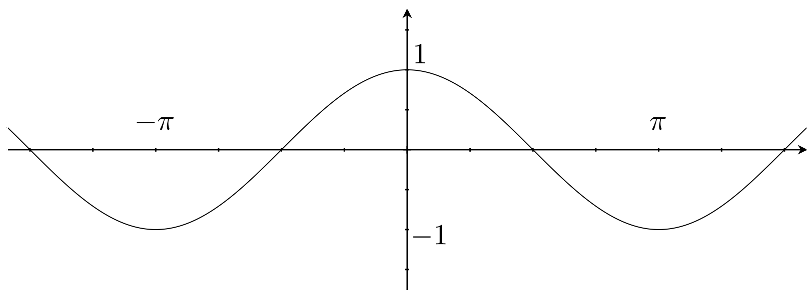
Z této definice vyplývá následující vztah mezi skalárním součinem vektorů u a v a jejich odchylkou $\vartheta_{u,v}$:

$$u \cdot v = \|u\| \, \|v\| \cos \vartheta_{u,v} \tag{8.10}$$

Příklad 8.2. Jsou-li vektory u a v jednotkové, dostáváme ze vztahu (8.10)

$$u \cdot v = \cos \vartheta_{u,v},$$

což nám umožní udělat si dobrou představu o skalárním součinu jednotkových vektorů: je to kosinus úhlu, který svírají. Na obrázku 8.1 vidíme graf funkce kosinus. Z něj by mělo



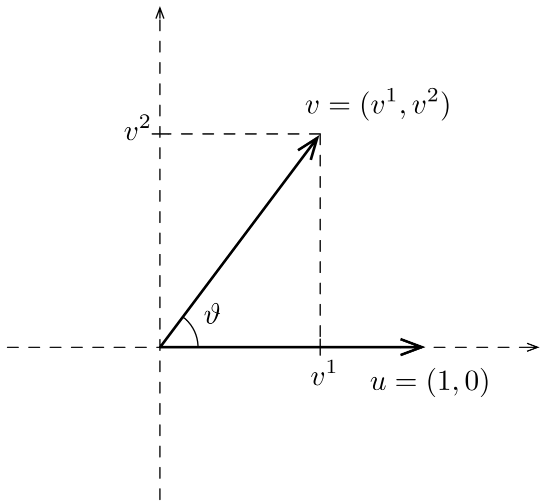
Obrázek 8.1: Graf funkce cos

být patrné, že pokud vektory svírají úhel $\frac{\pi}{2}$, je jejich skalární součin nulový ($\cos \frac{\pi}{2} = 0$) a pokud jsou totožné (a tedy jejich odchylka je nulová), je jejich skalární součin roven jedné ($\cos 0 = 1$). To také odpovídá tomu, že tyto vektory jsou jednotkové. Skalární součin opačných jednotkových vektorů je -1 a odchylka π.

Příklad 8.3. V minulém příkladu je ovšem jedna záludnost: odchylku vektorů jsme pomocí skalárního součinu *definovali*, takže okolnost, že skalární součin jednotkových vektorů je roven kosinu jejich odchylky, je vlastně triviální a neobsahuje žádnou novou informaci. Zajímavou se stane v momentě, kdy nějak ověříme, že definice odchylky vektorů pomocí vztahu (8.9) odpovídá pozorované skutečnosti, konkrétně tomu, co o funkci kosinus víme z elementární geometrie.

Obrázek 8.2 znázorňuje dva jednotkové vektory $u, v \in \mathbb{R}^2$. Vektor u je roven $(1,0)$, vektor v je obecný, $v = (v^1, v^2)$. Standardní skalární součin $u \cdot v$ je roven $1v^1 + 0v^2 = v^1$. Pro kosinus úhlu ϑ platí $\cos \vartheta = v^1 / \|v\|$ (podíl délek přilehlé odvěsny a přepony v pravoúhlém trojúhelníku), je tedy také roven v^1.

Kdybychom vektory u a v „pootočili“ tak, aby zůstaly zachovány jejich délky i úhel ϑ, zůstane jejich skalární součin pořád stejný. Proč tomu tak je, zjistíme později.



Obrázek 8.2: Jednotkové vektory $u, v \in \mathbb{R}^2$. Vidíme, že $\cos\vartheta = v^1$, což je rovno (standardnímu) skalárnímu součinu $u \cdot v$.

Další poznatky, které uvedeme na závěr této části, vyplývají z následujícího vyjádření délky rozdílu dvou vektorů:

$$\begin{aligned}\|u-v\|^2 &= (u-v)\cdot(u-v) = u\cdot u - v\cdot u - u\cdot v + v\cdot v\\ &= \|u\|^2 - 2(u\cdot v) + \|v\|^2,\end{aligned}$$

takže

$$2(u\cdot v) = \|u\|^2 + \|v\|^2 - \|u-v\|^2. \tag{8.11}$$

Tato rovnost je zajímavá hned z několika důvodů. Za prvé ukazuje, že skalární součin vektorů u a v lze spočítat čistě pomocí délek vektorů u, v a $u-v$. Této skutečnosti později využijeme.

Za druhé, levá strana rovnosti je nulová právě když je nulová strana pravá, což vede k následující verzi známé Pythagorovy věty:

Věta 8.3 (Pythagorova)**.** *Pro každé dva vektory u a v platí*

$$\|u-v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2,$$

právě když jsou ortogonální.

A za třetí, podle (8.10) a (8.11):

Věta 8.4 (kosinová)**.** *Pro libovolné dva vektory u a v platí*

$$\|u\|^2 + \|v\|^2 - \|u\|\,\|v\|\cos\vartheta_{u,v} = \|u-v\|^2. \tag{8.12}$$

8.3 Ortonormální báze

Následující věta potvrzuje očividnou skutečnost: nenulové ortogonální vektory jsou lineárně nezávislé.

Věta 8.5. *Mějme k nenulových vektorů* $u_1, u_2, \dots, u_k \in U$ *a předpokládejme, že libovolné dva z nich jsou kolmé. Pak jsou tyto vektory lineárně nezávislé.*

Důkaz. Podle definice lineární nezávislosti máme vyřešit rovnici

$$c^1 u_1 + c^2 u_2 + \cdots + c^k u_k = 0.$$

Vynásobme levou stranu jedním z těchto vektorů, vektorem u_i:

$$(c^1 u_1 + c^2 u_2 + \cdots + c^k u_k) \cdot u_i = c^1 (u_1 \cdot u_i) + c^2 (u_2 \cdot u_i) + \cdots + c^k (u_k \cdot u_i).$$

Jelikož vektor u_i je kolmý ke všem ostatním vektorům, je tento výraz roven $c^i(u_i \cdot u_i) = c^i \|u_i\|$. Jelikož na pravé straně máme $0 \cdot u_i = 0$ (skalární součin nulového vektoru a vektoru u_i je roven nule), musí platit

$$c^i \|u_i\| = 0.$$

Délka vektoru u_i je ovšem podle předpokladu nenulová, takže musí být $c^i = 0$. Tuto úvahu můžeme udělat pro každé $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, takže dostáváme $c^1 = c^2 = \cdots = c^k = 0$, což znamená lineární nezávislost vektorů $u_1, u_2, \dots, u_k$.

Je-li v k-tici $(e_1, \dots, e_k)$ vektorů v U každý vektor nenulový a libovolné dva jsou kolmé, nazývá se tato k-tice *ortogonální systém vektorů*. Pokud $k = m$, je podle předchozí věty $\alpha = (e_1, \dots, e_k)$ báze vektorového prostoru U. Nazývá se *ortogonální báze*. Pokud je navíc každý vektor z α jednotkový, říkáme, že je tato báze *ortonormální*. V takovém případě pro vektory báze α platí

$$e_i \cdot e_j = \begin{cases} 1 & \text{když } i = j \text{ a} \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Pro ortonormální bázi je snadné počítat souřadnice vektorů. Pokud totiž pro ortonormální bázi $\alpha = (e_1, \dots, e_m)$ a vektor v platí

$$v = c^1 e_1 + c^2 e_2 + \cdots + c^m e_m,$$

pak pro skalární součin s vektorem e_i platí

$$\begin{aligned} v \cdot e_i &= (c^1 e_1 + c^2 e_2 + \cdots + c^m e_m) \cdot e_i \\ &= c^1 (e_1 \cdot e_i) + c^2 (e_2 \cdot e_i) + \cdots + c^m (e_m \cdot e_i) \\ &= c^i \end{aligned}$$

(podobný výpočet jsme už dělali v důkazu Věty 8.5), takže i-tá souřadnice vektoru v vzhledem k bázi α je $v \cdot e_i$.

Gram-Schmidtova ortogonalizace je známá metoda, která z libovolné báze vektorového prostoru se skalárním součinem vytvoří ortogonální bázi. Pokud potřebujeme získat bázi ortonormální, výsledné vektory pak normujeme. (Podrobnosti na cvičení.)

Máme-li vektory vyjádřeny v ortonormální bázi, lze jejich skalární součin snadno vypočítat z jejich souřadnic. Jak, to ukazuje následující věta. Než ji uvedeme, připomeňme, že pro vektory $u, v \in U$ symboly u_α, v_α označujeme jejich souřadnicová vyjádření v bázi α. To jsou prvky vektorového prostoru R^m (je-li $m = \dim U$) a můžeme je tedy vynásobit standardním skalárním součinem.

Věta 8.6. *Je-li α ortonormální báze vektorového prostoru U, platí pro libovolné dva vektory $u, v \in U$*

$$u \cdot v = u_\alpha \cdot v_\alpha. \tag{8.13}$$

Důkaz. Ve výrazu vlevo stačí vektory vyjádřit jako lineární kombinace vektorů báze α a využít toho, že jde o ortonormální bázi. Detaily necháme na čtenáři.

Je třeba mít na paměti, že vztah (8.13) platí, jedině když je báze α ortonormální. Jeho použití v jiných situacích by vedlo k nesprávným výsledkům.

Následující věta se zabývá tvarem matice přechodu mezi ortonormálními bazemi (M^{T} značí matici transponovanou k matici M).

Věta 8.7. *Pro libovolné dvě ortonormální báze α a β platí*

$$\mathrm{M}_{\alpha,\beta} = \mathrm{M}_{\beta,\alpha}^{\mathrm{T}}.$$

Důkaz. $\mathrm{M}_{\alpha,\beta}$ je, jak víme, inverzní matice k matici $\mathrm{M}_{\beta,\alpha}$. Chceme tedy dokázat, že $\mathrm{M}_{\beta,\alpha}^{-1} = \mathrm{M}_{\beta,\alpha}^{\mathrm{T}}$, neboli že $\mathrm{M}_{\beta,\alpha}^{\mathrm{T}} \cdot \mathrm{M}_{\beta,\alpha} = \mathrm{E}_m$. Matice $\mathrm{M}_{\beta,\alpha}$ má ve sloupcích souřadnicová vyjádření vektorů báze α v bázi β. Označíme-li $\alpha = (e_1, e_2, \ldots, e_m)$, je tedy její i-tý sloupec roven vektoru $(e_i)_\beta$. Stejnému vektoru, psanému do řádku, je roven i řádek matice $\mathrm{M}_{\beta,\alpha}^{\mathrm{T}}$. Hodnota na pozici (i, j) v matici $\mathrm{M}_{\beta,\alpha}^{\mathrm{T}} \cdot \mathrm{M}_{\beta,\alpha}$ je tedy rovna standardnímu skalárnímu součinu $(e_i)_\beta \cdot (e_j)_\beta$. Podle Věty 8.6 a díky ortonormálnosti báze β ovšem $(e_i)_\beta \cdot (e_j)_\beta = e_i \cdot e_j$. Báze α je ovšem rovněž ortonormální, takže tato hodnota je rovna 1 když $i = j$ a jinak je rovna 0. Jinými slovy, matice $\mathrm{M}_{\beta,\alpha}^{\mathrm{T}} \cdot \mathrm{M}_{\beta,\alpha}$ je jednotková.

Věta 8.7 má praktický význam, protože usnadňuje výpočet matice přechodu mezi vektorovými bazemi, pokud jsou tyto báze ortonormální. Místo složitého výpočtu inverzní matice stačí matici transponovat. Ortonormální vektorové báze se v počítačové grafice často používají.

Věta 8.7 rovněž říká, že sloupce matice $\mathrm{M}_{\beta,\alpha}$ tvoří (vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu) ortonormální bázi prostoru R^m. Takovým maticím se říká *ortogonální* *matice* (kupodivu; správný termín by byl spíš ortonormální matice). Ortogonální matice jsou právě čtvercové matice M, které splňují $M^{-1} = M^{\mathrm{T}}$. Z tohoto vztahu snadno odvodíme, že $|\det M| = 1$.

Příklad 8.4. Předpokládejme, že $\dim U = 3$, báze α a β prostoru U jsou ortonormální a jejich matice přechodu je

$$\mathrm{M}_{\beta,\alpha} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

Můžete se přesvědčit, že matice je vskutku ortogonální, tedy že její sloupce tvoří ortonormální bázi v R^3. Transponovaná matice je rovněž ortogonální (je to matice $\mathrm{M}_{\alpha,\beta}$), takže i řádky matice $\mathrm{M}_{\beta,\alpha}$ jsou ortonormální báze R^3. Platí $\mathrm{M}^{\mathrm{T}}_{\beta,\alpha} \cdot \mathrm{M}_{\beta,\alpha} = \mathrm{E}_3$. Ve sloupcích matice jsou souřadnicová vyjádření vektorů báze α v bázi β a v řádcích souřadnicová vyjádření vektorů báze β v bázi α.

8.4 Vektorový součin

Předpokládejme, že vektorový prostor je orientovaný a má dimenzi alespoň 2 (tedy $m \geq 2$) a zvolme v něm kladně orientovanou ortonormální bázi α. Pro libovolných $m-1$ vektorů $u_1, u_2, \ldots, u_{m-1} \in U$ definujme zobrazení $\mathrm{P}_{u_1,\ldots,u_{m-1}} : U \to \mathrm{R}$ předpisem

$$P_{u_1,\ldots,u_{m-1}}(u) = \det \begin{pmatrix} u_1^1 & \cdots & u_{m-1}^1 & u^1 \\ u_1^2 & \cdots & u_{m-1}^2 & u^2 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ u_1^m & \cdots & u_{m-1}^m & u^m \end{pmatrix}, \tag{8.14}$$

kde horními indexy značíme souřadnice vektorů v bázi α jako obvykle.

Věta 8.8. *Hodnota $P_{u_1,\ldots,u_{m-1}}(u)$ nezávisí na volbě báze α.*

Důkaz. Označme matici ve vztahu (8.14) symbolem N. Dále zvolme další ortonormální kladně orientovanou bázi $\bar{\alpha}$ a označme symbolem $\bar{N}$ matici sestavenou stejně jako matice N, ale pomocí souřadnic v bázi $\bar{\alpha}$. Konečně, položme $\bar{P}_{u_1,\ldots,u_{m-1}}(u) = \det \bar{N}$. Naším cílem je ukázat, že $\bar{P}_{u_1,\ldots,u_{m-1}}(u) = P_{u_1,\ldots,u_{m-1}}(u)$. To ovšem nebude obtížné. Je totiž $\bar{N} = \mathrm{M}_{\bar{\alpha},\alpha} \cdot N$, takže $\bar{P}_{u_1,\ldots,u_{m-1}}(u) = \det \bar{N} = \det(\mathrm{M}_{\bar{\alpha},\alpha} \cdot N) = \det \mathrm{M}_{\bar{\alpha},\alpha} \cdot \det N$. Jelikož báze α a $\bar{\alpha}$ jsou ortonormální a souhlasně orientované, je $\det \mathrm{M}_{\bar{\alpha},\alpha} = 1$, takže $\bar{P}_{u_1,\ldots,u_{m-1}}(u) = P_{u_1,\ldots,u_{m-1}}(u)$.

Determinant ve vztahu (8.14) lze vypočítat rozvojem podle posledního sloupce. Dostaneme

$$P_{u_1,\ldots,u_{m-1}}(u) = v^1 u^1 + v^2 u^2 + \cdots + v^m u^m,$$

kde čísla $v^1, v^2, \dots, v^m$ jsou vypočítána ze souřadnic vektorů $u_1, \dots, u_{m-1}$. Hodnota $P_{u_1,\dots,u_{m-1}}(u)$ je tedy vypočítána jako skalární součin vektoru u s vektorem v, jehož souřadnice v bázi α jsou $v^1, v^2, \dots, v^m$. S pomocí tvrzení z úlohy 8.7 lze snadno ověřit, že vektor v nezávisí na tom, v jaké bázi jsme jeho souřadnice počítali. Je to tedy určitý významný vektor, který je dán vektory $u_1, \dots, u_{m-1}$. Říká se mu *vektorový součin vektorů* $u_1, \dots, u_{m-1}$ a značí se $u_1 \times u_2 \times \cdots \times u_{m-1}$ pro $m \geq 3$ a $u_1^{\times}$ pro $m = 2$.

Vektorový součin obvykle není definován takto obecně, ale jen pro $m = 3$. Zde jsme uvedli definici obecnější v naději, že díky tomu čtenáři snadněji pochopí principy, které jsou za vektorovým součinem skryty.

Je třeba mít na paměti, že vzorec (8.14) předpokládá, že vektory jsou vyjádřeny vzhledem k ortonormální bázi. Pokud tento předpoklad porušíme, nevyjde nám vektorový součin správně.

Příklad 8.5. Je-li dimenze vektorového prostoru U rovna 3 (což je, jak jsme si už řekli, obvyklý případ, ve kterém vektorový součin počítáme), je vektorový součin definován pro dvojice vektorů. Pro vektory $u_1, u_2 \in U$ a libovolný vektor $u \in U$ pak platí (počítáno v souřadnicích vzhledem k nějaké ortonormální bázi α)

$$\begin{aligned}(u_1 \times u_2) \cdot u &= \det \begin{pmatrix} u_1^1 & u_2^1 & u^1 \\ u_1^2 & u_2^2 & u^2 \\ u_1^3 & u_2^3 & u^3 \end{pmatrix} \\ &= (u_1^2 u_2^3 - u_1^3 u_2^2) u^1 + (u_1^3 u_2^1 - u_1^1 u_2^3) u^2 + (u_1^1 u_2^2 - u_1^2 u_2^1) u^3,\end{aligned}$$

takže

$$(u_1 \times u_2)_\alpha = \begin{pmatrix} u_1^2 u_2^3 - u_1^3 u_2^2 \\ u_1^3 u_2^1 - u_1^1 u_2^3 \\ u_1^1 u_2^2 - u_1^2 u_2^1 \end{pmatrix}. \tag{8.15}$$

Příklad 8.6. Vektorový součin ovšem často počítáme i v dimenzi 2, ačkoli o tom nevíme. Pro vektory u a v v dvojrozměrném vektorovém prostoru U totiž platí (opět vyjádřeno v souřadnicích vzhledem k nějaké ortonormální bázi α):

$$u^{\times} \cdot v = \det \begin{pmatrix} u^1 & v^1 \\ u^2 & v^2 \end{pmatrix} = -u^2 v^1 + u^1 v^2,$$

takže

$$(u^{\times})_\alpha = \begin{pmatrix} -u^2 \\ u^1 \end{pmatrix},$$

$u^{\times}$ je tedy vektor, který jsme zvyklí používat jako vektor kolmý k vektoru u.

Následující věta uvádí základní vlastnosti vektorového součinu. Další se dozvíme v příští kapitole.

Věta 8.9. *Vektorový součin* $u_1 \times u_2 \times \cdots \times u_{m-1}$ *je kolmý na každý z vektorů* $u_1, \ldots, u_{m-1}$. *Je nenulový, právě když jsou vektory* $u_1, \ldots, u_{m-1}$ *lineárně nezávislé. V takové případě je báze* $\beta = (u_1, \ldots, u_{m-1}, u_1 \times \cdots \times u_{m-1})$ *kladně orientovaná.*

Důkaz. Položme $v = u_1 \times u_2 \times \cdots \times u_{m-1}$. Pro libovolné $i \in \{1, 2, \ldots, m-1\}$ je $P_{u_1,\ldots,u_{m-1}}(u_i) = 0$, protože je to determinant matice se dvěma shodnými sloupci. Ale $P_{u_1,\ldots,u_{m-1}}(u_i) = v \cdot u_i$, takže vektory v a u_i jsou kolmé.

Jsou-li vektory $u_1, \ldots, u_{m-1}$ lineárně závislé, je $v = 0$, protože je to determinant matice s lineárně závislými sloupci.

Předpokládejme naopak, že $v = 0$. Jelikož počet vektorů $u_1, \ldots, u_{m-1}$ je menší než dimenze vektorového prostoru U, existuje vždy vektor u, který není jejich lineární kombinací. Jelikož $v = 0$, platí $P_{u_1,\ldots,u_{m-1}}(u) = v \cdot u = 0$. Číslo $P_{u_1,\ldots,u_{m-1}}(u)$ je ovšem determinant matice, jejíž poslední sloupec není lineární kombinací ostatních sloupců. Jelikož je nulový, musí být tyto sloupce lineárně závislé, což znamená lineární závislost vektorů $u_1, \ldots, u_{m-1}$.

Na závěr ukážeme, že báze β je kladně orientovaná. Zvolme ortonormální kladně orientovanou bázi α. Matice, jejímž determinantem je číslo $P_{u_1,\ldots,u_{m-1}}(v)$, obsahuje ve sloupcích souřadnice vektorů báze β v bázi α. Je to tedy matice přechodu od báze β k bázi α a platí $P_{u_1,\ldots,u_{m-1}}(v) = \det \mathrm{M}_{\alpha,\beta}$. Tento determinant je ovšem roven $v \cdot v = \|v\|^2$, takže je kladný.

Tím je věta dokázána.

Příklad 8.7. Mějme v trojrozměrném vektorovém prostoru U vektory u_1 a u_2, jejichž vyjádření vzhledem k ortonormální bázi α je

$$(u_1)_\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad (u_2)_\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Vektorový součin těchto vektorů (lépe řečeno jeho souřadnice v bázi α) můžeme vypočítat přímo pomocí vztahu (8.15). Pohodlnější je ale postupovat podle definice:

$$(u_1 \times u_2) \cdot v = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & v^1 \\ 0 & 1 & v^2 \\ 0 & 1 & v^3 \end{pmatrix} = -v^2 + v^3,$$

takže

$$(u_1 \times u_2)_\alpha = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Nyní můžeme snadno ověřit, že vektorový součin $u_1 \times u_2$ splňje všechno, co o něm říká Věta 8.9.

8.5 Izometrie

V této části předpokládáme, že máme dva vektorové prostory se skalárním součinem U a V a že $\dim U = \dim V = m$.

Lineární zobrazení $\lambda : U \to V$ se nazývá *izometrie*, jestliže pro libovolné dva vektory $u_1, u_2 \in U$ platí

$$\lambda(u_1) \cdot \lambda(u_2) = u_1 \cdot u_2. \tag{8.16}$$

Stručně řečeno, izometrie je lineární zobrazení, které zachovává skalární součin. Následující věta ukazuje, že v důsledku toho zachovává i všechny struktury, které jsou pomocí skalárního součinu definovány:

Věta 8.10. *Je-li $\lambda : U \to V$ izometrie, pak pro libovolné vektory $u, u_1, u_2, \ldots, u_{m-1}, u_m \in U$ platí*

1. $\|\lambda(u)\| = \|u\|$.
2. $\vartheta_{\lambda(u_1),\lambda(u_2)} = \vartheta_{u_1,u_2}$.
3. *Je-li $(u_1, u_2, \ldots, u_m)$ ortonormální báze prostoru U, pak $(\lambda(u_1), \lambda(u_2), \ldots, \lambda(u_m))$ je ortonormální báze prostoru V.*
4. *Jsou-li prostory U a V i zobrazení λ orientované, pak*

$$\lambda(u_1) \times \cdots \times \lambda(u_{m-1}) = \lambda(u_1 \times \cdots \times u_{m-1}).$$

Důkaz. Tvrzení 1, 2 a 3 plynou přímo z definic, konkrétně ze vztahů (8.4) a (8.9). Tvrzení 4 dokážeme později.

Důsledkem tvrzení 3 je, že zobrazení λ je izomorfismus vektorových prostorů.

Následující tvrzení ukazuje, že matice izometrie vzhledem k ortonormálním bazím je ortogonální:

Věta 8.11. *Mějme ortonormální bázi α vektorového prostoru U a ortonormální bázi β vektorového prostoru V. Pak lineární zobrazení $\lambda : U \to V$ je izometrie, právě když matice $\mathrm{M}^{\lambda}_{\beta,\alpha}$ je ortogonální.*

Důkaz. Označme vektory báze α jako $e_1, \ldots, e_m$. Jelikož λ je izometrie, tvoří vektory $\lambda(e_1), \ldots, \lambda(e_m)$ ortonormální bázi prostoru V: ortogonální jsou přímo podle definice izometrie, jednotkové jsou podle tvrzení 1 Věty 8.10. Sloupce matice $\mathrm{M}^{\lambda}_{\beta,\alpha}$ jsou souřadnicová vyjádření obrazů vektorů báze α v bázi β; i-tý sloupec matice je tedy $\lambda(e_i)_\beta$. Jelikož báze β je ortonormální, je matice ortogonální podle (8.13).

Věta 8.11 nám umožní dokončit důkaz věty předchozí.

Důkaz tvrzení 4 Věty 8.10. Podle definice vektorového součinu pro libovolný vektor $u \in U$ je $(u_1 \times \cdots \times u_{m-1}) \cdot u = \mathrm{P}_{u_1,\ldots,u_{m-1}}(u) = \det N$, kde matice N má ve sloupcích souřadnicová vyjádření vektorů $u_1, \ldots, u_{m-1}$ a u v kladně orientované ortonormální bázi α. Obrazy $\lambda(u_1), \ldots, \lambda(u_{m-1})$ a $\lambda(u)$ těchto vektorů mají v kladně orientované ortonormální bázi β vektorového prostoru V souřadnicová vyjádření ve sloupcích matice $\mathrm{M}^{\lambda}_{\beta,\alpha} \cdot N$, takže

$$\mathrm{P}_{\lambda(u_1),\ldots,\lambda(u_{m-1})}(\lambda(u)) = \det(\mathrm{M}^{\lambda}_{\beta,\alpha} \cdot N) = \det \mathrm{M}^{\lambda}_{\beta,\alpha} \cdot \det N.$$

Matice $\mathrm{M}^{\lambda}_{\beta,\alpha}$ je ovšem podle Věty 8.11 ortogonální, takže její determinant je roven 1 nebo -1. Jelikož zobrazení λ je orientované, je roven 1. Celkově tedy dostáváme $\mathrm{P}_{\lambda(u_1),\ldots,\lambda(u_{m-1})}(\lambda(u)) = \det N = \mathrm{P}_{u_1,\ldots,u_{m-1}}(u)$.

Pro libovolný vektor $u \in U$ tedy platí

$$(u_1 \times \cdots \times u_{m-1}) \cdot u = (\lambda(u_1) \times \cdots \times \lambda(u_{m-1})) \cdot f(u).$$

Vzhledem k tomu, že zobrazení λ je izometrie, můžeme ještě levou stranu změnit:

$$\lambda(u_1 \times \cdots \times u_{m-1}) \cdot \lambda(u) = (\lambda(u_1) \times \cdots \times \lambda(u_{m-1})) \cdot f(u).$$

Jelikož zobrazení λ je bijekce (což je důsledek tvrzení 3 Věty 8.10), každý vektor $v \in V$ je obrazem nějakého vektoru z prostoru U. Proto pro libovolný vektor $v \in V$ platí

$$\lambda(u_1 \times \cdots \times u_{m-1}) \cdot v = (\lambda(u_1) \times \cdots \times \lambda(u_{m-1})) \cdot v,$$

což už znamená rovnost, kterou jsme chtěli dokázat (srovnejte s úlohou 8.7).

ÚLOHY KE KAPITOLE 8

8.1. Dokažte, že vektory u a v jsou ortogonální, právě když

$$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2.$$

8.2. Najděte (nestandardní) skalární součin v $\mathbf{R}^2$ takový, aby vektory $(2,0)$ a $(1,10)$ tvořily ortonormální bázi. Kolik takových skalárních součinů existuje?

8.3. Mějme bázi α vektorového prostoru U dimenze m a definujme skalární součin na U předpisem

$$u \cdot v = u_\alpha \cdot v_\alpha$$

(na pravé straně je standardní skalární součin v $\mathbf{R}^m$ souřadnicových vyjádření vektorů u a v v bázi α). Ukažte, že opravdu jde o skalární součin. Dále dokažte, že vzhledem k tomuto skalárnímu součinu je α ortonormální báze.

8.4. Uveďte příklad vektorového prostoru se skalárním součinem U, jeho báze α a vektorů $u, v \in U$ tak, aby neplatil vztah (8.13).

8.5. Dokažte, že vektor je nulový, právě když je kolmý na libovolný vektor.

8.6. V příkladě 8.1 jsme ukázali dva jiné způsoby zavedení délky vektoru v $\mathbf{R}^m$ než s použitím standardního skalárního součinu: pomocí zobrazení $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_\infty$. Lze pomocí těchto zobrazení a vztahu (8.11) zavést na $\mathbf{R}^m$ skalární součin?

8.7. Ukažte, že pro libovolné lineární zobrazení $\lambda : U \to \mathbf{R}$ existuje nenulový vektor $v_\lambda \in U$ takový, že funkční hodnoty zobrazení λ se dají počítat jako skalární součin s vektorem v_λ:

$$\lambda(u) = v_\lambda \cdot u.$$

Ukažte, že vektor v_λ je ortogonální na jádro zobrazení λ,

8.8. Předpokládejme, že vektory $u_1, u_2, u_3 \in U$ tvoří ortogonální systém. Jsou vektorové podprostory $\langle u_1, u_2 \rangle$ a $\langle u_2, u_3 \rangle$ kolmé? Jaké jsou jejich dimenze?

Literatura

[1] Bican L., *Lineární algebra a geometrie.* Praha, Academia, 2004.