11. Riemannův určitý integrál

11.1. Definice Riemannova integrálu

Riemannův integrál lze definovat v podstatě dvojím způsobem: užitím (Cauchyových) integrálních součtů nebo pomocí dolních a horních integrálů.

Užití integrálních součtů

Uvažujeme funkci f omezenou na intervalu $\langle a, b\rangle$, kde $a < b$. Dále uvedeme pojmy používané při definici integrálu:

Dělení intervalu (označíme D) - každá konečná posloupnost bodů $x_0, x_1, \dots, x_n$ (zvaných *dělicí*), kde $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$.

Element dělení $\Delta_i = \langle x_{i-1}, x_i\rangle$, $i = 1, \dots, n$, jeho délka je $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

Norma dělení $\nu(D) = \max \Delta x_i$, stručné označení ν.

D (*Riemannova určitého integrálu*): Nechť f je funkce omezená na $\langle a, b\rangle$. Ke každému dělení D vytvoříme integrální součet

$$\sigma(f,D) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i \text{ , kde } \xi_i \text{ je libovolný bod z elementu } \Delta_i .$$

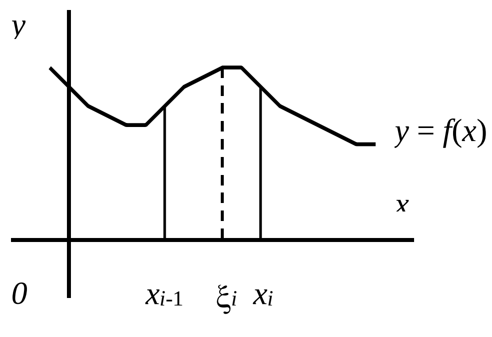
Řekneme, že číslo I je Riemannovým (určitým) integrálem funkce f na $\langle a, b\rangle$, právě když $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0$ tak, že pro všechna dělení D, pro něž $\nu(D) < \delta$, a pro libovolnou volbu bodů ξ_i v elementech Δ_i dělení, platí $|\sigma(f,D) - I| < \varepsilon$.

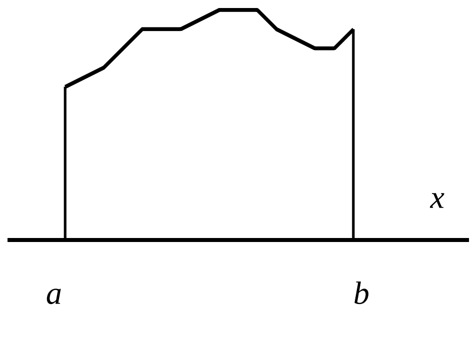
Označení: $I = \int\limits_a^b f(x)\,dx$.

Funkce f se pak nazývá *Riemannovsky integrovatelná*, $\langle a, b\rangle$ je *obor integrace*, čísla a, b *dolní* resp. *horní mez integrace*, x *integrační proměnná*.

Znak $\int\limits_a^b$ je symbol pro součet od a do b, $f(x)$ pro $f(\xi_i)$, dx pro Δx_i . Název *Riemannův integrál* používáme hlavně pro jeho odlišení od jiných typů integrálů. Není-li třeba zdůrazňovat (Riemannovu) metodu definice integrálu, lze používat jen historický název *určitý integrál*. Vedle *funkce Riemannovsky integrovatelná* říkáme též *integrovatelná* (*integrace schopná*) *podle Riemanna*. Množinu všech funkcí integrovatelných na $\langle a, b\rangle$ označíme $R(\langle a, b\rangle)$, a proto můžeme používat stručný zápis $f \in R(\langle a, b\rangle)$. Zvláště si uvědomíme, že Riemannův integrál funkce $f \in R(\langle a, b\rangle)$ je nějaké reálné číslo.

Geometrický význam součinu $f(\xi_i).\Delta x_i$ pro $f > 0$ – obsah obdélníku o stranách Δx_i , $f(\xi_i)$.





Geometrický význam integrálního součtu $\sigma(f,D)$ – přibližný obsah tzv. *základního obrazce*, tj. křivočarého lichoběžníku, jehož hranice leží na přímkách $x = a$, $x = b$, na ose x a na grafu funkce f. *Geometrický význam určitého integrálu* – obsah základního obrazce.

Uvedenou definici Riemannova integrálu lze vyslovit i pomocí pojmu limita. Nejprve však pojednejme o zjemnění dělení.

D: Dělení D' nazveme *zjemnění dělení* D, právě když každý dělicí bod dělení D je dělicím bodem i dělení D'.

Poznámky:

(1) Ke každým dvěma dělením existuje jejich společné zjemnění, i „nejhrubší“ společné zjemnění. Množina všech dělení intervalu $\langle a, b\rangle$ tvoří svaz.

(2) Jestliže postupně zjemňujeme dělení, tak z toho neplyne, že $\nu(D) \to 0$, dokonce se přitom ν nemusí ani zmenšovat (proč ?). Druhou část výše uvedené definice lze pak vyslovit takto:

Řekneme, že integrální součty $\sigma(f,D)$ mají limitu $I \in \mathbf{R}$ a píšeme $\lim\limits_{\nu(D)\to 0} \sigma(f,D) = I$, právě když $\forall\varepsilon > 0$ $\exists$ dělení D_0 tak, že pro všechna jeho zjemnění D a pro libovolnou volbu bodů ξ_i v elementech Δ_i platí $|\sigma(f,D) - I| < \varepsilon$. Číslo I pak nazýváme Riemannův integrál funkce f, funkce f se nazývá *Riemannovsky integrovatelná*, atd.

Dolní a horní integrál

Mějme funkci f omezenou na $\langle a, b\rangle$ a libovolné dělení D. Označme pro $x \in \langle x_{i-1}, x_i\rangle$: $m_i = \inf f(x)$, $M_i = \sup f(x)$.

Vytvoříme součty: $s(f,D) = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i\, \Delta x_i$, $S(f,D) = \sum\limits_{i=1}^{n} M_i\, \Delta x_i$, které nazveme *dolní* resp. *horní integrální součet* příslušný k funkci f a dělení D.

Vlastnosti:

(1) Libovolný dolní integrální součet není větší než libovolný horní integrální součet (příslušný třeba i k jinému dělení).

(2) Množina všech dolních integrálních součtů je (shora) omezená, množina všech horních integrálních součtů je (zdola) omezená: Jestliže pro $x \in \langle a, b\rangle$ označíme $m = \inf f(x)$, $M = \sup f(x)$, platí $m(b - a) \le s(f,D) \le S(f,D) \le M(b - a)$. Proto existuje supremum množiny všech dolních a infimum množiny všech horních integrálních součtů.

D: Číslo $I_*f = \sup\limits_D s(f,D)$ ($I^*f = \inf\limits_D S(f,D)$) nazýváme *dolní* (*horní*) *Riemannův integrál.*

Zřejmě platí $s(f,D) \le I_*f \le I^*f \le S(f,D)$.

Úloha 11.1.1. Najděte dolní i horní integrál Dirichletovy funkce na intervalu $\langle 0, 1\rangle$.

[Máme

$$s(\chi,D) = \sum_{i=1}^{n} m_i\, \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} 0\cdot \Delta x_i = 0\ ,\ I_*\chi = 0,$$

$$S(\chi,D) = \sum_{i=1}^{n} M_i\, \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} 1\cdot \Delta x_i = 1\ ,\ I^*\chi = 1.\ ]$$

D: Nechť f je funkce omezená na $\langle a, b\rangle$. Říkáme, že funkce f je na $\langle a, b\rangle$ Riemannovsky integrovatelná, právě když $I_* f = I^* f$. Společnou hodnotu If dolního a horního integrálu nazveme Riemannův integrál funkce f na $\langle a, b\rangle$ a píšeme

$$If = \int_a^b f(x)\,dx\,.$$

Dá se dokázat ekvivalence obou definic Riemannova integrálu.

Geometrický význam dolního součtu - obsah jistého mnohoúhelníku vepsaného do základního obrazce, *geometrický význam horního součtu* - obsah jistého mnohoúhelníku, do nějž je základní obrazec vepsán (nakreslete obrázek). V souladu s definicí míry rovinného obrazce je geometrickým významem Riemannova integrálu obsah (míra) základního obrazce.

I v tomto případě lze využít pojmu limita. K tomu si uvědomíme ještě jednu vlastnost horních a dolních součtů:

(3) Zjemníme-li dělení, pak dolní integrální součet se nezmenší a horní integrální součet se nezvětší.

Důsledek: Pro každou *normální posloupnost* $\{D_n\}$ dělení, tj. kde $\nu(D_n) \to 0$ a přitom každý další člen je zjemněním předchozího, je odpovídající posloupnost $\{s(f,D_n)\}$ neklesající a $\{S(f,D_n)\}$ nerostoucí.

Integrovatelnost funkcí

Z teoretických důvodů (tj. pro použití v důkazech vlastností funkcí integrovatelných) se formuluje následující nutná a postačující podmínka integrovatelnosti, v níž se vyskytuje pojem oscilace funkce f na intervalu $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$: $\omega_i = M_i - m_i$.

V *(Nutná a postačující podmínka integrovatelnosti podle Riemanna)*: Funkce $f \in R(\langle a, b\rangle) \Leftrightarrow$ $\lim\limits_{\nu(D)\to 0} \sum_{i=1}^{n} \omega_i\, \Delta x_i = 0$, tj. $\forall\varepsilon > 0\ \ \exists\delta > 0$ tak, že $\forall D$ platí: $\nu(D) < \delta \Rightarrow \left|\sum_{i=1}^{n} \omega_i\, \Delta x_i\right| < \varepsilon$.

Princip důkazu: Dá se ukázat, že $I_* f = \lim\limits_{\nu(D)\to 0} s(f,D)$, $I^* f = \lim\limits_{\nu(D)\to 0} S(f,D)$ (definujte pomocí ε a δ) a dále, že $s(f,D) = \inf\limits_{\xi_i} \sigma(f,D)$, $S(f,D) = \sup\limits_{\xi_i} \sigma(f,D)$. Důkaz pak spočívá na vztahu

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i = S(f.D) - s(f.D)\,.\ \square$$

Z praktických důvodů byla formulována kritéria (tj. jednoduché postačující podmínky) integrovatelnosti podle Riemanna. Dá se dokázat, že do množiny $R(\langle a, b\rangle)$ patří tyto třídy funkcí:

- třída všech funkcí *spojitých* na $\langle a, b\rangle$,
- třída všech funkcí *spojitých po částech* na $\langle a, b\rangle$,
- třída všech funkcí *monotónních a omezených* na $\langle a, b\rangle$.

V množině $R(\langle a,b\rangle)$ však existují i funkce, které nesplňují žádnou z uvedených podmínek. Jestliže se funkce g liší od funkce $f \in R(\langle a,b\rangle)$ v konečném počtu bodů a nabývá v nich konečných hodnot, pak i $g \in R(\langle a,b\rangle)$ a oba integrály jsou si rovny.

11.2. Newtonův vzorec

V (*Newtonův vzorec*): Nechť funkce f je integrovatelná na $\langle a, b\rangle$ a má tu (zobecněnou) primitivní funkci F. Pak platí

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left[\,F(x)\,\right]_{x=a}^{b} = F(b) - F(a).$$

Princip důkazu: Volíme takové dělení D intervalu $\langle a, b\rangle$, aby uvnitř každého elementu (x_{i-1},x_i) měla funkce F derivaci. Platí:

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n}\left[F(x_i) - F(x_{i-1})\right].$$

Na rozdíly $F(x_i) - F(x_{i-1})$ použijeme Lagrangeovu větu, podle níž na každém intervalu (x_{i-1},x_i) existuje takový bod ξ_i, že

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(\xi_i).(x_i - x_{i-1}) = f(\xi_i).\Delta x_i\,.$$

Ježto f je integrovatelná, můžeme v integrálních součtech vzít právě tato ξ_i a tvrzení plyne z definice Riemannova integrálu. □

Newtonův vzorec je základní metodou výpočtu Riemannova integrálu.

Úlohy:

11.2.1. Vypočtěte $I = \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx$.

[$I = \left[\sin x\right]_{x=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \sin\dfrac{\pi}{2} - \sin(-\dfrac{\pi}{2}) = 1 - (-1) = 2.$]

11.2.2. Vypočtěte $I = \displaystyle\int_{e}^{e^2} \frac{dx}{x\ln^2 x}$.

[Nejprve určíme primitivní funkci: $\displaystyle\int \frac{dx}{x\ln^2 x}$ = (substitucí) = $-\dfrac{1}{\ln x} + C$. Pak

$$I = \left[-\frac{1}{\ln x}\right]_{x=e}^{e^2} = -\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{1}\right) = \frac{1}{2}.$$]

11.3. Základní vlastnosti určitého integrálu

Hodnota integrálu závisí jednak na integrované funkci (integrandu) a jednak na intervalu integrování. Dostáváme tak několik skupin vlastností integrovatelných funkcí a integrálu.

Vlastnosti závislé na integrované funkci

V (*lineární vlastnosti*):

(1) Je-li $f \in R(\langle a,b\rangle)$, $k \in \boldsymbol{R}$, pak $kf \in R(\langle a,b\rangle)$ a platí $\int_a^b k\,f(x)\,dx \;=\; k\int_a^b f(x)\,dx$.

(2) Je-li $f,g \in R(\langle a,b\rangle)$, pak $(f+g) \in R(\langle a,b\rangle)$ a platí $\int_a^b \left[f(x)+g(x)\right]dx = \int_a^b f(x)\,dx \;+\; \int_a^b g(x)\,dx$.

Princip důkazu: Použijí se vlastnosti integrálních součtů. □

V (*vlastnosti vyjádřené nerovnostmi*): Nechť $f,g \in R(\langle a,b\rangle)$.

(3) Je-li $f(x) \geq 0$ na $\langle a,b\rangle$, pak $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$.

(4) Je-li $f(x) \leq g(x)$ na $\langle a,b\rangle$, pak $\int_a^b f(x)\,dx \;\leq\; \int_a^b g(x)\,dx$.

(5) $|\,f(x)\,| \in R(\langle a,b\rangle)$ a platí $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \;\leq\; \int_a^b \left|\,f(x)\,\right|dx$.

Princip důkazu: (3) plyne z definice, (4) ze (3) a (5) ze (4), neboť $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$. □

V (*o součinu funkcí*): Je-li $f,g \in R(\langle a,b\rangle)$, pak i $fg \in R(\langle a,b\rangle)$.

Princip důkazu: Důkaz je založen na odhadu

$|f(x'')g(x'') - f(x')g(x')| \leq |f(x'') - f(x')|.L + |g(x'') - g(x')|.K$,

kde K, L jsou konstanty, pro něž $|f(x)| \leq K$, $|g(x)| \leq L$. □

Vlastnosti závislé na intervalu integrování

V (*aditivita integrálu*): Nechť $a < c < b$. Pak $f \in R(\langle a,b\rangle) \;\Leftrightarrow\; f \in R(\langle a,c\rangle) \wedge f \in R(\langle c,b\rangle)$. Přitom platí

$$\int_a^b f(x)\,dx \;=\; \int_a^c f(x)\,dx \;+\; \int_c^b f(x)\,dx .$$

Princip důkazu: Plyne z vlastností integrálních součtů, když bod c vezmeme za dělicí bod. □

Tuto vlastnost lze rozšířit na konečný počet bodů $a = c_0 < c_1 < \ldots < c_n = b$:

$$\int_a^b f(x)\,dx \;=\; \sum_{i=1}^{n} \int_{c_{i-1}}^{c_i} f(x)\,dx .$$

Úloha 11.3.1. Vypočtěte $I \;=\; \int_0^3 |x-2|\,dx$.

[$I \;=\; \int_0^2 (2-x)dx \;+\; \int_2^3 (x-2)dx \;=\; \ldots$]

Rozšíření definice Riemannova integrálu pro případ, že a ≥ b :

Pro $a = b$ definujeme $\int_a^a f(x)\,dx = 0$.

Pro $a > b$ definujeme $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$.

Pak pro *libovolné* uspořádání bodů *a*, *b*, *c* platí $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$, pokud je funkce f integrovatelná v nejširším intervalu určeném body *a*, *b*, *c*.

11.4. Výpočet určitých integrálů

K výpočtu používáme zpravidla Newtonova vzorce, tj. najdeme primitivní funkci a pak použijeme Newtonův vzorec, viz 11.2, příklad 1 a 2.

Výpočet užitím substituce nebo per partes

Máme-li při výpočtu primitivní funkce použít substituci, pak můžeme postupovat přímo jako v 11.2, příklad 2, nebo můžeme provést *transformaci mezí*.

V: Je-li $f \in R(\langle a,b\rangle)$, φ má spojitou derivaci na ⟨α,β⟩, přičemž φ(α) = *a*, φ(β) = *b*, pak platí

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt\,.$$

Úloha 11.4.1. Vypočtěte $I = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$.

$$[\ I = \begin{bmatrix} x = \sin t & x = 0 \Rightarrow t = 0 \\ dx = \cos t\,dt & x = 1 \Rightarrow t = \dfrac{\pi}{2} \end{bmatrix} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t}\,\cos t\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt =$$

$$= \left[\frac{1}{2}t + \sin 2t\right]_{t=0}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.\ ]$$

Podobně pro per partes platí

V: Jsou-li u', v' spojité na $\langle a,b\rangle$, pak

$$\int_a^b u(x)\,v'(x)\,dx = \left[u(x)\,v(x)\,\right]_{x=a}^{b} - \int_a^b u'(x)\,v(x)\,dx\,.$$

Úloha 11.4.2. Vypočtěte $I = \int_0^\pi x \sin x\,dx$.

$$[\ I = \begin{bmatrix} u = x & u' = 1 \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{bmatrix} = \left[-x\cos x\right]_{x=0}^{\pi} + \int_0^\pi \cos x\,dx = \ldots = \pi\ .\ ]$$

Integrál komplexní funkce reálné proměnné

Pojem určitého integrálu lze jednoduše rozšířit i na komplexní funkce reálné proměnné. Nechť $f_1, f_2 \in R(\langle a,b\rangle)$ a $f = f_1 + \mathrm{i}\, f_2$. Pak definujeme

$$\int_\alpha^\beta f(t)\,dt \;=\; \int_\alpha^\beta f_1(t)\,dt \;+\mathrm{i}\int_\alpha^\beta f_2(t)\,dt\,.$$

Úloha 11.4.3. Rozhodněte, které vlastnosti integrálů reálných funkcí zůstávají zachovány i pro integrály komplexních funkcí.

Úloha 11.4.4. Vypočtěte $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\,dt$.

[$I \;=\; \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos t \;+\; \mathrm{i}\sin t\right)dt \;=\; \left[\sin t \;-\; \mathrm{i}\cos t\,\right]_{t=0}^{\frac{\pi}{2}} \;=\; 1 +\; \mathrm{i}$.]

11.5. Další vlastnosti určitého integrálu

Věty o střední hodnotě

V (*o střední hodnotě integrálního počtu*): Nechť $f \in R(\langle a,b\rangle)$ a platí $m \le f(x) \le M$. Pak existuje číslo $\mu \in \langle m, M\rangle$ tak, že

$$\int_a^b f(x)\,dx = \mu(b-a)\,.$$

Je-li f spojitá, pak existuje číslo $\xi \in \langle a,b\rangle$ tak, že

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\,f(\xi)\,.$$

Princip důkazu: Nerovnost $m \le f(x) \le M$ integrujeme na $\langle a,b\rangle$ a výraz $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ označíme μ. Je-li m, M minimum a maximum funkce f spojité na $\langle a,b\rangle$, pak podle věty o mezihodnotě nabývá f hodnoty $\mu \in \langle m, M\rangle$ v nějakém bodu $\xi \in \langle a,b\rangle$. □

V (*zobecněná věta o střední hodnotě integrálního počtu*): Nechť f, $g \in R(\langle a,b\rangle)$, $g(x) \ge 0$, $m \le f(x) \le M$. Pak platí

$$m\int_a^b g(x)\,dx \;\le\; \int_a^b f(x)g(x)\,dx \;\le\; M\int_a^b g(x)\,dx$$

a existuje číslo $\mu \in \langle m, M\rangle$ tak, že platí

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx \;=\mu\int_a^b g(x)\,dx\,.$$

Je-li f spojitá, pak existuje číslo $\xi \in \langle a,b\rangle$ tak, že

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b g(x)\,dx.$$

Integrál jako funkce horní meze

Je-li $f \in R(\langle a,b\rangle)$, pak pro každé $x \in \langle a,b\rangle$ je $f \in R(\langle a,x\rangle)$ a $\int_a^x f(t)\,dt = \Phi(x)$ je integrál, který je funkcí své horní meze x. Vzhledem k rozšířené definici integrálu lze za dolní mez zvolit libovolné číslo $c \in \langle a,b\rangle$.

V: Nechť funkce $f \in R(\langle a,b\rangle)$, $c \in \langle a,b\rangle$. Pak funkce $\Phi(x) = \int_c^x f(t)\,dt$ je spojitá na $\langle a,b\rangle$ a v každém bodě $x_0 \in \langle a,b\rangle$, v němž je f spojitá, má Φ derivaci (v krajních bodech a, b jednostrannou), pro niž $\Phi'(x_0) = f(x_0)$.

Princip důkazu: $\Phi(x_0 + h) - \Phi(x_0) = \int_c^{x_0+h} f(t)\,dt - \int_c^{x_0} f(t)\,dt = \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt = \mu h$, kde

$\mu \in \langle m,M\rangle$ je střední hodnota, odkud plyne spojitost funkce Φ. Ve druhém případě se odvodí, že $\forall \varepsilon > 0\ \exists U(x_0)$ tak, že $\forall x \in U(x_0)$ platí (t je mezi x a x_0):

$$\left|\frac{\Phi(x)-\Phi(x_0)}{x-x_0} - f(x_0)\right| \le \frac{1}{|x-x_0|}\left|\int_{x_0}^{x} |f(t)-f(x_0)|\,dt\right| < \frac{1}{|x-x_0|}\left|\int_{x_0}^{x} \varepsilon\,dt\right| < \ldots < \varepsilon. \quad \square$$

Důsledky:

(1) Každá funkce f spojitá na $\langle a,b\rangle$ má na tomto intervalu primitivní funkci Φ.

(2) Každá funkce omezená a po částech spojitá na $\langle a,b\rangle$ má na tomto intervalu zobecněnou primitivní funkci; jednou z nich je funkce Φ (integrál jako funkce horní meze).

\- * -