Frekvenční doména

Počítačová grafika

Mgr. Markéta Trnečková, Ph.D.

Palacký University, Olomouc

Reprezentace obrazu

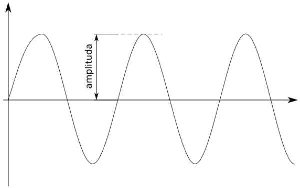
Dvourozměrná diskrétní obrazová funkce = prostorová doména

$f(x, y)$

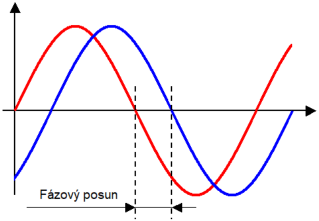
Reprezentace pomocí sinusových signálů = frekvenční doména

Fourierův obraz

amplituda



fázový posun



Spojitá Fourierova transformace

Jednorozměrná

$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i2\pi ux}dx$

Zpětná FT

$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(u)e^{+i2\pi ux}du$

Frekvenční doména

$F(u) = R(u) + iI(u)$

$F(u) = |F(u)|\dot{e}^{i\varphi(u)}$

Modul

$|F(u)| = \sqrt{R^2(u) + I^2(u)}$

Fáze

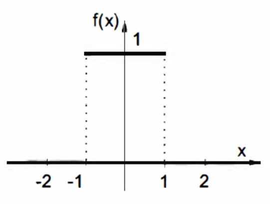
$\varphi(u) = tan^{-1}\left(\frac{I(u)}{R(u)}\right)$

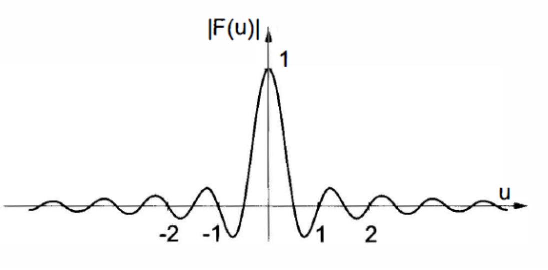
Fourierovo spektrum

$P(u) = |F(u)|^2 = R^2(u) + I^2(u)$

Eulerova formule

$e^{-i2\pi ux} = cos(2\pi ux) - isin(2\pi ux)$





Dvourozměrná Fourierova transformace

Dvourozměrná FT

$F(u,v) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)e^{-i2\pi(ux+vy)}dxdy$

Zpětná dvourozměrná FT

$f(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(u,v)e^{+i2\pi(ux+vy)}dudv$

Diskrétní Fourierova transformace

FT

$F(u) = \sum_{x=0}^{N-1} f(x) e^{-i2\pi \frac{ux}{N}}$

Zpětná FT

$f(x) = \frac{1}{N} \sum_{u=0}^{N-1} F(u) e^{+i2\pi \frac{ux}{N}}$

Diskrétní Fourierova transformace

Dvourozměrná FT

$F(u,v) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) e^{-i2\pi(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N})}$

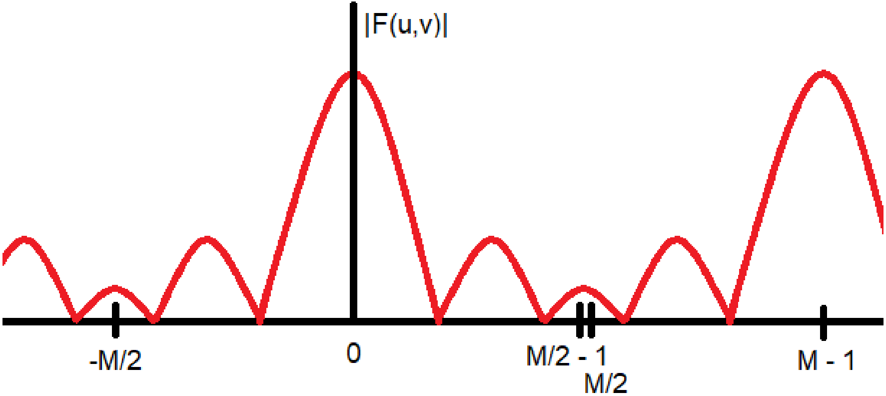
Zpětná dvourozměrná FT

$f(x,y) = \frac{1}{M} \frac{1}{N} \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u,v) e^{+i2\pi(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N})}$

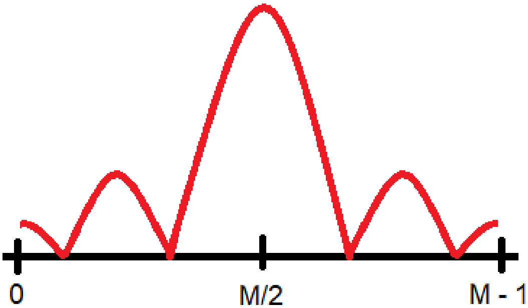
Diskrétní Fourierova transformace

- **dc komponenta** $= F(0,0)$
- $F(u,v) = R(u,v) + iI(u,v)$
- **spektrum** $= |F(u)| = \sqrt[2]{R^2(u) + I^2(u)}$
- **Power spektrum** $= P(u) = |F(u)|^2 = R^2(u) + I^2(u)$
- **fázový úhel** $= \varphi(u) = tan^{-1}\left(\frac{I(u)}{R(u)}\right)$

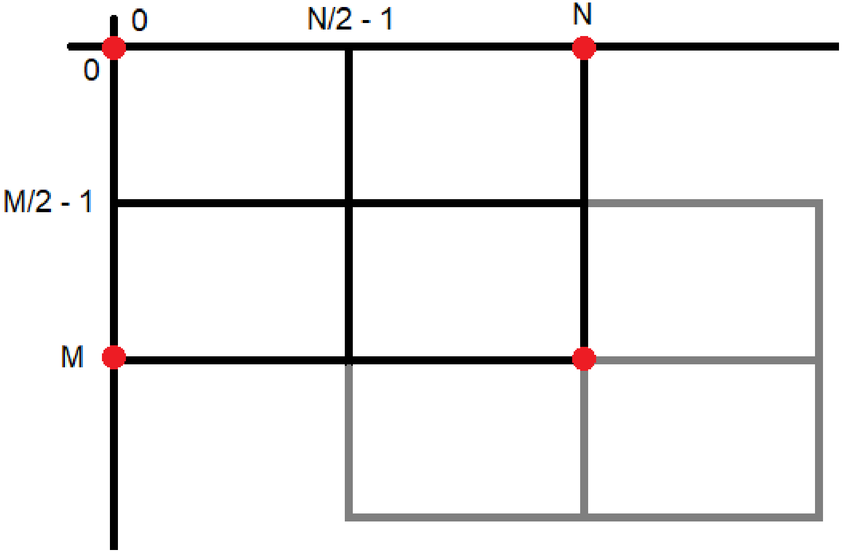
Diskrétní Fourierova transformace



Diskrétní Fourierova transformace



Diskrétní Fourierova transformace



Rychlá FT

$F(u) = \sum_{x=0}^{N-1} f(x) w_N^{ux}$

$w_N = e^{-i2\pi/N} = \cos(-2\pi/N) + i\sin(-2\pi/N)$

$F(u) = \sum_{x=0}^{N-1} f(x) e^{-i2\pi\frac{ux}{N}} = \sum_{x=0}^{\frac{N}{2}-1} f(2x) e^{-i2\pi u\frac{2x}{N}} + \sum_{x=0}^{\frac{N}{2}-1} f(2x+1) e^{-i2\pi u\frac{2x+1}{N}} =$
$\sum_{x=0}^{\frac{N}{2}-1} f(2x) e^{-i2\pi ux/\frac{N}{2}} + w^u \sum_{x=0}^{\frac{N}{2}-1} f(2x+1) e^{-i2\pi ux/\frac{N}{2}} = F^e(u) + w^u F^o(u)$

$F^e(u+\frac{N}{2}) = F^e(u)$, $F^o(u+\frac{N}{2}) = F^o(u)$

$w^{u+\frac{N}{2}} = -w^u$

$F(u) = F^e(u) + w^u F^o(u)$ pro $0 \leq u \leq N/2$

$F(u+\frac{N}{2}) = F^e(u) - w^u F^o(u)$

RecursiveFFT(f)

```
N = lenght(f);
if N = 1 then
    return f;
end
```

$\omega_n \leftarrow e^{-i2\pi/n}$;

$\omega \leftarrow 1$;

$f^e \leftarrow$ body se sudým indexem;

$f^o \leftarrow$ body s lichým indexem;

$y^e \leftarrow$ **recursiveFFT** (f^e);

$y^o \leftarrow$ **recursiveFFT** (f^o);

for $k \leftarrow 0$ **to** $\frac{n}{2} - 1$ **do**

  $y(k) \leftarrow y^e(k) + \omega y^o(k)$;

  $y(k + \frac{n}{2}) \leftarrow y^e(k) - \omega y^o(k)$;

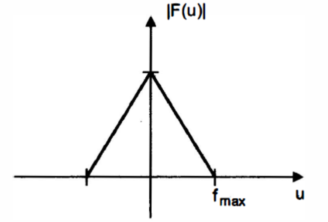
  $\omega \leftarrow \omega\omega_n$;

end

return y

Shannonův vzorkovací teorém

Signál spojitý v čase je plně určen posloupností vzorků odebíraných ve stejných intervalech $\Delta x \Leftrightarrow f_s = \frac{1}{\Delta x} > 2 \cdot f_{max}$.



Konvoluce

Diskrétní konvoluce
$h(x,y) * f(x,y) = \sum_{s=-a}^{a} \sum_{t=-b}^{b} h(s,t) f(x-s, y-t)$

konvoluční maska $h(x,y)$

Konvoluční teorém
$f(x,y) * h(x,y) \Leftrightarrow F(u,v) \cdot H(u,v)$
$F(u,v) * H(u,v) \Leftrightarrow f(x,y) \cdot h(x,y)$

Filtrování ve frekvenční doméně

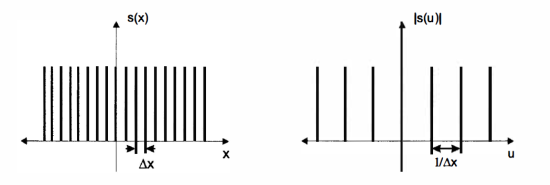
$$f(x, y) * h(x, y) \Leftrightarrow F(u, v) \cdot H(u, v)$$

- **filtr**: $H(u, v)$

- **Vyhlazovací = low pass filtery**:
  - ideal
  - Butterworth
  - Gaussian
- **Ostřící = high pass filtery**:
  - ideal
  - Butterworth
  - Gaussian

Vzorkování a konvoluce

Diracův pulz $\delta(x) = 0, \forall x \neq 0$ a $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1$
vzorkovací funkce $s(x) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta(x - i\Delta x)$

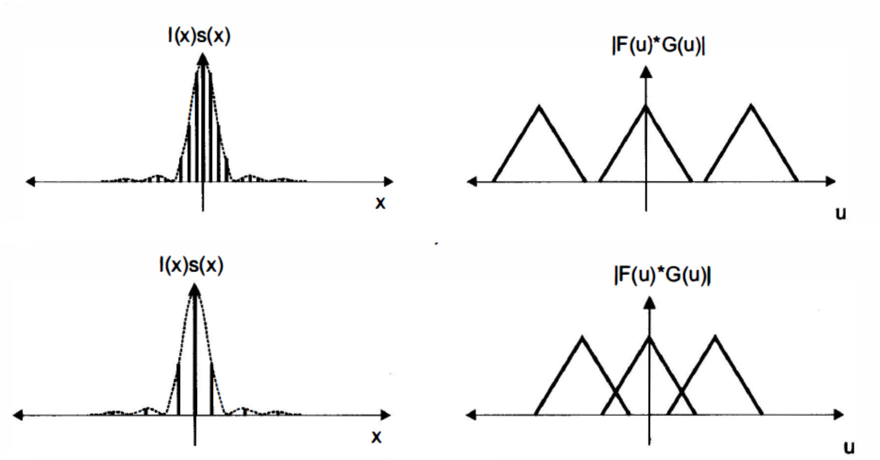


Fourierův obraz
$S(u) = \frac{1}{\Delta x} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta\left(\frac{u-i}{\Delta x}\right)$

Vzorkování a konvoluce

Vzorkování $f(x)s(x)$

$$I(x) = f(x)s(x) \Leftrightarrow \frac{1}{\Delta x} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta\left(\frac{u-i}{\Delta x}\right)$$



Matlab

```
F = fft2(f)
S = abs(F)
Fc = fftshift(F)
Fcl = log(1 + abs(F))
F2 = ifftshift(Fc)
f2 = ifft2(F2)
real(f2)
```