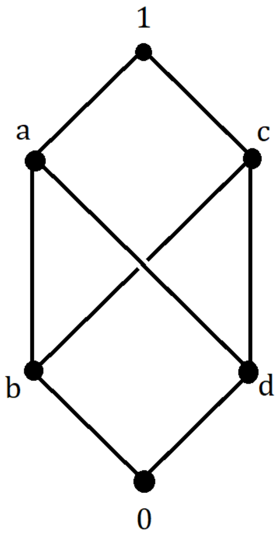
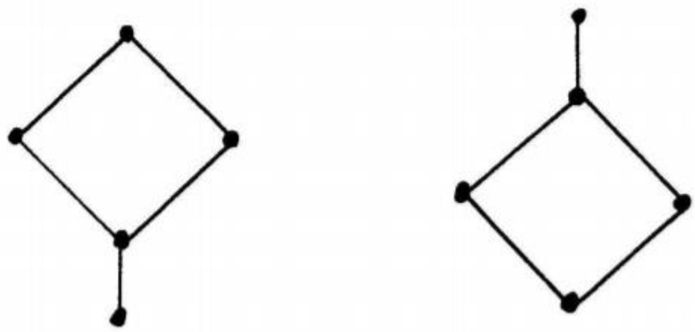
ALG2 – 8. cvičení

1) Nalezněte příklad konečné množiny, která je $\vee$-polosvazem, ale není $\wedge$-polosvazem.
2) Nechť $(A, \leq)$ je uspořádaná množina, $C \subseteq B \subseteq A$. Dokažte, že jestli $\inf B \in C$, pak $\inf C = \inf B$ (analogicky pro supremum).
3) Dokažte, že existuje-li na uspořádané množině $(A, \leq)$ pro $a, b \in A$ $\inf(a, b)$, pak existuje i $\sup(a, \inf(a, b))$ a platí $\sup(a, \inf(a, b)) = a$.
4) Načrtněte diagramy všech dvouprvkových, tříprvkových, čtyřprvkových a pětiprvkových svazů.
5) Rozhodněte, zda uspořádaná množina znázorněná obrázkem je svaz. Svoji odpověď zdůvodněte.



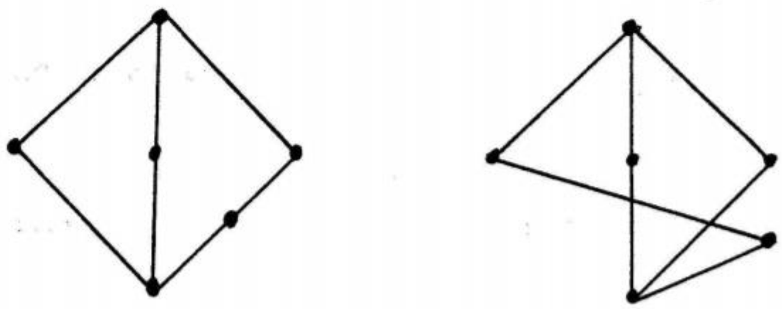
6) Rozhodněte, zda následující dvojice svazů jsou izomorfní:

(a)



(b)

(c)



(d)

7) Existuje takový svaz, že každá jeho podmnožina je zároveň jeho podsvazem?

8) Ověřte, zda množina všech binárních relací na neprázdné množině A tvoří svaz vzhledem k operaci $\subseteq$. Kolik prvků bude mít tento svaz pro dvouprvkovou množinu $A = \{a, b\}$?

9) Na svazu D(12) přirozených dělitelů čísla 12 nalezněte takovou podmnožinu, která je svazem, ale zároveň není podsvazem D(12).

10) Jsou dány svazy $(L_1, \wedge, \vee)$, $(L_2, \wedge, \vee)$ a zobrazení $f: L_1 \to L_2$. Ukažte, že f je bijekce právě tehdy, když jsou f i inverzní zobrazení f^{-1} izotonní (tedy nestačí splnit pouze jednu z těchto podmínek).

11) Nechť h je surjektivní homomorfismus svazu L_1 na L_2. Dokažte, že má-li L_1 nulu 0 (jedničku 1), pak $h(0) = 0$ ($h(1) = 1$).

12) Dokažte, že je-li svaz L řetězec, pak každé izotonní zobrazení z L do nějakého svazu L‘ je homomorfismus.

13) Dokažte, že pro každé dva prvky x, y svazu L platí:

a) Jestliže $x \parallel y$, pak $x \wedge y < x$, $x \wedge y < y$

b) Jestliže $x \wedge y < y$, pak $y < x \vee y$

14) Dokažte, že v každém svazu je ekvivalentní:

$a \vee b = a$ $\qquad\qquad$ $a \wedge b = b$