



universität
wien

1. BACHELORARBEIT

Titel der Bachelorarbeit

Variationsrechnung und Anwendungen

Verfasser

Markus Wolf

angestrebter akademischer Grad

Bachelor of Science (BSc.)

Wien, im Monat Februar 2016

Studienkennzahl lt. Studienblatt: A 033621

Studienrichtung lt. Studienblatt: Mathematik

Betreuer: ao. Univ.-Prof. Dr. Michael Kunzinger

Zusammenfassung

Diese Arbeit soll als Einführung in die Variationsrechnung dienen. Ziel ist es, die Euler-Lagrange-Gleichung herzuleiten, mit deren Hilfe Funktionale minimiert werden können. Anschließend werden verschiedene Anwendungsbeispiele der Gleichung in der Mathematik, sowie theoretischen Mechanik behandelt.

Ich habe mich beim Schreiben der Arbeit hauptsächlich am Buch von [3, Kielhöfer] orientiert. Die physikalischen Beispiele und die Formulierung des Wirkungsprinzips stammen aus [2]. Für die Funktionen-Plots habe ich die Software *MATLAB* und für die restlichen Abbildungen *LaTeXDraw* verwendet.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung und Motivation	3
2	Begriffe und Vorbereitung	4
2.1	Funktionale	4
2.2	Die erste Variation	5
3	Die Euler-Lagrange-Gleichung	8
3.1	Die erste notwendige Bedingung	8
3.2	Das Fundamentallemma der Variationsrechnung	9
3.3	Die Euler-Lagrange-Gleichung als notwendige Bedingung	11
3.4	Die Euler-Lagrange-Gleichung als hinreichende Bedingung	12
4	Anwendungsbeispiele aus der Mathematik	14
4.1	Die kürzeste Verbindung zweier Punkte in der Ebene	14
4.2	Regularität	15
4.3	Minimalfläche vom Rotationstyp	15
5	Anwendungsbeispiele aus der Physik	19
5.1	Das Prinzip der stationären Wirkung	19
6	Zusammenfassung und Ausblick	22

1 Einleitung und Motivation

Der Name „Variationsrechnung“ wurde zum ersten Mal von Leonhard Euler im Jahre 1756 verwendet. Gegenstand der Variationsrechnung ist es, die Minima, Maxima und kritischen Punkte eines Funktional

$$I : D \rightarrow \mathbb{R}$$

zu bestimmen, wobei D zum Beispiel eine Menge von Zahlen, Funktionen, Wegen, Kurven, Flächen, Feldern etc. sein kann. Kritische Punkte sind hier einfach die Punkte, die „verdächtig“ sind, Extrema zu sein. Ein bekanntes Resultat aus der Analysis besagt, dass für eine Funktion $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ die erste Ableitung an den (lokalen) Extremstellen verschwindet, falls die Funktion dort differenzierbar ist.

Es wäre nun nützlich, eine ähnlich praktische notwendige Bedingung auch für Funktionale zur Verfügung zu haben. Historisch entdeckte L. Euler eine solche Bedingung. Er beschäftigte sich mit Extremstellen von Funktionen, deren Argumente wieder Funktionen sind, genauer Funktionale der Form

$$I(y) = \int_a^b F(x, y(x), y'(x)) \, dx.$$

Um eine notwendige Bedingung zu erhalten, wandte er polygonale Approximation an. Seine Methode wurde später von Lagrange wesentlich vereinfacht. Folgende Variationsmethode geht auf ihn zurück: Man bildet den Ausdruck $y + th$, wobei y die lokale Extremstelle ist, h eine Funktion, die am Rand des Intervalls $[a, b]$ verschwindet und t ein (kleiner) reeller Parameter. Die Funktion

$$g(t) = I(y + th)$$

wird dann an der Stelle $t = 0$ extremal und es gilt $g'(0) = 0$. Verfolgt man diesen Gedanken weiter, siehe Abschnitt 2 und 3, erhält man folgende Gleichung als notwendige Bedingung

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{\partial F}{\partial y},$$

die zu Ehren der beiden Mathematiker **Euler-Lagrange-Gleichung** genannt wird.

In Abschnitt 4 werden wir die Gleichung anwenden, zum Beispiel um die Minimalfläche vom Rotationstyp zu ermitteln. Wir werden schließlich in Abschnitt 5 sehen, dass die Gleichung eine zentrale Rolle in der Physik spielt und mit ihrer Hilfe Bewegungsgleichungen herleiten.

2 Begriffe und Vorbereitung

2.1 Funktionale

Definition 2.1.1. Eine Abbildung I von einer Menge D nach \mathbb{R} werden wir als *Funktional* bezeichnen. Symbolisch schreiben wir,

$$I = I(f), \quad f \in D, \quad I(f) \in \mathbb{R}.$$

Die obige Definition ist recht allgemein, deshalb sollen im Folgenden Funktionenräume eingeführt werden, auf denen wir Funktionale betrachten können:

Definition 2.1.2.

1. $C[a, b] = \{y \mid y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ ist stetig}\}$,
ist der Raum der stetigen Funktionen auf $[a, b]$.
2. $C^1[a, b] = \{y \mid y \in C[a, b], y \text{ differenzierbar auf } [a, b], y' \in C[a, b]\}$,
ist der Raum der stetig differenzierbaren Funktionen auf $[a, b]$.
3. $C^{1,stw}[a, b] = \{y \mid y \in C[a, b], y \in C^1[x_{i-1}, x_i], i = 1, \dots, m\}$,
ist der Raum der stückweise stetig differenzierbaren Funktionen, wobei
 $a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = b$ eine von y abhängige Unterteilung von $[a, b]$ ist.

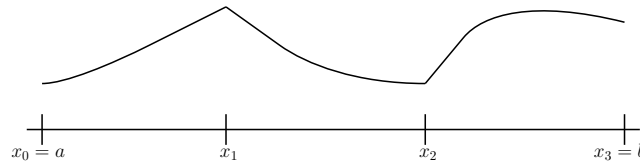


Abbildung 1: Eine typische Funktion in $C^{1,stw}[a, b]$.

Es lässt sich leicht überprüfen, dass die Mengen in 1–3 unter der natürlichen Addition und der Skalarmultiplikation (unendlichdimensionale) Vektorräume über \mathbb{R} bilden. Die Funktionenräume werden wie folgt normiert:

Definition 2.1.3.

1. Für $y \in C[a, b]$ sei $\|y\|_{0,[a,b]} = \max_{x \in [a,b]} |y(x)|$,
2. für $y \in C^1[a, b]$ sei $\|y\|_{1,[a,b]} = \|y\|_{0,[a,b]} + \|y'\|_{0,[a,b]}$,
3. für $y \in C^{1,stw}[a, b]$ sei $\|y\|_{1,stw,[a,b]} = \|y\|_{0,[a,b]} + \max_{i \in \{1, \dots, m\}} \left\{ \|y'\|_{0,[x_{i-1}, x_i]} \right\}$

Man prüft leicht nach, dass die Größen in Definition 2.1.3 die Normaxiome erfüllen.

Anmerkung. Betrachtet man Konvergenz in $C[a, b]$ bzw. $C^1[a, b]$, ausgestattet mit den Normen in (2.1.3), ist zu sagen, dass die Folge y_n gegen y_0 genau dann konvergiert, falls y_n gleichmäßig gegen y_0 bzw. y_n und y'_n gleichmäßig gegen y_0 und y'_0 konvergieren. Dies folgt direkt aus der Wahl der Normen und der Definition von *Gleichmäßiger Konvergenz*. Es ist für diese Räume eine natürliche Konvergenz und gewährleistet die Stetigkeit der jeweiligen Grenzfunktionen.

Definiert man für $y \in C^{1,stw}[a, b]$

$$I(y) = \int_a^b F(x, y, y') \, dx = \sum_{i=1}^m \int_{x_{i-1}}^{x_i} F(x, y, y') \, dx \quad (2.1.1)$$

so ist $I : C^{1,stw}[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ein Funktional, wobei vorausgesetzt wird, dass die *Lagrange-Funktion*

$$F : [a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{stetig ist.}$$

Die Stetigkeit gewährleistet, dass die Integrale in der Summe von (2.1.1) existieren.

Beispiel. Für $y \in C^1[0, 1]$ ist

$$I(y) = \int_0^1 (y(x)^2 + y(x)y'(x)) \, dx$$

ein Funktional auf $C^1[0, 1]$.

2.2 Die erste Variation

Ein Funktional $I : D \subseteq X \rightarrow \mathbb{R}$ sei auf einer Teilmenge D eines normierten Vektorraumes X definiert. Es wird vorausgesetzt, dass mit $y \in D$ auch $y+th \in D$ ist, wobei $h \in X$ fest gewählt und $t \in (-\varepsilon, \varepsilon) \subseteq \mathbb{R}$ ist. Dann können wir $g(t) = I(y+th)$ definieren.

Definition 2.2.1. Existiert

$$g'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{I(y+th) - I(y)}{t} \quad \text{in } \mathbb{R}, \quad (2.2.1)$$

so ist I in y in Richtung h *Gâteaux-differenzierbar* und die Ableitung $g'(0)$ wird als $dI(y, h)$ bezeichnet. Ist zusätzlich $dI(y, h)$ linear in h , so heißt $dI(y, h)$ die *erste Variation* von I in y in Richtung h und wird mit

$$dI(y, h) = \delta I(y)h \quad (2.2.2)$$

bezeichnet. Ist dies für alle h in einem Unterraum X_0 von X richtig, so ist $\delta I(y) : X_0 \rightarrow \mathbb{R}$ ein lineares Funktional.

Beispiel. Es sei $D = C^1[0, 1]$, y und h seien in $C^1[0, 1]$, dann ist $y+th \in C^1[0, 1]$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Betrachten wir das Funktional

$$I(y) = \int_0^1 y(x)^2 \, dx$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{1}{t} \int_0^1 (y(x) + th(x))^2 - y(x)^2 \, dx \right) &= \lim_{t \rightarrow 0} \left(\int_0^1 2y(x)h(x) \, dx + t \int_0^1 h(x)^2 \, dx \right) \\ &= 2 \int_0^1 y(x)h(x) \, dx = dI(y, h) = \delta I(y)h, \end{aligned}$$

die erste Variation von I , da $dI(y, h)$ linear in h ist.

Anmerkung. Das Gâteaux-Differential $dI(y, h)$ (2.2.1) ist zwar homogen [4, Kap.1], das heißt $dI(y, \lambda h) = \lambda dI(y, h)$ für $\lambda \in \mathbb{R}$, muss aber weder linear noch stetig in h sein [3, S.16].

Wir wollen das Gâteaux-Differential des Funktionals (2.1.1) berechnen und definieren

$$C_0^{1,stw}[a, b] = C^{1,stw}[a, b] \cap \{y(a) = 0, y(b) = 0\}. \quad (2.2.3)$$

Satz 2.2.2. *Das Funktional*

$$I(y) = \int_a^b F(x, y, y') \, dx$$

sei auf $D \subseteq C_0^{1,stw}[a, b]$ definiert. Die Lagrange-Funktion $F : [a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei stetig und bezüglich der letzten beiden Variablen stetig partiell differenzierbar. Für jedes $h \in C_0^{1,stw}[a, b]$ sei mit $y \in D$ auch $y + th \in D$, für alle $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Dann existiert für alle $y \in D$ und alle $h \in C_0^{1,stw}[a, b]$ das Gâteaux-Differential und es gilt:

$$\delta I(y)h = \int_a^b F_y(x, y, y')h + F_{y'}(x, y, y')h' \, dx. \quad (2.2.4)$$

Beweis. Ziel ist es, (2.2.1) für das obige Funktional $I(y)$ zu berechnen. Im Laufe des Beweises verwenden wir folgende Abkürzungen:

$$\begin{aligned} F^t &= F(x, y(x) + th(x), y'(x) + th'(x)), \\ F^0 &= F(x, y(x), y'(x)), \end{aligned}$$

Wir fixieren y und h und können annehmen, dass für beide die gleiche Unterteilung $a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = b$ gilt. Für ein $x \in [x_{i-1}, x_i]$ gilt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{t}(F^t - F^0) &\stackrel{HS.Int.}{=} \frac{1}{t} \int_0^t \frac{d}{ds} F^s \, ds \quad \text{für alle } t \in (-\varepsilon, \varepsilon) \setminus \{0\} \\ &\stackrel{Ketten.}{=} F_y^0 h(x) + F_{y'}^0 h'(x) \\ &\quad + \frac{1}{t} \left(\int_0^t F_y^s - F_y^0 \, ds \right) h(x) + \frac{1}{t} \left(\int_0^t F_{y'}^s - F_{y'}^0 \, ds \right) h'(x) \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

wobei für die erste Äquivalenz der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, sowie für die zweite die Kettenregel, mit anschließender Umformung, verwendet wurde. Da wir t gegen 0 streben lassen wollen, schränken wir t und damit s auf das Intervall $[-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}]$ ein. Weil y und h in $C^1[x_{i-1}, x_i]$ liegen gilt

$$\begin{aligned} &\left\{ (x, y(x) + sh(x), y'(x) + sh'(x)) \mid x \in [x_{i-1}, x_i], |s| \leq \frac{\varepsilon}{2} \right\} \\ &\subseteq [x_{i-1}, x_i] \times [-c, c] \times [-c', c'] \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

für positive Konstanten c und c' . Nun ist F_y auf dem Kompaktum in (2.2.6) gleichmäßig stetig, das heißt für alle $x \in [x_{i-1}, x_i]$ existiert bei gegebenem $\tilde{\varepsilon} > 0$ ein $\delta > 0$, sodass

$$\begin{aligned} |F_y(x, y(x) + sh(x), y'(x) + sh'(x)) - F_y(x, y(x), y'(x))| &< \tilde{\varepsilon} \\ \text{sofern } |s|(|h(x)| + |h'(x)|) &< \delta \quad \text{und } |s| \leq \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned} \quad (2.2.7)$$

Wegen $|h(x)| + |h'(x)| \leq \|h\|_{1,stw,[a,b]}$ ist (2.2.7) auch für

$$|s| < \min \left\{ \frac{\varepsilon}{2}, \frac{\delta}{\|h\|_{1,stw}} \right\}$$

gültig. Eine analoge Abschätzung gilt für $F_{y'}$. Damit folgt aus (2.2.5) für alle $x \in [x_{i-1}, x_i]$ für gegebenes $\hat{\varepsilon} > 0$

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{t} (F^t - F^0) - (F_y^0 h(x) + F_{y'}^0 h'(x)) \right| \\ & \stackrel{(2.2.5)}{=} \left| \frac{1}{t} \left(\int_0^t F_y^s - F_y^0 \, ds \right) h(x) + \frac{1}{t} \left(\int_0^t F_{y'}^s - F_{y'}^0 \, ds \right) h'(x) \right| \\ & \stackrel{(2.2.7)}{\leq} \frac{1}{|t|} |t| \tilde{\varepsilon} (|h(x)| + |h'(x)|) \leq \tilde{\varepsilon} \|h\|_{1,stw} < \hat{\varepsilon} \\ & \text{sofern } 0 < |t| < \min \left\{ \frac{\varepsilon}{2}, \frac{\delta}{\|h\|_{1,stw}} \right\}. \end{aligned}$$

Das bedeutet aber gerade, dass für $t \rightarrow 0$ der Ausdruck $\frac{1}{t}(F^t - F^0)$ gleichmäßig gegen $(F_y^0 h(x) + F_{y'}^0 h'(x))$ konvergiert für $x \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \dots, m$. Da bei gleichmäßiger Konvergenz der Grenzübergang mit der Integration vertauscht werden kann, erhält man schließlich

$$\begin{aligned} & \lim_{t \rightarrow 0} \frac{I(y + th) - I(y)}{t} \\ & = \lim_{t \rightarrow 0} \sum_{i=1}^m \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{1}{t} (F^t - F^0) \, dx = \sum_{i=1}^m \int_{x_{i-1}}^{x_i} F_y^0 h(x) + F_{y'}^0 h'(x) \, dx \\ & = \int_a^b F_y^0 h(x) + F_{y'}^0 h'(x) \, dx = dI(y, h) = \delta I(y)h, \end{aligned}$$

da $dI(y, h)$ linear in h ist. □

Beispiel. Wir wollen nun das Gâteaux-Differential des Funktionals in dem vorigen Beispiel mit Hilfe von (2.2.4) berechnen. Aus $F_y(x, y, y') = 2y$ und $F_{y'}(x, y, y') = 0$ erhalten wir wieder

$$\delta I(y)h = 2 \int_0^1 y(x)h(x) \, dx.$$

3 Die Euler-Lagrange-Gleichung

3.1 Die erste notwendige Bedingung

Betrachten wir ein typisches Variationsproblem: Es soll eine Funktion gefunden werden, sodass das Funktional in (2.1.1) minimal wird. Dabei sind wir nicht an allen Funktionen in $C^{1,stw}[a, b]$ interessiert, sondern nur an solchen, die ganz bestimmte Randbedingungen erfüllen, zum Beispiel $y(a) = y_a$, $y(b) = y_b$. Die Menge dieser Funktionen nennen wir die *Menge der zulässigen Funktionen* für dieses spezielle Problem und bezeichnen die Menge mit D .

Definition 3.1.1. Es sei $D \subseteq X$ eine Teilmenge der zulässigen Funktionen eines normierten Vektorraumes X . Man sagt, dass $I(y)$ in $y_0 \in D$ ein relatives Minimum (Maximum) besitzt, falls

$$I(y) - I(y_0) \geq 0 \quad (\leq) \quad (3.1.1)$$

für alle $y \in D$, für die $\|y - y_0\| < d$ mit einer Konstante $d > 0$, gilt.

Es sei $h \in H \subseteq X$ beliebig, wobei H ein Unterraum ist. Wir wollen nun voraussetzen, dass für $y_0 \in D$ auch $y_0 + th \in D$ für $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ mit einem möglicherweise von h abhängigem $\varepsilon > 0$ gilt. Für kleines $\varepsilon > 0$ ist $\|th\| < d$ und falls $I(y)$ ein relatives Minimum in y_0 annimmt, folgt, dass

$$I(y_0 + th) - I(y_0) \geq 0 \quad \text{für alle } h \in H. \quad (3.1.2)$$

Jetzt können wir die erste notwendige Bedingung für ein relatives Minimum formulieren und beweisen.

Satz 3.1.2. Wenn das Funktional $I(y)$ in $y_0 \in D \subseteq X$ Gâteaux-differenzierbar ist für alle $h \in H$ und in y_0 ein relatives Minimum besitzt, dann gilt

$$dI(y_0, h) = 0 \quad \text{für alle } h \in H. \quad (3.1.3)$$

Beweis. Es sei $h_0 \in H \subseteq X$. I ist auf D definiert und in y_0 Gâteaux-differenzierbar. Nach Voraussetzung ist also $y_0 + th_0 \in D$ für $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Für kleines $\varepsilon > 0$ gilt wegen der Minimalität

$$I(y_0 + th_0) - I(y_0) \geq 0. \quad (3.1.4)$$

In [4, S.26] wird gezeigt, dass $dI(h)$ genau dann das Gâteaux-Differential von $I(y)$ in $y = y_0$ ist, falls es ein $\delta > 0$ gibt, sodass für alle $h \in H$ mit $\|h\| < \delta$,

$$I(y_0 + h) - I(y_0) = dI(h) + r(h) \quad \text{gilt,} \quad (3.1.5)$$

wobei $dI(h)$ homogen ist und $\lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{r(th)}{t} \right) = 0$. Da H ein Unterraum ist, ist mit $t \in \mathbb{R}$ auch $th_0 \in H$. Wir wählen $\tilde{\varepsilon} > 0$ ausreichend klein, sodass für $t \in (-\tilde{\varepsilon}, \tilde{\varepsilon})$ einerseits $\|th_0\| < \delta$ und andererseits (3.1.4) erfüllt ist. Dann gilt wegen der Homogenität von $dI(h)$

$$t dI(h_0) + r(th_0) \geq 0 \quad \text{für alle } |t| \leq \frac{\tilde{\varepsilon}}{2} \quad (3.1.6)$$

Damit ist der Ausdruck $dI(h_0) + \frac{r(th_0)}{t}$ nicht negativ, falls $0 < t \leq \frac{\tilde{\varepsilon}}{2}$ und nicht positiv, falls $-\frac{\tilde{\varepsilon}}{2} \leq t < 0$. Lassen wir t gegen 0 streben, erhalten wir $dI(h_0) = 0$ und da h_0 beliebig gewählt wurde, gilt die Aussage für alle $h \in H$. \square

3.2 Das Fundamentallemma der Variationsrechnung

Das Fundamentallemma der Variationsrechnung kann man sich als „Bindeglied“ zwischen der ersten notwendigen Bedingung und der Euler-Lagrange-Gleichung als notwendige Bedingung, auf die wir im nächsten Abschnitt eingehen, vorstellen. Im Folgenden werden wir drei Versionen dieses Lemmas betrachten.

Da die Ableitung einer stückweise stetig differenzierbaren Funktion stückweise stetig ist, definieren wir $C^{stw}[a, b]$ als den Raum der stückweise stetigen Funktionen, wobei Funktionen an Sprungstellen links- und rechtsseitig zu definieren sind.

Lemma 3.2.1. *Wenn $f \in C^{stw}[a, b]$ ist und*

$$\int_a^b f h \, dx = 0 \quad \text{für alle } h \in C_0^\infty(a, b) \text{ gilt,} \quad (3.2.1)$$

dann ist es notwendig, dass $f(x) = 0$ für alle $x \in [a, b]$.

Es ist offensichtlich, dass obige Bedingung auch hinreichend ist. Der Raum $C_0^\infty(a, b)$ heißt der Raum der „Testfunktionen“ und besteht aus allen beliebig oft differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger in dem offenen Intervall (a, b) . Der Träger von h ist der Abschluss von $\{x | h(x) \neq 0\}$ und es gilt $h(a) = 0$ und $h(b) = 0$.

Beweis (indirekt). Angenommen es existiert ein $x_0 \in [x_{i-1}, x_i] \subseteq [a, b]$ mit $f(x_0) \neq 0$. Wir nehmen o.B.d.A. an, dass $f(x_0) > 0$. Wegen der Stetigkeit von f auf $[x_{i-1}, x_i]$ gibt es ein offenes Intervall $B_\delta(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ in $[x_{i-1}, x_i]$ mit $\delta > 0$, sodass

$$f(x) > 0 \quad \text{für alle } x \in B_\delta(x_0).$$

Wir wählen nun eine Funktion $h \in C_0^\infty(a, b)$, die ihren Träger in $B_\delta(x_0)$ hat und das gleiche konstante Vorzeichen wie f im Inneren ihres Trägers besitzt. (Eine solche Funktion gibt es und wird in [3, S.21] konstruiert.) Damit ist $fh \geq 0$ in $[a, b]$, stetig und ungleich der Nullfunktion, weshalb

$$\int_a^b f h \, dx > 0,$$

im Widerspruch zu (3.2.1). □

Das obige Lemma ist die Basis-Version des **Fundamentallemmas der Variationsrechnung**. Das folgende Lemma geht auf den Deutschen Mathematiker DuBois-Reymond (1831-1889) zurück:

Lemma 3.2.2. *Ist $f \in C^{stw}[a, b]$ und gilt*

$$\int_a^b f h' \, dx = 0 \quad \text{für alle } h \in C_0^{1,stw}[a, b], \quad (3.2.2)$$

so folgt, dass $f(x) = \text{const.}$ für alle $x \in [a, b]$.

Beweis. Wir wählen $c = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ und $h(x) = \int_a^x (f(u) - c) du$. Dann gilt $h \in C[a, b]$ und für $x \in [x_{i-1}, x_i]$ ist $h'(x) = f(x) - c$ (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung), wobei in den Randpunkten die einseitigen Ableitungen zu nehmen sind. Offensichtlich gilt $h(a) = 0$, sowie

$$h(b) = \int_a^b f(u) du - (b-a) \underbrace{\left(\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right)}_c = 0$$

und folglich ist $h \in C_0^{1,stw}[a, b]$ und wegen (3.2.2) gilt

$$\int_a^b (f - c)h' dx = \int_a^b fh' dx - c \int_a^b h' dx \stackrel{(3.2.2)}{=} 0 \quad (3.2.3)$$

Andererseits können wir auch schreiben

$$\int_a^b (f - c)h' dx = \int_a^b (f - c)^2 dx = \sum_{i=1}^m \int_{x_{i-1}}^{x_i} (f - c)^2 dx = 0, \quad (3.2.4)$$

woraus wegen der Stetigkeit von f auf $[x_{i-1}, x_i]$ folgt, dass $f(x) = c$ für alle $x \in [a, b]$. \square

Es soll hier noch kurz angemerkt werden, dass auch für Funktionen f und h in $C^{1,stw}[a, b]$ die Formel der partiellen Integration

$$\int_a^b fh' dx = fh \Big|_a^b - \int_a^b f'h dx \quad (3.2.5)$$

gültig ist. Nun können wir das Fundamentallemma für zwei gegebene Funktionen formulieren und beweisen:

Lemma 3.2.3. *Gilt für $f, g \in C^{stw}[a, b]$*

$$\int_a^b fh + gh' dx = 0 \quad \text{für alle } h \in C_0^{1,stw}[a, b] \quad (3.2.6)$$

so folgt $g \in C^{1,stw}[a, b]$ und $g' = f$ stückweise auf $[a, b]$.

Beweis. Wir setzen $F(x) = \int_a^x f(s) ds$. Dann ist F stetig auf $[a, b]$ und für $x \in [x_{i-1}, x_i]$ gilt $F'(x) = f(x)$, wobei in den Randpunkten wieder die einseitigen Ableitungen zu nehmen sind. Damit ist $F \in C^{1,stw}[a, b]$ und wegen $h(a) = h(b) = 0$ und (3.2.5) erhalten wir

$$\int_a^b fh dx = \int_a^b F'h dx = - \int_a^b Fh' dx \quad \text{für alle } h \in C_0^{1,stw}[a, b]. \quad (3.2.7)$$

Mit (3.2.6) folgt daraus

$$\int_a^b fh + gh' dx = \int_a^b (-F + g)h' dx = 0 \quad \text{für alle } h \in C_0^{1,stw}[a, b]. \quad (3.2.8)$$

Da $g \in C^{stw}[a, b]$, folgt aus Lemma 3.2.2, dass es eine reelle Konstante c gibt, sodass

$$-F(x) + g(x) = c \quad \text{oder} \quad g(x) = c + F(x) \quad \text{für alle } x \in [a, b]. \quad (3.2.9)$$

Damit ist $g \in C^{1,stw}[a, b]$ und $g'(x) = F'(x) = f(x)$ stückweise. \square

Anmerkung. Gilt (3.2.6) für stetige Funktionen f und g auf $[a, b]$, dann ist g sogar stetig differenzierbar auf $[a, b]$ und es gilt $g' = f$ auf ganz $[a, b]$.

3.3 Die Euler-Lagrange-Gleichung als notwendige Bedingung

Wir wollen Funktionale vom Typ

$$I(y) = \int_a^b F(x, y, y') \, dx \quad (3.3.1)$$

betrachten, die auf $D \subseteq C^{1,stw}[a, b]$ definiert sind. Ein $y_0 \in D$ heißt lokaler Minimierer, falls (3.1.1) erfüllt ist, für alle $y \in D$, für die $\|y - y_0\|_{1,stw} < d$ gilt, mit einem $d > 0$. Dagegen spricht man von einem globalen Minimierer, wenn die Ungleichung für alle $y \in D$ gilt.

Wir setzen voraus, dass für $y_0 \in D$ die erste Variation für alle $h \in C_0^{1,stw}[a, b]$ definiert ist, das heißt, dass $y_0 + th \in D$ für $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ mit einem möglicherweise von h abhängigen $\varepsilon > 0$ gilt. Betrachten wir als Menge der zulässigen Funktionen $D = C^{1,stw}[a, b] \cap \{y(a) = y_a, y(b) = y_b\}$, gilt dies für alle $\varepsilon > 0$.

Theorem 3.3.1. *Die Funktion $y \in D \subseteq C^{1,stw}[a, b]$ sei ein lokaler Minimierer für das Funktional (3.3.1) und die Lagrange-Funktion $F : [a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei stetig und bezüglich der letzten beiden Variablen stetig partiell differenzierbar. Dann gilt:*

$$F_{y'}(\cdot, y, y') \in C^{1,stw}[a, b] \subseteq C[a, b] \quad \text{und} \quad (3.3.2)$$

$$\frac{d}{dx} F_{y'}(\cdot, y, y') = F_y(\cdot, y, y') \quad \text{stückweise auf } [a, b]. \quad (3.3.3)$$

Ist $y \in C^1[a, b]$, so gilt $F_{y'}(\cdot, y, y') \in C^1[a, b]$ und (3.3.3) gilt auf ganz $[a, b]$.

Beweis. Nach obigen Voraussetzungen existiert die erste Variation in y und ist gegeben durch (2.2.4) und wegen der ersten notwendigen Bedingung für ein relatives Minimum (3.1.3) gilt,

$$\delta I(y)h = \int_a^b F_y(x, y, y')h + F_{y'}(x, y, y')h' \, dx = 0 \quad (3.3.4)$$

für alle $h \in C_0^{1,stw}[a, b]$.

Die Behauptung von Theorem 3.3.1 folgt aus dem Fundamentallemma für zwei gegebene Funktionen 3.2.3, da nach den Voraussetzungen über y und F die Funktionen $F_y(\cdot, y, y')$ und $F_{y'}(\cdot, y, y')$ in $C^{stw}[a, b]$ liegen. Der letzte Zusatz gilt wegen der Anmerkung zu Lemma 3.2.3. \square

Die Gleichung (3.3.3) heißt **Euler-Lagrange-Gleichung**. Sie wurde benannt nach dem Schweizer Mathematiker Leonhard Euler (1707-1783) und dem Französischen Mathematiker Joseph Louis de Lagrange (1736-1813).

Anmerkung. Der lokale Minimierer y ist nicht notwendigerweise zweimal (stückweise) differenzierbar. Ist das der Fall und existieren die zweiten partiellen Ableitungen $F_{y'y'}$, $F_{y'y}$ und $F_{y'x}$, kann man (3.3.3) (stückweise) ausdifferenzieren

und man erhält

$$F_{y'y'}(\cdot, y, y')y'' + F_{y'y}(\cdot, y, y')y' + F_{y'x}(\cdot, y, y') = F_y(\cdot, y, y') \quad (3.3.5)$$

(stückweise) auf $[a, b]$.

Beispiel. Wir betrachten das Funktional

$$I(y) = \int_{-1}^1 y^2(2x - y')^2 dx$$

auf $D = C^1[-1, 1] \cap \{y(-1) = 0, y(1) = 1\}$. Die Funktion

$$y(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \in [-1, 0], \\ x^2 & \text{für } x \in [0, 1], \end{cases}$$

liegt in D und ist ein globaler Minimierer, denn $I(\tilde{y}) \geq I(y) = 0$ für alle $\tilde{y} \in D$. Sie erfüllt die Euler-Lagrange-Gleichung auf $[-1, 1]$, da

$$\begin{aligned} F_y(x, y, y') &= 2y(2x - y')^2, \\ F_{y'}(x, y, y') &= -2y^2(2x - y'), \end{aligned}$$

und $F_y \equiv F_{y'} \equiv 0$ auf $[-1, 1]$ für den Minimierer.

3.4 Die Euler-Lagrange-Gleichung als hinreichende Bedingung

Vorbemerkung und Warnung. Eine Lösung $y \in D \subseteq C^{1,stw}[a, b]$ der Euler-Lagrange-Gleichung ist nicht automatisch ein lokaler oder globaler Minimierer für I oder $-I$. Ein Beispiel hierfür wird durch

$$I(y) = \int_0^1 (y')^3 dx \quad \text{auf } D = C^{1,stw}[0, 1] \cap \{y(0) = 0, y(1) = 0\}$$

gegeben. Keine Lösung der Euler-Lagrange-Gleichung ist ein lokaler Minimierer für I oder $-I$ [3, S.25].

Wir wollen nun kurz darauf eingehen, dass unter ganz bestimmten Umständen die Euler-Lagrange-Gleichung auch als hinreichende Bedingung verwendbar ist. Dabei wird der Begriff der zweiten Variation hilfreich sein:

Mit den Bezeichnungen von Satz (2.2.2) sei die Lagrange-Funktion F nun zweimal bezüglich der letzten beiden Variablen stetig partiell differenzierbar. Es soll wieder gelten, dass für $y \in D \subseteq C^{1,stw}[a, b]$ und $h \in C_0^{1,stw}[a, b]$ die Funktion $g(t) = I(y + th)$ für alle $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ definiert ist. Dann heißt

$$g''(0) = \delta^2 I(y)(h, h),$$

die zweite Variation von I in y in Richtung h . Wie im Beweis von Satz (2.2.2) kann man zeigen, dass die zweite Ableitung nach t mit der Integration vertauscht werden kann. Nach Anwendung der Kettenregel erhält man schließlich in $t = 0$ die Darstellung:

$$g''(0) = \delta^2 I(y)(h, h) = \int_a^b F_{yy}h^2 + 2F_{yy'}hh' + F_{y'y'}(h')^2 dx \quad (3.4.1)$$

wobei $F_{yy} = F_{yy}(x, y(x), y'(x))$ ist und analog für die Argumente von $F_{yy'}$ und $F_{y'y'}$.

Unter obigen Voraussetzungen existiert die zweite Variation und wir können zeigen:

Satz 3.4.1. *Gilt für ein $y \in D = C^{1,stw}[a, b] \cap \{y(a) = y_a, y(b) = y_b\}$*

$$\delta I(y)h = 0 \quad \text{und} \quad (3.4.2)$$

$$\delta^2 I(\tilde{y})(h, h) \geq 0 \quad \text{für alle } \tilde{y} \in D \text{ und für alle } h \in C_0^{1,stw}[a, b], \quad (3.4.3)$$

dann ist y ein globaler Minimierer für I auf D .

Beweis. Für eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} g'(0) + \int_0^1 (1-t)g''(t) dt &= g'(0) + (1-t)g'(t) \Big|_0^1 - \int_0^1 (-1)g'(t) dt \\ &= g(1) - g(0). \end{aligned} \quad (3.4.4)$$

Mit $h \in C_0^{1,stw}[a, b]$ sei $g(t) = I(y + th)$, wobei wegen der speziellen Randbedingungen gilt, dass $y + th \in D$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Nach Voraussetzung ist $g''(t) = \delta^2 I(y + th)(h, h) \geq 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Mit Hilfe von Formel (3.4.4) erhalten wir

$$\begin{aligned} I(y + h) &= I(y) + \underbrace{\delta I(y)h}_{=0} + \int_0^1 (1-t) \underbrace{\delta^2 I(y + th)(h, h)}_{\geq 0} dt \\ &\geq I(y) \quad \text{für alle } h \in C_0^{1,stw}[a, b]. \end{aligned} \quad (3.4.5)$$

Falls $\tilde{y} \in D$ beliebig gewählt wird, so können wir $\tilde{y} = y + \tilde{y} - y = y + h$ mit $h = \tilde{y} - y \in C_0^{1,stw}[a, b]$ schreiben. Also gilt

$$I(\tilde{y}) \geq I(y) \quad \text{für alle } \tilde{y} \in D$$

und y ist ein globaler Minimierer. □

In Anwendungsbeispielen können wir Satz 3.4.1 manchmal verwenden, um zu zeigen, dass es sich bei Lösungen der Euler-Lagrange-Gleichung tatsächlich um globale Minimierer handelt.

4 Anwendungsbeispiele aus der Mathematik

In diesem Abschnitt geht es darum die Euler-Lagrange-Gleichung anzuwenden. Wir betrachten Fragestellungen aus der Mathematik und werden sehen, dass die Gleichung ein praktisches Hilfsmittel ist.

4.1 Die kürzeste Verbindung zweier Punkte in der Ebene

Unser Ziel ist es, jene Funktion zu finden, die die kürzeste Verbindung zweier Punkte in der Ebene realisiert. Dazu können wir folgendes Variationsproblem formulieren:

Die Länge der Kurve $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y(x) \end{pmatrix} \mid x \in [a, b] \right\}$ zwischen $\begin{pmatrix} a \\ A \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} b \\ B \end{pmatrix}$ ist das Funktional

$$I(y) = \int_a^b \underbrace{\sqrt{1 + (y')^2}}_{F(x,y,y')} dx \quad (4.1.1)$$

auf $D = C^{1,stw}[a, b] \cap \{y(a) = A, y(b) = B\}$. Wir suchen eine Funktion in D , die das Funktional minimiert. Es gilt

$$F_{y'}(y') = \frac{1}{2}(1 + (y')^2)^{-\frac{1}{2}} 2y' = \frac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2}} \quad \text{und} \quad F_y(y') = 0.$$

Die Euler-Lagrange-Gleichung lautet also

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2}} \right) = 0 \quad \text{stückweise auf } [a, b],$$

und aus dem Konstanzkriterium folgt

$$\begin{aligned} \frac{y'(x)}{\sqrt{1 + (y'(x))^2}} &= c_i \quad \text{oder} \\ y'(x) &= \frac{c_i}{\sqrt{1 - c_i^2}} = c_1^i \quad \text{für } x \in [x_{i-1}, x_i], i = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

Das Wurzelziehen ist dadurch gerechtfertigt, dass $c_i^2 < 1$ gilt. Die Lösungen sind gegeben durch

$$y(x) = c_1^i x + c_2^i \quad \text{für } x \in [x_{i-1}, x_i] \subseteq [a, b]. \quad (4.1.2)$$

Ein Minimierer erfüllt aber auch die Bedingung (3.3.2), danach ist $F_{y'}(\cdot, y, y')$ für einen Minimierer stetig auf $[a, b]$. Das bedeutet, dass $c_1^i = c_1$ gilt und aus $y \in C[a, b]$ folgt, dass $c_2^i = c_2$ für $i = 1, \dots, m$.

Die Lösung ist eine Gerade $y(x) = c_1 x + c_2$ und mit Hilfe der Randwerte können die Konstanten c_1 und c_2 berechnet werden:

$$c_1 = \frac{(B - A)}{(b - a)} \quad \text{und} \quad c_2 = \frac{(bA - aB)}{(b - a)}.$$

Das Ergebnis sollte uns nicht allzu sehr verwundern, denn wir wissen bereits aus der Geometrie, dass die kürzeste Verbindung zweier Punkte in der Ebene

die Gerade ist. Tatsächlich folgt aus Satz 3.4.1, dass y ein globaler Minimierer ist, denn

$$F_{y'y'}(\tilde{y}') = \frac{1}{(1 + (\tilde{y}')^2)^{\frac{3}{2}}} > 0, \quad F_{yy}(\tilde{y}') = F_{yy'}(\tilde{y}') = 0$$

und damit $\delta^2 I(\tilde{y})(h, h) \geq 0$ für alle $\tilde{y} \in D$ und für alle $h \in C_0^{1,stw}[a, b]$.

4.2 Regularität

Manchmal ist es nützlich die Euler-Lagrange-Gleichung in ihrer ausdifferenzierten Form (3.3.5) zu betrachten. Das dürfen wir aber nur, falls wir wissen, dass y zweimal differenzierbar ist. Der folgende Satz zeigt, dass dies unter gewissen Umständen zumindest lokal erfüllt ist:

Satz 4.2.1. Für das Funktional $I(y) = \int_a^b F(x, y, y') dx$ sei die Lagrange-Funktion $F : [a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bezüglich aller drei Variablen zweimal stetig differenzierbar und $y \in C^{1,stw}[a, b] \cap C^1[x_{i-1}, x_i]$ erfülle die Euler-Lagrange-Gleichung auf $[x_{i-1}, x_i] \subseteq [a, b]$. Gilt $F_{y'y'}(x_0, y(x_0), y'(x_0)) \neq 0$ für ein $x_0 \in (x_{i-1}, x_i)$, so ist y in einer Umgebung von x_0 in (x_{i-1}, x_i) zweimal stetig nach x differenzierbar.

Diese lokale Regularität geht auf Hilbert zurück.

Beweis. Nach Voraussetzung ist $f = F_{y'}(\cdot, y, y')$ auf $[x_{i-1}, x_i]$ stetig differenzierbar. Man setze

$$G(x, z) = F_{y'}(x, y(x), z) - f(x)$$

und $G : [x_{i-1}, x_i] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist nach beiden Variablen stetig differenzierbar, da $y \in C^1[x_{i-1}, x_i]$ und wegen der Voraussetzung über F .

Es gilt $G(x_0, y'(x_0)) = 0$ und

$$G_z(x_0, y'(x_0)) = F_{y'y'}(x_0, y(x_0), y'(x_0)) \neq 0.$$

Das Theorem über implizite Funktionen besagt nun, dass es genau eine Funktion $z(x)$ gibt, die in einer Umgebung von x_0 die Gleichungen $G(x, z(x)) = 0$, $z(x_0) = y'(x_0)$ erfüllt und stetig differenzierbar ist. Da auch $G(x, y'(x)) = 0$ gilt, ist wegen der Eindeutigkeit $z(x) = y'(x)$ und daraus folgt die lokale Regularität von y . \square

4.3 Minimalfläche vom Rotationstyp

Die Rotation des Graphen einer stetigen und positiven Funktion $y(x)$ um die x -Achse erzeugt eine Rotationsfläche. Ist die Funktion in $C^1[a, b]$, kann man zeigen, dass die Oberfläche des Rotationskörpers durch

$$I(y) = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + (y')^2} dx \quad (4.3.1)$$

gegeben ist.

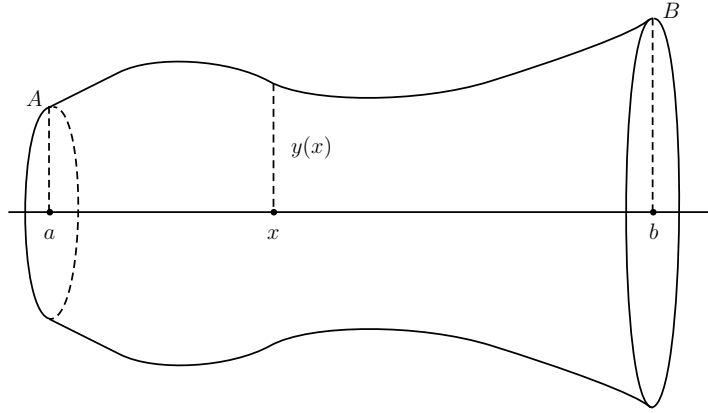


Abbildung 2: Rotationsfläche

Wir formulieren folgende Variationsaufgabe: Wir lassen den Faktor 2π weg und betrachten das Funktional

$$I(y) = \int_a^b y \sqrt{1 + (y')^2} dx \quad (4.3.2)$$

auf $D = C^1[a, b] \cap \{y(a) = A, y(b) = B\}$, wobei $A > 0, B > 0$. Wir suchen eine Kurve, die dieses Funktional minimiert, oder anders ausgedrückt, eine Rotationsfläche mit kleinstem Flächeninhalt erzeugt. Eine solche Fläche heißt Minimalfläche vom Rotationstyp.

Wir bemerken, dass

$$F_{y'y'}(y, y') = \frac{y}{(1 + (y')^2)^{\frac{3}{2}}} > 0$$

für $y > 0$ und alle y' gilt. Nach Satz 4.2.1 ist jede auf $[a, b]$ positive Lösung der Euler-Lagrange-Gleichung, welche in D liegt, automatisch in $C^2(a, b)$ (sogar in $C^2[a, b]$). Wir können also die Euler-Lagrange-Gleichung in ihrer ausdifferenzierten Form (3.3.5) betrachten und erhalten, weil F nicht explizit von x abhängt

$$F_y - F_{y'y}y' - F_{y'y'}y'' = 0 \quad \text{mit } F = F(y, y').$$

Aus Ketten- und Produktregel folgt, dass

$$\frac{d}{dx} (F - y'F_{y'}) = (F_y - y'F_{y'y} - y''F_{y'y'})y'$$

und deshalb ist für $y' \neq 0$ die Euler-Lagrange-Gleichung äquivalent zu

$$\frac{d}{dx} (F - y'F_{y'}) = 0,$$

woraus wir

$$F(y, y') - y'F_{y'}(y, y') = c_1 \quad (4.3.3)$$

als erstes Integral erhalten. Für die Lagrange-Funktion $F(y, y') = y\sqrt{1 + (y')^2}$ ergibt das

$$y\sqrt{1 + (y')^2} - \frac{(y')^2 y}{\sqrt{1 + (y')^2}} = c_1$$

und durch Umformen erhalten wir

$$y = c_1 \sqrt{1 + (y')^2} \quad \text{oder} \quad y' = \sqrt{\frac{y^2 - c_1^2}{c_1^2}} \quad (4.3.4)$$

für $c_1 \neq 0$ (für $c_1 = 0$ erhalten wir einfach $y = 0$). Separation der Variablen liefert schließlich

$$y(x) = c_1 \cosh\left(\frac{x + c_2}{c_1}\right), \quad (4.3.5)$$

was für $c_1 > 0$ eine positive Lösung darstellt. Die Funktion (4.3.5) heißt *Kettenlinie*, da sie die Form einer hängenden Kette beschreibt. Die Konstanten müssen durch die Randwerte bestimmt werden, was nicht immer möglich ist.

Um das zu sehen betrachten wir eine symmetrische Anordnung, das heißt $y(-L/2) = y(L/2) = A$, wobei $L > 0$ der Abstand zwischen den beiden Kreisingen am Rand ist. Aus Symmetriegründen folgt nun $c_2 = 0$ und für c_1 muss man

$$A = c_1 \cosh\left(\frac{L}{2c_1}\right) \quad (4.3.6)$$

lösen, was nicht ohne weiteres schaffbar ist. Wir haben aber die Möglichkeit graphisch zu argumentieren. Dazu schreiben wir

$$\frac{A}{c_1} = \cosh\left(\frac{1}{2} \frac{L}{A} \left(\frac{A}{c_1}\right)\right)$$

und plotten die linke und rechte Seite obiger Gleichung als eine Funktion in $x \equiv A/c_1$ für verschiedene Werte L/A . Die Schnittpunkte der durchgezogenen Kurven mit der strichlierten bedeuten eine Lösung der Gleichung. Ein kurzer Blick auf Abbildung 3 zeigt folgende interessante Eigenschaften:

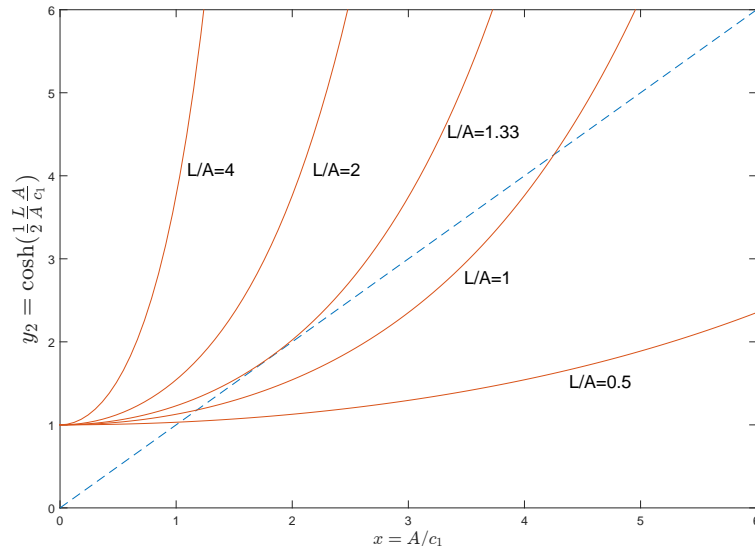


Abbildung 3: Zur Lösbarkeit von Gleichung (4.3.6)

Als Erstes betrachten wir den Fall wenn $L/A < 1.33$. Dann gibt es zwei Werte für die Konstante c_1 , die Gleichung (4.3.6) erfüllen. Wenn wir als Spezialfall $L = A$ annehmen, dann erhalten wir die zwei Lösungen $c_1 \approx 0.235L$ und $c_1 \approx 0.85L$. Wie man in Abbildung 4 sehen kann, liefert jeder dieser Werte eine eigene Kurve. Im Fall von zwei Lösungen kann man zeigen, dass die obere Kettenlinie eine lokal minimale Fläche erzeugt.

Betrachten wir nun den zweiten Fall: Wird der Abstand L (bei gleichbleibendem A) zu groß, dann ist aus Abbildung 3 ersichtlich, dass Gleichung (4.3.6) keine reellen Lösungen mehr besitzt. Das heißt aber nicht, dass wir keine Fläche mit minimalem Inhalt finden können. In diesem Fall ist aber die Funktion, die diese Fläche erzeugt, unstetig. Die Minimalfläche besteht aus den Flächen der beiden Kreisscheiben am Rand der Anordnung. Diese Lösung wurde im Jahre 1831 von B. C. W. Goldschmidt (1807-1851) entdeckt und wird deshalb auch oft *Goldschmidt-Lösung* genannt.

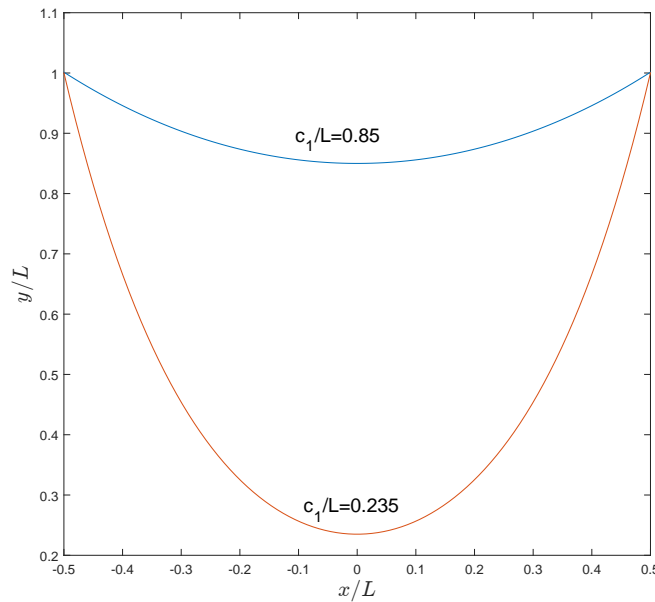


Abbildung 4: Im Spezialfall $L = A$ gibt es zwei Lösungskurven

5 Anwendungsbeispiele aus der Physik

Das vorige Beispiel über die Minimalfläche vom Rotationstyp hat auch eine sehr anschauliche physikalische Interpretation: Macht man ein Experiment mit einer Seifenhaut, die man zwischen zwei Drahttringen aufspannt, wird man bemerken, dass sie sich bei Vergrößerung des Abstands der Ringe zusammenschnürt, zerreißt und dass zwei Kreisscheiben innerhalb der Drahttringe entstehen. Genau dieses Szenario hat auch die Mathematik wiedergegeben.

In diesem Abschnitt werden wir sehen, dass die Variationsrechnung vor allem in der Mechanik eine wichtige Rolle spielt.

5.1 Das Prinzip der stationären Wirkung

In der Mechanik ist die *Wirkung* das zeitliche Integral über die Lagrange-Funktion

$$L(t, x(t), x'(t)).$$

Diese Funktion ist in der Newtonschen Mechanik als die Differenz von kinetischer und potentieller Energie definiert, das heißt

$$L(t, x(t), x'(t)) = T(x'(t)) - V(t, x(t)).$$

Dabei beschreibt t die Zeit und $x(t)$, $x'(t)$ Ort und Geschwindigkeit eines Teilchens der Masse m zur Zeit t . Wir können nun die Wirkung als Funktional der Form

$$S(x) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x, x') dt, \quad (5.1.1)$$

das auf $D = C^2[t_0, t_1] \cap \{x(t_0) = x_0, x(t_1) = x_1\}$ definiert ist, auffassen. Hierbei beschreibt x_0 den Anfangszustand und x_1 den Endzustand einer Bewegung $x \in D$. Die Wirkung S hat die Dimension Energie mal Zeit.

Wir sind nun daran interessiert, aus allen denkbaren Bewegungen diejenige zu ermitteln, die in der Natur auftreten würde (anders gesagt, wir suchen die „richtige“ Bewegung). Wir nennen diese Bewegung die *physikalische Bewegung* unseres Systems. Wir formulieren nun das **Prinzip der stationären Wirkung**.

Prinzip der stationären Wirkung. Der Anfangszustand eines physikalischen Systems sei durch $x(t_0)$ und der Endzustand durch $x(t_1)$ beschrieben. Es sei

$$S = \int_{t_0}^{t_1} (T - V) dt$$

das Wirkungsintegral. Dann tritt in der Natur jene Bewegung auf, die eine stationäre Wirkung hat. Mathematisch bedeutet das, dass für die physikalische Bewegung die erste Variation des Wirkungsintegrals verschwindet, das heißt

$$\delta S = 0. \quad (5.1.2)$$

Wollen wir also die physikalische Bewegung ermitteln, müssen wir jene Funktionen x finden, für die $\delta S = 0$ wird. Wir wissen aber schon, dass Gleichung (5.1.2) äquivalent zur Euler-Lagrange-Gleichung

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial x'} = 0 \quad (5.1.3)$$

ist (siehe dazu auch Lemma 3.2.3 und den Beweis von Theorem 3.3.1). Wir erhalten folgendes, überraschendes Resultat:

Korollar 5.1.1. *Die Newtonsche Bewegungsgleichung entspricht gerade der zugehörigen Euler-Lagrange-Gleichung.*

Das Prinzip wollen wir anhand von Beispielen näherbringen.

Massepunkt im Gravitationsfeld

Sei x die Höhe des Massepunktes der Masse m über einem Referenzniveau. Es sei $T(x') = \frac{1}{2}m(x')^2$ seine kinetische und $V(x) = mgx$ seine potentielle Energie, g die Erdbeschleunigung. Die Wirkung ist dann

$$S = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{1}{2}m(x')^2 - mgx \right) dt.$$

Die zugehörige Euler-Lagrange-Gleichung lautet

$$-mg - \frac{d}{dt}(mx') = 0 \quad \text{oder} \quad mx'' = -mg = F \quad (\text{Kraft}).$$

Das mathematische Pendel

Vorbemerkung. Die Pendelmasse kann sich nur auf einer Kreislinie bewegen, man spricht auch von einer *Zwangsbedingung*. Dieser Nebenbedingung kann man durch sogenannte *generalisierte Koordinaten* Rechnung tragen. In unserem Fall wird die „Pendelgleichung“ üblicherweise in der generalisierten Koordinate φ angegeben, siehe auch Abbildung 5. Für eine genauere Analyse von Zwangsbedingungen siehe [3, S.105ff.]

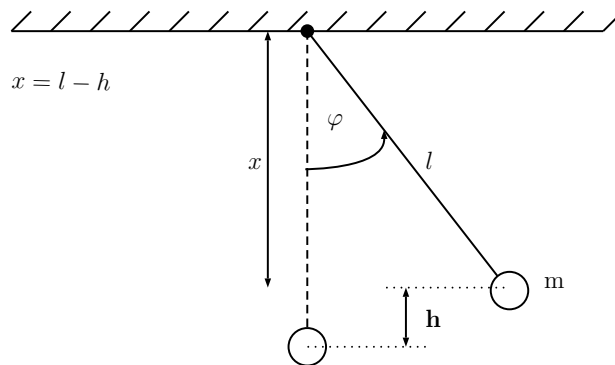


Abbildung 5: Mathematisches Pendel

Abbildung 5 zeigt das mathematische Pendel. Für den eingezeichneten Höhenunterschied h gilt

$$h = l - l \cos(\varphi)$$

und folglich für die kinetische und potentielle Energie

$$T(\varphi') = \frac{1}{2}ml^2(\varphi')^2 \quad \text{und} \quad V(\varphi) = mg(l - l \cos(\varphi)).$$

Es gilt

$$L(\varphi, \varphi') = T(\varphi') - V(\varphi) = \frac{1}{2}ml^2(\varphi')^2 - mg(l - l \cos(\varphi))$$

und die Euler-Lagrange-Gleichung liefert

$$-mgl \sin(\varphi) - \frac{d}{dt} (ml^2 \varphi') = 0$$

oder

$$\varphi'' + \frac{g}{l} \sin(\varphi) = 0,$$

was wir als Pendelgleichung identifizieren.

6 Zusammenfassung und Ausblick

Unser Ziel war es, Funktionale vom Typ

$$I(y) = \int_a^b F(x, y, y') \, dx$$

zu minimieren. In Abschnitt 3 haben wir gesehen, dass ein lokaler Minimierer y die Euler-Lagrange-Gleichung erfüllt. Um das zu zeigen, haben wir den Begriff der ersten Variation benötigt und eine Version des Fundamentallemmas der Variationsrechnung zu Hilfe genommen.

Obwohl die Euler-Lagrange-Gleichung nur eine notwendige Bedingung ist, liefert ihre Lösung zumindest mögliche Kandidaten für lokale bzw. globale Minimierer. Dass das Ermitteln dieser Minimierer nicht immer einfach ist, haben wir beim Beispiel über die Minimalfläche vom Rotationstyp gesehen, wo die Lösung der Gleichung Kettenlinien sind.

Schlussendlich wurde das Prinzip der stationären Wirkung formuliert: Definiert man die Lagrange-Funktion L als Differenz von kinetischer und potentieller Energie, entspricht die zugehörige Euler-Lagrange-Gleichung gerade der Newton'schen Bewegungsgleichung.

Als nächsten Schritt könnte man nun das Problem auf höhere Raumdimensionen verallgemeinern. Man kann Funktionale in parametrischer Form für Kurven im \mathbb{R}^n betrachten. Die Euler-Lagrange-Gleichungen sind dann ein System von n Differentialgleichungen.

Man könnte sich auch fragen, wie man mit Variationsproblemen mit Nebenbedingungen umgeht. Oftmals treten diese in natürlicher Weise auf und man kann zum Beispiel zwischen isoperimetrischen, holonomen und nichtholonomen Nebenbedingungen unterscheiden.

Schlussendlich drängt sich auch die Frage auf, unter welchen Bedingungen reellwertige Funktionale überhaupt ein Minimum annehmen. Diese zentrale Frage der Variationsrechnung behandelt der sogenannte *Fundamentalsatz der Variationsrechnung*. Man kann ihn als eine Verallgemeinerung des klassischen Satzes von Weierstraß ansehen (siehe auch [1, S.16 ff]).

Neben den in dieser Arbeit vorgestellten Beispielen gibt es natürlich noch wesentlich mehr interessante Anwendungsbeispiele. Anzuführen wären hier das *Problem des Johann Bernoulli* (Brachistochrone-Problem) und das *Problem der Dido*.

Gerade wegen dem Prinzip der stationären Wirkung ist die Variationsrechnung und vor allem die Euler-Lagrange-Gleichung (auch außerhalb der Mechanik) vielfältig einsetzbar und aus der modernen Physik und Mathematik nicht mehr wegzudenken.

Literatur

- [1] P. Blanchard und E. Brüning. *Direkte Methoden der Variationsrechnung: Ein Lehrbuch*. Springer Vienna, 2013. ISBN: 9783709122600. URL: <https://books.google.at/books?id=AqrvBgAAQBAJ>.
- [2] N. Hungerbühler. *Einführung in partielle Differentialgleichungen: für Ingenieure, Chemiker und Naturwissenschaftler*. Vdf-Vorlesungsskripte : Mathematik. vdf, Hochschulverl. an der ETH, 2011. ISBN: 9783728134493. URL: https://books.google.at/books?id=g9Jz61D0y%5C_cC.
- [3] H. Kielhöfer. *Variationsrechnung: Eine Einführung in die Theorie einer unabhängigen Variablen mit Beispielen und Aufgaben*. Aus dem Programm Mathematik. Vieweg+Teubner Verlag, 2010. ISBN: 9783834809650. URL: <https://books.google.at/books?id=FXnrmDcumpwC>.
- [4] H. Sagan. *Introduction to the Calculus of Variations*. Dover books on advanced mathematics. Dover Publications, 1969. ISBN: 9780486673660. URL: <https://books.google.at/books?id=abhS8PgpBskC>.