INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

ESCUELA SUPERIOR DE CÓMPUTO - IPN

ALGORITMOS BIOINSPIRADOS

OPTIMIZACIÓN CON RESTRICCIONES

Presenta

Dr. DANIEL MOLINA PÉREZ

danielmolinaperez90@gmail.com

CIUDAD DE MÉXICO

OPTIMIZACIÓN CON RESTRICCIONES

Maximización de Ganancias con Restricciones de Volumen

Una empresa se dedica a la producción de tres tipos de piezas, A, B y C. Cada pieza genera ciertas ganancias por unidad producida, representadas por G_A, G_B y G_C respectivamente. Sin embargo, la pieza A consume V_A unidades de material por unidad producida, la pieza B consume V_B unidades, y la pieza C consume V_C unidades. La empresa cuenta con una disponibilidad total de V_{total} unidades de material.

El objetivo es determinar las cantidades óptimas de las piezas A, B y C a producir para maximizar las ganancias totales, teniendo en cuenta las restricciones de volumen de materiales disponibles. Formule el problema como un modelo de optimización.

OPTIMIZACIÓN CON RESTRICCIONES

Maximización de Ganancias con Restricciones de Volumen

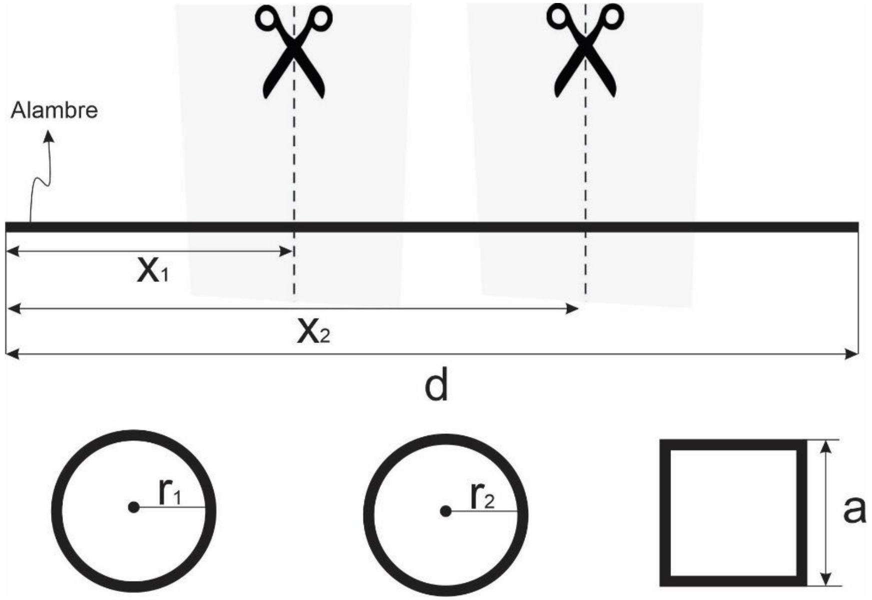
Una empresa se dedica a la producción de tres tipos de piezas, A, B y C. Cada pieza genera ciertas ganancias por unidad producida, representadas por G_A, G_B y G_C respectivamente. Sin embargo, la pieza A consume V_A unidades de material por unidad producida, la pieza B consume V_B unidades, y la pieza C consume V_C unidades. La empresa requiere **que no exista excedente de material**, y cuenta con un total de unidades de material V_{total}.

El objetivo es determinar las cantidades óptimas de las piezas A, B y C a producir para maximizar las ganancias totales, teniendo en cuenta las restricciones de volumen de materiales disponibles. Formule el problema como un modelo de optimización.

OPTIMIZACIÓN CON RESTRICCIONES

Minimización de área por múltiples cortes

Un trozo de alambre se va a cortar en tres partes. Dos porciones para ser dobladas en la forma de un círculo, y la otra en la forma de un cuadrado. ¿En qué puntos se debe cortar el alambre para que la suma de las áreas delimitadas por los círculos y el cuadrado sea la menor posible?



OPTIMIZACIÓN CON RESTRICCIONES

$$min: \quad f(x,y)$$

Sujeto a: $\quad g_k\left(x,y\right) \leq 0, \quad k = 1, \dots, l,$

$$h_k\left(x,y\right) = 0, \quad k = 1, \dots, p,$$

$$\left[x,y\right] \in S,$$

Donde S es el espacio de las variables de decisión, $f(\mathbf{x},\mathbf{y})$ es la función objetivo, $g_k\ (x,y)$ es la k-ésima restricción de desigualdad, y $h_k(x,y)$ es la (k)ésima restricción de igualdad.

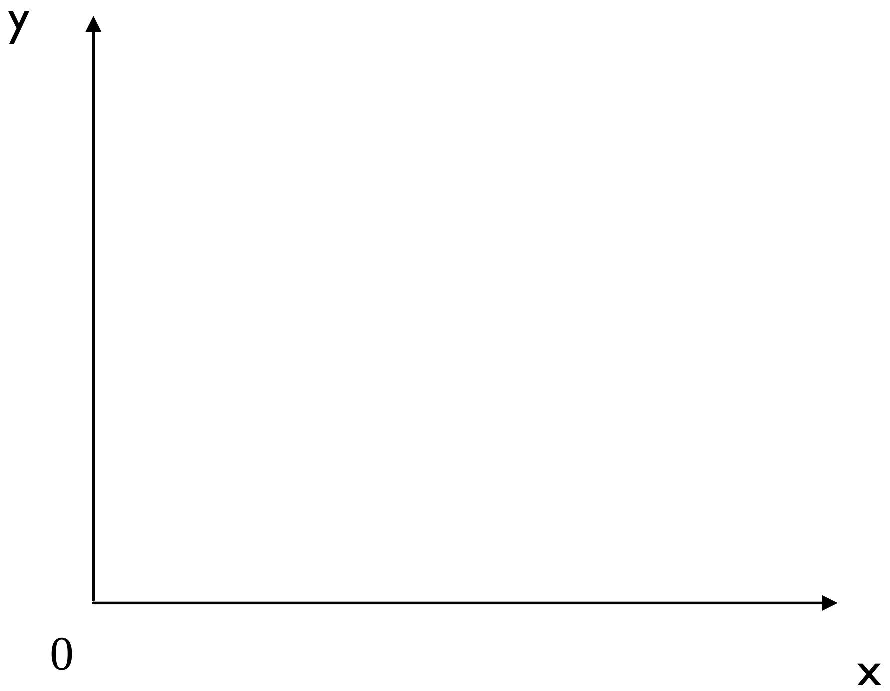
ESPACIO DE BÚSQUEDA: REGIÓN FACTIBLES Y REGIÓN NO FACTIBLE

min: $f(x, y) = 4x + 3y$

Sujeto a: $g_1\left(x, y\right) = 2x + y - 2 \leq 0$

$x \geq 0$

$y \geq 0$



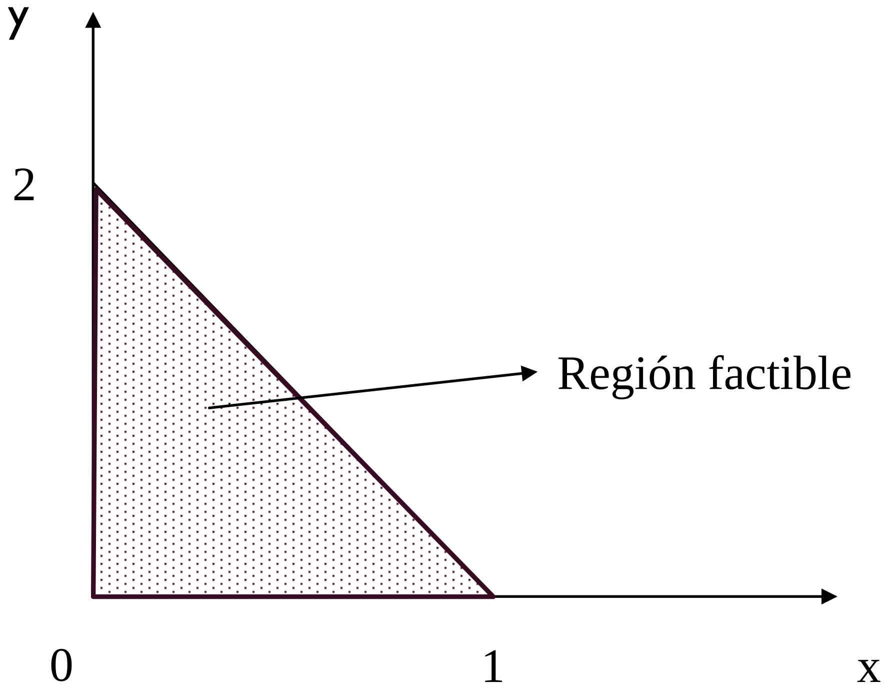
ESPACIO DE BÚSQUEDA: REGIÓN FACTIBLES Y REGIÓN NO FACTIBLE

min: $f(x, y) = 4x + 3y$

Sujeto a: $g_1\left(x, y\right) = 2x + y - 2 \leq 0$

$x \geq 0$

$y \geq 0$



Región Factible: La región factible es el conjunto de todos los puntos posibles (conjuntos de valores de las variables de decisión) de un problema de optimización que satisface las restricciones del problema

Región No Factible: La región no factible es el conjunto de todos los puntos que violan al menos una de las restricciones del problema de optimización

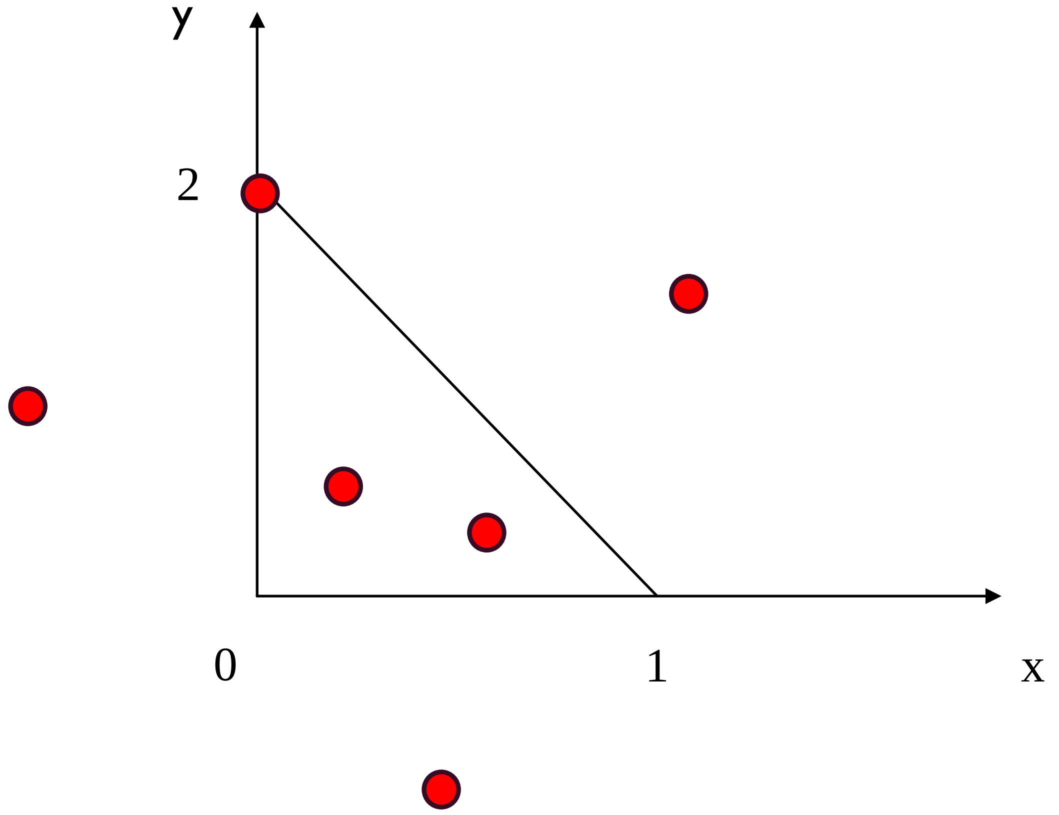
SOLUCIONES FACTIBLES Y NO FACTIBLES

min: $f(x, y) = 4x + 3y$

Sujeto a: $g_1\left(x, y\right) = 2x + y - 2 \leq 0$

$x \geq 0$

$y \geq 0$



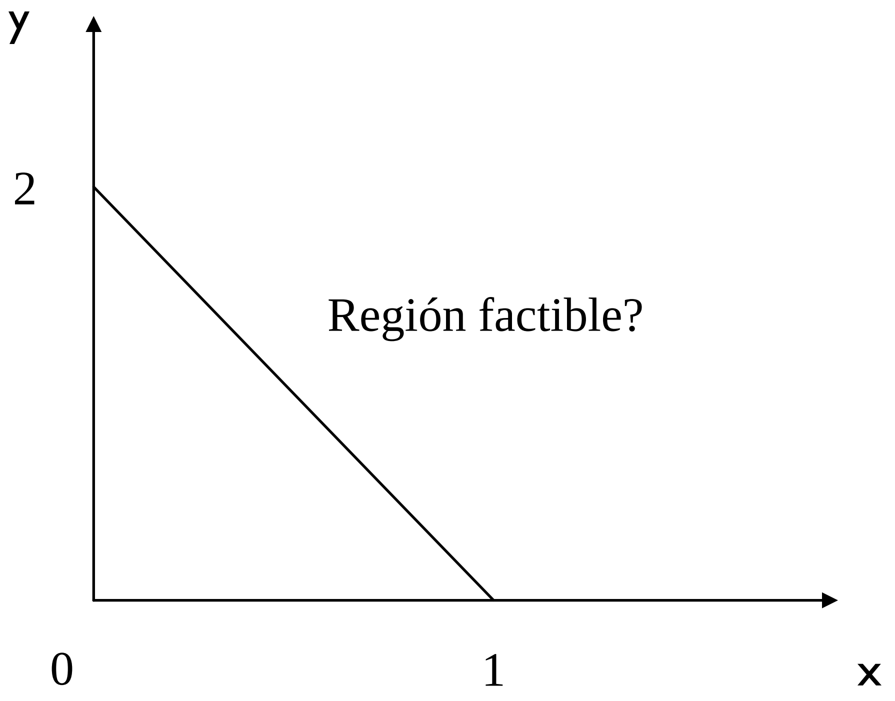
ESPACIO DE BÚSQUEDA: REGIÓN FACTIBLES Y REGIÓN NO FACTIBLE

min: $f(x,y) = 4x + 3y$

Sujeto a: $h_1\left(x,y\right) = 2x + y - 2 = 0$

$x \geq 0$

$y \geq 0$



ESPACIO DE BÚSQUEDA: REGIÓN FACTIBLES Y REGIÓN NO FACTIBLE

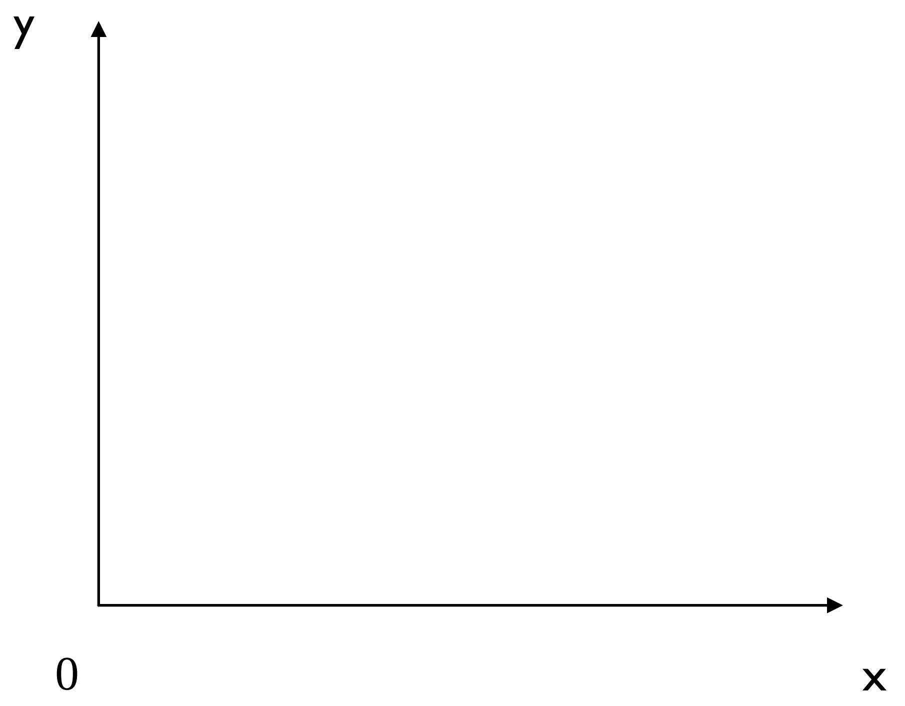
min: $f(x, y) = 4x + 3y$

Sujeto a: $g_1\left(x, y\right) = 2x + y - 2 \leq 0$

$g_2\left(x, y\right) = 3x + 4y - 6 \leq 0$

$x \geq 0$

$y \geq 0$



ESPACIO DE BÚSQUEDA: REGIÓN FACTIBLES Y REGIÓN NO FACTIBLE

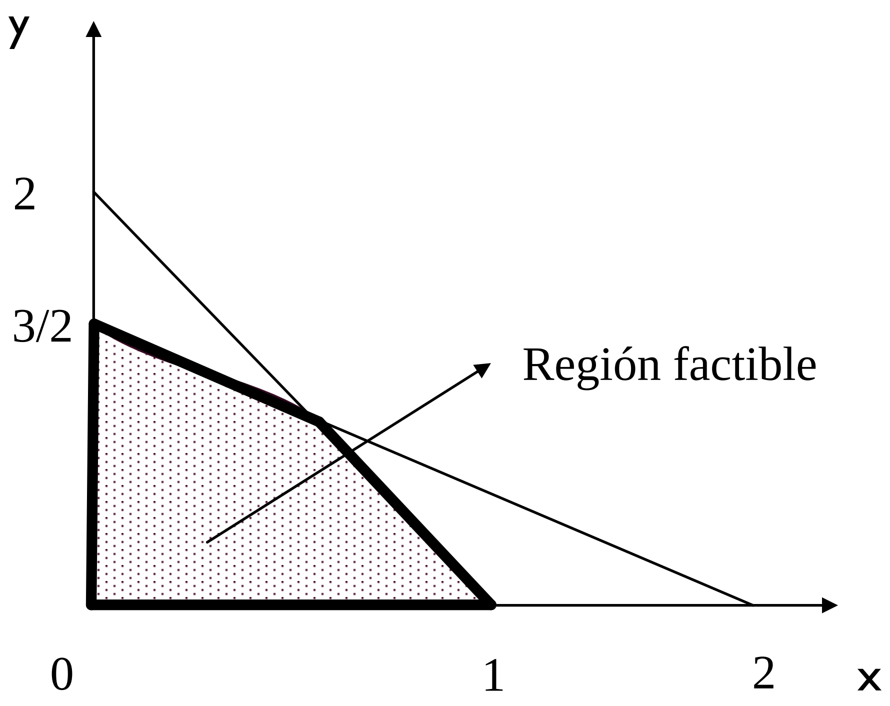
min: $f(x,y) = 4x + 3y$

Sujeto a: $g_1\left(x,y\right) = 2x + y - 2 \leq 0$

$g_2\left(x,y\right) = 3x + 4y - 6 \leq 0$

$x \geq 0$

$y \geq 0$



ESPACIO DE BÚSQUEDA: REGIÓN FACTIBLES Y REGIÓN NO FACTIBLE

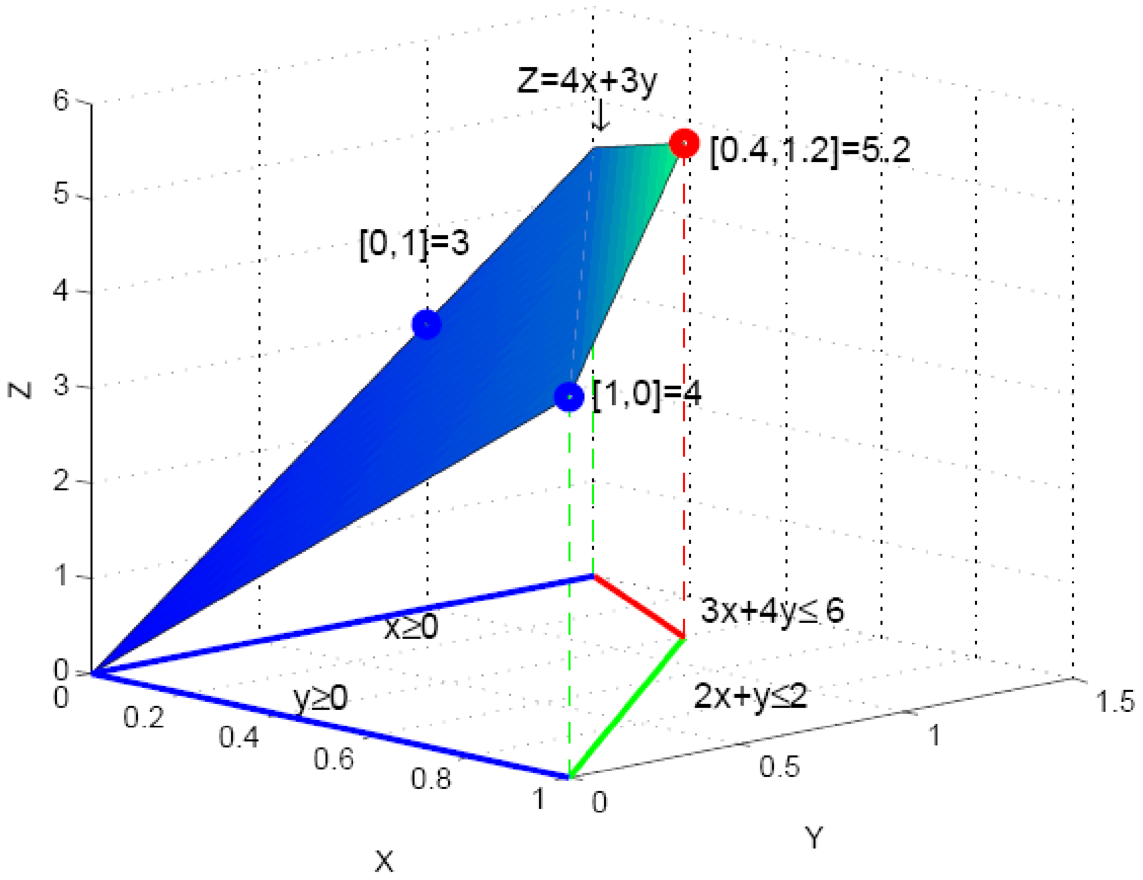
min: $f(x,y) = 4x + 3y$

Sujeto a: $g_1\left(x,y\right) = 2x + y - 2 \leq 0$

$g_2\left(x,y\right) = 3x + 4y - 6 \leq 0$

$x \geq 0$

$y \geq 0$



ESPACIO DE BÚSQUEDA: REGIÓN FACTIBLES Y REGIÓN NO FACTIBLE

min: $f(x, y) = 4x + 3y$

Sujeto a: $g_1\left(x, y\right) = x^2 + y^2 \leq 1$

$x \geq 0$

$y \geq 0$

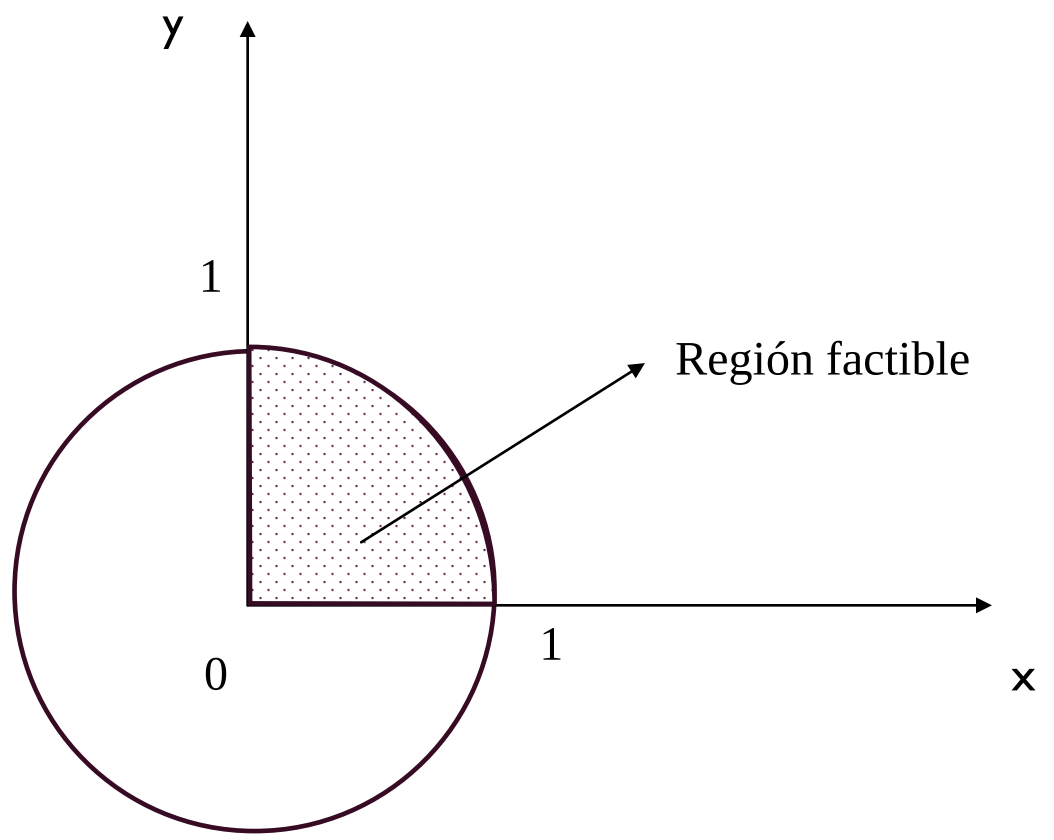
ESPACIO DE BÚSQUEDA: REGIÓN FACTIBLES Y REGIÓN NO FACTIBLE

min: $f(x,y) = 4x + 3y$

Sujeto a: $g_1\left(x,y\right) = x^2 + y^2 \leq 1$

$x \geq 0$

$y \geq 0$

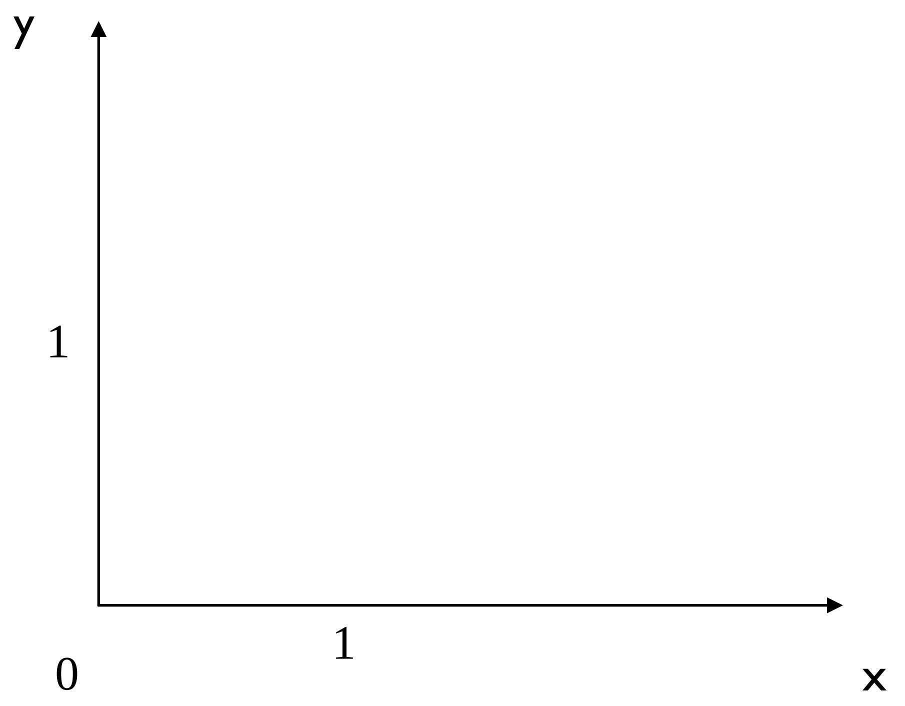


ESPACIO DE BÚSQUEDA: REGIÓN FACTIBLES Y REGIÓN NO FACTIBLE

min: $f(x, y) = 4x + 3y$

Sujeto a: $g_1\left(x, y\right) = (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 1$

$g_2\left(x, y\right) = (x-1)^2 + (y-1)^2 \geq 0.25$

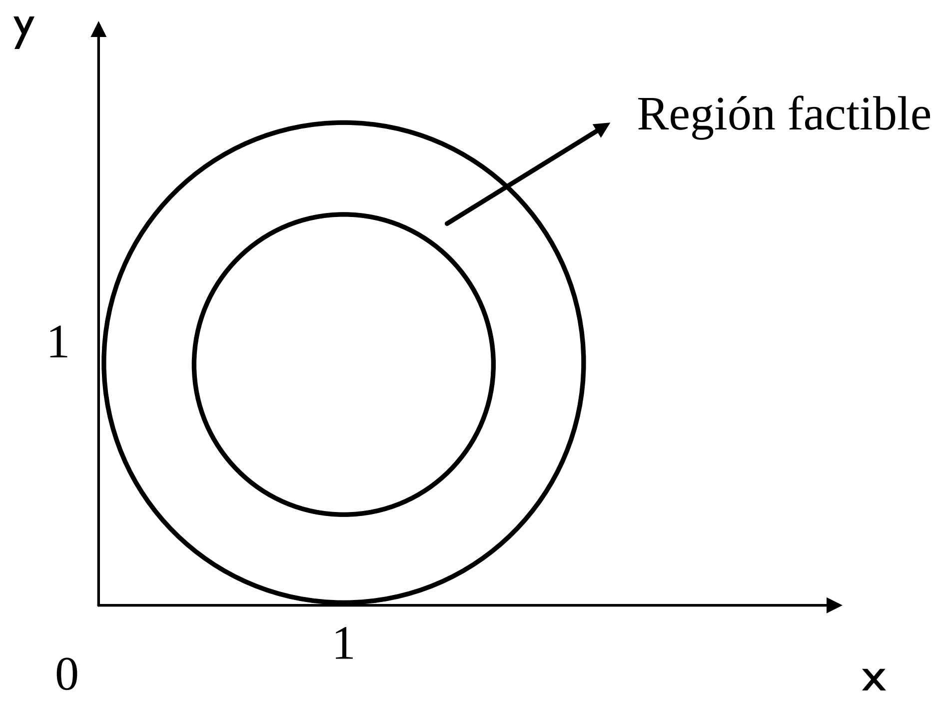


ESPACIO DE BÚSQUEDA: REGIÓN FACTIBLES Y REGIÓN NO FACTIBLE

min: $f(x, y) = 4x + 3y$

Sujeto a: $g_1\left(x, y\right) = (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 1$

$g_2\left(x, y\right) = (x-1)^2 + (y-1)^2 \geq 0.25$



TAREA 2. FUNCIÓN DE RASTRIGIN

Experimento: Con la variante básica de AG desarrollada en clases van a optimizar la función Rastrigin:

$$\text{Min } f(x,y) = 20 + (x^2 - 10\cos(2\pi x)) + (y^2 - 10\cos(2\pi y))$$

$$\text{s. a } x, y \in [-5.12, 5.12]$$

Para ello van a ejecutar AG durante 200 generaciones. Este procedimiento lo harás 10 veces, y en cada ocasión guardarán el mejor resultado obtenido, tal como se muestra. Finalmente, de las 10 ejecuciones se determinará la mejor solución, la media, la peor solución, y la desviación estándar. usar una precisión para la decodificación de 5 y un tamaño de población de 50 individuos o mayor

Ejecución 1 (200 evaluaciones) ---------mejor solución encontrada
Ejecución 2 (200 evaluaciones) ---------mejor solución encontrada
Ejecución 3 (200 evaluaciones) ---------mejor solución encontrada

.

.

.

Ejecución 10 (200 evaluaciones) ---------mejor solución encontrada

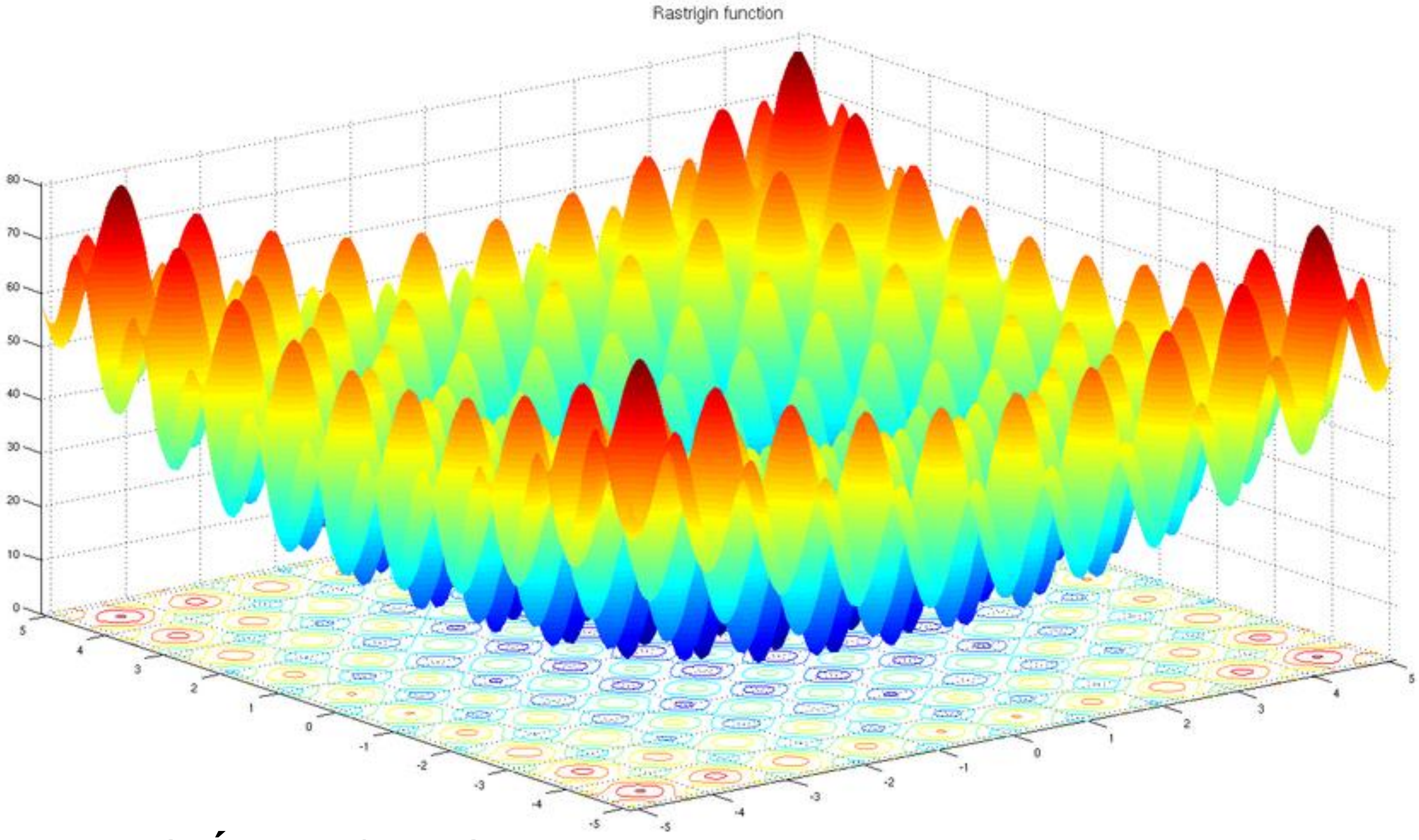
Indicadores	**Valores**
Mejor	
Media	
Peor	
Desv. estandar	

TAREA 2. FUNCIÓN DE RASTRIGIN

Reporte: En un documento plantear el problema de optimización, el resultado de las 10 ejecuciones, la tabla de los indicadores expuesta anteriormente. Una pequeña discusión sobre los resultados que obtuvieron (¿Como se comportó el algoritmo en las 10 ejecuciones, falló alguna vez en encontrar la solución? Comentarios sobre los parámetros que seleccionaron, probabilidad de cruzamiento, mutación, etc.)

Forma de entrega: En un comprimido PDF con su nombre (ej DanielMolinaPerez) adjuntan su reporte en PDF y su código.

Fecha de entrega: Viernes 22 de marzo



FUNCIÓN RASTRIGIN:

$$f(x,y) = 20 + (x^2 - 10\cos(2\pi x)) + (y^2 - 10\cos(2\pi y))$$

$$\text{s. a } x, y \in [-5.12, 5.12]$$

Solución: [0,0; 0]

MANEJO DE RESTRICCIONES

Por lo general los algoritmos bioinspirados son diseñados para resolver problemas sin restricciones, por lo que tenemos que diseñar algún mecanismo que permita incorporar la información pertinente sobre la violación de restricciones en la función de aptitud. Estos mecanismos son conocidos como **manejadores de restricciones**.

1. PENA DE MUERTE

En las estrategias evolutivas ha sido popular una técnica a la que se le conoce como “pena de muerte”, y que consiste en asignar una aptitud arbitrariamente mala (denotado como η) a un individuo que no sea factible, solo considerar el verdadero valor de la función para los individuos factibles.

Análisis

Esta técnica es muy eficiente porque no tenemos que re-calcular las restricciones o la función objetivo ni tenemos que reparar a los individuos no factibles. Sin embargo, tiene varios inconvenientes. Por ejemplo, si la población inicial no tiene ningún individuo factible, la búsqueda no progresará (habrá estancamiento) porque todos los individuos tendrán la misma aptitud. Algunos autores han explorado esta técnica, concluyendo que solo puede usarse en espacios de búsqueda convexos y en aquellos casos en los que la zona factible constituya una parte razonablemente grande del espacio total de búsqueda. Asimismo, esta técnica sólo puede lidiar con restricciones de desigualdad.

I. PENA DE MUERTE

Método

1. Evaluamos cada solución en el conjunto de restricciones. Si la solución viola al menos una restricción su aptitud es cero

Ejemplo: individuo [0 2]

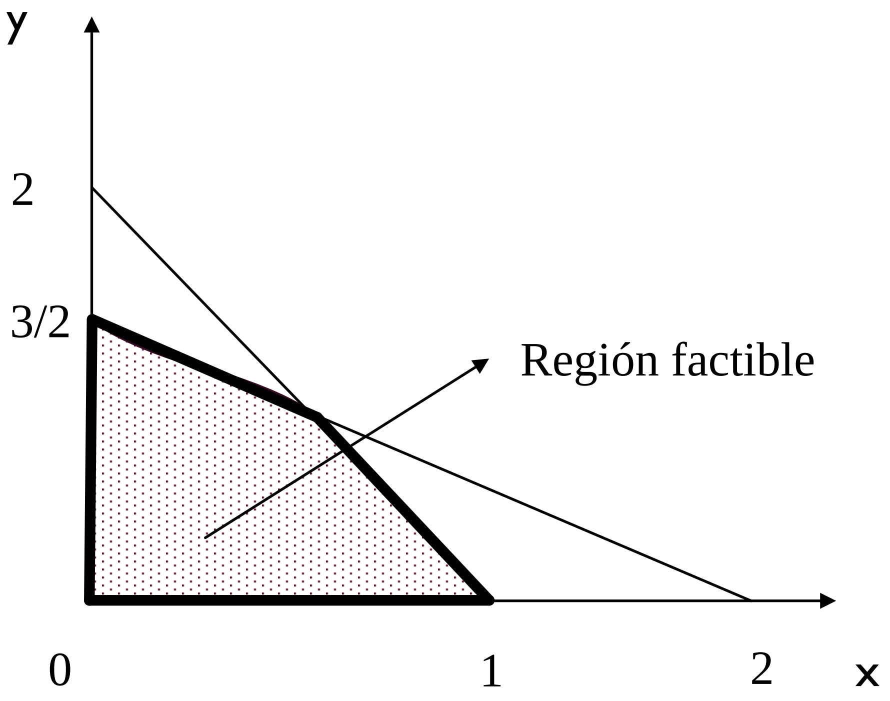
min: $f(x,y) = 4x + 3y$

Sujeto a: $g_1\left(x,y\right) = 2x + y - 2 \leq 0$

$g_2\left(x,y\right) = 3x + 4y - 6 \leq 0$

$x \geq 0$

$y \geq 0$



1. PENA DE MUERTE

Ejercicio: Calcula la aptitud de cada individuo del siguiente problema usando pena de muerte como manejador de restricciones con $\eta = 1 \times 10E6$. Cada individuo está codificado con 5 bits con una precisión de 1 lugares decimales.

min: $f(x, y) = 4x + 3y$

Sujeto a: $g_1(x, y) = 2x + y - 2 \leq 0$

$g_2(x, y) = 3x + 4y - 6 \leq 0$

$x \in [0, 2]$

$y \in [0, 3]$

Población en bits

Ind 1	0	0	1	1	0	0	1	0	0	1
Ind 2	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1
Ind 3	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0
Ind 4	0	1	1	0	0	1	0	1	1	0

Población en reales

			$f(x, y)$	$f_{PM}(x, y)$
Ind 1				
Ind 2				
Ind 3				
Ind 4				

$$x_{real} = li + \frac{[x_{entero} \times (ls - li)]}{2^L - 1}$$

1. MÉTODOS DE PENALIZACIÓN

Estos métodos funcionan agregando términos de penalización a la función objetivo del problema, de modo que las violaciones de las restricciones se reflejen en un aumento en el valor de la función objetivo. Cuando una solución propuesta viola una restricción, se le asigna una penalización **proporcional** a la magnitud de la violación. La penalización puede ser lineal o no lineal y puede ajustarse según la gravedad de la violación.

La idea es transformar el problema original con restricciones en un problema sin restricciones, pero con una función objetivo modificada que penaliza las violaciones de las restricciones. Luego, se aplica un algoritmo de optimización estándar para encontrar el óptimo de esta nueva función objetivo modificada.

La función objetivo empleada por estos métodos tiene la siguiente forma:

$$F_P(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + \lambda_P P(\mathbf{x})$$

Donde $f(\mathbf{x})$ es la función objetivo original; $P(\mathbf{x})$ es la función de penalización; λ_P es el parámetro de penalización; $F_P(\mathbf{x})$ es la nueva función penalizada

1. PENALIZACIÓN EXTERIOR

En este método la penalización viene dada de la siguiente forma:

$$P(x) = \sum_{i=1}^{n} \{\max(g_i(\mathbf{x}), 0)\}^2 + \sum_{j=1}^{m} \{h_j(\mathbf{x})\}^2$$

$$\begin{aligned} min: &\quad f(x,y) \\ \text{Sujeto a:} &\quad g_i(x,y) \le 0, \quad i = 1, \dots, l, \\ &\quad h_j(x,y) = 0, \quad j = 1, \dots, p, \\ &\quad [x,y] \in S, \end{aligned}$$

Donde $g_i(x)$es la restricción de desigualdad i-ésima; $h_j(x)$es la restricción de igualdad j-ésima.

Caso 1. $h_j(x,y) \le 0$ or $h_j(x,y) > 0$ $\qquad \{h_j(\mathbf{x})\}^2 > 0$

Caso 2. $h_j(x,y) = 0$ $\qquad \{h_j(\mathbf{x})\}^2 = 0$

Caso 3. $g_i(x,y) \le 0$ $\qquad max(g_i(\mathbf{x}), 0) = 0$

Caso 4. $g_i(x,y) > 0$ $\qquad max(g_i(\mathbf{x}), 0) = g_i(\mathbf{x})$

I. PENALIZACIÓN EXTERIOR

Ejercicio: Calcula la aptitud de cada individuo del siguiente problema usando penalización externa como manejador de restricciones con $\lambda_P = 10$. Cada individuo está codificado con 5 bits con una precisión de 1 lugares decimales.

min: $f(x, y) = 4x + 3y$

s.a: $g_1(x, y) = 2x + y - 2 \leq 0$

$g_2(x, y) = 3x + 4y - 6 \leq 0$

$x \in [0, 2]$

$y \in [0, 3]$

Población en bits

Ind 1	0	0	1	1	0	0	1	0	0	1
Ind 2	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1
Ind 3	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0
Ind 4	0	1	1	0	0	1	0	1	1	0

Población en reales

			$f(x,y)$	$g_1(x,y)$	$g_2(x,y)$	$P(x,y)$	$F_P(x,y)$
Ind 1	0.387	0.871					
Ind 2	1.097	0,097					
Ind 3	0.129	1.548					
Ind 4	0.774	2.129					

$$F_P(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + \lambda_P P(\mathbf{x})$$

$$P(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} \{\max(g_i(\mathbf{x}), 0)\}^2 + \sum_{j=1}^{m} \{h_j(\mathbf{x})\}^2$$