1. Číselná osa, supremum a infimum

1.1. Základní číselné množiny

Uvedeme si přehled základních číselných množin a jejich označení. Uvažují se zejména tyto číselné množiny:

- $\boldsymbol{N} = \{1, 2, 3, ..., n, ...\}$ je množina všech *přirozených* čísel.

Přirozená čísla se používají např. jako pořadová čísla, třeba při zápisu členů posloupnosti: $\{a_n\} = a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$

- $\boldsymbol{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, ..., n, ...\} = \boldsymbol{N} \cup \{0\}$ je pro některé autory také množinou všech *přirozených* čísel a zapisuje se jimi především počet prvků neprázdných množin. .

- $\boldsymbol{Z} = \{ ..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$ je množina všech *celých* čísel.

Celá čísla se používají např. pro zápisy vztahující se k periodičnosti funkcí; např. funkce $y = \operatorname{cotg} x$ není definována pro $x = k\pi$, kde $k \in \boldsymbol{Z}$ je libovolné (celé) číslo.

- $\boldsymbol{Q}$, množina všech čísel *racionálních*, je množinou všech zlomků $\frac{k}{n}$, kde $k \in \boldsymbol{Z}$ a $n \in \boldsymbol{N}$.

Používá se např. při konstrukci některých méně obvyklých matematických objektů (viz dále). Množina $\boldsymbol{Q}$ je na číselné ose hustě uspořádána, mezi každými dvěma racionálními čísly leží další racionální číslo (např. jejich aritmeticky průměr); též mezi každými dvěma reálnými čísly leží racionální číslo. Desetinný rozvoj racionálních čísel je ukončený nebo periodický, dostaneme jej ze zlomku k/n dělením. Obrácený postup je již náročnější.

Úloha 1.1.1. Číslo $a = 1{,}5\overline{72}$ převeďte na obyčejný zlomek.

[Jsou dva základní způsoby řešení. První vychází z toho, že periodická část desetinného rozvoje čísla a je vlastně geometrická řada, tedy:

$$a = 1{,}5 + \frac{72}{10^3} + \frac{72}{10^5} + \frac{72}{10^7} + \dots = 1{,}5 + \frac{72}{10^3}\,\frac{1}{1-\frac{1}{100}} = \dots = \frac{173}{110}.$$

Druhý způsob řešení: Zapíšeme

$$a = \quad 1{,}5\overline{72}$$

$100\,a = 157{,}2\overline{72}$, odkud po odečtení je

$$99\,a = 155{,}7 \quad \text{, tedy} \quad a = \frac{1557}{990} = \frac{173}{110}.\ ]$$

- $\boldsymbol{R}$ - množina všech čísel *reálných*, je pro základní kurs matematické analýzy základní číselnou množinou (pokud není řečeno jinak, budeme rozumět pod pojmem číslo vždy číslo reálné). Dostaneme ji tak, že vhodným způsobem zavedeme iracionální čísla.

Reálná čísla zobrazujeme na číselné (reálné) ose: je to přímka, na níž zvolíme bod O jako obraz čísla 0 (počátek číselné osy) a bod J jako obraz čísla 1, a pomocí těchto dvou bodů pak na ní zobrazujeme všechna reálná čísla; body na číselné ose označujeme zpravidla přímo zobrazovanými čísly.

Při rozšiřování pojmu *číslo* z ***Q*** na ***R*** vznikají dvě otázky:

- zda existuje potřeba iracionálních čísel (a jak je zavést),
- zda zobrazení množiny ***R*** na číselnou osu je bijekce, tj. zda i každý bod číselné osy je obrazem nějakého reálného čísla.

V: Neexistuje racionální číslo, jehož druhá mocnina by byla rovna 2.

Důkaz (sporem): Předpokládejme, že není splněno tvrzení věty, že tedy $\exists r \in \boldsymbol{Q}$: $r^2 = 2$. Číslo r je zřejmě kladné; vyjádříme je v základním tvaru $r = \frac{p}{q}$, tedy p, q jsou čísla nesoudělná a platí $rq = p$. Umocníme: $r^2q^2 = p^2$, tj. $2\,q^2 = p^2 \Rightarrow p^2$ je sudé $\Rightarrow p$ je sudé: $p = 2\,k \Rightarrow 2\,q^2 = 4\,k^2$ $\Rightarrow q^2 = 2\,k^2 \;\Rightarrow\; q^2$ je sudé $\Rightarrow q$ je sudé $\Rightarrow$ zlomek $\frac{p}{q}$ lze krátit dvěma, a to je spor s předpokladem, že tento zlomek je v základním tvaru. □

Bez iracionálních čísel (tj. v množině ***Q***) bychom tak např. nedovedli změřit úhlopříčku jednotkového čtverce (neměla by délku). Existuje tedy potřeba čísel, která nejsou racionální a která jsme nazvali iracionální.

Logika rozšiřování číselných oborů říká, že nový druh čísel zavádíme pomocí čísel již dříve definovaných. Při zavádění čísel reálných (tedy vlastně iracionálních, jen ta jsou nová) lze postupovat tak, že definujeme tzv. *řez* v množině ***Q*** jako každý rozklad množiny ***Q*** na dvě třídy, dolní a horní, kde tedy každé racionální číslo patří právě do jedné z těchto tříd a každé číslo z horní třídy je větší než každé číslo z dolní třídy. Iracionální číslo pak ztotožníme s takovým řezem, kde v dolní třídě není největší prvek a v horní třídě není prvek nejmenší. Např. číslo $\sqrt{2}$ je dáno řezem v ***Q***, kde do dolní třídy patří všechna čísla záporná a ta x z nezáporných, pro něž je $x^2 < 2$, do horní třídy patří všechny zbývající racionální čísla.

Množinu všech iracionálních čísel označíme $\boldsymbol{Q}'$; je $\boldsymbol{Q} \cap \boldsymbol{Q}' = \emptyset$ a $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{Q} \cup \boldsymbol{Q}'$. Všimněme si dekadického rozvoje: racionální čísla mají dekadický rozvoj ukončený nebo periodický, iracionální čísla mají svůj dekadický rozvoj neukončený a neperiodický (pro iracionální čísla často známe jen konečný počet míst jejich dekadického rozvoje (např. pro číslo π), ale není to pravidlo).

Úloha 1.1.2. Napište dekadický rozvoj takového iracionálního čísla, u něhož dovedeme jednoduše určit číslici na libovolném místě rozvoje.

⟨Důležitá cesta k poznání množiny $\boldsymbol{Q}'$ vede přes *mohutnosti množin*. Víme, že množiny ***N***, ***Z***, ***Q*** jsou spočetné (prvky těchto množin lze uspořádat do posloupnosti), zatímco množina ***R*** (tedy i $\boldsymbol{Q}'$) spočetná není; říkáme, že ***R*** má *mohutnost kontinua*.⟩

- ***C*** - množina všech čísel *komplexních*; komplexní čísla zobrazujeme v Gaussově rovině.
  Platí: $\boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{N}_0 \subset \boldsymbol{Z} \subset \boldsymbol{Q} \subset \boldsymbol{R} \subset \boldsymbol{C}$.

1.2. Vlastnosti číselných množin

O relacích a operacích v číselných množinách a o jejich přirozeném uspořádání pojednává podrobně algebra. Avšak i v matematické analýze se zabýváme mnoha významnými číselnými množinami. Při vyšetřování číselných množin se zabýváme jejich vlastnostmi, o nichž dále pojednáme..

D: Množina M se nazývá ***shora omezená*** $\Leftrightarrow \exists L \in \boldsymbol{R}$ tak, že $\forall x \in M$ platí $x \leq L$. Toto číslo L se nazývá ***horní odhad*** (resp. horní závora).

Množina M se nazývá ***zdola omezená*** $\Leftrightarrow \exists K \in \boldsymbol{R}$ tak, že $\forall x \in M$ platí $x \geq K$. Toto číslo K se nazývá ***dolní odhad*** (resp. dolní závora).

Množina M se nazývá ***omezená*** $\Leftrightarrow$ je omezená shora i zdola.

Úloha 1.2.1. Kolik horních (dolních) odhadů má číselná množina? Vyjádřete, co znamená, že daná množina M není omezená shora, zdola, že není omezená.Co znamená, že číslo B není horním odhadem dané množiny?

Pokud některý horní odhad množiny M patří do množiny M, pak jej nazýváme největší prvek množiny M a označujeme jej $\max M$. Podobně nejmenší prvek množiny M (definujte) označujeme $\min M$.

Úloha 1.2.2. Určete největší a nejmenší prvek množiny

$$M_1 = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots\right\},\ M_2 = \left\{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, -\frac{3}{4}, \ldots\right\},\ M_3 = \left\{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\right\}.$$

[Množina M_1 má největší a nemá nejmenší prvek, M_2 nemá největší ani nejmenší prvek, M_3 má prvek největší i nejmenší.]

K nejdůležitějším číselným množinám patří **intervaly**.

D: $\forall a,b \in \boldsymbol{R}$, $a < b$, definujeme

uzavřený interval $\langle a,b\rangle = \{x \in \boldsymbol{R};\ a \leq x \leq b\}$,

otevřený interval $(a,b) = \{x \in \boldsymbol{R};\ a < x < b\}$,

a podobně $\langle a,b)$, $(a,b\rangle$.

Všechny tyto intervaly mají délku b-a.

D: Množinu $\langle a,+\infty) = \{x \in \boldsymbol{R};\ x \geq a\}$ nazýváme ***neomezený interval***.
Podobně $(a,+\infty)$, $(-\infty,b\rangle$, $(-\infty ,b)$. Množinu $\boldsymbol{R}$ zapisujeme též jako $(-\infty ,+\infty)$.

Někdy uvažujeme též *degenerované intervaly*: $\langle a,a\rangle = \{a\}$, $(a,a) = \emptyset$ (prázdná množina). Pojmem interval budeme však dále vždy rozumět nedegenerovaný interval.

D: ***Absolutní hodnota*** čísla $a \in \boldsymbol{R}$ se označuje $|a|$ a je definována takto:

$$\forall a \in R:\quad |a| = \begin{cases} a & \text{pro } a \geq 0 \\ -a & \text{pro } a < 0 \end{cases}$$

V (vlastnosti absolutní hodnoty): $\forall\ a,b \in \boldsymbol{R}$ platí

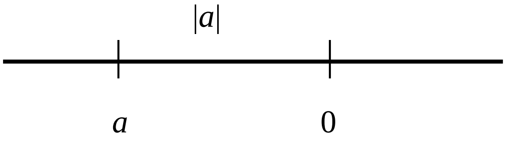
1) $|a| \geq 0$, přičemž $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$,
2) $|-a| = |a|$,
3) $|a + b| \leq |a| + |b|$, 4) $|a - b| \geq |a| - |b|$,
5) $|ab| = |a| \cdot |b|$, 6) pro $b \neq 0$ je $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$.

Vlastnost 3 (trojúhelníkovou nerovnost) můžeme zobecnit (důkaz matematickou indukcí):

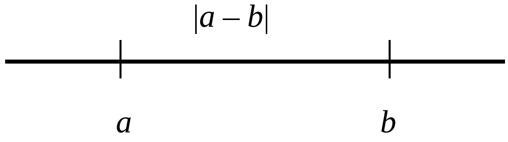
(3') $\forall n \in N \;\; \forall a_i \in \boldsymbol{R} : \left| a_1 + a_2 + \ldots + a_n \right| \le \left| a_1 \right| + \left| a_2 \right| + \ldots + \left| a_n \right|$

nebo zkráceně $\left| \sum_{i=1}^{n} a_i \right| \le \sum_{i=1}^{n} \left| a_i \right|$.

Geometrický význam absolutní hodnoty: $|a|$ značí vzdálenost obrazu čísla a od počátku číselné osy, $|a - b|$ ($= |b - a|$) vzdálenost obrazů čísel a,b na číselné ose.



obr. 1.2.1.



obr. 1.2.2.

Úloha 1.2.3. Řešte nerovnice a rovnici:

a) $|x - 3| < 2$,

b) $2\,|x + 2| - 3\,|x| - 2x \ge 4$,

c) $-3 - \frac{5}{4}x + \frac{3}{2}|x+1| - \frac{3}{4}|x-2| = 0$.

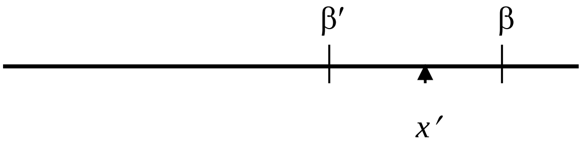
1.3. Supremum a infimum

D: Nechť $M \subset R$, $M \neq \emptyset$. Číslo $\beta \in \boldsymbol{R}$ nazýváme ***supremum*** množiny M a píšeme $\beta = \sup M$ $\Leftrightarrow$ má tyto dvě vlastnosti:

(1) $\forall x \in M : x \le \beta$,

(2) $\forall \beta' < \beta \;\; \exists\, x' \in M : x' > \beta'$.

Vlastnost (1) znamená, že β je horní odhad, vlastnost (2) říká, že β je ze všech horních odhadů nejmenší, tedy: sup M je *nejmenší horní odhad* (závora) množiny M. Ovšem z definice nijak neplyne, že takový nejmenší horní odhad existuje.



obr. 1.3.1.

D: Nechť $M \subset R$, $M \neq \emptyset$. Číslo $\alpha \in \boldsymbol{R}$ nazýváme ***infimum*** množiny M a píšeme $\alpha = \inf M$ $\Leftrightarrow$ má tyto dvě vlastnosti:

(1) $\forall x \in M : x \ge \alpha$,

(2) $\forall \alpha' > \alpha \;\; \exists x' \in M : x' < \alpha'$.

Vlastnost (1) znamená, že α je dolní odhad, vlastnost (2) říká, že α je ze všech dolních odhadů největší, tedy: inf M je *největší dolní odhad* (závora) množiny M. Z definice opět nijak neplyne, že takový největší dolní odhad existuje.

Úloha 1.3.1. Určete sup M a inf M pro množinu $M = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots \right\}$.

[Platí sup $M = 1$, neboť všechny prvky množiny M jsou pravé zlomky a jsou tedy menší než 1; jestliže však vezmeme libovolné číslo $r < 1$, existuje vždy v M prvek $\frac{n}{n+1}$, který je větší než r. Dále inf $M = \frac{1}{2}$, neboť žádný prvek M není menší než $\frac{1}{2}$, a když zvolíme libovolné číslo $s > \frac{1}{2}$, pak vždy právě pro prvek $\frac{1}{2}$ platí $\frac{1}{2} > s$. Přitom sup M není a inf M je prvkem zadané množiny M.]

Tedy: supremum a infimum množiny mohou, ale nemusí být prvky této množiny. Pokud sup M je prvkem množiny M, je jejím největším prvkem; podobně pro inf M. Také naopak, pokud má M největší prvek, je to současně sup M; podobně pro nejmenší prvek.

V (o existenci suprema a infima):
1) Každá neprázdná shora omezená množina reálných čísel má supremum.
2) Každá neprázdná zdola omezená množina reálných čísel má infimum.

Tuto větu budeme považovat za axiom vyjadřující základní vlastnost číselné osy. Tedy: existuje bijekce množiny $\boldsymbol{R}$ na číselnou osu – každé reálné číslo lze zobrazit na číselné ose a každý bod číselné osy je obrazem nějakého reálného čísla. Říkáme též: *číselná osa je spojitá*. Pojmy „číslo“ a „bod číselné osy“ považujeme za synonyma a říkáme např. „bod x_0“ místo „číslo x_0“ apod.

Pojmy supremum a infimum a věta o existenci suprema a infima jsou pro matematickou analýzu velmi důležité. Hrají podstatnou roli v řadě důkazů (viz např. dále 1.4, důkaz věty o vložených intervalech) a při definici dalších důležitých matematických pojmů.

Reálná čísla a realita.

Matematika svými prostředky modeluje realitu a přitom používá metody abstrakce: abstrahuje od mnoha vlastností reálných objektů (které mohou být pro realitu velmi významné) a ponechává jen ty, které upotřebí při vytváření matematických modelů. Vytváří tak různé abstraktní objekty, jako je bod, čtverec, číslo, funkce, řada ad. Tyto abstraktní modely jsou velmi vhodné pro popis a studium reality, ale přesto nesmíme zaměňovat model a realitu. V určitých případech se naše reálné představy a zkušenosti dostávají do rozporu s některými matematicky zcela přesně definovanými pojmy a vlastnostmi. Např. v reálném životě není nekonečno, takže některé jeho vlastnosti odporují našim praktickým zkušenostem, třeba to, že nekonečná množina je ekvivalentní s některou svou pravou částí; např. množina všech lichých přirozených čísel „má týž počet prvků“ (tj. stejnou mohutnost) jako množina $\boldsymbol{N}$. Podobně na základě zkušeností z reálného světa je nepředstavitelné, že $\boldsymbol{Q}'$ má větší mohutnost než $\boldsymbol{Q}$ (že iracionálních čísel „je více“ než čísel racionálních. Naše zkušenost říká, že když vedle sebe jsou umístěny nějaké objekty, tak mezer mezi nimi je tak nějak stejně jako objektů (plaňkový plot), ale u čísel racionálních a iracionálních je to úplně a nepředstavitelně jinak. Mezi každými dvěma čísly racionálními je alespoň jedno číslo iracionální a mezi každými dvěma čísly iracionálními je alespoň jedno číslo racionální, přičemž těch iracionálních mezi dvěma racionálními je množina mohutnosti kontinua, zatímco racionálních mezi dvěma iracionálními je jen spočetná množina. Definice iracionálních čísel, ať už použijeme jakoukoli metodu, vytváří jen matematický model a nikoli realitu. Spojitost číselné osy, která se skládá z racionálních a iracionálních bodů, si nelze představit; snad i proto, že v reálném světě je to jinak, tam neexistuje žádná přímka a pohodu číselné osy jako dobře fungujícího matematického modelu narušují různé fyzikální částice.

1.4. Několik vět o reálných číslech a číselných množinách

V (o aritmetickém a geometrickém průměru): Jsou-li a, b libovolná reálná nezáporná čísla, pak jejich aritmetický průměr je větší nebo roven jejich průměru geometrickému, přičemž rovnost průměrů nastává právě při rovnosti obou čísel a, b.

Princip důkazu: Je tu vhodný důkaz *přímý syntetický*, přičemž se vyjde z platné nerovnosti $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2 \geq 0$, jejíž úpravou dostaneme tvrzení. □

Úloha 1.4.1. Všimněte si slovní formulace věty. Přepište ji do formy převážně symbolické a do formy zcela symbolické.

V (Bernoulliova nerovnost): $\forall h \in R$, $h > -1$, $h \neq 0$ $\forall n \in \boldsymbol{N}$, $n \geq 2$ platí
$V(n)$: $(1 + h)^n > 1 + nh$.

Princip důkazu: Matematickou indukcí v 1. kroku dokazujeme $V(2)$: $(1 + h)^2 = 1 + 2h + h^2 > > 1 + 2h$, a ve druhém kroku dokazujeme implikaci $V(n) \Rightarrow V(n+1)$ a to tak, že ve $V(n)$ násobíme obě strany nerovnosti $V(n)$ výrazem $(1 + h)$ a pak na pravé straně vynecháme člen nh^2.

Bernoulliova nerovnost se používá např. při některých důkazech vlastností posloupností.

V (o rovnosti reálných čísel): Nechť $p, q \in R$. Jestliže $\forall \varepsilon > 0$ platí $|p - q| < \varepsilon$, pak $p = q$.

Důkaz (*sporem*): Kdyby $p \neq q$, bylo by $|p - q| > 0$. Zvolíme-li $\varepsilon = |p - q|$, dostáváme, že $|p - q| < \varepsilon$ a současně $|p - q| = \varepsilon$, což dává spor. Proto $p = q$. □

Tato jednoduchá věta usnadňuje některé důkazy, např. důkaz následující věty.

V (o vložených intervalech): Nechť $\{J_n\}$ je posloupnost omezených uzavřených intervalů $J_n = \langle a_n, b_n\rangle$ takových, že $J_1 \supset J_2 \supset J_3 \supset \ldots$ Pak existuje bod x_0, který leží ve všech intervalech J_n, $n \in \boldsymbol{N}$. Jestliže navíc $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n \in \boldsymbol{N}$ tak, že $|J_n| < \varepsilon$, je takový bod x_0 jediný.

Princip důkazu: Uvažujeme množinu A všech levých krajních bodů a_n intervalů J_n a množinu B jejich pravých krajních bodů b_m; pro všechna $m, n \in \boldsymbol{N}$ platí $a_n < b_m$. Podle věty o existenci suprema tedy existuje $\alpha = \sup A$, pro něž $\alpha \leq b_m$; podobně existuje $\beta = \inf B$ a pro všechna $n \in \boldsymbol{N}$ platí $a_n \leq \alpha \leq \beta \leq b_n$, tedy $\forall n \in \boldsymbol{N}$: $\langle\alpha, \beta\rangle \subset \langle a_n, b_n\rangle$. Pro důkaz tvrzení věty stačí volit $x_0 \in \langle\alpha, \beta\rangle$. Je-li interval $\langle\alpha, \beta\rangle$ degenerovaný, dostáváme x_0 jednoznačně. To nastává právě tehdy, když je splněna druhá podmínka věty, tedy když $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n \in \boldsymbol{N}$ tak, že $b_n - a_n < < \varepsilon$. Jelikož je $\beta - \alpha \leq b_n - a_n < \varepsilon$, je podle věty o rovnosti reálných čísel $\alpha = \beta$. □

Podmínka věty, zajišťující jednoznačnost společného bodu x_0 může být formulována i takto: „Jestliže posloupnost $\{|J_n|\}$ délek intervalů J_n je nulová …“

Větu o vložených intervalech používáme při důkazech některých důležitých vlastností posloupností a funkcí, zejména ve spojení s tzv. Bolzanovou metodou důkazu.

1.5. Klasifikace bodů vzhledem k množině

D: ***Okolím bodu*** a nazveme každý otevřený interval (c, d) konečné délky, který obsahuje bod a (tj. kde $a \in (c, d)$); označení okolí bodu a: $U(a)$.

Tato je definice je formulována ve smyslu topologickém.

V (vlastnosti okolí): Okolí bodu a má tyto vlastnosti:

(1) Pro každé $U(a)$ je $a \in U(a)$.

(2) Ke každým dvěma okolím $U_1(a)$, $U_2(a)$ existuje okolí $U(a)$ tak, že $U(a) \subset U_1(a) \cap U_2(a)$.

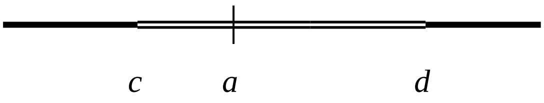
(3) Je-li $b \in U(a)$, pak existuje $U_1(b)$ tak, že $U_1(b) \subset U(a)$.

(4) Pro libovolná $a \neq b$ existují $U_1(a)$, $U_2(b)$ tak, že $U_1(a) \cap U_2(b) = \emptyset$.

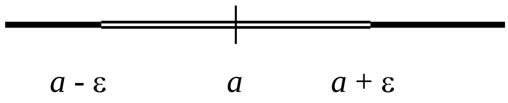
Pro důkazy některých vět je vhodnější definovat okolí bodu a ve smyslu metrickém.

D: ***ε-okolím bodu*** a , kde $\varepsilon \in \boldsymbol{R}$, $\varepsilon > 0$, nazýváme interval $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$; označení: $U(a,\varepsilon)$ nebo též $U(a)$.

Lehce ověříme, že ε-okolí má všechny uvedené vlastnosti okolí. Místo $x \in U(a,\varepsilon)$ lze rovněž psát $|x - a| < \varepsilon$.



obr. 1.5.1.



obr. 1.5.2.

D: ***Prstencovým*** (***redukovaným***) ***okolím*** bodu a nazýváme množinu $P(a) = U(a) - \{a\}$.

Podobně $P(a,\varepsilon) = U(a,\varepsilon) - \{a\}$. Dále se definuje levé resp. pravé okolí bodu a jako interval $(c, a\rangle$ nebo $(a - \varepsilon, a\rangle$ resp. $\langle a, d)$ nebo $\langle a, a + \varepsilon)$; jsou to tzv. ***jednostranná okolí***. Ještě uvažujeme *jednostranná prstencová* (*redukovaná*) okolí – to když z jednostranného okolí vypustíme bod a.

Užitím pojmu okolí bodu lze klasifikovat body z $\boldsymbol{R}$ vzhledem k dané číselné množině M. Uvedeme si nyní zkrácené definice některých důležitých pojmů, používaných v matematické analýze.

Vnitřní bod množiny M: Bod množiny M, který do M patří i s některým svým okolím.

Vnitřek množiny M: Množina všech vnitřních bodů množiny M.

Hraniční bod množiny M: V každém jeho okolí existuje bod množiny M a též bod, který do M nepatří. (Hraniční bod může, ale nemusí patřit do M.)

Hranice množiny M: Množina všech hraničních bodů množiny M.

Vnější bod množiny (*vzhledem k množině*) M: Bod číselné osy, který není vnitřním ani hraničním bodem množiny M.

Vnějšek množiny M: Množina všech vnějších bodů množiny M.

Množina M je ***otevřená***: Každý její bod je jejím vnitřním bodem.

Množina M je ***uzavřená***: Obsahuje svou hranici.

Uzávěr $\overline{M}$ ***množiny*** M: Sjednocení množiny M a její hranice.

Hromadný bod a ***množiny*** M: V každém jeho prstencovém okolí leží alespoň jeden bod množiny M.

Izolovaný bod množiny M: Bod množiny M, který není jejím hromadným bodem.

Diskrétní množina: Všechny její body jsou izolované.

Derivace M' ***množiny*** M: Množina všech hromadných bodů množiny M.

Jelikož všechny tyto pojmy jsou založeny vlastně jen na pojmu okolí, setkáváme se s nimi ve všech prostorech, kde se pracuje s okolím. Na číselné ose (na rozdíl např. od roviny) však pracujeme i s pojmy „levé okolí" a „pravé okolí" a můžeme tedy např. definovat *i levý hromadný bod* a *pravý hromadný bod* a těchto pojmů skutečně využíváme při definování jednostranných limit funkce.

Úloha 1.5.1. Všechny uvedené pojmy použijte pro množinu $M = \langle -1, 0) \cup \left\{ \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots \right\}$.

1.6. Rozšířená reálná osa

Je to model číselné osy, kterou rozšíříme o dva nové prvky: *nevlastní číslo* $+\infty$ a nevlastní číslo $-\infty$. Označení rozšířené reálné osy: $\boldsymbol{R}^* = \boldsymbol{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Zavedení nevlastních čísel nám umožňuje hlouběji, lépe a jednodušeji formulovat mnohé poznatky matematické analýzy.

Vlastnosti nevlastních čísel

Na rozšířené reálné ose definujeme přirozené uspořádání a početní operace tak, že rozšíříme příslušná pravidla platná na $\boldsymbol{R}$.

Uspořádání: $\forall x \in \boldsymbol{R}$: $-\infty < x < +\infty$, zvláště $-\infty < +\infty$; $-(-\infty) = +\infty$, $-(+\infty) = -\infty$, $|+\infty| = |-\infty| = +\infty$.

Okolí: $U(+\infty)$ toto označení budeme používat pro každý interval $\langle c, \infty\rangle \subset \boldsymbol{R}^*$, ale pokud budeme pracovat na $\boldsymbol{R}$, použijeme toto označení (pro zjednodušení vyjadřování) též pro intervaly $(c, +\infty) \subset \boldsymbol{R}$, což jsou vlastně prstencová okolí $P(+\infty)$ na $\boldsymbol{R}^*$. Podobně pro $U(-\infty)$ a $P(-\infty)$.

Supremum a *infimum*: Pro množinu M, která není shora omezená, je $\sup M = +\infty$, pro množinu M, která není zdola omezená, je $\inf M = -\infty$.

Hromadné body: Definice je formálně stejná, tedy $+\infty$ nazveme hromadným bodem množiny $M \subset \boldsymbol{R}^*$ $\Leftrightarrow$ v každém jeho okolí $P(+\infty)$ leží alespoň jeden bod množiny M. Podobně pro $-\infty$.

Např. množina Z všech celých čísel má hromadné body $+\infty$ a $-\infty$, $\sup Z = +\infty$, $\inf Z = -\infty$, ale samozřejmě $+\infty \notin Z$, $-\infty \notin Z$.

Početní operace s nevlastními čísly

Sčítání a odčítání: $\forall x \in \boldsymbol{R}$ definujeme $\pm x + (+\infty) = (+\infty) \pm x = \pm x - (-\infty) = (+\infty) + (+\infty) = (+\infty) - (-\infty) = +\infty$, $\pm x + (-\infty) = (-\infty) \pm x = \pm x - (+\infty) = (-\infty) + (-\infty) = (-\infty) - (+\infty) = -\infty$.

Nedefinujeme $(+\infty) - (+\infty)$, $(+\infty) + (-\infty)$, $(-\infty) + (+\infty)$, $(-\infty) - (-\infty)$.

Násobení: $\forall x \in \boldsymbol{R}$, $x > 0$ definujeme $x \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot x = (+\infty) \cdot (+\infty) = (-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty$, $x \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot x = (+\infty) \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty$. Podobně pro $x < 0$.

Nedefinujeme $0 \cdot (+\infty)$, $(+\infty) \cdot 0$, $0 \cdot (-\infty)$, $(-\infty) \cdot 0$.

Dělení: $\forall x \in \boldsymbol{R}$ definujeme $x / (+\infty) = x / (-\infty) = 0$.

Pro $x > 0$ je $+\infty / x = +\infty$, $-\infty / x = -\infty$,

pro $x < 0$ je $+\infty / x = -\infty$, $-\infty / x = +\infty$.

Nedefinujeme $+\infty / +\infty$, $+\infty / -\infty$, atd., $x / 0$ pro žádné $x \in \boldsymbol{R}$, tj. ani $0 / 0$ nebo $\pm\infty / 0$.

Mocniny: $\forall n \in \boldsymbol{N}$ definujeme $(+\infty)^n = +\infty$, $(+\infty)^{-n} = 0$, $(-\infty)^n = (-1)^n \cdot (+\infty)$.

Nedefinujeme $(+\infty)^0$, $(-\infty)^0$, 0^0, $1^{+\infty}$, $1^{-\infty}$.

Poznámka: Z praktických důvodů se někdy píše místo $+\infty$ jen ∞, takže např. místo výrazu $(+\infty) + (+\infty)$ lze napsat jen $\infty + \infty$. Jestliže však pracujeme v komplexním oboru, kde se zavádí jediné komplexní nekonečno označované ∞, musíme dát pozor na jeho odlišení od $+\infty$ z rozšířené reálné osy $\boldsymbol{R}^*$.

Úloha 1.6.1. Vypočtěte $a = +\infty \cdot 5 - (-\infty)/3 + (-\infty)^3 \cdot (100 - \infty) - 1200!/+\infty$.

- * -