

Ideály okruhů

Nové pojmy: ideál, ideál generovaný množinou, prvoideál, maximální ideál, hlavní ideál, vlastní a nevlastní ideály, faktorový okruh dle ideálu

Příklady:

- 1) Ukažte, že unitární okruh je tělesem právě tehdy, má-li pouze nevlastní levé (pravé) ideály.
- 2) Necht' R je okruh všech ohraničených funkcí jedné reálné proměnné na intervalu $\langle a; b \rangle$, přičemž $a \neq b$. Necht' $X \subseteq \langle a; b \rangle$, $X \neq \emptyset$. Dokažte, že množina $I = \{f \in R, f(x) = 0, x \in X\}$ je ideálem okruhu R .
- 3) Dokažte, že jsou-li I, J ideály okruhu R , množina $I \cup J$ nemusí být ideálem v R .
- 4) Dokažte, že ideál I generovaný množinou $\{p\}$ v okruhu $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ je maximální, právě když p je prvočíslo.
- 5) Sestrojte faktorový okruh \mathbb{Z}_6/I , kde $I = \{0, 2, 4\}$.
- 6) Necht' R je komutativní okruh, $p \in R$. Dokažte, že množina $I = \{px; x \in R\}$ je ideálem v R .
- 7) Necht' P je konečný okruh, I je ideálem v P . Dokažte, že I je prvoideál právě tehdy, když je I maximálním ideálem.