2. BACHELORARBEIT

Titel der Bachelorarbeit

Langzeitverhalten von diskreten Markovketten

Verfasser

M. W.

angestrebter akademischer Grad

Bachelor of Science (BSc.)

, im Monat Februar 2017

Studienkennzahl lt. Studienblatt:	033—
Studienrichtung lt. Studienblatt:	Mathematik
Betreuer:	ao. Univ.-Prof. Dr. —

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung und Motivation

Diese Arbeit handelt vom Lanzeitverhalten von diskreten Markovketten. Zur Motivation wollen wir ein einfaches Beispiel betrachten.
Angenommen eine Maschine kann sich in einem Raum mit gewissen Wahrscheinlichkeiten zwischen drei unterschiedlichen Positionen bewegen. Wir nennen diese Positionen $P1$, $P2$ und $P3$. Die Maschine wechselt pro Minute ihre Position (wobei wir ein Verharren in der jeweiligen Position ebenfalls als Wechsel interpretieren). Wir nehmen nun an, dass die Maschine zum Zeitpunkt Null in $P1$ startet. Nach einer Minute wechselt sie mit Wahrscheinlichkeit 0.5 von $P1$ nach $P2$ oder verharrt mit Wahrscheinlichkeit 0.5 in $P1$. Nach $P3$ kann die Maschine von $P1$ nicht (direkt) wechseln. Von $P2$ bewegt sie sich jeweils mit einer Wahrscheinlichkeit von 1/3 nach $P1$ oder $P3$ oder sie verharrt in Position $P2$ (ebenfalls mit Wahrscheinlichkeit 1/3). Erreicht sie $P3$, kehrt sie mit Wahrscheinlichkeit 1 im nächsten Zeitschritt nach $P1$ zurück. In $P1$ verharrt sie wieder mit Wahrscheinlichkeit 0.5 oder wechselt nach $P2$ usw. Wir können das Verhalten der Maschine mit Hilfe eines Graphen veranschaulichen.

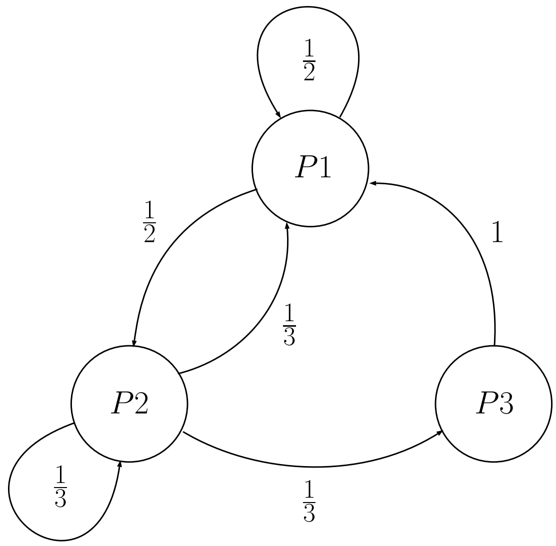

Abbildung 1: Das Verhalten der Maschine eingezeichnet in einen Graphen.

Die Wahrscheinlichkeiten eines Wechselns (bzw. Verharrens) sind unabhängig vom Zeitpunkt n (in Minuten). Es ist auch ersichtlich, dass die zukünftige Position der Maschine nur von ihrer gegenwärtigen Position, nicht aber von ihren vergangenen Positionen abhängt. Einen solchen Prozess nennen wir (diskrete) Markovkette.
Angenommen wir lassen diese Maschine eine sehr lange Zeit arbeiten. Mit $\alpha_n(i)$ bezeichnen wir die Wahrscheinlichkeit, dass sich die Maschine zum Zeitpunkt n in Position i befindet. Wenn wir das Langzeitverhalten untersuchen, sind wir an folgenden Fragen interessiert:

- Gibt es eine sogenannte Gleichgewichtsverteilung α_∞ („Fixpunkt“)?

- Falls ja, ist diese eindeutig bestimmt?
- Gilt sogar $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha_\infty$ (unabhängig vom Start der Maschine)?

In unserem vorliegenden Beispiel wird der Ergodensatz für endliche Markovketten diese Fragen beantworten.

2 Begriffe und Vorbereitung

2.1 Markovketten in diskreter Zeit

Ein stochastischer Prozess in diskreter Zeit ist eine Folge $(X_n)_{n\geq 0}$ von Zufallsvariablen auf einem gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Hierbei kann man sich den Index n als Zeitpunkt vorstellen. Die Zufallsvariablen mögen Werte in einer höchstens abzählbaren, nichtleeren Menge S, dem sogenannten *Zustandsraum*, annehmen.

Definition 2.1.1. Eine Folge von Zufallsvariablen $(X_n)_{n\geq 0}$ auf Ω heißt (homogene) *Markovkette* mit Zustandsraum S, falls sie die folgenden beiden Eigenschaften besitzt: Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ und jede Wahl von $j, i, i_1, \ldots, i_n \in S$ mit

$$\mathbb{P}(X_n = i, X_{n-1} = i_1, \ldots, X_1 = i_{n-1}, X_0 = i_n) > 0$$

gilt:

(M1) *Markov-Eigenschaft*:

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(X_{n+1} = j \,|\, X_n = i, X_{n-1} = i_1, \ldots, X_1 = i_{n-1}, X_0 = i_n) \\ &\quad = \mathbb{P}(X_{n+1} = j \,|\, X_n = i)\end{aligned} \tag{2.1}$$

(M2) *Homogenität*:

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = j \,|\, X_n = i) = p_{ij} \quad \text{ist unabhängig vom Zeitpunkt } n. \tag{2.2}$$

Anmerkung. Die Markov-Eigenschaft besagt, dass die Zukunft, das heißt X_{n+1}, nur von der Gegenwart, das heißt X_n, nicht aber von der Vergangenheit, das heißt $X_{n-1}, X_{n-2}, \ldots$, abhängt. Die Homogenität sagt aus, dass sich die sogenannten *Übergangswahrscheinlichkeiten* p_{ij}, nicht mit der Zeit ändern.

Zählt man die Zustände aus S in irgendeiner Weise ab, so kann man sich die Übergangswahrscheinlichkeiten $p_{ij} = p(i,j)$ in Form einer Matrix denken. Diese Matrix

$$M = (p_{ij})_{i,j\in S}$$

heißt *Übergangsmatrix* der Markovkette. Die Übergangsmatrix ist *stochastisch*, das heißt sie besitzt nicht negative Einträge und erfüllt

$$\sum_{j\in S} p_{ij} = 1 \quad \text{für alle} \quad i \in S.$$

Die Einträge von M sind nicht negativ, da es sich bei p_{ij} um Wahrscheinlichkeiten handelt. Die Zeilensummen sind gleich 1, da

$$\sum_{j\in S} p_{ij} = \sum_{j\in S} \mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i) = \mathbb{P}(\Omega \mid X_n = i) = 1.$$

Für $k \geq 0$ sei $p_{ij}^{(k)}$ der Eintrag der Matrix M^k an der Stelle (i,j). Insbesondere gilt $p_{ij}^{(1)} = p_{ij}$ und wir definieren

$$p_{ij}^{(0)} = 1, \quad \text{falls } i = j \quad \text{und} \quad p_{ij}^{(0)} = 0 \quad \text{sonst.}$$

Wir werden sehen, dass es sich bei $p_{ij}^{(k)}$ gerade um die *k-Schritt-Übergangswahrscheinlichkeit* von i nach j handelt.
Wir bezeichnen mit

$$\alpha_n(i) = \mathbb{P}(X_n = i) \quad \text{für } i \in S$$

die Verteilung der Zufallsvariable X_n. Die Verteilung α_0 heißt die *Startverteilung* der Markovkette.

Einschub (Produkt-σ-Algebra). Es sei $\Omega = \prod_{i \in I} \Omega_i$ für eine Indexmenge $I \neq \emptyset$. Außerdem sei $\mathcal{A}_i$ eine σ-Algebra auf Ω_i, $X_i : \Omega \to \Omega_i$ die Projektion auf die i-te Koordinate und

$$\mathcal{H} = \{X_i^{-1}(A_i) : i \in I, A_i \in \mathcal{A}_i\}.$$

Dann heißt die von $\mathcal{H}$ erzeugte σ-Algebra die *Produkt-σ-Algebra* der $\mathcal{A}_i$ auf Ω und wir schreiben

$$\bigotimes_{i \in I} \mathcal{A}_i := \sigma(\mathcal{H}).$$

Wie sieht es mit einem Wahrscheinlichkeitsmaß auf solchen Produkträumen aus? Für jedes $n \geq 0$ sei $\Omega_n \neq \emptyset$ eine abzählbare Menge. Wir betrachten $\Omega = \prod_{n \geq 0} \Omega_n$, $X_n : \Omega \to \Omega_n$ die n-te Projektion und $\mathcal{A} = \bigotimes_{n \geq 0} \mathcal{P}(\Omega_n)$. Sei nun α_0 eine Wahrscheinlichkeitsfunktion auf Ω_0 und für alle $n \geq 1$ und $i_k \in \Omega_k$ mit $k < n$ sei $\alpha_{n|i_0,\ldots,i_{n-1}}$ eine Wahrscheinlichkeitsfunktion auf Ω_n. Dann existiert *genau ein* Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}^{\alpha_0}$ auf $(\Omega, \mathcal{A})$ mit den Eigenschaften

(a) Für alle $i_0 \in \Omega_0$ gilt $\mathbb{P}^{\alpha_0}(X_0 = i_0) = \alpha_0(i_0)$,

(b) Für alle $n \geq 0$ und $i_k \in \Omega_k$ mit $k \leq n+1$ gilt

$$\mathbb{P}^{\alpha_0}(X_{n+1} = i_{n+1} \mid X_0 = i_0, \ldots, X_n = i_n) = \alpha_{n+1|i_0,\ldots,i_n}(i_{n+1}),$$

siehe auch [2, S.60].

Eigenschaft (b) in obigem Einschub schaut der Markoveigenschaft sehr ähnlich. Angenommen wir haben eine stochastische Matrix $M = (p_{ij})_{i,j \in S}$ und eine (Start)Verteilung α_0 auf einem Zustandsraum S gegeben. Wir betrachten den unendlichen Produkt-Ereignisraum $(\Omega, \mathcal{A}) = \left(\prod_{n \geq 0} S, \bigotimes_{n \geq 0} \mathcal{P}(S)\right)$ und setzen

$$\alpha_{n+1|i_0,\ldots,i_n}(i_{n+1}) = p_{i_n i_{n+1}}$$

für $n \geq 0$ und $i_0, \ldots, i_{n+1} \in S$. Da es sich hierbei um Wahrscheinlichkeitsfunktionen auf S handelt, existiert nach obigem Einschub zu der Startverteilung α_0 genau ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}^{\alpha_0}$ auf $(\Omega, \mathcal{A})$ derart, dass die Projektionen $X_n : (\omega_k)_{k \geq 0} \mapsto \omega_n$ von

$\prod_{n\geq 0} S$ nach S eine Markovkette zu $M = (p_{ij})_{i,j\in S}$ und α_0 beschreiben. Wir sprechen dann von sogenannten *kanonischen* Markovketten. Im Folgenden können wir o.B.d.A. nur solche betrachten.
Wollen wir explizit auf eine Startverteilung α_0 hinweisen, kennzeichnen wir das Wahrscheinlichkeitsmaß durch $\mathbb{P}^{\alpha_0}$. Insbesondere für $\alpha_0 = \delta_i$, das heißt man startet sicher im Zustand i, schreiben wir kurz $\mathbb{P}^i$.
Da X_n die n-te Projektion ist, gilt für Mengen $A \in \mathcal{A} = \bigotimes_{n\geq 0} \mathcal{P}(S)$

$$A = \{(X_0, X_1, X_2, \dots) \in A\}.$$

2.2 Die verallgemeinerte Markov-Eigenschaft

Die Markov-Eigenschaft in 2.1.1 lässt sich zu folgender allgemeineren Aussage verschärfen:

Satz 2.2.1. *Ist $(X_n)_{n\geq 0}$ eine Markovkette zu M und α_0, so gilt für alle $n \geq 0$, $A \in \mathcal{A} = \mathcal{P}(S)^{\otimes \mathbb{N}_0}$, $B \subseteq S^n$, und $i \in S$*

$$\begin{aligned}\mathbb{P}^{\alpha_0}((X_n, X_{n+1}, \dots) \in A \mid (X_0, \dots, X_{n-1}) \in B, X_n = i) &= \mathbb{P}^i(A) \\ &= \mathbb{P}^i((X_0, X_1, X_2, \dots) \in A).\end{aligned} \tag{2.3}$$

Außerdem gilt für $k \in \mathbb{N}$, $A_1, \dots, A_k, B_1, \dots, B_n$ nichtleere Teilmengen von S

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(X_{n+k} \in A_k, \dots, X_{n+1} \in A_1 \mid X_n = i, X_{n-1} \in B_1, \dots, X_0 \in B_n) \\ &= \sum_{j_1\in A_1} \cdots \sum_{j_k \in A_k} p_{ij_1} p_{j_1 j_2} \cdots p_{j_{k-1} j_k}.\end{aligned} \tag{2.4}$$

Beweis. Wie in obiger Überlegung sei o.B.d.A. $(\Omega, \mathcal{A}) = (S^{\mathbb{N}_0}, \mathcal{P}(S)^{\otimes \mathbb{N}_0})$ und X_n die n-te Projektion. Für beliebige $k \geq 0$ und $i_0, \dots, i_k \in S$ ergibt die Multiplikationsformel zusammen mit der Markov-Eigenschaft

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}^{\alpha_0}((X_0, \dots, X_{n-1}) \in B, X_n = i, X_{n+j} = i_j \text{ für } 0 \leq j \leq k) \\ &= \sum_{(j_0,\dots,j_{n-1})\in B} \alpha_0(j_0)\, p_{j_0 j_1} \cdots p_{j_{n-1} i} \cdot \delta_{i,i_0} \cdot p_{i_0 i_1} \cdots p_{i_{k-1} i_k} \\ &= \mathbb{P}^{\alpha_0}((X_0, \dots, X_{n-1}) \in B, X_n = i)\, \mathbb{P}^i(X_j = i_j \text{ für } 0 \leq j \leq k).\end{aligned}$$

Daraus folgt (2.3) für Mengen vom Typ $A = \{X_j = i_j \text{ für } 0 \leq j \leq k\}$. Da diese Mengen (zusammen mit $\emptyset$) ein Erzeugendensystem von $\mathcal{A}$ bilden, das abgeschlossen unter Durchschnitten ist, folgt aus dem Eindeutigkeitssatz für Maße, dass die Aussage auch allgemein gilt.
Behauptung (2.4) zeigt man völlig analog. Man kann auch hier o.B.d.A. annehmen, dass $A_j = \{i_j\}$, da $\mathbb{P}$ σ-additiv ist. $\square$

Anmerkung. Die verallgemeinerte Markov-Eigenschaft 2.3 besagt folgendes: Bei bekanntem gegenwärtigen Zustand „vergisst" die Markov-Kette die Vergangenheit und die Zeit und startet „neugeboren".

Wir werden nun sehen, dass die Bezeichnung k-Schritt-Übergangswahrscheinlichkeit für $p_{ij}^{(k)}$ gerechtfertigt ist.

Korollar 2.2.2. *Für $n, k \in \mathbb{N}_0$, sowie i und j Elemente von S gilt*

$$\mathbb{P}(X_{n+k} = j \mid X_n = i) = p_{ij}^{(k)}. \tag{2.5}$$

Außerdem ist M^k eine stochastische Matrix.

Beweis. Wir verwenden (2.4) mit $A_k = \{j\}$ und $A_l = S$ für $1 \le l \le k-1$ und erhalten

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_{n+k} = j \mid X_n = i) &= \mathbb{P}(X_{n+k} = j, X_{n+k-1} \in S, \dots, X_{n+1} \in S \mid X_n = i) \\ &= \sum_{j_1 \in S} \cdots \sum_{j_{k-1} \in S} p_{ij_1} p_{j_1 j_2} \cdots p_{j_{k-1} j} = p_{ij}^{(k)}.\end{aligned}$$

Es bleibt zu zeigen, dass M^k eine stochastische Matrix ist. Da die Ereignisse $X_{n+k} = j$ für $j \in S$ disjunkt sind und ihre Vereinigung das Ereignis Ω ergibt, folgt aus der Additivität

$$\sum_{j \in S} p_{ij}^{(k)} = \sum_{j \in S} \mathbb{P}(X_{n+k} = j \mid X_n = i) = \mathbb{P}(\Omega \mid X_n = i) = 1.$$

$\square$

3 Langzeitverhalten im endlichen Fall

Beim Studium des Langzeitverhaltens einer Markovkette geht es darum, das Verhalten von α_n, das heißt der Verteilung von X_n, für große Werte von n zu untersuchen. Wir werden zuerst auf den Spezialfall eines endlichen Zustandsraumes eingehen und dann den allgemeineren Fall betrachten.

3.1 Der Ergodensatz für endliche Markovketten

Die Verteilung von X_n hängt folgendermaßen von der Übergangsmatrix M und der Startverteilung α_0 ab:

Satz 3.1.1. *Sei $(X_n)_{n\geq 0}$ eine Markovkette zu M und α_0. Dann gilt*

$$\alpha_n = \alpha_0 \cdot M^n, \tag{3.1}$$

wobei $\alpha_n = (\mathbb{P}(X_n = i) : i \in S)$ als Zeilenvektor aufzufassen ist.

Beweis. Die Formel von der totalen Wahrscheinlichkeit liefert

$$\mathbb{P}(X_n = j) = \sum_{i \in S} \mathbb{P}(X_n = j \mid X_0 = i) \cdot \mathbb{P}(X_0 = i) = \sum_{i \in S} p_{ij}^{(n)} \cdot \mathbb{P}(X_0 = i)\,.$$

$\square$

Im Fall des endlichen Zustandsraumes $S = \{1, 2, \ldots, s\}$ definieren wir

$$W = \left\{ x = (x_1, \ldots, x_s) \in \mathbb{R}^s : x_1 \geq 0, \ldots, x_s \geq 0, \sum_{j=1}^{s} x_j = 1 \right\}$$

als die Menge aller möglichen *Wahrscheinlichkeitsvektoren* im $\mathbb{R}^s$. Nun werden wir den Ergodensatz für endliche Markovketten formulieren und beweisen.

Satz 3.1.2. *Es sei $(X_n)_{n\geq 0}$ eine Markovkette mit endlichem Zustandsraum S. Für mindestens ein $k \geq 1$ seien alle Einträge der k-Schritt-Übergangsmatrix M^k strikt positiv. Dann existiert für alle $j \in S$ der Limes*

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \alpha_\infty(j) > 0 \tag{3.2}$$

unabhängig von der Wahl des Startpunktes $i \in S$ und der Limes α_∞ ist die einzige Wahrscheinlichkeitsfunktion auf S mit

$$\sum_{i \in S} \alpha_\infty(i)\, p_{ij} = \alpha_\infty(j) \quad \text{für alle } j \in S. \tag{3.3}$$

Anmerkung. Fasst man α_∞ als Wahrscheinlichkeitsvektor auf, so kann man Gleichung (3.3) in der Form $\alpha_\infty = \alpha_\infty M$ schreiben, das heißt die Limesverteilung im Ergodensatz ist ein linker Eigenvektor von M zum Eigenwert 1.

Beweis. Da S endlich ist, können wir o.B.d.A. annehmen, dass $S = \{1, 2, \ldots, s\}$ für ein $s \geq 2$. Es sei $||x||_1 = \sum_{j=1}^{s} |x_j|$ die Summenbetragsnorm von $x \in \mathbb{R}^s$. Für Wahrscheinlichkeitsfunktionen x und y auf S, die wir als Vektoren in W auffassen können, gilt nun

$$\|xM - yM\|_1 = \sum_{j=1}^{s} \left| \sum_{i=1}^{s} (x_i - y_i) p_{ij} \right| \leq \sum_{i=1}^{s} |x_i - y_i| \cdot \underbrace{\sum_{j=1}^{s} p_{ij}}_{=1} .$$

Somit gilt die Ungleichung

$$\|xM - yM\|_1 \leq \|x - y\|_1 \tag{3.4}$$

für jede stochastische Matrix M. Wir werden nun zeigen, dass sich diese Ungleichung zu einer strikten Ungleichung verschärfen lässt, wenn wir M durch M^k ersetzen.
Nach Voraussetzung existiert ein $\delta > 0$ mit $p_{ij}^{(k)} \geq \frac{\delta}{|S|} = \frac{\delta}{s}$ für alle $i, j \in S$. Wir können annehmen, dass $\delta < 1$, da wir δ beliebig klein wählen können. Es sei U die stochastische $s \times s$-Matrix, deren Einträge identisch gleich s^{-1} sind. Es gilt also $M^k \geq \delta U$ elementweise. Die durch

$$Q = \frac{1}{1-\delta} \cdot \left(M^k - \delta U \right) \tag{3.5}$$

definierte Matrix ist folglich ebenfalls eine stochastische Matrix: Ihre Einträge sind nicht negativ wegen $M^k \geq \delta U$ und für $i \in S$ gilt

$$\sum_{j=1}^{s} Q_{ij} = \frac{1}{1-\delta} \left(\underbrace{\sum_{j=1}^{s} p_{ij}^{(k)}}_{=1} - \delta \underbrace{\sum_{j=1}^{s} \frac{1}{s}}_{=1} \right) = 1.$$

Aus (3.5) folgt

$$M^k = \delta U + (1-\delta) Q$$

und wegen der Linearität der Matrizenmultiplikation und den Normeigenschaften von $\| \, . \, \|_1$ erhalten wir die Ungleichung

$$\|xM^k - yM^k\|_1 \leq \delta \underbrace{\|xU - yU\|_1}_{(*)} + (1-\delta) \underbrace{\|xQ - yQ\|_1}_{(**)} .$$

Der erste Ausdruck $(*)$ verschwindet, da $xU = yU$, denn für alle $j \in S$ gilt

$$(xU)_j = \sum_{i=1}^{s} \frac{x_i}{s} = \frac{1}{s} = \sum_{i=1}^{s} \frac{y_i}{s} = (yU)_j .$$

Für $(**)$ verwenden wir Ungleichung (3.4) für Q anstelle von M und erhalten

$$\|xM^k - yM^k\|_1 \leq (1-\delta)\|x-y\|_1. \tag{3.6}$$

Es bezeichne $m = \lfloor \frac{n}{k} \rfloor$ den ganzzahligen Anteil von $\frac{n}{k}$. Durch Anwendung von (3.4) auf xM^{km}, yM^{km} und die stochastische Matrix M^{n-km}, folgt

$$\|xM^n - yM^n\|_1 = \| \left(xM^{km} - yM^{km}\right) M^{n-km}\|_1 \overset{3.4}{\leq} \| (x-y)\, M^{km}\|_1,$$

sowie durch wiederholtes Anwenden von (3.6)

$$\begin{aligned} \| (x-y)\, M^{km}\|_1 &= \|\big(xM^{k(m-1)} - yM^{k(m-1)}\big)\, M^k\|_1 \\ &\leq (1-\delta)\| (x-y)\, M^{k(m-1)}\|_1 \overset{3.6}{\leq} \cdots \\ &\leq (1-\delta)^m \,\|x-y\|_1. \end{aligned}$$

Wegen der Dreiecksungleichung gilt $\|x-y\|_1 \leq 2$ und wir erhalten schließlich die Ungleichung

$$\|xM^n - yM^n\|_1 \leq 2(1-\delta)^m. \tag{3.7}$$

Für einen beliebigen Vektor $\alpha_0 \in W$ betrachten wir die Folge $\alpha_n = \alpha_0 M^n$. Die Menge W ist abgeschlossen im $\mathbb{R}^s$, denn für eine beliebige konvergente Folge $a_n \in W$ kann mit Hilfe der Limeseigenschaften leicht überprüft werden, dass ihr Grenzwert a wieder in W liegt. Damit ist die Menge W als abgeschlossene Teilmenge der kompakten Menge $[0,1]^s$ selbst kompakt. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß existiert eine Teilfolge (n_l), für die $\alpha_0 M^{n_l}$ gegen einen Wahrscheinlichkeitsvektor α_∞ konvergiert.
Aus der Stetigkeit der Abbildung M folgt

$$\lim_{l\to\infty} \alpha_0 M^{n_l+1} = \lim_{l\to\infty} (\alpha_0 M^{n_l}) M = \alpha_\infty M$$

und die Teilfolgen $\alpha_0 M^{n_l}$ und $\alpha_0 M^{n_l+1}$ besitzen denselben Grenzwert, denn wegen (3.7) gilt

$$\|\alpha_0 M^{n_l} - \alpha_0 M^{n_l+1}\|_1 = \|\alpha_0 M^{n_l} - (\alpha_0 M)\, M^{n_l}\|_1 \leq 2(1-\delta)^{\lfloor \frac{n_l}{k} \rfloor} \xrightarrow{l\to\infty} 0.$$

Folglich ist $\alpha_\infty = \alpha_\infty M$ und α_∞ erfüllt

$$\alpha_\infty(j) = \left(\alpha_\infty M^k\right)_j = \sum_{i=1}^{s} \alpha_\infty(i) p_{ij}^{(k)} \geq \frac{\delta}{s} > 0 \quad \text{für alle } j \in S.$$

Nochmalige Anwendung von (3.7) liefert nun

$$\|\alpha_0 M^n - \alpha_\infty\|_1 = \|\alpha_0 M^n - \alpha_\infty M^n\|_1 \leq 2(1-\delta)^{\lfloor \frac{n}{k} \rfloor} \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

woraus folgt, dass $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha_\infty$. Wir wollen nun die Eindeutigkeit zeigen: Angenommen β_∞ ist ein anderer Wahrscheinlichkeitsvektor mit $\beta_\infty = \beta_\infty M$. Dann gilt

$$\beta_\infty = \beta_\infty M = \cdots = \beta_\infty M^n \xrightarrow{n\to\infty} \alpha_\infty$$

und somit $\beta_\infty = \alpha_\infty$. Schlussendlich gilt für die spezielle Wahl $\alpha_0 = \delta_i$ für ein $i \in S$, dass

$$(\alpha_0 M^n)_j = \sum_{k=1}^{s} \delta_k \cdot p_{kj}^{(n)} = p_{ij}^{(n)}$$

und folglich

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \alpha_\infty(j) > 0,$$

womit alle Behauptungen bewiesen wären. □

Wir illustrieren die gezeigte Konvergenz anhand des Beispiels, das wir in Abschnitt 1 als Motivation betrachtet haben.

Beispiel. Es sei $S = \{1, 2, 3\}$ und die Übergangsmatrix durch die stochastische Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben (siehe auch Abbildung 1). Es gilt

$$M^3 = \frac{1}{216}\begin{pmatrix} 111 & 75 & 30 \\ 110 & 86 & 20 \\ 90 & 90 & 36 \end{pmatrix}$$

und damit hat M^3 nur positive Einträge. Die lineare Gleichung $\alpha_\infty M = \alpha_\infty$ hat die Lösung $\alpha_\infty = \begin{pmatrix} 1/2 & 3/8 & 1/8 \end{pmatrix}$. Aus dem Ergodensatz 3.1.2 folgt, dass α_∞ die einzige Verteilung mit dieser Eigenschaft ist und

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^n \xrightarrow{n\to\infty} \begin{pmatrix} 1/2 & 3/8 & 1/8 \\ 1/2 & 3/8 & 1/8 \\ 1/2 & 3/8 & 1/8 \end{pmatrix}.$$

Korollar 3.1.3. *In der Situation des Ergodensatzes 3.1.2 ist die Konvergenz von $\alpha_n = \alpha_0 M^n$ gegen den Grenzwert α_∞ exponentiell schnell.*

Beweis. Wir verwenden wieder die Ungleichung (3.7) und erhalten

$$\|\alpha_n - \alpha_\infty\|_1 = \|\alpha_0 M^n - \alpha_\infty M^n\|_1 \leq 2(1-\delta)^{\lfloor \frac{n}{k} \rfloor}.$$

Da $\lfloor \frac{n}{k} \rfloor \geq \frac{n}{k} - 1$ und $0 < (1-\delta) < 1$, folgt mit $c = \log\left((1-\delta)^{-\frac{1}{k}}\right)$

$$\|\alpha_n - \alpha_\infty\|_1 \leq \frac{2}{1-\delta}\left((1-\delta)^{-\frac{1}{k}}\right)^{-n} = \frac{2}{1-\delta}e^{-cn}.$$

□

Korollar 3.1.4. *In der Situation von Satz 3.1.2 gilt für alle $i \in S$*

$$\sup_{A\in\mathcal{A}} \left|\mathbb{P}^i((X_n, X_{n+1}, \dots) \in A) - \mathbb{P}^{\alpha_\infty}(A)\right| \xrightarrow{n\to\infty} 0, \tag{3.8}$$

das heißt unabhängig von der Wahl des Startpunktes i ist die Markovkette nach langer Zeit nahezu stationär.

Beweis. Für jedes $A \in \mathcal{A}$ folgt mit der Formel von der totalen Wahrscheinlichkeit und der verallgemeinerten Markov-Eigenschaft (2.3)

$$\begin{aligned}\mathbb{P}^i((X_n, X_{n+1}, \dots) \in A) &= \sum_{j\in S} \mathbb{P}^i((X_n, X_{n+1}, \dots) \in A \mid X_n = j)\, \mathbb{P}^i(X_n = j) \\ &= \sum_{j\in S} \mathbb{P}^j(A)\, \mathbb{P}^i(X_n = j)\,.\end{aligned}$$

Ebenso gilt

$$\mathbb{P}^{\alpha_\infty}(A) = \sum_{j\in S} \mathbb{P}^j(A)\, \alpha_\infty(j).$$

Insgesamt folgt also

$$\begin{aligned}\left|\mathbb{P}^i((X_n, X_{n+1}, \dots) \in A) - \mathbb{P}^{\alpha_\infty}(A)\right| &= \left|\sum_{j\in S} \big(\mathbb{P}^i(X_n = j) - \alpha_\infty(j)\big)\, \mathbb{P}^j(A)\right| \\ &\le \sum_{j\in S} \left|\mathbb{P}^i(X_n = j) - \alpha_\infty(j)\right|\end{aligned}$$

und der letzte Ausdruck strebt wegen Satz 3.1.2 für $n \to \infty$ gegen 0. □

Anmerkung. Verwendet man α_∞ als Startverteilung, dann ist die Markovkette in folgendem Sinne stationär

$$\mathbb{P}^{\alpha_\infty}((X_n, X_{n+1}, \dots) \in A) = \mathbb{P}^{\alpha_\infty}(A) \tag{3.9}$$

für alle $A \in \mathcal{A}$ und $n \geq 0$. Denn aus (3.1) und $\alpha_\infty M = \alpha_\infty$ folgt

$$\mathbb{P}^{\alpha_\infty}(X_n = j) = (\alpha_\infty M^n)_j = \alpha_\infty(j).$$

Daraus erhalten wir (vergleiche auch mit dem obigen Beweis)

$$\mathbb{P}^{\alpha_\infty}((X_n, X_{n+1}, \dots) \in A) = \sum_{j\in S} \mathbb{P}^j(A)\, \underbrace{\mathbb{P}^{\alpha_\infty}(X_n = j)}_{\alpha_\infty(j)} = \mathbb{P}^{\alpha_\infty}(A).$$

Wir führen nun den Begriff eines asymptotischen Ereignisses ein.

Definition 3.1.5. Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(X_k)_{k\geq 0}$ eine Folge von Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{A})$ mit Werten in Ereignisräumen $(\Omega_k, \mathcal{A}_k)$. Ein Ereignis $A \in \mathcal{A}$ heißt *asymptotisch* für $(X_k)_{k\geq 0}$, wenn für alle $n \geq 0$ ein Ereignis $B_n \in \bigotimes_{k\geq n} \mathcal{A}_k$ existiert mit

$$A = \{(X_n, X_{n+1}, \dots) \in B_n\} \tag{3.10}$$

Die σ-Algebra aller asymptotischen Ereignisse wird mit $\mathcal{T}(X_k : k \geq 0)$ bezeichnet und heißt *asymptotische* oder *terminale σ-Algebra*.

In unserem Fall ist $(\Omega, \mathcal{A}) = (S^{\mathbb{N}_0}, \mathcal{P}(S)^{\otimes \mathbb{N}_0})$, X_k die k-te Projektion und $\mathcal{A}_k = \mathcal{P}(S)$ für alle $k \geq 0$. Zum Abschluss dieses Abschnittes gehen wir noch auf eine interessante Konsequenz der asymptotischen Stationarität 3.1.4 ein. Für asymptotische Ereignisse der Markovkette gilt ein Null-Eins-Gesetz, das sogenannte *Null-Eins-Gesetz von Orey*.

Korollar 3.1.6. *In der Situation von Satz 3.1.2 gilt*

$$\mathbb{P}^i(A) = \mathbb{P}^{\alpha_\infty}(A) = 0 \text{ oder } 1 \tag{3.11}$$

für alle A in der terminalen σ-Algebra $\mathcal{T}(X_n : n \geq 0)$ und alle $i \in S$.

Beweis. Im Laufe des Beweises werden wir für $\mathcal{T}(X_n : n \geq 0)$ abkürzend einfach nur $\mathcal{T}$ schreiben. Es sei $A \in \mathcal{T} \subseteq \mathcal{A}$. Nach obiger Definition 3.1.5 gibt es dann zu jedem $n \geq 0$ ein $B_n \in \bigotimes_{k \geq n} \mathcal{P}(S)$ mit

$$A = \{(X_n, X_{n+1}, \dots) \in B_n\} = S^n \times B_n. \tag{3.12}$$

Die letzte Gleichheit gilt, da es sich bei den X_n um die n-ten Projektionen handelt und

$$\{(X_n, X_{n+1}, \dots) \in B_n\} = \{(X_0, X_1, \dots, X_n, X_{n+1}, \dots) \in S^n \times B_n\}.$$

Weil (3.12) für alle $n \geq 0$ gilt, folgt bei fixiertem n für alle $k \geq 0$

$$A = S^n \times B_n = S^{n+k} \times B_{n+k} = S^n \times S^k \times B_{n+k}$$

und demnach $B_n = S^k \times B_{n+k}$. Damit hängen die Mengen B_n nur von $(X_n)_{n \geq k}$ ab und daher $B_n \in \mathcal{T}$.
Aufgrund der Stationarität (3.9) gilt

$$\mathbb{P}^{\alpha_\infty}(A) = \mathbb{P}^{\alpha_\infty}((X_n, X_{n+1}, \dots) \in B_n) = \mathbb{P}^{\alpha_\infty}(B_n)$$

und die asymptotische Stationarität 3.1.4 liefert nun

$$\begin{aligned} \left|\mathbb{P}^i(A) - \mathbb{P}^{\alpha_\infty}(A)\right| &= \left|\mathbb{P}^i((X_n, X_{n+1}, \dots) \in B_n) - \mathbb{P}^{\alpha_\infty}(B_n)\right| \\ &\leq \sup_{B \in \mathcal{A}} \left|\mathbb{P}^i((X_n, X_{n+1}, \dots) \in B) - \mathbb{P}^{\alpha_\infty}(B)\right| \xrightarrow{n \to \infty} 0, \end{aligned}$$

also $\mathbb{P}^i(A) = \mathbb{P}^{\alpha_\infty}(A)$ für alle $A \in \mathcal{T}$ und $i \in S$. Da auch $B_n \in \mathcal{T}$, folgt insbesondere $\mathbb{P}^i(B_n) = \mathbb{P}^{\alpha_\infty}(B_n)$ für alle n und i. Nach der verallgemeinerten Markov-Eigenschaft (2.3) bedeutet dies, dass

$$\mathbb{P}^{\alpha_\infty}(A) = \mathbb{P}^{\alpha_\infty}(B_n) = \mathbb{P}^{i_n}(B_n) = \mathbb{P}^{\alpha_\infty}(A \mid X_0 = i_0, \dots, X_n = i_n)$$

für alle $i_0, \dots, i_n \in S$. Das heißt A ist bezüglich $\mathbb{P}^{\alpha_\infty}$ unabhängig von Ereignissen vom Typ $H = \{X_0 = i_0, \dots, X_n = i_n\}$. Da diese Mengen (zusammen mit $\emptyset$) ein Erzeugendensystem von $\mathcal{A}$ bilden, das abgeschlossen unter Durchschnitten ist, folgt die Unabhängigkeit des Ereignisses A von der σ-Algebra $\mathcal{A}$, bzw. von der gesamten Folge $(X_i)_{i\geq 0}$ (siehe auch [2, S. 65]), und somit auch von A selbst. Daraus erhalten wir

$$\mathbb{P}^{\alpha_\infty}(A) = \mathbb{P}^{\alpha_\infty}(A \cap A) = \mathbb{P}^{\alpha_\infty}(A)^2$$

oder $\mathbb{P}^{\alpha_\infty}(A)\,(1 - \mathbb{P}^{\alpha_\infty}(A)) = 0$, woraus die Behauptung folgt. □

3.2 Irreduzibilität und Aperiodizität

Die Voraussetzung, um den Ergodensatz für endliche Markovketten 3.1.2 anwenden zu können, ist, dass es ein $k \geq 1$ gibt, sodass alle Einträge der k-Schritt Übergangsmatrix strikt positiv sind. Dieses k kann unter Umständen sehr groß sein. Es stellt sich also die Frage, wie man einer Markovkette „ansehen“ kann, ob sie die Voraussetzung des Ergodensatzes erfüllt. In diesem Zusammenhang sind die Begriffe Irreduzibilität und Aperiodizität wichtig.
Wir führen zuerst den Begriff der Erreichbarkeit ein:

Definition 3.2.1. Es seien i und j zwei Zustände aus S. Wir sagen „*j ist von i aus erreichbar*“ und schreiben hierfür $i \to j$, falls es ein $n \geq 0$ gibt mit $p_{ij}^{(n)} > 0$.
Gilt $i \to j$ und $j \to i$, so heißen i und j *kommunizierend* und wir schreiben hierfür $i \leftrightarrow j$.

Diese Definition ist recht anschaulich, vor allem, wenn man sich in Erinnerung ruft, dass $p_{ij}^{(n)}$ die n-Schritt Übergangswahrscheinlichkeit von i nach j darstellt. Auch das folgende Resultat sollte intuitiv klar sein.

Satz 3.2.2. *Die Kommunikations-Relation $\leftrightarrow$ beschreibt eine Äquivalenzrelation auf S. Insbesondere zerfällt die Zustandsmenge S dann in paarweise disjunkte Äquivalenzklassen von Zuständen. Wir nennen diese Klassen* Kommunikationsklassen.

Beweis. Die Relation $\leftrightarrow$ ist zunächst reflexiv, denn für alle $i \in S$ gilt $p_{ii}^{(0)} = 1 > 0$ und deshalb $i \leftrightarrow i$. Definitionsgemäß ist sie auch symmetrisch. Es bleibt die Transitivität zu zeigen: Dazu gelte $i \leftrightarrow j$ und $j \leftrightarrow k$ für beliebige $i, j, k \in S$. Es existieren dann $m, n \geq 0$ mit $p_{ij}^{(m)} > 0$ und $p_{jk}^{(n)} > 0$. Aus der Matrizengleichung $M^{m+n} = M^m M^n$ folgt

$$p_{ik}^{(m+n)} = \sum_{l\in S} p_{il}^{(m)} \cdot p_{lk}^{(n)} \geq p_{ij}^{(m)} \cdot p_{jk}^{(n)} \tag{3.13}$$

und somit $p_{ik}^{(m+n)} > 0$. Aus Symmetriegründen gilt analog $p_{ki}^{(m+n)} > 0$ für geeignete m, n. Insgesamt erhalten wir also $i \leftrightarrow k$ und somit ist auch die Transitivität gezeigt. □

Anmerkung und Beispiel. Ein Zustand $i \in S$ mit $p_{ii} = 1$ heißt *absorbierend*. Ein solcher Zustand kann, wenn einmal erreicht, nicht mehr „verlassen" werden. Deshalb bilden absorbierende Zustände einelementige Kommunikationsklassen.

Wir können nun definieren, was man unter einer irreduziblen Markovkette versteht.

Definition 3.2.3. Eine Markovkette $(X_n)_{n\geq 0}$ wird *irreduzibel* genannt, falls ihr Zustandsraum S unter der Kommunikations-Relation $\leftrightarrow$ nur eine einzige Kommunikationsklasse besitzt (den Raum S selbst), also jeder Zustand mit jedem kommuniziert. Andernfalls heißt die Markovkette *reduzibel*.

Häufig kann eine Markovkette nur nach einer ganz bestimmten Anzahl an Zeitschritten zu einem Zustand i zurückkehren. Die folgende Definition ist naheliegend:

Definition 3.2.4. Die mit $d(i)$ bezeichnete *Periode* eines Zustandes $i \in S$ ist der größte gemeinsame Teiler der Menge

$$J_i = \left\{ n \geq 1 : p_{ii}^{(n)} > 0 \right\}, \tag{3.14}$$

also $d(i) = ggT(J_i)$, falls $J_i \neq \emptyset$. Ist $p_{ii}^{(n)} = 0$ für alle $n \geq 1$, so setzt man $d(i) = \infty$.
Ein Zustand mit der Periode 1 heißt *aperiodisch*. Eine Markovkette heißt aperiodisch, wenn jeder Zustand $i \in S$ aperiodisch ist.

Das nachfolgende Resultat zeigt, dass im Falle einer irreduziblen Markovkette die Frage über die Periode der Zustände besonders einfach zu beantworten ist.

Satz 3.2.5. *Zustände in derselben Kommunikationsklasse besitzen die gleiche Periode. Insbesondere haben im Falle einer irreduziblen Markovkette alle Zustände $i \in S$ dieselbe Periode.*

Beweis. Es seien i und j zwei *verschiedene* Zustände aus S, die miteinander kommunizieren, das heißt $i \leftrightarrow j$. Folglich gibt es $m, n \geq 1$ mit $p_{ij}^{(m)} > 0$ und $p_{ji}^{(n)} > 0$. Mit Hilfe von Ungleichung (3.13) erhalten wir $p_{ii}^{(m+n)} > 0$ und $p_{jj}^{(m+n)} > 0$. Hieraus folgt zunächst, dass J_i und J_j nichtleer sind und somit $d(i) < \infty$, sowie $d(j) < \infty$.
Es sei nun $k \geq 1$ mit $p_{jj}^{(k)} > 0$, das heißt $d(j) \mid k$ bzw. $k \in J_j$. Zweimaliges Anwenden von Ungleichung (3.13) liefert

$$p_{ii}^{(m+k+n)} \overset{(3.13)}{\geq} p_{ij}^{(m+k)} \cdot p_{ji}^{(n)} \overset{(3.13)}{\geq} p_{ij}^{(m)} \cdot p_{jj}^{(k)} \cdot p_{ji}^{(n)} > 0$$

und somit $m + k + n \in J_i$, woraus $d(i) \mid m + k + n$ folgt. Wegen $p_{ii}^{(m+n)} > 0$ gilt aber auch $d(i) \mid m+n$ und folglich $d(i) \mid k$. Die Periode $d(i)$ ist somit gemeinsamer Teiler aller $k \in J_j$ und da $d(j)$ der größte gemeinsame Teiler ist, muss $d(i) \leq d(j)$ gelten. Wegen der Symmetrie gilt auch $d(j) \leq d(i)$ und wir erhalten insgesamt $d(i) = d(j)$.

Ist die Markovkette irreduzibel, dann gibt es nur eine einzige Kommunikationsklasse, das heißt jeder Zustand kommuniziert mit jedem. Alle Zustände haben demnach dieselbe Periode. □

Für eine irreduzible Markovkette ist Aperiodizität also leichter nachzuprüfen: Ein aperiodischer Zustand impliziert bereits die Aperiodizität der gesamten Kette.
Ziel dieses Abschnittes ist es zu zeigen, dass der Ergodensatz für endliche, irreduzible, aperiodische Markovketten gilt. Dazu benötigen wir noch einen Hilfssatz aus der Zahlentheorie. Eine Teilmenge der natürlichen Zahlen, die mit je zwei Zahlen auch deren Summe enthält und den größten gemeinsamen Teiler 1 besitzt, enthält alle bis auf endlich viele natürliche Zahlen.

Lemma 3.2.6. *Es sei $A \subseteq \mathbb{N}$ und 1 der größte gemeinsame Teiler von A. Für alle $m, n \in A$ gelte $m + n \in A$. Dann gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass $n \in A$ für jedes $n \geq n_0$.*

Beweis. Da 1 der größte gemeinsame Teiler der Menge A ist, gibt es nach einem Resultat der Zahlentheorie ein $k \in \mathbb{N}$ und $a_1, \ldots, a_k \in A$, sowie $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{Z}$ mit

$$\sum_{j=1}^{k} n_j a_j = 1.$$

Wir fassen die negativen und positiven Summanden zusammen und schreiben $1 = P - N$. Wegen der Abgeschlossenheit der Menge A unter Addition gilt $P, N \in A$. Nun setzen wir

$$n_0 = (N+1)(N-1), \quad \text{wobei o.B.d.A.} \quad N > 1.$$

Es sei $n \geq n_0$ beliebig. Aufgrund eines Resultats der Zahlentheorie (Division mit Rest) können wir n folgenderweise darstellen

$$n = qN + r \quad \text{mit} \quad 0 \leq r \leq N - 1.$$

Wir werden nun zeigen, dass $q \geq N - 1$ gilt. Angenommen es gälte $q < N - 1$. Dann wäre

$$n = qN + r < N(N-1) + (N-1) = (N-1)(N+1) = n_0$$

und somit $n < n_0$ was im Widerspruch zur Voraussetzung $n \geq n_0$ stünde. Daher gilt $q \geq N - 1$ und folglich $q - r \geq 0$.
Wegen $1 = P - N$ ergibt sich

$$n = qN + r \cdot \underbrace{(P - N)}_{=1} = (q - r)N + rP.$$

Wegen $q - r \geq 0$ und der Abgeschlossenheit von A gegenüber der Addition folgt

$$(q - r)N + rP \in A$$

und somit $n \in A$, was zu zeigen war. □

Wir haben nun alle Hilfsmittel zur Verfügung, um folgendes nützliches Resultat zu beweisen.

Satz 3.2.7. *Es sei $(X_m)_{m\geq 0}$ eine endliche und irreduzible Markovkette mit Übergangsmatrix M. Wenn die Markovkette einen aperiodischen Zustand $i \in S$ besitzt, dann existiert ein $k \geq 1$, sodass für jedes $n \geq k$ alle Einträge der n-Schritt Übergangsmatrix M^n strikt positiv sind.*
Somit gilt für endliche, irreduzible und aperiodische Markovketten der Ergodensatz 3.1.2.

Beweis. Da die Markovkette irreduzibel ist und einen aperiodischen Zustand besitzt, impliziert Satz 3.2.5 die Aperiodizität der gesamten Kette. Sei nun $i \in S$ ein solcher aperiodischer Zustand. Die Menge $J_i \subseteq \mathbb{N}$ ist abgeschlossen gegenüber Addition, denn für $m, n \in J_i$ gilt wegen Ungleichung (3.13)

$$p_{ii}^{(m+n)} \geq p_{ii}^{(m)} \cdot p_{ii}^{(n)} > 0$$

und somit $m + n \in J_i$. Wegen der Aperiodizität gilt außerdem $ggT(J_i) = d(i) = 1$ und wir können Lemma 3.2.6 auf J_i anwenden: Es gibt also ein $n_0(i) \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft

$$p_{ii}^{(n)} > 0 \quad \text{für alle} \quad n \geq n_0(i). \tag{3.15}$$

Es sei nun $j \in S$. Wegen der Irreduzibilität gilt $i \leftrightarrow j$, das heißt es existiert ein $k_{ij} \in \mathbb{N}_0$ mit

$$p_{ij}^{(k_{ij})} > 0. \tag{3.16}$$

Wir verwenden (3.15) und (3.16), sowie Ungleichung (3.13) und erhalten

$$p_{ij}^{(n+k_{ij})} \geq p_{ii}^{(n)} \cdot p_{ij}^{(k_{ij})} > 0 \quad \text{für jedes} \quad n \geq n_0(i). \tag{3.17}$$

Da die Markovkette endlich ist, sei o.B.d.A. der Zustandsraum $S = \{1, \dots, s\}$. Wir setzen

$$r_1 = \max_{i=1,\dots,s} n_0(i), \quad r_2 = \max_{1\leq i,j\leq s} k_{ij},$$

und zeigen, dass $k = r_1 + r_2 \geq 1$ das Verlangte leistet. Dazu verwenden wir für $i, j \in S$ Ungleichung (3.17) mit $n - k_{ij}$ statt n und erhalten

$$p_{ij}^{(n)} > 0, \quad \text{falls} \quad n \geq n_0(i) + k_{ij}.$$

Wegen der Wahl von k gilt somit

$$p_{ij}^{(n)} > 0 \quad \text{für alle} \quad i, j \in S \quad \text{und jedes} \quad n \geq k.$$

□

4 Langzeitverhalten im allgemeinen Fall

Wir haben uns im letzten Abschnitt ausreichend mit dem Fall eines endlichen Zustandsraumes S befasst und als Hauptresultat den Ergodensatz für endliche Markovketten erhalten. In diesem Abschnitt widmen wir uns dem allgemeineren Fall und lassen auch einen abzählbaren Zustandsraum S zu. Wir sind vor allem an der Existenzfrage einer stationären Verteilung interessiert. Der Begriff *positiv rekurrent* wird eine entscheidende Rolle spielen, um diese Frage zu beantworten.

4.1 Wiederkehrzeiten und Wiederkehrsatz

Wir haben bis jetzt noch nicht formal definiert, was man unter einer stationären Verteilung versteht. Das holen wir jetzt nach:

Definition 4.1.1. Eine Wahrscheinlichkeitsfunktion α auf S heißt stationär, wenn

$$\sum_{i \in S} \alpha(i) p_{ij} = \alpha(j) \quad \text{für alle} \quad j \in S \tag{4.1}$$

gilt. Fassen wir α als (möglicherweise unendlich langen) stochastischen Zeilenvektor auf und ist M die (möglicherweise unendlich große) Übergangsmatrix, können wir (4.1) wie gewohnt in der Form

$$\alpha = \alpha M \tag{4.2}$$

schreiben.

Unter einer stationären Verteilung ist die Markovkette im folgenden Sinne zeitlich invariant: Wählt man sie als Startverteilung, dann gilt

$$\mathbb{P}^{\alpha}((X_n, X_{n+1}, \dots) \in A) = \mathbb{P}^{\alpha}(A) = \mathbb{P}^{\alpha}((X_0, X_1, \dots) \in A) \tag{4.3}$$

für jedes A in der Produkt-σ-Algebra $\mathcal{A}$ und $n \geq 0$. Siehe dazu auch (3.9).

In der nachfolgenden Definition wird charakterisiert, wie lange es dauert von einem Zustand i zum ersten Mal in einen Zustand j zu gelangen.

Definition 4.1.2. Für beliebiges $j \in S$ heißt

$$\tau_j = \inf \{n \geq 1 : X_n = j\} \tag{4.4}$$

die *Eintrittszeit* in den Zustand j (mit der Vereinbarung $\inf \emptyset = \infty$, d.h. j wird nicht erreicht).
Startet die Markovkette im Zustand j spricht man von der *Wiederkehrzeit* nach j.

Die Eintrittszeit ist eine Abbildung

$$\tau_j : \Omega \to \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\},$$

also eine Zufallsvariable. Für alle $n \geq 1$ gilt offenbar

$$\{\tau_j = n\} = \{X_0 \in S, X_1 \neq j, \ldots, X_{n-1} \neq j, X_n = j\}\,, \tag{4.5}$$

das heißt $\{\tau_j = n\}$ hängt nur von $(X_0, \ldots, X_n)$ ab. Eine Abbildung mit solchen Eigenschaften wird *Stoppzeit* genannt.

Einschub (σ-Additivität des Erwartungswertes). Es sei $(Y_i)_{i \geq 0}$ eine Folge nichtnegativer, messbarer Zufallsgrößen, das heißt $Y_i \colon \Omega \to [0, \infty]$. Dann ist

$$Z_n = \sum_{i=0}^{n} Y_i$$

ebenfalls messbar, nichtnegativ und es gilt $Z_n \leq Z_{n+1}$ punktweise für alle $n \geq 0$. Definieren wir Z als den punktweisen Limes von Z_n, so ist Z ebenfalls messbar und nimmt Werte in $[0, \infty]$ an. Der Satz von der monotonen Konvergenz liefert nun

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{E}[Y_i] &= \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[\sum_{i=0}^{n} Y_i\right] = \lim_{n\to\infty} \int Z_n \, dP = \int Z \, dP = \mathbb{E}[Z] \\ &= \mathbb{E}\left[\sum_{i=0}^{\infty} Y_i\right], \end{aligned} \tag{4.6}$$

wobei die Erwartungswerte wegen der Nichtnegativität und Messbarkeit der Zufallsvariablen wohldefiniert sind.

Wenn α_0 eine beliebige Startverteilung ist, schreiben wir $\mathbb{E}^{\alpha_0}$ für den Erwartungswert bezüglich $\mathbb{P}^{\alpha_0}$.
Wir werden nun sehen, dass zwischen Wiederkehrzeiten und stationären Verteilungen ein Zusammenhang besteht und formulieren den *Wiederkehrsatz von Mark Kac.*

Satz 4.1.3. *Ist α eine stationäre Verteilung, so gilt für alle $j \in S$*

$$\alpha_j \cdot \mathbb{E}^j[\tau_j] = \mathbb{P}^\alpha(\tau_j < \infty)\,, \tag{4.7}$$

wobei $\alpha(j) =: \alpha_j$.

Beweis. Die Aussage ist richtig, falls $\alpha_j = \mathbb{P}^\alpha(X_0 = j) = 0$ für ein $j \in S$. Denn aus $\alpha_j = 0$ folgt wegen der Stationarität (4.3), dass auch $\mathbb{P}^\alpha(X_n = j) = 0$ für beliebige $n \geq 0$. Die Ereignisse $\{\tau_j = n\}$ sind disjunkt für verschiedene n und es gilt $\{\tau_j = n\} \subseteq \{X_n = j\}$, siehe (4.5). Daraus erhalten wir

$$\mathbb{P}^\alpha(\tau_j < \infty) = \mathbb{P}^\alpha\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{\tau_j = n\}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}^\alpha(\tau_j = n) = 0,$$

da $\mathbb{P}^\alpha(\tau_j = n) \leq \mathbb{P}^\alpha(X_n = j) = 0$ für beliebige $n \geq 1$.

Sei also für die weitere Betrachtung $\alpha_j > 0$ für $j \in S$ beliebig. Wir merken zuerst an, dass τ_j in der Form

$$\tau_j = \sum_{k \geq 0} 1_{\{\tau_j > k\}} \tag{4.8}$$

geschrieben werden kann. Denn nimmt τ_j einen Wert $n \geq 1$ an, so sind in der rechten Summe genau n Summanden ungleich Null (startet man bei $k = 0$ und erhöht k in jedem Schritt um 1, gilt $n > k$ genau n-mal).

Da $\mathbb{P}^\alpha(X_0 = j) > 0$ können wir die Definition des bedingten Erwartungswertes verwenden und erhalten

$$\mathbb{E}^\alpha\left[1_{\{X_0=j\}} \cdot \tau_j\right] = \mathbb{P}^\alpha(X_0 = j) \cdot \mathbb{E}^\alpha[\tau_j \mid X_0 = j] = \alpha_j \cdot \mathbb{E}^j[\tau_j] \,. \tag{4.9}$$

Hieraus folgt also

$$\begin{aligned}
\alpha_j \cdot \mathbb{E}^j[\tau_j] &\overset{(4.9)}{=} \mathbb{E}^\alpha\left[1_{\{X_0=j\}} \cdot \tau_j\right] \overset{(4.8)}{=} \mathbb{E}^\alpha\left[\sum_{k\geq 0} \overbrace{1_{\{X_0=j\}} \cdot 1_{\{\tau_j>k\}}}^{\geq 0}\right] \\
&\overset{(4.6)}{=} \sum_{k\geq 0} \mathbb{E}^\alpha\left[1_{\{X_0=j\}} \cdot 1_{\{\tau_j>k\}}\right] = \sum_{k\geq 0} \mathbb{P}^\alpha(X_0 = j, \tau_j > k) \,.
\end{aligned}$$

Man prüft leicht nach, dass die Mengen $\{\tau_j > k\}$ und $\{X_i \neq j \text{ für } 1 \leq i \leq k\}$ ineinander enthalten und damit identisch sind. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
\sum_{k\geq 0} \mathbb{P}^\alpha(X_0 = j, \tau_j > k) &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}^\alpha(X_0 = j, X_i \neq j \text{ für } 1 \leq i \leq k) \\
&\overset{(4.3)}{=} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}^\alpha(X_{n-k} = j, X_i \neq j,\, n-k+1 \leq i \leq n) \,,
\end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichheit aus der zeitlichen Invarianz (4.3) durch Zeitverschiebung um $n-k$ Zeitpunkte folgt. Das Ereignis in der letzten Summe besagt, dass „$n-k$ der letzte Zeitpunkt vor der Zeit n ist, zu dem sich die Markovkette im Zustand j befindet“. Für verschiedene $k \in \{0, \ldots, n-1\}$ sind diese Ereignisse disjunkt und ihre Vereinigung ist das Ereignis $\{\tau_j \leq n\}$, dass der Zustand j im Zeitintervall $\{1, \ldots, n\}$ überhaupt angenommen wird (analog wie für die Ereignisse $\{\tau_j = k\}$, siehe auch Anfang dieses Beweises).

Insgesamt erhalten wir wegen $\{\tau_j \leq n\} \nearrow \{\tau_j < \infty\}$

$$\alpha_j \cdot \mathbb{E}^j[\tau_j] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}^\alpha(\tau_j \leq n) = \mathbb{P}^\alpha(\tau_j < \infty) \,,$$

womit die Behauptung bewiesen wäre. □

4.2 Rekurrenz und Transienz

Wir wollen das Wiederkehrverhalten einer Markovkette mit gegebener Übergangsmatrix $M = (p_{ij})_{i,j\in S}$ in einem festen Zustand $j \in S$ weiter untersuchen. Kehrt die Kette mit Sicherheit wieder zurück? Um diese Frage beantworten zu können, müssen wir die Wahrscheinlichkeiten, in einen Zustand zurückzukehren, genauer definieren.

Definition 4.2.1. Für $n \geq 1$ und $i, j \in S$ bezeichnen wir mit

$$f_{ij}^{(n)} = \mathbb{P}^i(\tau_j = n) = \mathbb{P}^i(X_1 \neq j, \ldots, X_{n-1} \neq j, X_n = j) \tag{4.10}$$

die *Ersteintrittswahrscheinlichkeit* in j, also die Wahrscheinlichkeit bei einem (sicheren) Start im Zustand i nach genau n Schritten zum ersten Mal in den Zustand j zu gelangen.
Für $i = j$ ist es die Wahrscheinlichkeit nach n Schritten zum erste Mal nach i zurückzukehren.

Mit Hilfe der Rechenregel für Markovketten (2.4) können wir auch

$$f_{ij}^{(n)} = \sum_{i_1 \neq j} \cdots \sum_{i_{n-1} \neq j} p_{ii_1} p_{i_1 i_2} \cdots p_{i_{n-1} j} \tag{4.11}$$

schreiben. Daraus folgt $f_{ij}^{(n)} \leq p_{ij}^{(n)}$.
Es wurde schon einmal erwähnt, dass die Ereignisse $\{\tau_j = n\}$ für verschiedene n disjunkt sind. Wir erhalten:

Definition 4.2.2. Für $i, j \in S$ bezeichnen wir mit

$$f_{ij} = \mathbb{P}^i(\tau_j < \infty) = \mathbb{P}^i\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{\tau_j = n\}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} \tag{4.12}$$

die Wahrscheinlichkeit von i ausgehend zu irgendeiner (zufälligen) endlichen Zeit nach j zu kommen.
Für $i = j$ ist es die Wahrscheinlichkeit einer Rückkehr nach i zu irgendeiner endlichen Zeit.

Wir setzen für Zustände $i, j \in S$

$$f_{ij}^{\infty} = \mathbb{P}^i(X_n = j \text{ für unendlich viele } n) = \mathbb{P}^i(\limsup \{X_n = j\}) \,. \tag{4.13}$$

Das ist die Wahrscheinlichkeit von i ausgehend unendlich oft nach j zu gelangen. Für $i = j$ ist es die Wahrscheinlichkeit, unendlich oft nach i zurückzukehren.

Wir zeigen nun eine oftmals nützliche Rekursionsformel.

Satz 4.2.3. *Für $n \geq 1$ gilt die Rekursionsformel*

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)}. \tag{4.14}$$

Beweis. Wir zerlegen das Ereignis $\{X_n = j\}$ in disjunkte Teilereignisse: Sei dazu

$$A_k = \{X_n = j, X_k = j, X_{k-1} \neq j, \ldots, X_1 \neq j\} \quad \text{für} \quad 1 \leq k \leq n.$$

Diese Ereignisse sind für verschiedene k disjunkt und es gilt $A_k \subseteq \{X_n = j\}$, woraus $\bigcup_{k=1}^n A_k \subseteq \{X_n = j\}$ folgt. Die andere Inklusion gilt ebenfalls. Denn für ein $\omega \in \{X_n = j\}$ gibt es zwei Möglichkeiten: Der Zustand j wird vor n für ein $k \geq 1$ noch einmal angenommen. Dann wählen wir das kleinste solcher k und erhalten $\omega \in A_k$. Die zweite Möglichkeit ist, dass j vor n nicht angenommen wird, dann ist aber $\omega \in A_n$. Insgesamt erhält man also

$$\bigcup_{k=1}^n A_k = \{X_n = j\}$$

und mit Hilfe der Additivität von $\mathbb{P}^i$

$$\sum_{k=1}^n \mathbb{P}^i(A_k) = \mathbb{P}^i(X_n = j) = p_{ij}^{(n)}. \tag{4.15}$$

Aus der Multiplikationsformel und der verallgemeinerten Markoveigenschaft (2.3) folgt

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}^i(A_k) &= \mathbb{P}^i(X_1 \neq j, \ldots, X_{k-1} \neq j, X_k = j) \cdot \mathbb{P}^i(X_n = j \mid X_1 \neq j, \ldots, X_k = j) \\
&= f_{ij}^{(k)} \cdot \mathbb{P}^i(X_k \in S, \ldots, X_{n-1} \in S, X_n = j \mid X_1 \neq j, \ldots, X_k = j) \\
&= f_{ij}^{(k)} \cdot \mathbb{P}^j(X_{n-k} = j) = f_{ij}^{(k)} \cdot p_{jj}^{(n-k)}.
\end{aligned}$$

Setzt man das in (4.15) ein, so erhält man das gewünschte Resultat. □

Wir führen nun erzeugende Funktionen ein, indem wir für $i, j \in S$

$$P_{ij}(t) = \sum_{n=0}^\infty p_{ij}^{(n)} t^n \quad \text{für } |t| < 1 \quad \text{und} \quad F_{ij}(t) = \sum_{n=1}^\infty f_{ij}^{(n)} t^n \quad \text{für } |t| \leq 1$$

setzen. Es gilt folgender Zusammenhang.

Satz 4.2.4. *Für alle $i, j \in S$ gilt*

$$P_{ij}(t) = \delta_{ij} + F_{ij}(t) P_{jj}(t) \quad \textit{für } |t| < 1 \tag{4.16}$$

und speziell für $i = j$

$$P_{ii}(t) = \frac{1}{1 - F_{ii}(t)} \quad \textit{für } |t| < 1. \tag{4.17}$$

Beweis. Mit Hilfe der Cauchy-Produktformel für Reihen und (4.14) erhalten wir

$$\begin{aligned}
P_{ij}(t) &= \sum_{n=0}^\infty p_{ij}^{(n)} t^n = p_{ij}^{(0)} + \sum_{n=1}^\infty p_{ij}^{(n)} t^n \overset{(4.14)}{=} \delta_{ij} + \sum_{n=1}^\infty t^n \sum_{k=1}^n f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)} \\
&= \delta_{ij} + F_{ij}(t) P_{jj}(t).
\end{aligned}$$

□

Für $t = 1$ kann P_{ij} auch den Wert ∞ annehmen. Insbesondere das Verhalten von $P_{ii}(1)$ wird später noch wichtig sein. Folgende Definition lässt schon vermuten, weshalb.

Definition 4.2.5. Für $i, j \in S$ sei

$$G_{ij} = \sum_{n=0}^{\infty} p_{ij}^{(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}^i(X_n = j) \overset{(4.6)}{=} \mathbb{E}^i\left[\sum_{n=0}^{\infty} 1_{\{X_n=j\}}\right] \tag{4.18}$$

die erwartete Anzahl der Besuche in j, ausgehend vom Zustand i. Man nennt G auch (stochastische) *Green-Funktion*.

Wir werden nun mit Hilfe der Wahrscheinlichkeit f_{ii} das Rückkehrverhalten eines Zustandes $i \in S$ charakterisieren.

Definition 4.2.6. Ein Zustand $i \in S$ heißt

- *rekurrent*, falls $f_{ii} = 1$, der Zustand also fast sicher wieder besucht wird.
- *transient*, falls $f_{ii} < 1$.

Offensichtlich nimmt ein Zustand $i \in S$ genau eine der beiden Eigenschaften an – er ist entweder rekurrent oder transient.
Der nachfolgende Satz zeigt, dass wir das Wiederkehrverhalten genauso gut mit Hilfe der Green-Funktion G charakterisieren können. Es besteht auch ein Zusammenhang mit der Wahrscheinlichkeit f_{ii}^{∞} ($\rightarrowtail$ 4.13), unendlich oft zurückzukehren.

Satz 4.2.7. *Für jedes $i \in S$ besteht die Alternative:*

- *Der Zustand i ist rekurrent. Dann ist $f_{ii}^{\infty} = 1$ und*

$$G_{ii} = \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty. \tag{4.19}$$

- *Der Zustand i ist transient. Dann ist $f_{ii}^{\infty} = 0$ und*

$$G_{ii} = \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \frac{1}{1 - f_{ii}} < \infty. \tag{4.20}$$

Beweis. Sei $\sigma_i = \sup\{n \geq 0 \colon X_n = i\}$ der Zeitpunkt des *letzten* Aufenthalts in i. Wegen $X_0 = i$ ist σ_i wohldefiniert, eventuell ∞, falls der Zustand i „immer wieder“ (unendlich oft) besucht wird. Dann gilt erstens

$$1 - f_{ii}^{\infty} = \mathbb{P}^i(\sigma_i < \infty) \tag{4.21}$$

Denn links steht die Wahrscheinlichkeit, dass i nicht unendlich oft besucht wird und rechts die Wahrscheinlichkeit, dass σ_i nicht den Wert ∞ annimmt. Die beiden Wahrscheinlichkeit stimmen somit überein.
Für jedes $n \geq 0$ folgt zweitens aus der verallgemeinerten Markoveigenschaft (2.3)

$$\mathbb{P}^i(\sigma_i = n) = \mathbb{P}^i(X_n = i) \cdot \overbrace{\mathbb{P}^i(X_k \neq i \text{ für alle } k \geq 1)}^{\mathbb{P}^i(\tau_i=\infty)} = p_{ii}^{(n)}(1 - f_{ii}). \tag{4.22}$$

Denn es gilt $\{\sigma_i = n\} = \{X_n = i, X_k \neq i \text{ für } k > n\}$.
Summieren wir (4.22) über n und verwenden die erste Gleichheit (4.21), erhalten wir drittens

$$1 - f_{ii}^{\infty} = G_{ii}(1 - f_{ii}). \tag{4.23}$$

Im Falle der Rekurrenz gilt $f_{ii} = 1$. Aus der zweiten Gleichung (4.22) folgt, dass $\mathbb{P}^i(\sigma_i = n) = 0$ für alle $n \geq 0$ gilt und daher erhalten wir aus der ersten Gleichung (4.21) $f_{ii}^{\infty} = 1$. Da $f_{ii}^{\infty} = \mathbb{P}^i(\limsup\{X_n = i\})$, liefert der Satz von Borel-Cantelli $G_{ii} = \infty$.

Im Falle der Transienz gilt $f_{ii} < 1$ und daher $1 - f_{ii} \neq 0$. Aus der dritten Gleichung (4.23) folgt deshalb $G_{ii} < \infty$. Der Satz von Borel-Cantelli liefert $f_{ii}^{\infty} = 0$. Formen wir nun (4.23) um, erhalten wir die Beziehung zwischen G_{ii} und f_{ii}. $\square$

Für unsere weiteren Betrachtungen reicht der Rekurrenz-Begriff nicht aus. Wir wollen ihn weiter verfeinern. Der Ausdruck

$$\mathbb{E}^i[\tau_i] = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \mathbb{P}^i(\tau_i = n) = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ii}^{(n)}$$

beschreibt die mittlere Rückkehrzeit nach i bei Start in i. Wir definieren:

Definition 4.2.8. Ein rekurrenter Zustand $i \in S$ heißt

- *positiv rekurrent*, falls $\mathbb{E}^i[\tau_i] < \infty$, die mittlere Rückkehrzeit also endlich ist.
- *nullrekurrent*, falls $\mathbb{E}^i[\tau_i] = \infty$.

In der nachfolgenden Abbildung sehen wir noch einmal die verschiedenen Eigenschaften zusammengefasst, die ein Zustand i annehmen kann.

4.3 Klasseneigenschaften

Wir sprechen von einer *Klasseneigenschaft*, falls eine Eigenschaft von der Äquivalenzrelation $\leftrightarrow$ übertragen wird. Das heißt für Klasseneigenschaften gilt: Hat der Zustand i die Eigenschaft und kommuniziert i mit j, dann hat auch der Zustand j diese. Eine Klasseneigenschaft haben wir schon kennengelernt - die Periodizität ($\rightarrowtail$ 3.2.5).
Wir werden nun sehen, dass Rekurrenz und Transienz ebenfalls Klasseneigenschaften sind. Zuerst erinnern wir aber an Ungleichung (3.13). Für $m, n \geq 0$ und $i, j, k \in S$ gilt

$$p_{ik}^{(m+n)} \geq p_{ij}^{(m)} \cdot p_{jk}^{(n)}. \tag{4.24}$$

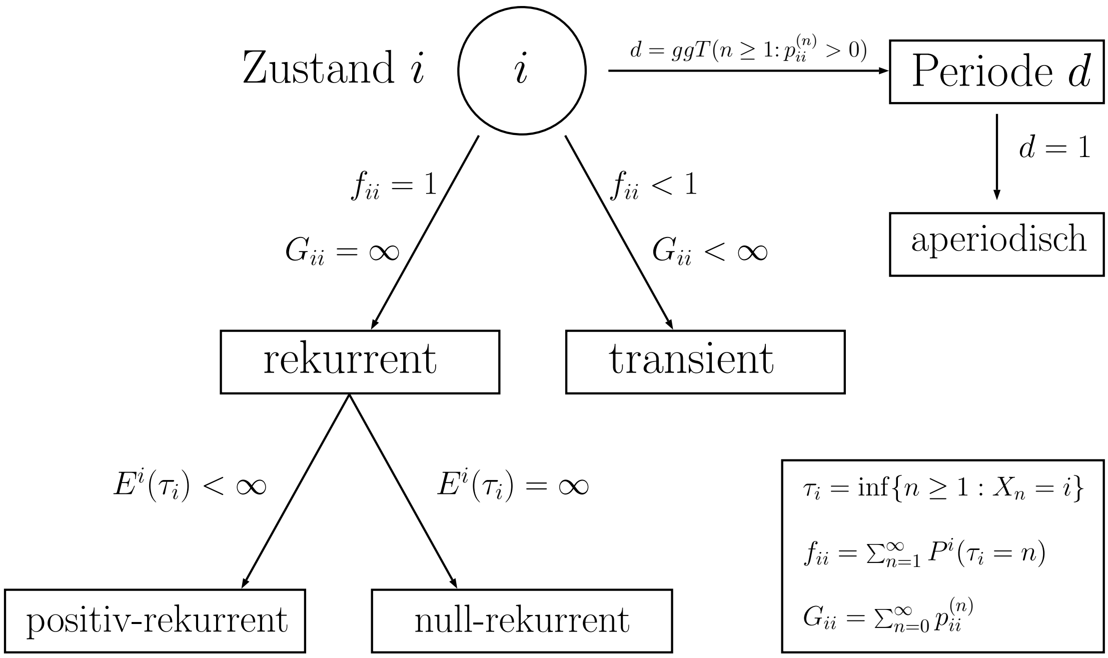

Abbildung 2: Die Klassifikation der Zustände auf einen Blick.

Satz 4.3.1. *Rekurrenz und Transienz sind Klasseneigenschaften, das heißt miteinander kommunizierende Zustände einer Markovkette sind entweder alle rekurrent oder alle transient.*

Beweis. Es seien $i, j \in S$ zwei kommunizierende Zustände, das heißt es existieren $m, l \geq 0$ mit $p_{ij}^{(m)} > 0$ und $p_{ji}^{(l)} > 0$. Sei $\gamma = p_{ij}^{(m)} \cdot p_{ji}^{(l)} > 0$. Dann folgt durch zweimaliges Anwenden von (4.24) für alle $n \geq 0$

$$\begin{aligned} p_{ii}^{(m+n+l)} &\geq p_{ij}^{(m)} p_{jj}^{(n)} p_{ji}^{(l)} = \gamma \cdot p_{jj}^{(n)} \quad \text{sowie} \\ p_{jj}^{(l+n+m)} &\geq p_{ji}^{(l)} p_{ii}^{(n)} p_{ij}^{(m)} = \gamma \cdot p_{ii}^{(n)}. \end{aligned} \tag{4.25}$$

Bilden wir auf beiden Seiten der Ungleichungen die Summe über n, erhalten wir

$$G_{ii} \geq \sum_{n=m+l}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(m+n+l)} \geq \gamma \cdot G_{jj} \quad \text{sowie} \tag{4.26}$$

$$G_{jj} \geq \sum_{n=m+l}^{\infty} p_{jj}^{(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} p_{jj}^{(l+n+m)} \geq \gamma \cdot G_{ii}, \tag{4.27}$$

wobei $G_{ij} = \sum_{n=0}^{\infty} p_{ij}^{(n)}$ die Green-Funktion aus Definition 4.2.5 beschreibt.

Ist der Zustand i nun rekurrent, so gilt $G_{ii} = \infty$. Aus der zweiten Ungleichung (4.27) folgt dann wegen $\gamma > 0$, dass auch $G_{jj} = \infty$. Damit ist auch j rekurrent.

Ist der Zustand i hingegen transient, so gilt $G_{ii} < \infty$. Aus der ersten Ungleichung (4.26) folgt $G_{jj} < \infty$ und somit ist auch j transient. □

Mit Hilfe des letzten Satzes erhalten wir eine noch allgemeinere Aussage zur Rekurrenz.

Satz 4.3.2. *Es sei $i \in S$ ein rekurrenter Zustand. Gilt $i \to j$ für einen Zustand $j \in S$, so gilt auch $j \to i$ und $f_{ji} = 1$. Insbesondere ist dann auch j rekurrent.*

Beweis. Da i rekurrent ist, gilt $f_{ii}^{\infty} = \mathbb{P}^i(\limsup\{X_n = i\}) = 1$. Wegen $i \to j$ gibt es ein $k \geq 0$, sodass $p_{ij}^{(k)} > 0$ erfüllt ist. Es gilt

$$\{X_k = j\} \cap \limsup\{X_n = i\} \subseteq \bigcup_{n>k} \{X_k = j, X_{k+1} \neq i, \ldots, X_{n-1} \neq i, X_n = i\}.$$

Denn für ein Element ω in der linken Menge gibt es nach Definition des Limes Superior für Mengenfolgen für beliebiges $m > k$ ein $n \geq m > k$ mit der Eigenschaft, dass $X_n(\omega) = i$. Wählen wir das kleinste solcher $n > k$, liegt somit ω in der rechten Menge. Falls ein Ereignis B fast sicher eintritt, gilt $\mathbb{P}(A \cap B) = P(A)$. Verwenden wir das, zusammen mit der σ-Subadditivität von Maßen und der verallgemeinerten Markoveigenschaft (2.3), erhalten wir

$$\begin{aligned}
p_{ij}^{(k)} &= \mathbb{P}^i(\{X_k = j\} \cap \limsup\{X_n = i\}) \\
&\leq \sum_{n>k} \mathbb{P}^i(X_k = j, X_{k+1} \neq i, \ldots, X_{n-1} \neq i, X_n = i) \\
&= \sum_{n>k} p_{ij}^{(k)} f_{ji}^{(n-k)} = p_{ij}^{(k)} \cdot f_{ji}.
\end{aligned}$$

Wegen $p_{ij}^{(k)} > 0$ gilt $f_{ji} = 1$.
Da insbesondere f_{ji} positiv ist, muss es ein $n \geq 1$ geben mit $f_{ji}^{(n)} > 0$. Wegen $p_{ji}^{(n)} \geq f_{ji}^{(n)}$ ist demnach auch $p_{ji}^{(n)} > 0$. Hieraus erhalten wir $j \to i$. Die Zustände i und j kommunizieren also. Da i rekurrent ist, ist nach dem letzten Satz auch j rekurrent. □

Es gilt sogar folgendes hilfreiches Resultat.

Satz 4.3.3. *Positive Rekurrenz und Nullrekurrenz sind Klasseneigenschaften, das heißt miteinander kommunizierende rekurrente Zustände sind entweder alle positiv rekurrent oder alle nullrekurrent.*

Beweis. Es seien i und j wieder zwei kommunizierende Zustände. Wir benutzen den Zusammenhang (4.17) der erzeugenden Funktionen P_{ii} und F_{ii} und erhalten

$$\lim_{t \nearrow 1} (1-t) \cdot P_{ii}(t) = \lim_{t \nearrow 1} \frac{1-t}{1 - F_{ii}(t)} = \frac{1}{F_{ii}'(1)} = \frac{1}{\mathbb{E}^i[\tau_i]} =: \lambda_i, \tag{4.28}$$

wobei wir ausgenutzt haben, dass F_{ii} die erzeugende Funktion von τ_i ist und die erste Ableitung von erzeugenden Funktionen an der Stelle 1 dem Erwartungswert entspricht. Somit ist ein Zustand i positiv rekurrent, falls $\lambda_i > 0$ und nullrekurrent, falls $\lambda_i = 0$.
Wir verwenden die für alle kommunizierenden Zustände geltenden Ungleichungen in (4.25) und erhalten für alle $n \geq 0$ und beliebiges $t \in (0, 1)$

$$\begin{aligned} p_{ii}^{(m+n+l)} \cdot t^{m+n+l} &\geq t^{m+l} \cdot \gamma \cdot p_{jj}^{(n)} t^n \quad \text{sowie} \\ p_{jj}^{(l+n+m)} \cdot t^{l+n+m} &\geq t^{m+l} \cdot \gamma \cdot p_{ii}^{(n)} t^n. \end{aligned}$$

Wie im vorigen Beweis liefert Summation über n und multiplizieren mit $(1 - t) > 0$ schließlich

$$\begin{aligned} (1-t) \cdot P_{ii}(t) &\geq t^{m+l} \cdot \gamma \cdot (1-t) \cdot P_{jj}(t) \quad \text{sowie} \\ (1-t) \cdot P_{jj}(t) &\geq t^{m+l} \cdot \gamma \cdot (1-t) \cdot P_{ii}(t) \quad \text{für } t \in (0,1). \end{aligned}$$

Mit Hilfe dieser Ungleichungen erhalten wir

$$\frac{1}{\gamma} \cdot \lim_{t \nearrow 1} (1-t) P_{jj}(t) \geq \lim_{t \nearrow 1} t^{m+l} \cdot (1-t) P_{ii}(t) \geq \gamma \cdot \lim_{t \nearrow 1} t^{2m+2l} \cdot (1-t) P_{jj}(t).$$

Dieser Zusammenhang liefert wegen (4.28)

$$\frac{1}{\gamma} \cdot \lambda_j \geq \lambda_i \geq \gamma \cdot \lambda_j \tag{4.29}$$

Hieraus erhalten wir wegen $\gamma > 0$: Ist i positiv rekurrent, so gilt $\lambda_i > 0$ und somit ist wegen $\lambda_j \geq \gamma \cdot \lambda_i > 0$ auch j positiv rekurrent. Ist hingegen i nullrekurrent, so gilt $\lambda_i = 0$ und somit auch $\lambda_j = 0$ wegen der obigen Ungleichung. □

Liegt eine irreduzible Markovkette vor, kommunizieren alle Zustände miteinander. Wir erhalten sofort aus dem bisher Gezeigten

Korollar 4.3.4. *Im Falle einer irreduziblen Markovkette haben alle Zustände dieselbe Periode. Die Zustände einer irreduziblen Markovkette sind alle entweder positiv rekurrent, nullrekurrent oder transient.*

4.4 Existenz stationärer Verteilungen

Wie schon einmal kurz am Anfang des Abschnittes erwähnt, spielt positive Rekurrenz eine entscheidende Rolle für die Existenz stationärer Verteilungen, also Verteilungen unter denen die Markovkette zeitlich invariant ist, siehe (4.3). Nachfolgender Satz beantwortet die Existenzfrage und gibt sogar Auskunft über die Gestalt der stationären Verteilung.

Satz 4.4.1. *Wenn $i \in S$ positiv rekurrent ist, dann existiert eine stationäre Verteilung α mit*

$$\alpha_i = \frac{1}{\mathbb{E}^i[\tau_i]} > 0. \tag{4.30}$$

Ist umgekehrt $\alpha_i > 0$ für eine stationäre Verteilung α, so ist i positiv rekurrent.

Beweis. Wir zeigen zuerst die zweite Aussage. Es sei α eine stationäre Verteilung mit $\alpha_i > 0$. Dann können wir im Wiederkehrsatz 4.1.3 durch α_i dividieren und erhalten

$$\mathbb{E}^i[\tau_i] = \frac{\mathbb{P}^\alpha(\tau_i < \infty)}{\alpha_i} \leq \frac{1}{\alpha_i} < \infty,$$

also ist i positiv rekurrent.

Es sei nun umgekehrt i positiv rekurrent, das heißt $\mathbb{E}^i[\tau_i] < \infty$. Wir betrachten für $j \in S$

$$\beta_j = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}^i(X_n = j, \tau_i \geq n)\,.$$

Wegen der σ-Additivität von $\mathbb{P}^i$ gilt

$$\beta_j = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}^i(X_n = j, \tau_i > n) + \mathbb{P}^i(X_n = j, \tau_i = n)\,.$$

Wegen (4.5) ist $\{X_n = j, \tau_i = n\} = \emptyset$, falls $i \neq j$ und $\{X_n = j, \tau_i = n\} = \{\tau_i = n\}$, falls $i = j$. Hieraus erhalten wir $\mathbb{P}^i(X_n = j, \tau_i = n) = \delta_{ij} \cdot f_{ii}^{(n)}$. Aus der Linearität der Summe (Summanden nicht negativ) und der Rekurrenz von i ($f_{ii} = 1$) folgt

$$\begin{aligned}
\beta_j &= \delta_{ij} + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}^i(X_n = j, \tau_i > n) \\
&= \mathbb{P}^i(X_0 = j, \tau_i > 0) + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}^i(X_n = j, \tau_i > n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}^i(X_n = j, \tau_i > n)\,,
\end{aligned}$$

wobei wir $\delta_{ij} = \mathbb{P}^i(X_0 = j, \tau_i > 0)$ geschrieben haben.
Aus dem Satz von Fubini-Tonelli folgt, dass wir die Summationsreihenfolge bei abzählbaren Summen mit nicht negativen Summanden vertauschen können. Wir erhalten für alle $k \in S$

$$(\beta M)_k = \sum_{j \in S} \beta_j \cdot p_{jk} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j \in S} \mathbb{P}^i(X_n = j, \tau_i > n) \cdot p_{jk}.$$

Für $n \geq 0$ gilt $\{\tau_i > n\} = \{X_t \neq i \text{ für } 1 \leq t \leq n\}$ (wobei $\{\tau_i > 0\} = \Omega$) und für $i \neq j \in S$ folgt aus der verallgemeinerten Markoveigenschaft (2.3)

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}^i(X_n = j, \tau_i > n, X_{n+1} = k) \\
&= \mathbb{P}^i(X_n = j, \tau_i > n) \cdot \mathbb{P}^i(X_{n+1} = k \mid \tau_i > n, X_n = j) \\
&= \mathbb{P}^i(X_n = j, \tau_i > n) \cdot \mathbb{P}^j(X_1 = k) = \mathbb{P}^i(X_n = j, \tau_i > n) \cdot p_{jk}.
\end{aligned}$$

Für $i = j$ ist die Gleichheit ebenfalls gültig, denn für $n \geq 1$ steht auf beiden Seiten 0 und für $n = 0$ auf beiden Seiten p_{ik}. Somit erhalten wir

$$\begin{aligned}(\beta M)_k &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j \in S} \mathbb{P}^i(X_n = j, \tau_i > n, X_{n+1} = k) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}^i(\tau_i > n, X_{n+1} = k) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}^i(\tau_i \geq n, X_n = k) = \beta_k,\end{aligned}$$

wobei wir für die zweite Gleichheit die Formel von der totalen Wahrscheinlichkeit bezüglich der Zerlegung $\{X_n = j\}$ verwendet haben.
Wir sind nun fast fertig, wir müssen nur noch auf die korrekte Normierung achten. Wieder mit dem Satz von Fubini-Tonelli und der Formel von der totalen Wahrscheinlichkeit erhalten wir

$$\sum_{j \in S} \beta_j = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j \in S} \mathbb{P}^i(X_n = j, \tau_i > n) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}^i(\tau_i > n) = \mathbb{E}^i[\tau_i] \,.$$

Wir setzen also $\alpha = \mathbb{E}^i[\tau_i]^{-1} \cdot \beta$. Hierbei handelt es sich um eine stationäre Verteilung, da

$$\alpha M = \mathbb{E}^i[\tau_i]^{-1} \cdot \beta M = \mathbb{E}^i[\tau_i]^{-1} \cdot \beta = \alpha$$

und α korrekt normiert ist. Außerdem gilt

$$\begin{aligned}\alpha_i &= \mathbb{E}^i[\tau_i]^{-1} \cdot \beta_i = \mathbb{E}^i[\tau_i]^{-1} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}^i(X_n = i, \tau_i > n) \\ &= \mathbb{E}^i[\tau_i]^{-1} \cdot \mathbb{P}^i(X_0 = i, \tau_i > 0) = \mathbb{E}^i[\tau_i]^{-1} \cdot \mathbb{P}^i(X_0 = i) = \mathbb{E}^i[\tau_i]^{-1} > 0,\end{aligned}$$

da nur der erste Term in der Summe $\neq 0$ ist. Somit haben wir eine stationäre Verteilung konstruiert, die die gewünschten Eigenschaften besitzt. □

Bei einer irreduziblen Markovkette erfüllt eine stationäre Verteilung eine Positivitätseigenschaft.

Satz 4.4.2. *Liegt eine irreduzible Markovkette vor und ist α eine stationäre Verteilung dieser Markovkette, so gilt*

$$\alpha_i > 0 \quad \textit{für alle } i \in S. \tag{4.31}$$

Beweis. Wir zerlegen S in $S_+ = \{i \in S \colon \alpha_i > 0\}$ und $S_0 = \{i \in S \colon \alpha_i = 0\}$. Da α eine Verteilung ist, ist $S_+ \neq \emptyset$. Wir wollen zeigen, dass $S_0 = \emptyset$. Angenommen $S_0 \neq \emptyset$. Dann gibt es ein $j_0 \in S_0$ mit $\alpha_{j_0} = 0$. Für jedes $j \in S_0$ gilt wegen der Stationarität

$$\sum_{i \in S} \alpha_i p_{ij} = \alpha_j = 0. \tag{4.32}$$

Da $\alpha_i > 0$ für alle $i \in S_+$ gilt, folgt $p_{ij} = 0$ für jedes $i \in S_+$ und $j \in S_0$. Damit gibt es aber keine Verbindung von S_+ nach S_0, was im Widerspruch zur Irreduzibilität steht. □

Im Falle der Irreduzibilität ist die stationäre Verteilung sogar eindeutig und hat eine spezielle Form.

Satz 4.4.3. *Im Falle einer irreduziblen Markovkette mit stationärer Verteilung α gilt*

$$\alpha_i = \frac{1}{\mathbb{E}^i[\tau_i]} \quad \text{für alle } i \in S. \tag{4.33}$$

Insbesondere ist α eindeutig bestimmt und alle Zustände $i \in S$ sind positiv rekurrent.

Beweis. Es sei α eine stationäre Verteilung der irreduziblen Markovkette. Da α eine Verteilung ist, gibt es ein $j \in S$ mit $\alpha_j > 0$. Nach der zweiten Aussage von Satz 4.4.1 ist dieses j positiv rekurrent. Da die Markovkette irreduzibel ist, sind somit alle Zustände positiv rekurrent, insbesondere gilt $\mathbb{E}^i[\tau_i] < \infty$ für alle $i \in S$.
Außerdem folgt aus der Irreduzibilität auf Grund von Satz 4.3.2, dass $f_{ij} = 1$ für alle $i, j \in S$. Hieraus erhalten wir mit Hilfe der Multiplikationsformel

$$\mathbb{P}^\alpha(\tau_i < \infty) = \sum_{j \in S} \mathbb{P}^j(\tau_i < \infty) \cdot \mathbb{P}^\alpha(X_0 = j) = \sum_{j \in S} f_{ji} \cdot \alpha_j = \sum_{j \in S} \alpha_j = 1,$$

für jedes $i \in S$. Damit folgt aus dem Wiederkehrsatz 4.1.3 direkt

$$\alpha_i = \frac{1}{\mathbb{E}^i[\tau_i]} \quad \text{für alle } i \in S.$$

Da dies unabhängig von der gewählten stationären Verteilung α gilt, ist die Verteilung eindeutig. $\square$

Wir fassen nun das bisher Gezeigte in einem abschließenden Resultat zusammen:

Korollar 4.4.4. *Es sei $(X_n)_{n \geq 0}$ eine irreduzible Markovkette. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. *Es existiert ein positiv rekurrenter Zustand $i \in S$.*
2. *Alle Zustände $i \in S$ sind positiv rekurrent.*
3. *Es existiert eine stationäre Verteilung α.*
4. *Es existiert genau eine stationäre Verteilung α.*

Ist eine dieser Aussagen, und somit alle, erfüllt, so gilt

$$\alpha_i = \frac{1}{\mathbb{E}^i[\tau_i]} \quad \text{für alle } i \in S. \tag{4.34}$$

5 Zusammenfassung und Ausblick

Eine Markovkette $(X_n)_{n\geq 0}$ ist ein stochastischer Prozess mit Werten in einer höchstens abzählbaren Menge S mit kurzem Gedächtnis von genau einer Zeiteinheit und ohne innere Uhr. Wir können diskrete Markovketten mit Hilfe einer Startverteilung α_0 und einer Übergangsmatrix $M = (p_{ij})_{i,j\in S}$ charakterisieren. Sehr anschaulich kann man sie auch mit Hilfe eines Übergangsgraphen darstellen.
In Abschnitt 3 haben wir den Ergodensatz für endliche Markovketten kennengelernt. Im Falle eines endlichen Zustandsraums S brauchen wir nur zu überprüfen, ob alle Einträge der k-Schritt-Übergangsmatrix M^k für ein $k \geq 1$ strikt positiv sind. Hieraus folgt bereits die Existenz einer eindeutig bestimmten stationären Verteilung α, also einer Verteilung, die $\alpha = \alpha M$ erfüllt. Es liegt auch Konvergenz gegen diese Verteilung vor, das heißt für alle $j \in S$ und unabhängig von der Wahl des Startpunktes $i \in S$ gilt $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \alpha(j) > 0$. Es wurde dann noch gezeigt, dass für endliche, irreduzible und aperiodische Markovketten der Ergodensatz gilt.
Im nachfolgenden Abschnitt 4 sind wir auf den allgemeineren Fall eines höchstens abzählbaren Zustandsraumes S eingegangen. Dabei spielt die Eigenschaft der positiven Rekurrenz eine wichtige Rolle. Ein Zustand $i \in S$ ist positiv rekurrent, falls man fast sicher zu diesem zurückkehrt und die mittlere Zeit, die dafür benötigt wird, endlich ist. Aus der Existenz eines positiv rekurrenten Zustandes folgt bereits die Existenz einer stationären Verteilung α. Im Falle einer irreduziblen Markovkette ist diese stationäre Verteilung α eindeutig und es gilt $\alpha_i = 1/\mathbb{E}^i[\tau_i]$ für jedes $i \in S$.

Wir wissen nun, dass für eine irreduzible Markovkette genau dann eine (eindeutige) stationäre Verteilung existiert, wenn sie positiv rekurrent ist. Wie sieht es nun mit dem Konvergenzverhalten einer irreduziblen Markovketten aus? Für eine solche Kette gibt es, wie wir schon im Abschnitt über die Klasseneigenschaften gesehen haben, drei Möglichkeiten. Alle Zustände sind entweder transient, nullrekurrent oder positiv rekurrent. In den ersten zwei Fällen kann folgendes gezeigt werden.

Satz 5.1. *Es sei $(X_n)_{n\geq 0}$ eine irreduzible Markovkette. Falls die Kette transient oder nullrekurrent ist, gilt*

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = 0 \quad \textit{für alle } i,j \in S. \tag{5.1}$$

Im Falle der Transienz folgt diese Aussage aus $G_{ii} < \infty$ für jedes $i \in S$. Im Falle der Nullrekurrenz kann man den sogenannten *diskreten Erneuerungssatz* verwenden. Für positiv rekurrente, irreduzible Markovketten brauchen wir noch eine zusätzliche Voraussetzung: Aperiodizität. Dann folgt ebenfalls fast direkt aus dem diskreten Erneuerungssatz folgendes Resultat.

Satz 5.2. *Es sei* $(X_n)_{n\geq 0}$ *eine irreduzible, aperiodische und positiv rekurrente Markovkette. Dann existiert genau eine stationäre Verteilung* α *und es gilt*

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \alpha_j = \frac{1}{\mathbb{E}^j[\tau_j]} > 0 \quad \textit{für alle } i, j \in S. \tag{5.2}$$

Das ist die allgemeine Formulierung des Ergodensatzes 3.1.2.

Literatur

[1] M. Brokate u. a. *Grundwissen Mathematikstudium: Höhere Analysis, Numerik und Stochastik*. Springer Berlin Heidelberg, 2015. ISBN: 9783642450785. URL: `https://books.google.at/books?id=eQRcCgAAQBAJ`.

[2] H.O. Georgii. *Stochastik: Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik*. De Gruyter Studium. De Gruyter, 2015. ISBN: 9783110386868. URL: `https://books.google.at/books?id=1pAFCgAAQBAJ`.

[3] C.H. Hesse. *Angewandte Wahrscheinlichkeitstheorie: Eine fundierte Einführung mit über 500 realitätsnahen Beispielen und Aufgaben*. Vieweg+Teubner Verlag, 2013. ISBN: 9783663012443. URL: `https://books.google.at/books?id=UEj0BQAAQBAJ`.

[4] F. Hofbauer. *Skriptum: Stochastische Prozesse*. Universität Wien.

Die Abbildungen wurden mit der Software LatexDraw erstellt.