Министерство образования и науки Российской Федерации

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

Институт прикладной математики и информатики

Лабораторная работа по дисциплине

Численные методы

«Решение алгебраической проблемы собственных значений итерационными методами»

Выполнил
студент гр.5030102/20001 Дрекалов Н.С.

Преподаватель Добрецова С.Б.

Санкт-Петербург

2023

Оглавление

Формулировка задачи

Найти минимальное собственное число матрицы методом скалярных произведений со сдвигом влево.

Формализация

- Пусть A – симметричная положительно определённая матрица размера n*n;
- Требуется: найти λ^k такое, что $\left|\lambda^k - \lambda\right| < \epsilon$, где λ – минимальное с.ч. матрицы A.

Метод скалярных произведений со сдвигом влево

Условия применимости:

1. A – симметричная положительно определённая матрица.

Алгоритм метода:

Сделаем сдвиг влево $B = A - \left||A|\right|_1 * E$ и найдем максимальное собственное число матрицы B:

1. Возьмем начальное приближение собственного вектора X^0, например, первый столбец матрицы A.
2. Нормализуем вектор: $Y^k = X^k / \left||X^k|\right|_2$
3. Считаем приближение $X^{k+1} = \mathrm{A} * Y^k$
4. Находим приближение с.ч. $\lambda^{k+1} = X^{k+1} * Y^k$
5. Процесс 2–4 повторяем до тех пор, пока $|\lambda^{k+1} - \lambda^k| > \epsilon$
6. Полученное $\lambda_m = \lambda^k$
   $\text{есть максимальное с.ч. матрицы } B \text{ с точностью } \epsilon$

Тогда минимальное собственное число будет равно $\lambda = \lambda_m + \left||A|\right|_1$

Предварительный анализ задачи

Построение диагональной матрицы с с.ч. на диагонали:

- $ln(n + 1) * \frac{n}{2} * \sqrt{n} * |sin(n)|$, где $n = 1..10$

Построение ортогональной матрицы:

- Для матрицы использовался вектор w = [0.3 0.4 0.5 0.6 0.3 0.2 0.9 0.11 -0.1 -0.3]
- Ортогональная матрица Q строилась с помощью преобразование Хаусхолдера: $Q = E - \frac{2ww^T}{||w||^2}$

Построение симметричной положительно определённой матрицы:

- Строим симметричную матрицу по формуле $A = QE'Q^T$.

Проверка условий для методов:

Метод скалярных произведений со сдвигом влево:

- A – симметричная положительно определённая по построению (преобразование от ортогональной + все с.ч. больше нуля)

Тестовый пример к методам

$$A = \begin{pmatrix} 5.7 & -3 & -2.4 \\ -3 & 2.4 & 0.6 \\ -2.4 & 0.6 & 2.7 \end{pmatrix}$$

Первая итерация:

$$X = (5.7 \quad -3 \quad -2.4)$$

$$Y = \frac{X}{||X||} = (0.829\ -0.436\ -0.349)$$

$$X = A * Y = (6.88\ -3.748 - 3.19)$$

$$\lambda = X * Y = 8.44971$$

Вторая итерация:

$$Y = (0.814\ -0.443\ -0.378)$$

$$X = (6.870\ -3.729\ -3.238)$$

$$\lambda = 8.46044$$

Третья итерация:

$$Y = (0.812\ -0.441\ -0.383)$$

$$X = (6.869\ -3.723\ -3.246)$$

$$\lambda = 8.46074$$

Значение приближается к максимальному собственному числу $\lambda_m = 8.4607582$ с каждой итерацией.

$$B = A - \lambda_m * E = \begin{pmatrix} -2.76 & -3.00 & -2.40 \\ -3.00 & -6.06 & 0.60 \\ -2.40 & 0.60 & -5.76 \end{pmatrix}$$

$$X = (-2.76 \quad -3.00 \quad -2.40)$$

Первая итерация:

$$Y = (-0.584\ -0.634\ -0.507)$$

$$X = (4.731 \quad 5.290 \quad 3.942)$$

$\lambda = -8.115$

Вторая итерация:

$Y = (0.583 \quad 0.652 \quad 0.486)$

$X = (-4.729 \ -5.406 \ -3.805)$

$\lambda = -8.12629$

Третья итерация:

$Y = (-0.582 \ -0.665 \ -0.468)$

$X = (4.725 \quad 5.495 \quad 3.694)$

$\lambda = -8.13342$

Тогда минимальное собственное число будет равно

$\lambda_{min} = \lambda_m + \lambda = 8.46074 - 8.13342 = \ 0.32732$

Значение близко к истинному 0.31535374

Контрольные тесты

Построим графики зависимостей

- Фактической ошибки, нормы невязки и нормы ошибки собственных векторов от заданной точности.
- Числа итераций от заданной точности.

Модульная структура программы

```
// Класс решения
typedef std::vector<long double> Vector;
typedef std::vector<Vector> Matrix;
class Solution {
	// матрица
	Matrix A;
	// массив пар с.ч. - число итераций
	std::vector<std::pair<long double, int>> minLyambdas;

	// Файл, в из которого сичтывается матрицы
	const std::string inFilename;
	// Файл, в который записывается матрицы
	const std::string outFilename;
	// Диапазон значений эпсилон (10^e_min;10^e_max)
	long double e_min = 0, e_max = 0;
	const long double minEpsilon = pow(10, -13);
	bool initialized = false;

	/**
	 * \brief Функция, считывающая матрицу из заданного файла
	 */
	void readMatrixFromFile();
	/**
	 * \brief Функция, записывающая минимальное с.ч. в заданный файл
	 */
	void writeLyambdas();

	/**
	 * \brief Функция, считающая максимальное с.ч. методом скалярных произведений
	 * \param A - матрица, у которой надо посчитать с.ч.
	 * \param normed - нужно ли нормировать векторы
	 * \param epsilon - точность числа
	 * \return пару чисел - собственное число и число итераций
	 */
	std::pair<LyambdaPair, Vector> findLyambda(const Matrix& A, bool normed, long
double epsilon);
	/**
	 * \brief Функция, считающая минимальное с.ч. методом скалярных произведений
	 * \param epsilon - точность числа
	 * \return пару чисел - собственное число и число итераций
	 */
	std::pair<long double, int> findLyambdas(long double epsilon);

	/**
	 * \brief Функция, нормированный вектор
	 * \param X - вектор
	 * \return нормир. вектор
	 */
	Vector normalize(const Vector& X);
	/**
	* \brief Функция, считающая длину вектора
	* \param X - вектора
```

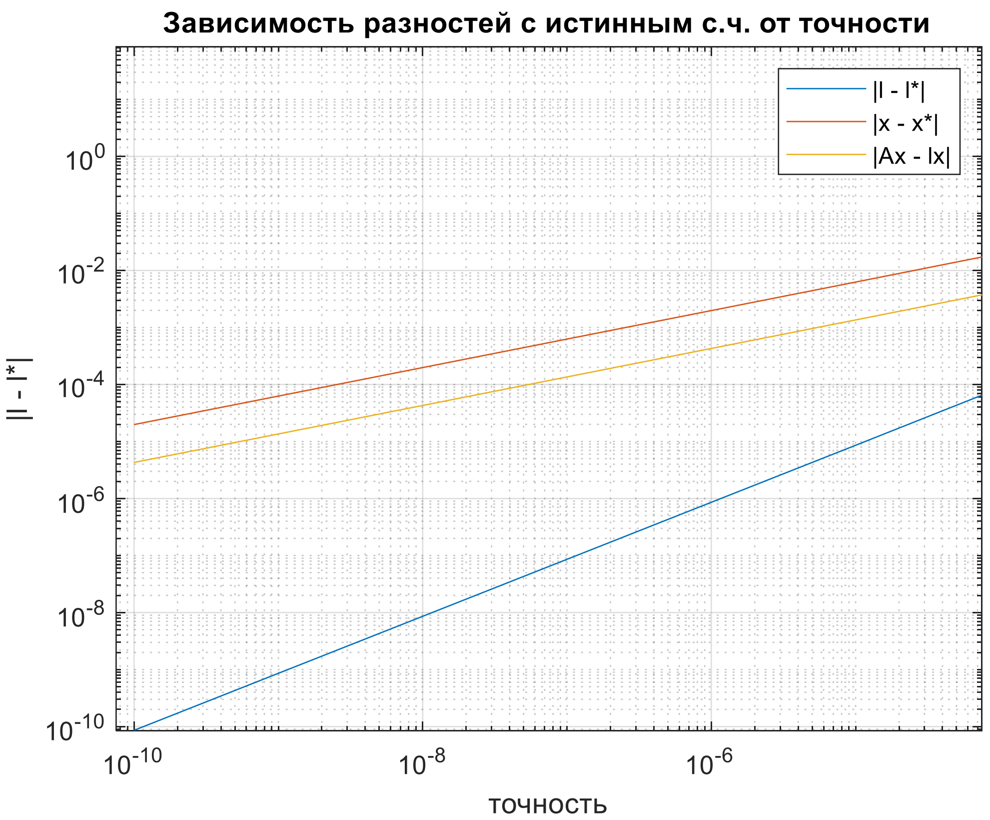
```
        * \return длина вектора
        */
        long double len(const Vector& X);public:
        /**
         * \brief Конструктор класса
         * \param inFilename - файл, из которого считываются матрицы
         * \param outFilename - файл, в который записываются матрицы
         */
        explicit Solution(const std::string& inFilename, const std::string& outFilename);

        /**
         * \brief Функция, считающая с.ч. у матрицы
         */
        void begin();

        /**
         * \brief Функция, вызываемая при завершении вычислений
         */
        void end();
};
```

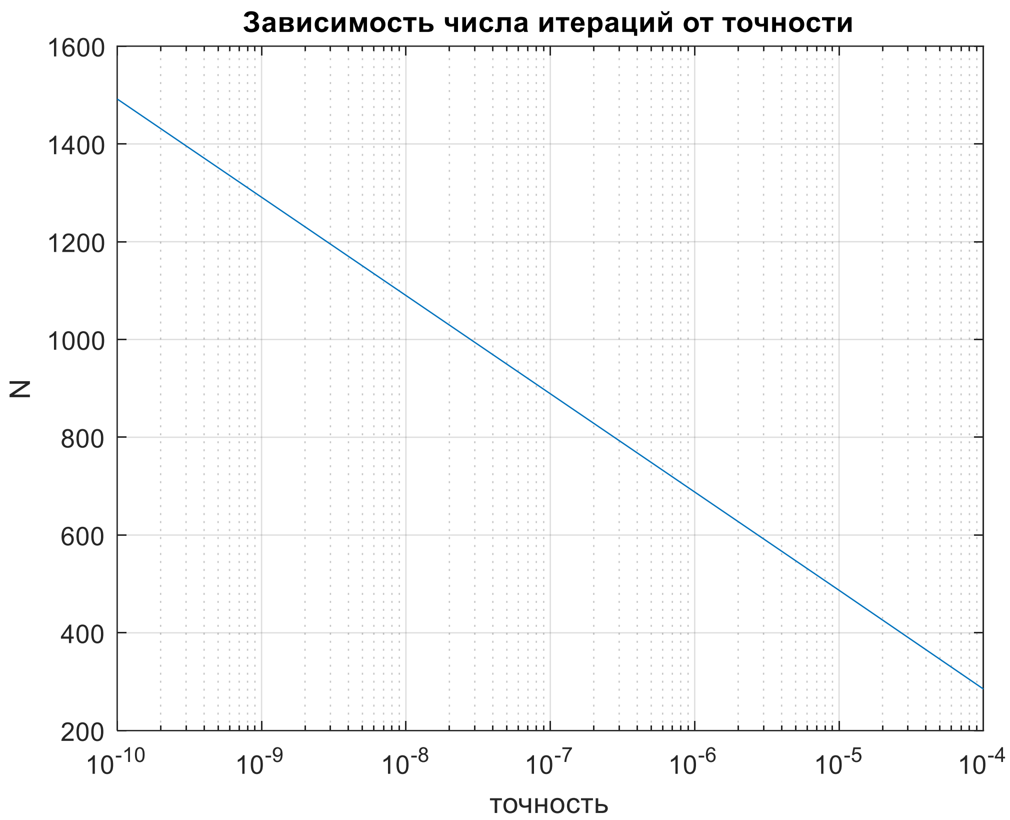
Численный анализ методов

Рассмотрим зависимость фактической ошибки и норм от точности.



На графике видно, что фактическая ошибка уменьшается вместе с точностью. Причем зависимость логарифмов растет линейно. Остальные две нормы не попадают в точность, но они и не должны, т. к. точность собственного вектора не одинакова с точностью собственного числа.

Рассмотрим зависимость числа итераций от точности.



Из графика видно, что N = f(log(e)), причем число итераций увеличивается с уменьшением точности.

Вывод

В лабораторной работе мне удалось найти корни минимальное собственное число матрицы 10x10 методом скалярных произведений со сдвигом влево.

В ходе исследования была проанализирована зависимость норм и фактической ошибки от точности, неожиданных результатов замечено не было. Также была исследована зависимость числа итераций от точности, она оказалась вида N = f(log(e)).