3. Pojem funkce

3.1. Definice funkce

Písmeno x nazýváme *proměnná* na (číselné) množině $M \Leftrightarrow$ může být ztotožněno s libovolným prvkem množiny M. Pojem funkce navazuje na pojem *binární relace* a na pojem *zobrazení* jejichž základní znalost zde předpokládáme.

D: Každé zobrazení f z $\boldsymbol{R}$ do $\boldsymbol{R}$ (tj. zobrazení v $\boldsymbol{R}$) nazýváme ***reálná funkce** jedné reálné proměnné*. Je-li $(x, y) \in f$, píšeme $y = f(x)$; x se nazývá ***nezávisle proměnná***, y **závisle proměnná**; říkáme též, že y *je funkcí* x.

Chceme-li vyjádřit, že y je (zatím nepojmenovanou) funkcí x, zapíšeme $y = y(x)$. Vedle vyjádření „funkce f“ se tolerují též zápisy „funkce $f(x)$“ (chceme-li zdůraznit označení nezávisle proměnné) nebo „funkce $y = f(x)$“ (chceme-li zdůraznit označení obou proměnných).

S pojmem funkce jsou spjaty dvě významné množiny:

***definiční obor** funkce*: $D(f) = \{x \in \boldsymbol{R};\ \exists\ (x, y) \in f\}$,

funkční obor (**obor hodnot**): $H(f) = \{y \in \boldsymbol{R};\ \exists\ (x, y) \in f\}$.

Hodnotu proměnné vyjadřujeme číslem nebo symbolem proměnné s indexem. Např. v bodě $x_0 = 2$ má funkce $y = 3x$ hodnotu $y_0 = 6$. Je-li $M \subset D(f)$, je $f(M)$ označení pro $\{f(x);\ x \in M\}$. Je tedy $H(f) = f(D(f))$. Naopak, je-li $B \subset H(f)$, pak definujeme $f^{-1}(B)$ jako množinu $\{x \in D(f);\ f(x) \in B\}$.

Grafem funkce f v kartézských souřadnicích rozumíme množinu všech bodů euklidovské roviny, pro jejichž souřadnice x, y platí $(x, y) \in f$. Grafické znázornění funkce často svou názorností pomáhá k pochopení vlastností a průběhu funkce; pro některé funkce však graf nedovedeme sestrojit, např. pro Dirichletovu funkci. Grafy funkcí lze uvažovat také v polární souřadnicové soustavě, kdy ovšem dostáváme jiné křivky. Např. grafem přímé úměrnosti $y = kx$ v kartézských souřadnicích je přímka, grafem téže funkce $\rho = k\varphi$ v polárních souřadnicích je Archimedova spirála. Neřekneme-li jinak, uvažujeme vždy graf v kartézských souřadnicích.

Způsoby definice funkce:

Funkci f lze vyjádřit takto: $f = \{(x,y) \in D(f) \times \boldsymbol{R};\ V(x,y)\}$. Zadat (definovat) funkci f tedy znamená udat její definiční obor $D(f)$ a jisté pravidlo $V(x,y)$, jehož oborem pravdivosti je f a které stanovuje, jak k zadanému $x \in D(f)$ najít (vypočítat) hodnotu $f(x)$. Podle toho, jak je toto pravidlo formulováno, rozlišujeme tato zadání funkce:

a) (Explicitní) *rovnicí*, např. $f = \{(x,y) \in \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R};\ y = x^2 - 1\}$, nebo jednoduše $f\colon y = x^2 - 1$.

U funkce definované rovnicí, není-li řečeno jinak, bereme za $D(f)$ nejširší množinu, pro niž má rovnice smysl. Je-li předepsán jiný definiční obor, musíme jej uvést, např.
$f\colon y = x - 1,\ x \in N$.

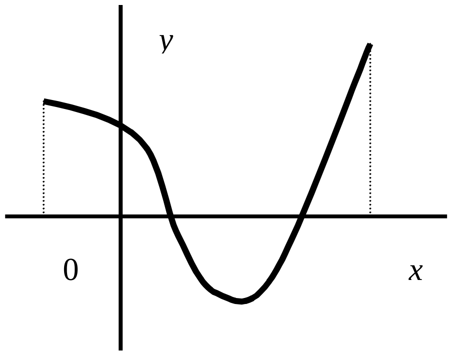
b) *Tabulkou*, např.

x	–2	–1	0	1	2	3
y	3	0	–1	0	3	8

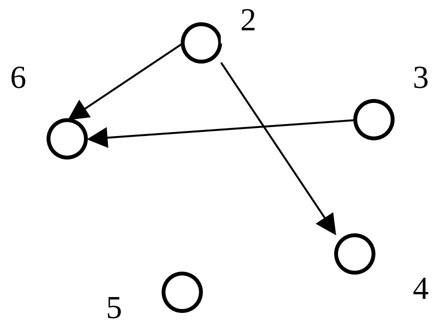
Také zadání funkce *výčtem prvků* lze považovat za zadání tabulkou, jde jen o jinou formu zápisu; např. $f = \{(-2; 3), (-1; 0), (0; -1), (1; 0), (2; 3), (3; 8)\}$.

Tabulkou či výčtem prvků bývají zadávány funkce, jejichž funkční hodnoty byly získány měřením nebo kde jsou tyto hodnoty důležitější než příslušné pravidlo (např. daňové tabulky, bodovací sportovní tabulky). Tabelaci funkce však používáme i u funkcí definovaných jinak, pokud může tabulka posloužit lépe k přehlednosti nebo jiné praktické potřebě (např. tabulka cen v závislosti na hmotnosti zboží).

c) *Grafem* (zpravidla kartézským, obr. 3.1.1). Další druhy grafů - šachovnicový, uzlový (obr. 3.1.2) nebo graf v polární soustavě souřadnic - bývají méně časté.



obr. 3.1.1.



obr. 3.1.2.

Grafem bývají často vyjadřovány ty funkce, jejichž průběh je zapisován v přístrojích graficky na papírová média nebo na displeji.

d) *Po částech*; tak je definována např.Dirichletova funkce $\chi(x)$. Podobným způsobem je definována funkce

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1 \ \text{ pro } \ x < 0 \\ \ 0 \ \text{ pro } \ x = 0 \\ \ 1 \ \text{ pro } \ x > 0 \end{cases} .$$

Rovnice $y = \chi(x)$ a $y = \operatorname{sgn} x$ však již považujeme za rovnice funkcí.

e) *Implicitní rovnicí*, např. $x^2 + y^2 = 25$; takto se definují implicitní funkce $y = y(x)$, s nimiž je technika práce někdy poněkud odlišná. Zejména bývá vymezena množina $M \subset \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}$, pro niž má platit $(x, y) \in M$. Např. u výše uvedené rovnice může být zadáno, že M je polorovina $y \geq 0$.

f) *Parametricky*: Parametrické vyjádření je tvaru $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in J$, kde φ, ψ jsou funkce definované na množině (intervalu) J, přičemž funkce $y = f(x)$ je definována vztahem

$$f = \{(x,y) \in \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R};\ \exists t \in J \text{ tak, že } x = \varphi(t) \wedge y = \psi(t)\}.$$

Např. $x = 4\cdot\cos t$, $y = 4\cdot\sin t$, $t \in \langle 0, \pi\rangle$. Parametrického vyjádření používáme ponejvíce při vyšetřování různých (např. technických) křivek.

g) *Jinak*:

Někdy je pro výrokovou formu $V(x,y)$ dána jen slovní formulace. Např. výroková forma $V(x,y)$ = „y je největší celé číslo, které není větší než x“ definuje funkci $\lfloor\ \rfloor$ „dolní celá část“ (např. $\lfloor 3{,}8 \rfloor = 3$, $\lfloor -1 \rfloor = -1$, $\lfloor -6{,}7 \rfloor = -7$; tím se tato funkce odlišuje od „počítačové“ Int( )). Ostatně i goniometrické funkce sinus a kosinus jsou pomocí jednotkové kružnice definovány tímto způsobem (avšak $y = \sin x$, $y = \cos x$, jsou již *rovnice* těchto funkcí).

Výroková forma $V(x,y)$ je tedy jisté „pravidlo“ („předpis“), které ke každému číslu x z jisté množiny $D \subset R$ přiřazuje právě jedno číslo $y \in \boldsymbol{R}$. Pojem funkce se někdy (z důvodů didaktických) ztotožňuje přímo s tímto pravidlem, podle nějž rozhodujeme, zda $(x,y) \in f$, nebo s jehož pomocí k danému x počítáme příslušnou funkční hodnotu $f(x)$. I při našem pojetí funkce však toto pravidlo chápeme jako atribut a druhou stránku pojmu funkce. Pro toto pravidlo $V(x,y)$ tak proto lze používat stejné označení f jako pro funkci a zkráceně říkat a psát např. „funkce f: $y = x^2 - 1$“ nebo prostě „funkce $y = x^2 - 1$“.

3.2. Řešení rovnic a nerovnic

Při vyšetřování vlastností (průběhu) funkcí se setkáváme s několika typickými úlohami, jež vedou na řešení rovnic a nerovnic resp. jejich soustav. Některé dále uvádíme.

a) ***Stanovení definičního oboru***

Je-li funkce f určena rovnicí a její definiční obor není zadán, je třeba zjistit $D(f)$ jako množinu všech $x \in \boldsymbol{R}$, pro něž je daná rovnice definována. Úlohy na definiční obor zpravidla vedou na řešení nerovnic nebo soustav nerovnic.

Úloha 3.2.1. Určete definiční obor funkce $y = \dfrac{\ln\left(4 - x^2\right)}{1 - x}$.

[Čitatel je definován pro $4 - x^2 > 0$, tj. na množině $M_1 = (-2, 2)$, jmenovatel je definován pro $1 - x \neq 0$, tj. na množině $M_2 = \boldsymbol{R} - \{1\}$. Pravá strana rovnice funkce je tedy definována na množině $D(f) = M_1 \cap M_2 = (-2, 1) \cup (1, 2)$.]

b) ***Zjištění nulových bodů funkce***

Tyto úlohy jsou součástí vyšetřování průběhu funkce: při hledání průsečíků grafu funkce s osou x zjišťujeme nulové body funkce f (a dále též při výpočtu extrémů funkcí zjišťujeme nulové body 1. derivace, tj. stacionární body, při zkoumání inflexe zjišťujeme zpravidla nulové body 2.derivace funkce).

Úloha 3.2.2. Určete nulové body funkce $y = -e^{-x} \cdot \sin x + e^{-x} \cdot \cos x$.

[Máme $y = e^{-x} \cdot (\cos x - \sin x)$. Hledáme body, v nichž $y = 0$, tj. řešíme goniometrickou rovnici $\cos x - \sin x = 0$, jež je ekvivalentní s rovnicí $\sin \pi/4 \cdot \cos x - \cos \pi/4 \cdot \sin x = 0$ (neboť $\sin \pi/4 = 1/\sqrt{2} = \sqrt{2}/2 = \cos \pi/4$) a tedy i s rovnicí $\sin(\pi/4 - x) = 0$. Nulové body dané funkce jsou tedy $x_k = \pi/4 + k\pi$.]

c) ***Zjištění intervalů, kde je funkce kladná*** (*záporná*).

Také tyto úlohy jsou součástí vyšetřování průběhu funkce (při zjišťování intervalů monotónnosti řešíme nerovnice typu $y' > 0$, při zjišťování intervalů konvexnosti a konkávnosti řešíme nerovnice typu $y'' > 0$).

Úloha 3.2.3. Určete intervaly, kde je funkce $y = (6x - x^2)\, e^{-x}$ kladná a kde je záporná.

[Rovnici upravíme na tvar $y = (6 - x) \cdot x \cdot e^{-x}$. Pro $x > 0 \wedge 6 - x > 0$, tj. na intervalu $(0, 6)$ je daná funkce kladná, pro $x > 0 \wedge 6 - x < 0$, tj. na intervalu $(6, +\infty)$ je funkce záporná, pro $x < 0 \wedge 6 - x > 0$, tj. též na intervalu $(-\infty, 0)$ je funkce záporná.]

d) ***Zjištění průsečíků grafů dvou funkcí***

Úloha 3.2.4. Jsou dány funkce $y = x^2 - 1$, $y = x + 1$. Stanovte průsečíky grafů těchto funkcí.

[Řešíme rovnici $x^2 - 1 = x + 1 \Rightarrow x_1 = -1$, $x_2 = 2$, takže průsečíky jsou body $A[-1; 0]$ a $B[2; 3]$.]

e) ***Porovnání hodnot dvou funkcí***

Úloha 3.2.5. Jsou dány funkce f_1: $y = x^2$, f_2: $y = 4 - 2x - x^2$. Porovnejte hodnoty těchto funkcí.

[$f_1(x) < f_2(x) \Leftrightarrow x^2 < 4 - 2x - x^2$, tj. $x^2 + x - 2 < 0$, tedy na intervalu $(-2, 1)$; podobně $f_1(x) > f_2(x)$ na množině $(-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$ a obě funkce mají stejné funkční hodnoty v bodech -2 a 1.]

3.3. Vlastnosti funkcí

Omezenost

D: Funkce f se nazývá (***shora***, ***zdola***) ***omezená na množině*** $M \subset D(f) \Leftrightarrow$ tuto vlastnost má množina $f(M)$; nazývá se (***shora***, ***zdola***) ***omezená*** $\Leftrightarrow$ tuto vlastnost má množina $H(f)$.

Např. funkce $y = x^2$ je omezená zdola, není omezená shora a není omezená, ale na množině $\langle -10, 10\rangle$ je omezená.

Je-li funkce f omezená na M, existují $K, L \in R$ tak, že platí $f(M) \subset \langle K, L\rangle$. Je-li funkce omezená, je omezená na každé množině $M \subset D(f)$.

Supremum množiny $f(M)$ nazýváme *supremum funkce* na množině M a označujeme $\sup\limits_{x\in M} f(x)$; podobně $\inf\limits_{x\in M} f(x)$. Má-li množina $f(M)$ největší prvek, pak toto číslo nazýváme ***největší hodnota funkce*** f na množině M nebo též *globální* (*absolutní*) *maximum* funkce f na množině M; značí se $\max\limits_{x\in M} f(x)$, podobně $\min\limits_{x\in M} f(x)$. Pokud $M = D(f)$, pak označení $x \in M$ vynecháváme.

Monotónnost

D: Funkce f se nazývá ***rostoucí*** (***klesající***, ***neklesající***, ***nerostoucí***) ***na množině*** $M \subset D(f) \Leftrightarrow$ $\forall x_1, x_2 \in M$ platí: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$, $f(x_1) \le f(x_2)$, $f(x_1) \ge f(x_2)$).
Funkci f rostoucí na $D(f)$ nazýváme ***rostoucí*** (tj. neuvádíme, kde je rostoucí), podobně funkce ***klesající***, ***neklesající***, ***nerostoucí***. Pro funkce rostoucí a funkce klesající používáme souhrnný název funkce ***ryze monotónní***; souhrnný název pro všechny 4 uvedené druhy funkcí je funkce ***monotónní***.

Např. funkce $y = 1/x$ je klesající na intervalu $(-\infty, 0)$ a je klesající i na intervalu $(0,+\infty)$, ale není klesající (tj. není klesající na $D(f)$).

Kromě monotónnosti na množině, což je globální vlastnost funkce, se zavádí i pojem monotónnosti v bodě jako vlastnost lokální. Uvedeme definici jen pro funkci rostoucí, další tři případy monotónnosti se formulují analogicky.

D: Funkce f se nazývá ***rostoucí v bodě*** $x_0 \in D(f) \Leftrightarrow \exists U(x_0) \subset D(f)$ tak, že $\forall x \in P(x_0-)$ platí $f(x) < f(x_0)$ a $\forall x \in P(x_0+)$ platí $f(x_0) < f(x)$.

Úloha 3.3.1. Podobně definujte funkci *klesající* (*nerostoucí, neklesající*) *v bodě* x_0 a dále funkci *rostoucí*, *klesající*, *nerostoucí* a *neklesající v bodě* x_0 *zleva* resp. *zprava*. (Tuto vlastnost vyšetřujeme zejména v krajních bodech intervalů.)

V (vztah monotónnosti v bodě a na intervalu): Funkce f definovaná na intervalu (a, b) je na tomto intervalu rostoucí (klesající, nerostoucí, neklesající) $\Leftrightarrow$ má takovou vlastnost v každém bodě tohoto intervalu.

Princip důkazu (pro f rostoucí): 1) Nechť je f rostoucí na (a, b). Zvolíme libovolný bod $x_0 \in (a, b)$ a jeho okolí $P(x_0) \subset (a, b)$. Je-li $x_1 \in P(x_0-)$, $x_2 \in P(x_0+)$, je $x_1 < x_0 < x_2$ a monotónnost v bodě x_0 plyne z monotónnosti na (a, b).

2) Nechť f je rostoucí v každém bodě intervalu (a, b). Zvolíme dva body $x_1 < x_2$ a dokážeme, že $f(x_1) < f(x_2)$. Pro každé x' z jistého $P(x_{1+})$ je $f(x_1) < f(x')$; nechť m je supremum množiny M všech takových x'. Kdyby $m < b$, bylo by $m \in M$, neboť i v m je f rostoucí a podle 2. vlastnosti suprema $\forall P(m-)$ obsahuje bod $x' \in M$, tedy $f(x_1) < f(x') < f(m)$. Současně by existovalo pravé okolí $P(m+) \subset (a, b)$ tak, že by pro všechny jeho body x'' platilo $f(x'') > f(m) > f(x_1)$, tj. $x'' \in M$, $x'' > m$ a to je spor s 1. vlastností suprema. Proto $m = b$, takže $x_2 \in M$ a $f(x_1) < f(x_2)$.
□

Např. funkce $y = \operatorname{sgn} x$ je rostoucí v bodě 0.

Parita

D: Funkce f se nazývá ***sudá*** [***lichá***] $\Leftrightarrow \forall x \in \boldsymbol{R}$ platí $x \in D(f) \Rightarrow (-x \in D(f)) \wedge (f(-x) = f(x))$ $[f(-x) = -f(x)]$.

Příklad sudé funkce: $y = \cos x$, příklad liché funkce: $y = \sin x$,

Úloha 3.3.2. Dokažte, že funkce $y = 3x^2 - 5$, $y = |x|$ a Dirichletova funkce χ jsou sudé a že $y = 2x^3 + x$, $y = x \cdot |x|$ a $y = \operatorname{sgn} x$ jsou funkce liché.

Pro polynomické funkce platí: jsou-li v polynomu jen členy se sudými exponenty, je daná funkce sudá, jsou-li zde jen členy s lichými exponenty, je funkce lichá.

Kartézský graf sudé funkce je souměrný podle osy y, graf liché funkce je souměrný podle počátku.

Periodičnost

D: Funkce f se nazývá ***periodická*** $\Leftrightarrow \exists p \in \boldsymbol{R}, p \neq 0$ tak, že $\forall x \in \boldsymbol{R}$ platí

1) $x \in D(f) \Rightarrow (x \pm p) \in D(f)$

2) $\forall x \in D(f)$: $f(x \pm p) = f(x)$.

Číslo p se nazývá ***perioda*** funkce f.

Je-li p perioda funkce f, je $\forall k \in Z$ také číslo kp periodou funkce f. Nejmenší kladná perioda p_0, pokud existuje, se nazývá *primitivní* (též *základní*) *perioda* funkce f. Konstantní funkci zpravidla mezi periodické funkce nepočítáme.

Příklady periodických funkcí: $y = \sin x$ ($p_0 = 2\pi$), $y = \operatorname{tg} x$ ($p_0 = \pi$).

Úloha 3.3.3. Dokažte, že funkce $y = x - [x]$ je periodická s periodou $p_0 = 1$ a že Dirichletova funkce χ je periodická a periodou je každé racionální číslo různé od nuly; zde p_0 neexistuje.

Někdy je užitečné chápat periodičnost jen „jednostranně“, např. „periodičnost vpravo“, tj. tak, že v definici místo $(x \pm p)$ uvažujeme jen $(x + p)$, kde $p > 0$.

3.4. Operace s funkcemi

Rovnost funkcí: $f = g \Leftrightarrow \forall x, y \in \boldsymbol{R}$: $((x,y) \in f \Leftrightarrow (x,y) \in g)$. Obráceně, je-li $f \neq g$, znamená to, že buď $D(f) \neq D(g)$ nebo $\exists x' \in D(f) \cap D(g)$ tak, že $f(x') \neq g(x')$.

Částečné uspořádání: Je-li F množina funkcí a jsou-li všechny funkce definovány na M, definuje se na F částečné uspořádání nerovností $f < g$.

Úloha 3.4.1. Definujte nerovnost $f < g$ na M a objasněte její geometrický význam,

Např. funkce $y = |x|$ a funkce $y = x + 1$ nejsou srovnatelné na $\boldsymbol{R}$, ale na $(0, +\infty)$ ano.

Zúžení **(*restrikce*)** ***funkce****:* Mějme funkci f; její *restrikcí* nazveme funkci g takovou, že $D(g) \subset D(f)$ a na $D(g)$ je $g(x) = f(x)$.

Algebraické operace*:* $\forall x \in D(f) \cap D(g)$ se definuje

$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$,

$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$, $(f / g)(x) = f(x) / g(x)$ (pokud $g(x) \neq 0$.

Skládání funkcí*:* Mějme funkce f, φ a nechť $H(\varphi) \subset D(f)$. Pak složenou funkci $F = f \circ \varphi$ definujeme takto: $(f \circ \varphi)(x) = f[\varphi(x)]$, přičemž funkci f nazýváme *vnější funkce* a funkci φ *funkce vnitřní.*

Např. ve složené funkci $y = \sin 2x$ je vnější funkce $y = \sin u$, vnitřní funkce $u = 2x$. Funkce může být složena i vícekrát, např. $y = \mathrm{e}^{\sin(3x+1)}$.

Složenou funkci můžeme vytvořit substitucí proměnné. Máme-li např. funkci $y = 1 - x$ a dosadíme $x = \sin t$, dostáváme složenou funkci $y = 1 - \sin t$. Zvláštním případem složené funkce je $|f|$. Vnější funkce je $y = |z|$, vnitřní funkce $z = f(x)$.

Úloha 3.4.1. Zobrazte funkci $y = |x^2 - 2x|$.

Funkce prostá

D: Funkce f se nazývá ***prostá na*** $M \subset D(f)$ $\Leftrightarrow$ $\forall x \in M$ platí: $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ a nazývá se ***prostá*** $\Leftrightarrow$ je prostá na $D(f)$. Množina M, na níž je funkce prostá, se nazývá jejím ***oborem prostoty***.

Např. funkce $y = x^2$ není prostá, ale je prostá třeba na intervalu $\langle 0, +\infty)$, který je jejím oborem prostoty.

V (vztah prostoty a ryzí monotónnosti): Je-li funkce ryze monotónní na M, je prostá na M.

Důkaz plyne z toho, že $x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 \neq x_2$ a stejně i pro funkční hodnoty plyne z nerovností „<", „>" nerovnost „≠". □

Obrácený vztah neplatí, existují prosté funkce, které nejsou monotónní, např. funkce $y = 1/x$. Prostota funkce f je základním předpokladem pro to, aby inverzní relace f^{-1} byla zobrazením a tedy funkcí.

3.5. Funkce inverzní

D: Inverzní zobrazení f^{-1} k prosté funkci (na M) f nazýváme ***inverzní funkce***.

Je-li tedy funkce f prostá, pak k ní existuje funkce inverzní f^{-1} a platí $(x,y) \in f \Leftrightarrow (y,x) \in f^{-1}$; přitom $D(f^{-1}) = H(f)$, $H(f^{-1}) = D(f)$. Je-li f prostá na M, pak inverzní funkce má $D(f^{-1}) = f(M)$, $H(f^{-1}) = M$. Na M platí $f^{-1}(f(x)) = x$ a na $f(M)$ platí $f(f^{-1}(x)) = x$.

Geometrický význam: Grafy funkcí f a f^{-1} jsou souměrně sdružené podle přímky $y = x$ (osy I. a III. kvadrantu).

Např. funkce f: $y = x^2 - 1$ je prostá na $M = \langle 0, +\infty)$, $f(M) = \langle -1, +\infty)$. Inverzní funkce f^{-1} je definována na $\langle -1, +\infty)$ a platí $x = y^2 - 1$ tj. $y = \sqrt{x+1}$. Pro $x \in \langle 0, +\infty)$ je $f^{-1} \circ f(x) =$ $= \sqrt{(x^2-1)+1} = \sqrt{x^2} = x$, pro $x \in \langle -1, +\infty)$ je $f \circ f^{-1}(x) = \left(\sqrt{x+1}\right)^2 - 1 = x$.

Funkce a funkce k nim inverzní tvoří dvojice funkcí navzájem inverzních, neboť $(f^{-1})^{-1} = f$. Existují i funkce inverzní samy k sobě; graf takové funkce je souměrný podle přímky $y = x$ (např. funkce $y = 1/x$, $y = a - x$, $y = x$).

Některé vlastnosti funkcí se přenášejí na funkce inverzní.

V (o monotónnosti inverzní funkce): Je-li funkce f rostoucí (klesající), je funkce f^{-1} také rostoucí (klesající).

Princip důkazu: Nechť funkce $y = f(x)$ je rostoucí. Je-li $y_1 < y_2$, pak nemůže platit $x_1 > x_2$, protože z toho by plynulo $y_1 > y_2$. □

3.6. Rozšíření pojmu funkce

Pojem funkce se v matematice používá i v širším pojetí, zejména jako zobrazení z nějaké množiny M do množiny $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{C}$, případně i do jiné množiny.

a) Je-li M množina uspořádaných n-tic $P = (x_1, ..., x_n)$ reálných čísel, je funkce $y = f(P)$ reálnou *funkcí n proměnných*.

b) Je-li M množina (systém) množin X, pak lze definovat různé *množinové funkce*; např.:

* Jsou-li množiny $X \in M$ konečné, definuje se množinová funkce n, kde $n(X)$ je *počet prvků* množiny X.

* Jsou-li X křivky resp. rovinné obrazce resp. tělesa, definují se množinové funkce $s(X)$ (*délka křivky*) resp. $P(X)$ (*obsah – míra rovinného obrazce*) resp. $V(X)$ (*objem - míra tělesa*).

c) *Práce s texty*.

V souvislosti s počítači vznikla větší potřeba práce s texty; množinu všech textů označíme T. Příklady *textových konstant*: 'Praha', 'JAN HUS', ''. Apostrofy zde uvedené mají úlohu omezovačů, tj. nezapočítávají se do textu. První z uvedených konstant má tedy 5 znaků, druhá konstanta má 7 znaků (také mezera mezi slovy je znak) a třetí konstanta je tzv. prázdný text. Mezera je jedním ze znaků, takže např. 'Praha' je jiný text než 'Praha∨' (tento text má 6 znaků; zde '∨' je značka mezery), tedy 'Praha' ≠ 'Praha∨'.

Jsou-li x, y *textové proměnné* na množině T, lze položit (dosadit) např. x := 'Praha', y := 'Zlín'; pak $x < y$ (tj. 'Praha' < 'Zlín'), neboť jde o *abecední uspořádání*. Nejběžnější operací s texty je *spojování textů*. Má-li např. textová proměnná x hodnotu 'Praha∨' a proměnná z hodnotu '4', pak $x + z$ = 'Praha∨4'.

Na množině T se definuje funkce length: $T \to \boldsymbol{N}_0$ (*délka textu*); např. length('Praha') = = 5, length('') = 0, pro y := 'Zlín' je length(y) = 4.

Také různá zobrazení do T jsou běžně nazývána funkcemi.

Funkce backwards: $T \to T$ (*text pozpátku*); např. pro x := 'Praha' je backwards(x) = = 'aharP'.

Funkce Ucase: $T \to T$ (*velká abeceda*); např. Ucase('Praha') = 'PRAHA'. Podobně Lcase (*malá abeceda*), Lcase('Praha') = 'praha'

Funkce trim: $T \to T$ (*vynechávání mezer* na konci textu); např. pro x := 'Praha∨' je trim(x) = 'Praha'.

Funkce left: $T \times \boldsymbol{N} \to T$ (*text zleva*); např. pro x := 'Praha', y := 2 je left(x,y) = 'Pr'. Podobně funkce right (*text zprava*) by dala right(x,y) = 'ha'.

Funkce mid: $T \times \boldsymbol{N} \times \boldsymbol{N} \rightarrow T$ (*text zevnitř*); pro x := 'Praha ', y := 3, z := 2 máme mid(x,y,z) = 'ah'.

V jednotlivých programovacích jazycích a SW systémech bývá definována řada standardních funkcí a další funkce si zpravidla může uživatel definovat podle potřeby.

\- * -