Министерство образования и науки Российской Федерации

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

Институт прикладной математики и информатики

Лабораторная работа №14 по дисциплине

Численные методы

«Решение краевой задачи для ОДУ 2-го порядка»

Выполнил
студент гр.5030102/20001 Дрекалов Н.С.

Преподаватель Козлов К.Н.

Санкт-Петербург

2023

Оглавление

Формулировка задачи

Необходимо численно решить краевую задачу для ОДУ 2-го порядка с помощью метода модифицированного метода суперпозиции и метода Рунге-Кутты 3-го порядка.

Формализация

- Пусть задана ОДУ 2-го порядка $p(x)y'' + q(x)y' + r(x)y = f(x)$ и граничное условие: $\alpha_0 y(a) + \ \alpha_1 y'(a) = A,\ \beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) = B$
- Необходимо найти табличную функцию, являющуюся решением краевой задачи с заданной точностью с помощью метода модифицированного метода суперпозиции и метода Рунге-Кутты 3-го порядка..

Модифицированный метод суперпозиции

Алгоритм метода:

Решение ОДУ ищется в виде $y(x) = u(x) + Cv(x)$

Для $u(x)$ и $v(x)$ строятся две задачи Коши, например, как:

$$\begin{cases} u(a) = \dfrac{\alpha_0}{\alpha_0^2 + \alpha_1^2} A \\ u'(a) = \dfrac{\alpha_1}{\alpha_0^2 + \alpha_1^2} A \end{cases} \qquad \begin{cases} v(a) = \mu\alpha_1 \\ v'(a) = -\mu\alpha_0 \end{cases}$$

Задачи решаются с помощью известных методов с получением сеточных функций u^h, v^h. Тогда $y^h = u^h + Cv^h$

Константа C находится из равенства

$$C\big(\beta_0 v(b) + \beta_1 v'(b)\big) = B - \big(\beta_0 u(b) + \beta_1 u'(b)\big)$$

Решение задачи Коши с помощью метода Рунге-Кутты

Алгоритм метода:

Вычисление следующего y_+ из предыдущих с шагом h выполняется в 3 шага:

1. $k_1 = f(x, y)$
2. $k_2 = \ f\left(x \ + \frac{h}{2}, y \ + \frac{h}{2} k_1\right)$

3. $k_3 = f(x + h, y - h * k1 + 2 * h * k_2)$
4. $y_+ = y + \frac{h}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3)$

Предварительный анализ задачи

ОДУ:

$$(e^x + 1)y'' - y' - e^x y = e^x$$

$$y'' = f(x, y, y') = \frac{e^x + e^x y + y'}{e^x + 1}$$

$$\alpha_0 = 1, \alpha_1 = 0, \beta_0 = 1, \beta_1 = 0$$

Из ГУ выводятся $A = 0$ и $B = e - 1$

Начальное условие для u: $u(0) = 0$ и $u'(0) = 0$

Начальное условие для v: $v(0) = 0$ и $v'(0) = -1$ (для $\mu = 1$)

Формула для константы C: $C = \frac{e - u(1) - 1}{v(1)}$

Тестовый пример к методам

Тестовый пример

$$y'' = f(x,y,y') = \frac{e^x + e^x y + y'}{e^x + 1}, \quad u(0)=0,\ u'(0)=0,\ v(0)=0,\ v'(0)=-1$$

Сделаем шаг $h = 1$

$\cancel{u:\ k_1 = f(0,0,0) = 0{,}5}$ $\quad]\ F(x,Y) = \begin{pmatrix} Y(1) \\ f(x,y,y') \end{pmatrix}$

$\cancel{k_2 = f\left(0{,}5,\ 0 + \frac{0{,}5}{2}\cdot 1\right)}$ = Для u: $Y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$k_1 = \begin{pmatrix} y' \\ f(x,y,y') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$$

$$k_2 = F\left(x + \frac{h}{2},\ Y + \frac{h}{2}k_1\right) = \begin{pmatrix} 0{,}25 \\ 0{,}717 \end{pmatrix}$$

$$k_3 = F(x+h,\ Y - k_1 \cdot h + 2hk_2) = \begin{pmatrix} 0{,}934 \\ 1{,}348 \end{pmatrix}$$

$$\cancel{u(1) \approx}\ Y + \frac{h}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3) = \begin{pmatrix} 0{,}322 \\ 0{,}785 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} u(1) \\ u'(1) \end{pmatrix}$$

Для v: $Y = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$k_1 = F(x,Y) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$k_2 = F\left(x + \frac{h}{2},\ Y + \frac{h}{2}k_1\right) = \begin{pmatrix} -1 \\ -0{,}066 \end{pmatrix}$$

$$k_3 = F(x+h,\ Y - hk_1 + 2hk_2) = \begin{pmatrix} -1{,}133 \\ -0{,}305 \end{pmatrix}$$

$$Y + \frac{h}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3) = \begin{pmatrix} -1{,}022 \\ -1{,}095 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} v(1) \\ v'(1) \end{pmatrix}$$

$$C = \frac{e - u(1) - 1}{v(1)} \approx -1{,}366$$

$$y(1) = u(1) + Cv(1) \approx 1{,}718$$

Точное реш: $e - 1 \approx 1{,}718$, точность больше $0{,}001$

Контрольные тесты

Построим графики зависимостей

- Точного и полученного значений для двух фиксированных значений шага на отрезке ($h = 0.1$ и $h = 0.05$).
- Ошибки на отрезке для этих значений.
- Изменения шага по отрезку (для точности 10^{-12}).
- Фактической погрешности от заданной точности

Численный анализ метода

Исследования будут проводиться на отрезке [1.299; 2.5]

Иллюстрация работы метода

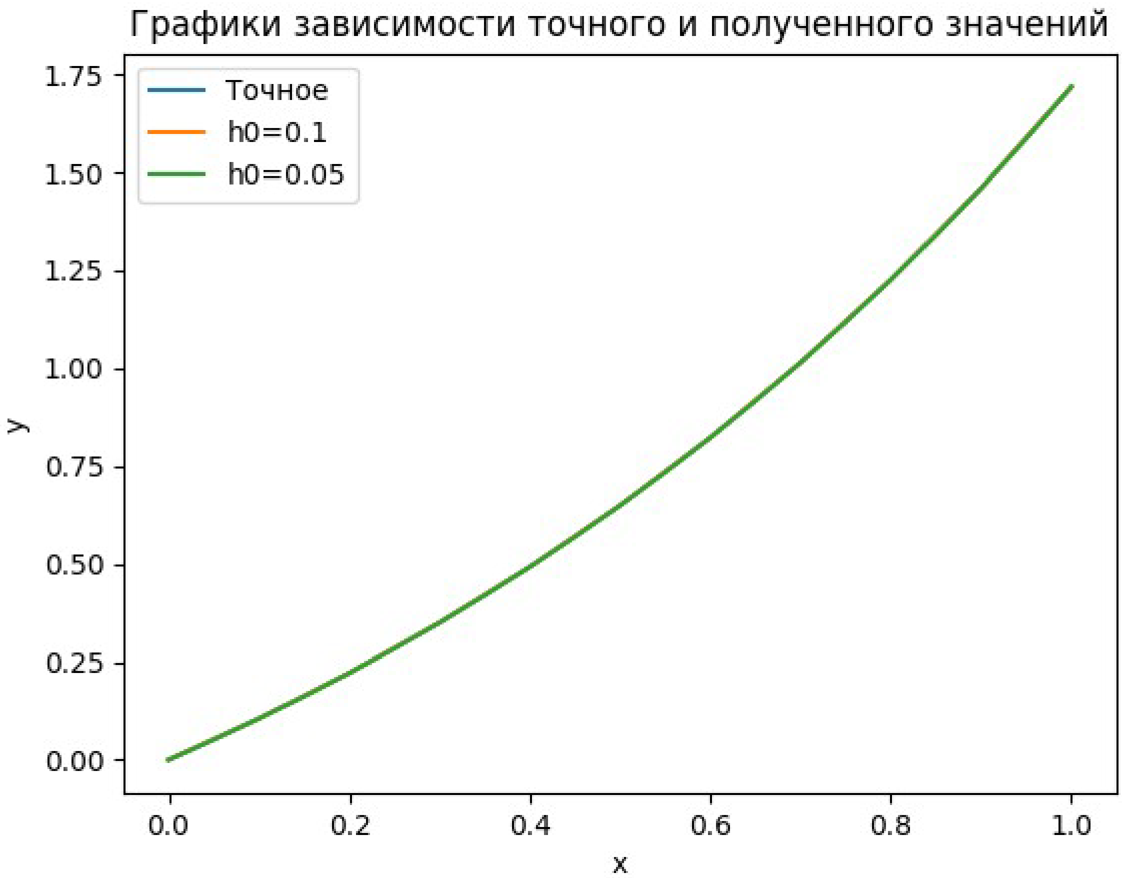

Рисунок 1. График зависимости точного и полученного значений для двух фиксированных значений шага на отрезке

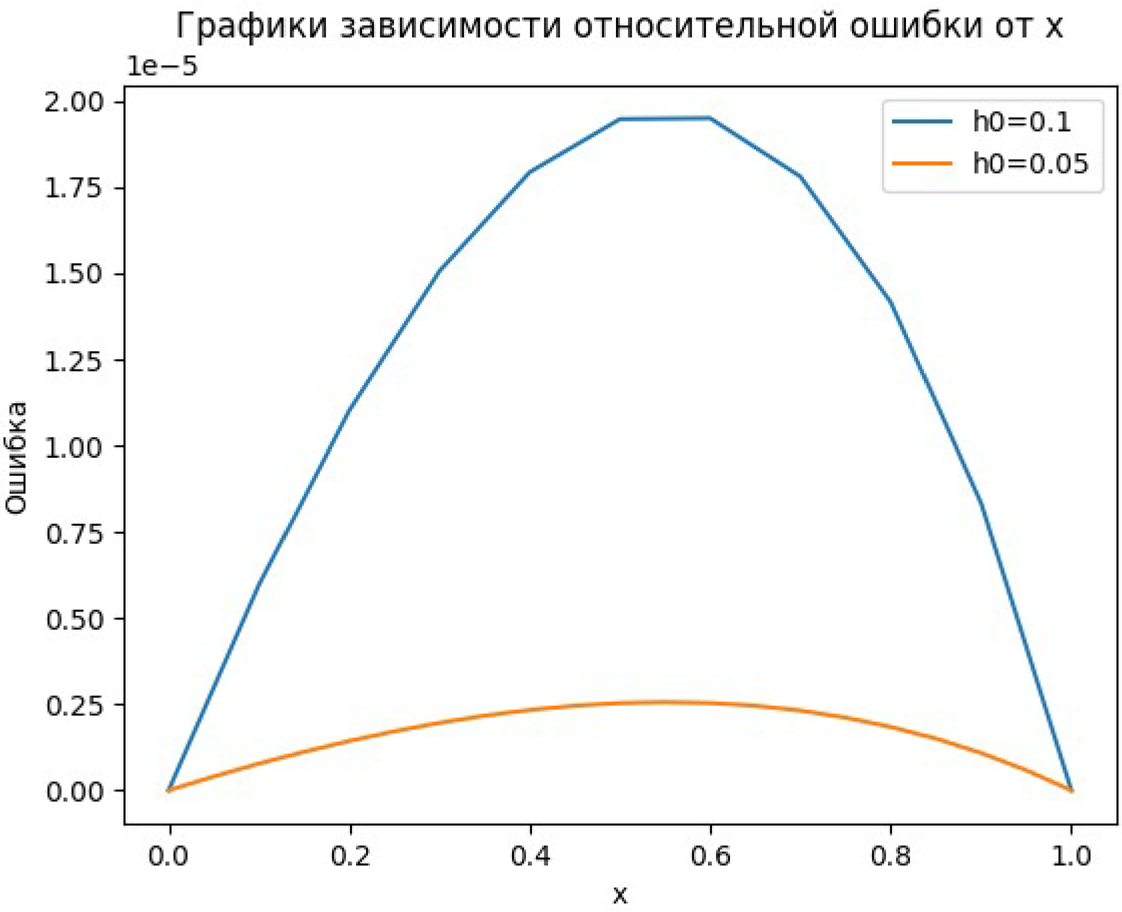

Рисунок 2. График зависимости относительной ошибки от x

Из рисунков 1 и 2 видно, что ошибка «накапливается» с отдалением от краев отрезка и минимальная на самих краях. Также можно отметить увеличение точности с уменьшением шага.

Исследование точности метода

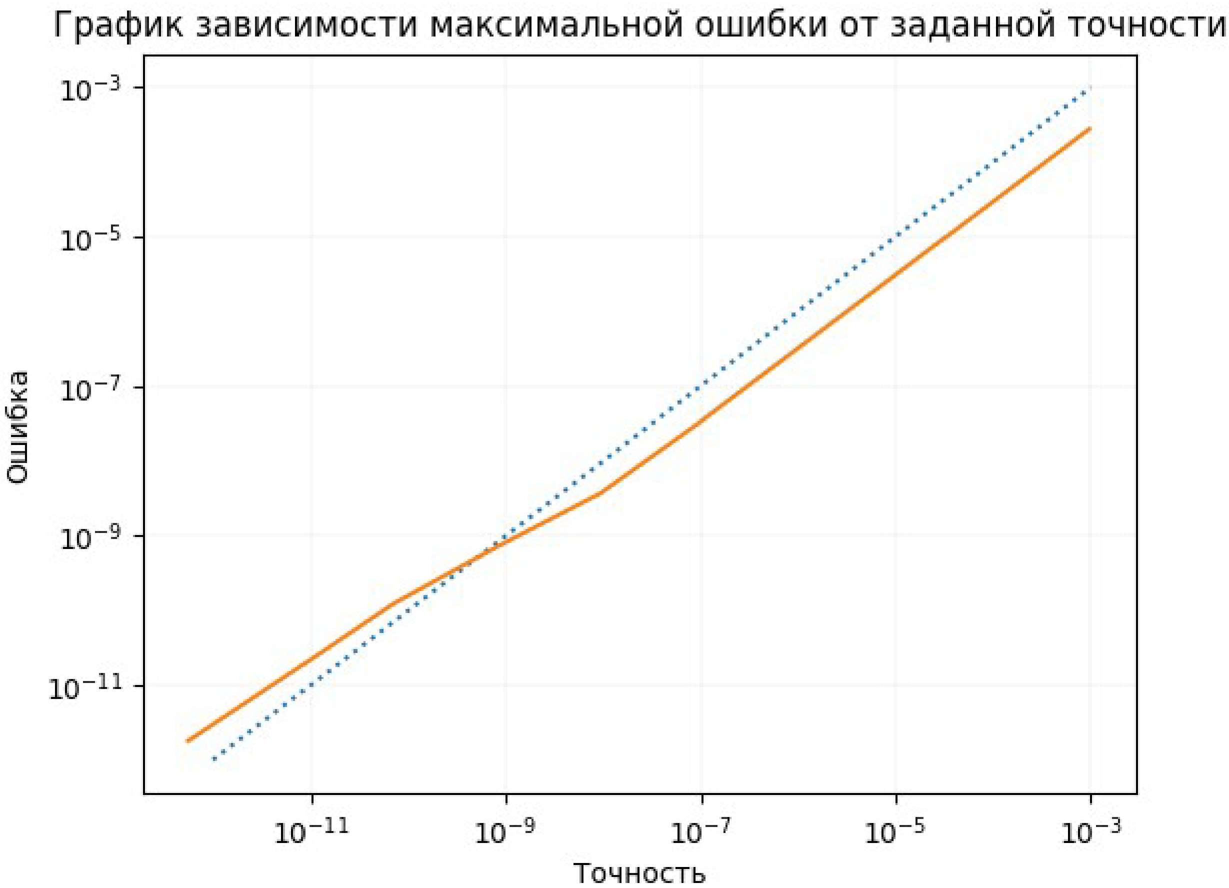

Рисунок 3. График зависимости максимальной ошибки от заданной точности

Из графика видно, что точность достигается: график зависимости ниже отмеченной биссектрисы. При очень малых точностях даёт о себе знать используемый метод подсчета ошибки, основанный на первоначальном подсчёте константы

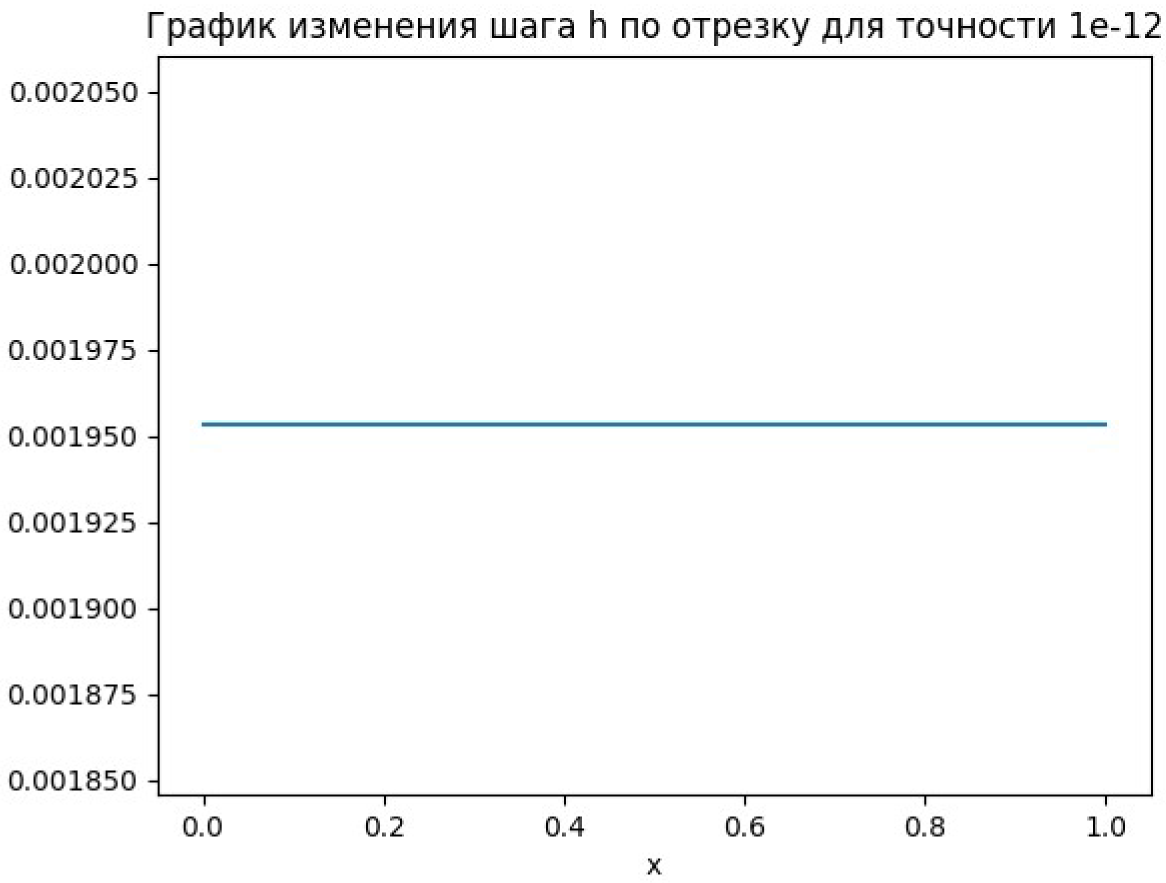

Рисунок 4. График изменения шага по отрезку

Из графика видно, что шаг для достижения необходимой точности достигается в начале и не меняется при «движении» по отрезку.

Вывод

В результате выполнения лабораторной работы удалось решить краевую задачу для заданного уравнение модифицированным методом суперпозиции с заданным шагом и заданной точностью. Из полученный результатов следует, что данный метод с при фиксированном шаге следует использовать лишь на небольших отрезках (иначе будет очень большая ошибка в середине отрезка), либо же достигать необходимой точности, используя правило Рунге в каждой точке.