VII. Algebraické řešení algebraických rovnic.

Nejprve si musíme objasnit, co to znamená, řešit algebraickou rovnici.

Nechť $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ jsou polynomy z $T[x]$, pak zápisy

(*1*) $f(x) = 0$,

(*2*) $g(x) = h(x)$

pro nás dosud znamenaly, že $f(x)$ je nulový polynom, resp., že polynomy $g(x)$ a $h(x)$ se jako prvky oboru integrity $T[x]$ sobě rovnají. Znak "=" přitom označuje konkrétní relaci v $T[x]$ a to základní rovnost.

Algebraické rovnice nad tělesem T budeme rovněž zapisovat ve tvaru (*1*), resp. (*2*), ale symbol "=" bude mít v tomto případě jiný výraz, který si nyní objasníme.

Řešit algebraickou rovnici tvaru $f(x) = 0$, znamená nalézt všechny kořeny polynomu $f(x)$, to jest všechny takové prvky c z jistého nadtělesa T' tělesa T, pro které platí $f(c) = 0$. Každý takový prvek $c \in T'$ se nazývá řešení příslušné algebraické rovnice $f(x) = 0$. Je-li prvek c k-násobným kořenem polynomu $f(x)$, nazývá se c též k-násobným řešením rovnice $f(x) = 0$ a stupněm této rovnice rozumíme stupeň polynomu $f(x)$.

Označení $f(x) = 0$ se používá pro rovnice z historických důvodů a z kontextu bude vždy zřejmé, kdy se jedná o rovnost polynomů a kdy se jedná o algebraickou rovnici. U polynomů se x nazývá neurčitá, u rovnic budeme x nazývat neznámou.

Jelikož zápis $f(x) = g(x)$ můžeme vždy převést na tvar $f(x)-g(x) = 0$, můžeme zápis $f(x) = 0$ považovat za obecný tvar algebraické rovnice.

Úmluva :

V celé VII.kapitole bude T označovat podtěleso tělesa komplexních čísel C. Protože C je algebraicky uzavřené těleso, budou pro libovolný polynom $f(x) \in C[x]$ ležet všechna řešení algebraické rovnice $f(x) = 0$ v tělese C.

Nejdříve se budeme zabývat tzv. binomickými rovnicemi.

1. Binomické rovnice

Definice 1.1:

Rovnice tvaru

(3) $x^n - a = 0$,

kde $a \in T$, $a \neq 0$, $n \geq 1$ se nazývá binomická rovnice. Řešení rovnice (3) natýváme n-tá odmocnina z a.

Věta 1.1:

Binomická rovnice (3) má v C právě n různých řešení.

Důkaz:

Pro derivaci polynomu na levé straně rovnice (3) platí $(x^n - a)' = nx^{n-1}$. Protože polynom nx^{n-1} má jediný lořen $c = 0$ násobnosti n-1, který není kořenem polynomu $x^n - a$, má $x^n - a$ pouze jednoduché kořeny, kterých je n.

Speciálním případem binomických rovnic jsou rovnice tvaru

(4) $x^n - 1 = 0$.

Těmto rovnicím se říká rovnice pro n-té odmocniny z jedné, řešení rovnice (4) se nazývají n-té odmocniny z jedné. Těmito rovnicemi se nyní budeme zabývat podrobněji.

Příklad 1.1:

a) Nechť je dána rovnice $x^3 - 1 = 0$. Polynom $x^3 - 1$ můžeme rozložit takto: $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$. Odtud plyne, že třetí odmocniny z jedné jsou čísla 1, $\frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3})$, $\frac{1}{2}(-1 - i\sqrt{3})$. Číslo 1 je rovněž řešením rovnice $x - 1 = 0$ a je tedy první odmocninou z jedné, zbývající dvě třetí odmocniny z jedné nejsou řešením rovnice $x^n - 1 = 0$ pro $n<3$.

b) Nechť je dána rovnice $x^4 - 1 = 0$. Lehce ověříme, že tato rovnice má čtyři různá řešení $1, -1, i, -i$. Čísla 1 a -1 jsou však také řešením rovnice $x^2 - 1 = 0$. Jsou tedy nejen čtvrtými odmocninami z jedné, ale také druhými odmocninami z jedné. Avšak čísla i a -i nevyhovují žádné rovnici pro n-té odmocniny z jedné pro $n<4$.

Věta 1.2:

Jsou-li ε_1 a ε_2 n-té odmocniny z jedné, pak i prvky $\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2$ a ε_1^{-1} jsou n-té odmocniny z jedné.

Důkaz:

Jelikož $\varepsilon_1^n = 1$, $\varepsilon_2^n = 1$, pak platí také $(\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2)^n = \varepsilon_1^n \cdot \varepsilon_2^n = 1$ a $(\varepsilon_1^{-1})^n = (\varepsilon_1^n)^{-1} = 1$.

Uvažujme nyní nekonečnou posloupnost $\varepsilon_1, \varepsilon_1^2, \dots, \varepsilon_1^k, \dots$ n-tých odmocnin z jedné. Podle věty 1.1 existuje právě n různých odmocnin z jedné. Nutně proto v této posloupnosti existují takové dva prvky, pro které platí $\varepsilon^t = \varepsilon^s$, $s>t$. Jestliže $m = s-t$, platí tudíž také $\varepsilon^{s-t} = \varepsilon^m = 1$ a ε je nejen n-tá odmocnina z jedné, ale také m-tá odmocnina z jedné.

Věta 1.3:

Nechť ε je n-tá odmocnina z jedné, $\varepsilon^t = \varepsilon^s$, $s>t$ a pro žádné číslo p, $t<p<s$ neplatí $\varepsilon^t = \varepsilon^p$. Pak $m = s - t$ je nejmenší přirozené číslo, pro něž platí $\varepsilon^m = 1$.

Důkaz:

Kdyby existovalo $0<k<m$ tak, že $\varepsilon^k = 1$, pak také $\varepsilon^{t+k} = \varepsilon^t \cdot \varepsilon^k = \varepsilon^t$ a přitom platí $t<t+k<s$, což je spor s předpokladem.

Definice 1.2:

Nechť ε je n-tá odmocnina z jedné a m nejmenší přirozené číslo, pro které platí $\varepsilon^m = 1$. Pak m se nazývá index ε.

Věta 1.4:

Nechť m je index n-té odmocniny z jedné ε. Pak mezi m prvky ε^k, $\varepsilon^{k+1}, \dots, \varepsilon^{k+m-1}$ nejsou žádné dva sobě rovny.

Důkaz:

Sporem. Nechť existují taková dvě čísla p_1, p_2, $k<p_1<p_2<k+m$, pro něž platí $\varepsilon^{p_1} = \varepsilon^{p_2}$. Pak také $\varepsilon^{p_2-p_1} = 1$, kde $0<p_2-p_1<m$, což odporuje tomu, že m je index ε.

Věta 1.5:

Nechť ε je n-tá odmocnina z jedné a m její index. Pak platí $m|n$.

Důkaz:

V posloupnosti $\varepsilon, \varepsilon^2, \ldots, \varepsilon^m=1$ jsou všechny prvky navzájem různé. Pouze pro násobky indexu m platí $\varepsilon^m = \varepsilon^{2m} = \ldots = \varepsilon^{km} = 1$. Jelikož také $\varepsilon^n = 1$, musí být proto n rovno některému z násobků indexu m a tedy $m|n$.

Z příkladu 1.1 je vidět, že pro některé n-té odmocniny z jedné může být jejich index m menší než n a pro některé je jejich index m roven n. To nás přivádí k následující definici.

Definice 1.3:

Řekneme, že n-tá odmocnina z jedné je primitivní n-tá odmocnina z jedné, jestliže její index je roven n. Jestliže je její index vlastním dělitelem n, pak se nazývá n-tá neprimitivní odmocnina z jedné.

Věta 1.6:

Nechť ε je n-tá primitivní odmocnina z jedné. Pak v posloupnosti $1, \varepsilon, \varepsilon^2, \ldots, \varepsilon^{n-1}$ jsou obsaženy právě všechny n-té odmocniny z jedné.

Důkaz:

n-tých odmocnin z jedné je právě n. Jestliže ε je n-tá primitivní odmocnina z jedné, pak $1, \varepsilon, \varepsilon^2, \ldots, \varepsilon^{n-1}$ jsou rovněž n-té odmocniny z jedné, jsou navzájem různé a je jich n.

Věta 1.7:

Nechť ε je n-tá primitivní odmocnina z jedné a c jedno řešení rovnice (3), pak čísla $c, \varepsilon c, \varepsilon^2 c, \ldots, \varepsilon^{n-1} c$ jsou právě všechna řešení binomické rovnice (3).

Důkaz:

Poněvadž $\varepsilon^n = 1$, je pro $k = 0, 1, \ldots, n-1$ $(\varepsilon^k c)^n = \varepsilon^{nk} \cdot c^n = (\varepsilon^n)^k c^n = c^n = a$. Protože $c \neq 0$ a prvky $1, \varepsilon, \varepsilon^2, \ldots, \varepsilon^{n-1}$ jsou navzájem různé prvky, je jich n a tedy podle věty 1.1 platí naše tvrzení.

Nyní nás bude zajímat otázka, jak jednoduchým způsobem určit pro dané n všechna řešení rovnice $x^n - 1 = 0$ v C. Postupovat budeme takto: Kořeny polynomu $x^n - 1$ jsou obecně komplexní čísla. Proto pro jeden takový kořen ε položíme

(5) $\varepsilon = r(\cos t + i \sin t)$,

kde r a t jsou reálná čísla taková, že $0 < r$ a $0 \leq t < 2\pi$. Pro ε platí

$\varepsilon^n = 1$ a tedy podle Moivreova vzorce

(6) $r^n(\cos nt + i\sin nt) = 1$.

Ve vztahu (6) musí tedy platit $r^n = 1$, a protože r je reálné číslo kladné, je $r = 1$. Dále musí v (6) platit

(7) $\cos nt = 1$ a $\sin nt = 0$.

Rovnosti (7) jsou splněny pro všechna reálná čísla t, pro něž je $nt = 2k\pi$, kde k je libovolné celé číslo. Odtud $t = \frac{2k\pi}{n}$ a jelikož musí rovněž platit $0 \le t < 2\pi$, máme pro k právě tyto možnosti $k = 0,1,\dots,n-1$. Platí tedy věta:

Věta 1.8:

Rovnice $x^n - 1 = 0$ má v tělese komplexních čísel těchto n řešení

(8) $\varepsilon_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i\sin \frac{2k\pi}{n}$, $k = 0,1,\dots,n-1$.

Věta 1.9:

Pro každé $n>1$ existuje tolik n-tých primitivních odmocnin z jedné, kolik je přirozených čísel menších než n a nesoudělných s n.

Důkaz:

Nechť ε_k je n-tá odmocnina z jedné a m její index. Pak platí za použití Moivreovy věty a vzorce (8) $\varepsilon_k^m = \cos \frac{2k\pi m}{n} + i\sin \frac{2k\pi m}{n}$. Jelikož $\varepsilon_k^m = 1$, musí být $\frac{km}{n}$ celé číslo. Tedy $n|km$. Jestliže k a n jsou nesoudělná čísla, musí $n|m$, ale podle věty 1.5 platí $m|n$. Tedy v případě, že k a n jsou nesoudělná čísla, platí $m=n$ a ε_k je n-tá primitivní odmocnina z jedné. Jestliže n a k jsou soudělné, pak již nemusí platit $m=n$, ale může být $m\le n$ a v tomto případě je ε_k n-tá neprimitivní odmocnina z jedné.

Poznámka 1.1:

Podle věty 4.9 je tedy celkem $\varphi(n)$ n-tých primitivních odmocnin z jedné, kde $\varphi(n)$ je Eulerova funkce. Na základě platnosti vět 1.2 a 1.6 obdržíme větu:

Věta 1.10:

Množina všech n-tých odmocnin z jedné (pro pevné n) tvoří podgrupu v multiplikativní grupě komplexních čísel. Tato podgrupa je cyklickou grupou řádu n a jejím generátorem je libovolná n-tá primitivní odmocnina z jedné.

Příklad 1.2:

Určete všechny n-té odmocniny z jedné pro n=3 a n=8. Zjistěte, které z nich jsou primitivní.

Řešení:

Budeme používat věty 1.8 a 1.9.

a) $\varepsilon_0 = 1$, $\varepsilon_1 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\varepsilon_2 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Zřejmě platí $\varepsilon_1^2 = \varepsilon_2$ a $\varepsilon_2^2 = \varepsilon_1$.

b) $\varepsilon_0 = 1$,

$$\varepsilon_1 = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i),$$
$$\varepsilon_2 = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i,$$
$$\varepsilon_3 = \cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i),$$
$$\varepsilon_4 = \cos + i\sin = -1,$$
$$\varepsilon_5 = \cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1-i),$$
$$\varepsilon_6 = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = -i,$$
$$\varepsilon_7 = \cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i).$$

Primitivními osmými kořeny z jedné jsou $\varepsilon_1, \varepsilon_3, \varepsilon_5$ a ε_7. Index ε_0 je jedna, ε_4 má index dva a $\varepsilon_2, \varepsilon_6$ mají index čtyři.

Předchozí věty nám říkají, jak najít všechna řešení binomické rovnice stupně $n\geq 1$ s koeficienty z libovolného podtělesa T tělesa komplexních čísel C. Nyní nás bude zajímat otázka, u kterých algebraických rovnic můžeme jejich řešení převést na řešení konečného počtu jistých binomických rovnic a za použití konečného počtu operací, proveditelných v tělese C. Tj. operací sčítání, odčítaní, násobení a dělení nenulovým prvkem z C. Souhrně takovým operacím budeme říkat racionální operace. Nyní již můžeme vyslovit definici algebraického řešení algebraické rovnice. Při tom nás zajímají algebraické rovnice s koeficienty z některého podtělesa T tělesa komplexních čísel C. Pak totiž také všechna řešení algebraické rovnice leží v C.

2. Algebraické řešení algebraických rovnic.

Definice 2.1:

Nechť f(x) je nenulový polynom nad tělesem $T\subseteq C$. Řekneme, že rovnice $f(x) = 0$ je algebraicky řešitelná, právě když existuje konečná posloupnost binomických rovnic

$$
\begin{array}{ll}
 & y^{n_1} - b_1 = 0\,, \\
(1) & y^{n_2} - b_2 = 0\,, \\
 & \text{---------------} \\
 & y^{n_k} - b_k = 0\,,
\end{array}
$$

taková, že

a) koeficient i-té rovnice b_i $(i = 1,2,\dots,k)$ je prvek, který vznikne provedením konečného počtu racionálních operací na koeficienty polynomu $f(x)$ a řešení předcházejících rovnic v (1),

b) každé řešení rovnice $f(x) = 0$ určíme provedím konečného počtu racionálních operací na koeficienty polynomu $f(x)$ a na řešení rovnic (1).

Posloupnost binomických rovnic (1) se nazývá <u>řetězec algebraické řešitelnosti rovnice</u> $f(x) = 0$.

Objasněme si tuto definici na příkladě.

<u>Příklad 2.1:</u>

Ověřte algebraickou řešitelnost rovnice $(2x^5- 3)^3- 1 = 0$.

Řešení:

Proveďme substituci $2x^5- 3 = y$, pak vidíme, že prvním úkolem bude řešit binomickou rovnici tvaru $y^3- 1 = 0$. Podle věty 1.1 má tato rovnice právě tři řešení c_1,c_2,c_3 (jsou to třetí odmocniny z jedné). Řešení rovnice $(2x^5- 3)^3- 1 = 0$ pak obdržíme jako řešení tří binomických rovnic tvaru $x^5- \frac{1}{2}(3 + c_i) = 0$, $(i = 1,2,3)$. Tedy lze nalézt řetězec algebraické řešitelnosti rovnice $(2x^5- 3)^3- 1 = 0$ a daná rovnice je algebraicky řešitelná. Tento řetězec je posloupnost čtyř binomických rovnic tvaru

$$
\begin{aligned}
&y^3- 1 = 0,\\
&y^5- \frac{1}{2}(3 + c_1) = 0,\\
&y^5- \frac{1}{2}(3 + c_2) = 0,\\
&y^5- \frac{1}{2}(3 + c_3) = 0,
\end{aligned}
$$

kde c_1,c_2,c_3 jsou všechna řešení rovnice $y^3- 1 = 0$.

<u>Poznámka 2.1:</u>

Řešení binomické rovnice $x^n- a = 0$, $a\neq 0$ jsme nazvali n-tá odmocnina z a. Nadále bude výhodné pro n-tou odmocninu z a používat symbolu $\sqrt[n]{a}$. Protože však podle věty 4.1 je n-tých odmocnin z a právě n, není symbol $\sqrt[n]{a}$ určen jednoznačně, ale značí libovolnou n-tou odmocninu z a. Podle věty 4.7 všechny n-té odmocniny z a jsou $\sqrt[n]{a}, \varepsilon.\sqrt[n]{a}, \varepsilon^2.\sqrt[n]{a}, \dots, \varepsilon^{n-1}.\sqrt[n]{a}$, kde ε je n-tá primitivní odmocnina z jedné a $\sqrt[n]{a}$ je pevná n-tá odmocnina z a.

Řešení rovnice lineární.

Věta 2.1:

Mějme rovnici $a_0x + a_1 = 0$, $a_0 \neq 0$. Tato rovnice má právě jedno řešení $c = -\dfrac{a_1}{a_0}$.

Důkaz: Zřejmý.

Algebraické řešení rovnice kvadratické.

Věta 2.2:

Každá algebraická rovnice druhého stupně je algebraicky řešitelná.

Důkaz:

Nechť je dána algebraická rovnice

(2) $a_0x^2 + a_1x + a_2 = 0$, $a_0 \neq 0$.

Upravíme ji na tvar (dělením koeficientem a_0)

(3) $x^2 + px + q = 0$, kde $p = \dfrac{a_1}{a_0}$, $q = \dfrac{a_2}{a_0}$.

Polynom na levé straně (3) doplníme na čtverec a obdržíme

$(x + \frac{p}{2})^2 + q - (\frac{p}{2})^2 = 0$. Položme $x + \frac{p}{2} = z$.

Označíme-li y_1, y_2 řešení binomické rovnice

(4) $z^2 - b = 0$, kde $b = (\frac{p}{2})^2 - q$,

jsou řešení rovnice (3) rovna číslům $c_1 = -\frac{p}{2} + y_1$, $c_2 = -\frac{p}{2} + y_2$. Odtud je ihned vidět, že rovnice (3) a tedy také (2) je vždy algebraicky řešitelná, a že její řetězec algebraické řešitelnosti se skládá z jedné binomické rovnice.

Důsledek:

Jestliže jedno řešení rovnice (4) oynačíme $y_1 = \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}$, musí podle věty 1.7 druhé být $y_2 = -\sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}$. Řešení dané rovnice (3) mají pak tvar $c_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}$ a $c_2 = -\frac{p}{2} -$

$-\sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}$. Pro rovnici (2) obdržíme po dosazení a úpravě

$$(5)\quad c_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}}{2a_0},$$

což známe ze střední školy.

Podle příkladu 3.10 z VI. kapitoly vidíme, že diskriminant kvadratického polynomu je $D_2(c_1, c_2) = (a_1^2 - 4a_0a_2)$, resp. $D_2(c_1, c_2) = p^2 - 4q$.

Můžeme tedy rovnost (5) přepsat na tvar

$$(6)\quad c_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{D_2}}{2}.$$

Přitom víme, že kvadratický polynom má jeden dvojnásobný kořen právě tehdy, když $D_2 = 0$. Pro reálné koeficienty platí věta:

Věta 2.3:

Kvadratická rovnice s reálnými koeficienty má dvě reálná řešení různá, jestliže $D_2 > 0$, má dvě imaginární řešení komplexně sdružená, jestliže $D_2 < 0$. V případě, že $D_2 = 0$ má daná rovnice jedno reálné řešení dvojnásobné.

Důkaz:

Plyne ihned ze vzorců (5).

Příklad 2.2:

Najděte řešení kvadratické rovnice $x^2 - (3 + 2i)x + (5 + i) = 0$.

Řešení:

Zde máme $p = -(3 + 2i)$, $q = 5 + i$, $D_2 = (3 + 2i)^2 - 4(5 + i) = -15 + 8i$ a řešení jsou $c_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{D_2}}{2} = \frac{(3+2i) \pm \sqrt{-15+8i}}{2}$.

Nyní hledáme komplexní číslo $t_1 + t_2 i$, jehož druhá mocnina je rovna komplexnímu číslu $-15 + 8i = D_2$. Tedy $(t_1 + t_2 i)^2 = -15 + 8i$. Odtud $(t_1^2 - t_2^2) + 2t_1t_2 i = -15 + 8i$. Porovnáme-li reálné a imaginární části, dostáváme $t_1^2 - t_2^2 = -15$ a $t_1 t_2 = 4$. Jelikož $t_1, t_2 \in R$, je $t_1 \neq 0$ i $t_2 \neq 0$. Nyní vypočteme $t_2 = \frac{4}{t_1}$ a dosadíme do první rovnice $t_1^2 - \frac{16}{t_1^2} = -15$. Tuto rovnici vynásobíme t_1^2 a provedeme substituci $t_1^2 = z$. Obdržíme kvadratickou rovnici $z^2 + 15z - 16 = 0$, jejíž řešení jsou čísla $c_1 = 1$ a $c_2 = -16$. Řešení $c_2 = -16$ nevyhovuje, protože $t_1 \in R$. Tedy $t_1^2 = 1$ a hledaná komplexní čísla jsou $(1 + 4i)$ a $(-1 - 4i)$. Řešení dané kvadratické rovnice s komplexními koeficienty jsou $\frac{(3+2i)\pm(1+4i)}{2}$, čili $c_1 = 2 + 3i$ a $c_2 = 1 - i$. O správnosti řešení se můžeme přesvědčit zkouškou, dosazením do dané kvadratické rovnice.

Snadný výpočet druhé odmocniny z komplexního čísla $a+bi$ nám umožní následující lemma:

Lemma 2.1:

Nechť $a+bi \in C$, pak platí:

$$(7) \quad \sqrt{a+bi} = \pm\left(\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2+b^2} + a\right)} + \varepsilon\cdot i\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2+b^2} - a\right)}\right),$$

kde pro $b\geq 0$ je $\varepsilon=1$ a pro $b<0$ je $\varepsilon = -1$.

Důkaz:

Pro $b=0$ je tvrzení zřejmé. Předpokládejme tedy, že $b\neq 0$. Máme najít taková $x,y \in R$, aby platilo $(x+iy)^2 = a+bi$. Umocněním a porovnáním reálných a imaginárních částí dostaname:

$$(8) \quad \begin{aligned} x^2 - y^2 &= a \\ 2xy &= b. \end{aligned}$$

Z čehož plyne:

$$\begin{aligned} x^2 + (-y^2) &= a \\ x^2\cdot(-y^2) &= -\frac{b^2}{4}. \end{aligned}$$

To znamená, že veličiny x^2 a $(-y^2)$ jsou řešením kvadratické rovnice:

$$(9) \quad z^2 - az - \frac{b^2}{4} = 0.$$

Řešením rovnice (9) jsou $\frac{1}{2}\left(a \pm \sqrt{a^2+b^2}\right)$. Jelikož $x^2 \geq 0$, , $-y^2 \leq 0$ a $\sqrt{a^2+b^2} > |a|$, musí nutně platit:

$$x^2 = \frac{1}{2}\left(a + \sqrt{a^2+b^2}\right), \quad -y^2 = \frac{1}{2}\left(a - \sqrt{a^2+b^2}\right).$$

Odtud dostaneme:

$$(10) \quad x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}\left(a + \sqrt{a^2+b^2}\right)}, \quad y = \pm\sqrt{\frac{1}{2}\left(-a + \sqrt{a^2+b^2}\right)}.$$

Jelikož však musí také platit vztahy (8), t.j. $2xy = b$, zvolíme-li za x jednu z daných možností v (10), je y jednoznačně určeno ze vztahu $y = \frac{b}{2x}$. Tedy pro $b>0$ platí:

$$x+iy = \pm\left(\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2+b^2}+a\right)} + i\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2+b^2}-a\right)}\right),$$

a pro $b<0$ platí:

$$x+iy = \pm\left(\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2+b^2}+a\right)} - i\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2+b^2}-a\right)}\right).$$

Z posledních dvou vztahů dostáváme tvrzení (7).

Příklad 2.3:

Podle vztahů (7) spočítejte $\sqrt{-15+8i}$.

Řešení:

$$\sqrt{-15+8i} = \pm\left(\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{289}-15\right)} + i\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{289}+15\right)}\right) =$$

$$= \pm\left(\sqrt{1} + i\sqrt{16}\right) = \pm(1+4i).$$

Algebraické řešení kubické rovnice.

Věta 2.4:

Každá algebraická rovnice třetího stupně je algebraicky řešitelná.

Důkaz:

Nechť je dána algebraická rovnice třetího stupně

(11) $a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$, $a_0 \neq 0$.

Tuto rovnici vydělíme číslem a_0 a poté provedeme substituci

(12) $x = y - \dfrac{a_1}{3a_0}$, obdržíme redukovanou rovnici ve tvaru

(13) $y^3 + py + q = 0$,

kde $p = \dfrac{a_2}{a_0} - \dfrac{a_1}{3a_0}$, $q = \dfrac{a_3}{a_0} - \dfrac{a_2a_1}{3a_0^2} + \dfrac{2a_1^3}{27a_0^3}$.

Pro $p = 0$ je již rovnice (13) binomickou rovnicí a poněvadž díky substituci (12) lze pomocí jejích řešení racionálně vyjádřit řešení (11), tvoří (13) řetězec algebraické řešitelnosti pro rovnici (11).

Dále tedy předpokládejme $p\neq0$. Důkaz provedeme tak, že nalezneme explicitní vyjádření řešení redukované rovnice (13) (a tím také rovnice (11)) za pomocí racionálních operací s jejími koeficienty a řešení konečného počtu binomických rovnic.

Zavedeme dvě nové neznámé u,v splňující vztah $y = u + v$. Dosazením do (13) a úpravou obdržíme

(14) $(u^3 + v^3 + q) + (3uv + p)(u + v) = 0$.

Protože nové neznámé jsou dvě, můžeme je vázat dalším vztahem. Položme

(15) $3uv + p = 0$.

Tedy platí vztah $uv = -\frac{p}{3}$ a odtud dostáváme

(16) $u^3v^3 = -\frac{p^3}{27}$.

Po dosazení (15) do (14) obdržíme $u^3 + v^3 + q = 0$ a odtud

(17) $u^3 + v^3 = -q$.

Podle Vietovy věty je zřejmé, že u^3, v^3 jsou řešením následující rovnice (této rovnici říkáme <u>kvadratická</u> <u>resolventa</u> <u>kubické</u> <u>rovnice</u>):

(18) $z^2 + qz - \frac{p^3}{27} = 0$.

Její řešení z_1, z_2 jsou určena vztahy

(19)
$$u^3 = z_1 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \,,$$
$$v^3 = z_2 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \,.$$

Podle věty 1.7 jsou řešení binomických rovnic v (19) určena takto: Nechť ε je třetí primitivní odmocnina z 1, pak

(20)
$$u_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \,, \quad u_2 = \varepsilon\cdot u_1 \,, \quad u_3 = \varepsilon^2\cdot u_1 \,,$$
$$v_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \,, \quad v_2 = \varepsilon\cdot v_1 \,, \quad v_3 = \varepsilon^2\cdot v_1 \,.$$

Dostáváme tak 9 možností pro $y = u_i + v_j$ $(i, j = 1,2,3)$. Vzhledem k tomu, že u_i, v_j musí vyhovovat vztahu (16), zvolme u_i libovolně, třeba u_1 a za v_1 vezměme tu z třetích odmocnin ve (20), pro kterou platí $u_1 \cdot v_1 = -\frac{p}{3}$.

Z devíti uvažovaných rovností pak vyhovují vztahu (16) pouze tyto tři:

$$u_1 \cdot v_1 = -\frac{p}{3} \,,$$
$$(\varepsilon\cdot u_1)\cdot(\varepsilon^2\cdot v_1) = \varepsilon^3 \cdot u_1 \cdot v_1 = u_1 \cdot v_1 = -\frac{p}{3} \,,$$
$$(\varepsilon^2\cdot u_1)\cdot(\varepsilon\cdot v_1) = \varepsilon^3 \cdot u_1 \cdot v_1 = u_1 \cdot v_1 = -\frac{p}{3} \,.$$

Pro řešení redukované kubické rovnice (13) dostáváme tři explicitní vyjádření y_1, y_2, y_3 ve tvaru:

(21) $y_1 = u_1 + v_1$, $y_2 = \varepsilon\cdot u_1 + \varepsilon^2\cdot v_1$, $y_3 = \varepsilon^2\cdot u_1 + \varepsilon\cdot v_1$.

(Zde $\varepsilon = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$, $\varepsilon^2 = \bar{\varepsilon}$.)

Použitím substituce (12) pak obdržíme tři explicitní vyjádření řešení x_1, x_2, x_3 rovnice (11). Vzorcům se říká Cardanovy vzorce. (Hieronimo Cardano je objevil již 1545).

V příkladu 3.10 předchozí kapitoly vidíme, že polynom $f(x) = x^3 + px + q$ má diskriminant

$$D_3(f(x)) = -(4p^3 + 27q^2) = -4\cdot 27\left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}\right).$$

Označme $D = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$. Jestliže D=0 má redukovaná rovnice (13) jeden kořen dvojnásobný. V případě, že všechny koeficienty rovnice (13) jsou reálná čísla, je nutně tento kořen také reálné číslo.

Věta 2.5:

Má-li rovnice (13) reálné koeficienty a je-li D>0, je jeden kořen reálný a dva jsou komplexně sdružené. Je-li D<0, jsou všechny tři kořeny reálné.

Důkaz:

Je-li D>0 , má kvadratická resolventa (18) reálné kořeny u_1^3, v_1^3 a tedy také $u_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{D}}$, $v_1 = -\frac{p}{3u_1}$ a $y_1 = u_1 + v_1$ jsou reálná čísla. Snadným výpočtem zjistíme, že $y_2 = \varepsilon\cdot u_1 + \varepsilon^2\cdot v_1$, $y_3 = \varepsilon^2\cdot u_1 + \varepsilon\cdot v_1$ jsou čísla komplexně sdružená. (Položme $\varepsilon = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$, $\varepsilon^2 = \bar{\varepsilon}$.)

Je-li D<0, jsou kořeny kvadratické resolventy (18) komplexně sdružená čísla, t.j. $z_2 = \bar{z}_1$. Pak u_1, v_1 jsou komplexní čísla a podle Moivreovy věty platí $v_1 = \varepsilon\cdot\bar{u}_1$ nebo $v_1 = \bar{u}_1$. Vzhledem k platnosti vztahu $u_1\cdot v_1 = -\frac{p}{3}$, musí být $v_1 = \bar{u}_1$, neboť $u_1\cdot\bar{u}_1$ je číslo reálné. Kořeny rovnice (13) jsou pak, $y_1 = u_1 + \bar{u}_1$, $y_2 = \varepsilon\cdot u_1 + \varepsilon^2\cdot\bar{u}_1$, $y_3 = \varepsilon^2\cdot u_1 + \varepsilon\cdot\bar{u}_1$, což jsou reálná čísla, protože $\varepsilon^2 = \bar{\varepsilon}$.

Příklad 2.4:

Najděte všechna řešení algebraické rovnice

(22) $x^3 + 3x^2 - 6x - 36 = 0$.

Řešení:

Danou rovnici nejprve upravíme pomocí substituce $x = y - \frac{a_1}{3a_0} = y - 1$ na redukovaný tvar. Koeficienty redukované rovnice vypočítáme buďto přímým dosazením do rovnice (22), nebo s výhodou použijeme Hornerova schematu. Použijeme druhou možnost.

-1	1	3	-6	-36
	1	2	-8	-28
	1	1	-9	
	1	0		
	1			

Tedy redukovaná rovnice má tvar $y^3 - 9y - 28 = 0$.

Jelikož $D = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = 196 - 27 = 169 > 0$, je jedno řešení rovnice (22) reálné a dvě řešení jsou komplexně sdružená čísla. V našem případě totiž máme $p = -9$ a $q = -28$. Podle Cardanových vzorců dostáváme tato řešení redukované rovnice:

$$y_1 = \sqrt[3]{14 + \sqrt{169}} + \sqrt[3]{14 - \sqrt{169}} = \sqrt[3]{27} + \sqrt[3]{1} = 4,$$

$$y_2 = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot\sqrt[3]{14 + \sqrt{169}} + \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot\sqrt[3]{14 - \sqrt{169}} = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot 3 + \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot 1 = -2 + i\sqrt{3},$$

$$y_3 = \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot\sqrt[3]{14 + \sqrt{169}} + \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot\sqrt[3]{14 - \sqrt{169}} = \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot 3 + \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot 1 = -2 - i\sqrt{3}.$$

Za použití substituce $x = y-1$ obdržíme řešení dané rovnice (22): 3, $-3 + i\sqrt{3}$, $-3 - i\sqrt{3}$.

I když v příkladu 2.4 jsme bez obtíží nalezli pomocí Cardanových vzorců všechna řešení zadané rovnice, není tomu tak vždy a pro číselný výpočet řešení kubické rovnice se Cardanovy vzorce prakticky nedají použít. V praxi se místo toho používají tzv. numerické metody pro výpočet řešení dané algebraické rovnice. Tyto metody se přitom dají aplikovat i na rovnice, které nejsou nutně algebraické. Otázka numerických metod je velice obsáhlá a není obsahem tohoto skripta. Zejména se vzorce (21) nedají prakticky použít v případě, že D<0. Což si ukážeme na konkrétním příkladě.

Příklad 2.5:

Najděte všechna řešení rovnice

(23) $x^3 - 7x - 6 = 0$.

Řešení:

V tomto případě D<0. Rovnice (23) má tedy všechny tři kořeny reálné různé. Snadno se ověří, že řešení rovnice (23) jsou čísla -1,-2,-3. Ověření můžeme snadno provést např. Hornerovým schematem. Přitom však podle vzorců (21) máme:

$$y_1 = \sqrt[3]{3 + i\frac{10}{9}\sqrt{3}} + \sqrt[3]{3 - i\frac{10}{9}\sqrt{3}},$$

$$y_2 = \varepsilon\cdot\sqrt[3]{3 + i\frac{10}{9}\sqrt{3}} + \varepsilon^2\cdot\sqrt[3]{3 - i\frac{10}{9}\sqrt{3}},$$

$$y_3 = \varepsilon^2\cdot\sqrt[3]{3 + i\frac{10}{9}\sqrt{3}} + \varepsilon\cdot\sqrt[3]{3 - i\frac{10}{9}\sqrt{3}}.$$

Cardanovy vzorce určují tedy reálná řešení rovnice (23) ve formě imaginární a tudíž jsou nevhodné.

Poznámka 2.2:

Případ kubické rovnice s reálnými koeficienty a kladném diskriminantu byl nazván casus ireducibilis kubické rovnice. V tomto případě se s výhodou popužívá tzv. goniometrického řešení kubické rovnice, které je uvedeno např. v [7] str.444 nebo [9] str.119.

Pro algebraické řešení algebraických rovnic 4. stupně platí věta:

Věta 2.6:

Každá algebraická rovnice 4. stupně je algebraicky řešitelná.

Důkaz:

Viz [3] str. 244.

Poznámka 2.3:

Při algebraickém řešení algebraických rovnic 4. stupně se setkáváme ještě s většími potížemi než u Cardanových vzorců a proto se v praxi používají numerické metody.

Věty 2.2 , 2.4 , a 2.6 mají však pro algebru velký význam teoretický. Vyvstává totiž otázka, zda obdobné věty také neplatí pro n>4. Touto otázkou se zabývali význační matematici, jako např. A.L.Cauchy (1789-1857), N.H.Abel (1802-1827) a E.Galois(1811-1832). E.Galois zavedl pojem grupy algebraické rovnice (tzv. Galoisova grupa) a skutečnost, zda se nějaká algebraická rovnice dá, či nedá algebraicky řešit, závisí na vlastnostech této grupy. Dokázal, že pro každé $n>4$ existují algebraické rovnice, jejichž Galoisova grupa tyto vlastnosti nemá. To znamená, že pro každé $n\geq 5$ existuje algebraická rovnice stupně n, která není algebraicky řešitelná. Tím ovšem není řečeno, že by některé algebraické rovnice (speciální) stupňů vyšších než čtyři, nebyly algebraicky řešitelné. Např. platí:

Věta 2.7:

Rovnice tvaru

(24) $a_0x^{mn}+a_1x^{(m-1)n}+ \dots + a_{m-1}x^n+ a_m = 0$, $a_0\neq 0$, $m,n\in N$,

v níž je $1\leq m<5$ je algebraicky řešitelná.

Důkaz:

Substitucí $y = x^n$ převedeme rovnici (24) na tvar

(25) $a_0y^m+a_1y^{m-1}+ \dots + a_{m-1}y + a_m = 0$.

Je-li $m<5$, víme, že rovnice (25) je algebraicky řešitelná. Označíme-li $c_1,c_2,\dots,c_m$ všechna řešení rovnice (25), skládá se řetězec algebraické řešitelnosti rovnice (24) z řetězce algebraické řešitelnosti rovnice (25) a dále z m binomických rovnic tvaru

$$z^n- c_1 = 0 ,$$
$$z^n- c_2 = 0 ,$$

$$z^n- c_m = 0 .$$

Tudíž rovnice (24) je algebraicky řešitelná.

Jinými typy algebraických rovnic, které jsou algebraicky řešitelné pro stupeň $n\geq 5$, jsou tzv. reciproké rovnice. Těmto rovnicím věnujeme závěr kapitoly.

3. Reciproké rovnice

Definice 3.1:

Nechť je dána rovnice

(1) $a_0x^n+a_1x^{n-1}+ \dots + a_{n-1}x + a_n = 0$, $a_0\neq 0$.

Řekneme, že tato rovnice je <u>reciprokou rovnicí 1. druhu</u>, právě když

(2) $a_0 = a_n$, $a_1 = a_{n-1}, \dots$, obecně $a_k = a_{n-k}$, $k = 0,1,\dots,n$.
Jestliže v (1) platí

(3) $a_0 = -a_n$, $a_1 = -a_{n-1}, \dots$, obecně $a_k = -a_{n-k}$, $k = 0,1,\dots,n$,
nazveme rovnici (1) <u>reciprokou rovnicí 2. druhu</u>.

Polynom $f(x)$ na levé straně rovnice (1) se nazývá <u>reciproký polynom 1. druhu</u>, resp. <u>2. druhu</u>, jestliže pro jeho koeficienty platí vztahy (2) resp. (3).

<u>Poznámka 3.1:</u>

a) Reciproká rovnice nemůže mít za řešení nikdy číslo 0, neboť $a_0 \neq 0$ a $|a_n| = |a_0| \neq 0$.

b) Reciproká rovnice 2. druhu a sudého stupně $n=2m$ má člen $a_m = 0$. Neboť platí $a_m = -a_{2m-m} = -a_m$ a tedy $a_m = 0$.

<u>Věta 3.1:</u>

Má-li reciproká rovnice za řešení číslo c, má též za řešení číslo $\frac{1}{c}$.

Důkaz:

Jelikož c je řešením reciproké rovnice (1), platí

$a_0c^n + a_1c^{n-1} + \dots + a_{n-1}c + a_n = 0$, $a_k = \pm a_{n-k}$, $k = 0,1,\dots,n$.

Jelikož $c \neq 0$, můžeme obě strany předchozí rovnice vydělit c^n a obdržíme $a_0 + a_1\frac{1}{c} + \dots + a_{n-1}\left(\frac{1}{c}\right)^{n-1} + a_n\left(\frac{1}{c}\right)^n = 0$, $a_k = \pm a_{n-k}$ pro $k = 0,1,\dots,n$. Z posledního vztahu plyne, že také číslo $\frac{1}{c}$ je řešením rovnice (1).

Platí také věta obrácená:

<u>Věta 3.2:</u>

Má-li algebraická rovnice s každým svým řešením c za řešení také číslo $\frac{1}{c}$, pak je reciproká.

Důkaz:

Daná rovnice nechť má tvar

(4) $x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0$.

Použijeme vztahů mezi koeficienty a kořeny polynomu $f(x)$ na levé straně rovnice (4). Tento polynom můžeme psát takto:

$f(x) = x^n - s_1(c_1,c_2,\dots,c_n)x^{n-1} + \dots + (-1)^{n-1}s_{n-1}(c_1,c_2,\dots,c_n)x +$

$+ (-1)^n s_n(c_1,c_2,\dots,c_n)$,

kde $c_1,c_2,\dots,c_n$ jsou kořeny polynomu $f(x)$. Jelikož podle předpokladu má $f(x)$ také kořeny $\frac{1}{c_1}, \frac{1}{c_2}, \dots, \frac{1}{c_n}$, musí se tyto, až na pořadí, rovnat kořenům $c_1,c_2,\dots,c_n$ a tedy platí $s_k(\frac{1}{c_1}, \frac{1}{c_2}, \dots, \frac{1}{c_n}) = s_k(c_1,c_2,\dots,c_n)$ pro $k = 1,2,\dots,n$.

Protože polynom $f(x)$ n-tého stupně má podle základní věty algebry právě n kořenů.

Jestliže $k = n$, pak $c_1c_2\dots c_n = \frac{1}{c_1}\frac{1}{c_2}\dots\frac{1}{c_n}$ a odtud $(c_1c_2\dots c_n)^2 = 1$ a $s_n(c_1,c_2,\dots,c_n) = c_1.c_2.\dots.c_n = \pm 1$. Dále zřejmě platí (podle vlastností elementárních symetrických polynomů) $s_k(c_1,c_2,\dots,c_n) = \Sigma^n c_1c_2\dots c_k = c_1c_2\dots c_n \cdot$ $\cdot\Sigma^n \frac{1}{c_1}\frac{1}{c_2}\dots\frac{1}{c_{n-k}} = \pm 1\cdot s_{n-k}(\frac{1}{c_1}\frac{1}{c_2}\dots\frac{1}{c_n}) =$ $= \pm 1\cdot s_{n-k}(c_1,c_2,\dots,c_n)$. Pro každé $k = 1,2,\dots,n$ tedy u rovnice (4) platí $a_k = \pm a_{n-k}$ a $a_n = \pm 1$. daná rovnice je reciproká.

Věta 3.3:

Nechť pro tři polynomy $f(x),g(x),h(x)$ platí vztah

(5) $f(x) = g(x)\cdot h(x)$.

Jsou-li dva z polynomů $f(x),g(x),h(x)$ reciproké, je také i třetí z nich reciproký.

Důkaz:

Tvrzení plyne z vět 3.1 a 3.2 , když v (5) rozložíme polynomy $f(x),g(x),h(x)$ v součin kořenových činitelů a uvědomíme si, že každý z rozkladů je až na pořadí činitelů určen jednoznačně.

Věta 3.4:

Každý reciproký polynom 1. druhu lichého stupně a každý reciproký polynom 2. druhu sudého stupně má kořen -1. Každý reciproký polynom 2. druhu má kořen 1.

Odstraníme-li v reciprokém polynomu všechny kořenové činitele $(x+1)$ a $(x-1)$, obdržíme reciproký polynom 1. druhu sudého stupně.

Důkaz:

Tvrzení o kořenech 1 a -1 obdržíme ihned z podmínek (2) a (3), dosadíme-li za x do $f(x)$ číslo 1 nebo -1. Prakticky se to provádí použitím Hornerova schematu.

Nechť polynom $f(x)$ má kořen 1 k-násobný a kořen -1 l-násobný. Vydělíme-li polynom $f(x)$ kořenovými činiteli $(x-1)^k$ a $(x+1)^l$, dostaneme podle věty 3.2 opět reciproký polynom $g(x)$, v jehož rozkladu se již nevyskytuje $(x-1)$ ani $(x+1)$. Podle toho, co jsme právě dokázali, je $g(x)$ reciproký polynom 1. druhu a sudého stupně.

Řešení reciproké rovnice 1. druhu sudého stupně lze převést na řešení rovnice (ne nutně reciproké) stupně polovičního podle této věty:

Věta 3.5:
Nechť
$f(x)=a_0x^{2k}+a_1x^{2k-1}+\dots+a_{k-1}x^{k+1}+a_kx^k+a_{k-1}x^{k-1}+\dots+a_1x+a_0$
je reciproký polynom 1. druhu sudého stupně $n=2k$. Pak $\frac{1}{x^k}f(x)$ se rovná jistému polynomu $g(y)$ stupně k-tého, kde $y = x + \frac{1}{x}$.

Důkaz:
Polynom $f(x)$ vydělíme x^k (to můžeme, protože reciproký polynom nemá za kořen číslo 0) a stejné koeficienty vytkněmě před závorku podle distributivního zákona. Obdržíme tak

$$\frac{1}{x^k}f(x) = a_0\left(x^k+\frac{1}{x^k}\right) + a_1\left(x^{k-1}+\frac{1}{x^{k-1}}\right) +\dots+ a_{k-1}\left(x + \frac{1}{x}\right) + a_k.$$

Proveďme substituci $x + \frac{1}{x} = y$. Věta bude dokázána, když dokážeme pro každé celé nezáporné i, že $x^i+\frac{1}{x^i}$ je polynom v y stupně i. Položme

(6) $x^i+\frac{1}{x^i} = h_i(y)$, $i = 0,1,2,\dots,n.$

Pro $i = 0,1$ tvrzení platí, protože $x^0+\frac{1}{x^0} = 2$, $x + \frac{1}{x} = y$.
Předpokládejme, že vztah (6) platí pro všechna celá nezáporná čísla menší nebo rovna i $(i\geq1)$. Vynásobím-li (6) výrazem $x + \frac{1}{x}$, dostaneme $x^{i+1}+\frac{1}{x^{i+1}} + x^{i-1}+\frac{1}{x^{i-1}} = yh_i(y)$ a odtud

(7) $x^{i+1}+\frac{1}{x^{i+1}} = yh_i(y) - h_{i-1}(y).$

Tvrzení je tedy správné i pro $i+1$ a proto platí pro každé celé nezáporné číslo i.

Poznámka 3.2:

Z rekurentního vzorce (7) postupně dostáváme:

$$x + \frac{1}{x} = y\,,$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2\,,$$

$$(8) \qquad x^3 + \frac{1}{x^3} = y^3 - 3y\,,$$

$$x^4 + \frac{1}{x^4} = y^4 - 4y^2 + 2,$$

$$x^5 + \frac{1}{x^5} = y^5 - 5y^3 + 5y\,.$$

Těchto vztahů se používá při řešení reciprokých rovnic často. Mohli bychom podle (7) pokračovat i pro $n>5$, ale pro naše účely vystačíme se vztahy (8).

Věta 3.6:

Zavedeme-li do reciproké rovnice (1), která je 1. druhu a sudého stupně $2k$ novou neznámou vztahem $y = x + \frac{1}{x}$, přejde rovnice (1) v rovnici $g(y) = 0$ stupně k. Jsou-li $c_1, c_2, \dots, c_k$ všechna řešení rovnice $g(y) = 0$, pak řešení rovnice (1) jsou právě všechna řešení těchto k kvadratických rovnic

(9) $x^2 - c_i x + 1 = 0,\ i = 1,2,\dots,k.$

Důkaz:

Rozklad polynomu $g(y)$ na kořenové činitele je tento

$g(y) = a_0(y-c_1)(y-c_2)\dots(y-c_k)$. Podle věty 3.5 platí

$$f(x) = x^k g\left(x + \frac{1}{x}\right) = a_0 x^k\left(x + \frac{1}{x} - c_1\right)\left(x + \frac{1}{x} - c_2\right)\dots\left(x + \frac{1}{x} - c_k\right) =$$

$$= a_0(x^2 - c_1 x + 1)(x^2 - c_2 x + 1)\dots(x^2 - c_k x + 1).$$

Odtud ihned plyne tvrzení naší věty, protože kořeny polynomu $f(x)$ jsou řešeními rovnice (1).

Tedy řešení reciproké rovnice 1. druhu sudého stupně $2k$ se dá převést na řešení rovnice stupně k-tého a na řešení k kvadratických rovnic (9). Na základě právě dokázaných vět získáme následující věty.

Věta 3.7:

Každá reciproká rovnice 1. druhu stupně $n \le 9$ je algebraicky řešitelná.

Důkaz:

a) Předpokládejme nejprve, že daná reciproká rovnice 1. druhu má sudý stupeň $n = 2k$. Podle věty 3.6 lze takovouto rovnici převést na rovnici stupně polovičního, tj. stupně k, tvaru

(10) $b_0y^k + b_1y^{k-1} + \ldots + b_{k-1}y + b_k = 0$.

Dovedeme-li rovnici (10) algebraicky řešit, umíme též algebraicky řešit rovnici (1) (1. druhu a sudého stupně), neboť řetězec algebraické řešitelnosti rovnice (1) se skládá z řetězce pro rovnici (10) a z řetězce, příslušejícího kvadratickým rovnicím (9), kde c_i jsou všechne řešení rovnice (10). Z předchozí teorie již víme, že každá algebraická rovnice tvaru (10) je algebraicky řešitelná pro $k \le 4$. Lze tedy algebraicky řešit každou reciprokou rovnici 1. druhu sudého stupně pro $n \le 8$.

b) Jestliže reciproká rovnice 1. druhu má stupeň 9, jedním řešením je jistě číslo (-1) a vydělením příslušného reciprokého polynomu kořenovým činitelem (x+1) obdržíme reciproký polynom 1. druhu stupně 8. Podle důkazu a) je tomuto polynomu odpovídající reciproká rovnice algebraicky řešitelná.

Věta 3.8:

Každá reciproká rovnice 2. druhu stupně $n \le 10$ je algebraicky řešitelná.

Důkaz:

Reciproké rovnice 2. druhu mají vždy za kořen číslo 1. Jestliže polynom, příslušný reciproké rovnici 2. druhu stupně 10, vydělíme kořenovým činitelem (x-1), obdržíme podle věty 3.4 reciproký polynom 1. druhu stupně 9.Podle věty 3.7 je reciproká rovnice, příslušná tomuto polynomu, algebraicky řešitelná. Je tudíž algebraicky řešitelná i reciproká rovnice 2. druhu stupně 10.

Existují i jiné algebraické rovnice stupňů $n \ge 5$, které jsou algebraicky řešitelné. Např. rovnice 2n-tého stupně tvaru

$x^{2n} + ax^n + b = 0$.

Příklad 4.7:

Najděte všechna řešení reciproké rovnice

$$6x^6 - 35x^5 + 56x^4 - 56x^2 + 35x - 6 = 0.$$

Řešení:

Polynom, příslušný této rovnici, je reciproký polynom 2. druhu a sudého stupně, proto po vydělení tohoto polynomu kořenovým činitelem (x-1) obdržíme reciproký polynom 1. druhu lichého stupně, který můžeme vydělit kořenovým činitelem (x+1). Po vydělení obdržíme reciproký polynom 1. druhu a stupně 4, který umíme převést na stupeň poloviční, tj. 2. Kořeny polynomu stupně 2 snadno najdeme. Přitom s výhodou použijeme Hornerova schematu. Tedy konkrétní výpočet vypadá takto:

	6	-35	56	0	-56	35	-6
1	6	-29	27	27	-29	6	0
-1	6	-35	62	-35	6	0	

Hledaný polynom 4. stupně 1. druhu má tudíž tvar

$$f(x) = 6x^4 - 35x^3 + 62x^2 - 35x + 6.$$

Tento polynom vydělíme x^2 a upravíme jej na tvar

$$f(x) = 6(x^2 + \frac{1}{x^2}) - 35(x + \frac{1}{x}) + 62.$$

Použitím substituce $y = x + \frac{1}{x}$ a vztahů (8) převedeme tento polynom ma polynom stupně 2,

$$g(y) = 6(y^2 - 2) - 35y + 62 = 6y^2 - 35y + 50.$$

Kořeny c_1, c_2 tohoto polynomu jsou $\frac{5}{2}$ a $\frac{10}{3}$. Nyní řešíme dvě kvadratické rovnice $x^2 - \frac{5}{2}x + 1 = 0$ a $x^2 - \frac{10}{3}x + 1 = 0$.

Řešeními zadané reciproké rovnice jsou čísla 2, $\frac{1}{2}$, 3 a $\frac{1}{3}$.

Další obdobné příklady si čtenář může provést ve cvičení.

<u>Cvičení:</u>

<u>Příklad 1:</u>

Nechť n je libovolné přirozené číslo a nechť $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_r^{k_r}$ je jeho rozklad na součin prvočinitelů. Pak počet všech primitivních n-tých odmocnin z jedné je dán hodnotou tzv. Eulerovy funkce definované vztahem

$$(n) = n(1 - \frac{1}{p_1})(1 - \frac{1}{p_2}) \dots (1 - \frac{1}{p_n}).$$ Dokažte!

<u>Příklad 2:</u>

Sestavte Cayleyho tabulku pro grupu všech čtvrtých odmocnin z jedné.

Příklad 3:

Určete všechny odmocniny z jedné pro následující n:

a) n = 2, b) n = 6, c) n = 12, d) n = 16, e) n = 24.

Příklad 4:

Najděte všechny primitivní n-té odmocniny z jedné a u ostatních určete jejich index pro následující n:

a) n = 2, b) n = 5, c) n = 12, d) n = 16, e) n = 24.

Příklad 5:

Dokažte, že v rovnostech (8) je $\varepsilon_k = \varepsilon_1^k$, $k = 0,1,\dots,n-1$.

Příklad 6:

Určete všechny n-té odmocniny z čísla a, je-li

a) $a = 2i$, $n = 2$,

b) $a = -1$, $n = 4$,

c) $a = 2 + 2i$, $n = 3$,

a) $a = -27$, $n = 6$.

Příklad 7:

Dokažte, že koncové body všech vektorů, jež jsou obrazy všech n-tých odmocnin z jedné v Gausově rovině, tvoří vrcholy pravidelného n-úhelníka na jednotkové kružnici.

Příklad 8:

Nechť $z = a + bi$ je libovolné komplexní číslo. Dokažte, že obě jeho druhé odmocniny lze vyjádřit ve tvaru

$$\pm\left(\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2+b^2}+a\right)}+\varepsilon i\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2+b^2}-a\right)}\right),$$

kde $\varepsilon = 1$ právě když $b \geq 0$ a $\varepsilon = -1$ právě když $b < 0$.

Příklad 9:

Pomocí vzorce, odvozeného v předchozím příkladě, určete druhé odmocniny z následujících komplexních čísel:

a) $-8i$ b) $3 - 4i$ c) $-15 + 8i$ d) $-3 - 4i$ e) $-8 + 6i$.

Příklad 10:

Určete algebraické řešení následujících kvadratických rovnic:

a) $x^2 - 8x + 13 - 4i = 0$,

b) $x^2 - (2 + i)x - 1 + 7i = 0$,

c) $x^2 - (3 - 2i)x + 5 - 5i = 0$,

d) $(2 + i)x^2 - (5 - i)x + 2 - 2i = 0$,

e) $x^2 - (6 - 4i)x + 5 - 12i = 0$,

f) $x^2 + (1 + 4i)x - (5 + i) = 0$.

Příklad 11:

Najděte všechna řešení následujících rovnic:

a) $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$,

b) $x^4 - 30x^2 + 389 = 0$.

Příklad 12:

Ověřte algebraickou řešitelnost a vyjádřete vhodně řetězec její algebraické řešitelnosti u každé z následujících rovnic

a) $(x^5 - 2)^3 + 3 = 0$,

b) $(2(x + 3)^4 - 1)^3 + 2 = 0$,

c) $(x^3 - 4)^2 - 1 = 0$,

d) $x^{3n} + a_1x^{2n} + a_2x^n + a_3 = 0$.

Příklad 13:

Určete algebraické řešení následujících kubických rovnic a správnost nalezených řešení ověřte zkouškou

a) $x^3 + 6x^2 + 9x + 4 = 0$,

b) $x^3 + 3x^2 - 3x - 14 = 0$,

c) $x^3 + 3x^2 - 3x - 1 = 0$,

d) $x^3 - 9x + 28 = 0$,

e) $4x^3 - 12x^2 - x + 3 = 0$,

f) $3x^3 - 11x^2 + 8x + 4 = 0$,

g) $x^3 + 3x^2 - 6x - 36 = 0$.

Příklad 14:

Pro které reálné hodnoty parametru p má rovnice $x^3 - 3x + p = 0$ tři reálné různé kořeny?

Příklad 15:

Dokažte, že rovnice s reálnými koeficienty $x^3 + px + 2 = 0$ má všechny kořeny reálné právě když $p \leq 3$.

Příklad 16:

Řešte následující reciproké rovnice:

a) $3x^3 + 4x^2 + 4x + 3 = 0$,

b) $3x^3 + 4x^2 - 4x - 3 = 0$,

c) $x^5 - 2x^4 + 3x^3 - 3x^2 + 2x - 1 = 0$,

d) $x^5 - 2x^4 + 3x^3 - 3x^2 + 2x - 1 = 0$,

e) $x^8 - x^7 + 20x^6 - 19x^5 + 38x^4 - 19x^3 + 20x^2 - x + 1 = 0$,

f) $x^{10} - 6x^9 + 12x^8 - 8x^7 - x^6 + x^4 + 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1 = 0$.

Příklad 17:

Jako reciproké rovnice řešte následující binomické rovnice:

a) $x^4 + 1 = 0$, b) $x^4 - 1 = 0$, c) $X^5 - 1 = 0$,

d) $x^5 + 1 = 0$, e) $x^8 - 1 = 0$.

Příklad 18:

Sestavte kvadratickou rovnici s reálnými koeficienty, jsou-li dány její komplexní kořeny:

a) $c_1 = 1 + 2i$ a $c_2 = 3 - 2i$,

b) $c_1 = 2 + i$ a $c_2 = -i$.

Příklad 19:

Udejte algebraické řešení následujících binomických rovnic:

a) $x^3 + 4 = 0$, b) $x^4 - 32 = 0$, c) $x^3 - 5 = 0$.

Příklad 20:

Za použití věty 1.8 dokažte, že všechny n-té odmocniny z libovolného komplexního čísla $a = |a|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ jsou právě všechna komplexní čísla tvaru

$$a_k = \sqrt[n]{|a|}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right),\ k = 0,1,\dots,n-1.$$

Příklad 21:

Platí, že rovnice

$$6x^6 - 38x^5 + 93x^4 - 126x^3 + 93x^2 - 38x + 6 = 0$$

má kořen $1 + i$. Vypočítejte zbývající kořeny této rovnice.

Příklad 22:

Najděte všechny kořeny polynomu

$$f(x) = 6x^6 - 5x^5 - 14x^4 - 25x^3 - 146x^2 - 20x + 24$$

víte-li, že jeden kořen je roven 2i.

Příklad 23:

Je dán polynom

$$f(x) = x^6 + 12x^5 + 60x^4 + 160x^3 + 240x^2 + 192x + 63.$$

a) Rozviňte $f(x)$ podle mocnin $x + 2$.

b) Určete kořeny polynomu $f(x)$.