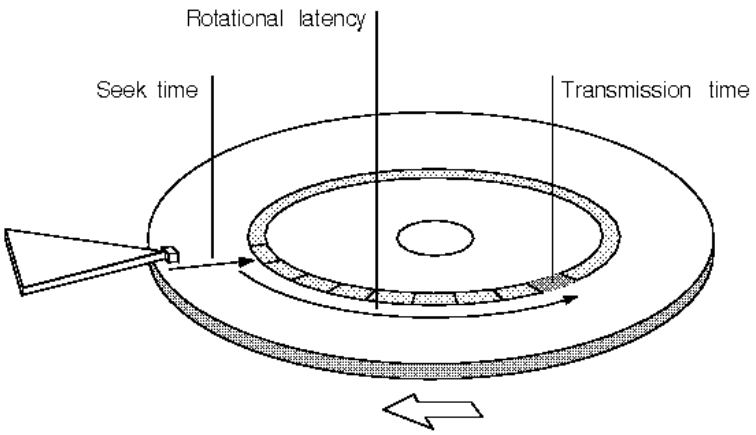
Binární vyhledávací stromy jsou vhodné pro případy, kdy celý vyhledávací strom je uložen v operační paměti počítače. Pokud máme vyhledávací strom uložen na vnější paměti (pevném disku), jsou výhodnější vyhledávací stromy, které mají větší velikost uzlů (ideálně je to násobek velikosti alokační bloku na disku – je označován jako cluster).



B-stromy

B-stromy jsou velmi významným typem vyhledávacích stromů. Na rozdíl od doposud uváděných stromů, kdy v každém uzlu byl uložen jeden prvek, B-stromy mají v uzlech uloženo více prvků. Struktura B-stromů je definována následujícími vlastnostmi:

- Kapacita uzlu (počet prvků, které lze do uzlu uložit) je u všech uzlů stromu stejná a volíme ji před začátkem vytváření stromu, kapacitu označme r ($r \geq 2$). Protože v B-stromech má významnou úlohu polovina z tohoto počtu, zaveďme pro ni samostatné označení $p = \frac{r}{2}$ pro r sudé a $p = \frac{r-1}{2}$ pro r liché.

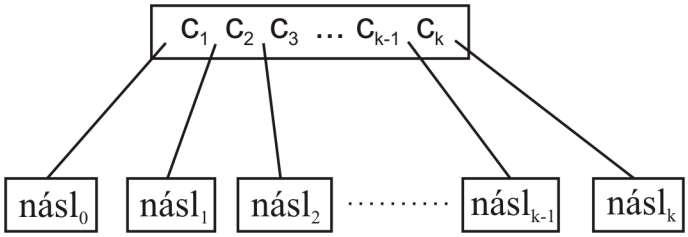
- Důležité pro efektivní využití uzlů je jejich zaplnění. Všechny uzly vyjma kořene musí být aspoň z poloviny zaplněny prvky pro r sudé nebo p prvky pro r liché, tedy počet prvků uložených v uzlech musí být v rozmezí $p..r$ prvků. Jedině u kořene stačí, aby obsahoval aspoň jeden prvek, tedy jeho zaplnění je v rozmezí $1..r$ prvků.

- Prvky uložené v uzlu jsou v něm seřazeny vzestupně dle velikosti.

c_1 c_2 c_3 … c_{k-1} c_k

$$c_1 < c_2 < c_3 < \ldots < c_{k-1} < c_k$$

- Uzel je buďto list anebo má o jednoho následníka více, než je počet prvků, které jsou v něm uloženy.



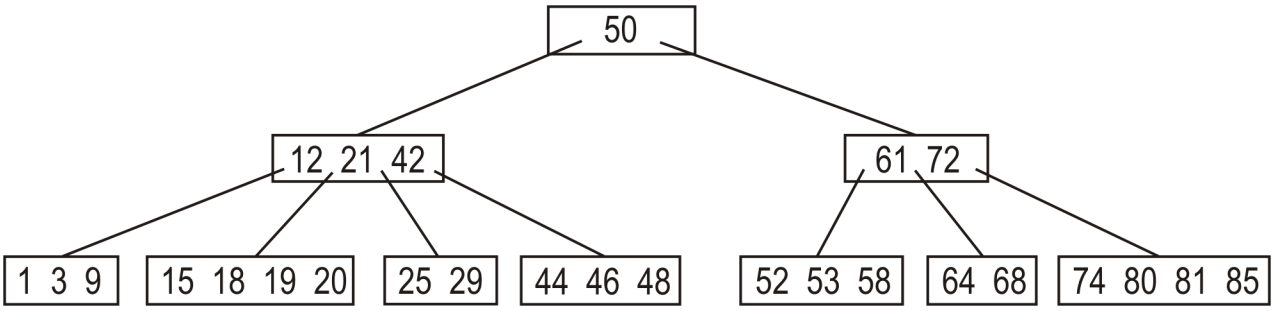
Přitom pro prvky v jednotlivých podstromech, které těmito následníky začínají, platí:

- Pro každý prvek d v podstromu začínající uzlem $násl_0$ platí $d < c_1$.
- Pro každý prvek d v podstromu začínající uzlem $násl_1$ platí $c_1 < d < c_2$.
- Pro každý prvek d v podstromu začínající uzlem $násl_2$ platí $c_2 < d < c_3$.
- ……
- Pro každý prvek d v podstromu začínající uzlem $násl_{k-1}$ platí $c_{k-1} < d < c_k$.
- Pro každý prvek d v podstromu začínající uzlem $násl_k$ platí $d > c_k$.

- A zbývá nám poslední vlastnost, jež určuje vyváženost B-stromu. Ta stanoví, že listy jsou v B-stromu jen v jeho poslední (nejspodnější) úrovni. Tj. vzdálenost všech listů od kořene je shodná a je rovna výšce stromu.

Podle maximálního počtu následníků rovněž označuje řád B-stromu. B-strom s kapacitou uzlu r má řád $r + 1$, neboť nelistový uzel může mít až $r + 1$ následníků.

Příklad. Na následujícím obrázku je B-strom pro $r = 4$. Prvky uložené v tomto stromu jsou celá čísla.



B-stromy vznikly v roce 1969, tedy 7 let po vzniku AVL stromů, jež pocházejí z roku 1962. B-stromy jsou hodně používány v databázových systémech.

Postup vyhledávání

1. Počáteční krok

Uzel, který je v daném okamžiku vyhledávání aktuální, budeme označovat u. Na začátku jím bude kořen stromu. Hledaný prvek nechť je x.

2. Průběžný krok

Vyhledáme prvek *x* mezi prvky uloženými v aktuálním uzlu *u*. Protože prvky jsou v uzlu setříděné, lze k tomu použít binární vyhledávání. To použijeme v případě, kdy kapacita uzlů je dostatečně velká, aby se to vyplatilo (např. $r \geq 10$). Vyhledání může skončit třemi způsoby:

- Prvek byl v aktuálním uzlu *u* nalezen, čímž vyhledávání úspěšně končí.
- Prvek nebyl v aktuálním uzlu *u* nalezen a tento uzel je list. Tím vyhledávání končí – hledaný prvek není ve stromu obsažen.
- Prvek nebyl v aktuálním uzlu *u* nalezen a tento uzel je nelistový. V tom případě vyhledávání skončilo v místě, kde je odkaz na následníka, ve kterém vyhledávání má pokračovat (tj. na následníka, kterým začíná podstrom, jež by hledaný prvek měl obsahovat). Tohoto následníka učiníme novým aktuálním uzlem a opět se udělá krok 2.

Postup přidání prvku

Chceme-li do B-stromu přidat prvek, znamená to najít příslušný uzel, do kterého nový prvek patří, a následně ověřit, zda přitom nedošlo k přeplnění, a pokud ano, provést rozdělení uzlu.

1. Přidání prvku

Označme přidávaný prvek *x*. Uděláme jeho vyhledání ve stromu. Použijeme k tomu již popsaný algoritmus pro vyhledání. Ten může skončit dvěma způsoby:

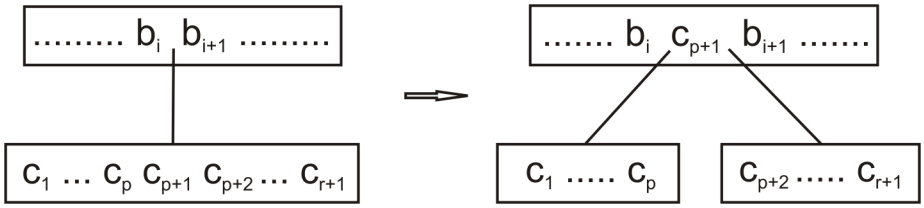
- Prvek *x* byl ve stromu nalezen. Tím přidávání končí, neboť prvek *x* už je ve stromu obsažen (u vyhledávacích stromů se nepředpokládá vícenásobný výskyt stejného prvku).
- Vyhledávání skončilo v listovém uzlu *u* v místě, kam nový prvek podle velikosti vzhledem k ostatním prvků patří. Prvek na toto místo vložíme. Pokud uzel *u* nebyl předtím zcela zaplněný, operace přidání tím končí. Jinak následuje rozdělení uzlu.

2. Rozdělení uzlu

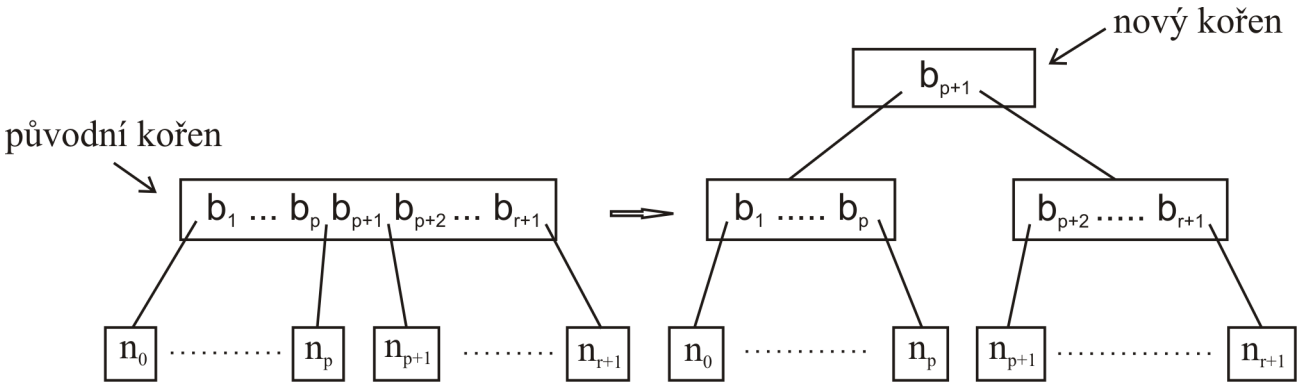
Jestliže uzel *u* má po přidání $r+1$ prvků, tedy došlo k jeho přeplnění, rozdělíme ho na tři části:

p prvků na začátku uzlu + prvek uprostřed uzlu + *p* prvků na konci uzlu.

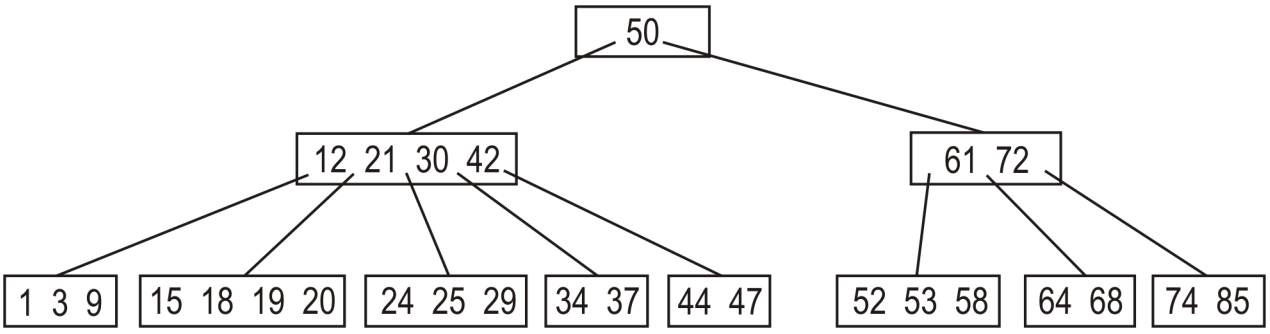
Části s *p* prvky budou tvořit nové listy. Prvek, jenž je v uzlu *u* uprostřed, se přesune do předchůdce na místo, kde byl původní odkaz na list. Po přesunu vytvoříme nalevo a napravo od něho odkazy na nově vzniklé listy.



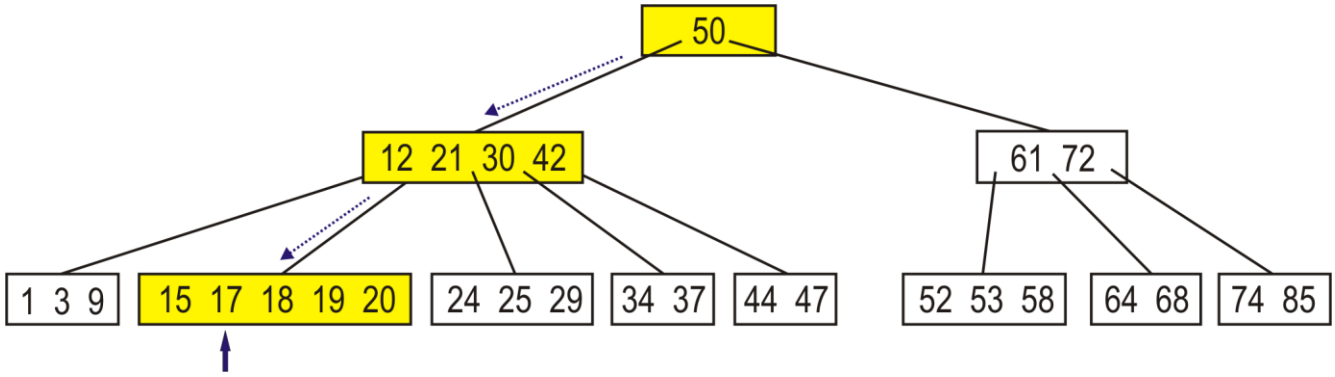
Po přidání uzlu do předchůdce v něm může rovněž dojít k jeho přeplnění, pokud předtím byl zcela zaplněn. To se řeší stejným způsobem – rozdělením tohoto uzlu na tři části s počtem prvků p+1+p. Dvě jeho části s p prvky budou tvořit nové uzly a zbývající prostřední prvek vložíme do jeho předchůdce. Takto postupujeme směrem nahoru, až buďto narazíme na uzel, u kterého po vložení dalšího prvku nedojde k přeplnění, anebo se nakonec dostaneme až ke kořenu. Pokud i u něho dojde k přeplnění, rozdělí se opět na tři části, přičemž střední prvek bude umístěn do samostatného uzlu, který bude novým kořenem. V této situaci dojde ke zvětšení výšky stromu.



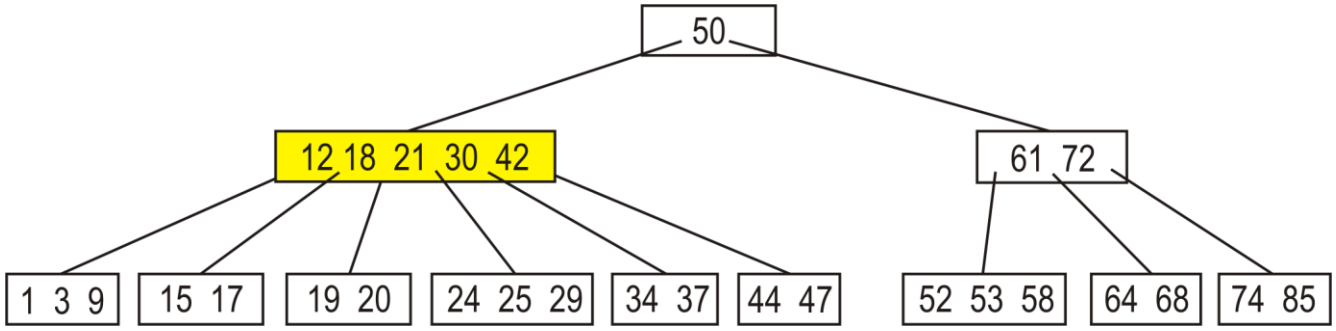
Příklad. K následujícímu B-stromu ($r = 4$)



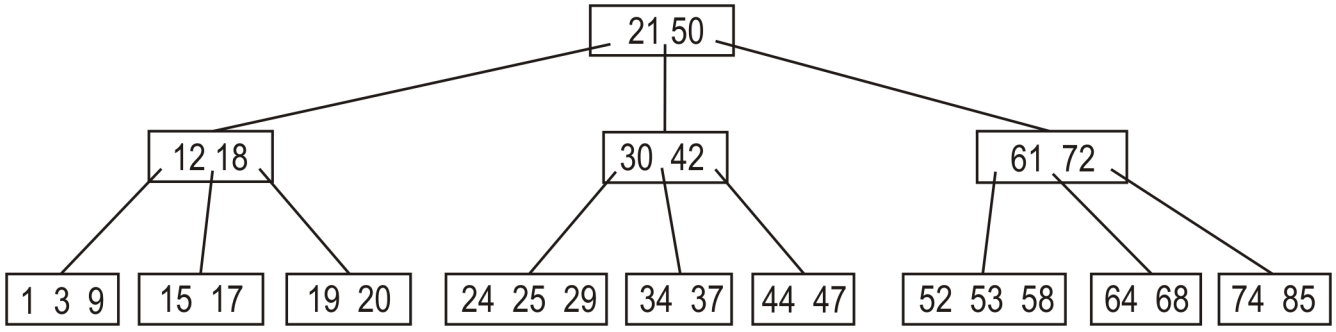
přidáme prvek 17. Následující obrázek ukazuje postup vyhledání příslušného místa, kam prvek patří, a vložení prvku.



Protože list, do kterého byl prvek 17 vložen, nyní obsahuje 5 prvků, je zapotřebí ho rozdělit.



Je zřejmé, že nyní je přeplněn předchozí uzel, do něhož byl přesunut střední prvek z rozděleného listu. Je zapotřebí rozdělit i tento uzel.



Postup odebrání prvku

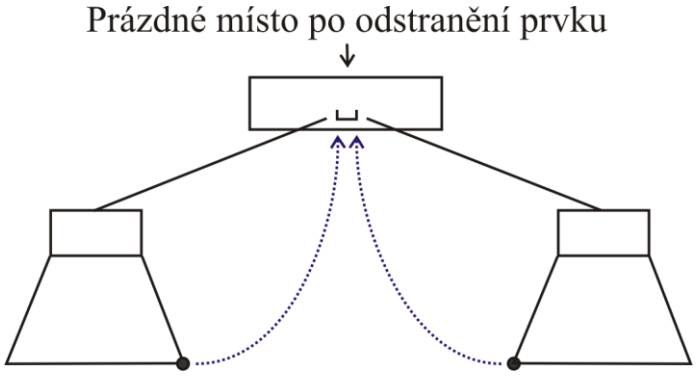
Chceme-li z B-stromu odebrat prvek, znamená to vyhledat uzel, ve kterém se prvek nachází, prvek z něho odstranit a následně ověřit, zda odebráním prvku neklesl počet prvků v daném uzlu pod přípustnou mez, a pokud ano, je nutné to vyřešit.

1. Odebrání prvku

Označme odstraňovaný prvek *x*. Vyhledáme ho ve stromu. Použijeme k tomu již uvedený algoritmus vyhledání. Ten může skončit třemi způsoby:

- Prvek *x* nebyl ve stromu nalezen – není co odebrat.

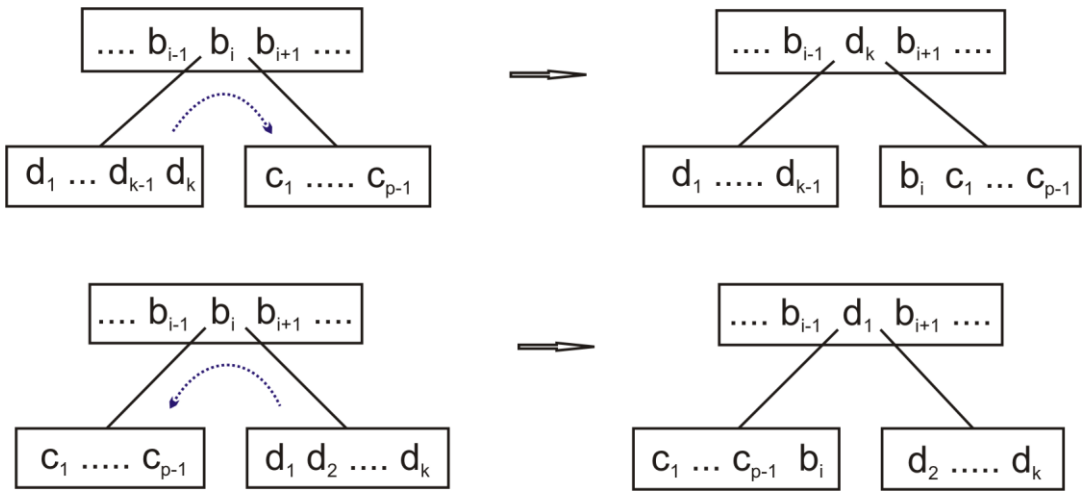
- Prvek *x* byl nalezen v listovém uzlu. Prvek z uzlu odstraníme. Pokud list je po zrušení prvku aspoň z poloviny zaplněn, operace odebrání končí. Jinak přejdeme ke kroku 2.
- Prvek *x* byl nalezen v uzlu *u*, který není listem. Prvek *x* z uzlu odstraníme a na volné místo v uzlu *u* přesuneme buďto největší prvek z jeho levého podstromu, což je poslední prvek v nejpravějším listu levého podstromu, anebo na volné místo přesuneme nejmenší prvek z jeho pravého podstromu, což je první prvek v nejlevějším listu pravého podstromu. Pokud list, odkud jsme prvek přesunuli, je stále aspoň z poloviny zaplněn, operace odebrání prvku končí. Jinak přejdeme ke kroku 2.



2. Nedostatečný počet prvků v uzlu

Sem se dostaneme v situaci, kdy po odstranění prvku ze stromu je nyní ve stromu list *v*, který má jen *p*-1 prvků. Jak se tento stav řeší, závisí na zaplnění sourozenců listu. (Sourozenec uzlu je uzel, který s ním sousedí a má i stejného předchůdce – rodiče.) Jsou dvě možnosti:

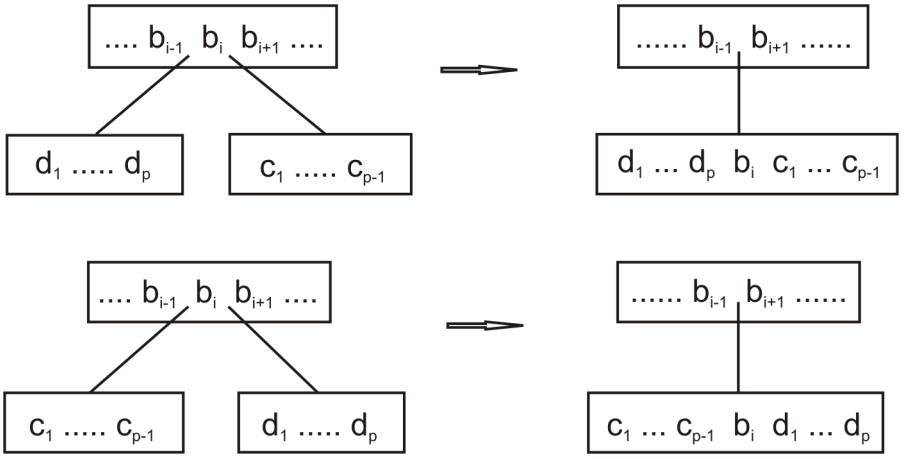
- List *v* má aspoň jednoho sourozence, který má více než *p* prvků. Pak do listu *v* přesuneme prvek z předchůdce a na prázdné místo v předchůdci přesuneme příslušný prvek ze souseda. Následující obrázek ukazuje tento přesun pro oba možné sourozence, nejdříve pro levého sourozence, pak pro pravého sourozence (prvku uzlu *v* jsou značeny písmenem *c*).



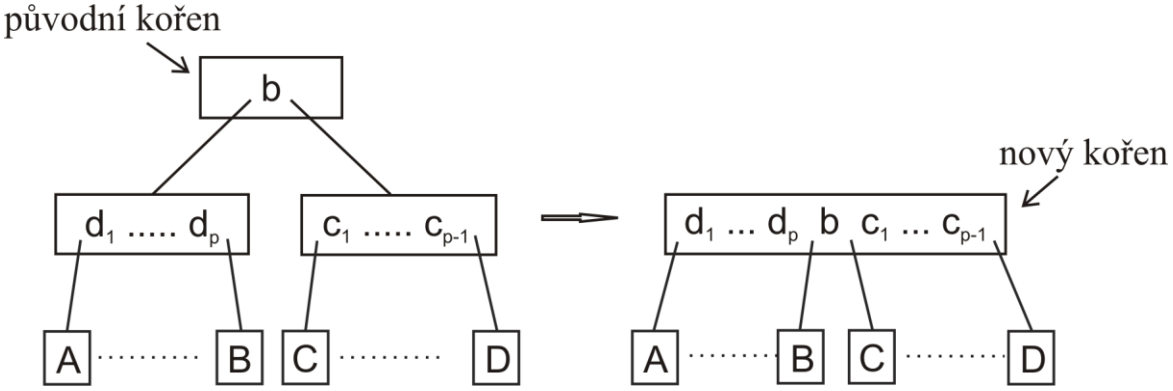
- List v má jen sourozence, kteří mají právě p prvků. Pak vytvoříme nový list s r prvky tak, že sloučíme

  prvky z listu v + prvek z předchůdce + prvky ze sourozence.

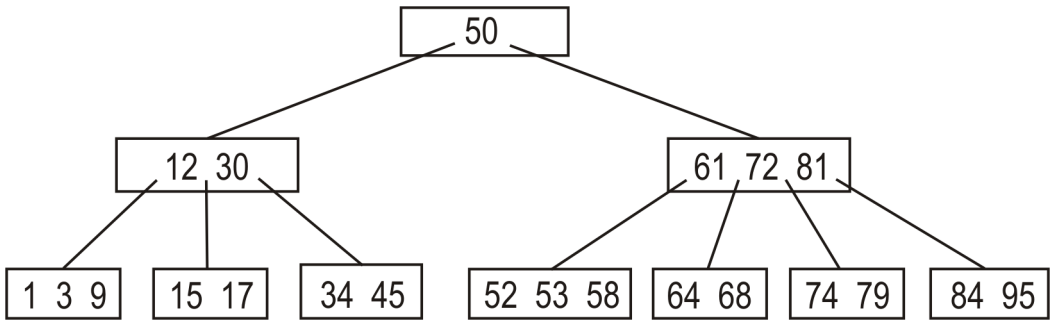
  Následující obrázek ukazuje toto sloučení opět pro oba možné sourozence – levého i pravého (prvku uzlu v jsou značeny písmenem c).



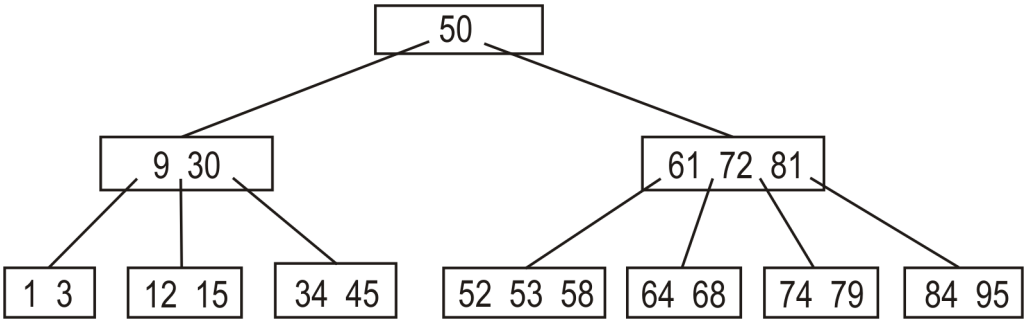
Je zřejmé, že tímto ubyl jeden prvek v předchůdci. Pokud tento má nyní jen p-1 prvků, řeší se to analogicky v závislosti na tom, kolik prvků mají jeho sourozenci. Takto se můžeme případně dostat až k uzlu, nad kterým už je jen kořen. Pokud dojde k jeho sloučení se sourozencem a prvkem z kořene a přitom v kořenu byl předtím jen jeden prvek, stane se uzel vytvořený sloučením novým kořenem a dojde zároveň ke snížení výšky stromu. Na následujícím obrázku je tato situace pro případ, kdy je nedostatečně obsazený uzel sloučen s levým sourozencem.



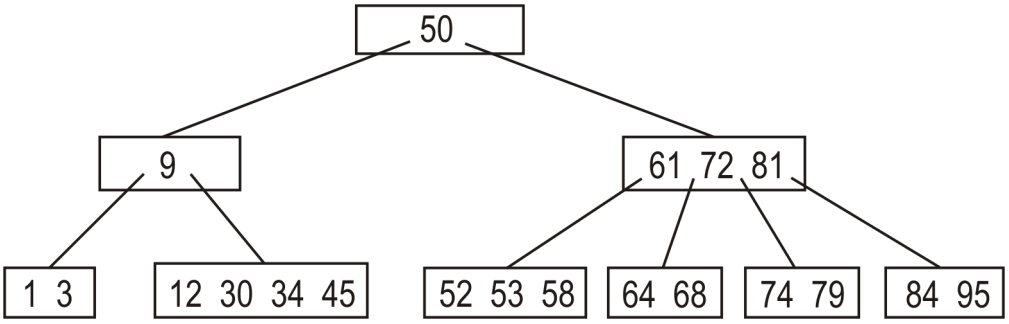
Příklad. Z následujícího B-stromu ($r = 4$)



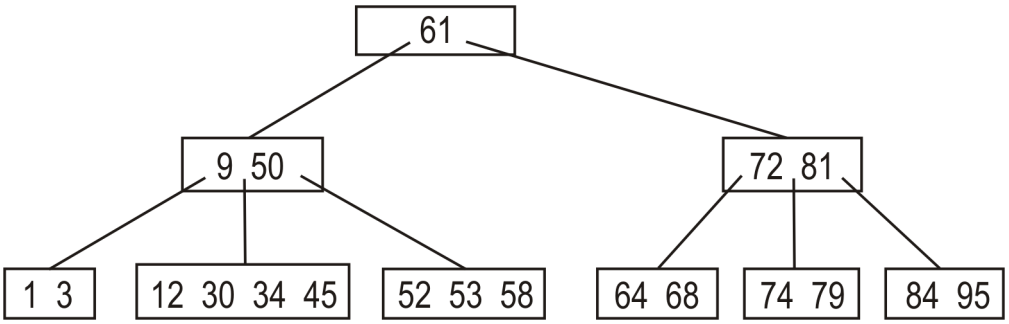
odebereme prvek 17. Po odstranění prvku z daného listu zůstane v něm jen prvek 15. Tento list má ale levého sourozence, který má více než 2 prvky. Proto přesuneme prvek 9 z jeho levého sourozence do předchůdce a prvek 12 z předchůdce přesuneme do nedostatečně zaplněného listu s prvkem 15.



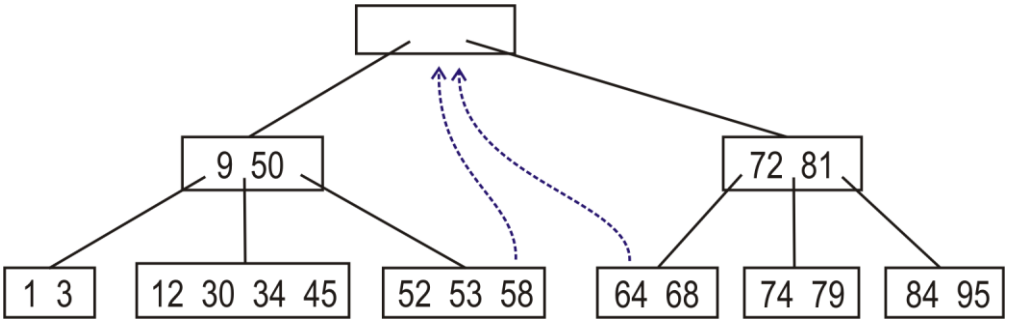
Odebereme dále prvek 15. V listu zůstane opět jen jeden prvek 12. List už ale nemá žádného sourozence, z kterého by se dal přesunout prvek, proto ho sloučíme se sousedním listem. Vybereme k tomu třeba pravého souseda.



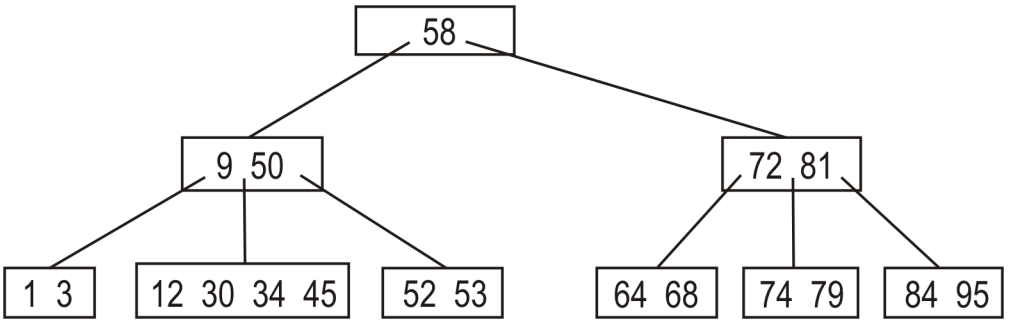
Při slučování byl odebrán prvek z předchůdce, ve kterém tímto zůstal jen jeden prvek 9. Tento uzel má ale pravého sourozence, který má více než dva prvky, čímž můžeme z něho prvek přesunout. Celý přesun se udělá tak, že do uzlu s prvkem 9 se přesune prvek z jeho předchůdce (v tomto případě kořene) a na volné místo v předchůdci se přesune zmíněný prvek ze souseda. Přitom se příslušně přesune i ukazatel na jeho následníka – na list s prvky 52,53,58.



Odebereme prvek 61. Tento prvek je v nelistovém uzlu, jsou dvě možné náhrady, jak ukazuje následující obrázek.



Nahradíme ho třeba prvkem 58 z levého podstromu.



Časová složitost operací

Vezměme operaci vyhledávání. Ta zahrnuje vyhledávání v uzlu. Pro ně je použito binární vyhledávání, které má logaritmickou složitost. A dále operace vyhledávání znamená procházení uzlů od kořene k listu. Ověříme, že výška stromu logaritmicky závisí na počtu prvků v něm. Vezmeme strom výšky h s kapacitou uzlu r. Minimální počet prvků v jednotlivých úrovních ukazuje následující tabulka $\left(p = \frac{r}{2} \right)$.

Úroveň	Počet uzlů	Počet prvků
0	1 (kořen)	1
1	2	$2p$
2	$2(p+1)$	$2p(p+1)$
3	$2(p+1)^2$	$2p(p+1)^2$
4	$2(p+1)^3$	$2p(p+1)^3$
….	…..	…..
h	$2(p+1)^{h-1}$	$2p(p+1)^{h-1}$

$$n = 1 + 2p\left(1 + (p+1) + (p+1)^2 + \ldots + (p+1)^{h-1}\right) = 1 + 2p\left(\frac{(p+1)^h - 1}{(p+1) - 1}\right)$$

$$n = 1 + 2\left((p+1)^h - 1\right) = 2(p+1)^h - 1$$

$$n+1=2(p+1)^h$$

$$h=\log_{p+1}\left(\frac{n+1}{2}\right) \Rightarrow h=\Theta(\log(n))$$

Vyhledávání má logaritmickou složitost.

Základem zbývajících operací (přidání prvku, odebrání prvku) je vyhledávání a dále průchod stromem směrem nahoru. Složitost průchodu směrem nahoru je závislá na výšce stromu, která má logaritmickou složitost. Z čehož plyne, že i tyto operace mají logaritmickou složitost.

B+ stromy

V databázových systémech se standardně ukládají strukturované datové prvky tvořené dvojicemi *vyhledávací klíč* + *data*. Zde se používá modifikace B-stromů označovaná jako B+ stromy. Hlavní rozdíl:

V B-stromech jsou uloženy vyhledávací klíče spolu s daty. Uložení je v interních i listových uzlech.

V B+ stromech jsou v interních uzlech uloženy jen vyhledávací klíče. Data jsou uložena výlučně v listových uzlech.