Министерство образования и науки Российской Федерации

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

Институт прикладной математики и информатики

Лабораторная работа №12 по дисциплине

Численные методы

«Решение задачи Коши для ОДУ 1 порядка методами Рунге-Кутты»

Выполнил
студент гр.5030102/20001 Дрекалов Н.С.

Преподаватель Козлов К.Н.

Санкт-Петербург

2023

Оглавление

Формулировка задачи

Необходимо численно решить задачу Коши для ОДУ 1-го порядка с помощью метода Рунге-Кутты 3-го порядка.

Формализация

- Пусть задана задача Коши: $y' = f(x, y)$ и $y(a) = 0$, где функция f удовлетворяет условию Липшица по y. Также пусть $D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, -\infty < y < \infty\}$ и функция $f(x, y)$ непрерывна на D.
- Необходимо найти табличную функцию, являющуюся решением задачи Коши с заданной точностью с помощью метода Рунге-Кутты.

Решение задачи Коши с помощью метода Рунге-Кутты

Алгоритм метода:

Вычисление следующего y_+ из предыдущих с шагом h выполняется в 3 шага:

1. $k_1 = f(x, y)$
2. $k_2 = f\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2}k_1\right)$
3. $k_3 = f(x + h, y - h * k1 + 2 * h * k_2)$
4. $y_+ = y + \frac{h}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3)$

ОДУ, данное для решения: $y' = 2x(x^2 + y)$

Задача Коши: $y(a) = e$ (из известного также точного решения $y = e^{x^2} - x^2 - 1$ находится $a \approx 1.299$)

Предварительный анализ задачи

Удовлетворение условию Липшица:

- $f(x, y) = 2x(x^2 + y)$ удовлетворяет условию Липшица по y. В уравнении $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$ - L можно взять равным $2x$

Непрерывность:

- Функция f непрерывна на всей области определения.

Тестовый пример к методам

Тестовый пример

$f(x,y) = 2x(x^2+y)$, тр.: $y = e^{x^2} - x^2 - 1$

Сделаем несколько шагов с помощью метода РК 3-го порядка.

Начало: $x = 1{,}299$; $y = 2{,}718$

$] \; h = 0{,}04$

Шаг h:

$k_1 = f(x,y) = 11{,}445$

$k_2 = f\left(x + \frac{h}{2};\ y + h\frac{k_1}{2}\right) = 12{,}363$

$k_3 = f(x+h,\ y - hk_1 + h \cdot 2k_2) = 13{,}503$

$y_+ = y + \frac{h}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3) = 3{,}214$, $x_+ = x + h = 1{,}339$

Сравним с точным:

$\cancel{e^{(x+h)^2} - (x_+)^2 - 1}$ $e^{x_+^2} - x_+^2 - 1 \approx 3{,}214$

Отн. ошибка меньше 0,04%

Шаг h:

$k_1 = f(x,y) = 13{,}409$

$k_2 = f\left(x + \frac{h}{2};\ y + h\frac{k_1}{2}\right) = 14{,}484$

$k_3 = f(x+h,\ y - k_1 h + 2hk_2) = 15{,}856$

$y_+ = y + \frac{h}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3) = 3{,}815$, $x_+ = 1{,}379$

$e^{x_+^2} - x_+^2 - 1 \approx 3{,}795$, отн. ош. около 0,5% - значит. увелич.

Контрольные тесты

Построим графики зависимостей

- Точного и полученного значений для двух фиксированных значений шага на отрезке ($h = 0.15$ и $h = 0.1$).
- Ошибки на отрезке для этих значений.
- Изменения шага по отрезку (для точности 10^{-6}).
- Фактической погрешности от заданной точности

Численный анализ метода

Исследования будут проводиться на отрезке [1.299; 2.5]

Иллюстрация работы метода

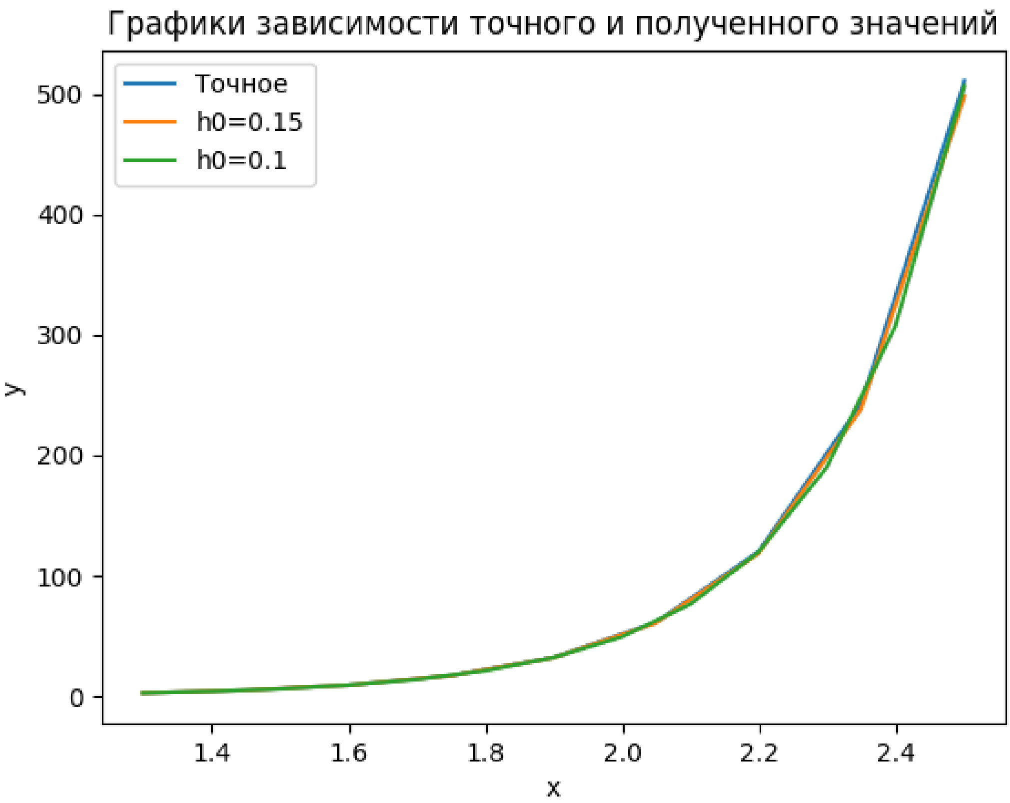

Рисунок 1. График зависимости точного и полученного значений для двух фиксированных значений шага на отрезке

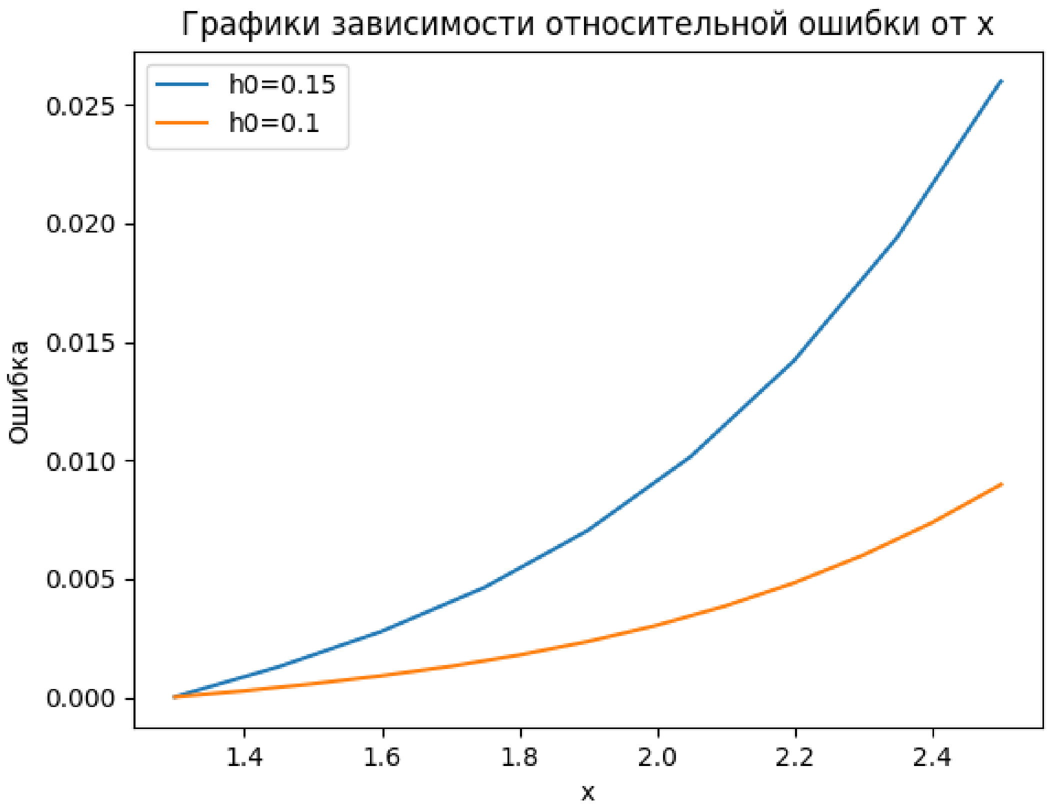

Рисунок 2. График зависимости относительной ошибки от x

Из рисунков 1 и 2 видно, что ошибка «накапливается» с увеличением x, что может привести к большой ошибке на правом краю при увеличении длины исследуемого отрезка.

Исследование точности метода

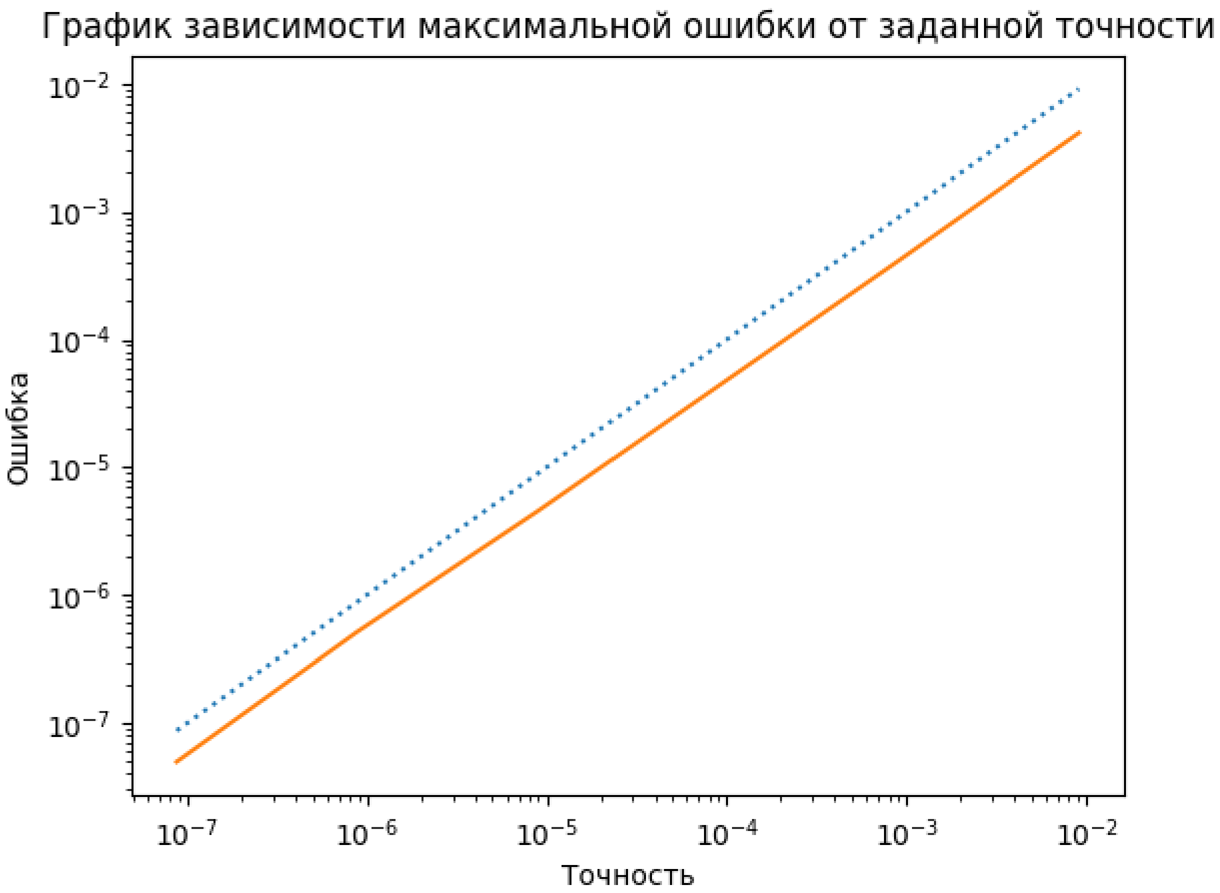

Рисунок 3. График зависимости максимальной ошибки от заданной точности

Из графика видно, что точность достигается: график зависимости ниже отмеченной биссектрисы

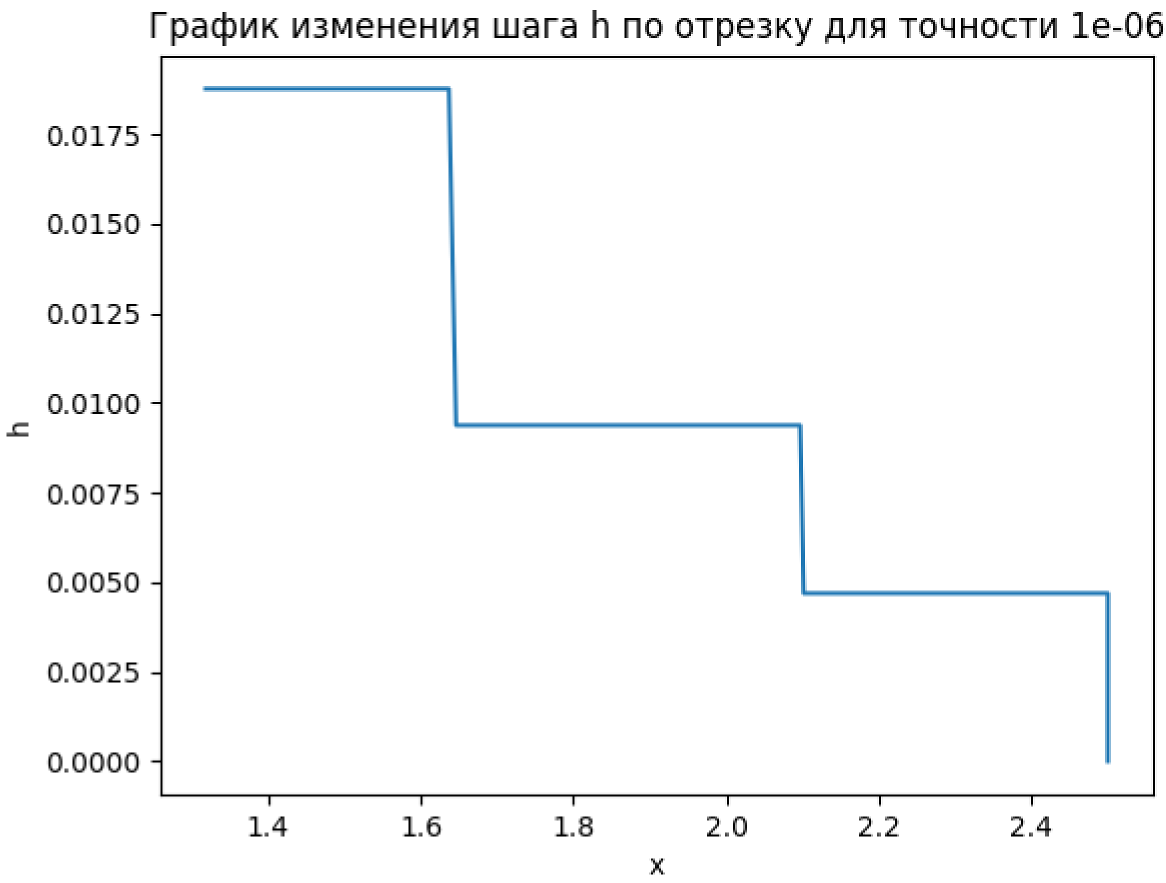

Рисунок 4. График изменения шага по отрезку

Из графика видно, что шаг уменьшается при движении к правому краю отрезка, что происходит из-за того, что необходимо «компенсировать» нарастающую ошибку, которая наблюдается на Рисунке 2.

Вывод

В результате выполнения лабораторной работы удалось решить задачу Коши для заданного уравнения методом Рунге-Кутты 3-го порядка с заданным шагом и заданной точностью. Из полученный результатов следует, что данный метод с при фиксированном шаге следует использовать лишь на небольших отрезках, либо же достигать необходимой точности, используя правило Рунге в каждой точке.