14. Elementární metody řešení obyčejných diferenciálních rovnic.

14.1. Základní pojmy

V této kapitole budeme zpravidla (v souladu s velkou částí literatury) označovat nezávisle proměnnou písmenem t.

Úlohy:

14.1.1. Najděte funkci $y = y(t)$, pro niž platí $y' = 2t + \cos t$.

[Podle definice primitivní funkce je hledanou funkcí $y(t)$ každá funkce primitivní k zadané funkci $2t + \cos t$, tedy

$y = t^2 + \sin t + C$, kde C je (libovolná) integrační konstanta.]

14.1.2. Najděte funkci $y = y(t)$, pro niž platí $y'' = -y$.

[Z vlastností derivací funkcí $\cos t$ a $\sin t$ vidíme, že uvedená rovnice je splněna např. pro funkci $y_1 = \cos t$, také pro funkci $y_2 = \sin t$, ale rovněž pro $y = C_1 \cos t + C_2 \sin t$.]

14.1.3. Najděte funkci $y = y(t)$, pro niž platí $y' = 1$, přičemž $y(2) = 5$.

[Nejprve si všimněme jen rovnice $y' = 1$; vyhovuje jí každá funkce $y = t + C$, kde C je libovolná konstanta. Použijeme-li nyní uvedenou podmínku, dostaneme $5 = 2 + C$, a z toho $C = 3$. Takže funkce $y = t + 3$ vyhovuje jak uvedené rovnici, tak zadané podmínce.]

To jsou 3 příklady diferenciálních rovnic.

D: ***Diferenciální rovnice*** je název pro rovnice, kde neznámou je funkce a v níž se vyskytuje alespoň jedna derivace neznámé funkce. ***Řád*** diferenciální rovnice, to je řád nejvyšší derivace neznámé funkce v rovnici.

V našich příkladech jde o rovnice 1., 2. a 1. řádu. V matematice i v aplikacích se pracuje s *obyčejnými diferenciálními rovnicemi*, to jsou ty, kde neznámá funkce je funkcí jedné nezávisle proměnné a derivace neznámé funkce je obyčejnou derivací, a také s *parciálními diferenciálními rovnicemi*, kde neznámá funkce je funkcí více proměnných a její derivace jsou tedy derivacemi parciálními.

D: ***Řešením*** (***integrálem***) diferenciální rovnice nazýváme každou funkci, která po dosazení vyhovuje na nějakém intervalu dané diferenciální rovnici.

Tak rovnice z příkladu 14.1.2 má řešení $y_1 = \cos t$, $y_2 = \sin t$, ale též
$y_3 = 5 \cos t - \sin t$, $y_4 = C \sin t$ (kde C je libovolná konstanta) a další.

D: ***Obecným řešením*** diferenciální rovnice n-tého řádu nazýváme to řešení, v němž se vyskytuje n libovolných konstant, které nelze nahradit menším počtem konstant.

Tak třeba funkce $y = C_1C_2 \sin t$ není obecným řešením diferenciální rovnice z příkladu 14.1.2, neboť lze položit $C = C_1C_2$ a v řešení $y = C \sin t$ je už jen jedna libovolná konstanta. Uvedená rovnice má obecné řešení $y = C_1 \cos t + C_2 \sin t$, ale také třeba $y = A \sin(t - \varphi)$, kde A, φ jsou libovolné konstanty.

D: ***Partikulárním řešením*** diferenciální rovnice nazýváme řešení, které lze dostat z obecného řešení tím, že za některé konstanty C volíme přípustné číselné hodnoty.

V této kapitole se budeme dále zabývat již jen obyčejnými diferenciálními rovnicemi 1. řádu, které lze vyjádřit ve tvaru

$y' = f(t,y)$.

Řešení rovnice může mít tvar explicitní, např. $y = t + C$, nebo implicitní, např. $y - t = C$.

D: Mějme diferenciální rovnici $y' = f(t,y)$. a dále nechť t_0, y_0 jsou libovolně daná reálná čísla. ***Cauchyova počáteční úloha*** znamená najít partikulární řešení $y(t)$ dané diferenciální rovnice, které je definováno na nějakém intervalu I (kde $t_0 \in I$) a splňuje podmínku

$y(t_0) = y_0$.

Tato podmínka se nazývá ***Cauchyova počáteční podmínka***.

Příklad Cauchyovy úlohy je v úloze 14.1.3.

Geometrický význam řešení diferenciální rovnice

Na obecné řešení diferenciální rovnice se můžeme dívat jako na množinu funkcí s parametrem C, tj. jako na množinu všech partikulárních řešení. Grafem každého partikulárního řešení je nějaká křivka; nazýváme ji *integrální křivka*. Geometrickým významem obecného řešení je tedy jednoparametrická soustava čar – integrálních křivek. Např. obecné řešení rovnice z úlohy 14.1.3 znamená (v pravoúhlém souřadnicovém systému s osami t, y) soustavu navzájem rovnoběžných přímek $y = t + C$. Partikulární řešení dané Cauchyovou počáteční podmínkou $y(2) = 5$ pak znamená tu přímku soustavy, která prochází bodem [2; 5].

14.2. Základní problémy

Při studiu diferenciálních rovnic vyvstávají tyto problémy:

1. Zda u dané diferenciální rovnice je vůbec zaručena *existence řešení*, které by splňovalo zadanou Cauchyovu počáteční podmínku, resp. za jakých předpokladů na funkci f takové řešení existuje na nějakém okolí I bodu t_0.
2. Za předpokladu, že na intervalu I existuje partikulární řešení splňující Cauchyovu počáteční podmínku, zda je zaručena *jednoznačnost* jeho určení danou podmínkou, resp. za jakých předpokladů a na jakém okolí bodu t_0 je tato jednoznačnost zaručena.
3. Jaký je pro danou Cauchyovu počáteční úlohu nejširší interval, na němž takové partikulární řešení existuje, resp. je určeno zadanou podmínkou jednoznačně.

Problémy existence a jednoznačnosti řešení jsou tedy jednak *lokální*, jednak *globální*.

4. Určit (globální) vlastnosti řešení, tj. jeho průběh nebo části průběhu, jako jsou *omezenost*, *nulové body*, *periodičnost* a *asymptotické vlastnosti* (chování řešení pro $t \to +\infty$, např. tzv. *stabilita* řešení).

Tento 4. problém lze řešit v podstatě dvěma způsoby:

A) Určit (vypočítat) funkci, která je řešením diferenciální rovnice, a její vlastnosti získat vyšetřováním průběhu této funkce;

B) Určit potřebné vlastnosti řešení diferenciální rovnice, aniž je tato rovnice řešena, tj. užitím vlastností koeficientů nacházejících se v rovnici (tomuto se věnuje tzv. kvalitativní teorie diferenciálních rovnic).

V dalších paragrafech této kapitoly se budeme zabývat problémem 4 A, tj. uvedeme určité metody řešení *vybraných typů* diferenciálních rovnic, přičemž budeme vždy předpokládat, že řešení dané diferenciální rovnice existuje. K tomu ještě praktická poznámka: Víme, že primitivní funkce k funkci spojité sice existuje, ale primitivní funkce k funkci elementární obecně už není funkce elementární. Dovedeme tedy v elementárních funkcích integrovat jen vybrané typy funkcí. Tato vlastnost se přenáší i na diferenciální rovnice, tedy i když je funkce $f(t,y)$ vyjádřena elementárními funkcemi, dovedeme řešení rovnice $y' = f(t,y)$ vyjádřit pomocí elementárních funkcí jen u některých typů rovnic (algoritmy řešení pro část z nich uvádíme v dalších paragrafech).

Chceme-li tedy úspěšně řešit takové diferenciální rovnice, je třeba:
– poznat, jakého typu je zadaná rovnice,
– znát algoritmus řešení tohoto typu rovnic,
– správně zvládnout potřebné výpočetní operace.

14.3. Separace proměnných

Tuto metodu lze užít u rovnic, které lze převést na tvar

(*) $\varphi(y)\,dy = \psi(t)\,dt$

(separace proměnných znamená, že na jedné straně rovnice je pouze proměnná y, na druhé straně pouze proměnná t). Je-li $y = u(t)$ nějaké řešení rovnice (*) na intervalu J, pak pro $t \in J$ je $dy = u'(t)\,dt$, takže platí $\varphi(u(t))\,u'(t)\,dt = \psi(t)\,dt$ a je to identická rovnost dvou diferenciálů na J, tj. $d\Phi(u(t)) = d\Psi(t)$, kde funkce Φ, Ψ jsou primitivní k funkcím φ, ψ (u nichž se zřejmě předpokládá např. spojitost). Proto platí $\Phi(u(t)) = \Psi(t) + C$. Znamená to, že funkce $u(t)$ jako řešení diferenciální rovnice (*) vyhovuje současně rovnici

(**) $\Phi(y) = \Psi(t) + C$.

Toto tvrzení platí i naopak, tedy každá funkce $y = u(t)$, která vyhovuje rovnici (**), splňuje též rovnici (*), jak plyne z derivace identity $\Phi(u(t)) = \Psi(t) + C$.

Závěr: Funkce $y = u(t)$ je řešením rovnice (*) právě tehdy, když vyhovuje rovnici (**); touto rovnicí lze tedy vyjádřit obecné řešení dané diferenciální rovnice (*).

Úloha 14.3.1. Najděte obecné řešení rovnice $(1 + t)\,y' = t\,(1 - y)$.

[Tato rovnice je separovatelná, tj. lze v ní separovat proměnné. Vyjádříme-li y' jako $\frac{dy}{dt}$, lze rovnici upravit na tvar, kde proměnné jsou již separované:

$$\frac{dy}{1-y} = \frac{t\,dt}{1+t},$$

přičemž použitá metoda vyžaduje předpoklady $y \neq 1$, $t \neq -1$. Odsud

$$\int \frac{dy}{1-y} = \int \frac{t\,dt}{1+t} \;.$$

Po integraci máme

$-\ln|1 - y| = t - \ln|1 + t| + C$,

kde C je libovolná konstanta. V této chvíli je daná diferenciální rovnice již v podstatě vyřešena, všechno další jsou úpravy a kompletace řešení.

Předně, jsou-li v takto získané rovnici logaritmy, bývá vhodné i integrační konstantu vyjádřit jako logaritmus: $C = \ln C_1$, kde C_1 je libovolná *kladná* konstanta (zůstává zachováno, že C je *libovolná* konstanta). Rovnici

$$\ln |1 + t| - \ln |1 - y| = t + \ln C_1$$

odlogaritmujeme a máme

$$\left| \frac{1+t}{1-y} \right| = C_1 \, \mathrm{e}^t \; .$$

Položíme-li $C_2 = 1 / C_1$ ($C_2 > 0$ je pak také libovolná kladná konstanta), pak

$$\frac{1-y}{1+t} = \pm C_2 \, \mathrm{e}^{-t}$$

a z toho

$$\frac{1-y}{1+t} = C_3 \, \mathrm{e}^{-t} \; , \text{ kde } C_3 \neq 0, \text{ tedy}$$

$$1 - y = C_3 \, \mathrm{e}^{-t} (1 + t),$$

$$y = 1 - C_3 \, \mathrm{e}^{-t} (1 + \mathrm{t}),$$

což je obecné řešení v explicitním tvaru (ale ještě ne definitivním).

Nyní se vrátíme k podmínce ($y \neq 1$), kterou si vyžádala metoda řešení, a podíváme se, zda jsme tím nezanedbali nějaké řešení. Tedy ověříme, zda $y = 1$ s derivací $y' = 0$ je řešením, tím, že tuto funkci dosadíme do dané diferenciální rovnice:

$$L = (1 + t) \, y' \; (= 0) \; , \; P = t \, (1 - y) \; (= 0),$$

takže funkce $y = 1$ skutečně *je* řešením. Toto řešení však nemusíme uvádět zvlášť, protože je dostaneme, když ve výše uvedeném obecném řešení připustíme nulovou hodnotu C. Konečný tvar obecného řešení je tedy

$$y = 1 + C \, \mathrm{e}^{-t} (1 + t),$$

kde $C = - C_3 \vee 0$.

Podívejme se ještě na podmínku $t \neq -1$. Pro $t = -1$ máme $y = 1$, tedy všechny integrální křivky procházejí bodem $[-1;1]$. Uvědomíme si, že Cauchyova úloha $y(-1) = 1$ není řešitelná jednoznačně a např. Cauchyova úloha $y(-1) = 2$ nemá řešení.]

Úloha 14.3.1. Znázorněte soustavu partikulárních řešení diferenciální rovnice z úlohy 14.3.1.

14.4. Užití substitucí

U některých typů diferenciálních rovnic lze pomocí vhodných substitucí (transformace neznámé funkce, případně i transformace nezávisle proměnné) přeměnit tyto rovnice na separovatelné.

a) ***Rovnice typu*** $y' = f(\alpha t + \beta y + \gamma)$

Užijeme substituci $z = \alpha t + \beta y + \gamma$, odkud $z' = \alpha + \beta\, y'$, tj. $y' = \frac{1}{\beta}(z' - \alpha)$. Po dosazení do dané diferenciální rovnice a po úpravě dostaneme rovnici

$$z' = \alpha + \beta\, f(z),$$

v níž lze separovat proměnné. Ježto přitom tuto rovnici dělíme výrazem $\alpha + \beta\, f(z)$, musíme vyloučit jeho nulovou hodnotu a nakonec ověřit, zda z rovnosti nule nedostaneme další řešení dané rovnice. Nakonec se ovšem vracíme k původní proměnné.

Úloha 14.4.1. Řešte rovnici $y' = t + y$.

[Zvolíme novou neznámou funkci vztahem $z = t + y$, odkud $z' = 1 + y'$, tj. $y' = z' - 1$. Po dosazení do dané diferenciální rovnice máme $z' - 1 = z$, neboli

$$z' = z + 1.$$

Dělením této rovnice výrazem $(z + 1)$, kde $z \neq -1$, a násobením dt provedeme separaci proměnných, z níž

$$z + 1 = C_1\, e^t,$$

neboli

$$y = C_1\, e^t - 1 - t,$$

kde $C_1 \neq 0$ je libovolná konstanta. Rovnost $z = -1$ dává $y = -1 - t$, a to je funkce, která (jak zjistíme dosazením do dané diferenciální rovnice) je rovněž řešením. Obecné řešení je tedy

$y = C\, e^t - 1 - t$, kde C je libovolná konstanta.]

b) ***Rovnice typu*** $y' = F\left(\frac{y}{t}\right)$, tzv. ***homogenní rovnice.***

Této rovnici se říká homogenní podle toho, že funkce F na pravé straně je tzv. *homogenní funkce*. Užijeme substituci $z = \frac{y}{t}$, odkud $y = z\, t$, tedy $y' = z + tz'$. Po dosazení do dané diferenciální rovnice a po úpravě dostaneme rovnici

$$z'\, t = F(z) - z,$$

v níž lze separovat proměnné. Ježto přitom tuto rovnici dělíme výrazem $F(z) - z$, musíme vyloučit jeho nulovou hodnotu a nakonec opět ověřit, zda z rovnosti nule nedostaneme další řešení dané rovnice. Nakonec se pak vracíme k původní proměnné.

Úloha 14.4.2.. Řešte rovnici $2\, t\, y\, y' = y^2 - t^2$.

[Rovnici nejprve upravíme na tvar:

$$y' = \frac{y^2 - t^2}{2\, t\, y}$$

a po dělení čitatele i jmenovatele výrazem t dostaneme uvedený tvar rovnice, tedy

$$y' = \frac{\left(\frac{y}{t}\right)^2 - 1}{2\frac{y}{t}}.$$

Nyní zvolíme novou neznámou funkci vztahem $z = \dfrac{y}{t}$, odkud $y = z\,t$, tedy $y' =$ $= z + t\,z'$. Po dosazení do dané diferenciální rovnice dostaneme $z + t\,z' = \dfrac{y^2 - 1}{2\,y}$, a po separaci proměnných máme

$$\frac{2\,z\,dz}{z^2 + 1} = -\frac{dt}{t}.$$

Po integrování a úpravách dostaneme integrál dané diferenciální rovnice ve tvaru

$$(t - C)^2 + y^2 = C^2 .$$

Vidíme, že obecným řešením je jednoparametrická soustava kružnic se středem v $[C, 0]$ a s poloměrem $|C|$.]

c) *Rovnice typu* $y' = f\left(\dfrac{\alpha_1 t + \beta_1 y + \gamma_1}{\alpha_2 t + \beta_2 y + \gamma_2}\right)$

Ve zvláštním případě, pokud determinant $\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} = 0$ nebo $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 = 0$, lze rovnici řešit separací proměnných s případnou předchozí substitucí pro rovnici homogenní. Je-li $\Delta \neq 0$ a též $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 \neq 0$, provedeme substituci, při níž transformujeme jak neznámou funkci y, tak nezávisle proměnnou t:

$$y = z + r$$

$$t = \tau + s .$$

Koeficienty r, s volíme tak, abychom pro neznámou funkci $z(\tau)$ dostali rovnici homogenní, tj. aby se vynulovaly absolutní členy v čitateli i ve jmenovateli uvedeného zlomku. Z transformačních rovnic plyne $dy = dz$, $dt = d\tau$ (tedy $dz/d\tau = dy/dt$) a daná rovnice přejde na tvar rovnice homogenní:

$$y' = f\left(\frac{\alpha_1 t + \beta_1 y}{\alpha_2 t + \beta_2 y}\right),$$

pokud položíme

$$\alpha_1 s + \beta_1 r + \gamma_1 = 0,$$

$$\alpha_2 s + \beta_2 r + \gamma_2 = 0.$$

Ježto determinant této soustavy $\Delta \neq 0$, existuje řešení r, s.

Úloha 14.4.3.. Řešte rovnici $y' = \dfrac{5t - 2y - 1}{2t - y + 1}$.

[Nejprve řešíme soustavu

$5s - 2r - 1 = 0$

$2s - r + 1 = 0,$

jejíž determinant soustavy je $\Delta = -1 \neq 0$; je $r = 7$, $s = 3$. Substituce $y = z + 7$, $t = \tau + 3$ transformuje rovnici na tvar

$$z' = \frac{5\tau - 2z}{2\tau - z} \quad \text{neboli } z' = \frac{5 - 2\frac{z}{\tau}}{2 - \frac{z}{\tau}}$$

rovnice homogenní. Položíme nyní $\frac{z}{\tau} = u(\tau)$, tj. $z = u\,\tau$. Z toho $z' = u + u'\,\tau$, takže

$$u + u'\,\tau = \frac{5 - 2u}{2 - u}, \text{ odkud } u'\,\tau = \frac{u^2 - 4u + 5}{2 - u}.$$

Po separaci proměnných máme

$$\frac{2 - u}{u^2 - 4u + 5}\,du = \frac{d\tau}{\tau},$$

nebo též

$$\frac{2u - 4}{u^2 - 4u + 5}\,du = -2\,\frac{d\tau}{\tau}.$$

Po integraci máme

$$\ln(u^2 - 4u + 5) = -2\ln|\,\tau\,| + \ln C_1, \text{ kde } C_1 \neq 0,$$

tedy

$$u^2 - 4u + 5 = \frac{C}{\tau^2}.$$

Jelikož $u = \frac{z}{\tau}$, $z = y - 7$, $\tau = t - 3$, je $u = \frac{y-7}{t-3}$, takže obecné řešení dané diferenciální rovnice lze vyjádřit funkcí danou implicitně:

$$\left(\frac{y-7}{t-3}\right)^2 - 4\,\frac{y-7}{t-3} + 5 = \frac{C}{(t-3)^2}, \text{ kde } C \neq 0. \quad]$$

d) ***Snížení řádu diferenciální rovnice***

Pokud v diferenciální rovnici n-tého řádu chybí $y, y', \ldots, y^{(n-2)}$, lze ji substitucí $z = y^{(n-1)}$ převést na diferenciální rovnici 1.řádu.

Úloha 14.4.4. Řešte rovnici $t\,y'' + (t - 1)\,y' = 0$.

[V zadané rovnici 2.řádu chybí y, takže položíme $y' = z$. Pak $y'' = z'$ a daná rovnice přejde na diferenciální rovnici 1. řádu

$$t\,z' + (t - 1)\,z = 0$$

(snížili jsme řád rovnice), kterou řešíme separací proměnných. Pro $z \neq 0$, $t \neq 0$ máme po separaci

$$\frac{dz}{z} = \frac{1-t}{t}\,dt$$

a po integraci

$$\ln|\,z\,| = \ln|\,t\,| - t + \ln C_1', \text{ kde } C_1' > 0.$$

Po úpravách analogických jako v úloze 14.3.1 dostáváme obecné řešení upravené rovnice

$$z = t\,e^{-t}\,C_1''$$

a z toho po návratu k původní proměnné

$$y' = C_1'' t\, e^{-t},$$

kde C_1'' je libovolná konstanta. Po návratu k původní proměnné y máme $y' = C_1'' t\, e^{-t}$, tedy $y = C_1'' \int t\, e^{-t}\, dt$, odkud použitím metody per partes dostaneme

$$y = C_1 (t + 1)\, e^{-t} + C_2 ,$$

kde C_1, C_2 jsou libovolné konstanty.]

Vidíme, že zde obecné řešení diferenciální rovnice 2. řádu skutečně závisí na dvou integračních konstantách.

14.5. Lineární diferenciální rovnice 1. řádu

Lineární rovnice je rovnice tvaru

(nlr) $y' + p(t)\, y = q(t)$.

Funkce $q(t)$ se někdy nazývá *pravá strana*. Pokud pravá strana není identicky rovna nule, máme lineární rovnici *nehomogenní*, v opačném případě máme rovnici

(hlr) $y' + p(t)\, y = 0$

homogenní. Pokud v (nlr) i (hlr) je $p(t)$ jedna a táž funkce, nazývá se (hlr) *příslušná homogenní rovnice* (tj. příslušná k dané rovnici nehomogenní).

Lineární rovnice jsou velmi důležité. Jednak na ně vede řada významných praktických problémů (chemické reakce, množení bakterií, radioaktivní rozpad, ochlazování těles ad.) a jednak lze některé jiné typy rovnic řešit tak, že je transformujeme na rovnice lineární.

Existuje několik metod, jak řešit lineární rovnice; lze je např. řešit i vzorcem. Prakticky se dává přednost použití některé z aktivních metod, sloužících jinak i k odvození onoho vzorce. Nejznámější je *metoda variace konstanty*. Tato metoda spočívá ve třech krocích:

Metoda variace konstanty:

1. Nejprve řešíme (separací proměnných) příslušnou rovnici homogenní a obecné řešení zapíšeme s integrační konstantou K.

2. Řešení nehomogenní rovnice hledáme v tomtéž tvaru, kde však $K = K(t)$ je funkce (odsud i název metody: z konstanty „se stane“ funkce). Dosadíme tedy funkci vypočtenou v bodě 1 do dané nehomogenní rovnice a dostaneme rovnici pro neznámou funkci K'.

3. Integrací vypočteme $K(t)$ (s integrační konstantou C) a dosadíme je do funkce vypočtené v kroku 1 .

Postup při řešení lineární rovnice metodou variance konstanty si ukážeme na příkladě.

Úloha 14.5.1. Určete obecné řešení diferenciální rovnice

$$y' = t + y$$

(viz příklad 14.4.1.)

[Danou rovnici lze zapsat ve tvaru $y' - y = t$, pravá strana je t, příslušná rovnice homogenní je $y' - y = 0$.

1. $y' = \dfrac{dy}{dt}$, tedy separací proměnných při řešení homogenní rovnice máme $\dfrac{dy}{y} = dt$, z čehož dostáváme obecné řešení příslušné rovnice homogenní ve tvaru $y = K \cdot e^t$.
2. Toto řešení dosadíme do dané nehomogenní rovnice s tím, že $K = K(t)$ je funkce. Proto po dosazení máme $K' \cdot e^t + K \cdot e^t - K \cdot e^t = t$; dva členy s K se ruší (a to vždy !) a máme $K' = t \cdot e^{-t}$.
3. Integrujeme: $K = \int t\, e^{-t}\, dt$ = [metoda per partes] = $C - t \cdot e^{-t} - e^{-t}$. Toto vypočtené K dosadíme do rovnice $y = K \cdot e^t$ a dostáváme $y = (C - t \cdot e^{-t} - e^{-t}) \cdot e^t$. Obecné řešení dané nehomogenní rovnice je tedy

$$y = C.e^t - t - 1\ .\ ]$$

Poznámka: Pro $C = 0$ odsud dostáváme partikulární řešení $Y = -t - 1$.

Vidíme, že obecné řešení nehomogenní rovnice je rovno součtu obecného řešení příslušné rovnice homogenní a partikulárního řešení dané rovnice nehomogennní. Tento poznatek platí pro lineární rovnice obecně.

Bernoulliova rovnice je rovnice tvaru

$$y' + p(t)\, y = q(t)\, y^m, \text{ kde } m \neq 1,\ m \neq 0\ .$$

Transformací neznámé funkce y lze tuto rovnici převést na rovnici lineární.

Postup při řešení Bernoulliovy diferenciální rovnice:

1. Rovnici dělíme činitelem y^m (pro $m > 0$ je funkce $y = 0$ vždy řešením Bernoulliovy rovnice, přidáme je k výsledku nakonec):

$$\frac{y'}{y^m} + p(t)\frac{1}{y^{m-1}} = q(t).$$

2. Provedeme substituci $\dfrac{1}{y^{m-1}} = z$, tj. $\dfrac{y'}{y^m} = \dfrac{1}{1-m} z'$. Pak do rovnice dosadíme a dostaneme tak lineární rovnici

$$z' + (1 - m)\, p(t)\, z = (1 - m)\, q(t).$$

3. Řešíme tuto lineární rovnici s neznámou funkcí z.
4. V získaném řešení se vrátíme k původní proměnné dosazením $z = \dfrac{1}{y^{m-1}}$.

Úloha 14.5.2. Určete obecné řešení diferenciální rovnice $y' + y = t\sqrt{y}$ (pro $y > 0$).

[Provedeme dělení dle bodu 1:

$$\frac{y'}{\sqrt{y}} + \sqrt{y} = \mathrm{t}\ .$$

Substitucí $\sqrt{y} = z$ dle bodu 2 přejde tato rovnice v rovnici lineární

$$2z' + z = t \quad (z > 0).$$

Obecné řešení příslušné rovnice homogenní je

$$z = K\, e^{-\frac{1}{2}t}$$

a metodou variace konstanty dostaneme

$$K = C + t\,e^{\frac{1}{2}t} - 2\,e^{\frac{1}{2}t},$$

takže

$$z = C\,e^{-\frac{1}{2}t} + t - 2$$

a je tím naplněn bod 3 .

Dle bodu 4 položíme $z = \sqrt{y}$ a po umocnění máme výsledné obecné řešení ve tvaru

$$y = (C\,e^{-\frac{1}{2}t} + t - 2\,)^2\;.\;]$$

14.6. Ortogonální a izogonální trajektorie

Diferenciální rovnice dané soustavy čar.

Při řešení diferenciálních rovnic 1. řádu dostáváme jako výsledek obecné řešení, což je vlastně jednoparametrická soustava čar (integrálních křivek) s parametrem C (viz 14.1). Ptáme se nyní naopak, jak k dané jednoparametrické soustavě čar nalézt diferenciální rovnici, pro niž je daná soustava čar soustavou grafů partikulárních řešení. Takovou diferenciální rovnici pak nazveme *diferenciální rovnice dané soustavy čar*. Začněme příkladem.

Úloha 14.6.1. Najděte diferenciální rovnici soustavy kružnic, které se v počátku O pravoúhlé souřadnicové soustavy Oty dotýkají osy t.

[Každá kružnice, která se v bodě O dotýká osy t, má svůj střed na ose y, $S = [0, p]$, a její poloměr r je $r = |\,p\,|$, $p \neq 0$. Příslušná rovnice je

$$t^2 + (y - p)^2 = p^2\,,$$

neboli

$$t^2 + y^2 - 2\,p\,y = 0.$$

Je-li $y(t)$ partikulárním řešením příslušné (hledané) diferenciální rovnice, pak předchozí rovnici kružnice vyhovuje identicky při určité hodnotě parametru p. Proto i derivace je splněna identicky. Derivujeme podle t:

$$2\,t + 2\,y\,y' - 2\,p\,y' = 0$$

a vyloučíme z těchto dvou rovnic parametr p (např. 1. rovnici násobíme y', druhou rovnici $-y$ a sečteme). Po úpravě máme

$$y' = \frac{2\,t\,y}{t^2 - y^2}$$

a to je hledaná diferenciální rovnice zadané soustavy kružnic.]

Stejně postupujeme i v jiných případech. Nechť je daná soustava čar vyjádřena implicitní rovnicí $F(t, y, p) = 0$, kde p je parametr. Pro různá p tak dostáváme různé čáry dané soustavy, tedy na dané čáře je p konstantní a $y = y(\mathrm{t})$. Derivace podle t tak dává

$$F'_x + F'_y\,y' = 0\,.$$

Současně však pro každou čáru soustavy platí $F(t, y, p) = 0$ a odsud plyne následující:

Postup pro určení diferenciální rovnice dané soustavy čar:

1. Implicitní rovnici $F(t, y, p) = 0$ dané soustavy čar derivujeme podle t s tím, že $y = y(t)$: $F_t' + F_y' y' = 0$.

1. Z rovnic $F_t' + F_y' y' = 0$ a $F(t, y, p) = 0$ vyloučíme parametr p a dostaneme tak hledanou diferenciální rovnici (1. řádu).

Ortogonální trajektorie

D: Ortogonální trajektorie soustavy čar $F(t, y, p) = 0$ je křivka, která každou čáru dané soustavy protíná pod pravým úhlem.

Také ortogonální trajektorie vytvářejí (jednoparametrickou) soustavu čar.

Postup při určování ortogonálních trajektorií

1. Sestavíme diferenciální rovnici dané soustavy čar.
2. Vytvoříme diferenciální rovnici ortogonálních trajektorií.
3. Řešíme tuto diferenciální rovnici ortogonálních trajektorií.

ad 2 : Je-li $y' = f(t,y)$ diferenciální rovnice dané soustavy čar, znamená $f(t,y)$ směrnici tečny k té křivce soustavy, která prochází bodem $[t,y]$. Ježto úhel dvou křivek je definován jako úhel jejich tečen v průsečíku a ježto směrnice k_1, k_2 dvou navzájem kolmých přímek jsou ve vztahu $k_1 = -1/ k_2$, platí pro každou ortogonální trajektorii

$$y' = -\frac{1}{f(t,y)} \ ,$$

a právě toto je tedy diferenciální rovnice ortogonálních trajektorií.

Úloha 14.6.2. Najděte ortogonální trajektorie soustavy kružnic, které se v počátku O pravoúhlé souřadnicové soustavy dotýkají osy t.

[Nejprve určíme diferenciální rovnici dané soustavy čar; podle příkladu 14.6.1 je to

$$y' = \frac{2ty}{t^2 - y^2} \ .$$

Diferenciální rovnice ortogonálních trajektorií je tedy

$$y' = \frac{y^2 - t^2}{2ty} \ .$$

Řešíme-li tuto diferenciální rovnici, dostáváme (viz příklad 14.4.2) obecné řešení ve tvaru

$$(t - C)^2 + y^2 = C^2 \ .$$

Tedy ortogonálními trajektoriemi k zadané soustavě kružnic je opět soustava kružnic a to takových, které se v počátku souřadnicové soustavy dotýkají osy y: střed mají v bodě $[C,0]$ a jejich poloměr je $|C|$, kde $C \neq 0$ je libovolná konstanta (hodnota parametru).]

Úloha 14.6.3. Výsledek předchozího příkladu si graficky znázorněte.

Izogonální trajektorie

D: Izogonální trajektorie soustavy čar $F(t, y, p) = 0$ je křivka, která každou čáru dané soustavy protíná pod zadaným úhlem φ.

Je-li směrový úhel tečny v daném bodě křivky soustavy roven α, je směrový úhel tečny izogonální trajektorie v jejich průsečíku roven $\alpha + \varphi$ nebo $\alpha - \varphi$. K dané soustavě čar lze tedy uvažovat dva systémy izogonálních trajektorií.

Postup při určování izogonálních trajektorií je stejný jako pro ortogonální trajektorie, liší se jen v provedení bodu 2 . Diferenciální rovnice izogonálních trajektorií jsou tvaru

$$y' = \frac{f(t,y) \pm \operatorname{tg}\varphi}{1 \mp f(t,y)\operatorname{tg}\varphi}.$$

Ježto směrový úhel izogonálních trajektorií je $\beta = \alpha \pm \varphi$, je směrnice tečny (a tedy y') rovna tg β a výše uvedený vzorec plyne ze vzorce pro $\operatorname{tg}(\alpha \pm \varphi)$.

14.7. Užití diferenciálních rovnic

Ochlazování těles.

Má-li nějaké těleso teplotu y, která je větší než teplota η jeho okolí, ochlazuje se, a to tím rychleji, čím je rozdíl $y - \eta$ těchto teplot větší. Podle fyzikálního významu derivace je rychlost ochlazování tělesa rovna dy / dt, kde t je čas. Koeficient a (> 0) úměrnosti závisí na materiálu tělesa a na prostředí. Předpokládáme-li, že ochlazováním tělesa se nezvyšuje teplota jeho okolí, dostáváme vztah

$$\frac{dy}{dt} = -a\,(y - \eta),$$

kde znaménko „–“ na pravé straně je tu proto, že je $\frac{dy}{dt} < 0$, neboť jde o ochlazování.

Separací proměnných dostaneme

$$\frac{dy}{y-\eta} = -a\,dt\,,$$

odkud, po integraci a úpravě máme obecné řešení

$$y = \eta + C\,e^{-at}\,,$$

kde pro $y > \eta$ je $C > 0$ libovolná konstanta. Partikulární řešení, které splňuje počáteční podmínku $y(t_0) = y_0$, je

$$y = \eta + (y_0 - \eta)\,e^{-at}\,.$$

Lehce zjistíme, že stejný vztah platí i pro ohřev tělesa, tj. pro případ, že $y_0 < \eta$.

Zákon radioaktivní přeměny

Atomy radioaktivní látky se rozpadají tak, že rychlost rozpadu v okamžiku t je přímo úměrná počtu atomů $N(t)$ přítomných v okamžiku t. Počet atomů je přirozené číslo, tedy v realitě není funkce $N(t)$ spojitá. Ukazuje se však, že když považujeme funkci $N(t)$ za spojitou (dokonce diferencovatelnou), odpovídá model procesu realitě velmi přesně (pro velké N se $N(t)$ chová téměř jako spojitá funkce). Platí tedy

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda\, N(t),$$

kde koeficient úměrnosti $\lambda > 0$ (přeměnová konstanta) je základním charakteristickým číslem pro každou radioaktivní látku. Znaménko „–“ opět souvisí s tím, že rychlost je záporná (atomů ubývá). Je-li počet atomů na počátku procesu (v čase 0) roven N_0, tj. za počáteční podmínky $N(0) = N_0$ dostáváme řešení *dané diferenciální rovnice radioaktivního rozpadu* ve tvaru

$$N \ (= N(t)) \ = N_0\, e^{-\lambda t}.$$

Poločas rozpadu T, tj. dobu, v níž se původní množství atomů N_0 sníží na polovinu, dostaneme ze vztahu

$$N(T) = \frac{1}{2} N_0 \ = N_0\, e^{-\lambda T},$$

tedy $\quad T = \dfrac{\ln 2}{\lambda}, \ \lambda = \dfrac{\ln 2}{T}$, takže

$$N = N_0\, e^{-\frac{t}{T}\ln 2} \quad \left(= N_0\, 2^{-\frac{t}{T}} \right).$$

Množení organizmů

a) v neohraničeném živném prostředí

Jestliže kolonie organizmů (např. kultura bakterií) žije v neohraničeném živném prostředí (za dostatku potravy i prostoru), pak se rozmnožuje rychlostí, která je v každém okamžiku t přímo úměrná počtu x těchto organizmů. To dává diferenciální rovnici

$$\frac{dx}{dt} = a\, x(t),$$

kde koeficient $a > 0$ je závislý na druhu organizmů a prostředí, v němž žijí. Je-li na počátku v procesu x_0 organizmů, vede daná diferenciální rovnice k řešení

$$x = x(t) = x_0\, e^{a\,t}$$

(exponenciální růst, populační exploze).

b) s vnitřní konkurencí

V reálných přírodních podmínkách však probíhá konkurenční boj uvnitř populace pro nedostatek místa a potravy, rovněž při velké hustotě organizmů dochází ke snadnému přenosu infekcí, atd. Hledejme zákon vývoje počtu živých jedinců v kolonii za těchto podmínek.

Označme $x(t)$ rozsah populace v čase t. Za dobu Δt přibude Δx organizmů, přičemž je do Δx třeba započítat:

– skutečný přírůstek $k.x\ \Delta t$ (je přímo úměrný počtu jedinců v daném časovém intervalu),

– úbytek $h(x,\Delta t)$ jako důsledek vnitřní konkurence.

Je tedy

$$\Delta x = k\,x\,\Delta t - h(x, \Delta t).$$

Ukazuje se, že konkurence roste úměrně k počtu vzájemných setkání jedinců kolonie. Počet setkání jedince s ostatními členy kolonie je úměrný počtu setkání x jedinců s ostatními x–1 jedinci, tedy součinu $x\,(x-1)$, a délce časového intervalu. Proto

$$h(x, \Delta t) = \lambda\, x\,(x-1)\,\Delta t..$$

Odsud $\Delta x = k\,x\,\Delta t - \lambda\,x\,(x-1)\,\Delta t = K\,x\,\Delta t - \lambda\,x^2\,\Delta t$, takže $\dfrac{\Delta x}{\Delta t} = Kx - \lambda\,x^2$. Opět abstrahujeme od toho, že jde o celočíselné jevy, a přejdeme k limitě pro $\Delta t \to 0$:

$$\frac{dx}{dt} = Kx - \lambda x^2,$$

a to je hledaný zákon vývoje počtu organizmů s vnitřní konkurencí (ve tvaru diferenciální rovnice).

Jde o zvláštní případ Bernoulliovy diferenciální rovnice, kterou lze řešit separací proměnných:

$$\frac{dx}{x\,(K-\lambda\,x)} = dt.$$

Zlomek na levé straně rozložíme na parciální zlomky

$$\frac{1}{x\,(K-\lambda\,x)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{K-\lambda\,x}\ ,$$

odkud $A = \dfrac{1}{K}$, $B = \dfrac{\lambda}{K}$. Po integraci máme

$$\frac{1}{K}\ln|x| + \frac{\lambda}{K}\left(-\frac{1}{\lambda}\right)\ln|K-\lambda\,x| = t + \ln C_1\text{ , tj.}$$

$$\ln\frac{x}{K-\lambda\,x} = Kt + \ln C_2\ ,$$

a z toho

$$\frac{x}{K-\lambda\,x} = C\,e^{Kt}\ ,$$

takže obecné řešení je

$$x = \frac{K\,C\,e^{Kt}}{1+\lambda\,C\,e^{Kt}}\ .$$

Je-li v čase 0 v kolonii x_0 organizmů, je

$$\frac{x_0}{K-\lambda\,x_0} = C\text{ , odkud }\frac{1}{\lambda\,C} = \frac{K}{\lambda\,x_0} - 1.$$

Označíme $\frac{K}{\lambda}$ = μ. V obecném řešení rozšíříme zlomek výrazem $\frac{x_0}{\lambda\, C}$ a dosadíme za $\frac{1}{\lambda\, C}$. Po úpravě dostáváme zákon vývoje počtu organizmů v kolonii ve tvaru

$$x = \frac{\mu\, x_0\ \mathrm{e}^{Kt}}{\mu - x_0 + x_0\ \mathrm{e}^{Kt}}\ .$$

Vidíme, že pro $t \to +\infty$ je $x \to \mu$ (nikoli $x \to +\infty$ jako u neohraničeného růstu). Grafem tohoto zákona je tzv. *logistická křivka*. Přímka $x = \mu$ je zřejmě její asymptotou.

Populace organizmů s vnitřní konkurencí neroste tedy neohraničeně, ale nepřekročí určitou mez μ. Vyšetřováním průběhu funkce můžeme zjistit, že růst je nejprve progresivní (tj.graf je konvexní) – při malém počtu organizmů v kolonii ještě vnitřní konkurence nebrání rozvoji. Po dosažení inflexního bodu začne být růst degresivní (graf je konkávní), konkurence se uplatňuje stále silněji, rozvoj se zpomaluje, až prakticky ustane.

Tak se může matematický model vytvořený diferenciální rovnicí stát jedním z prostředků analýzy chování komunit organizmů.

\- * -