1. cvičení

- procvičená témata: binární relace na množině a jejich vlastnosti, uzavřená binární operace, grupoid, asociativita, pologrupa, jednotkový prvek, monoid, inverzní prvky, grupa, komutativita

1) Na množina A = {a, b, c} nalezněte relace tak, aby splňovaly následující podmínky:
   a) R_1 – není reflexivní, není symetrická, není antisymetrická, není tranzitivní
   b) R_2 – není reflexivní, není symetrická, je antisymetrická, je tranzitivní
   c) R_3 – není reflexivní, je symetrická, je antisymetrická, je tranzitivní
   d) R_4 – je reflexivní, je symetrická, je antisymetrická, je tranzitivní
   e) R_5 – je reflexivní, je symetrická, není antisymetrická, není tranzitivní
2) Zjistěte, zda následující algebraické struktury tvoří grupoidy. Pokud ano, určete, zda se jedná o monoidy, pologrupy, grupy, a zda jsou komutativní:
   a) ({0, 1}, →), kde → je logická spojka implikace
   b) ({0, 1}, ∧), kde ∧ je logická spojka konjunkce
   c) ({0, 1}, ·), kde · je operace násobení
   d) (N, -), kde N je množina přirozených čísel a - je operace odečítání
   e) (M, *), kde M je množina bodů v rovině a A * B je střed úsečky AB

2. cvičení

- procvičená témata: grupy (pokračování), homomorfismus grup

3) Dokažte, že množina všech zákrytových pohybů rovnostranného trojúhelníka spolu s operací skládání zobrazení tvoří grupu. Je tato grupa abelovská?
4) Nechť K = {a, b, c, e} a nechť operace násobení · je definována podle následující Cayleyho tabulky. Ověřte, zda (K, ·) je abelovská grupa.

·	a	b	c	e
a	e	c	b	a
b	c	e	a	b
c	b	a	e	c
e	a	b	c	e

5) Nechť $\mathbf{R}_0 = \mathbf{R} \setminus \{0\}$. Dokažte, že zobrazení f(x) = sgn(x) je homomorfismem grupy ($\mathbf{R}_0$, ·) do grupy ({-1, 1}, ·). Co je jádrem tohoto homomorfismu?
6) Nechť ($\mathbf{R}_+$, ·) je multiplikativní grupa všech kladných reálných čísel. Dokaže, že zobrazení $h(x)=2^x$ je surjektivní homomorfismus grupy (**R**, +) na grupu ($\mathbf{R}_+$, ·).
7) Nechť (G, ·) je grupa. Dokažte, že zobrazení $h(x) = x^{-1}$ je izomorfismus z (G, ·) do (G, ·) právě tehdy, když (G, ·) je abelovská.

3. cvičení

- procvičené téma: podgrupy

8) Nalezněte všechny podgrupy grupy z příkladu 3).

9) Nechť A, B jsou podgrupy v $(G, \cdot)$. Dokažte, že $A \cdot B$ je podgrupa v G, právě když platí, že $A \cdot B = B \cdot A$.

10) Nechť $(G, \cdot)$ je abelovská grupa, $n \in \mathbf{N}$. Dokaže, že množina $\{a \in G \mid a^n = e\}$ tvoří podgrupu grupy $(G, \cdot)$.

11) Zjistěte, zda je množina H podgrupou grupy G:

a) $H = \mathbf{Q}^+$, $G = (\mathbf{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$

b) $H = \mathbf{Z}_2$, $G = (\mathbf{Z}_4, \oplus)$ ...pozn. $\oplus$ je zde chápáno jako sčítání modulo 4

c) $H = \{1, -1\}$, $G = (\mathbf{R}, +)$

d) $H = \{1, -1\}$, $G = (\mathbf{R} \setminus \{0\}, \cdot)$