

# Численные методы решения систем линейных алгебраических уравнений

Прямые методы

Курц В.В.

Санкт-Петербургский Политехнический университет Петра Великого

8 октября 2021 г.

# Линейная алгебра

Видео-курс по линейной алгебре by Prof. Gilbert Strang (MIT)

<https://ocw.mit.edu/courses/mathematics/18-06-linear-algebra-spring-2010/>

Вычислительная линейная алгебра:

1. решение систем линейных алгебраических уравнений
2. определение собственных значений и собственных векторов

”75% всех расчетных математических задач приходится на решение систем линейных алгебраических уравнений.”

Методы решения СЛАУ:

1. прямые (точные) - ”точные” значения неизвестных за конечное число арифметических операций
2. итерационные - строится последовательность векторов, сходящаяся к решению.

# Содержание

Постановка задачи

Решение простейших СЛАУ

Метод Гаусса и его модификации для решения СЛАУ

Обусловленность задачи решения СЛАУ

Решение СЛАУ, основанное на LDR-факторизации матрицы

Решение СЛАУ с использованием ортогональных матриц

# Постановка задачи

Пусть дана система из  $n$  линейных уравнений с  $n$  неизвестными

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i, i = 1, \dots, n, \quad (1)$$

где  $x_j$  - неизвестные,  $a_{ij}$  - коэффициенты системы и  $b_i$  компоненты вектора правой части.

В матричной форме

$$Ax = b, \quad (2)$$

где  $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  - матрица коэффициентов,  $b = (b_i) \in \mathbb{R}^n$  - вектор правой части и  $x = (x_i) \in \mathbb{R}^n$  - вектор неизвестных.

Требуется найти  $x$ .

## Корректность задачи

Если матрица  $A$  - неособенная, т.е.  $\det(A) \neq 0$ , то система (2) имеет решение, причем единственное.

$$\det(A) \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}.$$

Домножим (2) слева и справа на  $A^{-1}$

$$A^{-1}Ax = A^{-1}b, \quad (3)$$

или

$$x = A^{-1}b. \quad (4)$$

# Понятие приближенного решения

Пусть  $x^*$  - точное решение системы (2),  $\tilde{x}$  - решение, полученное с помощью численного метода.

Как оценить погрешность, если решение - это вектор?

## Определение

Пусть  $x^*$  - точное решение системы (2). Тогда  $\tilde{x}$  называется приближенным решением с точностью  $\epsilon$ , если

$$\|x^* - \tilde{x}\| < \epsilon, \quad (5)$$

где  $\|\cdot\|$  - некоторая векторная норма.

$\|x^* - \tilde{x}\|$  - абсолютная погрешность,  
 $\frac{\|x^* - \tilde{x}\|}{\|x^*\|}$  - относительная погрешность.

# Норма вектора

В  $\mathbb{R}^n$  задана норма, если каждому вектору  $x \in \mathbb{R}^n$  сопоставлено вещественное число  $\|x\|$ , называемое нормой вектора  $x$  и обладающее следующими свойствами:

1.  $\|x\| \geq 0$ , причем  $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2.  $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall \alpha \in \mathbb{R}$
3.  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ ,  $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$

# Норма вектора

## Определение

Пусть  $x = (x_1, \dots, x_n)^\top \in \mathbb{R}^n$  и  $p \in \mathbb{R}$ , причем  $p \geq 1$ . Тогда  $p$ -я норма вектора  $x$  есть

$$\|x\|_p = \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (6)$$

## Частные случаи:

- ▶ Манхэттенская норма,  $p = 1$ :  $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$
- ▶ Евклидова норма,  $p = 2$ :  $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}$
- ▶ бесконечная норма,  $p = \infty$ :  $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$



# Норма вектора

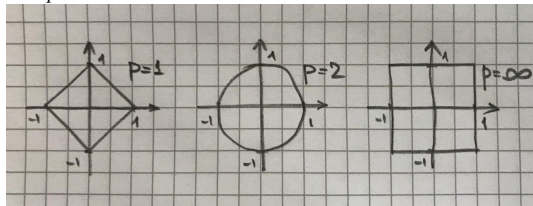
## Пример

$$x = (3, 4)^T$$

$$\|x\|_1 = 7, \|x\|_2 = 5, \|x\|_\infty = 4$$

## Пример

$$\|x\|_p = 1, p = 1, 2, \infty$$



## MATLAB

`norm(x)`, `norm(x, 1)`, `norm(x, Inf)`

# Содержание

Постановка задачи

**Решение простейших СЛАУ**

Метод Гаусса и его модификации для решения СЛАУ

Обусловленность задачи решения СЛАУ

Решение СЛАУ, основанное на LDR-факторизации матрицы

Решение СЛАУ с использованием ортогональных матриц

## СЛАУ с диагональной матрицей

Большинство прямых методов основано на приведении СЛАУ к простейшим СЛАУ (диагональная или треугольная матрица коэффициентов).

$A$  - диагональная матрица (diagonal matrix)

$$\underbrace{\begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} x_1 &= b_1/d_1 \\ x_2 &= b_2/d_2 \\ x_3 &= b_3/d_3 \end{aligned}$$

Если размерность системы  $n$ , то решение можно найти за  $n$  делений.

# СЛАУ с треугольной матрицей

$A$  - нижняя треугольная матрица (lower triangular matrix)

$$\underbrace{\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} x_1 &= b_1/l_{11} \\ x_2 &= (b_2 - l_{21}x_1)/l_{22} \\ x_3 &= (b_3 - l_{31}x_1 - l_{32}x_2)/l_{33} \end{aligned}$$

Метод прямой подстановки (forward substitution method)

$$x_1 = \frac{b_1}{l_{11}}, x_i = \frac{1}{l_{ii}} \left( b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij}x_j \right), i = 2, \dots, n. \quad (7)$$

## Упражнение

Вычислительная сложность метода прямой подстановки -  $O(n^2)$ .

## СЛАУ с треугольной матрицей

$A$  - верхняя треугольная матрица (upper triangular matrix)

$$\underbrace{\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} x_3 &= b_3/u_{33} \\ x_2 &= (b_2 - u_{23}x_3)/u_{22} \\ x_1 &= (b_1 - u_{13}x_3 - u_{12}x_2)/u_{11} \end{aligned}$$

Метод обратной подстановки (backward substitution method)

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{b_n}{u_{nn}}, \\ x_i &= \frac{1}{u_{ii}} \left( b_i - \sum_{j=i+1}^n u_{ij}x_j \right), i = n-1, \dots, 1. \end{aligned} \tag{8}$$

Вычислительная сложность метода обратной подстановки -  $O(n^2)$ .

# СЛАУ с трехдиагональной матрицей

$A$  - трехдиагональная матрица

$$\underbrace{\begin{bmatrix} c_1 & d_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ b_2 & c_2 & d_2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & b_3 & c_3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & c_{n-1} & d_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_n & c_n \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ \vdots \\ r_{n-1} \\ r_n \end{bmatrix}$$

Причем  $b_1 = 0, d_n = 0$

Уравнение под номером  $i$  содержит только 3 неизвестных  $x_{i-1}, x_i, x_{i+1}$ :

$$b_i x_{i-1} + c_i x_i + d_i x_{i+1} = r_i \quad (9)$$

## СЛАУ с трехдиагональной матрицей. Метод прогонки (Thomas Algorithm)

Пусть  $\exists \delta_i, \lambda_i$  :

$$x_i = \delta_i x_{i+1} + \lambda_i, i = 1, \dots, n \quad (10)$$

$$x_{i-1} = \delta_{i-1} x_i + \lambda_{i-1} \quad (11)$$

$$(11) \rightarrow (9) : b_i(\delta_{i-1} x_i + \lambda_{i-1}) + c_i x_i + d_i x_{i+1} = r_i$$

$$x_i = -\frac{d_i}{b_i \delta_{i-1} + c_i} x_{i+1} + \frac{r_i - b_i \lambda_{i-1}}{b_i \delta_{i-1} + c_i} \quad (12)$$

(10), (12)  $\Rightarrow$  рекуррентные соотношения для  $\delta_i$  and  $\lambda_i$ :

$$\delta_i = -\frac{d_i}{b_i \delta_{i-1} + c_i}, \lambda_i = \frac{r_i - b_i \lambda_{i-1}}{b_i \delta_{i-1} + c_i}, i = 1, \dots, n \quad (13)$$

# Метод прогонки (Thomas Algorithm)

## 1. Прямой ход

$$i = 1 : b_1 = 0 \implies \delta_1 = -\frac{d_1}{c_1}, \lambda_1 = \frac{r_1}{c_1}$$

$$i = 2, \dots, n-1 : \text{use (13)}$$

$$i = n : d_n = 0 \implies \delta_n = 0, \lambda_n = \frac{r_n - b_n \lambda_{n-1}}{b_n \delta_{n-1} + c_n}$$

## 2. Обратный ход

$$i = n : x_n = \lambda_n$$

$$i = n-1, \dots, 1 : \text{use (10) to calculate } x_i$$

Метод прогонки требует выполнения  $\mathcal{O}(n)$  арифметических операций.



# Корректность и устойчивость метода прогонки

## Возможные проблемы

1. Деление на 0 в формуле (13).
2. Нарастание погрешностей при вычислении  $x_i$  по формуле (10), если  $|\delta_i| > 1$ .

## Достаточные условия

Метод прогонки будет корректным и устойчивым, если коэффициенты матрицы  $A$  удовлетворяют условиям диагонального преобладания

$$|c_i| > |b_i| + |d_i| \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

# Содержание

Постановка задачи

Решение простейших СЛАУ

Метод Гаусса и его модификации для решения СЛАУ

Обусловленность задачи решения СЛАУ

Решение СЛАУ, основанное на LDR-факторизации матрицы

Решение СЛАУ с использованием ортогональных матриц

## Элементарные операции над строками

$Ax = b$ ,  $(A|b)$  - расширенная матрица (augmented matrix).

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ 2x_1 - x_2 = 1 \end{cases} \quad \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

### 1. Перестановка строк

$$\left( \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left( \begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

### 2. Домножение на ненулевое число

$$\left( \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 := 2R_1} \left( \begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

### 3. Сложение строк

$$\left( \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 := R_2 + 2R_1} \left( \begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 4 \\ 4 & 1 & 5 \end{array} \right)$$

# Подматрицы и миноры

## Определение

Пусть  $A$  - матрица размерности  $n \times n$ . Матрица  $A_k = A(1 : k, 1 : k)$  называется ведущей главной подматрицей порядка  $k$ .

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} & \dots & a_{kn} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nk} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad A_k = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{pmatrix}$$

## Определение

Ведущий  $k$ -й угловой минор  $A$  - это определитель ведущей главной подматрицы  $A_k$

$$d_k = \det A_k.$$

# Метод Гаусса (the Gaussian Elimination Method)

$$(A|b) \xrightarrow{\text{прямой ход}} (U|\tilde{b}) \xrightarrow{\text{обратный ход}} x^*$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 4 \\ x_1 + 5x_2 + 9x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 7 \end{cases}$$

1. Прямой ход (forward elimination):

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \color{red}{2} & 4 & 6 & | & 4 \\ \color{blue}{1} & 5 & 9 & | & 2 \\ \color{blue}{2} & 1 & 3 & | & 7 \end{pmatrix}}_A \xrightarrow[R_3 - \frac{2}{2}R_1]{R_2 - \frac{1}{2}R_1} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & | & 4 \\ 0 & \color{red}{3} & 6 & | & 0 \\ 0 & \color{blue}{-3} & -3 & | & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 - \frac{-3}{3}R_2} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & | & 4 \\ 0 & 3 & 6 & | & 0 \\ 0 & 0 & 3 & | & 3 \end{pmatrix}}_U$$

2. Обратный ход (backward substitution):

$$\begin{cases} 3x_3 = 3 \Rightarrow x_3 = 1 \\ 3x_2 + 6x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = -2 \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 4 \Rightarrow x_1 = 3 \end{cases}$$

# Метод Гаусса

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\det A \neq 0$ ,  $Ax = b$ . Пусть  $A^{(1)} := A$ ,  $b^{(1)} := b$ ,  $A^{(1)}x = b^{(1)}$ .

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \color{red}{a_{11}^{(1)}} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ \color{blue}{a_{21}^{(1)}} & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \color{blue}{a_{n1}^{(1)}} & a_{n2}^{(1)} & \cdots & a_{nn}^{(1)} \end{pmatrix}}_{A^{(1)}} \left| \begin{pmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(1)} \\ \vdots \\ b_n^{(1)} \end{pmatrix} \right. \quad \begin{aligned} &\color{red}{a_{11}^{(1)}} \neq 0, m_{i1} = \frac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}, i = 2, \dots, n \\ &a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - m_{i1}a_{1j}^{(1)}, \\ &b_i^{(2)} = b_i^{(1)} - m_{i1}b_1^{(1)}, i, j = 2, \dots, n \end{aligned}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & \color{red}{a_{22}^{(2)}} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \color{blue}{a_{n2}^{(2)}} & \cdots & a_{nn}^{(2)} \end{pmatrix}}_{A^{(2)}} \left| \begin{pmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ \vdots \\ b_n^{(2)} \end{pmatrix} \right. \quad \begin{aligned} &\color{red}{a_{22}^{(2)}} \neq 0, m_{i2} = \frac{a_{i2}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}}, i = 3, \dots, n \\ &a_{ij}^{(3)} = a_{ij}^{(2)} - m_{i2}a_{2j}^{(2)}, \\ &b_i^{(3)} = b_i^{(2)} - m_{i2}b_2^{(2)}, i, j = 3, \dots, n \end{aligned}$$

# Метод Гаусса

$$(A^{(1)}|b^{(1)}) \xrightarrow[a_{11}^{(1)} \neq 0]{\{m_{i1}\}_{i=2}^n} (A^{(2)}|b^{(2)}) \rightarrow \dots \rightarrow (A^{(k)}|b^{(k)}) \xrightarrow[a_{kk}^{(k)} \neq 0]{\{m_{ik}\}_{i=k+1}^n} (A^{(k+1)}|b^{(k+1)}) \rightarrow \dots \rightarrow (A^{(n)}|b^{(n)}), U = A^{(n)}, \tilde{b} = b^{(n)}$$

$a_{kk}^{(k)}$  - ведущие элементы, должны быть отличными от 0.

## Пример

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \det A \neq 0, A^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & \mathbf{0} & -1 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix}$$

Метод Гаусса прерывается на втором шаге, т.к.  $a_{22}^{(2)} = 0$ .

# Метод Гаусса

## Условия применимости метода Гаусса

Если  $d_k \neq 0$  for  $k = 1, \dots, n - 1$ , то  $a_{kk}^{(k)} \neq 0, k = 1, \dots, n - 1$ .

## Вычислительная сложность

Для нахождения решения с помощью метода Гаусса требуется  $O(n^3)$  арифметических операций.

Что будет, если ведущие элементы ненулевые, но близки к нулю?



## Метод Гаусса. Неустойчивость

Решим СЛАУ на 5-разрядной десятичной ЭВМ методом Гаусса.

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 10 & -7 & 0 & 7 \\ -3 & 2.099 & 6 & 3.901 \\ 5 & -1 & 5 & 6 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 10 & -7 & 0 & 7 \\ 0 & -0.001 & 6 & 6.001 \\ 0 & 2.5 & 5 & 2.5 \end{array} \right)$$

$$(5 + (2.5 \cdot 10^3)(6))x_3 = (2.5 + (2.5 \cdot 10^3)(6.001)) \quad (14)$$

$$(5 + 1.5000 \cdot 10^4)x_3 = (2.5 + 1.50025 \cdot 10^4) \quad (15)$$

$$1.5005 \cdot 10^4 x_3 = 1.5004 \cdot 10^4 \quad (16)$$

$$x_3 = \frac{1.5004 \cdot 10^4}{1.5005 \cdot 10^4} = 0.99993$$

$$-0.001x_2 + (6)(0.99993) = 6.001 \Rightarrow x_2 = \frac{1.5 \cdot 10^{-3}}{-1.0 \cdot 10^{-3}} = -1.5$$

$$10x_1 + (-7)(-1.5) = 7 \Rightarrow x_1 = -0.35$$

Получили  $(-0.35, -1.5, 0.99993)^T$ , точное решение -  $(0, -1, 1)^T$ .

Причина неустойчивости метода Гаусса - возможность неограниченного роста (по модулю) элементов промежуточных матриц  $A^{(2)}, A^{(3)}, \dots, A^{(n)}$ .

Минимизируем возрастание элементов матриц на каждом шаге

$$a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - m_{ik}a_{kj}^{(k)}, m_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} \quad (17)$$

за счет выбора ведущего элемента  $a_{kk}^{(k)}$ .

# Метод Гаусса с выбором ведущего элемента по столбцу

На шаге  $k$  прямого хода:

выбрать ведущий элемент как максимальный по модулю в столбце  $A^{(k)}(k : n, k)$ ,  
т.е. найти  $m \geq k : |a_{mk}| = \max_{i \geq k} |a_{ik}|$

если  $a_{mk} \neq 0$

поменять местами  $k$ -ую и  $m$ -ую строки расширенной матрицы  $(A|b)$

иначе

остановиться

Алгоритм с выбором ведущего элемента

1. позволяет сократить погрешность, вызванную ошибками округления.
2. увеличивает вычислительные затраты на  $O(n^2)$  операций, что практически не влияет на общую трудоемкость.

## Метод Гаусса с выбором ведущего элемента по столбцу

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 10 & -7 & 0 & 7 \\ 0 & -0.001 & 6 & 6.001 \\ 0 & 2.5 & 5 & 2.5 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \left( \begin{array}{ccc|c} 10 & -7 & 0 & 7 \\ 0 & 2.5 & 5 & 2.5 \\ 0 & -0.001 & 6 & 6.001 \end{array} \right)$$

$$\left( 6 + \left( \frac{10^{-3}}{2.5} \right) (5) \right) x_3 = \left( 6.001 + \left( \frac{10^{-3}}{2.5} \right) (2.5) \right) \quad (18)$$

$$6.002x_3 = 6.002x_3 \quad (19)$$

$$x_3 = 1$$

$$2.5x_2 + (5)(1) = 2.5 \Rightarrow x_2 = -1$$

$$10x_1 + (-7)(-1) = 7 \Rightarrow x_1 = 0.$$

Полученное решение совпало с точным.

# Обусловленность вычислительного алгоритма

Чувствительность результата работы алгоритма к малым, но неизбежным ошибкам округления - обусловленность вычислительного алгоритма.

Хорошо обусловленный алгоритм - малые относительные погрешности округления (порядка  $\epsilon_M$ ) приводят к малой относительной вычислительной погрешности  $\delta(\tilde{x})$  результата  $\tilde{x}$ .

Количественная мера степени обусловленности - число обусловленности  $K$

$$\delta(\tilde{x}) \leq K \cdot \epsilon_M. \quad (20)$$

**Выбор ведущего элемента по столбцу позволяет улучшить обусловленность вычислительного алгоритма.**

# Метод Гаусса с выбором ведущего элемента по всей матрице

Ведущий элемент можно искать по всей матрице - схема полного выбора:

- ☺ скорость роста элементов существенно замедляется по сравнению с выбором по столбцу.
- ☹ скорость работы алгоритма падает, т.к. поиск по всей матрице требует  $O(n^3)$  операций сравнения.

# Содержание

Постановка задачи

Решение простейших СЛАУ

Метод Гаусса и его модификации для решения СЛАУ

**Обусловленность задачи решения СЛАУ**

Решение СЛАУ, основанное на LDR-факторизации матрицы

Решение СЛАУ с использованием ортогональных матриц

# Норма матрицы

Величина

$$\|A\| = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \max_{\|y\|=1} \|Ay\| \quad (21)$$

называется нормой матрицы  $A$ , подчиненной векторной норме.

## Замечание

Норма матрицы - максимальный коэффициент растяжения векторов под действием матрицы.

Матричная норма (22) обладает теми же свойствами, что и векторная норма. В дополнение верно:

1.  $\|Ax\| \leq \|A\| \|x\|, \forall A, x$
2.  $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|, \forall A, B$

## Упражнение

Доказать данные неравенства.



## Подчиненные нормы

- ▶  $\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$
- ▶  $\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$
- ▶  $\|A\|_2 = \max_{1 \leq j \leq n} \sqrt{\lambda_j(A^\top A)}$ , где  $\lambda_j(A^\top A)$  - собственное число матрицы  $A^\top A$ .

### Замечание

Вычисление  $\|A\|_2$  - сложная задача. Можно воспользоваться неравенством

$$\|A\|_2 \leq \|A\|_F, \quad (22)$$

где  $\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2}$  - норма Фробениуса.

Другие неравенства можно найти в книге Quarteroni et al.

## Подчиненные нормы. Пример

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$$

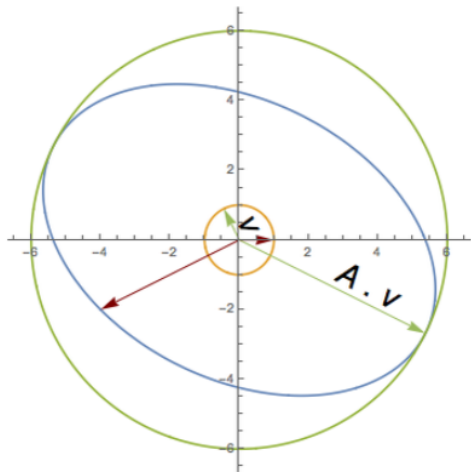
$$\|A\|_1 = \max(4 + 2, 4 + 4) = 8$$

$$\|A\|_\infty = \max(4 + 4, 2 + 4) = 8$$

$$\|A\|_F = \sqrt{4^2 + 4^2 + 2^2 + 4^2} \approx 7.2$$

$$\|A\|_2 = 6$$

$$\|A\| = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|$$



## Число обусловленности матрицы (the condition number of a matrix)

$$\begin{cases} x_1 + 10x_2 = 11 \\ 100x_1 + 1001x_2 = 1101 \end{cases}$$

$\det A = 1 \cdot 1001 - 100 \cdot 10 = 1 \neq 0 \Rightarrow \exists!$  решение:  $x_1 = 1, x_2 = 1$ .

$$\begin{cases} x_1 + 10x_2 = 11.01 \\ 100x_1 + 1001x_2 = 1101 \end{cases}$$

$x_1 = 11.01, x_2 = 0$ .

Малые изменения входных данных  $\rightarrow$  большие изменения в решении.

## Число обусловленности матрицы

$$Ax = b \rightarrow A(x + \delta x) = b + \delta b$$

$\delta b$  - возмущение входных данных,  $\delta x$  - возмущение решения.

$$\|b\| \leq \|A\| \|x\|, \|\delta x\| \leq \|A^{-1}\| \|\delta b\| \Rightarrow \|b\| \|\delta x\| \leq \|A\| \|x\| \|A^{-1}\| \|\delta b\|$$

$$\underbrace{\frac{\|\delta x\|}{\|x\|}}_{\text{относительная погрешность } x} \leq \|A\| \|A^{-1}\| \underbrace{\frac{\|\delta b\|}{\|b\|}}_{\text{относительная погрешность } b} = \text{cond}(A) \quad (23)$$

### Определение

Число обусловленности матрицы  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$\text{cond}(A) = \|A\| \|A^{-1}\|. \quad (24)$$

## Пример (продолжение)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 100 & 1001 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1001 & -10 \\ -100 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\|A\|_{\infty} = \max(1 + 10, 100 + 1001) = 1101,$$

$$\|A^{-1}\|_{\infty} = \max(1001 + 10, 100 + 1) = 1011$$

$$\Rightarrow \text{cond}_{\infty}(A) = 1101 \cdot 1011 > 10^6$$

$$\frac{\|\delta b\|_{\infty}}{\|b\|_{\infty}} \approx 10^{-5}$$

$$\frac{\|\delta x\|_{\infty}}{\|x\|_{\infty}} = 11.01$$

## Число обусловленности матрицы. Свойства.

$$\|A\| = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = k_{max}$$

$$\|A^{-1}\| = \max_{y \neq 0} \frac{\|A^{-1}y\|}{\|y\|} = \max_{x \neq 0} \frac{\|x\|}{\|Ax\|} = \frac{1}{\min_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}} = \frac{1}{k_{min}}, k_{min} - \text{минимальный коэффициент}$$

растяжения.

$\Rightarrow \text{cond}(A) = \frac{k_{max}}{k_{min}}$  - отношение максимального коэффициента растяжения векторов под действием  $A$  к минимальному коэффициенту.

1.  $\text{cond}(E) = 1$

2.  $\text{cond}(A) \geq 1$

$$E = AA^{-1}$$

$$1 \leq \|A\| \|A^{-1}\|$$

3.  $\text{cond}(\alpha A) = \text{cond}(A)$

$$(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha} A^{-1}$$

# Число обусловленности матрицы

Число обусловленности матрицы отражает чувствительность решения задачи  $Ax = b$  к изменениям входных данных (матрица  $A$  и вектор  $b$ ).

Матрица  $A$  называется *плохо обусловленной* (*ill-conditioned*), если  $\text{cond}(A)$  ”велико” (зависит от конкретной задачи), в противном случае матрица  $A$  - *хорошо обусловленная* (*well-conditioned*).

## Упражнение

Пусть матрица  $A$  получила некоторое возмущение  $\delta A$

$$Ax = b \rightarrow (A + \delta A)(x + \delta x) = b.$$

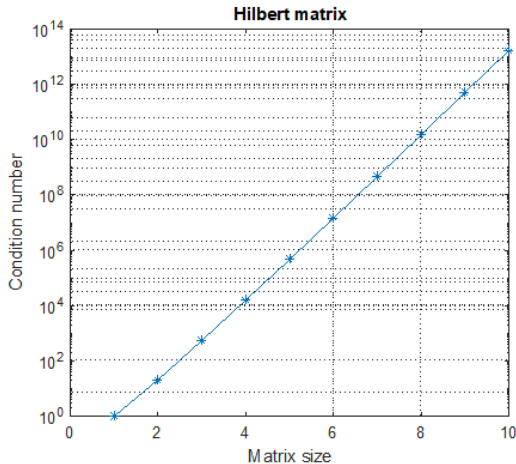
Вывести оценку, подобную (23).

# Пример плохо обусловленной матрицы

Матрица Гильберта  $H$  - квадратная матрица с элементами

$$h_{ij} = \frac{1}{i+j-1}.$$

```
% The Hilbert matrices are canonical
% examples of ill-conditioned matrices
N = 1 : 10;
cond_h = zeros(size(N));
for i = 1 : length(N)
    cond_h(i) = cond(hilb(N(i)));
end
figure
semilogy(N, cond_h, '*-');
grid on
xlabel('Matrix size');
ylabel('Condition number');
title('Hilbert matrix')
```





# Содержание

Постановка задачи

Решение простейших СЛАУ

Метод Гаусса и его модификации для решения СЛАУ

Обусловленность задачи решения СЛАУ

**Решение СЛАУ, основанное на LDR-факторизации матрицы**

Решение СЛАУ с использованием ортогональных матриц

# LDR-факторизация

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Ax = b$ ,  $\det A \neq 0 \Rightarrow \exists!$  решение.

$$A = LDR \quad (25)$$

$$L = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & 1 \end{pmatrix}}_{\text{нижняя унитреугольная}}, D = \underbrace{\begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{pmatrix}}_{\text{диагональная}}, R = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}}_{\text{верхняя унитреугольная}}$$

$$Ax = b \Leftrightarrow L(D(Rx)) = b \Leftrightarrow \begin{cases} Lz = b & // \text{метод прямой подстановки} \\ Dy = z \\ Rx = y & // \text{метод обратной подстановки} \end{cases}$$

# LDR-факторизация

## Теорема

Пусть все угловые миноры матрицы  $A$  отличны от 0. Тогда  $\exists! L, D, R$ , такие что

$$A = LDR,$$

где  $D$  - диагональная матрица,  $L$  и  $R$  - нижняя и верхняя унитарные матрицы.

# Методы, основанные на LDR разложении

## 1. LDR разложение

2. LU разложение, причем  $U = DR$ ,  $U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{pmatrix}$

$$Ax = b \Leftrightarrow L(Ux) = b \Leftrightarrow \begin{cases} Ly = b \\ Ux = y \end{cases}$$

3.  $LDL^T$  разложение. Пусть  $A$  - симметричная матрица. Тогда  $A = LDL^T$ .

4. Схема Холецкого, или метод квадратного корня (The Cholesky factorization). Пусть  $A$  - симметричная и положительно определенная матрица. Тогда  $A = SS^T$ , где  $S$  - нижняя треугольная матрица.

$$Ax = b \Leftrightarrow S(S^T x) = b \Leftrightarrow \begin{cases} Sy = b \\ S^T x = y \end{cases}$$

## LDR-факторизация

$$A = LDR \Leftrightarrow a_{ij} = \sum_{k=1}^n l_{ik} d_k r_{kj} \quad (26)$$

Шаг 1.  $a_{11} = \sum_{k=1}^n l_{1k} d_k r_{k1} = l_{11} d_1 r_{11} \Rightarrow d_1 = a_{11}$   
 $j > 1 : a_{1j} = l_{11} d_1 r_{1j} + \underbrace{l_{12} d_2 r_{2j} + \dots}_{=0} = l_{11} d_1 r_{1j} \Rightarrow r_{1j} = \frac{a_{1j}}{d_1}$   
 $i > 1 : a_{i1} = l_{i1} d_1 r_{11} + \underbrace{l_{i2} d_2 r_{21} + \dots}_{=0} = l_{i1} d_1 r_{11} \Rightarrow l_{i1} = \frac{a_{i1}}{d_1}$

Шаг 2.  $a_{22} = \underbrace{l_{21} d_1 r_{12}}_{\text{уже найдены}} + l_{22} d_2 r_{22} + \underbrace{l_{23} d_3 r_{32} + \dots}_{=0} \Rightarrow d_2 = a_{22} - l_{21} d_1 r_{12}$   
 $j > 2 : a_{2j} = l_{21} d_1 r_{1j} + l_{22} d_2 r_{2j} + 0 \Rightarrow r_{2j} = \frac{a_{2j} - l_{21} d_1 r_{1j}}{d_2}$   
 $i > 2 : a_{i2} = l_{i1} d_1 r_{12} + l_{i2} d_2 r_{22} + 0 \Rightarrow l_{i2} = \frac{a_{i2} - l_{i1} d_1 r_{12}}{d_2}$

...

## LDR-факторизация. Шаг $m$

$$a_{mm} = \underbrace{\sum_{k=1}^{m-1} l_{mk} d_k r_{km}}_{\text{уже найдены}} + l_{mm} d_m r_{mm} + 0 \Rightarrow d_m = a_{mm} - \sum_{k=1}^{m-1} l_{mk} d_k r_{km} \quad (\text{m.1})$$

$$j > m : a_{mj} = \underbrace{\sum_{k=1}^{m-1} l_{mk} d_k r_{kj}}_{\text{уже найдены}} + l_{mm} d_m r_{mj} + 0 \Rightarrow r_{mj} = \frac{a_{mj} - \sum_{k=1}^{m-1} l_{mk} d_k r_{kj}}{d_m} \quad (\text{m.2})$$

$$i > m : a_{im} = \underbrace{\sum_{k=1}^{m-1} l_{ik} d_k r_{km}}_{\text{уже найдены}} + l_{im} d_m r_{mm} + 0 \Rightarrow l_{im} = \frac{a_{im} - \sum_{k=1}^{m-1} l_{ik} d_k r_{km}}{d_m} \quad (\text{m.3})$$

### Вычислительная сложность

Для нахождения LDR разложения требуется порядка  $\frac{2n^3}{3}$  арифметических операций.

# $LDL^T$ -факторизация

$$A = A^T \Rightarrow R = L^T.$$

Для нахождения коэффициентов матриц  $L$  и  $D$  используются формулы (m.1) и (m.3).

## Вычислительная сложность

Этот метод более экономичный, так как учитывает симметричность матрицы. Вычислительные затраты уменьшаются примерно вдвое по сравнению с  $LDR$ -факторизацией. Для нахождения  $LDL^T$  разложения требуется порядка  $\frac{n^3}{3}$  арифметических операций.

# $LU$ -факторизация

## Теорема о $LU$ разложении

Пусть  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Если все угловые миноры матрицы  $A$  отличны от 0, то существует единственная нижняя унитреугольная матрица  $L$  и единственная верхняя треугольная матрица  $U$ , такие что  $A = LU$ .

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & 1 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{pmatrix}$$

## Вычислительная сложность

Для нахождения  $LU$  разложения требуется порядка  $\frac{2n^3}{3}$  арифметических операций.



## Доказательство теоремы

База:  $n = 1$ . Для ведущей главной подматрицы  $A_1$  матрица  $L = 1$  и матрица  $U = a_{11}$ .  
Индукционный переход. Пусть для  $A_{k-1}$  существует единственное  $LU$ -разложение

$$A_{k-1} = L_{k-1} U_{k-1}. \quad (27)$$

Докажем, что для  $A_k$  тоже существует  $LU$  разложение и оно единственно.

$$A_k = \left[ \begin{array}{c|c} A_{k-1} & f_{k-1} \\ \hline g_{k-1}^\top & a_{kk} \end{array} \right], L_k = \left[ \begin{array}{c|c} L_{k-1} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{x}_{k-1}^\top & 1 \end{array} \right], U_k = \left[ \begin{array}{c|c} U_{k-1} & y_{k-1} \\ \hline \mathbf{0}^\top & u_{kk} \end{array} \right], \quad (28)$$

где  $f_{k-1}, g_{k-1} \in \mathbb{R}^{n-1}$  - известны,  $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^{n-1}$ ,  $\mathbf{x}_{k-1}, y_{k-1} \in \mathbb{R}^{n-1}$  - нужно найти.

## Доказательство теоремы (продолжение)

$$A_k = \left[ \begin{array}{c|c} A_{k-1} & f_{k-1} \\ \hline g_{k-1}^\top & a_{kk} \end{array} \right] = L_k U_k = \left[ \begin{array}{c|c} L_{k-1} U_{k-1} & L_{k-1} y_{k-1} \\ \hline x_{k-1}^\top U_{k-1} & x_{k-1}^\top y_{k-1} + u_{kk} \end{array} \right]. \quad (29)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A_{k-1} &= L_{k-1} U_{k-1} \\ f_{k-1} &= L_{k-1} y_{k-1} \\ g_{k-1}^\top &= x_{k-1}^\top U_{k-1} \\ a_{kk} &= x_{k-1}^\top y_{k-1} + u_{kk} \end{cases}. \quad (30)$$

$$\det(L_{k-1}) \neq 0 \Rightarrow \exists! y_{k-1},$$

$$\det(U_{k-1}) \neq 0 \Rightarrow \exists! x_{k-1},$$

$u_{kk}$  находится из последнего равенства в системе (30).

## LU-факторизация

$$A = LU \Leftrightarrow a_{ij} = \sum_{k=1}^n l_{ik} u_{kj} \quad (31)$$

Шаг 1.  $j \geq 1 : a_{1j} = l_{11} u_{1j} + \underbrace{l_{12} u_{2j} + \dots}_{=0} \Rightarrow u_{1j} = a_{1j}$

$$i > 1 : a_{i1} = l_{i1} u_{11} + \underbrace{l_{i2} u_{21} + \dots}_{=0} \Rightarrow l_{i1} = \frac{a_{i1}}{u_{11}}$$

<...>

Шаг  $m$ .  $j \geq m : a_{mj} = \underbrace{\sum_{k=1}^{m-1} l_{mk} u_{kj}}_{\text{уже известно}} + l_{mm} u_{mj} + 0 \Rightarrow u_{mj} = a_{mj} - \sum_{k=1}^{m-1} l_{mk} u_{kj}$

$$i > m : a_{im} = \underbrace{\sum_{k=1}^{m-1} l_{ik} u_{km}}_{\text{уже известно}} + l_{im} u_{mm} + 0 \Rightarrow l_{im} = \frac{a_{im} - \sum_{k=1}^{m-1} l_{ik} u_{km}}{u_{mm}}$$

# Положительно определенная матрица

## Определение

Симметричная матрица  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  называется *положительно определенной*, если  $x^T A x > 0$  для любого ненулевого вектора  $x \in \mathbb{R}^n$ .

## Пример

Let  $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 10 \end{pmatrix}$  и  $x = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}^T$ .

$$x^T A x = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 4x_1^2 + 12x_1x_2 + 10x_2^2 = (2x_1 + 3x_2)^2 + x_2^2 > 0$$

$\Rightarrow A$  - положительно определенная матрица.

# Схема Холецкого, или метод квадратного корня

## Теорема

Пусть  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  - симметричная и положительно определенная матрица. Тогда существует единственная нижняя треугольная матрица  $S$ , такая что  $A = SS^T$ .

$$S = \begin{pmatrix} s_{11} & 0 & \dots & 0 \\ s_{21} & s_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{n1} & s_{n2} & \dots & s_{nn} \end{pmatrix}$$

Такая факторизация называется разложением Холецкого.

## Вычислительная сложность

Для нахождения разложения Холецкого требуется порядка  $\frac{n^3}{3}$  арифметических операций.

# Разложение Холецкого

$$A = SS^T \Leftrightarrow a_{ij} = \sum_{k=1}^n s_{ik}s_{kj}^T = \sum_{k=1}^n s_{ik}s_{jk} \quad (32)$$

Шаг 1.  $a_{11} = s_{11}^2 + \underbrace{s_{12}^2 + \dots}_{=0} \Rightarrow s_{11} = \sqrt{a_{11}}$

$$j > 1 : a_{1j} = s_{11}s_{j1} + \underbrace{s_{12}s_{j2} + \dots}_{=0} \Rightarrow s_{j1} = \frac{a_{1j}}{s_{11}}$$

<...>

Шаг  $m$ .  $a_{mm} = \underbrace{\sum_{k=1}^{m-1} s_{mk}^2}_{\text{уже известно}} + s_{mm}^2 + \underbrace{\sum_{k=m+1}^n s_{mk}^2}_{=0} \Rightarrow s_{mm} = \sqrt{a_{mm} - \sum_{k=1}^{m-1} s_{mk}^2}$

$$j > m : a_{mj} = \underbrace{\sum_{k=1}^{m-1} s_{mk}s_{jk}}_{\text{уже известно}} + s_{mm}s_{jm} + \underbrace{\sum_{k=m+1}^n s_{mk}s_{jk}}_{=0} \Rightarrow s_{jm} = \frac{a_{mj} - \sum_{k=1}^{m-1} s_{mk}s_{jk}}{s_{mm}}$$

# Метод Гаусса и LU разложение

Прямой ход метода Гаусса:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 4 & 4 & -4 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 - \frac{1}{2}R_1]{R_2 - \frac{4}{2}R_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & -14 \\ 0 & \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 - \frac{5}{4}R_2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & -14 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$$

LU разложение матрицы A:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{5}{4} & 1 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & -14 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$$

- ▶ LU разложение существует не для любой невырожденной матрицы.
- ▶ Как улучшить устойчивость метода, использующего LU разложение?

→ LU разложение с выбором ведущего элемента...

# Матрица перестановки

Матрица перестановки получается из единичной матрицы перестановкой строк.

$$P_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Умножение слева на матрицу  $P_{12}$  меняет местами 1-ю и 2-ю строки матрицы  $A$ :

$$P_{12}A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 4 & 4 & -4 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -4 \\ 2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$



# LUP разложение

$PA = LU$ ,  $P$  - матрица перестановок  $\Rightarrow LUx = Pb$ .

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 4 & 4 & -4 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{pmatrix} 4 & 4 & -4 \\ 2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 - \frac{1}{4}R_1]{R_2 - \frac{2}{4}R_1} \begin{pmatrix} 4 & 4 & -4 \\ \frac{2}{4} & -1 & 7 \\ \frac{1}{4} & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 & -4 \\ \frac{1}{4} & 2 & 2 \\ \frac{2}{4} & -1 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 - \frac{-1}{2}R_1} \begin{pmatrix} 4 & 4 & -4 \\ \frac{1}{4} & 2 & 2 \\ \frac{2}{4} & -\frac{1}{2} & 8 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 1 & 0 \\ \frac{2}{4} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

# Содержание

Постановка задачи

Решение простейших СЛАУ

Метод Гаусса и его модификации для решения СЛАУ

Обусловленность задачи решения СЛАУ

Решение СЛАУ, основанное на LDR-факторизации матрицы

Решение СЛАУ с использованием ортогональных матриц

# Методы ортогонализации

Пусть  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  и  $\det(A) \neq 0$ . Тогда

$$A = QR, \quad (33)$$

где  $Q$  - ортогональная матрица, т.е.  $Q^\top = Q^{-1}$ ,  $R$  - правая (верхняя) треугольная матрица.

$$Ax = b \Leftrightarrow QRx = b \Leftrightarrow Rx = Q^\top b. \quad (34)$$

Свели исходную задачу к решению СЛАУ с правой треугольной матрицей.

Скалярное произведение и норма в пространстве  $\mathbb{R}^n$

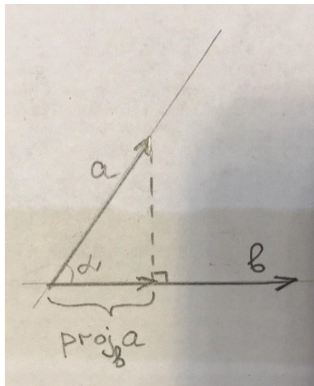
$$(x, y) = x^\top y = \sum_{i=1}^n x_i y_i, \|x\|^2 = (x, x). \quad (35)$$

Ортогональные векторы

$$(x, y) = 0. \quad (36)$$

Проекция вектора  $a$  на вектор  $b$

$$\text{proj}_b a = \|a\| \cos(\alpha) \frac{b}{\|b\|} = \frac{(a, b)}{(b, b)} b. \quad (37)$$



# Метод Грама-Шмидта

$\det(A) \neq 0 \Rightarrow$  все столбцы матрицы  $A$  линейно независимы.

$A = [a^{(1)} a^{(2)} \dots a^{(n)}]$ , где  $a^{(i)}$  -  $i$ -ый столбец матрицы  $A$ .

Столбцы  $a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(n)}$  образуют базис в  $n$ -мерном пространстве, так как они линейно независимы и их количество совпадает с размерностью пространства.

Построим ортонормированный базис  $q^{(1)}, q^{(2)}, \dots, q^{(n)}$

$$(q^{(i)}, q^{(j)}) = \delta_{ij} \quad (38)$$

на основе  $a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(n)}$  по алгоритму Грама-Шмидта.

## Метод Грама-Шмидта. Случай $\mathbb{R}^3$

Первый вектор ортонормированного базиса

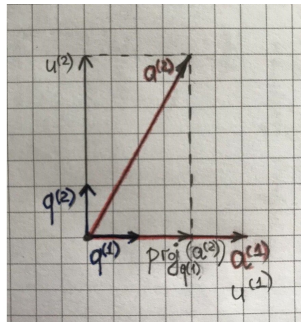
$$u^{(1)} = a^{(1)}, q^{(1)} = \frac{u^{(1)}}{\|u^{(1)}\|} = \rho_{11}a^{(1)}. \quad (39)$$

Второй вектор ортонормированного базиса

$$u^{(2)} = a^{(2)} - \text{proj}_{q^{(1)}}(a^{(2)}) = a^{(2)} - (a^{(2)}, q^{(1)})q^{(1)}. \quad (40)$$

Тогда

$$q^{(2)} = \frac{u^{(2)}}{\|u^{(2)}\|} = \rho_{22}a^{(2)} + \rho_{21}a^{(1)}. \quad (41)$$



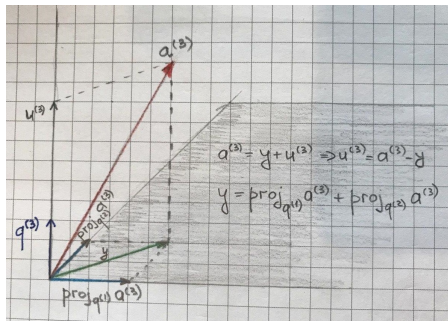
## Метод Грама-Шмидта. Случай $\mathbb{R}^3$

Третий вектор ортонормированного базиса

$$u^{(3)} = a^{(3)} - \text{proj}_{q^{(1)}}(a^{(3)}) - \text{proj}_{q^{(2)}}(a^{(3)}) = a^{(3)} - (a^{(3)}, q^{(1)})q^{(1)} - (a^{(3)}, q^{(2)})q^{(2)}. \quad (42)$$

Тогда

$$q^{(3)} = \frac{u^{(3)}}{\|u^{(3)}\|} = \rho_{33}a^{(3)} + \rho_{32}a^{(2)} + \rho_{31}a^{(1)}. \quad (43)$$



## Метод Грама-Шмидта. Случай $\mathbb{R}^3$

(39), (41), (43)  $\Rightarrow$

$$\underbrace{[q^{(1)} q^{(2)} q^{(3)}]}_Q = \underbrace{\begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{21} & \rho_{31} \\ 0 & \rho_{22} & \rho_{32} \\ 0 & 0 & \rho_{33} \end{pmatrix}}_{R^{-1}} \underbrace{[a^{(1)} a^{(2)} a^{(3)}]}_A \quad (44)$$

Тогда решение  $x$  можно найти так

$$Ax = b \Leftrightarrow QRx = b \Leftrightarrow Rx = Q^\top b \Leftrightarrow x = R^{-1}Q^\top b. \quad (45)$$



## Метод Грама-Шмидта. Случай $\mathbb{R}^n$

Пусть векторы  $q^{(1)}, \dots, q^{(i-1)}$  ортонормированного базиса уже построены

$$(q^{(j)}, q^{(k)}) = \delta_{jk}, q^{(j)} = \sum_{k=1}^j \rho_{jk} a^{(k)}, j, k < i. \quad (46)$$

Построим  $i$ -ый базисный вектор

$$u^{(i)} = a^{(i)} - \sum_{j=1}^{i-1} \text{proj}_{q^{(j)}} a^{(i)} = a^{(i)} - \sum_{j=1}^{i-1} (a^{(i)}, q^{(j)}) q^{(j)} = a^{(i)} - \sum_{j=1}^{i-1} \gamma_{ij} q^{(j)}. \quad (47)$$

Тогда

$$q^{(i)} = \frac{u^{(i)}}{\|u^{(i)}\|} = \underbrace{\frac{1}{\|u^{(i)}\|}}_{=\rho_{ii}} a^{(i)} - \rho_{ii} \sum_{j=1}^{i-1} \gamma_{ij} \left( \sum_{k=1}^j \rho_{jk} a^{(k)} \right) = \rho_{ii} a^{(i)} + \underbrace{\sum_{k=1}^{i-1} \left( -\rho_{ii} \sum_{j=k}^{i-1} \gamma_{ij} \rho_{jk} \right)}_{=\rho_{ik}} a^{(k)}.$$

(48)

## Метод Грама-Шмидта. Случай $\mathbb{R}^n$

$i$ -ый базисный вектор

$$q^{(i)} = \sum_{k=1}^i \rho_{ik} a^{(k)}, \rho_{ik} = -\rho_{ii} \sum_{j=k}^{i-1} \gamma_{ij} \rho_{jk}, k < i. \quad (49)$$

Проверим, что  $q^{(i)}$  ортогонален  $q^{(k)}, k < i$

$$(q^{(i)}, q^{(k)}) = \rho_{ii} (u^{(i)}, q^{(k)}) = \rho_{ii} (a^{(i)} - \sum_{j=1}^{i-1} \gamma_{ij} q^{(j)}, q^{(k)}) = \rho_{ii} \left( \gamma_{ik} - \sum_{j=1}^{i-1} \gamma_{ij} (q^{(j)}, q^{(k)}) \right).$$

## Метод Грама-Шмидта. Случай $\mathbb{R}^n$

Пусть  $Q$  - матрица, составленная из векторов ортонормированного базиса

$$Q = [q^{(1)} q^{(2)} \dots q^{(n)}]. \quad (50)$$

За матрицу  $R^{-1}$  обозначим матрицу, составленную из  $\rho_{ij}$

$$R^{-1} = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{21} & \dots & \rho_{n1} \\ 0 & \rho_{22} & \dots & \rho_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \rho_{nn} \end{pmatrix} \quad (51)$$

Из (46) следует, что  $Q = AR^{-1}$ . Учитывая (34), получаем решение

$$x = R^{-1} Q^{\top} b = R^{-1} (AR^{-1})^{\top} b. \quad (52)$$

# Метод Грама-Шмидта. Плохая численная устойчивость

Возьмем матрицу Гильберта размерности  $10 \times 10$  и построим ортонормированный базис по алгоритму Грама-Шмидта.

```
>> eye(n) - Q*Q'
```

```
ans =
```

-0.0000	0.0001	-0.0005	0.0013	-0.0006	-0.0010	-0.0000	0.0010	0.0008	-0.0010
0.0001	-0.0024	0.0182	-0.0440	0.0189	0.0375	0.0014	-0.0352	-0.0299	0.0356
-0.0005	0.0182	-0.1365	0.3250	-0.1251	-0.2962	-0.0184	0.2734	0.2361	-0.2773
0.0013	-0.0440	0.3250	-0.7470	0.1967	0.8094	0.0775	-0.7084	-0.6218	0.7148
-0.0006	0.0189	-0.1251	0.1967	0.2740	-0.7087	-0.0672	0.4516	0.3842	-0.4256
-0.0010	0.0375	-0.2962	0.8094	-0.7087	-0.0124	-0.2682	0.4703	0.4820	-0.5150
-0.0000	0.0014	-0.0184	0.0775	-0.0672	-0.2682	0.6253	-0.3346	-0.1538	0.1383
0.0010	-0.0352	0.2734	-0.7084	0.4516	0.4703	-0.3346	0.0517	-0.7245	0.5571
0.0008	-0.0299	0.2361	-0.6218	0.3842	0.4820	-0.1538	-0.7245	0.3027	0.1260
-0.0010	0.0356	-0.2773	0.7148	-0.4256	-0.5150	0.1383	0.5571	0.1260	-0.3554

$$\max_{ij} |I - Q^T Q| = 0.8.$$

# Модифицированный метод Грама-Шмидта

Вместо (47) последовательно вычислять

$$\begin{aligned}a_1^{(i)} &= a^{(i)} - \text{proj}_{q^{(1)}} a^{(i)} \\a_2^{(i)} &= a_1^{(i)} - \text{proj}_{q^{(2)}} a_1^{(i)} \\&\dots \\a_{i-1}^{(i)} &= a_{i-2}^{(i)} - \text{proj}_{q^{(i-1)}} a_{i-2}^{(i)}\end{aligned}\tag{53}$$

Причем  $a_{i-1}^{(i)}$  и есть  $u^{(i)}$  (проверить самостоятельно).

Для матрицы Гильбера размерности  $10 \times 10$ :  $\max_{ij} |I - Q^\top Q| \approx 7 \cdot 10^{-5}$ .

# Матрица вращения

Матрица вращения

$$T_{ij}(\phi) = \begin{pmatrix} & i & & j & \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ & 0 & c & \dots & -s \\ \vdots & \vdots & & 1 & \vdots \\ & \vdots & s & \dots & c \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ i \\ \\ j \\ \\ \end{matrix} \quad (54)$$

где  $c = \cos(\phi)$ ,  $s = \sin(\phi)$ .

$T_{ij}x$  - вращение вектора  $x$  в плоскости  $Ox_i x_j$  на угол  $\phi$ .

$T_{ij}T_{ij}^\top = E \Rightarrow T_{ij}$  - ортогональная матрица.

# Матрица вращения. Свойства

1. Умножение матрицы вращения на вектор меняют только 2 его компоненты

$$\begin{aligned}y_i &= cx_i - sx_j \\y &= T_{ij}x, \quad y_j = sx_i + cx_j \\y_k &= x_k, k \neq i, j.\end{aligned}\tag{55}$$

При этом  $\|x\|_2 = \|y\|_2$ .

2. Аналогичное утверждение справедливо и для умножения строки на матрицу вращения, т.к.  $y^\top = x^\top T_{ij}$ .
3.  $x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$ . Существует последовательность матриц вращения, которая преобразует вектор  $x$  в вектор естественного базиса

$$(T_{1n} \dots T_{13} T_{12})x = \alpha \cdot e^{(1)}.\tag{56}$$

## Матрица вращения. Свойства

Выберем  $\phi$  так, чтобы  $y_j = 0$

$$\sin(\phi)x_i + \cos(\phi)x_j = 0 \Rightarrow \operatorname{tg}(\phi) = -\frac{x_j}{x_i}. \quad (57)$$

$$x = x^{(0)} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, x^{(1)} = T_{12}x^{(0)} = \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ 0 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, x^{(2)} = T_{13}x^{(1)} = \begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad (58)$$

$T_1 = T_{1n} \dots T_{13}T_{12}$  и  $T_1x = \alpha e^{(1)}$ .

### Упражнение

Пусть  $x = (0, 1, \sqrt{3})^\top$ . Построить последовательность матриц вращений, которая преобразовывает  $x$  в вектор пропорциональный  $e^{(1)} = (1, 0, 0)^\top$ .



## Метод вращений

Пусть  $c_{12}$  и  $s_{12}$  - некоторые отличные от 0 числа.

Новое 1-е уравнение - линейная комбинация 1-го и 2-го уравнений с коэффициентами  $c_{12}$  и  $s_{12}$ .

Новое 2-е уравнение - линейная комбинация 1-го и 2-го уравнений с коэффициентами  $-s_{12}$  и  $c_{12}$ .

$$\begin{aligned}(c_{12}a_{11} + s_{12}a_{21})x_1 + \dots + (c_{12}a_{1n} + s_{12}a_{2n})x_n &= c_{12}b_1 + s_{12}b_2 \\ (-s_{12}a_{11} + c_{12}a_{21})x_1 + \dots + (-s_{12}a_{1n} + c_{12}a_{2n})x_n &= -s_{12}b_1 + c_{12}b_2\end{aligned}\tag{59}$$

Условия на  $c_{12}$  и  $s_{12}$

$$(-s_{12}a_{11} + c_{12}a_{21}) = 0, c_{12}^2 + s_{12}^2 = 1.\tag{60}$$

Тогда

$$c_{12} = \frac{a_{11}}{\sqrt{a_{11}^2 + a_{21}^2}}, s_{12} = \frac{a_{21}}{\sqrt{a_{11}^2 + a_{21}^2}}.\tag{61}$$

## Метод вращений

Данное преобразование эквивалентно умножению  $A$  и  $b$  на  $T_{12}$  слева

$$T_{12} = \begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 & \dots & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad (62)$$

$T_{12}$  - матрица вращения в плоскости  $Ox_1x_2$  на угол  $\phi_{12}$  такой, что  $\cos(\phi_{12}) = c_{12}$ ,  $\sin(\phi_{12}) = s_{12}$ .

## Метод вращений

Исключим  $x_1$  из 3-го уравнения с помощью  $c_{13}$  и  $s_{13}$

$$c_{13} = \frac{a_{11}^{(1)}}{\sqrt{\left(a_{11}^{(1)}\right)^2 + a_{31}^2}}, s_{13} = \frac{a_{31}}{\sqrt{\left(a_{11}^{(1)}\right)^2 + a_{31}^2}}. \quad (63)$$

Это эквивалентно умножению СЛАУ слева на  $T_{13}$

$$T_{13} = \begin{pmatrix} c_{13} & 0 & s_{13} & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -s_{13} & 0 & c_{13} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad (64)$$

# Метод вращений

После  $n - 1$  таких преобразований

$$\begin{aligned} a_{11}^{(n-1)}x_1 + a_{12}^{(n-1)}x_2 + \dots + a_{1n}^{(n-1)}x_n &= b_1^{(n-1)} \\ a_{22}^{(1)}x_2 + \dots + a_{2n}^{(1)}x_n &= b_2^{(1)} \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots &\dots \\ a_{n2}^{(1)}x_2 + \dots + a_{nn}^{(1)}x_n &= b_n^{(1)} \end{aligned} \tag{65}$$

В матричной записи

$$A^{(1)}x = b^{(1)}, \tag{66}$$

где  $A^{(1)} = T_{1n} \dots T_{13}T_{12}A$ ,  $b^{(1)} = T_{1n} \dots T_{13}T_{12}b$ .

## Метод вращений

Второй шаг метода вращений - исключение  $x_2$  из всех уравнений, начиная с 3-го.  
В результате выполнения  $n - 2$  подшагов СЛАУ преобразуется к виду

$$\begin{aligned} a_{11}^{(n-1)}x_1 + a_{12}^{(n-1)}x_2 + a_{13}^{(n-1)}x_3 + \dots + a_{1n}^{(n-1)}x_n &= b_1^{(n-1)} \\ a_{22}^{(n-1)}x_2 + a_{23}^{(n-1)}x_3 + \dots + a_{2n}^{(n-1)}x_n &= b_2^{(n-1)} \\ a_{33}^{(2)}x_3 + \dots + a_{3n}^{(2)}x_n &= b_3^{(2)} \\ \dots &\dots \\ a_{n3}^{(2)}x_3 + \dots + a_{nn}^{(2)}x_n &= b_n^{(2)} \end{aligned} \quad (67)$$

В матричной форме

$$A^{(2)}x = b^{(2)}, \quad (68)$$

где  $A^{(2)} = T_{2n} \dots T_{24}T_{23}A^{(1)}$ ,  $b^{(2)} = T_{2n} \dots T_{24}T_{23}b^{(1)}$ .

# Метод вращений

После завершения  $n - 1$  шага система имеет вид

$$\begin{aligned} a_{11}^{(n-1)}x_1 + a_{12}^{(n-1)}x_2 + a_{13}^{(n-1)}x_3 + \dots + a_{1n}^{(n-1)}x_n &= b_1^{(n-1)} \\ a_{22}^{(n-1)}x_2 + a_{23}^{(n-1)}x_3 + \dots + a_{2n}^{(n-1)}x_n &= b_2^{(n-1)} \\ a_{33}^{(n-1)}x_3 + \dots + a_{3n}^{(n-1)}x_n &= b_3^{(n-1)} \\ \dots &\dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{nn}^{(n-1)}x_n &= b_n^{(n-1)} \end{aligned} \tag{69}$$

В матричной записи

$$A^{(n-1)}x = b^{(n-1)}, \tag{70}$$

где  $A^{(n-1)} = T_{n-1,n}A^{(n-2)}$ ,  $b^{(n-1)} = T_{n-1,n}b^{(n-2)}$ .

# Метод вращений

Матрица системы  $A^{(n-1)}$  - верхняя треугольная, причем

$$A^{(n-1)} = TA, \quad (71)$$

где  $T = T_{n-1,n} \dots T_{2n} \dots T_{23} T_{1n} \dots T_{12}$  - матрица результирующего вращения.

Матрица  $T$  ортогональна как произведение ортогональных матриц.  
Обозначим  $Q = T^{-1} = T^T \Rightarrow$  получили  $QR$ -разложение матрицы  $A$ .

Обратный ход метода вращений проводится точно так же, как и для метода Гаусса.

## Метод вращений. Замечания

☺ Длина любого вектора-столбца расширенной матрицы системы остается такой же, как у соответствующего столбца исходной системы

$$\left(a_{1j}^{(1)}\right)^2 + \left(a_{2j}^{(1)}\right)^2 = a_{1j}^2 + a_{2j}^2. \quad (72)$$

⇒ не будет наблюдаться роста элементов ⇒ метод вращений обладает хорошей обусловленностью.

☹ Вычислительные затраты выше чем у метода Гаусса.

### Упражнение

Доказать равенство (72).



# Матрица отражения

Нормаль  $w$  задает гиперплоскость.

$y$  - отражение вектора  $x$  относительно гиперплоскости

$$y = Px, \quad (73)$$

где  $P$  - матрица отражения.

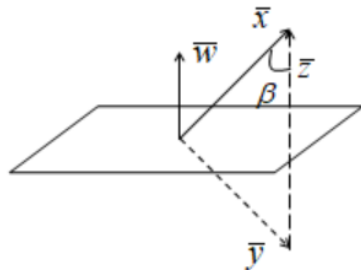
$$y = x - z$$

$$z = \|z\| \frac{w}{\|w\|}, \quad \|z\| = 2 \cos(\beta) \|x\| = 2 \frac{w^\top x}{\|w\| \|x\|} \|x\| = 2 \frac{w^\top x}{\|w\|}$$

$$y = x - \frac{2}{\|w\|^2} w w^\top x = \left( E - \frac{2}{\|w\|^2} w w^\top \right) x$$

$$P = \left( E - \frac{2}{\|w\|^2} w w^\top \right) x = E - 2uu^\top, \quad (74)$$

$$\text{где } u = \frac{w}{\|w\|}.$$



# Свойства матриц отражения

1.  $P = P^\top$

$$p_{ij} = \dots = p_{ji}.$$

2.  $P^{-1} = P = P^\top$

$$PP = (E - 2uu^\top)(E - 2uu^\top) = \dots = E.$$

3. Если  $x \neq y$  и  $\|x\| = \|y\| \neq 0$ , то  $\exists P : y = Px$ .

В качестве  $w$  нужно взять  $x - y$ .

## Следствие

Любой вектор  $x \neq \mathbf{0}$  с помощью матрицы отражения может быть преобразован в вектор пропорциональный первому вектору естественного базиса

$$Px = \alpha e^{(1)}, e^{(1)} = (1, 0, \dots, 0)^\top. \quad (75)$$

## Свойства матриц отражения

Зададим  $\alpha$  следующим образом

$$\alpha = \begin{cases} -\text{sign}(x_1) \|x\|, & x_1 \neq 0 \\ \pm \|x\|, & x_1 = 0. \end{cases} \quad (76)$$

Тогда  $y = (\alpha, 0, \dots, 0)^\top \Rightarrow w = (x_1 - \alpha, x_2, \dots, x_n)$  и

$$P = E - \underbrace{\frac{2}{\|w\|^2}}_{\beta} ww^\top, \quad (77)$$

где  $\frac{1}{\beta} = \frac{\|w\|^2}{2} = \frac{1}{2}(x - y, x - y) = \frac{1}{2}(\|x\|^2 + \|y\|^2 - 2(x, y)) = \|x\|^2 + |x_1|\|x\|.$

# Матрица отражения

## Упражнение

Пусть  $x = (2, -1, 2)^\top$ . Построить матрицу отражения, преобразующую  $x$  в вектор пропорциональный  $e^{(1)} = (1, 0, 0)^\top$ .

## Замечание

При умножении матрицы отражения  $P$  на матрицу  $A$  можно сократить трудоемкость вычисления результата. Вместо  $\sim n^3$  арифметических операций, можно получить за  $\sim n^2$

$$PA = A - \beta(w(w^\top A)). \quad (78)$$

Умножение матрицы отражения  $P$  на вектор  $x$  можно реализовать за  $\sim n$  операций вместо  $n^2$

$$Px = x - \beta(x, w)w. \quad (79)$$

## Метод отражений

$A = A^{(n)} = (a_{(1)}^{(n)}, \dots, a_{(n)}^{(n)})$  - представление матрицы по столбцам: верхний индекс – размерность, нижний – номер столбца.

Построим  $P_1$ :  $P_1 a_{(1)}^{(n)} = r_{11} e_{(1)}^{(n)}$ . Тогда

$$P_1 A = A_1 = \left[ \begin{array}{c|c} R^{(1)} & B^{(1,n-1)} \\ \hline \mathbf{0} & A^{(n-1)} \end{array} \right] \quad (80)$$

$A^{(n-1)} = (a_{(1)}^{(n-1)}, \dots, a_{(n-1)}^{(n-1)})$ . Построим  $P_2^{(n-1)}$ :  $P_2^{(n-1)} a_{(1)}^{(n-1)} = r_{22} e_{(1)}^{(n-1)}$  и

$$P_2 = \left[ \begin{array}{c|c} 1 & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & P_2^{(n-1)} \end{array} \right] \quad (81)$$

Тогда

$$P_2 A_1 = A_2 = \left[ \begin{array}{c|c} R^{(2)} & B^{(2,n-2)} \\ \hline \mathbf{0} & A^{(n-2)} \end{array} \right] \quad (82)$$

## Метод отражений

$$A_k = \left[ \begin{array}{c|c} R^{(k)} & B^{(1,n-k)} \\ \hline \mathbf{0} & A^{(n-k)} \end{array} \right] \quad (83)$$

$A^{(n-k)} = (a_{(1)}^{(n-k)}, \dots, a_{(n-k)}^{(n-k)})$ . Построим  $P_{k+1}^{(n-k)}: P_{k+1}^{(n-k)} a_{(1)}^{(n-k)} = r_{k+1,k+1} e_{(1)}^{(n-k)}$  и

$$P_{k+1} = \left[ \begin{array}{c|c} E^{(k)} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & P_{k+1}^{(n-k)} \end{array} \right] \quad (84)$$

Тогда

$$P_{k+1} A_k = A_{k+1} = \left[ \begin{array}{c|c} R^{(k+1)} & B^{(k+1,n-k-1)} \\ \hline \mathbf{0} & A^{(n-k-1)} \end{array} \right] \quad (85)$$

$P_1 \cdot (A|b) = (A_1|b^{(1)}) \rightarrow P_2 \cdot (A_1|b^{(1)}) = (A_2|b^{(2)}) \rightarrow \dots P_{n-1} \cdot (A_{n-2}|b^{(n-2)}) = (R|f)$

Свели исходную задачу к  $Rx = f$ .

## Метод ортогонализации

Пусть  $x = (x_1, \dots, x_n)^\top$  - точное решение задачи  $Ax = b$ . Введем обозначения

$$\begin{aligned} Y &= (x_1, \dots, x_n, 1) \in \mathbb{R}^{n+1} \\ A_i &= (a_{i1}, \dots, a_{in}, -b_i) \in \mathbb{R}^{n+1}, i = 1, \dots, n. \end{aligned} \tag{86}$$

Тогда СЛАУ может быть переписана в виде  $n$  условий ортогональности

$$(Y, A_i) = 0, i = 1, \dots, n. \tag{87}$$

Решить СЛАУ = найти вектор  $Y$  ортогональный всем векторам  $A_i$ .

## Метод ортогонализации

Будем строить последовательность подпространств  $\mathbb{R}^{n+1} = E^{(0)} \supset E^{(1)} \supset \dots \supset E^{(n)}$ : векторы из  $E^{(k)}$  ортогональны  $A_1, \dots, A_k$ .

Для  $E^{(0)}$  возьмем стандартный ортонормированный базис  $e_i^{(0)} = (0, \dots, 1, \dots, 0)^\top$ .

Базис подпространства  $E^{(k)}$

$$e_i^{(k)} = e_i^{(k-1)} - \frac{(A_k, e_i^{(k-1)})}{(A_k, e_k^{(k-1)})} e_k^{(k-1)}, i = k+1, \dots, n. \quad (88)$$

$$\begin{array}{ccccccc}
e_1^{(0)} e_2^{(0)} & e_3^{(0)} \dots & e_n^{(0)} e_{n+1}^{(0)} & E^{(0)} & & & \\
& e_2^{(1)} e_3^{(1)} \dots & e_n^{(1)} e_{n+1}^{(1)} & E^{(1)} & A_1 & & \\
& & e_3^{(2)} \dots & e_n^{(2)} e_{n+1}^{(2)} & E^{(2)} & A_1, A_2 & \\
& & \dots & \dots \dots & \dots \dots & & \\
& & & e_n^{(n-1)} e_{n+1}^{(n-1)} & E^{(n-1)} & A_1, A_2, \dots, A_{n-1} & \\
& & & & e_{n+1}^{(n)} & E^{(n)} & A_1, A_2, \dots, A_{n-1}, A_n
\end{array}$$



# Метод ортогонализации

Проверим, что векторы из  $E^{(k)}$  ортогональны  $A_1, \dots, A_k$ :

1. базис  $E^{(k)}$  - линейная комбинация базиса  $E^{(k-1)} \Rightarrow$  векторы из  $E^{(k)}$  ортогональны  $A_1, \dots, A_{k-1}$ .
2.  $(A_k, e_i^{(k)}) = (A_k, e_i^{(k-1)}) - \frac{(A_k, e_i^{(k-1)})}{(A_k, e_k^{(k-1)})} (A_k, e_k^{(k-1)}) = 0, i = k+1, \dots, n.$

## Лемма (доказать самостоятельно)

Вектор  $e_i^{(k)}$  имеет не более  $k+1$  отличных от 0 компонент. Отличными от 0 могут быть компоненты с номерами  $1, \dots, k$  и  $i$ .

## Следствие

Вектор  $e_i^{(k)}$  получается из  $e_i^{(k-1)}$  изменением компонент  $1, \dots, k$ , т.к. остальные компоненты у вектора  $e_k^{(k-1)}$  нулевые  $\Rightarrow$  у всех  $e_{n+1}^{(k)}$   $(n+1)$ -я компонента равна 1  $\Rightarrow e_{n+1}^{(n)}$  - искомое решение.