灰度直方图均衡化讨论

一、定义

我们在灰度直方图(grayscale histogram)的讨论中，对于输入图像中任意一像素(pixel)的灰度级 $p \in [0,255]$，在输出图像中总能找到像素的灰度级$\boldsymbol{q} \in [\mathbf{0},\mathbf{255}]$使得

$$\boldsymbol{\sum_{k=0}^{p} hist_{\cdot input}(k) = \sum_{l=0}^{q} hist_{\cdot output}(l) \cdots ①}$$

由①式我们显而易见可以得出：

$$\sum_{k=0}^{p} hist_{\cdot input}(k) = \sum_{l=0}^{q} hist_{\cdot output}(l) = H \times W$$

显然仅仅根据①式，想要实现直方图的均衡化是达不到的。如果使图像在所有灰度级上直方图均衡化，则需要在数学上求平均值，即理想状态下输出图像每个灰度级的个数：

$$hist_{\cdot idea\ output}(k) \times 1 \approx^{*} \frac{\sum_{k=0}^{255}[hist_{\cdot input}(k) \times 1]}{(255+1)^{\dagger} - 0} = \frac{H \times W}{256}, k \in [0,255]$$

然而做到平均可能会造成原有亮度关系发生改变，为了保持这一关系不被均衡化打乱，那么在输出图像中对于任意灰度级 q，需要有

$$\frac{q+1}{\sum_{l=0}^{q} hist_{\cdot output}(l)} \approx \frac{256}{H \times W}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{p} hist_{\cdot input}(k) = \sum_{l=0}^{q} hist_{\cdot output}(l) \approx (q+1) \times \frac{H \times W}{256}$$

$$\boldsymbol{\Rightarrow q \approx \left[\sum_{k=0}^{p} hist_{\cdot input}(k)\right] \times \frac{256}{H \times W} - 1 \cdots ②}$$

②式即为经过均衡化后输出图像中灰度级 q 的计算式。

---

* 由于直方图横纵坐标取值均为非负整数，因此本文讨论一些数学关系需要根据实际做≈处理

† 每个直方图底边长为 1，其右下角与所对应灰度级坐标刻度对齐，因此所有灰度级直方图底边长之和最大为 255+1

二、几条性质

2.1 有界性

对于$p \in [0,255]$，代入②式得

$$-1 \leq \left[\sum_{k=0}^{p} hist_{\cdot input}(k)\right] \times \frac{256}{H \times W} - 1 \leq 255$$

2.2 单调性

已知对于$k \in [0,p]$，则有

$$\boldsymbol{hist_{\cdot input}(k) \geq 0}$$

对于$x \in Z, y \in Z, 0 \leq x \leq y \leq p \leq 255$，易得

$$\boldsymbol{\sum_{k=0}^{y} hist_{\cdot input}(k) - \sum_{k=0}^{x} hist_{\cdot input}(k) = \sum_{k=x}^{y-x} hist_{\cdot input}(k)}$$

那么可知即随着 k 增加，和也随之增加。

2.3 数量稳恒性

2.3.1 均衡化前后对应灰度级数量不变

假设原图数量级 x 经过均衡化后，对应生成灰度级 y、z(y<z)，那么根据单调性

$$\sum_{k=0}^{x} hist_{\cdot input}(k) = \sum_{k=0}^{y} hist_{\cdot output}(k) + \sum_{k=y}^{z-y} hist_{\cdot output}(k)$$

$$\sum_{k=0}^{y} hist_{\cdot output}(k) < \sum_{k=0}^{z} hist_{\cdot output}(k)$$

即 z 较 y 而言，更加亮。然而根据均衡化定义，可知

$$\sum_{k=0}^{x} hist_{\cdot input}(k) = \sum_{l=0}^{y} hist_{\cdot output}(l)$$

$$\sum_{k=0}^{x} hist_{\cdot input}(k) = \sum_{l=0}^{z} hist_{\cdot output}(l)$$

显然与上述不等式结论相矛盾，因此假设不成立。(其他假设情况可同理证明)

故均衡化前后对应灰度级数量保持不变。

2.3.2 均衡化前后对应灰度级像素数量不变

假设原图数量级 x，其像素数量$hist._{input}(x)$经过均衡化后，分配至灰度级 y、z(y<z)上，分别为$hist._{output}(y)$和$hist._{output}(z)$。

对于 a<y，

$$\sum_{k=0}^{x} hist._{input}(k) = \sum_{k=0}^{a} hist._{output}(k) + hist._{output}(y) + hist._{output}(z)$$

$$\sum_{k=0}^{y} hist._{output}(k) < \sum_{k=0}^{z} hist._{output}(k)$$

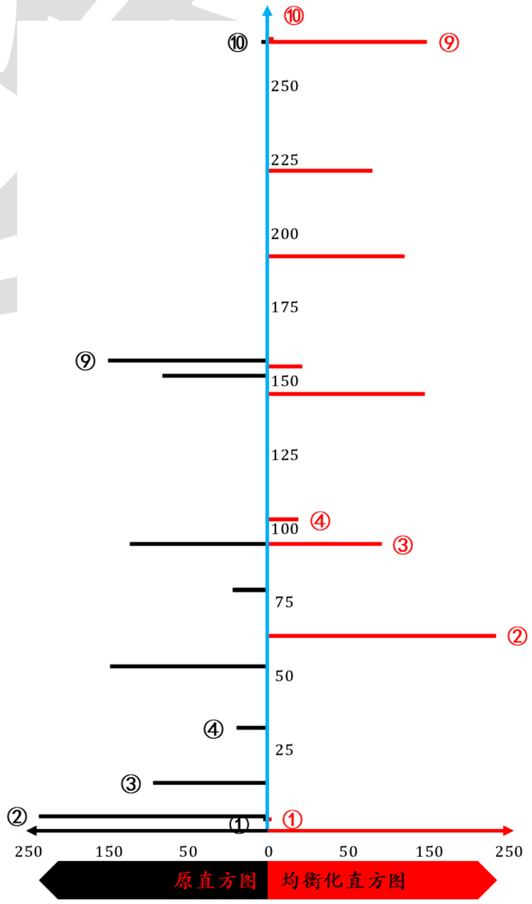
即 z 较 y 而言，更加亮。然而根据均衡化定义，可知

$$\sum_{k=0}^{x} hist._{input}(k) = \sum_{l=0}^{y} hist._{output}(l)$$

$$\sum_{k=0}^{x} hist._{input}(k) = \sum_{l=0}^{z} hist._{output}(l)$$

显然与上述不等式结论相矛盾，因此假设不成立。(其他假设情况可同理证明)

故均衡化前后对应灰度级像素数量保持不变。



三、对计算结果 q 处理的讨论

根据有界性的讨论可知，对于$p \in [0,255]$，通过②式计算可得$\mathbf{-1 \le q \le 255}$。但实际上$\mathbf{0 \le q \le 255}$，因此我们需要对②式计算结果做出调整以达到均衡化结果的可输出。

根据单调性可知，对于$x \in Z, y \in Z, 0 \le x \le y \le p \le 255$，易得

$$\sum_{k=0}^{x} hist_{\cdot input}(k) \le \sum_{k=0}^{y} hist_{\cdot input}(k)$$

进而可得

$$\sum_{k=0}^{x} hist_{\cdot input}(k) \ge 0 \Rightarrow \sum_{k=0}^{y} hist_{\cdot input}(k) \ge 0$$

$$\sum_{k=0}^{y} hist_{\cdot input}(k) \le 0 \Rightarrow \sum_{k=0}^{x} hist_{\cdot input}(k) \le 0$$

据此可得：计算式②中$q = -1$的结果应当在 k 取值区间的左侧出现，且只会“连续出现”。

又根据数量稳恒性可知，如果出现$q = -1$，那么 q 的灰度级数可能取值变成了 257 种，然而输入 p 只有 256 种可能。因此如果$q = -1$，意味着 q 在[0,255]上一定出现某个灰度级出现“空隙”。

调整的操作，可以基于“空隙”采取不同策略。

暂时可以想到的简单策略有：

3.1 $q = -1 \rightarrow q = 0$：

指将均衡化计算得$q = -1$的部分直接加到$q = 0$上。

该方法代码实现较为简单，但是却在原理上部分违背了“均衡化后保持亮度关系不变”的原则。

3.2 $q = -1$~首个“空隙”整体+1：

指计算结果中从$q = -1$到第一个“空隙”之间的直方图整体灰度级+1 以达到整体移动。

该方法需要首先判断$q = -1$到第一个“空隙”的所有灰度级序号，然后将该区间所有灰度级+1处理。

该方法仍然改变了移动部分和不移动部分的亮度关系，但代码实现并不繁琐。

3.3 最大连续“空隙”缩减：

指计算结果中群找到最大的连续“空隙”区间，将在此之前的灰度级整体+1。

该方法需要判断计算结果中所有的“空隙”区间(当然包括区间边界的灰度级序号)，相比较求得最大的区间，然后将区间边界灰度级序号之前的灰度级整体+1 移动。

个人认为这是对计算所得的亮度关系改变最为温和的方法，但代码实现可能最为繁琐。

四、说明

以上均为个人不成熟的推论，欢迎与各位沟通交流，对我进行批评指正~谢谢！