Úvod do informačních technologií

Jan Outrata

KATEDRA INFORMATIKY
UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI

přednášky

Binární logika

Číselné soustavy (1)

Počítač = počítací stroj . . . počítání s čísly

Člověk:

- deset hodnot (deset prstů na rukách), deset symbolů (číslic, **0** až **9**)
- použití **desítkové (dekadické) poziční číselné soustavy**: číslo jako součet mocninné řady o základu (radixu) 10, zápis = posloupnost symbolů pro koeficienty řady, pozice (pořadí) symbolu určuje mocninu (řád)

$$(1024)_{10} = 1 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0$$

- jiné číselné soustavy: dvanáctková (hodiny), šedesátková (minuty, sekundy), dvacítková (dřívější platidla) aj.

Číselné soustavy (2)

Věta (O reprezentaci přirozených čísel (včetně 0))

Libovolné přirozené číslo N (včetně 0) lze vyjádřit jako součet mocninné řady o základu $B \geq 2, B \in \mathbb{N}$:

$$N = a_{n-1} \cdot B^{n-1} + a_{n-2} \cdot B^{n-2} + \cdots + a_1 \cdot B^1 + a_0 \cdot B^0,$$

kde $0 \leq a_i < B, a_i \in \mathbb{N}$ jsou koeficienty řady.

Číslo N se (v poziční číselné soustavě o základu B) zapisuje jako řetěz symbolů (číslic) S_i pro koeficienty a_i zleva v pořadí pro i od $n-1$ k 0:

$$(S_{n-1}S_{n-2}\ldots S_1S_0)_B$$

Číselné soustavy (2)

Získání (hodnoty) čísla N z jeho zápisu $(S_{n-1}S_{n-2}\dots S_1S_0)_B$ postupným přičítáním:

$N = a_0$
$B' = B$
for $i = 1$ **to** $n-1$ **do**
  $N = N + a_i * B'$
  $B' = B' * B$

Získání zápisu $(S_{n-1}S_{n-2}\dots S_1S_0)_B$ čísla N (dané hodnoty) postupným odečítáním:

$B' = 1, i = 0$
while $B' * B \leq N$ **do**
  $B' = B' * B$
  $i = i + 1$
for i **to** 0 **do**
  $a_i = N/B'$; celočíselné dělení
  $N = N - a_i * B'$; $= N \bmod B'$
  $B' = B'/B$

Číselné soustavy (2)

Získání (hodnoty) čísla N z jeho zápisu $(S_{n-1}S_{n-2}\dots S_1S_0)_B$ postupným přičítáním:

$N = a_0$
$B' = B$
for $i = 1$ **to** $n-1$ **do**
  $N = N + a_i * B$
  $B' = B' * B$

Získání zápisu $(S_{n-1}S_{n-2}\dots S_1S_0)_B$ čísla N (dané hodnoty) postupným odečítáním:

$B' = 1, i = 0$
while $B' * B \leq N$ **do**
  $B' = B' * B$
  $i = i + 1$
for i **to** 0 **do**
  $a_i = N/B'$; celočíselné dělení
  $N = N - a_i * B'$; $= N \bmod B'$
  $B' = B'/B$

Číselné soustavy (3)

$$\begin{aligned} N &= a_{n-1} \cdot B^{n-1} + a_{n-2} \cdot B^{n-2} + \cdots + a_1 \cdot B + a_0 \\ &= (\cdots (a_{n-1} \cdot B + a_{n-2}) \cdot B + \cdots + a_1) \cdot B + a_0 \end{aligned}$$

Získání (hodnoty) čísla N z jeho zápisu $(S_{n-1}S_{n-2}\ldots S_1S_0)_B$ postupným násobením:

$N = a_{n-1}$
for $i = n-2$ **to** 0 **do**
  $N = N * B + a_i$

Získání zápisu $(S_{n-1}S_{n-2}\ldots S_1S_0)_B$ čísla N (dané hodnoty) postupným dělením:

$a_0 = N \bmod B$
$i = 1$
while $N \geq B$ **do**
  $N = N/B$; celočíselné dělení
  $a_i = N \bmod B$
  $i = i + 1$

Číselné soustavy (3)

$$\begin{aligned} N &= a_{n-1} \cdot B^{n-1} + a_{n-2} \cdot B^{n-2} + \cdots + a_1 \cdot B + a_0 \\ &= (\cdots (a_{n-1} \cdot B + a_{n-2}) \cdot B + \cdots + a_1) \cdot B + a_0 \end{aligned}$$

Získání (hodnoty) čísla N z jeho zápisu $(S_{n-1}S_{n-2}\ldots S_1S_0)_B$ postupným násobením:

$N = a_{n-1}$
for $i = n-2$ **to** 0 **do**
  $N = N * B + a_i$

Získání zápisu $(S_{n-1}S_{n-2}\ldots S_1S_0)_B$ čísla N (dané hodnoty) postupným dělením:

$a_0 = N \bmod B$
$i = 1$
while $N \geq B$ **do**
  $N = N/B$; celočíselné dělení
  $a_i = N \bmod B$
  $i = i + 1$

Číselné soustavy (3)

$$\begin{aligned} N &= a_{n-1} \cdot B^{n-1} + a_{n-2} \cdot B^{n-2} + \cdots + a_1 \cdot B + a_0 \\ &= (\cdots (a_{n-1} \cdot B + a_{n-2}) \cdot B + \cdots + a_1) \cdot B + a_0 \end{aligned}$$

Získání (hodnoty) čísla N z jeho zápisu $(S_{n-1}S_{n-2}\ldots S_1S_0)_B$ postupným násobením:

$N = a_{n-1}$
for $i = n-2$ **to** 0 **do**
  $N = N * B + a_i$

Získání zápisu $(S_{n-1}S_{n-2}\ldots S_1S_0)_B$ čísla N (dané hodnoty) postupným dělením:

$a_0 = N \bmod B$
$i = 1$
while $N \geq B$ **do**
  $N = N/B$; celočíselné dělení
  $a_i = N \bmod B$
  $i = i + 1$

ÚKOL

1. Pro několik čísel zjistěte (hodnotu) čísla ze zápisů ve dvojkové, osmičkové, desítkové a šestnáctkové soustavě.
2. Pro několik čísel zjistěte zápis čísla (dané hodnoty) ve dvojkové, osmičkové, desítkové a šestnáctkové soustavě.

Číselné soustavy (4)

Počítač:

- první mechanické počítací stroje dekadické, tj. používající desítkovou soustavu
- mechanické součásti mající 10 stabilních stavů = deset hodnot
- elektromechanické a elektronické součásti: nejsnadněji realizovatelné **2 stabilní stavy** (relé sepnuto/rozepnuto, elektronkou či tranzistorem proud prochází/neprochází, mezi částmi integrovaného obvodu je/není napětí) = 2 hodnoty, 2 symboly (číslice, **0** a **1**) → **digitální zařízení**
- použití **dvojkové (binární) poziční číselné soustavy**: číslo jako součet mocninné řady o základu 2, zápis = posloupnost symbolů pro koeficienty, pozice symbolu určuje mocninu

$$(11)_{10} = (1011)_2 = 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$$

Dlaší typy dat (čísla s řádovou čárkou, znaky), odvozeny od (celých) čísel → **binární reprezentace** všech typů dat.

Číselné soustavy (5)

Počítač pro člověka:

- použití pozičních číselných soustav o základu 2^k ($k \in \mathbb{N}$):
  - **osmičkové (oktalové)**: symboly (číslice) **0** až **7**
  - **šestnáctkové (hexadecimální)**: symboly (číslice) **0** až **9** a **A** až **F**
- jednoduchý převod mezi soustavami:

Převod zápisu čísla v soustavě o základu B^k ($k \in \mathbb{N}$) na zápis v soustavě o základu B (a naopak):

každý symbol soustavy o základu B^k zapisující nějaké číslo nahradíme k-ticí symbolů soustavy o základu B zapisující stejné číslo (a naopak, k-tice symbolů v zápisu brány zprava, chybějící symboly nahrazeny 0)

Binární logika (1)

Základní operace v počítači = logické operace

- formální logický základ = **výroková logika** – zkoumá pravdivostní hodnotu výroků (pravda/nepravda, spojky/operátory "neplatí, že" $\rightarrow$ operace negace $\neg$, "a současně platí" $\rightarrow$ konjunkce $\wedge$, "nebo platí" $\rightarrow$ disjunkce $\vee$, "jestliže platí, pak platí" $\rightarrow$ implikace $\Rightarrow$ aj.)
- výroky = **logické výrazy** vyhodnocované na hodnoty pravda/nepravda, 1/0
- matematický aparát pro práci s log. výrazy: **Booleova algebra (binární, dvoustavová, logika)**, George Boole, množiny
- fyzická realizace – **logické elektronické obvody** – základ digitálních zařízení
- binární logika: univerzální, teoreticky zvládnutá, efektivně realizovatelná logickými el. obvody

Binární logika (2)

Logická proměnná $\mathbf{x}$

- veličina nabývající dvou možných diskrétních logických hodnot: $\mathbf{0}$ (nepravda) a $\mathbf{I}$ (pravda)
- definice: $x = \mathbf{I}$ jestliže $x \neq \mathbf{0}$ a $x = \mathbf{0}$ jestliže $x \neq \mathbf{I}$

Logická funkce $\mathbf{f(x_1, \ldots, x_n)}$

- funkce n logických proměnných $x_1, \ldots, x_n$ nabývající dvou možných diskrétních hodnot $\mathbf{0}$ (nepravda) a $\mathbf{I}$ (pravda)
- logická proměnná = logická funkce identity proměnné, skládání funkcí
- základní = **logické operace**

Booleova algebra (binární logika)

- algebra logických proměnných a logických funkcí
- dvouhodnotová algebra, algebra dvou stavů
- relace rovnosti: $f = g$, právě když $(f = \mathbf{I} \wedge g = \mathbf{I}) \vee (f = \mathbf{0} \wedge g = \mathbf{0})$

Logické operace (1)

3 základní:

Negace (inverze)

- pravdivá, když operand nepravdivý, jinak nepravdivá

x	$\overline{x}$
0	**I**
I	**0**

- operátory: $\overline{x}$, $\mathrm{NOT}\ x$, $\neg x$ (výrokově negace, algebraicky negace), $\overline{X}$ (množinově doplněk)

Logické operace (2)

Logický součin (konjunkce)

- pravdivá, když oba operandy pravdivé, jinak nepravdivá

x	y	$x \cdot y$
0	**0**	**0**
0	**I**	**0**
I	**0**	**0**
I	**I**	**I**

- operátory: $x \cdot y / xy$ (prázdný), x AND y, $x \wedge y$ (výrokově konjunkce, algebraicky průsek), $X \cap Y$ (množinově průnik)

Logické operace (3)

Logický součet (disjunkce)

- nepravdivá, když oba operandy nepravdivé, jinak pravdivá

x	y	$x + y$
0	**0**	**0**
0	**I**	**I**
I	**0**	**I**
I	**I**	**I**

- operátory: $x + y$, $x \operatorname{OR} y$, $x \vee y$ (výrokově disjunkce, algebraicky spojení), $X \cup Y$ (množinově sjednocení)

Binární logika (3)

Logický výraz

= korektně vytvořená posloupnost (symbolů) logických proměnných a funkcí (operátorů) spolu se závorkami

- priority sestupně: negace, log. součin, log. součet
- např. $x \cdot \overline{y} + f(x, z) = (x \cdot \overline{y}) + f(x, z)$

= zápis logické funkce

Logická rovnice

= dva logické výrazy v relaci rovnosti =

- ekvivalentní úpravy: negace obou stran, logický součin/součet obou stran se stejným výrazem, ..., log. funkce obou stran se stejnými ostatními operandy funkce
- NEekvivalentní úpravy: "krácení" obou stran o stejný (pod)výraz, např. $x + y = x + z$ není ekvivalentní s $y = z$

Binární logika (4)

Axiomy (Booleovy algebry)

- **komutativita**:

$$x \cdot y = y \cdot x \qquad x + y = y + x$$

- **distributivita**:

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z \qquad x + y \cdot z = (x + y) \cdot (x + z)$$

- **identita/neutrálnost (existence neutrální hodnoty)**:

$$\mathbf{I} \cdot x = x \qquad \mathbf{0} + x = x$$

- **komplementárnost**:

$$x \cdot \overline{x} = \mathbf{0} \qquad x + \overline{x} = 1$$

Logické operace (3)

Vlastnosti základních logických operací

- **nula a jednička (agresivita)**:

$$\mathbf{0} \cdot x = \mathbf{0} \qquad \mathbf{I} + x = \mathbf{I}$$

- **idempotence**:

$$x \cdot x = x \qquad x + x = x$$

- **asociativita**:

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z \qquad x + (y + z) = (x + y) + z$$

- **involuce (dvojí negace)**:

$$\overline{\overline{x}} = x$$

- **De Morganovy zákony**:

$$\overline{x \cdot y} = \overline{x} + \overline{y} \qquad \overline{x + y} = \overline{x} \cdot \overline{y}$$

- **absorpce**:

$$x \cdot (x + y) = x \qquad x + x \cdot y = x$$

- a další

Logické operace (4)

Vlastnosti základních logických operací – použití

- důkazy: s využitím axiomů a již dokázaných vlastností, rozborem případů (dosazením všech možných kombinací hodnot $\mathbf{0}$ a $\mathbf{I}$ za proměnné)
- ekvivalentní úpravy (pro zjednodušování) logických výrazů
- ...

Logické operace (5)

Další operace

Implikace

- nepravdivá, když první operand pravdivý a druhý nepravdivý, jinak pravdivá

x	y	$x \to y$
0	**0**	**I**
0	**I**	**I**
I	**0**	**0**
I	**I**	**I**

- operátory: $x \to y$, $x \to y$ (výrokově i algebraicky implikace), $X \subseteq Y$ (množinově podmnožina)

Logické operace (6)

Ekvivalence

- pravdivá, když operandy mají stejnou hodnotu, jinak nepravdivá

x	y	$x \equiv y$
0	**0**	**I**
0	**I**	**0**
I	**0**	**0**
I	**I**	**I**

- operátory: $x \equiv y$, $x \operatorname{XNOR} y$, $x \equiv y$ (výrokově i algebraicky ekvivalence), $X \equiv Y$ (množinově ekvivalence nebo rovnost)

Logické operace (7)

Nonekvivalence (negace ekvivalence, aritmetický součet modulo 2)

- pravdivá, když operandy mají různou hodnotu, jinak nepravdivá

x	y	$x \oplus y$
0	**0**	**0**
0	**I**	**I**
I	**0**	**I**
I	**I**	**0**

- operátory: $x \oplus y$, $x \ \mathrm{XOR}\ y$, $x \not\equiv y$ (výrokově i algebraicky negace ekvivalence), $X \not\equiv Y$ (množinově negace ekvivalence)

Logické operace (8)

Shefferova funkce (negace logického součinu)

- nepravdivá, když oba operandy pravdivé, jinak pravdivá

x	y	$x \uparrow y$
0	**0**	**I**
0	**I**	**I**
I	**0**	**I**
I	**I**	**0**

- operátory: $x \uparrow y$, $x \text{ NAND } y$

Logické operace (9)

Piercova funkce (negace logického součtu)

- pravdivá, když oba operandy nepravdivé, jinak nepravdivá

x	y	$x \downarrow y$
0	**0**	**I**
0	**I**	**0**
I	**0**	**0**
I	**I**	**0**

- operátory: $x \downarrow y$, $x \ \mathrm{NOR}\ y$

Logické funkce (1)

- zadání **pravdivostní tabulkou**:
  - úplně – funkční hodnota $f(x_i)$ definována pro všech 2^n možných přiřazení hodnot proměnným $x_i, 0 \leq i < n$
  - neúplně – funkční hodnota pro některá přiřazení není definována (např. log. obvod realizující funkci ji neimplementuje)
- **základní tvary** (výrazu):
  - **součinový (úplná konjunktivní normální forma, ÚKNF)** – log. součin log. součtů všech proměnných nebo jejich negací (úplných elementárních disjunkcí, ÚED)

$$(X_0 + \ldots + X_{n-1}) \cdot \ldots \cdot (X_0 + \ldots + X_{n-1}) \quad X_i = x_i \text{ nebo } \overline{x_i} \text{ (literál)}$$

  - **součtový (úplná disjunktivní normální forma, ÚDNF)** – log. součet log. součinů všech proměnných nebo jejich negací (úplných elementárních konjunkcí, ÚEK)

$$(X_0 \cdot \ldots \cdot X_{n-1}) + \ldots + (X_0 \cdot \ldots \cdot X_{n-1}) \quad X_i = x_i \text{ nebo } \overline{x_i}$$

Logické funkce (2)

Převod log. funkce $\mathbf{f(x_i)}$ na základní tvar (normální formu)

- ekvivalentními úpravami a doplněním chybějících proměnných nebo jejich negací
- **tabulkovou metodou**:
  1. pro řádky s $f(x_i) = \mathbf{0(I)}$ sestroj log. součet (součin) všech x_i pro $x_i = \mathbf{0(I)}$ nebo $\overline{x_i}$ pro $x_i = \mathbf{I(0)}$
  2. výsledná ÚKNF (ÚDNF) je log. součinem (součtem) těchto log. součtů (součinů)

x	y	z	$f(x,y,z)$	ÚED	ÚEK
0	**0**	**0**	**0**	$x+y+z$	
0	**0**	**I**	**0**	$x+y+\overline{z}$	
0	**I**	**0**	**0**	$x+\overline{y}+z$	
0	**I**	**I**	**I**		$\overline{x}\cdot y\cdot z$
I	**0**	**0**	**0**	$\overline{x}+y+z$	
I	**0**	**I**	**I**		$x\cdot\overline{y}\cdot z$
I	**I**	**0**	**I**		$x\cdot y\cdot\overline{z}$
I	**I**	**I**	**I**		$x\cdot y\cdot z$

ÚKNF($f(x,y,z)$): $(x+y+z)\cdot(x+y+\overline{z})\cdot(x+\overline{y}+z)\cdot(\overline{x}+y+z)$
ÚDNF($f(x,y,z)$): $\overline{x}\cdot y\cdot z+x\cdot\overline{y}\cdot z+x\cdot y\cdot\overline{z}+x\cdot y\cdot z$

ÚKOL

Převeďte několik log. funkcí se třemi a více proměnnými do ÚKNF a ÚDNF.

Logické funkce (3)

Věta (O počtu log. funkcí)

Existuje právě $2^{(2^n)}$ logických funkcí s n proměnnými.

Funkce f^1 jedné proměnné

x	f_0 **0**	f_1 x	f_2 $\overline{x}$	f_3 **I**
0	**0**	**0**	**I**	**I**
I	**0**	**I**	**0**	**I**

Funkce f^2 dvou proměnných

x	y	f_0 **0**	f_1 $\cdot$	f_2	f_3 x	f_4	f_5 y	f_6 $\oplus$	f_7 $+$	f_8 $\downarrow$	f_9 $\equiv$	f_{10} $\overline{y}$	f_{11}	f_{12} $\overline{x}$	f_{13} $\rightarrow$	f_{14} $\uparrow$	f_{15} **I**
0	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**I**	**I**	**I**	**I**	**I**	**I**	**I**	**I**
0	**I**	**0**	**0**	**0**	**0**	**I**	**I**	**I**	**I**	**0**	**0**	**0**	**0**	**I**	**I**	**I**	**I**
I	**0**	**0**	**0**	**I**	**I**	**0**	**0**	**I**	**I**	**0**	**0**	**I**	**I**	**0**	**0**	**I**	**I**
I	**I**	**0**	**I**	**0**	**I**	**0**	**I**	**0**	**I**	**0**	**I**	**0**	**I**	**0**	**I**	**0**	**I**

Logické funkce (4)

Funkce více než dvou proměnných

pro $n = 3$:

$$f(x, y, z) = x \cdot f(\mathbf{I}, y, z) + \overline{x} \cdot f(\mathbf{0}, y, z)$$

a podobně pro $n > 3$

Věta (O reprezentaci log. funkcí, Shannonův expanzní teorém)

Jakoukoliv logickou funkci libovolného počtu proměnných lze vyjádřit pomocí logických funkcí dvou proměnných (např. základních logických operací $\overline{x}, x \cdot y, x + y$).

Logické funkce (4)

Funkce více než dvou proměnných

pro $n = 3$:

$$f(x, y, z) = x \cdot f(\mathbf{I}, y, z) + \overline{x} \cdot f(\mathbf{0}, y, z)$$

a podobně pro $n > 3$

Věta (O reprezentaci log. funkcí, Shannonův expanzní teorém)

Jakoukoliv logickou funkci libovolného počtu proměnných lze vyjádřit pomocí logických funkcí dvou proměnných (např. základních logických operací $\overline{x}, x \cdot y, x + y$).

Logické funkce (5)

Zjednodušení výrazu logické funkce

= optimalizace za účelem dosažení co nejmenšího počtu operátorů (v kompromisu s min. počtem typů operátorů)

- důvod: méně (typů) log. obvodů realizujících funkci (menší, levnější, nižší spotřeba, ...)

Algebraická minimalizace

$$
\begin{aligned}
f &= \overline{x} \cdot y \cdot z + x \cdot \overline{y} \cdot z + x \cdot y \cdot \overline{z} + x \cdot y \cdot z \\
&\quad // \text{ dvakrát přičteme } x \cdot y \cdot z \text{ (idempotence)} \\
f &= (\overline{x} \cdot y \cdot z + x \cdot y \cdot z) + (x \cdot \overline{y} \cdot z + x \cdot y \cdot z) + (x \cdot y \cdot \overline{z} + x \cdot y \cdot z) \\
&\quad // \text{ distributivita} \\
f &= y \cdot z \cdot (\overline{x} + x) + x \cdot z \cdot (\overline{y} + y) + x \cdot y \cdot (\overline{z} + z) \ // \text{ komplementárnost} \\
f &= x \cdot y + y \cdot z + x \cdot z
\end{aligned}
$$

- pro složitější výrazy náročná

Logické funkce (5)

Zjednodušení výrazu logické funkce

Karnaughova metoda (Veitch diagram)

- nahrazení algebraických ekvivalentních úprav geometrickými postupy
- nalezení minimálního výrazu

1. k výrazu v základním součtovém tvaru se sestaví tzv. **Karnaughova mapa** = tabulka vyplněná $\mathbf{I}$ v buňkách reprezentující log. součiny, součiny reprezentované sousedními buňkami se liší v 1 proměnné
2. hledání smyček (minterm) v mapě splňujících jisté podmínky (min. počet, max. obdélníková oblast vyplněná $\mathbf{I}$, počet políček mocnina 2, mohou se překrývat, pokrytí všech $\mathbf{I}$)
3. smyčky po vyloučení komplementárních proměnných a jejich negací reprezentují log. součiny výsledného součtového tvaru

Logické funkce (6)

Zjednodušení výrazu logické funkce

Karnaughova metoda (Veitch diagram)

$$f = \overline{x} \cdot y \cdot z + x \cdot \overline{y} \cdot z + x \cdot y \cdot \overline{z} + x \cdot y \cdot z$$

	$\overline{x} \cdot \overline{y}$	$\overline{x} \cdot y$	$x \cdot y$	$x \cdot \overline{y}$
$\overline{z}$			1	
z		1	1	1

Obrázek: Karnaughova mapa

$$f = x \cdot y + y \cdot z + x \cdot z$$

- výpočetně náročná (hledání smyček)

Další algoritmické metody: tabulační (Quine-McCluskey), branch-and-bound (Petrick), Esspreso logic minimizer aj.

ÚKOL

Pokuste se minimalizovat log. funkce z přechozího úkolu.

Logické funkce (7)

Úplný systém logických funkcí

= množina log. funkcí, pomocí kterých je možné vyjádřit jakoukoliv log. funkci (libovolného počtu proměnných)

→ množina log. funkcí dvou proměnných (Věta o reprezentaci log. funkcí)

- (1) negace $\overline{x}$, log. součin $x \cdot y$ a log. součet $x + y$
- (2) negace $\overline{x}$ a implikace $x \to y$
- a další

Minimální úplný systém logických funkcí

= úplný systém, ze kterého nelze žádnou funkci vyjmout tak, aby zůstal úplný

- (1) NENÍ: $x \cdot y = \overline{\overline{x} + \overline{y}}$, $x + y = \overline{\overline{x} \cdot \overline{y}}$ (De Morganovy zákony, dvojí negace)
- (2) je
- (3) negace $\overline{x}$ a log. součin $x \cdot y$
- (4) negace $\overline{x}$ a log. součet $x + y$
- a další

Logické funkce (7)

Úplný systém logických funkcí

= množina log. funkcí, pomocí kterých je možné vyjádřit jakoukoliv log. funkci (libovolného počtu proměnných)

→ množina log. funkcí dvou proměnných (Věta o reprezentaci log. funkcí)

- (1) negace $\overline{x}$, log. součin $x \cdot y$ a log. součet $x + y$
- (2) negace $\overline{x}$ a implikace $x \to y$
- a další

Minimální úplný systém logických funkcí

= úplný systém, ze kterého nelze žádnou funkci vyjmout tak, aby zůstal úplný

- (1) NENÍ: $x \cdot y = \overline{\overline{x} + \overline{y}}$, $x + y = \overline{\overline{x} \cdot \overline{y}}$ (De Morganovy zákony, dvojí negace)
- (2) je
- (3) negace $\overline{x}$ a log. součin $x \cdot y$
- (4) negace $\overline{x}$ a log. součet $x + y$
- a další

Logické funkce (8)

Minimální úplný systém logických funkcí

Jediná funkce:

- **Shefferova** $\uparrow$ (negace log. součinu)
- **Piercova** $\downarrow$ (negace log. součtu)
- důkaz: vyjádření např. negace a log. součinu (součtu)

Vyjádření logické funkce pomocí Shefferovy nebo Piercovy funkce

1. vyjádření funkce v základním součtovém tvaru
2. zjednodušení výrazu funkce, např. pomocí Karnaughovy metody
3. aplikace De Morganových zákonů pro převedení výrazu do tvaru, který obsahuje pouze Shefferovy nebo pouze Piercovy funkce

Logické funkce (8)

Vyjádření logické funkce pomocí Shefferovy nebo Piercovy funkce

$$
\begin{aligned}
f &= \overline{x}\cdot y\cdot z + x\cdot \overline{y}\cdot z + x\cdot y\cdot \overline{z} + x\cdot y\cdot z \\
f &= x\cdot y + y\cdot z + x\cdot z \\
f &= \overline{\overline{x\cdot y}\cdot\overline{y\cdot z}} + x\cdot z \\
f &= \overline{\overline{\overline{x\cdot y}\cdot\overline{y\cdot z}}\cdot\overline{x\cdot z}} \\
f &= \overline{\overline{\overline{x\cdot y}\cdot\overline{y\cdot z}}\cdot\overline{\overline{x\cdot y}\cdot\overline{y\cdot z}}\cdot\overline{x\cdot z}}
\end{aligned}
$$

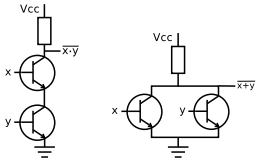
$$
\begin{aligned}
f &= (\overline{x}+y+z)\cdot(x+\overline{y}+z)\cdot(x+y+\overline{z})\cdot(x+y+z) \\
f &= (x+y)\cdot(y+z)\cdot(x+z) \\
f &= \overline{\overline{x+y}+\overline{y+z}}\cdot(x+z) \\
f &= \overline{\overline{\overline{x+y}+\overline{y+z}}+\overline{x+z}} \\
f &= \overline{\overline{\overline{x+y}+\overline{y+z}}+\overline{\overline{x+y}+\overline{y+z}}+\overline{x+z}}
\end{aligned}
$$

ÚKOL

Vyjádřete log. operace negace, log. součin, log. součet, implikace, ekvivalence a nonekvivalence pomocí (1) Shefferovy funkce a (2) Piercovy funkce.

Fyzická realizace logických funkcí (1)

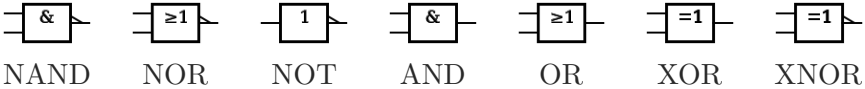
- dříve pomocí **spínacích relé** a **elektronek**, plus pasivní součástky (rezistor aj.)
- dnes pomocí **tranzistorů** (a diod) v **integrovaných obvodech**: technologie RTL, DTL, **TTL**, **CMOS** aj.



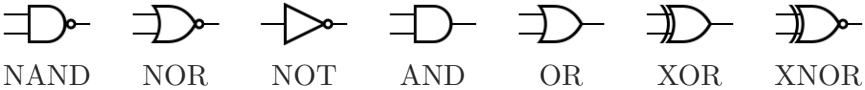
Obrázek: Příklad realizace log. operací NAND a NOR (v rezistorovětranzistorové logice, RTL)

- realizace log. operací pomocí integrovaných obvodů – **logických členů, hradel**
  - vstupy = reprezentované log. proměnné
  - výstup = výsledek realizované log. operace
  - stavy (signály) na vstupech/výstupu = log. (binární) hodnoty $\mathbf{0}/\mathbf{I}$ = míra informace s jednotkou $\mathbf{1}$ **bit**
- symbolické značky log. členů ve schématech zapojení **logických obvodů** realizujících lib. log. funkci

Fyzická realizace logických funkcí (2)



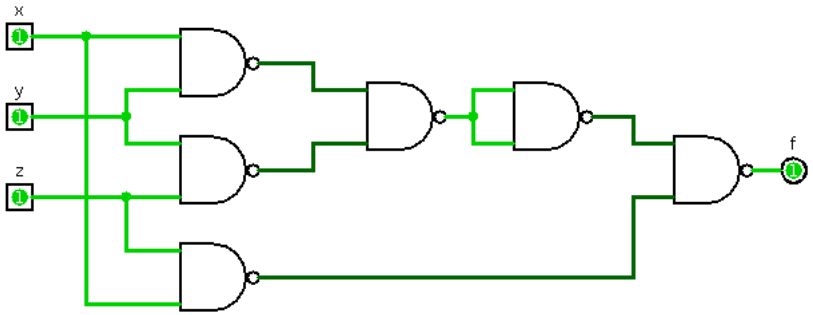
Obrázek: Symbolické značky logických členů (podle normy IEC)



Obrázek: Symbolické značky logických členů (tradiční, ANSI)

Fyzická realizace logických funkcí (3)

$$f = \overline{\overline{\overline{\overline{x \cdot y} \cdot \overline{y \cdot z}} \cdot \overline{\overline{\overline{x \cdot y} \cdot \overline{y \cdot z}} \cdot \overline{x \cdot z}}}}$$



Obrázek: Schéma zapojení log. obvodu realizujícího log. funkci f pomocí log. členů realizujících log. operaci NAND

ÚKOL

Nakreslete schéma zapojení log. obvodu realizujícího log. operace NOT, AND, OR, implikace, ekvivalence a XOR pomocí log. členů realizujících operaci (1) NAND a (2) NOR.

Logické obvody

- jeden výstup: realizace jedné log. funkce
- více výstupů: realizace více log. funkcí zároveň $\rightarrow$ realizace **vícebitové log. funkce** $^{\mathrm{n}}\mathbf{f}$
- n-tice vstupů: reprezentace **vícebitových ($\mathbf{n}$-bitových) log. proměnných** $^{\mathrm{n}}\mathbf{x} =$ **vícebitový log. obvod**

- **kombinační**: stavy na výstupech obvodu (tj. funkční hodnota) závisí pouze na okamžitých stavech na vstupech (tj. hodnotách proměnných)
- **sekvenční**: stavy na výstupech obvodu (tj. funkční hodnota) závisí nejen na okamžitých stavech na vstupech (tj. hodnotách proměnných), ale také na přechozích stavech na vstupech

Kombinační logické obvody (1)

- stavy na výstupech obvodu (tj. funkční hodnota) závisí pouze na okamžitých stavech na vstupech (tj. hodnotách proměnných)
- jedné kombinaci stavů na vstupech odpovídá jediná kombinace stavů na výstupech

Kombinační logické obvody (2)

Komparátor

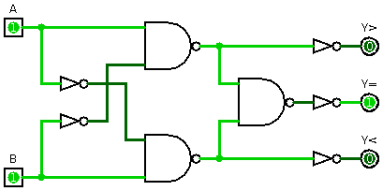
- provádí srovnání hodnot dvou log. proměnných A a B na vstupu
- tři výstupy udávající pravdivost vztahů: $A < B$, $A > B$ a $A = B$, realizace tříbitové log. funkce $Y_< = Y(A < B), Y_> = Y(A > B), Y_= = Y(A = B)$
- jednobitový:

$$Y_< = \overline{A} \cdot B \quad Y_> = A \cdot \overline{B} \quad Y_= = A \cdot B + \overline{A} \cdot \overline{B}$$
$$Y_< = \overline{\overline{\overline{A} \cdot B}} \quad Y_> = \overline{\overline{A \cdot \overline{B}}} \quad Y_= = \overline{\overline{\overline{A} \cdot B} \cdot \overline{A \cdot \overline{B}}}$$

Kombinační logické obvody (3)

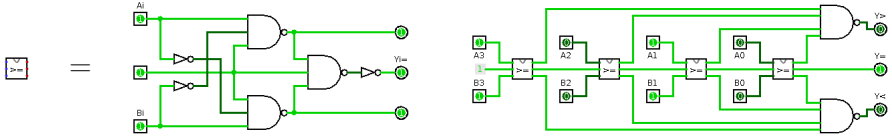
Komparátor

A	B	$Y_<$	$Y_>$	$Y_=$
0	**0**	**0**	**0**	**I**
0	**I**	**I**	**0**	**0**
I	**0**	**0**	**I**	**0**
I	**I**	**0**	**0**	**I**



Obrázek: Pravdivostní tabulka a schéma zapojení jednobitového komparátoru

- vícebitový: zřetězené zapojení jednobitových pro každý řád vícebitových proměnných od nejvýznamějšího po nejméně významný



Obrázek: Schéma zapojení čtyřbitového komparátoru

Kombinační logické obvody (4)

Multiplexor

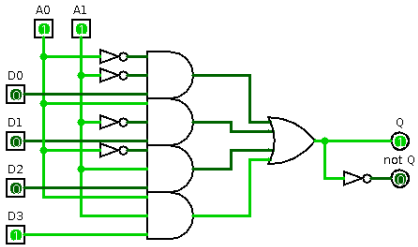
- přepíná na výstup Q log. hodnotu na jednom z 2^n datových vstupů D_i vybraném na základě n-bitové hodnoty na adresním vstupu A
- kromě výstupu Q navíc ještě negovaný (invertovaný) výstup $\overline{Q}$
- např. čtyřvstupý (4 datové vstupy, dvoubitový adresní vstup) realizuje log. funkci

$$Q = \overline{A_0} \cdot \overline{A_1} \cdot D_0 + A_0 \cdot \overline{A_1} \cdot D_1 + \overline{A_0} \cdot A_1 \cdot D_2 + A_0 \cdot A_1 \cdot D_3$$

Kombinační logické obvody (5)

Multiplexor

A_0	A_1	Q
0	**0**	D_0
I	**0**	D_1
0	**I**	D_2
I	**I**	D_3



Obrázek: Pravdivostní tabulka a schéma zapojení čtyřvstupého multiplexoru

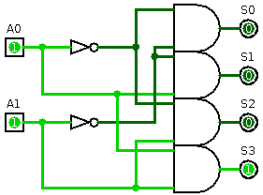
- použití: multiplexování datových vstupů na základě adresy

Kombinační logické obvody (6)

Binární dekodér

- nastaví (na $\mathbf{I}$) jeden z 2^n výstupů S_i odpovídající n-bitové hodnotě na adresním vstupu A

A_0	A_1	S_0	S_1	S_2	S_3
0	**0**	**I**	**0**	**0**	**0**
I	**0**	**0**	**I**	**0**	**0**
0	**I**	**0**	**0**	**I**	**0**
I	**I**	**0**	**0**	**0**	**I**



Obrázek: Pravdivostní tabulka a schéma zapojení bin. dekodéru se čtyřmi výstupy

- použití: dekodér adresy pro výběr místa v paměti

Kombinační logické obvody (7)

Binární sčítačka

- čísla ve dvojkové soustavě = binárně reprezentovaná
- platí stejná pravidla aritmetiky jako v desítkové soustavě, např. (+ je zde aritmetické sčítání!):

$$\mathbf{0+0=0} \qquad \mathbf{0+I=I} \qquad \mathbf{I+I=I0}$$

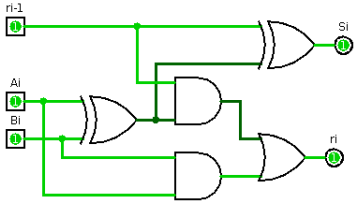
- sčítačka sečte binární hodnoty v každém řádu dvou n-bitových proměnných A a B podle pravidel aritmetiky pro sčítání, tj. s přenosem hodnoty do vyššího řádu
- realizuje log. funkce součtu S_i v řádu $0 \leq i < n$ a přenosu r_i z řádu i do vyššího řádu:

$$S_i = A_i \oplus B_i \oplus r_{i-1} \qquad r_i = A_i \cdot B_i + (A_i \oplus B_i) \cdot r_{i-1}, \qquad r_{-1} = 0$$

Kombinační logické obvody (8)

Binární sčítačka

A_i	B_i	r_{i-1}	S_i	r_i
0	0	0	0	0
0	0	I	I	0
0	I	0	I	0
0	I	I	0	I
I	0	0	I	0
I	0	I	0	I
I	I	0	0	I
I	I	I	I	I

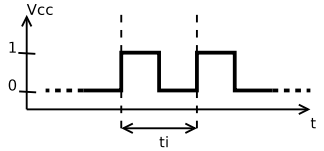


Obrázek: Pravdivostní tabulka a schéma zapojení jednobitové sčítačky (pro řád i)

- vícebitová: zřetězené zapojení jednobitových pro každý řád vícebitových proměnných od nejméně významného po nejvýznamější s přenosem do vyššího řádu
- použití: (aritmetické) sčítání binárně reprezentovaných 8-, 16-, 32-, atd. bitových čísel

Sekvenční logické obvody (1)

- stavy na výstupech obvodu (tj. funkční hodnota) závisí nejen na okamžitých stavech na vstupech (tj. hodnotách proměnných), ale také na přechozích stavech na vstupech
- předchozí stavy na vstupech zachyceny **vnitřním stavem obvodu**
- nutné identifikovat a synchronizovat stavy obvodu v čase
- čas: periodický impulsní signál = "hodiny" (clock), diskrétně určující okamžiky synchronizace obvodu, generovaný krystalem o dané frekvenci



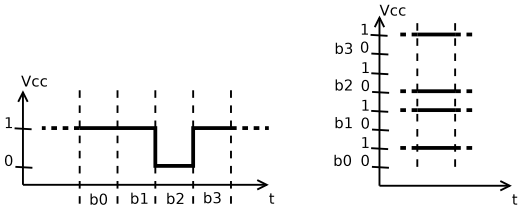
Obrázek: Časový signál "hodin" (clock)

- zpětné vazby z (některých) výstupů na (některé) vstupy

Sekvenční logické obvody (2)

Přenos dat (hodnot vícebitových log. proměnných):

- **sériový**: bity (hodnoty $\mathbf{0}/\mathbf{I}$) přenášeny postupně v čase za sebou po jednom datovém vodiči
- **paralelní**: bity přenášeny zároveň v čase po více datových vodičích
- úlohy transformace mezi sériovým a paralelním přenosem



Obrázek: Sériový a paralelní přenos dat

Sekvenční logické obvody (3)

Klopné obvody

– nejjednodušší sekvenční obvody

druhy:

- **astabilní**: nemají žádný stabilní stav, periodicky (např. podle hodinových impulsů) překlápí výstupy z jednoho stavu do druhého; použití jako generátory impulsů
- **monostabilní**: jeden stabilní stav na výstupech, po vhodném řídícím signálu je po definovanou dobu ve stabilním stavu; použití k vytváření impulsů dané délky
- **bistabilní**: oba stavy na výstupech stabilní, zůstává v jednom stabilním stavu dokud není vhodným řídícím signálem překlopen do druhého; použití pro realizaci **pamětí**

Řízení:

- **asynchronně** signály ($\mathbf{0}$ nebo $\mathbf{I}$) na datových vstupech
- **synchronně** hodinovým signálem
- **hladinou** signálu: horní ($\mathbf{I}$) nebo dolní ($\mathbf{0}$)
- **hranami** signálu: nástupní ($\mathbf{0} \rightarrow \mathbf{I}$ u horní hladiny) nebo sestupní ($\mathbf{0} \rightarrow \mathbf{I}$ u dolní hladiny)

Sekvenční logické obvody (4)

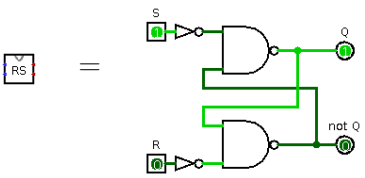
Klopný obvod (typu) RS

- nejjednodušší bistabilní, základ ostatních
- **jednobitový paměťový člen**
- asynchronní vstupy R (Reset) pro nulování log. hodnoty na výstupu Q (v čase i) a S (Set) pro nastavení hodnoty
- kromě výstupu Q navíc ještě negovaný (invertovaný) výstup $\overline{Q}$

Sekvenční logické obvody (5)

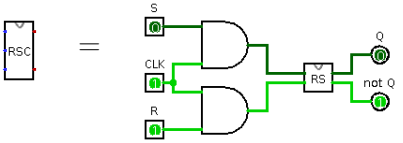
Klopný obvod (typu) RS

R	S	Q_i	$\overline{Q_i}$
0	**0**	Q_{i-1}	$\overline{Q_{i-1}}$
0	**I**	**I**	**0**
I	**0**	**0**	**I**
I	**I**	N/A	N/A



Obrázek: Pravdivostní tabulka a schéma zapojení klopného obvodu RS

- varianta se synchronizačním vstupem CLK s hodinových signálem



Obrázek: Schéma zapojení klopného obvodu RS s hodinovým vstupem CLK

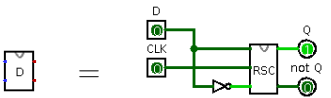
Sekvenční logické obvody (6)

Klopný obvod (typu) RS

- varianta **Master-Slave**: dva obvody RS (s hodinovým signálem) za sebou, řízení sestupní hranou signálu na vstupu CLK (u druhého negovaný)

Sekvenční logické obvody (7)

Klopný obvod (typu) D

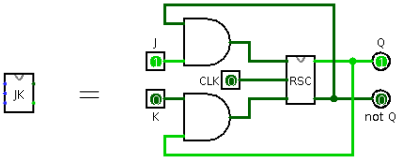


Obrázek: Schéma zapojení klopného obvodu D

- odstranění stavu $R = S = \mathbf{I}$ u obvodu RS (s hodinovým signálem), navíc mohou být (prioritní) vstupy R a S
- varianta Master-Slave: obvody D a RS (s hodinovým signálem) za sebou, řízení sestupní hranou signálu na vstupu CLK (u druhého negovaný)
- implementace ve formě integrovaných obvodů 7474, 7475

Sekvenční logické obvody (8)

Klopný obvod (typu) JK



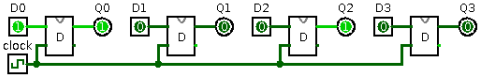
Obrázek: Schéma zapojení klopného obvodu JK

- odstranění stavu $R = S = \mathbf{I}$ u varianty Mater-Slave obvodu RS, navíc mohou být (prioritní) vstupy R a S
- implementace ve formě integrovaných obvodů 7472, 7473, 7476

Sekvenční logické obvody (9)

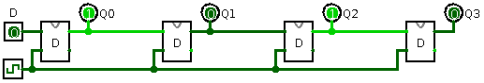
Obvody v počítačích:

- **paralelní registr (střádač)**: vícebitová paměť pro hodnotu dodanou paralelně na více vstupů, paralelní zapojení klopných obvodů D



Obrázek: Schéma zapojení čtyřbitového paralelního registru

- **sériový (posuvný) registr**: vícebitová paměť pro hodnotu dodanou sériově na vstupu, sériové zapojení klopných obvodů D, použití pro transformaci sériových dat na paralelní

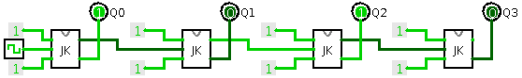


Obrázek: Schéma zapojení čtyřbitového sériového registru

Sekvenční logické obvody (10)

Obvody v počítačích:

- **čítač**: paměť počtu impulsů na hodinovém vstupu, binárně reprezentovaný počet na vícebitovém výstupu, zřetězené zapojení klopných obvodů JK



Obrázek: Schéma zapojení čtyřbitového čítače

- **sériová sčítačka**: (aritmetické) sčítání log. hodnot dodávaných na vstupy v sériovém tvaru po jednotlivých řádech