12. Užití Riemannova integrálu

12.1. Přibližné metody výpočtu Riemannova integrálu

Existuje více přibližných metod, kterými lze provádět výpočet Riemannova integrálu. Označení „přibližná metoda“ není žádnou degradací příslušné metody, neboť zejména s využitím výpočetní techniky lze takto provádět výpočet Riemannova integrálu prakticky s libovolnou přesností. Takže v aplikacích má tento postup stejnou hodnotu a rozsáhlejší uplatnění než klasický výpočet užitím Newtonova vzorce, protože – jak bylo naznačeno již v kapitole 10 - primitivní funkcí ve tvaru pro použití Newtonova vzorce lze získat jen v některých speciálních případech.

Předpokládáme-li $f(x) \geq 0$ na $\langle a,b \rangle$, jde při výpočtu Riemannova integrálu o výpočet obsahu základního obrazce, viz 11.1.

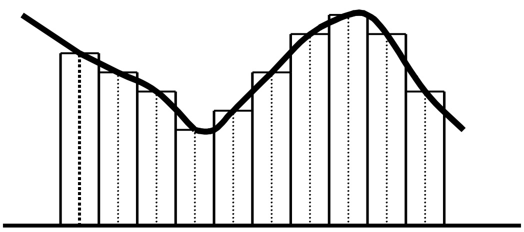
Metoda obdélníková

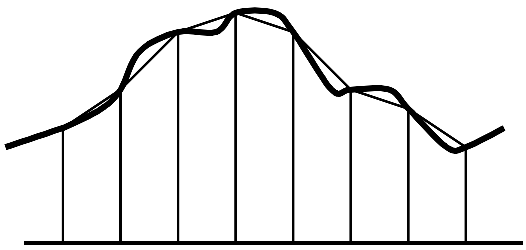
Princip této metody spočívá v tom, že určitý integrál nahradíme vhodným integrálním součtem (tj. s dostatečně jemným dělením a s vhodnými body ξ_i v elementech dělení).

Zpravidla volíme dělení na n stejných elementů, tedy délka jednoho elementu (tzv. *krok h*) je $h = \Delta x_i = \dfrac{b-a}{n}$, za ξ_i volíme středy elementů. Obsah základního obrazce pokládáme přibližně roven integrálnímu součtu, tedy součtu obsahů obdélníků o stranách $f(\xi_i)$ a h. Pro obdélníkovou metodu tak máme vzorec

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,.$$

Chybu metody lze stanovit např. užitím horních součtů a dolních součtů (viz 11.1) což je zvlášť jednoduché pro monotónní funkce.





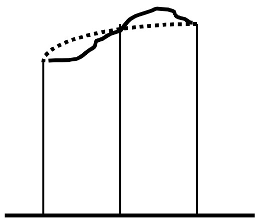
Metoda lichoběžníková

Princip této metody spočívá v tom, interval $\langle a,b \rangle$ rozdělíme na n stejných elementů a funkci nahradíme lomenou čarou (viz obr.). Obsah základního obrazce pak přibližně nahradíme součtem obsahů elementárních lichoběžníků se základnami $f(x_{i-1})$, $f(x_i)$ a s výškou $h = \dfrac{b-a}{n}$. Tedy

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{2}\sum_{i=1}^{n}\left[f(x_{i-1})+f(x_i)\right] = h\left[\frac{f(x_0)}{2}+\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)+\frac{f(x_n)}{2}\right].$$

Metoda Simpsonova

Interval $\langle a,b\rangle$ rozdělíme na sudý počet $2n$ elementů o šířce $h = \dfrac{b-a}{n}$, z nichž vytvoříme dvojice elementů. V každé dvojici pak funkci f nahradíme kvadratickou funkcí (která je dané funkci f rovna na krajích a uprostřed těchto „dvojelementů“), takže k výpočtu obsahu vzniklých „křivočarých lichoběžníků“ lze využít Simpsonova vzorce.



$$P = \frac{1}{6}\sum_{i=0}^{n-1}\left(x_{2i-2} - x_{2i}\right)\left[f(x_{2i}) + 4f(x_{2i+1}) + f(x_{2i+2})\right].$$

Provedeme-li sčítání přes všechny elementy, dostaneme výslednou formuli pro Simpsonovu metodu:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx$$

$$\frac{h}{3}\left\{\left[f(x_0 + f(x_{2n})\right] + 2\left[f(x_2) + f(x_4) + \ldots + f(x_{2n-2})\right] + 4\left[f(x_1) + f(x_3) + \ldots + f(x_{2n-1})\right]\right\}$$

12.2. Užití určitého integrálu v geometrii

Obsah rovinného obrazce

Uvažujme dále jen spojité funkce. Z geometrického významu Riemannova integrálu plyne, že pro funkci $f(x) \geq 0$ definovanou na $\langle a,b\rangle$ je obsah křivočarého lichoběžníku (základního obrazce) roven

$$P = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Pozor! Je-li $f(x) < 0$ (tato část grafu funkce je pod osou x), dostaneme obsah se záporným znaménkem. Pokud bychom použili předchozí vzorec na funkci, která na $\langle a,b\rangle$ střídá znaménka, dostaneme rozdíl obsahů částí základního obrazce nad osou x a pod osou x, tedy výsledek, který nás zpravidla nezajímá. (Interpretujte takto např. fakt, že $\int_0^{2\pi} \sin x\,dx = 0$.)

Platí-li na intervalu $\langle a,b\rangle$ vztah $0 \leq g(x) \leq f(x)$, je přímkami $x = a$, $x = b$ a grafy obou funkcí ohraničena oblast *normální vzhledem k x* a její obsah se vypočte vzorcem

$$P = \int_a^b \left[f(x) - g(x)\right]dx.$$

Je-li rovinný obrazec ohraničen křivkou danou parametricky $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in \langle \alpha,\beta\rangle$, pak

$$P = \left|\int_\alpha^\beta \psi(x)\,\varphi'(x)\,dx\right|.$$

Obsah obrazce ohraničeného křivkami v polárních souřadnicích $\rho = \rho(\varphi)$ od φ_1 do φ_2 je dán vzorcem

$$P = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^2(\varphi)\, d\varphi .$$

K tomuto vzorci dojdeme využitím vztahu $\Delta P = \frac{1}{2}\rho(\varphi)\,\rho(\varphi + \Delta\varphi)\,\Delta\varphi$.

Úloha 12.2.1. Vypočtěte obsah kruhu o poloměru r.

[a) Z rovnice kružnice $x^2 + y^2 = r^2$ vyjádříme horní polokružnici a použijeme ji do prvního z výše uvedených vzorců:

$$P = 2\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx = \ldots$$

b) V parametrickém vyjádření máme $x = r\cos t$, $y = r\sin t$, $t \in \langle 0, 2\pi\rangle$ a odsud

$$P = \left| -\int_{0}^{2\pi} r^2 \sin^2 t\, dt \right| = \ldots$$

c) Nejjednodušší je zde výpočet užitím polárních souřadnic, neboť kružnice o středu O a poloměru r má rovnici $\rho = r$ pro $\varphi \in \langle 0, 2\pi\rangle$. Proto

$$P = \frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi} r^2\, d\varphi = \ldots = \pi r^2 .\ ]$$

Objem tělesa

Pomocí Riemannova integrálu funkce jedné proměnné lze počítat objemy ve dvou případech.

a) Těleso leží mezi rovinami $x = a$, $x = b$ a známe funkci $P(x)$, jejíž hodnoty znamenají obsah řezu tělesa rovinou kolmou k ose x.

Element objemu je $\Delta V = P(x).\Delta x$, tj. $dV = P(x).dx$, a objem tělesa je

$$V = \int_{a}^{b} P(x)\, dx .$$

b) Rotační těleso, kde osou rotace je osa x a které vznikne rotací křivočarého lichoběžníku ohraničeného grafem funkce f na intervalu $\langle a,b\rangle$. Zde je řezem kruh o obsahu $\pi[f(x)]^2$ a platí

$$V = \pi\int_{a}^{b} [f(x)]^2\, dx = \pi\int_{a}^{b} y^2\, dx .$$

Úloha 12.2.2. Určete objem koule o poloměru r.

[Koule vznikne rotací grafu funkce $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ kolem osy x a proto

$$V = \pi\int_{-r}^{r} \left(r^2 - x^2\right) dx = \ldots = \frac{4}{3}\pi r^3 .\ ]$$

Délka křivky

Nechť je křivka ℓ dána parametricky: $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $z = \chi(t)$, $t \in \langle\alpha, \beta\rangle$, kde $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$, $\chi'(t)$ jsou spojité a $\forall t \in \langle\alpha, \beta\rangle$ platí $[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 + [\chi'(t)]^2 > 0$. Křivka ℓ je prostorová nebo rovinná (pokud některá z funkcí φ, ψ, χ je identicky rovna nule).

Uvažujme libovolné dělení D intervalu $\langle\alpha, \beta\rangle$: $\alpha = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = \beta$, označme dělicí body křivky ℓ: $M_i = [\varphi(t), \psi(t), \chi(t)]$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ a dále délku lomené čáry $M_0M_1\ldots M_n$ označme $\sigma(\ell,D) = \sum_{i=1}^{n}|M_{i-1}M_i|$. Délka křivky ℓ se pak definuje: $s(\ell) = \sup_D \sigma(\ell,D)$.

Uvažujme dále rovinnou křivku. Délka jedné strany lomené čáry je

$\Delta s = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2}\,\Delta t$, takže $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2}$.

Pro $\Delta t \to 0$ pak máme $\frac{ds}{dt} = \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}$, tedy $ds = \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\,dt =$

$= \sqrt{dx^2 + dy^2}$. Ježto $\sigma(\ell,D) = \sum_{i=1}^{n}\Delta s_i$, dá se vyvodit, že $s(\ell) = \int_\alpha^\beta ds$. Odsud

$$s(\ell) = \int_\alpha^\beta \sqrt{[\varphi'(\mathrm{t})]^2 + [\psi'(t)]^2}\,dt .$$

Úloha 12.2.3. Vypočtěte délku kružnice o poloměru r.

[Kružnici vyjádříme v parametrickém tvaru $x = r\cos t$, $y = r\sin t$, $t \in \langle 0,2\rangle$. Vypočteme $ds = \ldots = r\,dt$, takže $s(l) = \int_0^{2\pi} r\,dt = 2\pi r$.]

Je-li křivka dána explicitně rovnicí $y = f(x)$, je to vlastně zvláštní případ parametrického zadání $x = x$, $y = f(x)$, $x \in \langle a,b\rangle$. Z toho plyne $ds = \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dt$, takže

$$s(\ell) = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dt .$$

Je-li křivka dána v polárních souřadnicích $\rho = \rho(\varphi)$, $\varphi \in \langle\varphi_1, \varphi_2\rangle$, platí
$x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, odkud
$dx = (\rho'\cos\varphi - \rho\sin\varphi)\,d\varphi$, $dy = (\rho'\sin\varphi + \rho\cos\varphi)\,d\varphi$, takže
$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\,d\varphi$. Nakonec tedy

$$s(\ell) = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{[\rho(\varphi)]^2 + [\rho'(\varphi)]^2}\,d\varphi .$$

Pro prostorovou křivku zadanou parametricky máme

$$s(\ell) = \int_\alpha^\beta \sqrt{[\varphi'(\mathrm{t})]^2 + [\psi'(t)]^2 + [\chi'(x)]^2}\,dt .$$

Povrch rotační plochy

Jde o plochy vzniklé rotací křivky ℓ kolem osy x. Element povrchu plochy je $\Delta S = 2\pi y\, \Delta s$, takže diferenciál povrchu plochy je $dS = 2\pi y\, ds$.

Je-li křivka ℓ dána parametricky: $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in \langle \alpha, \beta \rangle$, je

$$S = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t) \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\, dt,$$

je-li křivka l dána explicitně: $y = f(x)$, $x \in \langle a,b \rangle$, je

$$S = 2\pi \int_{a}^{b} f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx.$$

12.3. Technické křivky

Dále uvádíme příklady technických křivek, které se často vyskytují ve výpočtech s využitím integrálu. Kuželosečky v tomto přehledu neuvádíme.

Řetězovka

Řetězovku vytváří nepružná nit (řetěz) zavěšená ve dvou bodech. Je to graf funkce:

$$y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}, \text{ kde } a > 0$$

Platí $ds = \operatorname{ch} \dfrac{x}{a}\, dx$.

Kotálnice

Při kotálení křivky h (tzv. tvořící křivky nebo *hybné polodie*) bez skluzu po pevné křivce p (tzv. základní křivce nebo *pevné polodii*) opíše každý bod roviny křivku, kterou nazýváme *kotálnice*. Důležité jsou případy, kdy hybná polodie je kružnice a pevná polodie přímka nebo kružnice.

Cykloidy

Jestliže se kružnice h o poloměru a kotálí po přímce p, pak každý (vnější, vnitřní) bod kružnice h (vzdálený o r od středu kružnice h) pevně spojený s touto kružnicí vytváří tzv. *prostou* (*prodlouženou*, *zkrácenou*) cykloidu.

Prostá cykloida

Parametrické rovnice:

$x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$; jednu větev dostaneme pro $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$.

Platí $ds = 2a \sin \dfrac{t}{2}\, dt$.

Prodloužená (zkrácená) cykloida

Parametrické rovnice:

$x = a\,t - r\sin t,\ y = a - r\cos t.$

Platí $ds = \sqrt{a^2 + r^2 - 2\,a\,r\cos t}\;dt$.

Epicykloidy a hypocykloidy

Jestliže se kružnice *h* o poloměru *a* kotálí po vnějším resp. vnitřním obvodu kružnice *p* o poloměru *A*, pak každý (vnější, vnitřní) bod kružnice *h* (vzdálený o *r* od středu kružnice *h*) pevně spojený s touto kružnicí vytváří tzv. *prostou* (*prodlouženou, zkrácenou*) *epicykloidu* resp. *hypocykloidu*. Parametrické rovnice prosté epicykloidy (platí horní znaménko) a hypocykloidy (platí dolní znaménko):

$$x = (A + a)\cos t \ \mp\ a\cos\frac{A \pm a}{a}t,\ \ y = \ (A \pm a)\sin t\ -\ a\sin\frac{A \pm a}{a}t\,.$$

Asteroida

Zvaná též *astroida* patří mezi kotálnice; asteroidu opisuje každý bod kružnice o poloměru $\frac{a}{4}$, která se bez smyku kotálí zevnitř po kružnici o poloměru *a*. Je to tedy prostá hypocykloida, kde $A = \frac{a}{4}$. Parametrické rovnice:

$x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t,\ \ t \in \langle 0{,}2\pi\rangle.$

Platí $ds = 3a\sin t\cos t\,dt.$

Kardioida

Patří mezi kotálnice; kardioidu opisuje každý bod kružnice o poloměru *a*, která se bez smyku kotálí vně po kružnici o poloměru *a*. Je to tedy prostá epicykloida, kde $A = a$. Rovnice v polární soustavě:

$\rho = a\,(1 + \cos\varphi),\ \varphi \in \langle 0{,}2\pi\rangle.$

Platí $ds = 2\cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi.$

Evolventa kružnice

Lze ji zařadit mezi kotálnice (kde *h* je přímka a *p* je kružnice) i mezi spirály. Jako každá evolventa křivky vznikne tak, že počínaje počátečním bodem nanášíme na tečnu délku oblouku mezi počátečním bodem a bodem dotyku tečny s křivkou. (Evolventu kružnice tedy vytváří konec napjaté niti odmotávané z kruhové cívky.) Parametrické rovnice:

$x = a(t\sin t + \cos t),\ y = a(\sin t - t\cos t).$

Platí $ds = a\,t\,dt.$

Archimédova spirála

Je to spirála s konstantní šířkou jednotlivých závitů. Je vytvořena rovnoměrným pohybem bodu po průvodiči, který se rovnoměrně otáčí kolem pólu. Rovnice v polární soustavě:

$r = a\,\varphi.$

Platí $ds = a\sqrt{1+\varphi^2}\,d\varphi$.

Logaritmická spirála

Rovnice v polární soustavě:

$\rho = a\,e^{m\varphi}$.

Vyskytuje se např. v kresbě ulit plžů. Platí $ds = a\sqrt{1+m^2}\;e^{m\varphi}\,d\varphi$.

Lemniskáta

Je to množina bodů které mají od dvou daných pevných bodů stálý součin vzdáleností. Rovnice v polární soustavě:

$\rho^2 = 2\,a^2\cos 2\varphi.$

Délku nelze vyjádřit užitím elementárních funkcí.

Šroubovice

Je to příklad prostorové křivky. Šroubovice leží na válcové ploše $x^2 + y^2 = a^2$, rozvinutím válcové plochy přejde každý závit šroubovice v úsečku.

Parametrické rovnice:

$x = a\cos t,\; y = a\sin t,\; z = c\,t$, jeden závit pro $t \in \langle 0,2\pi\rangle$.

Platí $ds = \sqrt{a^2 + c^2}\,dt$.

12.4. Užití určitého integrálu ve fyzice

Hmotnost rovinné desky

Mějme spojitou kladnou funkci f a uvažujme rovinnou desku ve tvaru základního obrazce (křivočarého lichoběžníku) pro $x \in \langle a,b\rangle$; nechť σ je plošná konstantní hustota materiálu.

Je-li deska homogenní, tj. σ = konst., je hmotnost této desky rovna

$$m = \sigma\int_a^b f(x)\,dx\ .$$

Je-li hustota desky funkcí x, je

$$\int_a^b \sigma(x)\,f(x)\,dx\ .$$

Těžiště rovinné desky

Nyní uvažujme jeden element desky, který má šířku Δx (= dx). Statický moment tohoto elementu vzhledem k ose x je $dM_x = (y\,dx)\cdot\sigma\cdot\frac{1}{2}y$ (hmotnost elementu násobená ramenem síly), podobně $dM_y = (y\,dx)\cdot\sigma\cdot x$. Statický moment celé (homogenní) desky vzhledem k osám je $M_x = \frac{1}{2}\sigma\int_a^b y^2\,dx$, $M_y = \sigma\int_a^b x\,y\,dx$.

Těžiště $T[\xi,\eta]$ rovinné desky je bod, který má vzhledem k souřadnicovým osám stejný statický moment jako celá deska, pokud za jeho hmotnost považujeme hmotnost m celé desky. Proto $m\,\xi = M_y$, $m\,\eta = M_x$ a z toho (po zkrácení σ)

$$\xi = \frac{\int_a^b x\,y\,dx}{\int_a^b y\,dx}, \quad \eta = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b y^2\,dx}{\int_a^b y\,dx}.$$

Pokud má deska tvar oblasti normální vzhledem k ose x, tj. je-li $a \le x \le b$, $y_1 \le y \le y_2$, pak lze podobně odvodit vzorce pro souřadnice těžiště; dostaneme je z předchozích záměnou $y_2 - y_1$ za y (ve jmenovatelích obou zlomků a v čitateli prvního zlomku) a $y_2^2 - y_1^2$ za y^2 (v čitateli druhého zlomku).

Hmotnost křivky

Uvažujme rovinnou homogenní křivku danou parametricky s konstantní délkovou hustotou σ. Pak

$$m = \sigma\int_\alpha^\beta \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\,dt.$$

Těžiště křivky

Při odvození vzorců se postupuje podobně jako u těžiště rovinné desky. Je zde $dM_x = \sigma\,y\,ds$, $dM_y = \sigma\,x\,ds$, tedy

$$M_x = \sigma\int_\alpha^\beta \psi(t)\sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\,dt, \quad M_y = \sigma\int_\alpha^\beta \psi(t)\sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\,dt.$$

Z rovností $m\,\xi = M_y$, $m\,\eta = M_x$ pak plyne, že rovinná homogenní křivka zadaná parametricky má těžiště $T[\xi,\eta]$, kde

$$\xi = \frac{\int_\alpha^\beta \varphi(t)\sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\,dt}{\int_\alpha^\beta \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\,dt}, \quad \eta = \frac{\int_\alpha^\beta \psi(t)\sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\,dt}{\int_\alpha^\beta \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\,dt}.$$

Vidíme, že těžiště homogenní rovinné desky ani těžiště homogenní křivky nezávisí na hustotě.

\- * -