2. Číselné posloupnosti

2.1. Pojem posloupnosti

D: Každé zobrazení $\boldsymbol{N}$ do $\boldsymbol{R}$ nazýváme ***číselná posloupnost***. Zápis: $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ nebo jen $\{a_n\}$; a_n se nazývá *n-tý člen* posloupnosti.

Definici číselné posloupnosti lze založit i na pojmu (reálné) funkce; pak je to funkce definovaná na množině $\boldsymbol{N}$ všech přirozených čísel.

Způsoby zadání posloupnosti

Číselná posloupnost bývá zadána *několika prvními členy* (tak, aby bylo patrné pravidlo, jak vytvářet další členy, n-tým členem nebo rekurentně.

Úloha 2.1.1. Je dána posloupnost $\frac{1}{1.4}, \frac{3}{4.7}, \frac{5}{7.10}, \frac{7}{10.13}, \ldots$ Určete její n-tý člen.

$$\left[a_n = \frac{2n-1}{(3n-2).(3n+1)}\right]$$

Při zadání *n-tým členem* zase naopak lze z příslušného vzorce počítat jednotlivé členy posloupnosti.

Úloha 2.1.2. Příklady číselných posloupností zadaných n-tým členem: $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$, $\{(-1)^n \cdot n\}$, $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$, $\{a \cdot q^{n-1}\}$, $\{a + (n-1)d\}$. Vypočtěte členy a_1, a_2, a_3, a_4.

Rekurentní definice obsahuje zpravidla 1. člen (nebo několik prvních členů) a pravidlo, jak vytvořit další člen ze členů předcházejících.

Rekurentní definice aritmetické posloupnosti: $a_1 = a$, $a_{n+1} = a_n + d$.

Rekurentní definice geometrické posloupnosti: $a_1 = a$, $a_{n+1} = a_n.q$ $(q \notin \{0, 1, -1\})$.

Úlohy:

2.1.3. Posloupnost $\{a_n\}$ je zadána rekurentně takto: $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{10}{a_n}\right)$; je to posloupnost aproximací čísla $\sqrt{10}$. Vypočtěte první 4 aproximace.

2.1.4. Fibonacciova posloupnost $\{b_n\}$ je definována takto: $b_1 = 1$, $b_2 = 1$, $b_{n+2} = b_{n+1} + b_n$. Vypočtěte prvních 10 členů této posloupnosti.

Posloupnost $\{a_n\}$ je třeba odlišovat od množiny (všech) jejích členů (kdy se též užívají složené závorky). Např. množina (všech) členů posloupnosti $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ je $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right\}$, množina (hodnot) členů posloupnosti $\{(-1)^n\}$ je $\{-1, 1\}$.

D: Posloupnost $\{b_n\}$ se nazývá ***vybraná** z posloupnosti* $\{a_n\}$ (nebo též ***podposloupnost***) $\Leftrightarrow$ $\exists$ posloupnost přirozených čísel $k_1 < k_2 < k_3 < \ldots$ tak, že $\forall n \in \boldsymbol{N}$ je $b_n = a_{k_n}$.

Např. posloupnost všech prvočísel je vybraná z posloupnosti $\{n\}$ všech čísel přirozených, ale není vybraná z posloupnosti $\{2n - 1\}$ všech čísel lichých.

2.2. Základní vlastnosti číselných posloupností

V této kapitole se dále zabýváme jen číselnými posloupnostmi.

D: Posloupnost se nazývá (***shora, zdola***) ***omezená*** $\Leftrightarrow$ tuto vlastnost má množina všech jejích členů.

Např. posloupnost $\{2n - 1\}$ je zdola omezená, není omezená shora, není omezená. Posloupnost $\{(-1)^n\}$ je omezená shora i zdola, je omezená. Stacionární posloupnost $\{c\}$ je omezená.

D: Posloupnost a se nazývá

– ***rostoucí*** $\Leftrightarrow$ $\forall n \in \boldsymbol{N}$ platí $a_n < a_{n+1}$,

– ***klesající*** $\Leftrightarrow$ $\forall n \in \boldsymbol{N}$ platí $a_n > a_{n+1}$,

– ***nerostoucí*** $\Leftrightarrow$ $\forall n \in \boldsymbol{N}$ platí $a_n \geq a_{n+1}$

– ***neklesající*** $\Leftrightarrow$ $\forall n \in \boldsymbol{N}$ platí $a_n \geq a_{n+1}$

Společný název pro všechny tyto druhy posloupností: ***posloupnosti monotonní*** a pro první dva druhy: ***posloupnosti ryze monotonní***.

D: Operace s posloupnostmi jsou definovány takto:

– ***násobení reálným číslem c***: $c \cdot \{a_n\} = \{c \cdot a_n\}$;

– ***aritmetické operace*** (*součet, rozdíl, součin, podíl*): $\{a_n\} + \{b_n\} = \{a_n + b_n\}$, $\{a_n\} - \{b_n\} =$ $= \{a_n - b_n\}$, $\{a_n\} \cdot \{b_n\} = \{a_n \cdot b_n\}$, $\{a_n\}/\{b_n\} = \{a_n / b_n\}$ (pro $b_n \neq 0$);

– ***opačná posloupnost*** k $\{a_n\}$ je $\{- a_n\}$;

– ***reciproká posloupnost*** k $\{a_n\}$ je $\{1/a_n\}$ (pro $a_n \neq 0$).

2.3. Limita posloupnosti

D: Říkáme, že posloupnost $\{a_n\}$ ***má limitu*** a $\Leftrightarrow$ $\forall U(a)\ \exists n_0 \in \boldsymbol{N}$ tak, že $\forall n \in \boldsymbol{N}$: $n \geq n_0 \Rightarrow a_n \in U(a)$. Je-li $a \in \boldsymbol{R}$, nazývá se a *vlastní limita* a posloupnost $\{a_n\}$ se nazývá ***konvergentní***, pokud $a = \pm\infty$, nazývá se a *nevlastní limita*. Neexistuje-li vlastní limita, nazývá se posloupnost $\{a_n\}$ ***divergentní***.

Zápisy: $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$; $\lim a_n = a$; $a_n \to a$ pro $n \to +\infty$.

Posloupnost tedy buď konverguje nebo diverguje. V tomto druhém případě buď diverguje k $+\infty$ nebo k $-\infty$ nebo *osciluje* (tj. nemá limitu vlastní ani nevlastní).

Např. posloupnost $\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}$ je konvergentní, má limitu 1, stacionární posloupnost $\{c\}$ je konvergentní a má limitu c, posloupnost $\left\{\dfrac{n}{100}\right\}$ je divergentní, má nevlastní limitu $+\infty$, posloupnost $\{q^n\}$ je pro $q \leq -1$ divergentní, nemá limitu (osciluje).

Je-li $V(n)$ nějaká výroková forma a platí-li, že výrok ($\exists n_0 \in \boldsymbol{N}$ tak, že $\forall n \in \boldsymbol{N} : n \geq n_0 \Rightarrow V(n)$) je pravdivý, pak říkáme, že $V(n)$ platí ***pro skoro všechna n***.

Pomocí tohoto vyjádření lze vyslovit definici limity posloupnosti např. takto: Říkáme, že posloupnost $\{a_n\}$ *má limitu* a $\Leftrightarrow$ v každém okolí $U(a)$ leží skoro všechny členy této posloupnosti.

Věty o limitách:

V: Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.

Důkaz (sporem): Kdyby existovaly dvě limity a, b, pak by existovala disjunktní okolí $U(a)$, $U(b)$ tak, že pro skoro všechna n by mělo platit současně $a_n \in U(a)$, $a_n \in U(b)$, což je spor. □

V: Má-li posloupnost $\{a_n\}$ limitu, pak každá posloupnost $\{b_n\}$ vybraná z posloupnosti $\{a_n\}$ má tutéž limitu.

Důkaz: Označme tuto limitu a; pak $\forall U(a)\ \exists n_0 \in \boldsymbol{N}$ tak, že $\forall n \in \boldsymbol{N}$: $n \geq n_0 \Rightarrow a_n \in U(a)$; pro $k_n > n_0$ je ovšem též $b_m = a_{k_n} \in U(a)$, takže $b_m \in U(a)$ pro skoro všechna m. □

Limita posloupnosti se tedy nezmění, vynecháme-li nebo pozměníme-li libovolný konečný počet členů posloupnosti.

Při výpočtu limit využíváme také tohoto postupu: 1) zjistíme, že daná posloupnost je konvergentní a 2) najdeme limitu a nějaké vhodné vybrané posloupnosti. Pak toto a je i limitou dané posloupnosti. Když naopak zjistíme, že nějaká vybraná posloupnost je divergentní, znamená to podle předchozí věty, že je divergentní i daná posloupnost. Podobně zjistíme-li, že dvě vybrané posloupnosti mají různou limitu, je daná posloupnost divergentní.

V: Každá konvergentní posloupnost je omezená.

Důkaz: Označme limitu a; zvolme $\varepsilon = 1$. Pak množina M těch členů posloupnosti, které neleží v okolí $U(a,1)$, je konečná. $\forall n \in N$ pak platí $a \geq \min\{\min M, a - 1\}$, $a \leq \max\{\max M, a + 1\}$. □

Tato věta ovšem neplatí obráceně, neboť např. posloupnost $\{(-1)^n\}$ je omezená, ale je divergentní. Větší hloubku pohledu do vztahu mezi omezeností a konvergencí dává následující věta.

V (věta Bolzano - Weierstrassova): Z každé omezené posloupnosti lze vybrat konvergentní podposloupnost.

Princip důkazu (Bolzanova metoda půlení intervalů): Je dána posloupnost $\{a_n\}$; ježto je omezená, $\exists\langle K_1, L_1\rangle$ tak, že $\forall n \in \boldsymbol{N}$ je $a_n \in \langle K_1, L_1\rangle$. Konstrukce vybrané posloupnosti: Za b_1 zvolíme libovolný člen dané posloupnosti $\{a_n\}$, nechť v ní má index k_1. Interval $\langle K_1, L_1\rangle$ rozpůlíme a označíme $\langle K_2, L_2\rangle$ tu část, do níž je zobrazeno nekonečně mnoho členů posloupnosti $\{a_n\}$. V $\langle K_2, L_2\rangle$ vybereme za b_2 libovolný takový člen posloupnosti $\{a_n\}$, který má index $k_2 > k_1$. Interval $\langle K_2, L_2\rangle$ rozpůlíme, atd. Označíme a (jediný) společný bod všech intervalů $\langle K_n, L_n\rangle$ (podle věty o vložených intervalech). Pak $\forall\ U(a)$ pro skoro všechna n platí inkluze $\langle K_n, L_n\rangle \subset U(a)$, takže též $b_n \in U(a)$, tedy $b_n \to a$. □

V: Každá neklesající shora omezená posloupnost je konvergentní.

Princip důkazu: Mějme dánu posloupnost $\{a_n\}$; z omezenosti množiny $M = \{a_1, a_1, ...\}$ plyne existence vlastního suprema $a = \sup M$. Ze druhé vlastnosti suprema plyne, že v libovolném levém okolí $U(a-)$ leží alespoň jedno a_n, takže vzhledem k monotónnosti $\{a_n\}$ leží v $U(a-)$ skoro všechny členy posloupnosti $\{a_n\}$. □

V (o limitách součtu, rozdílu, součinu a podílu): Nechť $\lim a_n = a$, $\lim b_n = b$. Pak platí, pokud výrazy na pravých stranách mají v $\boldsymbol{R}^*$ smysl:

1° $\lim (a_n + b_n) = a + b$, $\lim (a_n - b_n) = a - b$,

2° $\lim (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$,

3° pro $b_n \neq 0$, $b \neq 0$ je $\lim (a_n / b_n) = a / b$,

4° $\lim |a_n| = |a|$.

Důkaz - ukázka pro součet, kde a, b jsou vlastní limity:

$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_1, n_2 \in \boldsymbol{N}$ tak, že: $n \geq n_1 \Rightarrow a_n \in U(a,\varepsilon/2)$, : $n \geq n_2 \Rightarrow b_n \in U(b,\varepsilon/2)$. Nechť
$n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ a $n \geq n_0$. Pak

$a - \varepsilon/2 < a_n < a + \varepsilon/2$,

$b - \varepsilon/2 < b_n < b + \varepsilon/2$ a po sečtení obou nerovností máme

$(a_n + b_n) \in U(a+b,\varepsilon)$. □

Úloha 2.3.1. Dokažte větu pro součet, kde a je vlastní limita a $b = +\infty$.

V (limita nerovnosti): Nechť $\lim a_n = a$, $\lim b_n = b$ a pro nekonečně mnoho n platí $a_n \leq b_n$. Pak $a \leq b$.

Důkaz sporem: Kdyby bylo $a > b$, existovala by disjunktní okolí $U(a)$, $U(b)$ tak, že $\forall x \in U(a)$ $\forall y \in U(b)$ by platilo $x > y$. Pro skoro všechna n je však $a_n \in U(a)$, $b_n \in U(b)$, tedy by platilo $a_n > b_n$, což dává spor s předpokladem věty. □

Pro konvergentní posloupnosti $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ zřejmě platí, že když pro nekonečně mnoho členů je $a_n \leq b_n$ a pro nekonečně mnoho členů je $a_n > b_n$, pak $a = b$.

V (věta o třech limitách): Nechť $\lim a_n = a$, $\lim b_n = a$ a nechť pro skoro všechna n je $a_n \leq c_n \leq b_n$. Pak $\lim c_n = a$.

Princip důkazu: Podle definice limity patří do libovolného okolí $U(a)$ skoro všechny členy posloupnosti $\{a_n\}$ a také skoro všechny členy posloupnosti $\{b_n\}$. Proto do $U(a)$ patří také skoro všechny členy posloupnosti $\{c_n\}$. □

Pro nevlastní limity má věta o třech limitách (zvaná též věta o třech posloupnostech) speciální tvar. Je-li totiž $\lim a_n = +\infty$, lze brát za b_n posloupnost $\{+\infty\}$, proto z nerovnosti $a_n \leq c_n$ plyne $\lim c_n = +\infty$. Podobně lze větu o třech limitách upravit pro nevlastní limitu $-\infty$.

2.4. Nulové posloupnosti

Jsou to posloupnosti, kde $\lim a_n = 0$. Nulové posloupnosti fakticky nejsou jen zvláštním případem konvergentních posloupností, ale i naopak, konvergenci bychom mohli definovat užitím nulových posloupností podle věty:

V: $a_n \to a \Leftrightarrow (a_n - a) \to 0$.

Uvádíme některé věty, které mají vztah k nulovým posloupnostem.

V: Jestliže $a_n \to a$, pak $|a_n| \to |a|$.

Tato věta neplatí pro $a \neq 0$ naopak, ale pro $a = 0$ ano.

V: Jestliže $|a_n| \to +\infty$, je $1/a_n$ posloupnost nulová.

Jestliže jmenovatel zlomku konverguje k nule, je situace složitější:

V: Je-li $\forall n \in \boldsymbol{N}$ $a_n > 0$, $a_n \to 0$, pak $1/a_n \to +\infty$,
$a_n < 0$, $a_n \to 0$, pak $1/a_n \to -\infty$,
$a_n \neq 0$, $a_n \to 0$, pak $1/|a_n| \to +\infty$.

Nulových posloupností se s výhodou využívá při výpočtech limit.

Úlohy:

2.4.1. Vypočtěte $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{6n^2+n}{4n^2+5}$.

2.4.2. Vypočtěte $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{6.2^{2n}+5.2^n-4}{2^{2n+1}-2^n+15}$.

2.4.3. Vypočtěte $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{7n+150}{n^2-0{,}25}$.

2.4.4. Vypočtěte $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^3-8n}{9n^2+10}$.

2.5. Posloupnost aritmetická a posloupnost geometrická

Někdy se pro uspořádané n-tice používá název *konečné posloupnosti*, který zčásti navozuje použití posloupností v praxi. V praxi je mnoho situací, kdy známe několik prvních členů a_1, a_2 , a_3,..., a_n nějaké posloupnosti a pomocí této znalosti chceme zjistit, zkonstruovat nebo předpovědět její další člen a_{n+1}. Může jít o posloupnost peněžních částek, (časovou) posloupnost údajů o objemu výroby, posloupnost časových termínů nebo intervalů ad. Problémem je, *jak* určit další člen (nebo alespoň jeho přibližnou hodnotu) ze znalosti předchozích. Může jít o nalezení vzorce pro n-tý člen, rekurentního pravidla nebo i o jiný postup.

Zvláštní pozornosti si zaslouží posloupnost aritmetická a posloupnost geometrická, které se v praxi vyskytují poměrně často..

Aritmetická posloupnost je (definována jako) posloupnost, která je dána svým prvním členem a_1, konstantní diferencí d a rekurentním pravidlem $\forall n \in \boldsymbol{N}$: $a_{n+1} = a_n + d$. Aritmetickou posloupnost lze rovněž definovat jako posloupnost, u níž rozdíl libovolných dvou po sobě jdoucích členů je konstantní. Z rekurentního pravidla dostaneme vzorec pro n-tý člen :

$a_n = a_1 + (n-1).d$.

(Dokazuje se jednoduše např. matematickou indukcí). Vidíme, že aritmetická posloupnost má pro $d > 0$ limitu $+\infty$, pro $d < 0$ limitu $-\infty$.

Úloha 2.5.1. V posledních třech měsících činil celkový objem zakázek přibližně $a_1 = 325$ tis. Kč, $a_2 = 354$ tis. Kč a $a_3 = 383$ tis. Kč. Jaký objem lze očekávat ve 4. měsíci ?

[Lze vyslovit hypotézu, že objem zakázek tvoří aritmetickou posloupnost, kde $a_1 = 325$, $d = 29$ (tis. Kč). Pak $a_4 = a_3 + d = 412$ (tis. Kč). Lze očekávat objem zakázek za 412 tis. Kč. (Samozřejmě korektnost vyslovení takové hypotézy závisí na praktických okolnostech.)]

Praktický význam může mít i součet s_n prvních n členů aritmetické posloupnosti. Vzorec pro s_n lze odvodit např. takto: Vyjádříme s_n dvěma způsoby:

$s_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + ... + (a_1 + (n-1)d)$,

$s_n = a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + ... + (a_n - (n-1)d)$

a po sečtení máme $2\,s_n = n.(a_1 + a_n)$, takže $s_n = \frac{1}{2n}(a_1 + a_n)$.

Úloha 2.5.2. Na skládce jsou uloženy roury tak, že v dolní vrstvě jich je 26 a každá roura v každé vyšší vrstvě vždy zapadá mezi dvě roury ve vrstvě nižší; vrstev je celkem 12. Kolik je na skládce rour ?

[Položíme $a_1 = 26$; pak $d = -1$. V horní vrstvě je $a_{12} = 26 + 11 \cdot (-1) = 15$ rour a celkem $s_{12} = 6 \cdot (26 + 15) = 246$ rour.]

Geometrická posloupnost je (definována jako) posloupnost, která je dána svým 1. členem a_1 , konstantním kvocientem $q \neq 0$ a rekurentním pravidlem $\forall n \in N$: $a_{n+1} = a_n \cdot q$. Geometrickou posloupnost lze tedy rovněž definovat jako posloupnost, u níž podíl libovolných dvou po sobě jdoucích členů je konstantní. Z rekurentního pravidla dostaneme vzorec pro n-tý člen :

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}.$$

(Dokazuje se jednoduše např. matematickou indukcí).

Úloha 2.5.3. V prvním měsíci roku činil obrat 300 tis. Kč a v každém dalším měsíci byl o 5 % větší než v měsíci předchozím. Určete předpokládaný listopadový obrat.

[Jde o geometrickou posloupnost, kde $a_1 = 300$, $q = 1{,}05$, $n = 11$. Pak $a_{11} = 300 \cdot 1{,}05^{10} \approx$ $\approx 300 \cdot 1{,}629 = 489$ tis.Kč. Viz poznámku za úlohou 2.5.1.]

Je-li $a_1 > 0$, pak geometrická posloupnost $\{a_1 \cdot q^{n-1}\}$ má limitu 0 (pro $|q| < 1$) nebo a_1 (pro $q = 1$) nebo $+\infty$ (pro $q > 1$) a nebo nemá limitu (pro $q < -1$).

Praktický význam může mít opět součet prvních n členů geometrické posloupnosti (tj. n-tý částečný součet geometrické řady). Vzorec pro s_n lze odvodit takto: Vyjádříme s_n a $q \cdot s_n$:

$$s_n = a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + ... + a_1 \cdot q^{n-1}$$

$$q \cdot s_n = \qquad a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + \ldots + a_1 \cdot q^{n-1} + a_1 \cdot q^n .$$

Po odečtení je $s_n \cdot (1 - q) = a_1 \cdot (1 - q^n)$, takže

$$s_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q} \text{ tj. též } s_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q-1}.$$

Úloha 2.5.4. Vynálezce šachové hry požadoval podle pověsti odměnu za každé ze 64 polí šachovnice takto: za 1. pole jedno obilní zrno, za 2. pole 2 zrna, za 3. pole 4 zrna, atd., za každé další vždy dvojnásobek. Kolik zrnek obilí měl dostat?

[Jde o geometrickou posloupnost, kde $a_1 = 1$, $q = 2$, $n = 64$. Proto $s_{64} = 1.\frac{2^{64}-1}{2-1} = 2^{64} - 1 \approx$ $\approx 1{,}845.10^{19}$ a to je více obilí, než se kdy na Zemi urodilo.]

2.6. Některé významné limity

V: $\forall a > 0$: $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

Princip důkazu: Pro $a > 1$ položíme $\sqrt[n]{a} = 1 + u_n$, tedy $u_n > 0$. Podle Bernoulliovy nerovnosti je $a = (1 + u_n)^n > 1 + n \cdot u_n$, odkud $0 < u_n < \dfrac{a-1}{n}$ a podle věty o třech limitách je $u_n \to 0$. Pro $a < 1$ použijeme předchozí výsledek na číslo $1/a$, pro $a = 1$ je výsledek zřejmý. □

Podobně lze užitím vhodných odhadů odvodit následující limity:

V: $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

V: $\forall a > 1, \forall k > 0$: $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a^n}{n^k} = +\infty$. (Říkáme, že exponenciála a^n roste k $+\infty$ *rychleji* než mocnina n^k.)

Úloha 2.6.1. Dokažte, že $\forall a > 1$: $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\log_a n}{n} = 0$.

[Pro $\forall \varepsilon > 0$ je $a^\varepsilon > 1$, takže pro skoro všechna n platí $1 < \sqrt[n]{n} < a^\varepsilon$, odkud po zlogaritmování nerovnosti při základu a plyne uvedené tvrzení.]

Úloha 2.6.2. Vypočtěte $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{q^n}{n!}$, kde $q > 0$.

[Pro $q \le 1$ je tato limite rovna 0. Pro $q > 1$ má čitatel i jmenovatel limitu $+\infty$, takže nelze použít větu o limitě podílu. Uvedený výraz označme a_n ; pak

(*) $a_{n+1} = \dfrac{q}{n+1} a_n$,

proto pro skoro všechna n je posloupnost $\{a_n\}$ klesající a zdola omezená (nulou), takže má limitu; označme ji a. Přejdeme-li v rovnosti (*) k limitě, máme $a = 0$. Říkáme, že faktoriál roste k $+\infty$ rychleji než exponenciála q^n.]

Úloha 2.6.3. Ukažte, že každé iracionální číslo je limitou neklesající posloupnosti racionálních čísel; najděte tyto posloupnosti pro $r = \pi$, $s = \sqrt{2}$.

[Lze uvažovat např. posloupnost dolních desetinných aproximací.]

Poznámka. Kromě číselných posloupností pracujeme v matematické analýze i s dalšími typy posloupností; uvažují se třeba posloupnosti množin (např. intervalů), posloupnosti funkcí, ad. Definice těchto posloupností vytvoříme podle stejného schématu. Např. posloupnost funkcí definujeme jako zobrazení množiny N do množiny všech funkcí. Pracujeme-li s jinými posloupnostmi než s posloupnostmi číselnými, je třeba dbát na korektnost definice posloupnosti, případně její limity.

2.7. Číslo e

Funkce $y = \mathrm{e}^x$ *a funkce* $y = \ln x$ (= $\log_\mathrm{e} x$) *patří k nejdůležitějším funkcím v matematické analýze; v obou případech je základem Eulerovo číslo* e..

Číslo e je definováno jako limita posloupnosti $\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right\}$. Abychom tuto definici mohli považovat za korektní, je třeba dokázat, že uvedená posloupnost je konvergentní; její členy označujme dále a_n. Důkaz existence limity posloupnosti $\{a_n\}$ lze provést ve dvou krocích: 1. dokážeme, že tato posloupnost je rostoucí, 2. dokážeme, že je shora omezená. Existence konečné limity pak plyne z věty o limitě monotónní posloupnosti.

ad 1) Podle binomické věty je

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+\binom{n}{1}\frac{1}{n}+\binom{n}{2}\frac{1}{n^2}+\ldots+\binom{n}{k}\frac{1}{n^k}+\ldots+\binom{n}{n}\frac{1}{n^n}$$

První dva členy součtu na pravé straně jsou rovny 1, pro každý další člen provedeme úpravu

$$\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{n^k}\frac{1}{k!} = \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\frac{1}{k!}\ .$$

Pro posloupnost $\{a_n\}$ tak platí, že každý její člen a_n je součtem $n + 1$ kladných výrazů, v nichž jsou činitelé tvaru $\left(1-\frac{j}{n}\right)$. Jestliže nyní přejdeme od n k $n+1$, je a_{n+1} součtem $n+2$ výrazů s činiteli tvaru $\left(1-\frac{j}{n+1}\right)$. Jelikož $\left(1-\frac{j}{n+1}\right) > \left(1-\frac{j}{n}\right)$ a navíc v a_{n+1} je o jeden kladný sčítanec víc, je $a_{n+1} > a_n$, posloupnost $\{a_n\}$ je rostoucí.

ad 2) Ve výrazu pro a_n nahradíme všechny „závorky“ $\left(1-\frac{j}{n+1}\right)$ číslem 1, takže platí

$$a_n < b_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!} < 1 + 1 + \frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}} < 3.$$

Závěr: Podle věty o limitě monotónní posloupnosti existuje limita posloupnosti $\{a_n\}$; nazýváme ji Eulerovo číslo a označujeme ji **e**; z předchozího plyne, že 2 < e < 3.

Výpočet čísla e

Hodnotu čísla e lze vcelku snadno určit jako součet číselné řady. Vidíme, že pro konstantní $k < n$ platí

$$a_n > 2 + \left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{1}{2!}+\ldots+\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\frac{1}{k!}.$$

Odsud pro $n \to +\infty$ máme e $\geq b_k$, takže platí $a_n < b_n \leq$ e; podle věty o třech limitách pak je $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n =$ e. Přitom b_n je podle své definice tzv. n-tým částečným součtem řady takže

$$\mathrm{e} = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\ldots = 2{,}71828\ 18284\ 590\ldots$$

Tato řada „dosti rychle“ konverguje a má jednoduchý algoritmus výpočtu členů, takže výpočet hodnoty čísla e na zadaný počet desetinných míst lze provést vcelku rychle.

\- * -