

11. Riemannův určitý integrál

11.1. Definice Riemannova integrálu

Riemannův integrál lze definovat v podstatě dvojím způsobem: užitím (Cauchyových) integrálních součtů nebo pomocí dolních a horních integrálů.

Užití integrálních součtů

Uvažujeme funkci f omezenou na intervalu $\langle a, b \rangle$, kde $a < b$. Dále uvedeme pojmy používané při definici integrálu:

Dělení intervalu (označíme D) - každá konečná posloupnost bodů x_0, x_1, \dots, x_n (zvaných *dělicí*), kde $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$.

Element dělení $\Delta_i = \langle x_{i-1}, x_i \rangle$, $i = 1, \dots, n$, jeho délka je $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

Norma dělení $v(D) = \max \Delta x_i$, stručné označení v .

D (Riemannova určitého integrálu): Necht' f je funkce omezená na $\langle a, b \rangle$. Ke každému dělení D vytvoříme integrální součet

$$\sigma(f, D) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i, \text{ kde } \xi_i \text{ je libovolný bod z elementu } \Delta_i.$$

Řekneme, že číslo I je Riemannovým (určitým) integrálem funkce f na $\langle a, b \rangle$, právě když $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ tak, že pro všechna dělení D , pro něž $v(D) < \delta$, a pro libovolnou volbu bodů ξ_i v elementech Δ_i dělení, platí $|\sigma(f, D) - I| < \varepsilon$.

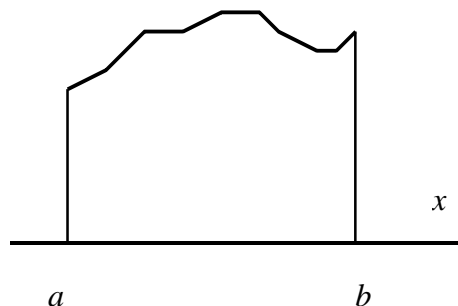
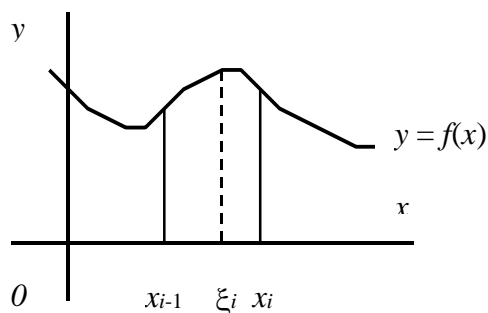
Označení: $I = \int_a^b f(x) dx$.

Funkce f se pak nazývá *Riemannovsky integrovatelná*, $\langle a, b \rangle$ je *obor integrace*, čísla a, b *dolní resp. horní mez integrace*, x *integrační proměnná*.

Znak \int_a^b je symbol pro součet od a do b , $f(x)$ pro $f(\xi_i)$, dx pro Δx_i . Název *Riemannův*

integrál používáme hlavně pro jeho odlišení od jiných typů integrálů. Není-li třeba zdůrazňovat (Riemannovu) metodu definice integrálu, lze používat jen historický název *určitý integrál*. Vedle *funkce Riemannovsky integrovatelná* říkáme též *integrovatelná (integrace schopná) podle Riemanna*. Množinu všech funkcí integrovatelných na $\langle a, b \rangle$ označíme $R(\langle a, b \rangle)$, a proto můžeme používat stručný zápis $f \in R(\langle a, b \rangle)$. Zvláště si uvědomíme, že Riemannův integrál funkce $f \in R(\langle a, b \rangle)$ je nějaké reálné číslo.

Geometrický význam součinu $f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$ pro $f > 0$ – obsah obdélníku o stranách $\Delta x_i, f(\xi_i)$.



Geometrický význam integrálního součtu $\sigma(f,D)$ – přibližný obsah tzv. *základního obrazce*, tj. křivočarého lichoběžníku, jehož hranice leží na přímkách $x = a$, $x = b$, na ose x a na grafu funkce f . *Geometrický význam určitého integrálu* – obsah základního obrazce.

Uvedenou definici Riemannova integrálu lze vyslovit i pomocí pojmu limita. Nejprve však pojednejme o zjemnění dělení.

D: Dělení D' nazveme *zjemnění dělení* D , právě když každý dělicí bod dělení D je dělicím bodem i dělení D' .

Poznámky:

(1) Ke každým dvěma dělení existuje jejich společné zjemnění, i „nejhrubší“ společné zjemnění. Množina všech dělení intervalu $\langle a, b \rangle$ tvoří svaz.

(2) Jestliže postupně zjemňujeme dělení, tak z toho neplatí, že $v(D) \rightarrow 0$, dokonce se přitom v nemusí ani zmenšovat (proč?). Druhou část výše uvedené definice lze pak vyslovit takto:

Řekneme, že integrální součty $\sigma(f,D)$ mají limitu $I \in \mathbf{R}$ a píšeme $\lim_{v(D) \rightarrow 0} \sigma(f,D) = I$, právě když $\forall \varepsilon > 0 \exists$ dělení D_0 tak, že pro všechna jeho zjemnění D a pro libovolnou volbu bodů ξ_i v elementech Δ_i platí $|\sigma(f,D) - I| < \varepsilon$. Číslo I pak nazýváme *Riemannův integrál funkce f* , funkce f se nazývá *Riemannovsky integrovatelná*, atd.

Dolní a horní integrál

Mějme funkci f omezenou na $\langle a, b \rangle$ a libovolné dělení D . Označme pro $x \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle$: $m_i = \inf f(x)$, $M_i = \sup f(x)$.

Vytvoříme součty: $s(f,D) = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i$, $S(f,D) = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i$, které nazveme *dolní* resp.

horní integrální součet příslušný k funkci f a dělení D .

Vlastnosti:

- (1) Libovolný dolní integrální součet není větší než libovolný horní integrální součet (příslušný třeba i k jinému dělení).
- (2) Množina všech dolních integrálních součtů je (shora) omezená, množina všech horních integrálních součtů je (zdola) omezená: Jestliže pro $x \in \langle a, b \rangle$ označíme $m = \inf f(x)$, $M = \sup f(x)$, platí $m(b-a) \leq s(f,D) \leq S(f,D) \leq M(b-a)$. Proto existuje supremum množiny všech dolních a infimum množiny všech horních integrálních součtů.

D: Číslo $I_*f = \sup_D s(f,D)$ ($I^*f = \inf_D S(f,D)$) nazýváme *dolní (horní) Riemannův integrál*.

Zřejmě platí $s(f,D) \leq I_*f \leq I^*f \leq S(f,D)$.

Úloha 11.1.1. Najděte dolní i horní integrál Dirichletovy funkce na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$.

[Máme

$$s(\chi, D) = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^n 0 \cdot \Delta x_i = 0, \quad I_*\chi = 0,$$

$$S(\chi, D) = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^n 1 \cdot \Delta x_i = 1, \quad I^*\chi = 1.]$$

D: Necht' f je funkce omezená na $\langle a, b \rangle$. Říkáme, že funkce f je na $\langle a, b \rangle$ Riemannovsky integrovatelná, právě když $I_*f = I^*f$. Společnou hodnotu If dolního a horního integrálu nazveme Riemannův integrál funkce f na $\langle a, b \rangle$ a píšeme

$$If = \int_a^b f(x) dx.$$

Dá se dokázat ekvivalence obou definic Riemannova integrálu.

Geometrický význam dolního součtu - obsah jistého mnohoúhelníku vepsaného do základního obrazce, *geometrický význam horního součtu* - obsah jistého mnohoúhelníku, do něž je základní obrazec vepsán (nakreslete obrázek). V souladu s definicí míry rovinného obrazce je geometrickým významem Riemannova integrálu obsah (míra) základního obrazce.

I v tomto případě lze využít pojmu limita. K tomu si uvědomíme ještě jednu vlastnost horních a dolních součtů:

(3) Zjemníme-li dělení, pak dolní integrální součet se nezmenší a horní integrální součet se nezvětší.

Důsledek: Pro každou *normální posloupnost* $\{D_n\}$ dělení, tj. kde $v(D_n) \rightarrow 0$ a přitom každý další člen je zjemněním předchozího, je odpovídající posloupnost $\{s(f, D_n)\}$ neklesající a $\{S(f, D_n)\}$ nerostoucí.

Integrovatelnost funkcí

Z teoretických důvodů (tj. pro použití v důkazech vlastností funkcí integrovatelných) se formuluje následující nutná a postačující podmínka integrovatelnosti, v níž se vyskytuje pojem oscilace funkce f na intervalu $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$: $\omega_i = M_i - m_i$.

V (Nutná a postačující podmínka integrovatelnosti podle Riemanna): Funkce $f \in R(\langle a, b \rangle) \Leftrightarrow$

$$\lim_{v(D) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i = 0, \text{ tj. } \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ tak, že } \forall D \text{ platí: } v(D) < \delta \Rightarrow \left| \sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i \right| < \varepsilon.$$

Princip důkazu: Dá se ukázat, že $I_*f = \lim_{v(D) \rightarrow 0} s(f, D)$, $I^*f = \lim_{v(D) \rightarrow 0} S(f, D)$ (definujte pomocí ε a δ) a dále, že $s(f, D) = \inf_{\xi_i} \sigma(f, D)$, $S(f, D) = \sup_{\xi_i} \sigma(f, D)$. Důkaz pak spočívá na vztahu

$$\sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i = S(f, D) - s(f, D). \quad \square$$

Z praktických důvodů byla formulována kritéria (tj. jednoduché postačující podmínky) integrovatelnosti podle Riemanna. Dá se dokázat, že do množiny $R(\langle a, b \rangle)$ patří tyto třídy funkcí:

- třída všech funkcí *spojitých* na $\langle a, b \rangle$,
- třída všech funkcí *spojitých po částech* na $\langle a, b \rangle$,
- třída všech funkcí *monotónních a omezených* na $\langle a, b \rangle$.

V množině $R(\langle a, b \rangle)$ však existují i funkce, které nesplňují žádnou z uvedených podmínek. Jestliže se funkce g liší od funkce $f \in R(\langle a, b \rangle)$ v konečném počtu bodů a nabývá v nich konečných hodnot, pak i $g \in R(\langle a, b \rangle)$ a oba integrály jsou si rovny.

11.2. Newtonův vzorec

V (Newtonův vzorec): Necht' funkce f je integrovatelná na $\langle a, b \rangle$ a má tu (zobecněnou) primitivní funkci F . Pak platí

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_{x=a}^b = F(b) - F(a).$$

Princip důkazu: Volíme takové dělení D intervalu $\langle a, b \rangle$, aby uvnitř každého elementu (x_{i-1}, x_i) měla funkce F derivaci. Platí:

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^n [F(x_i) - F(x_{i-1})].$$

Na rozdíly $F(x_i) - F(x_{i-1})$ použijeme Lagrangeovu větu, podle níž na každém intervalu (x_{i-1}, x_i) existuje takový bod ξ_i , že

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) = f(\xi_i) \cdot \Delta x_i.$$

Ježto f je integrovatelná, můžeme v integrálních součtech vzít právě tato ξ_i a tvrzení plyne z definice Riemannova integrálu. \square

Newtonův vzorec je základní metodou výpočtu Riemannova integrálu.

Úlohy:

11.2.1. Vypočtěte $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$.

$$[I = [\sin x]_{x=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \sin \frac{\pi}{2} - \sin(-\frac{\pi}{2}) = 1 - (-1) = 2.]$$

11.2.2. Vypočtěte $I = \int_e^{e^2} \frac{dx}{x \ln^2 x}$.

[Nejprve určíme primitivní funkci: $\int \frac{dx}{x \ln^2 x} = (\text{substitucí}) = -\frac{1}{\ln x} + C$. Pak

$$I = \left[-\frac{1}{\ln x} \right]_{x=e}^{e^2} = -\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{1} \right) = \frac{1}{2}.]$$

11.3. Základní vlastnosti určitého integrálu

Hodnota integrálu závisí jednak na integrované funkci (integrandu) a jednak na intervalu integrování. Dostáváme tak několik skupin vlastností integrovatelných funkcí a integrálu.

Vlastnosti závislé na integrované funkci

V (lineární vlastnosti):

(1) Je-li $f \in R(\langle a, b \rangle)$, $k \in \mathbf{R}$, pak $kf \in R(\langle a, b \rangle)$ a platí $\int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$.

(2) Je-li $f, g \in R(\langle a, b \rangle)$, pak $(f+g) \in R(\langle a, b \rangle)$ a platí $\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$.

Princip důkazu: Použijí se vlastnosti integrálních součtů. \square

V (vlastnosti vyjádřené nerovnostmi): Nechť $f, g \in R(\langle a, b \rangle)$.

(3) Je-li $f(x) \geq 0$ na $\langle a, b \rangle$, pak $\int_a^b f(x) dx \geq 0$.

(4) Je-li $f(x) \leq g(x)$ na $\langle a, b \rangle$, pak $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$.

(5) $|f(x)| \in R(\langle a, b \rangle)$ a platí $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$.

Princip důkazu: (3) plyne z definice, (4) ze (3) a (5) ze (4), neboť $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$. \square

V (o součinu funkcí): Je-li $f, g \in R(\langle a, b \rangle)$, pak i $fg \in R(\langle a, b \rangle)$.

Princip důkazu: Důkaz je založen na odhadu

$$|f(x'')g(x'') - f(x')g(x')| \leq |f(x'') - f(x')| \cdot L + |g(x'') - g(x')| \cdot K,$$

kde K, L jsou konstanty, pro něž $|f(x)| \leq K$, $|g(x)| \leq L$. \square

Vlastnosti závislé na intervalu integrování

V (aditivita integrálu): Nechť $a < c < b$. Pak $f \in R(\langle a, b \rangle) \Leftrightarrow f \in R(\langle a, c \rangle) \wedge f \in R(\langle c, b \rangle)$. Přitom platí

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Princip důkazu: Plyne z vlastností integrálních součtů, když bod c vezmeme za dělicí bod. \square

Tuto vlastnost lze rozšířit na konečný počet bodů $a = c_0 < c_1 < \dots < c_n = b$:

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^n \int_{c_{i-1}}^{c_i} f(x) dx.$$

Úloha 11.3.1. Vypočtěte $I = \int_0^3 |x-2| dx$.

$$[I = \int_0^2 (2-x) dx + \int_2^3 (x-2) dx = \dots]$$

Rozšíření definice Riemannova integrálu pro případ, že $a \geq b$:

Pro $a = b$ definujeme $\int_a^a f(x) dx = 0$.

Pro $a > b$ definujeme $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$.

Pak pro libovolné uspořádání bodů a, b, c platí $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$, pokud je funkce f integrovatelná v nejširším intervalu určeném body a, b, c .

11.4. Výpočet určitých integrálů

K výpočtu používáme zpravidla Newtonova vzorce, tj. najdeme primitivní funkci a pak použijeme Newtonův vzorec, viz 11.2, příklad 1 a 2.

Výpočet užitím substituce nebo per partes

Máme-li při výpočtu primitivní funkce použít substituci, pak můžeme postupovat přímo jako v 11.2, příklad 2, nebo můžeme provést *transformaci mezí*.

V: Je-li $f \in R(\langle a, b \rangle)$, φ má spojitou derivaci na $\langle \alpha, \beta \rangle$, přičemž $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, pak platí

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt.$$

Úloha 11.4.1. Vypočtěte $I = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$.

$$\begin{aligned} [I &= \left[\begin{array}{ll} x = \sin t & x=0 \Rightarrow t=0 \\ dx = \cos t dt & x=1 \Rightarrow t=\frac{\pi}{2} \end{array} \right] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \\ &= \left[\frac{1}{2} t + \sin 2t \right]_{t=0}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.] \end{aligned}$$

Podobně pro per partes platí

V: Jsou-li u', v' spojitě na $\langle a, b \rangle$, pak

$$\int_a^b u(x) v'(x) dx = [u(x) v(x)]_{x=a}^b - \int_a^b u'(x) v(x) dx.$$

Úloha 11.4.2. Vypočtěte $I = \int_0^{\pi} x \sin x dx$.

$$[I = \left[\begin{array}{ll} u = x & u' = 1 \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{array} \right] = [-x \cos x]_{x=0}^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos x dx = \dots = \pi.]$$

Integrál komplexní funkce reálné proměnné

Pojem určitého integrálu lze jednoduše rozšířit i na komplexní funkce reálné proměnné. Necht' $f_1, f_2 \in R(\langle a, b \rangle)$ a $f = f_1 + i f_2$. Pak definujeme

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} f_1(t) dt + i \int_{\alpha}^{\beta} f_2(t) dt.$$

Úloha 11.4.3. Rozhodněte, které vlastnosti integrálů reálných funkcí zůstávají zachovány i pro integrály komplexních funkcí.

Úloha 11.4.4. Vypočtěte $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{it} dt$.

$$[I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t + i \sin t) dt = [\sin t - i \cos t]_{t=0}^{\frac{\pi}{2}} = 1 + i .]$$

11.5. Další vlastnosti určitého integrálu

Věty o střední hodnotě

V (o střední hodnotě integrálního počtu): Necht' $f \in R(\langle a, b \rangle)$ a platí $m \leq f(x) \leq M$. Pak existuje číslo $\mu \in \langle m, M \rangle$ tak, že

$$\int_a^b f(x) dx = \mu(b-a).$$

Je-li f spojitá, pak existuje číslo $\xi \in \langle a, b \rangle$ tak, že

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a) f(\xi).$$

Princip důkazu: Nerovnost $m \leq f(x) \leq M$ integrujeme na $\langle a, b \rangle$ a výraz $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ označíme μ . Je-li m, M minimum a maximum funkce f spojitě na $\langle a, b \rangle$, pak podle věty o mezihodnotě nabývá f hodnoty $\mu \in \langle m, M \rangle$ v nějakém bodu $\xi \in \langle a, b \rangle$. \square

V (zobecněná věta o střední hodnotě integrálního počtu): Necht' $f, g \in R(\langle a, b \rangle)$, $g(x) \geq 0$, $m \leq f(x) \leq M$. Pak platí

$$m \int_a^b g(x) dx \leq \int_a^b f(x) g(x) dx \leq M \int_a^b g(x) dx$$

a existuje číslo $\mu \in \langle m, M \rangle$ tak, že platí

$$\int_a^b f(x) g(x) dx = \mu \int_a^b g(x) dx.$$

Je-li f spojitá, pak existuje číslo $\xi \in \langle a, b \rangle$ tak, že

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int_a^b g(x)dx.$$

Integrál jako funkce horní meze

Je-li $f \in R(\langle a, b \rangle)$, pak pro každé $x \in \langle a, b \rangle$ je $f \in R(\langle a, x \rangle)$ a $\int_a^x f(t) dt = \Phi(x)$ je integrál,

který je funkcí své horní meze x . Vzhledem k rozšířené definici integrálu lze za dolní mez zvolit libovolné číslo $c \in \langle a, b \rangle$.

V: Necht' funkce $f \in R(\langle a, b \rangle)$, $c \in \langle a, b \rangle$. Pak funkce $\Phi(x) = \int_c^x f(t) dt$ je spojitá na $\langle a, b \rangle$ a v každém bodě $x_0 \in \langle a, b \rangle$, v němž je f spojitá, má Φ derivaci (v krajních bodech a, b jednostrannou), pro niž $\Phi'(x_0) = f(x_0)$.

Princip důkazu: $\Phi(x_0 + h) - \Phi(x_0) = \int_c^{x_0+h} f(t) dt - \int_c^{x_0} f(t) dt = \int_{x_0}^{x_0+h} f(t) dt = \mu h$, kde

$\mu \in \langle m, M \rangle$ je střední hodnota, odkud plyne spojitost funkce Φ . Ve druhém případě se odvodí, že $\forall \varepsilon > 0 \exists U(x_0)$ tak, že $\forall x \in U(x_0)$ platí (t je mezi x a x_0):

$$\left| \frac{\Phi(x) - \Phi(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right| \leq \frac{1}{|x - x_0|} \left| \int_{x_0}^x |f(t) - f(x_0)| dt \right| < \frac{1}{|x - x_0|} \left| \int_{x_0}^x \varepsilon dt \right| < \dots < \varepsilon. \quad \square$$

Důsledky:

- (1) Každá funkce f spojitá na $\langle a, b \rangle$ má na tomto intervalu primitivní funkci Φ .
- (2) Každá funkce omezená a po částech spojitá na $\langle a, b \rangle$ má na tomto intervalu zobecněnou primitivní funkci; jednou z nich je funkce Φ (integrál jako funkce horní meze).

- * -