

12. Užití Riemannova integrálu

12.1. Přibližné metody výpočtu Riemannova integrálu

Existuje více přibližných metod, kterými lze provádět výpočet Riemannova integrálu. Označení „přibližná metoda“ není žádnou degradací příslušné metody, neboť zejména s využitím výpočetní techniky lze takto provádět výpočet Riemannova integrálu prakticky s libovolnou přesností. Takže v aplikacích má tento postup stejnou hodnotu a rozsáhlejší uplatnění než klasický výpočet užitím Newtonova vzorce, protože – jak bylo naznačeno již v kapitole 10 – primitivní funkcí ve tvaru pro použití Newtonova vzorce lze získat jen v některých speciálních případech.

Předpokládáme-li $f(x) \geq 0$ na $\langle a, b \rangle$, jde při výpočtu Riemannova integrálu o výpočet obsahu základního obrazce, viz 11.1.

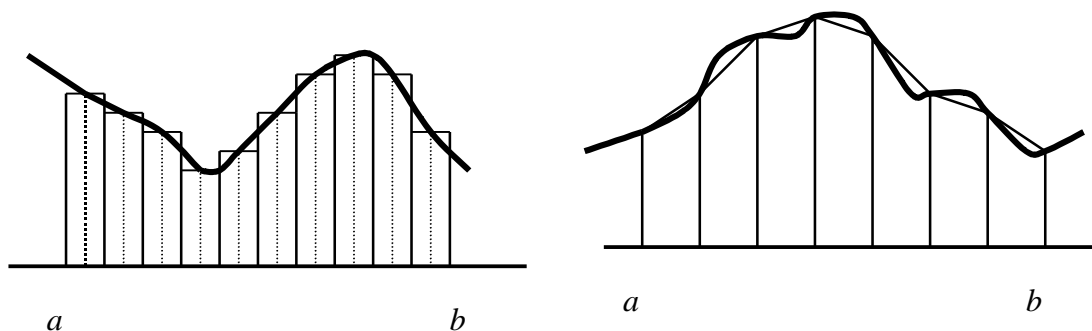
Metoda obdélníková

Princip této metody spočívá v tom, že určitý integrál nahradíme vhodným integrálním součtem (tj. s dostatečně jemným dělením a s vhodnými body ξ_i v elementech dělení).

Zpravidla volíme dělení na n stejných elementů, tedy délka jednoho elementu (tzv. krok h) je $h = \Delta x_i = \frac{b-a}{n}$, za ξ_i volíme středy elementů. Obsah základního obrazce pokládáme přibližně roven integrálnímu součtu, tedy součtu obsahů obdélníků o stranách $f(\xi_i)$ a h . Pro obdélníkovou metodu tak máme vzorec

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f(\xi_i).$$

Chybu metody lze stanovit např. užitím horních součtů a dolních součtů (viz 11.1) což je zvlášť jednoduché pro monotónní funkce.



Metoda lichoběžníková

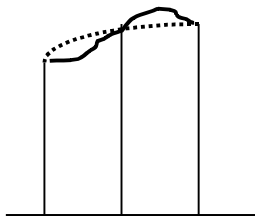
Princip této metody spočívá v tom, interval $\langle a, b \rangle$ rozdělíme na n stejných elementů a funkci nahradíme lomenou čarou (viz obr.). Obsah základního obrazce pak přibližně nahradíme součtem obsahů elementárních lichoběžníků se základnami $f(x_{i-1})$, $f(x_i)$ a s výškou $h = \frac{b-a}{n}$. Tedy

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{2} \sum_{i=1}^n [f(x_{i-1}) + f(x_i)] = h \left[\frac{f(x_0)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + \frac{f(x_n)}{2} \right].$$

Metoda Simpsonova

Interval $\langle a, b \rangle$ rozdělíme na sudý počet $2n$ elementů o šířce $h = \frac{b-a}{n}$, z nichž

vytvoříme dvojice elementů. V každé dvojici pak funkci f nahradíme kvadratickou funkcí (která je dané funkci f rovna na krajích a uprostřed těchto „dvojelementů“), takže k výpočtu obsahu vzniklých „křivočarých lichoběžníků“ lze využít Simpsonova vzorce.



$$P = \frac{1}{6} \sum_{i=0}^{n-1} (x_{2i+2} - x_{2i}) [f(x_{2i}) + 4f(x_{2i+1}) + f(x_{2i+2})].$$

Provedeme-li sčítání přes všechny elementy, dostaneme výslednou formuli pro Simpsonovu metodu:

$$\int_a^b f(x) dx \approx$$

$$\frac{h}{3} \{ [f(x_0) + f(x_{2n})] + 2[f(x_2) + f(x_4) + \dots + f(x_{2n-2})] + 4[f(x_1) + f(x_3) + \dots + f(x_{2n-1})] \}$$

12.2. Užití určitého integrálu v geometrii

Obsah rovinného obrazce

Uvažujme dále jen spojitě funkce. Z geometrického významu Riemannova integrálu plyne, že pro funkci $f(x) \geq 0$ definovanou na $\langle a, b \rangle$ je obsah křivočarého lichoběžníku (základního obrazce) roven

$$P = \int_a^b f(x) dx.$$

Pozor! Je-li $f(x) < 0$ (tato část grafu funkce je pod osou x), dostaneme obsah se záporným znaménkem. Pokud bychom použili předchozí vzorec na funkci, která na $\langle a, b \rangle$ střídá znaménka, dostaneme rozdíl obsahů částí základního obrazce nad osou x a pod osou x , tedy výsledek, který nás zpravidla nezajímá. (Interpretujte takto např. fakt, že

$$\int_0^{2\pi} \sin x dx = 0.)$$

Platí-li na intervalu $\langle a, b \rangle$ vztah $0 \leq g(x) \leq f(x)$, je přímkami $x = a$, $x = b$ a grafy obou funkcí ohraničena oblast *normální vzhledem k x* a její obsah se vypočte vzorcem

$$P = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx.$$

Je-li rovinný obrazec ohraničen křivkou danou parametricky $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in \langle \alpha, \beta \rangle$, pak

$$P = \left| \int_{\alpha}^{\beta} \psi(x) \varphi'(x) dx \right|.$$

Obsah obrazce ohraničeného křivkami v polárních souřadnicích $\rho = \rho(\varphi)$ od φ_1 do φ_2 je dán vzorcem

$$P = \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^2(\varphi) d\varphi.$$

K tomuto vzorci dojdeme využitím vztahu $\Delta P = \frac{1}{2} \rho(\varphi) \rho(\varphi + \Delta\varphi) \Delta\varphi$.

Úloha 12.2.1. Vypočtete obsah kruhu o poloměru r .

[a) Z rovnice kružnice $x^2 + y^2 = r^2$ vyjádříme horní polokružnici a použijeme ji do prvního z výše uvedených vzorců:

$$P = 2 \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx = \dots$$

b) V parametrickém vyjádření máme $x = r \cos t, y = r \sin t, t \in \langle 0, 2\pi \rangle$ a odsud

$$P = \left| - \int_0^{2\pi} r^2 \sin^2 t dt \right| = \dots$$

c) Nejjednodušší je zde výpočet užitím polárních souřadnic, neboť kružnice o středu O a poloměru r má rovnici $\rho = r$ pro $\varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle$. Proto

$$P = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} r^2 d\varphi = \dots = \pi r^2.]$$

Objem tělesa

Pomocí Riemannova integrálu funkce jedné proměnné lze počítat objemy ve dvou případech.

a) Těleso leží mezi rovinami $x = a, x = b$ a známe funkci $P(x)$, jejíž hodnoty znamenají obsah řezu tělesa rovinou kolmou k ose x .

Element objemu je $\Delta V = P(x) \cdot \Delta x$, tj. $dV = P(x) \cdot dx$, a objem tělesa je

$$V = \int_a^b P(x) dx.$$

b) Rotační těleso, kde osou rotace je osa x a které vznikne rotací křivočarého lichoběžníku ohraničeného grafem funkce f na intervalu $\langle a, b \rangle$. Zde je řezem kruh o obsahu $\pi[f(x)]^2$ a platí

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx = \pi \int_a^b y^2 dx.$$

Úloha 12.2.2. Určete objem koule o poloměru r .

[Koule vznikne rotací grafu funkce $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ kolem osy x a proto

$$V = \pi \int_{-r}^r (r^2 - x^2) dx = \dots = \frac{4}{3} \pi r^3.]$$

Délka křivky

Nechť je křivka ℓ dána parametricky: $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $z = \chi(t)$, $t \in \langle \alpha, \beta \rangle$, kde $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$, $\chi'(t)$ jsou spojité a $\forall t \in \langle \alpha, \beta \rangle$ platí $[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 + [\chi'(t)]^2 > 0$. Křivka ℓ je prostorová nebo rovinná (pokud některá z funkcí φ , ψ , χ je identicky rovna nule).

Uvažujme libovolné dělení D intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$: $\alpha = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = \beta$, označme dělicí body křivky ℓ : $M_i = [\varphi(t_i), \psi(t_i), \chi(t_i)]$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$ a dále délku lomené čáry $M_0 M_1 \dots M_n$ označme $\sigma(\ell, D) = \sum_{i=1}^n |M_{i-1} M_i|$. Délka křivky ℓ se pak definuje: $s(\ell) = \sup_D \sigma(\ell, D)$.

Uvažujme dále rovinnou křivku. Délka jedné strany lomené čáry je

$$\Delta s = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2} \Delta t, \text{ takže } \frac{\Delta s}{\Delta t} = \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2}.$$

Pro $\Delta t \rightarrow 0$ pak máme $\frac{ds}{dt} = \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}$, tedy $ds = \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt = \sqrt{dx^2 + dy^2}$. Ježto $\sigma(\ell, D) = \sum_{i=1}^n \Delta s_i$, dá se vyvodit, že $s(\ell) = \int_{\alpha}^{\beta} ds$. Odsud

$$s(\ell) = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt.$$

Úloha 12.2.3. Vypočítejte délku kružnice o poloměru r .

[Kružnici vyjádříme v parametrickém tvaru $x = r \cos t$, $y = r \sin t$, $t \in \langle 0, 2 \rangle$. Vypočteme $ds = \dots = r dt$, takže $s(l) = \int_0^{2\pi} r dt = 2\pi r$.]

Je-li křivka dána explicitně rovnicí $y = f(x)$, je to vlastně zvláštní případ parametrického zadání $x = x$, $y = f(x)$, $x \in \langle a, b \rangle$. Z toho plyne $ds = \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$, takže

$$s(\ell) = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

Je-li křivka dána v polárních souřadnicích $\rho = \rho(\varphi)$, $\varphi \in \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle$, platí $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, odkud

$dx = (\rho' \cos \varphi - \rho \sin \varphi) d\varphi$, $dy = (\rho' \sin \varphi + \rho \cos \varphi) d\varphi$, takže

$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} d\varphi$. Nakonec tedy

$$s(\ell) = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{[\rho(\varphi)]^2 + [\rho'(\varphi)]^2} d\varphi.$$

Pro prostorovou křivku zadanou parametricky máme

$$s(\ell) = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 + [\chi'(t)]^2} dt.$$

Povrch rotační plochy

Jde o plochy vzniklé rotací křivky ℓ kolem osy x . Element povrchu plochy je $\Delta S = 2\pi y \Delta s$, takže diferenciál povrchu plochy je $dS = 2\pi y ds$.

Je-li křivka ℓ dána parametricky: $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in \langle \alpha, \beta \rangle$, je

$$S = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t) \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt,$$

je-li křivka l dána explicitně: $y = f(x)$, $x \in \langle a, b \rangle$, je

$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

12.3. Technické křivky

Dále uvádíme příklady technických křivek, které se často vyskytují ve výpočtech s využitím integrálu. Kuželosečky v tomto přehledu neuvádíme.

Řetězovka

Řetězovku vytváří nepružná nit (řetěz) zavěšená ve dvou bodech. Je to graf funkce:

$$y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}, \text{ kde } a > 0$$

Platí $ds = \operatorname{ch} \frac{x}{a} dx$.

Kotálnice

Při kotálení křivky h (tzv. tvořící křivky nebo *hybné polodie*) bez skluzu po pevné křivce p (tzv. základní křivce nebo *pevné polodii*) opíše každý bod roviny křivku, kterou nazýváme *kotálnice*. Důležité jsou případy, kdy hybná polodie je kružnice a pevná polodie přímka nebo kružnice.

Cykloidy

Jestliže se kružnice h o poloměru a kotálí po přímce p , pak každý (vnější, vnitřní) bod kružnice h (vzdálený o r od středu kružnice h) pevně spojený s touto kružnicí vytváří tzv. *prostou (prodlouženou, zkrácenou) cykloidu*.

Prostá cykloida

Parametrické rovnice:

$$x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t); \text{ jednu větev dostaneme pro } t \in \langle 0, 2\pi \rangle.$$

Platí $ds = 2a \sin \frac{t}{2} dt$.

Prodloužená (zkrácená) cykloida

Parametrické rovnice:

$$x = a t - r \sin t, y = a - r \cos t.$$

$$\text{Platí } ds = \sqrt{a^2 + r^2 - 2 a r \cos t} dt.$$

Epicykloidy a hypocykloidy

Jestliže se kružnice h o poloměru a kotálí po vnějším resp. vnitřním obvodu kružnice p o poloměru A , pak každý (vnější, vnitřní) bod kružnice h (vzdálený o r od středu kružnice h) pevně spojený s touto kružnicí vytváří tzv. *prostou* (*prodlouženou*, *zkrácenou*) *epicykloidu* resp. *hypocykloidu*. Parametrické rovnice prosté epicykloidy (platí horní znaménko) a hypocykloidy (platí dolní znaménko):

$$x = (A + a) \cos t \mp a \cos \frac{A \pm a}{a} t, y = (A \pm a) \sin t - a \sin \frac{A \pm a}{a} t.$$

Asteroida

Zvaná též *astroida* patří mezi kotálnice; asteroidu opisuje každý bod kružnice o poloměru $\frac{a}{4}$, která se bez smyku kotálí zevnitř po kružnici o poloměru a . Je to tedy prostá hypocykloida, kde $A = \frac{a}{4}$. Parametrické rovnice:

$$x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t, t \in \langle 0, 2\pi \rangle.$$

$$\text{Platí } ds = 3a \sin t \cos t dt.$$

Kardioida

Patří mezi kotálnice; kardioidu opisuje každý bod kružnice o poloměru a , která se bez smyku kotálí vně po kružnici o poloměru a . Je to tedy prostá epicykloida, kde $A = a$. Rovnice v polární soustavě:

$$\rho = a (1 + \cos \varphi), \varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle.$$

$$\text{Platí } ds = 2 \cos \frac{\varphi}{2} d\varphi.$$

Evolventa kružnice

Lze ji zařadit mezi kotálnice (kde h je přímka a p je kružnice) i mezi spirály. Jako každá evolventa křivky vznikne tak, že počínaje počátečním bodem nanášíme na tečnu délku oblouku mezi počátečním bodem a bodem dotyku tečny s křivkou. (Evolventu kružnice tedy vytváří konec napjaté niti odmotávané z kruhové cívky.) Parametrické rovnice:

$$x = a(t \sin t + \cos t), y = a(\sin t - t \cos t).$$

$$\text{Platí } ds = a t dt.$$

Archimédova spirála

Je to spirála s konstantní šířkou jednotlivých závitů. Je vytvořena rovnoměrným pohybem bodu po průvodiči, který se rovnoměrně otáčí kolem pólu. Rovnice v polární soustavě:

$$r = a \varphi.$$

Platí $ds = a \sqrt{1 + \varphi^2} d\varphi$.

Logaritmická spirála

Rovnice v polární soustavě:

$$\rho = a e^{m\varphi}.$$

Vyskytuje se např. v kresbě ulit plžů. Platí $ds = a \sqrt{1 + m^2} e^{m\varphi} d\varphi$.

Lemniskáta

Je to množina bodů které mají od dvou daných pevných bodů stálý součin vzdáleností. Rovnice v polární soustavě:

$$\rho^2 = 2 a^2 \cos 2\varphi.$$

Délku nelze vyjádřit užitím elementárních funkcí.

Šroubovice

Je to příklad prostorové křivky. Šroubovice leží na válcové ploše $x^2 + y^2 = a^2$, rozvinutím válcové plochy přejde každý závit šroubovice v úsečku.

Parametrické rovnice:

$$x = a \cos t, \quad y = a \sin t, \quad z = c t, \quad \text{jeden závit pro } t \in \langle 0, 2\pi \rangle.$$

Platí $ds = \sqrt{a^2 + c^2} dt$.

12.4. Užití určitého integrálu ve fyzice

Hmotnost rovinné desky

Mějme spojitou kladnou funkci f a uvažujme rovinnou desku ve tvaru základního obrazce (křivočarého lichoběžníku) pro $x \in \langle a, b \rangle$; necht' σ je plošná konstantní hustota materiálu.

Je-li deska homogenní, tj. $\sigma = \text{konst.}$, je hmotnost této desky rovna

$$m = \sigma \int_a^b f(x) dx.$$

Je-li hustota desky funkcí x , je

$$\int_a^b \sigma(x) f(x) dx.$$

Těžiště rovinné desky

Nyní uvažujme jeden element desky, který má šířku $\Delta x (= dx)$. Statický moment tohoto elementu vzhledem k ose x je $dM_x = (y dx) \cdot \sigma \cdot \frac{1}{2} y$ (hmotnost elementu násobená ramenem síly), podobně $dM_y = (y dx) \cdot \sigma \cdot x$. Statický moment celé (homogenní) desky vzhledem k osám je $M_x = \frac{1}{2} \sigma \int_a^b y^2 dx$, $M_y = \sigma \int_a^b x y dx$.

Těžiště $T[\xi, \eta]$ rovinné desky je bod, který má vzhledem k souřadnicovým osám stejný statický moment jako celá deska, pokud za jeho hmotnost považujeme hmotnost m celé desky. Proto $m \xi = M_y$, $m \eta = M_x$ a z toho (po zkrácení σ)

$$\xi = \frac{\int_a^b x y dx}{\int_a^b y dx}, \quad \eta = \frac{\frac{1}{2} \int_a^b y^2 dx}{\int_a^b y dx}.$$

Pokud má deska tvar oblasti normální vzhledem k ose x , tj. je-li $a \leq x \leq b$, $y_1 \leq y \leq y_2$, pak lze podobně odvodit vzorce pro souřadnice těžiště; dostaneme je z předchozích záměnou $y_2 - y_1$ za y (ve jmenovatelích obou zlomků a v čitateli prvního zlomku) a $y_2^2 - y_1^2$ za y^2 (v čitateli druhého zlomku).

Hmotnost křivky

Uvažujme rovinnou homogenní křivku danou parametricky s konstantní délkovou hustotou σ . Pak

$$m = \sigma \int_a^\beta \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt.$$

Těžiště křivky

Při odvození vzorců se postupuje podobně jako u těžiště rovinné desky. Je zde $dM_x = \sigma y ds$, $dM_y = \sigma x ds$, tedy

$$M_x = \sigma \int_a^\beta \psi(t) \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt, \quad M_y = \sigma \int_a^\beta \varphi(t) \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt.$$

Z rovností $m \xi = M_y$, $m \eta = M_x$ pak plyne, že rovinná homogenní křivka zadaná parametricky má těžiště $T[\xi, \eta]$, kde

$$\xi = \frac{\int_a^\beta \varphi(t) \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt}{\int_a^\beta \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt}, \quad \eta = \frac{\int_a^\beta \psi(t) \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt}{\int_a^\beta \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt}.$$

Vidíme, že těžiště homogenní rovinné desky ani těžiště homogenní křivky nezávisí na hustotě.

- * -