

## ALG2 – 7. cvičení

- 1) Určete charakteristiky okruhů  $\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_5, \mathbb{Z}_6, \mathbb{Z}_8$ .
- 2) Necht'  $(J, +, \cdot)$  je oborem integrity. Dokažte, že relace asociovanosti  $||$  je relací ekvivalence na  $J$ .
- 3) Dokažte, že v okruhu  $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$  je rovnice  $ax+by=c$  řešitelná právě tehdy, když  $D(a, b) \mid c$ .
- 4) V okruhu  $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$  dokažte:
  - a)  $6 \mid (a^3+11a)$  pro všechna  $a \in \mathbb{Z}$
  - b)  $4a+3$  není mocninou žádného čísla ze  $\mathbb{Z}$  pro žádné  $a \in \mathbb{Z}$
  - c) Pokud  $2 \nmid a, 3 \nmid a$ , pak  $24 \mid (a^2 - 1)$
- 5) Necht'  $I$  je obor integrity;  $a, b, c, d \in I$ . Dokažte, že:
  - a) Pro  $c \neq 0$  platí: je-li  $ac \mid bc$ , pak  $a \mid b$ .
  - b) Je-li  $a \mid b, c \mid d$ , pak  $ac \mid bd$ , ale obecně neplatí  $(a+c) \mid (b+d)$ .
  - c) Pro  $a \neq 0$  platí: je-li  $a \mid b, ac \mid bd$ , pak  $c \mid d$ .
- 6) Dokažte, že  $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$  je obor integrity hlavních ideálů.
- 7) Určete všechny hlavní ideály v okruzích  $\mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_6, \mathbb{Z}_{10}$ .
- 8) Určete, zda jsou okruhy  $P, P'$  izomorfní:

$P:$

$+$	$a$	$b$	$c$	$d$
$a$	$a$	$b$	$c$	$d$
$b$	$b$	$a$	$d$	$c$
$c$	$c$	$d$	$a$	$b$
$d$	$d$	$c$	$b$	$a$

$\cdot$	$a$	$b$	$c$	$d$
$a$	$a$	$a$	$a$	$a$
$b$	$a$	$b$	$c$	$d$
$c$	$a$	$c$	$d$	$b$
$d$	$a$	$d$	$b$	$c$

$P':$

$+$	$p$	$q$	$r$	$s$
$p$	$r$	$s$	$p$	$q$
$q$	$s$	$r$	$q$	$p$
$r$	$p$	$q$	$r$	$s$
$s$	$q$	$p$	$s$	$r$

$\cdot$	$p$	$q$	$r$	$s$
$p$	$s$	$p$	$r$	$q$
$q$	$p$	$q$	$r$	$s$
$r$	$r$	$r$	$r$	$r$
$s$	$q$	$r$	$r$	$p$

- 9) Necht'  $I$  je obor integrity,  $a, b \in I$ . Dokažte, že:
  - a)  $a \mid b \Leftrightarrow [b] \subseteq [a]$
  - b)  $a \mid b \Leftrightarrow [b] = [a]$
- 10) Ověřte, že jestli je  $J$  eukleidovským oborem integrity a  $a, b \in J$ , pak existují čísla  $c, d \in J$  tak, že  $D(a, b) = ac + bd$ .
- 11) Nalezněte největšího společného dělitele čísel 1152 a 648.
- 12) Nalezněte nejmenší společný násobek čísel 326 a -896.
- 13) Pomocí Eukleidova algoritmu nalezněte největší společný dělitel čísel 440895 a 332640.