Vyhledávací stromy

Binární vyhledávání popsané v předchozí části má příznivou časovou složitost. Pokud bychom měli množinu prvků, v níž velmi často hledáme, pak by se nám viditelně vyplatilo je na začátku setřídit. Problém ovšem nastane, když se tato množina v průběhu času mění, tj. jsou k ní přidávány nové prvky nebo z ní naopak některé prvky jsou odebírány. Vkládání prvků na jiné místo, než je konec pole, nebo odebírání z jiného místa, než je konec pole, je poměrně neefektivní operace, neboť je spojena s přesuny prvků v poli. Časová složitost těchto operací je lineární, což už je nepříznivá časová složitost, pokud tyto operace probíhají častěji. Zde už je výhodnější použít vyhledávací stromy.

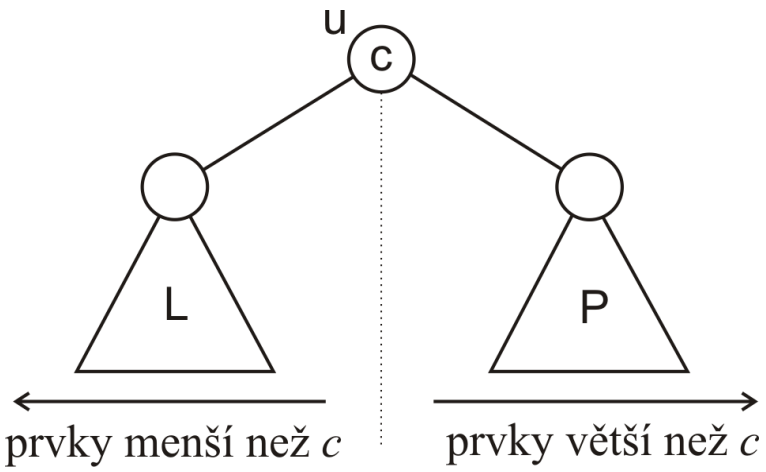
Vyhledávací stromy jsou velmi významnou a širokou skupinou vyhledávacích metod. Lze je rozdělit na

- Binární vyhledávací stromy
- Vícecestné vyhledávací stromy

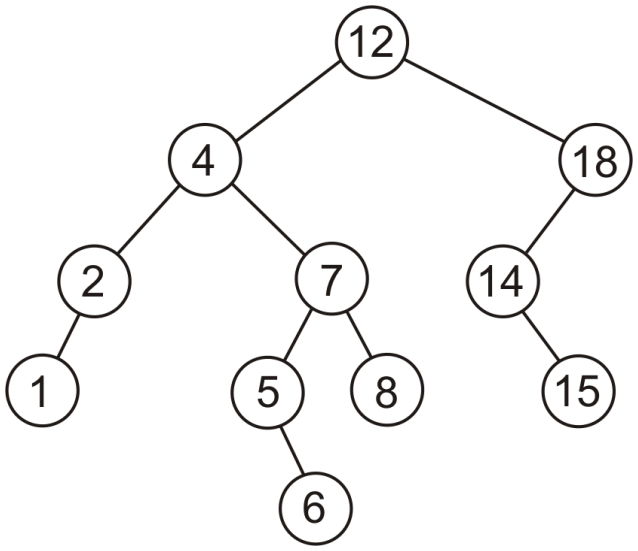
Binární vyhledávací stromy

Jsou binární stromy s vlastnostmi:

- V každém uzlu stromu je uložen jeden datový prvek.
- Pro každý uzel *u* a prvek v něm uložený *c* platí, že prvky uložené v levém podstromu uzlu *u* (má-li uzel *u* levý podstrom) jsou menší než prvek *c* a prvky uložené v pravém podstromu uzlu *u* (má-li uzel *u* pravý podstrom) jsou větší než prvek *c*.



Příklad.



Vyhledání prvku

1. Počáteční krok

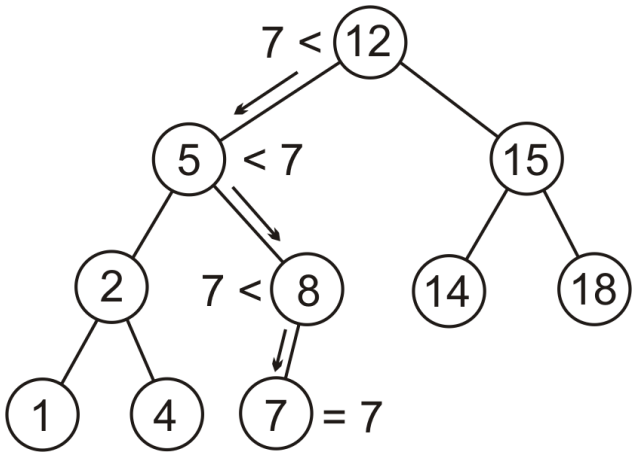
   Uzel, který je v daném okamžiku vyhledávání aktuální, budeme označovat *u*. Na začátku jím bude kořen stromu.
   Nechť hledaný prvek má hodnotu *x*.

2. Průběžný krok

   Vezmeme prvek obsažený v aktuálním uzlu *u*, označme ho *c*, a srovnáme ho s hledanou hodnotou *x*:

   - Nejprve srovnáme, zda je $x < c$:
     Pokud ano, pak je nutné v hledání pokračovat v levém podstromu. Jako nový aktuální uzel *u* stanovíme levého následníka současného aktuálního uzlu a znovu uděláme krok 2.
     Pokud současný aktuální uzel *u* levého následníka nemá, vyhledávání končí - hledaný prvek není ve stromu obsažen.
   - Pokud není $x < c$, uděláme druhé srovnání, zda je $x > c$:
     Pokud ano, je nutné v hledání pokračovat v pravém podstromu. Jako nový aktuální uzel *u* stanovíme pravého následníka současného aktuálního uzlu a opět uděláme krok 2.
     Pokud současný aktuální uzel pravého následníka nemá, vyhledávání končí, hledaný prvek není ve stromu obsažen.
   - Pokud není ani $x > c$, zbývá už jen případ, že platí $x = c$, čímž jsme u konce hledání a prvek *c* obsažený v současném aktuálním uzlu *u* je hledaným prvkem.

Příklad. V následujícím stromu máme vyhledat číslo 7.



Časová složitost: $\Theta(h)$, kde h je výška vyhledávacího stromu.

Pseudokód:

```
Search(T, x)
  u ← T.root
  while u ≠ NIL
    if x < u.item
      u ← u.left
    else
      if x > u.item
        u ← u.right
      else
        return u
  return NIL
```

Přidání prvku

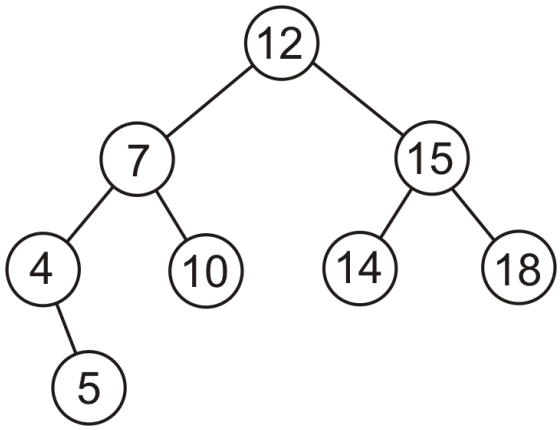
Operace přidání prvku do binárního vyhledávacího stromu znamená na příslušném místě přidat do stromu uzel, do kterého nový prvek vložíme.

Označme přidávaný prvek x. Nejprve proběhne jeho vyhledání ve stromu. Použijeme k tomu již popsaný algoritmus vyhledávání. Vyhledání prvku x ve stromu může skončit třemi způsoby:

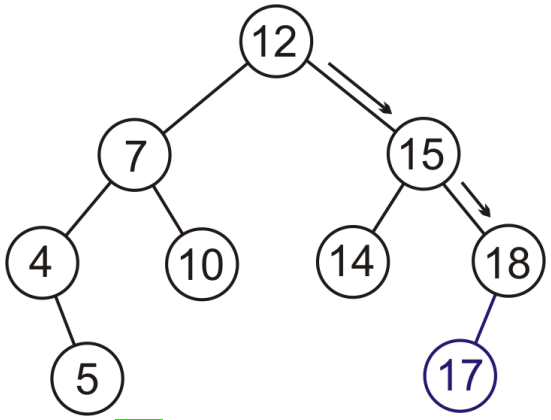
- Prvek x byl ve stromu nalezen. Tím přidávání končí, neboť prvek x už je ve stromu obsažen a u standardních vyhledávacích stromů nelze mít ve stromu stejný prvek vícekrát.

- Vyhledávání skončilo v uzlu u s prvkem c, přičemž je $x < c$ a uzel u nemá levého následníka. V tom případě přidáme ke stromu nový uzel jako levého následníka uzlu u a do něho nový prvek x vložíme.
- Vyhledávání skončilo v uzlu u s prvkem c, přičemž je $x > c$ a uzel u nemá pravého následníka. V tom případě přidáme ke stromu nový uzel jako pravého následníka uzlu u a do něho nový prvek x vložíme.

Příklad. Do binárního vyhledávacího stromu



máme vložit prvek 17. Následující obrázek ukazuje postup.



Časová složitost: $\Theta(h)$, kde h je výška vyhledávacího stromu.

Pseudokód:

```
NewNode(x)
  u ← new Node
  u.item ← x
  u.left ← u.right ← NIL
  return u

Insert(T, x)
  if T.root = NIL
    T.root ← NewNode(x)
```

```
    return true
  u ← T.root
  while true
    if x < u.item
      if u.left = NIL
        u.left ← NewNode(x)
        return true
      u ← u.left
    else
      if x > u.item
        if u.right = NIL
          u.right ← NewNode(x)
          return true
        u ← u.right
      else
        return false
```

Odebrání prvku

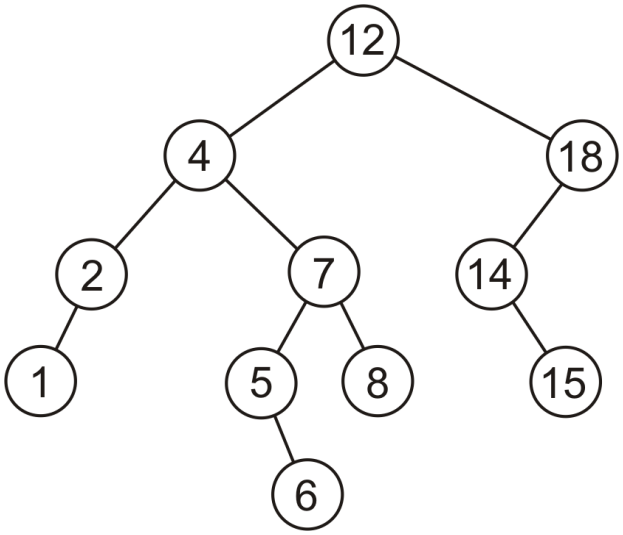
Operace odebrání prvku z binárního stromu znamená zrušení uzlu ve stromu. Nemusí to ale být uzel, ve kterém je odebíraný prvek, jak ukazuje následující popis postupu odebrání.

Označme odebíraný prvek *x*.

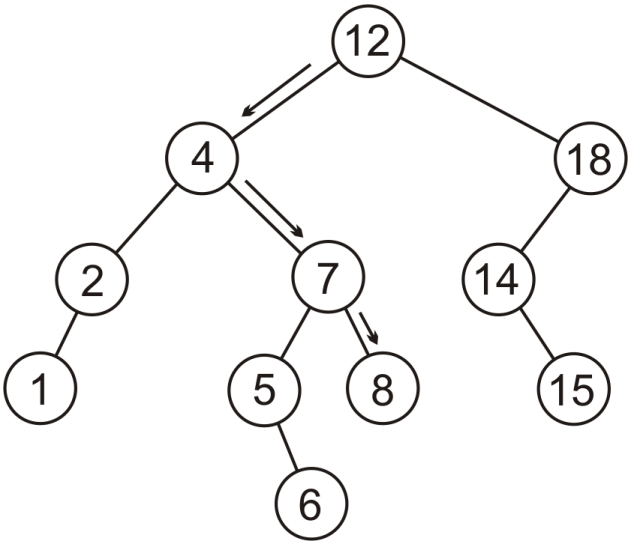
Vyhledáme prvek *x* ve stromu. Vyhledání může skončit třemi způsoby:

- Prvek *x* nebyl ve stromu nalezen – není co odebrat.
- Prvek byl nalezen v uzlu *u*, který má nejvýše jednoho následníka. Tento uzel zrušíme. Pokud rušený uzel *u* měl (jednoho) následníka, jeho následník nyní bude následníkem předchůdce rušeného uzlu *u*. Pokud rušený uzel *u* neměl předchůdce (byl kořenem), jeho následník bude novým kořenem.
- Prvek byl nalezen v uzlu *u*, který má dva následníky. V tomto případě do uzlu *u* přesuneme buďto nejpravější (největší) prvek z jeho levého podstromu anebo nejlevější (nejmenší) prvek z jeho pravého podstromu a uzel, z kterého byl prvek přesunut, zrušíme.

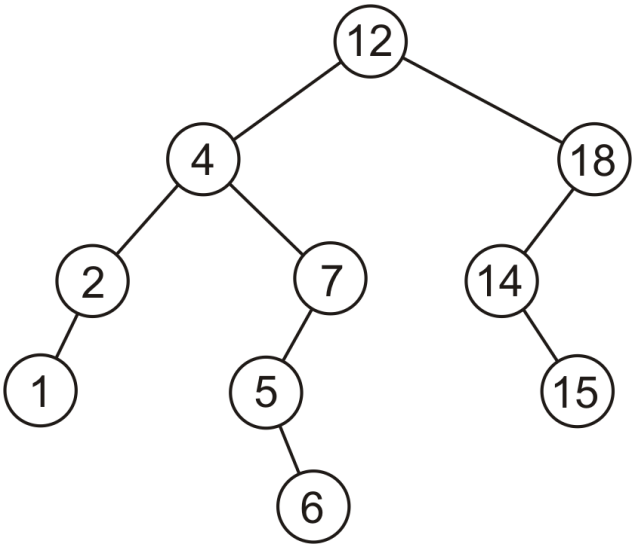
Příklad. Ze stromu



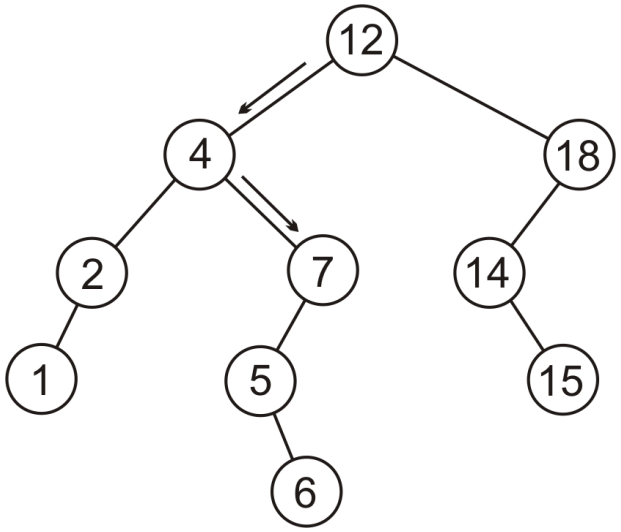
máme odebrat prvek 8.
Nejprve prvek 8 ve stromu vyhledáme.



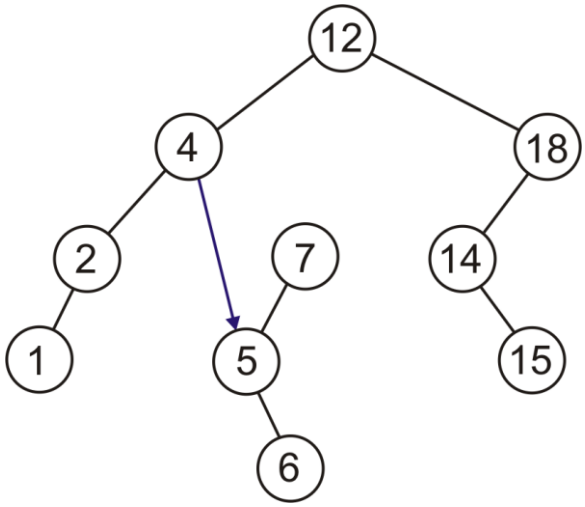
Protože prvek 8 je v uzlu, který nemá více než jednoho následníka, uzel s tímto prvkem můžeme zrušit.



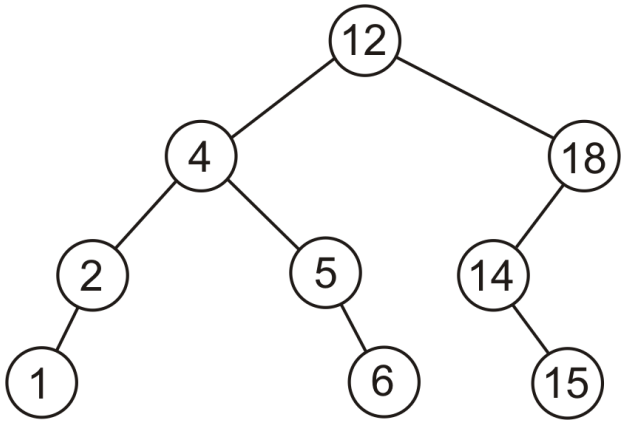
Dále máme odebrat prvek 7. Nejprve ho ve stromu vyhledáme.



Protože prvek 7 je v uzlu, který nemá více než jednoho následníka, uzel s tímto prvkem můžeme zrušit. Nejprve ale přesměrujeme odkaz v předchůdci rušeného uzlu na následníka rušeného uzlu.

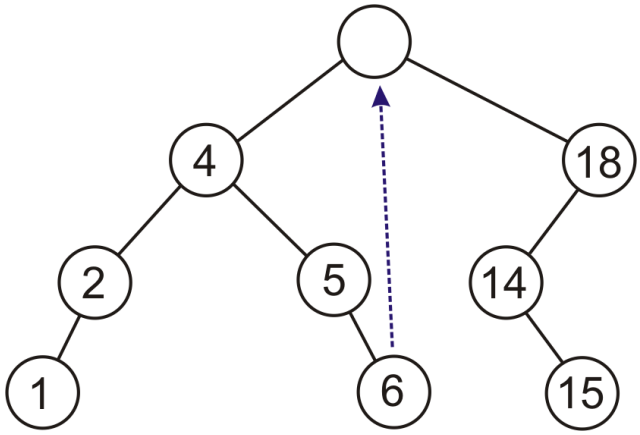


A uzel s prvkem 7 zrušíme.

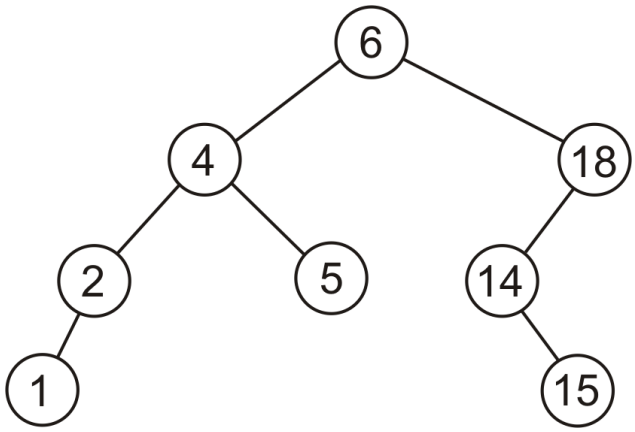


Jako další máme odebrat prvek 12. Jeho vyhledání je zde rychlé, neboť prvek je v kořenu. Uzel s tímto prvkem má dva následníky, nemůžeme ho přímo odebrat.

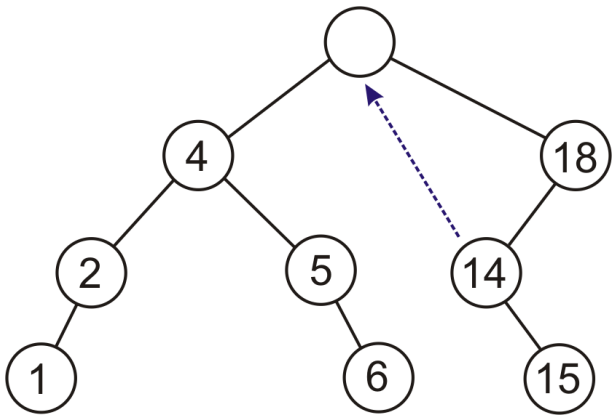
První možnost je nahradit odebíraný prvek 12 nejpravějším prvkem z levého podstromu, což je prvek 6.



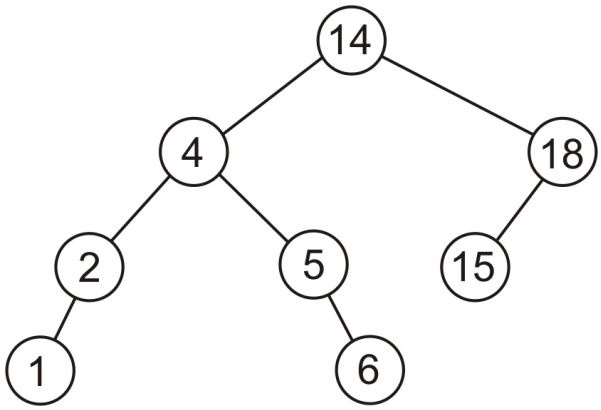
A uzel, ve kterém byl prvek 6, zrušit.



Druhá možnost zde byla nahradit odebíraný prvek 12 nejlevějším prvkem z pravého podstromu, což je prvek 14.



A uzel, ve kterém byl prvek 14, zrušit.



Časová složitost: $\Theta(h)$, kde h je výška vyhledávacího stromu.

Pseudokód:

```
Delete(T, x)
  u ← T.root
  if u = NIL
    return false
  if u.item = x
    T.root ← DeleteNode(u)
    return true
  while true
    if x < u.item
      if u.left = NIL
        return false
      if u.left.item = x
        u.left ← DeleteNode(u.left)
        return true
      u ← u.left
    else
      if u.right = NIL
        return false
      if u.right.item = x
        u.right ← DeleteNode(u.right)
        return true
      u ← u.right
DeleteNode(u)
  if u.left = NIL
```

```
    return u.right
  if u.right = NIL
    return u.left
  v ← u.right
  if v.left = NIL
    u.item ← v.item
    u.right ← v.right
    return u
  w ← v.left
  while w.left ≠ NIL
    v ← w
    w ← w.left
  u.item ← w.item
  v.left ← w.right
  return u
```