Министерство образования и науки Российской Федерации

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

Институт прикладной математики и информатики

Курсовая работа по дисциплине

Численные методы

«Сравнение решения интегралов изученными методами»

Выполнил
студент гр.5030102/20001 Дрекалов Н.С.

Преподаватель Козлов К.Н.

Санкт-Петербург

2023

Оглавление

Формулировка задачи

Необходимо сравнить количество обращений к подынтегральной функции у метода $3/8$ и метода Гаусса (без фиксированных узлов).

Вычисление интеграла формулой $3/8$

Условия применимости:

1. Функция $f(x)$ должна в худшем случае иметь лишь конечное число разрывов.

Алгоритм метода:

Необходимо вычислить $I = \sum_{x_k} a_k * f(x_k)$ такое, что $(I - I_0) < \epsilon$

1. Необходимо выбрать число отрезков разбиений. Начнём с N = 1 и посчитаем для него $I_{2n} = \frac{3\mathrm{h}}{8}\left(\mathrm{f(a)} + 3\mathrm{f(a + h)} + 3\mathrm{f(a + 2h)} + \mathrm{f(a + 3h)}\right)$, где $h = \frac{b-a}{3}$
2. Приравниваем $I_{2n} = I_n$
3. Увеличиваем число отрезков разбиение в 2 раза. Тогда $h = h_{\text{новое}} = \frac{h_{\text{старое}}}{2}$.
4. Для каждого из отрезков разбиений $[a_i; b_i]$ вычисляем интеграл по формуле $I_k = \int_{a_i}^{b_i} f(x)dx \approx \frac{3\mathrm{h}}{8}\left(\mathrm{f(a_i)} + 3\mathrm{f(a_i + h)} + 3\mathrm{f(a_i + 2h)} + \mathrm{f(a_i + 3h)}\right)$
5. Приравниваем $I_{2n} = \sum_k I_k$
6. Проверяем выполнение правила Рунге: $\frac{|I_{2n} - I_n|}{2^m - 1} \leq \epsilon,$ где $m = 4$. Если выполняется, то I_{2n}- значение интеграла $\int_a^b f(x)dx$ с точностью ϵ, иначе повторяем действия, начиная с п.2

Вычисление интеграла методом Гаусса

Условия применимости:

1. Функция $f(x)$ должна в худшем случае иметь лишь конечное число разрывов.

Алгоритм метода:

Интеграл представляется как сумма n слагаемых

$I = \frac{b-a}{2}\sum_i A_i * f\left(\frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{2} * t_i\right)$, коэффициенты A_i, t_i вычисляются заранее из нелинейной системы для $n = 2, 3, 4, 5$. Нужная точность достигается с помощью адаптивного разбиения и сравнения на каждом подотрезке разности значений для $n, n+1$ и необходимой точности.

Предварительный анализ задачи

Анализ функций на непрерывность:

- $f(x) = (x^4 - 2.9x^3 + 6.5x^2 - 7x - 5.4) * \cos(2x)$ непрерывна на всем множестве вещественных чисел => она интегрируема.

Контрольные тесты

Построим графики зависимостей

- Количества вызовов подынтегральной функции от заданной точности.

Численный анализ методов

Интеграл вычислялся на отрезке $[-5;\ 5]$ для диапазона точностей $[10^{-12}; 10^{0}]$

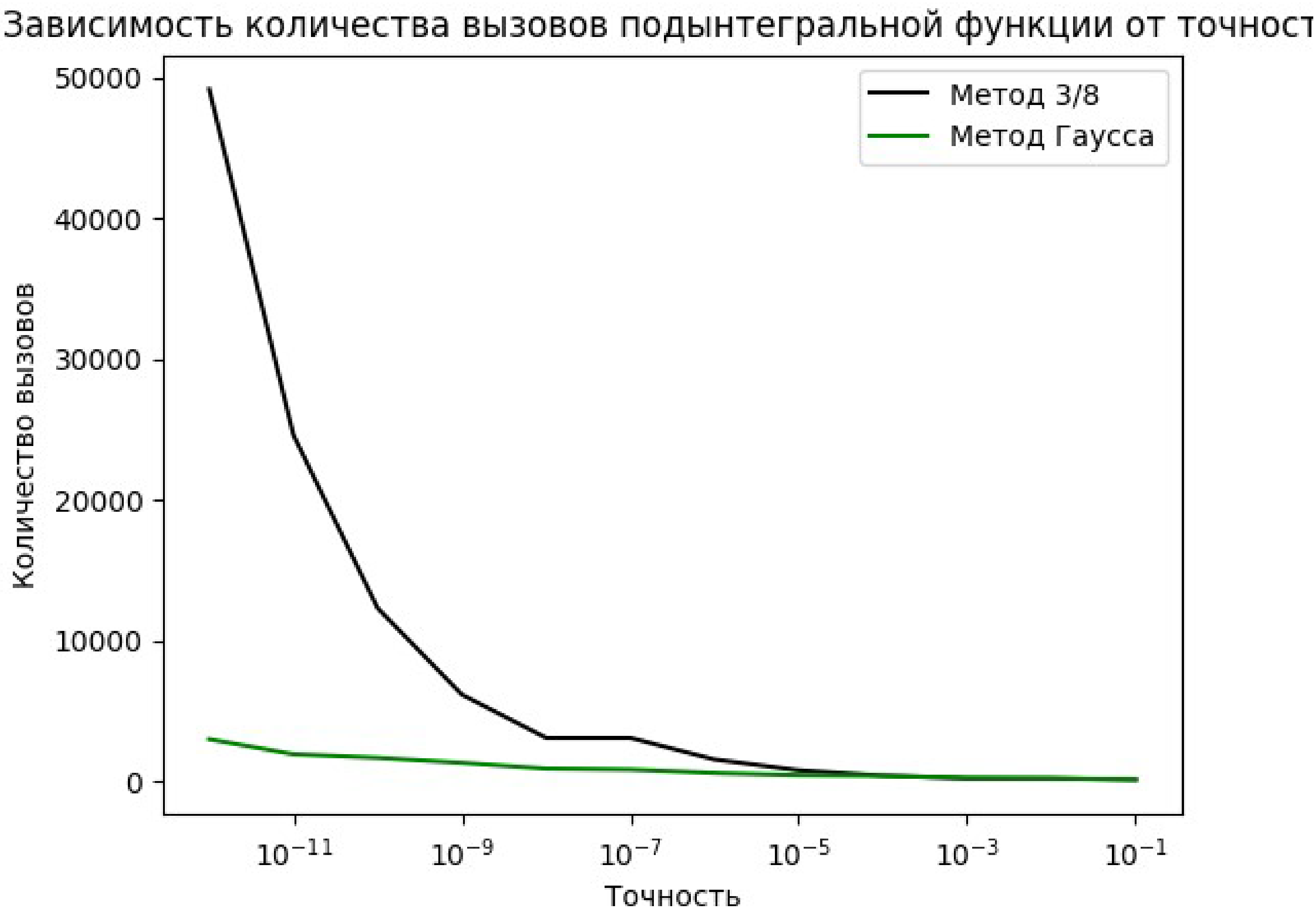

Рисунок 1. График зависимости количества вызовов подынтегральной функции от заданной точности

Из графика видно, что для достижения заданной точности при достаточно малых точностях ($< 10^{-7}$) метод Гаусса намного меньше раз обращается к значениям функции, чем метод $3/8$.

Вывод

В курсовой работе было произведено сравнение методов 3/8 и Гаусса на количество вызовов подынтегральной функции. Получилось, что последний намного меньше раз совершает обращения к функции, что делает его более предпочтительным при вычислении интегралов от сложный подынтегральных функций, вычисление значений которых может занимать значительное время.