5. Limita funkce

Limita funkce je jedním z nejdůležitějších pojmů matematické analýzy. Na pojmu limita jsou založeny další významné pojmy, jako je spojitost, derivace funkce, Riemannův integrál, délka křivky ad. S přímým praktickým použitím limity se setkáme při vyšetřování průběhu funkce, např. při zjišťování asymptot grafu funkce.

5.1. Limita funkce podle Heineho

Hlavní myšlenka: Problém limity funkce se převede na (již známý) problém limity posloupnosti.

D (limita funkce podle Heineho): Nechť x_0 je hromadným bodem $D(f)$. Číslo a nazveme **limita funkce f v bodě** x_0 $\Leftrightarrow$ pro *každou* posloupnost $\{x_n\}$, $x_n \in D(f)$, $x_n \neq x_0$, $x_n \to x_0$, platí $f(x_n) \to a$. Píšeme $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$.

D (jednostranná limita funkce podle Heineho): Nechť x_0 je levým [pravým] hromadným bodem $D(f)$. Číslo a nazveme **limita zleva** [**zprava**] **funkce f v bodě** x_0 $\Leftrightarrow$ pro *každou* posloupnost $\{x_n\}$, $x_n \in D(f)$, $x_n < x_0$ [$x_n > x_0$], $x_n \to x_0$, platí $f(x_n) \to a$. Píšeme $f(x_0-) = \lim\limits_{x\to x_0-} f(x) = a$ [$f(x_0+) = \lim\limits_{x\to x_0+} f(x) = a$].

Úlohy:

5.1.1. Vypočtěte $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x-2}$.

5.1.2. Vypočtěte obě jednostranné limity funkce $y = \operatorname{sgn} x$ v bodě 0.

5.1.3. Dokažte, že Dirichletova funkce $\chi(x)$ nemá limitu (ani jednostrannou) v žádném bodě $x_0 \in R$.

5.1.4. Vyslovte definici nevlastní limity $+\infty$ ve vlastním bodě x_0.

D (vlastní limita v nevlastním bodě $+\infty$): Nechť $+\infty$ je hromadným bodem $D(f)$. Číslo a nazveme **limita funkce f v nevlastním bodě** $+\infty$ $\Leftrightarrow$ pro *každou* posloupnost $\{x_n\}$, $x_n \in D(f)$, $x_n \to +\infty$, platí $f(x_n) \to a$. Píšeme $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = a$.

Úloha 5.1.5. Vyslovte definici vlastní limity funkce v nevlastním bodě $-\infty$ a definice nevlastních limit v nevlastních bodech.

5.2. Věty o limitách funkcí

Věty o limitách funkcí vyplývají na základě Heineho definice limity z vět o limitách posloupností. Proto jsou některé formulovány velmi podobně.

Formulaci uvádíme pro vlastní limity ve vlastních bodech, je však možné i jejich rozšíření na „nevlastní případy“.

V 1: Každá funkce f má v libovolném bodě $x_0 \in \boldsymbol{R}$ nejvýše jednu limitu.

V 2: Nechť funkce f má v bodě x_0 konečnou limitu. Pak existuje okolí $P(x_0)$, v němž je omezená. (Tedy $\exists P(x_0)\ \exists K,L \in \boldsymbol{R}\ \forall x \in P(x_0) \cap D(f) : f(x) \in \langle K,L\rangle$.)

V 3 (Věta o kladné limitě): Nechť funkce f má v bodě x_0 konečnou kladnou [zápornou] limitu. Pak existuje okolí $P(x_0)$, v němž je f kladná [záporná].

V 4 (Věta o limitě součtu, rozdílu, součinu a podílu): Nechť jsou na M definovány funkce f, g, x_0 je hromadný bod M a platí

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a.$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = b.$.

Pak funkce $f + g, f - g, f \,.\, g, f / g$ (pro $g(x) \neq 0$, $b \neq 0$) mají limitu $a + b, a - b, a \,.\, b, a / b$.

(Tyto vlastnosti platí pro rozšířenou reálnou osu ve všech případech, kdy mají uvedené výrazy s a, b smysl; např. věta o součtu neplatí pro $a = +\infty$, $b = -\infty$.)

V 5 (Věta o limitě rovnosti): Nechť na nějakém okolí $P(x_0)$ platí $f(x) = g(x)$ a existuje $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$. Pak též $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = a$.

V 6 (Věta o limitě nerovnosti): Nechť na nějakém okolí $P(x_0)$ platí $f(x) \leq g(x)$ a existují limity obou funkcí v bodě x_0. Pak $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \leq \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$.

Úloha 5.2.1. Na příkladech ukažte, jaký vztah může platit mezi limitami, jestliže na $P(x_0)$ platí ostrá nerovnost $f(x) < g(x)$.

V 7 (Věta o třech limitách): Nechť na nějakém okolí $P(x_0)$ platí $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$, přičemž $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = a$. Pak existuje i $\lim\limits_{x \to x_0} h(x)$ a je rovna a.

V 8 (Věta o limitě monotónní funkce): Nechť bod x_0 je levým hromadným bodem množiny $M = D(f) \cap P(x_0-)$ a funkce f je neklesající na M. Pak existuje $\lim\limits_{x \to x_0-} f(x)$. Je-li funkce f na M shora omezená, je tato limita konečná, není-li f na M shora omezená, je tato limita rovna $+\infty$.

Úloha 5.2.2. Vyslovte podobnou větu pro nerostoucí funkci a dále věty pro případ limity zprava.

V 9: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} |f(x)| = 0$.

V 10: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} |f(x) - a| = 0$ (pro a vlastní).

V 11: Nechť x_0 je oboustranným hromadným bodem $D(f)$. Pak následující dva výroky jsou ekvivalentní:

A: Existuje $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ a je rovna a.

B: Existují $\lim\limits_{x \to x_0-} f(x)$, $\lim\limits_{x \to x_0+} f(x)$ a obě jsou rovny a.

Úloha 5.2.3. Užitím V 11 dokažte, že funkce $y = x + \dfrac{|x|}{x}$ nemá limitu v bodě $x_0 = 0$.

V 12: Nechť na nějakém $P(x_0)$ platí $f(x) > 0$. Pak

1) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = +\infty$,

2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = 0$.

V 13: Nechť $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a \neq 0$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ a v nějakém okolí $P(x_0)$ platí sgn $g(x)$ = sgn a [sgn $g(x)$ = –sgn a]. Pak platí $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = +\infty$ [$-\infty$].

V 14: Nechť x_0 je hromadným bodem $D(f \cdot g)$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ a g je funkce omezená. Pak $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x) = 0$.

V (Věta o limitě složené funkce): Mějme složenou funkci $f \circ \varphi$. Nechť

1° $\exists$ okolí $P(x_0) \subset D(\varphi)$ tak, že $\varphi(P(x_0)) \subset D(f)$,

2° $\exists$ a jako $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x)$,

3° a je hromadným bodem $D(f)$ a existuje $b = \lim\limits_{x\to a} f(x)$,

4° x_0 není hromadným bodem množiny $\{x \in P(x_0);\ \varphi(x) = a\}$.

Pak existuje limita složené funkce $f \circ \varphi$ v bodě x_0 a platí $\lim\limits_{x\to x_0} f \circ \varphi(x) = b$.

5.3. Výpočet limit

Limity některých elementárních funkcí.

Úlohy:

5.3.1. Užitím věty o třech limitách dokažte, že $\lim\limits_{x\to 0} \sin x = 0$.

5.3.2. Dokažte, že $\lim\limits_{x\to x_0} \sin x = \sin x_0$ a $\lim\limits_{x\to x_0} \cos x = \cos x_0$.

5.3.3. Dokažte, že $\lim\limits_{x\to x_0} x^n = x_0^n$ a že pro každý polynom $P(x)$ je $\lim\limits_{x\to x_0} P(x) = P(x_0)$.

Platnost výsledků úloh 5.3.2 a 5.3.3 lze zobecnit na všechny elementární funkce takto:

V: Je-li f elementární funkce, $x_0 \in D(f)$, pak $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Použití této věty nazýváme *využití spojitosti funkce k výpočtu limity* (viz kap. 6).

Speciální limity:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1,$$

$$\lim_{x\to +\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = \mathrm{e},$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^m-1}{x} = m \quad \text{(pro libovolná } m \in R\text{)},$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-1}{x} = 1.$$

Úlohy:

5.3.4. Dokažte první z výše uvedených speciálních limit.

5.3.5. Vypočtěte $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}$.

5.3.6. Vypočtěte $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{x}$.

Výpočet dle definice a vět o limitách

5.3.7. Vypočtěte $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{6x^3+2x+5}{2x^3+x^2+7}$.

5.3.8. Vypočtěte $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{6.2^{3x}+2^{x+1}+5}{2^{3x+1}+2^{2x}+7}$.

5.3.9. Vypočtěte $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$, kde $x > 0$.

5.3.10. Vypočtěte $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x}$.

Další metoda výpočtu limit funkcí: užitím l'Hospitalova pravidla (viz 8.3.).

5.4. Limita funkce podle Cauchyho

Cauchyho definice limity využívá vztahu mezi okolími. Vyslovíme dvě definice. Jedna uvažuje okolí ve smyslu topologickém, druhá ve smyslu metrickém.

D (limita funkce podle Cauchyho): Nechť x_0 je hromadným bodem $D(f)$. Říkáme, že funkce f **má v bodě x_0 limitu a** $\Leftrightarrow \forall\, U(a)\ \exists\, P(x_0)\ \ \forall x:\ x \in D(f) \cap P(x_0) \Rightarrow f(x) \in U(a)$. Píšeme $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$.

Poznámka: Poslední implikaci lze nahradit inkluzí $f(D(f) \cap P(x_0)) \subset U(a)$.

D (limita funkce podle Cauchyho, druhá definice): Nechť x_0 je hromadným bodem $D(f)$. Říkáme, že funkce f **má v bodě x_0 limitu a** $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ tak, že $\forall x : x \in D(f) \cap P(x_0,\delta) \Rightarrow f(x) \in U(a,\varepsilon)$. Píšeme $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$.

Poznámka: Závěr definice lze formálně upravit na jiný tvar s využitím absolutních hodnot: místo $\forall x : x \in D(f) \cap P(x_0,\delta)$ uvedeme $\forall x \in D(f) :\ 0 < |\, x - x_0 \,| < \delta$ a místo $f(x) \in U(a,\varepsilon)$ dáme $|\, f(x) - a \,| < \varepsilon$.

Úlohy:

5.4.1. Znázorněte obsah Cauchyových definic na obrázku.

5.4.2. Vyslovte Cauchyovy definice vlastní limity v nevlastním bodě, nevlastní limity ve vlastním bodě a nevlastní limity v nevlastním bodě.

V (Ekvivalence definic limity funkce): Heineho definice a Cauchyova definice limity funkce jsou ekvivalentní.

Limita funkce dle definice Heineho je tedy přesně týž pojem jako limita funkce podle Cauchyho. Je tu však rozdíl v jejich použití. Heineho definici používáme častěji k *výpočtu* limit, neboť v této definici znalost hodnoty limity funkce není předem potřebná, Cauchyovu definici používáme častěji k *důkazům*, hodnotu limity musíme znát předem.

- * -