10. Metody integrace pro funkce jedné proměnné

10.1. Základní vzorce

Základní problém: k dané funkci f stanovit množinu všech jejích primitivních funkcí F, tedy „neurčitý integrál“ $F + C$ funkce f.

Chceme-li zjistit primitivní funkci k dané (elementární) funkci f, máme dva problémy:

1) zda pro danou funkci f primitivní funkce vůbec existuje,

2) pokud ano, zda ji lze vyjádřit konečným vzorcem pomocí elementárních funkcí.

Existence: V kapitole 11 uvidíme, že každá funkce f spojitá na intervalu J má zde primitivní funkci.

Vyjádření primitivní funkce elementárními funkcemi: Je možné jen pro vybrané typy integrovaných funkcí, z nichž některé jsou probrány v této kapitole spolu s příslušnými metodami výpočtu primitivních funkcí.

Je-li tedy f funkce elementární, pak primitivní funkce není nutně také elementární; přitom funkce f může mít i poměrně jednoduché analytické vyjádření. Např. $\int e^{-x^2}\,dx$, $\int \frac{\sin x}{x}\,dx$, $\int \sin x^2\,dx$, $\int \frac{dx}{\ln x}$ nejsou funkce elementární, tj. nelze je vyjádřit konečným vzorcem pomocí elementárních funkcí. (Vyjadřujeme je zpravidla pomocí mocninných řad.)

V kapitole 7 jsme se setkali se sadou základních vzorců pro derivace elementárních funkcí. K nim dostáváme ihned odpovídající vzorce pro stanovení primitivních funkcí. Např. $\sin x$ je primitivní funkce k funkci $\cos x$, neboť $(\sin x)' = \cos x$, neurčitým integrálem k funkci $\cos x$ je množina funkcí $\sin x + C$, kde C je (libovolná) *integrační konstanta*. Zapisujeme

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C, \text{ obecně } \int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

kde F je jedna z primitivních funkcí k funkci f. Operaci, při níž k dané funkci stanovujeme primitivní funkci nebo neurčitý integrál, nazveme *integrace*. Výraz $f(x)dx$ za znakem integrace se nazývá *integrand*, říkáme, že danou funkci f integrujeme.

Ze vzorců pro derivace plynou tyto vzorce pro integraci:

Funkce:	*Funkce primitivní:*	*Funkce:*	*Funkce primitivní:*
x^m $(m \in R, m \neq -1)$	$\frac{x^{m+1}}{m+1}$	$\frac{1}{x}$	$\ln x$
e^x	e^x	a^x	$\frac{a^x}{\ln a}$
$\cos x$	$\sin x$	$\sin x$	$-\cos x$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\mathrm{tg}\, x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$\mathrm{cotg}\, x$
$\mathrm{ch}\, x$	$\mathrm{sh}\, x$	$\mathrm{sh}\, x$	$\mathrm{ch}\, x$

$\dfrac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$	th x	$-\dfrac{1}{\mathrm{sh}^2 x}$	coth x
$\dfrac{1}{1+x^2}$	arctg x	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	arcsin x

Z věty o derivaci součtu (rozdílu) plyne: Je-li F primitivní funkce k funkci f a G primitivní funkce k funkci g, je $F + G$ $(F - G)$ primitivní funkce k funkci $f + g$ $(f - g)$. Podobně platí: Je-li F primitivní funkce k funkci f, pak kF (kde k je konstanta) je primitivní funkce k funkci kf.

10.2. Integrace užitím substitucí

Základem jsou dvě věty o substitucích; v obou případech nechť je funkce $f(u)$ definována na intervalu J a funkce φ $(u = \varphi(x))$ nechť je definována na intervalu I, kde $\varphi(I) \subset J$, přičemž existuje φ'.

V (1.věta o substituci)**:** Je-li F primitivní funkcí k funkci f na J, pak složená funkce $F\circ\varphi$ je primitivní funkcí k funkci $(f\circ\varphi) \cdot \varphi'$ na I.

Důkaz: $[(F\circ\varphi)(x)]' = F_u'(u) \cdot \varphi'(x) = f(u) \cdot \varphi'(x) = (f\circ\varphi)(x) \cdot \varphi'(x)$. □

V příkladech na použití 1. věty o substituci má tedy integrovaná funkce tvar součinu složené funkce a derivace vnitřní funkce.

Úlohy:

10.2.1. Vypočtěte $I = \int \sin x \cos x \, dx$.

[$I = \begin{bmatrix} \sin x = u \\ \cos x \, dx = du \end{bmatrix} = \int u \, du = \dfrac{u^2}{2} + C = \dfrac{1}{2}\sin^2 x + C.$

Zde bylo $f(u) = u$, $\varphi(x) = \sin x$.]

10.2.2. Vypočtěte $I = \int \sin^3 x \, dx$.

[$I = \int \sin^2 x \sin x \, dx = \int \left(1-\cos^2 x\right)\sin x \, dx = \int \sin x \, dx - \int \cos^2 x \sin x \, dx = \ldots$ První z integrálů je tabulkový, ve druhém položíme $\cos x = u$.]

Vybrané typické příklady na použití 1. věty o substituci:

$$\int \sin^m x \cos x \, dx, \quad \int \frac{\ln^m x}{x} dx, \quad \int \frac{\mathrm{arctg}^m x}{1+x^2} dx, \quad \int \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{tg}\, x}}{\cos^2 x} dx, \ldots$$

Úloha 10.2.3. Vyřešte speciální případ integrace složené funkce, kde vnitřní funkce je lineární.

[Je-li vnitřní funkce lineární, dostáváme z 1. věty o substituci

$$\int f(ax+b) \, dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C,$$

takže například $\int \mathrm{e}^{2x+3} \, dx = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x+3} + \mathrm{C}$, $\int \cos\dfrac{x}{3} dx = 3 \sin \dfrac{x}{3} + C$.]

Úloha 10.2.4. Vyřešte speciální případ integrace složené funkce ve tvaru zlomku, kde čitatel je derivací jmenovatele.

[Pro $f(x) \neq 0$: $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + C$, takže například $\int \mathrm{tg}\, x\, dx = -\ln |\cos x| + C$, $\int \frac{2x-1}{x^2-x+3} dx = \ln (x^2 - x + 3) + C$, atd.]

V (2.věta o substituci)**:** Nechť $\varphi' \neq 0$ na I, $\varphi(I) = J$. Je-li funkce F funkcí primitivní k funkci $f \circ \varphi \cdot \varphi'$ na I, pak funkce $F \circ \varphi^{-1}$ je funkce primitivní k funkci f na J (kde φ^{-1} je funkce inverzní k φ).

Důkaz: Nechť $x = \varphi(t)$, tj. $t = \varphi^{-1}(x)$. Pak $[(F \circ \varphi^{-1})(x)]' = [(F(\varphi^{-1}(x))]' =$ $= F_t'(t) \cdot [\varphi^{-1}(x)]' = f[\varphi(t)] \cdot \varphi'(t).(1 / \varphi'(t)) = f(x)$. □

Úloha 10.2.5. Užitím 2. věty o substituci počítejte $I = \int \sin \sqrt{x}\, dx$.

[$I = \begin{bmatrix} x = t^2 \\ dx = 2t\, dt \end{bmatrix} = 2\int t.\sin t\, dt$, a dále se postupuje metodou per partes dle 10.3.]

Podle 2. věty o substituci se postupuje v mnoha speciálních případech, např. při integraci některých iracionálních funkcí (10.5) nebo u goniometrických a hyperbolických substitucí (10.8).

10.3. Metoda per partes

V: Nechť funkce f, g jsou definovány a mají derivaci na intervalu J. Jestliže Ψ je funkce primitivní k $f \cdot g'$ na J, pak $\Phi = f \cdot g - \Psi$ je primitivní funkcí k funkci $f' \cdot g$ na J.

Důkaz: Věta o per partes plyne ze vzorce pro derivaci součinu: $\Phi' = (f \cdot g - \Psi)' =$ $= f' \cdot g + f \cdot g' - \Psi' = f' \cdot g$. □

Jiný přístup: Pro $u = f(x)$, $v = g(x)$ je $(uv)' = u'v + uv'$, tj. $u'v = (uv)' - uv'$, takže $\int u'v\, dx = uv - \int uv'\, dx$.

Úlohy:

10.3.1. Vypočtěte $I = \int x \cos x\, dx$.

[$I = \begin{bmatrix} u = x & u' = 1 \\ v' = \cos x & v = \sin x \end{bmatrix} = x \sin x - \int \sin x\, dx = x \sin x + \cos x + C$.]

10.3.2. Vypočtěte $I = \int x^2 \sin x\, dx$.

[$I = \begin{bmatrix} u = x^2 & u' = 2x \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{bmatrix} = -x^2 \cos x + 2\int x \cos x\, dx = \ldots$ znovu se použije metoda per partes, viz předchozí příklad.]

Typické příklady na metodu per partes:

$\int x^n \cos x\, dx$, $\int x^n \sin x\, dx$, $\int x^n \mathrm{e}^x\, dx$, $\int x^n \ln x\, dx$, $\int x^n \mathrm{arctg}\, x\, dx$, ad.

Zvláštní případy použití metody per partes

(1) *Výpočet integrálů* $I_c = \int e^{ax} \cos bx \, dx$, $I_s = \int e^{ax} \sin bx \, dx$ (budeme počítat primitivní funkce pro $C = 0$).

V integrálu I_c se použije dvěma způsoby metoda per partes: pro $u' = e^{ax}$, $v = \cos bx$ a pak pro $u' = \cos bx$, $v = e^{ax}$. Tím dostaneme soustavu

$$I_c = \frac{1}{b} e^{ax} \sin bx - \frac{a}{b} I_s \ , \ I_c = \frac{1}{a} e^{ax} \cos bx + \frac{b}{a} I_s \ ,$$

jejímž řešením vyjde

$$I_c = \frac{b \sin bx + a \cos bx}{a^2 + b^2} e^{ax} \ , I_s = \frac{a \sin bx - b \cos bx}{a^2 + b^2} e^{ax} \ . \ \square$$

(2) *Rekurentní vzorec pro integrál* $I_n = \int \frac{dx}{\left(a^2 + x^2\right)^n}$, $n \geq 2$.

V integrálu I_m , kde $m \geq 1$, položíme $u = \frac{1}{\left(a^2 + x^2\right)^m}$, $v' = 1$

a dostaneme $I_m = \frac{x}{\left(a^2 + x^2\right)^m} + 2mI_m - 2ma^2 I_{m+1}$, odkud vyjádříme I_{m+1}. Položíme-li pak $m = n - 1$, dostaneme $I_n = \frac{1}{2(n-1)a^2} \frac{x}{\left(a^2 + x^2\right)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)a^2} I_{n-1}$. $\square$

10.4. Integrace racionálních funkcí

Základní typy racionálních funkcí a jejich integrace:

(1) $\int \frac{dx}{x-k} = \ln |x - k| + C,$

Úlohy:

10.4.1. $\int \frac{2\,dx}{x+3} = 2 \ln |x + 3| + C.$

10.4.2. $\int \frac{5\,dx}{3x+2} = \frac{5}{3} \ln |3x + 2| + C$

(2) $\int \frac{dx}{(x-k)^s} = \frac{1}{1-s} \frac{1}{(x-k)^{s-1}} + C$, kde $s \neq 1$.

Úloha 10.4.3. $\int \frac{dx}{(x+2)^3} = \frac{1}{-2(x+2)^2} + C.$

(3) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+px+q}$, kde ve jmenovateli je nerozložitelný kvadratický polynom, vede po úpravě jmenovatele na funkci arctg x.

Úloha 10.4.4. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+6x+13} = \int \frac{dx}{(x+3)^2+4} = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{x+3}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+3}{2} + C.$

(4) $\displaystyle\int \frac{dx}{\left(x^2+px+q\right)^s}$, kde ve jmenovateli je nerozložitelný kvadratický polynom a $s \neq 1$, vede na použití rekurentního vzorce, viz 10.3.(2).

Úloha 10.4.5. $\displaystyle\int \frac{dx}{\left(x^2+6x+13\right)^2} = \int \frac{dx}{\left[(x+3)^2+4\right]^2} = \begin{bmatrix} x+3=z \\ dx=dz \end{bmatrix} = \int \frac{dz}{\left(z^2+2^2\right)^2} =$

$\displaystyle\frac{1}{2.4}\frac{z}{z^2+2^2}+\frac{1}{2.4}\int\frac{dz}{z^2+2^2}$. Podle (3) vede tento integrál na funkci arctg x a pak se vrátíme k původní proměnné x dosazením $z = x + 3$.

Racionální funkce P(x)/Q(x), kde P(x), Q(x) jsou polynomy:

Při jejich integrování převádíme racionální funkci na uvedené základní typy, přičemž využíváme poznatků z algebry.

Algoritmus:

(1) Je-li stupeň čitatele menší než stupeň jmenovatele, přejdeme na krok (2). Jinak užitím dělení upravíme funkci na tvar

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = A(x)+\frac{R(x)}{Q(x)},$$

kde $A(x)$ je polynom, který již dovedeme integrovat a $R(x)$ (zbytek dělení) je polynom stupně nižšího než $Q(x)$; tedy: *snížíme stupeň čitatele pod stupeň jmenovatele.*

(2) Je-li jmenovatel rozložen na lineární kořenové činitele a nerozložitelné kvadratické polynomy, přejdeme na bod (3), jinak tento *rozklad jmenovatele* provedeme.

(3) Je-li ve jmenovateli jen jeden kořenový činitel nebo jeho mocnina nebo jen jeden nerozložitelný kvadratický polynom nebo jeho mocnina, přejdeme na bod (4); jinak provedeme *rozklad zlomku $R(x)/Q(x)$ na parciální zlomky.*

(4) *Integrujeme* všechny komponenty rozkladu funkce $y = P(x)/Q(x)$.

Úloha 10.4.6. Upravte integrál $\displaystyle\int \frac{3x-2}{x^2+x+3}dx$ na základní typ (3).

[$\displaystyle\int \frac{3x-2}{x^2+x+3}dx = \frac{3}{2}\int\frac{2x+1-1+\frac{4}{3}}{x^2+x+3}dx = \frac{3}{2}\ln\left(x^2+x+3\right) + \int\frac{dx}{x^2+x+3}$]

Úloha 10.4.7. Upravte integrál $\int \frac{4x+3}{\left(x^2-x+3\right)^3}\,dx$ na základní typ (4) a dvojnásobným použitím rekurentního vzorce 10.3 (2) pak na základní typ (3).

[$\int \frac{4x+3}{\left(x^2-x+3\right)^3}\,dx = 2\int \frac{2x-1+1+\frac{3}{2}}{\left(x^2-x+3\right)^3}\,dx = -\frac{1}{\left(x^2-x+3\right)^2} + 5\int \frac{dx}{\left(x^2-x+3\right)^3} = \dots$]

Na integraci racionálních funkcí vede výpočet integrálů mnoha dalších typů funkcí, viz dále.

10.5. Integrace některých iracionálních funkcí

(1) $\int R\left(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$, kde $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$ a $R(x,y)$ je racionální funkce.

Substitucí $\sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}} = t$ se integrál převede na integrál z funkce racionální, viz 10.4.

Úloha 10.5.1. Převeďte $\int \frac{\sqrt{2x-1}}{2x+7}\,dx$ na integrál z racionální funkce.

[$\int \frac{\sqrt{2x-1}}{2x+7}\,dx = \begin{bmatrix} \sqrt{2x-1} = t \\ x = \frac{1}{2}\left(t^2+1\right) \\ dx = t\,dt \end{bmatrix} = \int \frac{t}{t^2+1+7}\,t\,dt = \dots$]

(2) $\int R\left(x, x^{\frac{p_1}{q_1}}, \dots, x^{\frac{p_m}{q_m}}\right)dx$, kde $R(x, y_1, y_2, \dots, y_m)$ je racionální funkce. Substitucí $x = t^n$, kde $n = n(q_1, q_2, \dots, q_m)$ je nejmenší společný násobek, se daný integrál převede na integrál z funkce racionální.

Úloha 10.5.2. Převeďte $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$ na integrál z racionální funkce.

[$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} = \begin{bmatrix} x = t^6 \\ dx = 6t^5\,dt \end{bmatrix} = \int \frac{t^6 \cdot 6t^5\,dt}{t^3+t^2} = \dots$]

10.6. Eulerovy substituce

Používají se pro výpočet integrálů typu $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$, kde R je racionální funkce dvou proměnných. Účelem substituce je převést integrování iracionální funkce na integrování funkce racionální. Eulerovy substituce jsou tři:

(1) $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}\,x + t$ [pro $a > 0$]; hlavní myšlenka: po umocnění se na obou stranách rovnosti ruší členy ax^2 .

(2) $\sqrt{ax^2+bx+c} = xt + \sqrt{c}$ [pro $c > 0$]; hlavní myšlenka: po umocnění se na obou stranách rovnosti ruší členy c a rovnost lze dělit x.

(3) $\sqrt{ax^2+bx+c} = t(x-\lambda)$ [kde λ je reálný kořen]; hlavní myšlenka: po umocnění lze rovnost dělit kořenovým činitelem $(x-\lambda)$.

Úloha 10.6.1. Ověřte, že při výpočtu $\int x\sqrt{4x^2+5x+1}\,dx$ lze použít všechny tři substituce. Ve všech případech převeďte integrál na integrál z funkce racionální.

[Je $a = 4 > 0$, $c = 1 > 0$, a uvedený trojčlen má reálné kořeny.

Při použití 1. substituce máme $\sqrt{4x^2+5x+1} = 2x + t$,

při použití 2. substituce $\sqrt{4x^2+5x+1} = xt + 1$

a při použití 3. substituce je $\sqrt{4x^2+5x+1} = t(x+1)$. V tomto případě po umocnění rovnosti a zkrácení kořenového činitele $(x + 1)$ dostáváme $4x + 1 = t^2(x+1)$ a z toho

$x = \dfrac{t^2-1}{4-t^2}$, $t(x+1) = \dfrac{3t}{4-t^2}$, $dx = \dfrac{6t}{\left(4-t^2\right)^2}\,dt$, …]

Po nalezení integrálu z příslušné racionální funkce se vracíme k původní proměnné, tj. dosadíme při 1. substituci $t = \sqrt{ax^2+bx+c} - \sqrt{a}\,x$, při 2. substituci to je $t = \dfrac{\sqrt{ax^2+bx+c}-\sqrt{c}}{x}$, a při 3. dosadíme $t = \dfrac{\sqrt{ax^2+bx+c}}{x-\lambda}$.

10.7. Integrace goniometrických a hyperbolických funkcí

Přehled substitucí pro $\int R(\cos x, \sin x)\,dx$,

kde R je racionální funkce dvou proměnných:

(1) $\sin x = t$, pokud $R(-\cos x, \sin x) = -R(\cos x, \sin x)$,

(2) $\cos x = t$, pokud $R(\cos x, -\sin x) = -R(\cos x, \sin x)$,

(3) $\operatorname{tg} x = t$, pokud $R(-\cos x, -\sin x) = R(\cos x, \sin x)$,

(4) $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = t$ lze použít vždy (univerzální substituce). Univerzální substituce přináší zpravidla složitější výpočty, proto se dává přednost substitucím předchozím, pokud je lze použít.

Účelem substitucí je převést integrování goniometrických funkcí na integrování funkcí racionálních.

Úlohy:

10.7.1. Vhodnou substitucí převeďte $\int \mathrm{tg}\, x \sin x\, dx$ na integrál z funkce racionální.

[$I = \int \mathrm{tg}\, x \sin x\, dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos x} dx$; $\frac{\sin^2 x}{-\cos x} = -\frac{\sin^2 x}{\cos x}$, takže provedeme substituci

$\sin x = t$; $I = \int \frac{\sin^2 x}{\cos x} dx = \int \frac{\sin^2 x}{1-\sin^2 x} \cos x\, dx = \begin{bmatrix} \sin x = t \\ \cos x\, dx = dt \end{bmatrix} = \int \frac{t^2}{1-t^2} dt = \dots$]

10.7.2. Vhodnou substitucí převeďte $\int \mathrm{tg}^2 x \sin x\, dx$ na integrál z funkce racionální.

[$I = \int \mathrm{tg}^2 x \sin x\, dx = \int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x} dx$; ježto $\frac{(-\sin x)^3}{\cos^2 x} = -\frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}$, použijeme substituci

$\cos x = t$, takže $I = \int \frac{(1-\cos^2 x)}{\cos^2 x} \sin x\, dx = \begin{bmatrix} \cos x = t \\ \sin x\, dx = -\,dt \end{bmatrix} = -\int \frac{(1-t^2)}{t^2} dt = \dots$]

10.7.3. Vhodnou substitucí převeďte $\int \frac{\mathrm{tg}^2 x}{\cos^4 x} dx$ na integrál z funkce racionální.

[$I = \int \frac{\mathrm{tg}^2 x}{\cos^4 x} dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x} dx$; platí $\frac{(-\sin x)^2}{(-\cos x)^6} = \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}$, takže použijeme substituci $\mathrm{tg}\, x = t$; při úpravách používáme často vztah $1 + \mathrm{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$.

$I = \int \mathrm{tg}^2 x \cdot (1 + \mathrm{tg}^2 x) . \frac{dx}{\cos^2 x} = \begin{bmatrix} \mathrm{tg}\, x = t \\ \frac{dx}{\cos^2 x} = dt \end{bmatrix} = \int t^2 \cdot (1+t^2)\, dt = \dots$]

Při použití univerzální substituce $\mathrm{tg}\, \frac{x}{2} = \mathrm{t}$ je třeba znát či umět odvodit, čemu jsou rovny $\sin x$, $\cos x$, $\mathrm{tg}\, x$, dx.

Předně platí $x = 2 \,\mathrm{arctg}\, t$, odkud $dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}$.

Ze vztahu $\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$ a vztahů mezi goniometrickými funkcemi plyne $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\mathrm{tg}\, x = \frac{2t}{1-t^2}$.

Integrace součinu goniometrických funkcí

Používá se vzorců

$\sin nx \sin mx = \frac{1}{2} [\cos(n-m)x - \cos(n+m)x,$

$\sin nx \cos mx = \frac{1}{2} [\sin(n-m)x + \sin(n+m)x],$

$\cos nx \cos mx = \frac{1}{2}[\cos(n-m)x + \cos(n+m)x]$,

$\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$, $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$.

Úloha 10.7.4. Vypočtěte $\int \sin 5x \cos 4x \, dx$.

[$\int \sin 5x \cos 4x \, dx = \frac{1}{2}\left[\int (\sin x \, dx + \sin 9x)\, dx\right] = -\frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{18}\cos 9x + C$

Integrace hyperbolických funkcí

Postupujeme podle analogických vzorců jako pro funkce goniometrické.

Úloha 10.7.5. Vypočtěte $\int \dfrac{\operatorname{ch}^2 x + 1}{\operatorname{ch}^4 x}\, dx$.

$$[\ I = \int \frac{\operatorname{ch}^2 x+1}{\operatorname{ch}^4 x}\, dx = \int \left(1+\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}\right)\frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \int \left(1+1-\operatorname{th}^2 x\right)\frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \begin{bmatrix} \operatorname{th} x = t \\ \dfrac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = dt \end{bmatrix} =$$

$$= \int \left(2-t^2\right) dt = 2t - \frac{1}{3}t^3 + C = 2 \operatorname{th} x - \frac{1}{3}\operatorname{th}^3 x + C\ .\ ]$$

10.8. Goniometrické a hyperbolické substituce

Přehled substitucí:

(1) $\int R\left(x, \sqrt{a^2-x^2}\right)dx$, substituce $x = a \sin t$ (nebo $x = a \operatorname{th} t$),

(2) $\int R\left(x, \sqrt{a^2+x^2}\right)dx$, substituce $x = a \operatorname{tg} t$ (nebo $x = a \operatorname{sh} t$),

(3) $\int R\left(x, \sqrt{x^2-a^2}\right)dx$, substituce $x = \dfrac{a}{\cos t}$ (nebo $x = a \operatorname{ch} t$).

Úloha 10.8.1. Vypočtěte $I = \int \sqrt{x^2+4x}\, dx$.

[$I = \int \sqrt{x^2+4x+4-4}\, dx = \int \sqrt{(x+2)^2 - 2^2}\, dx = \begin{bmatrix} x+2 = u \\ dx = du \end{bmatrix} = \int \sqrt{u^2-2^2}\, du$ a dále se provede výše uvedená substituce (3).]

10.9. Užití Eulerových vzorců pro výpočet některých integrálů

Pro komplexní funkci $w(x)$ reálné proměnné x se derivace a integrál definují stejně jako pro reálné funkce s tím, že imaginární jednotka i se chová jako konstanta. Je-li $a \neq 0$ komplexní číslo, je např. $(e^{ax})' = a.e^{ax}$, $\int e^{ax}\, dx = \frac{1}{a}e^{ax} + C$.

Elementární funkce e^z , $\cos z$, $\sin z$ se definují i pro komplexní proměnnou z; jejich vzájemný vztah je vyjádřen *Eulerovými vzorci*, podle nichž je

$$\cos x = \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right), \ \sin x = \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right).$$

Těchto vzorců lze využít pro výpočet některých integrálů.

Úlohy:

10.9.1. Vypočtěte $I = \int \sin^4 x \, dx$.

[$I = \int \frac{1}{(2i)^4} \cdot \left(e^{ix} - e^{-ix}\right)^4 dx = \frac{1}{16}\int \left(e^{4ix} - 4e^{2ix} + 6 - 4e^{-2ix} + e^{-4ix}\right) dx = \ldots =$

$= \frac{1}{32} \cdot \frac{1}{2i} \cdot \left(e^{4ix} - e^{-4ix}\right) - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2i} \cdot \left(e^{2ix} - e^{-2ix}\right) + \frac{3}{8} x + C = \frac{1}{32} \sin 4x - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{3}{8} x + C.$

10.9.2. Vypočtěte (užitím Eulerových vzorců) $I = \int e^x \cos x \, dx$.

[$I = \int e^x \cdot \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right) dx = \frac{1}{2}\int \left(e^{(1+i)x} + e^{(1-i)x}\right) dx = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+i} e^{(1+i)x} + \frac{1}{1-i} e^{(1-i)x}\right) + C = \ldots$

$= \frac{1}{2} e^x(\cos x + \sin x) + C.$ (Srovnej s výsledkem dle vzorce pro I_c, viz 10.3.)]

\- * -