



Lenguajes



Teoría Computacional
Prof. Luis Enrique Hernández Olvera

1

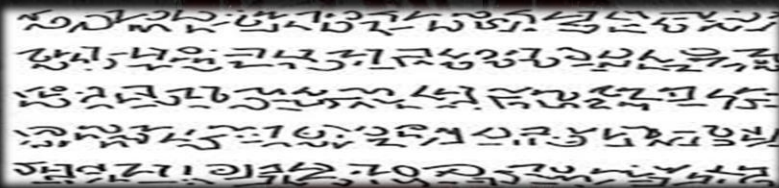
1



Lenguaje

- Un lenguaje es un conjunto de palabras (*cadenas*) de un determinado alfabeto Σ .
- Formalmente: Se llama lenguaje sobre un alfabeto a todo subconjunto del lenguaje universal de Σ .

$$L \subseteq \Sigma^*$$



Teoría Computacional
Prof. Luis Enrique Hernández Olvera

2

2



Lenguaje

- En particular, el conjunto vacío Φ es un subconjunto de Σ^* y se llama por ello lenguaje vacío. Este lenguaje no debe confundirse con el que tiene como único elemento la palabra vacía $\{\lambda\}$, que también es un subconjunto (diferente) de Σ^* . Para distinguirlos, hay que fijarse en su cardinalidad (número de símbolos).

$$C(\Phi)=0$$

$$C(\{\lambda\})=1$$

Teoría Computacional
Prof. Luis Enrique Hernández Olvera

3

3



Lenguaje

- Obsérvese que tanto Φ como $\{\lambda\}$ son lenguajes sobre cualquier alfabeto.
- Por otra parte, un alfabeto puede considerarse también como uno de los lenguajes generados por él mismo: el que contiene todas las palabras de una sola letra (un solo símbolo).

Teoría Computacional
Prof. Luis Enrique Hernández Olvera

4

4



Operaciones entre lenguajes

- Existen las siguientes operaciones con lenguajes:
 - Unión*
 - Intersección*
 - Diferencia*
 - Concatenación*
 - Potencia*
 - Inversa*
 - Cerradura de Kleene*
 - Cerradura Positiva*
- Para explicarlas considérense dos lenguajes definidos sobre el mismo alfabeto:

$$L_1 \subseteq \Sigma^* \text{ y } L_2 \subseteq \Sigma^*$$

Teoría Computacional
Prof. Luis Enrique Hernández Olvera

5

5



Operaciones entre lenguajes

- Unión:** se denomina unión de los dos lenguajes $L_1 \cup L_2$ al conjunto formado por las cadenas que pertenezcan indistintamente a uno u otro de los dos lenguajes. Por lo tanto:

$$L_1 \cup L_2 = \{x | x \in L_1 \text{ ó } x \in L_2\}$$

Teoría Computacional
Prof. Luis Enrique Hernández Olvera

6

6



La unión de lenguajes tiene las siguientes propiedades:

- i. Operación cerrada: la unión de dos lenguajes sobre el mismo alfabeto es también un lenguaje sobre dicho alfabeto.
- ii. Propiedad asociativa:

$$(L_1 \cup L_2) \cup L_3 = L_1 \cup (L_2 \cup L_3)$$

- iii. Existencia de un elemento neutro: cualquiera que sea el lenguaje L , el lenguaje vacío Φ cumple que:

$$\Phi \cup L = L \cup \Phi = L$$

Teoría Computacional
Prof. Luis Enrique Hernández Olvera

7

7



La unión de lenguajes tiene las siguientes propiedades:

- iv. Propiedad conmutativa: cualesquiera que sean L_1 y L_2 , se verifica que:

$$L_1 \cup L_2 = L_2 \cup L_1$$

- v. Propiedad idempotente: cualquiera que sea L , se verifica que:

$$L \cup L = L$$

Teoría Computacional
Prof. Luis Enrique Hernández Olvera

8

8



Operaciones entre lenguajes

2. **Intersección.** La intersección de los lenguajes L_1 y L_2 es el lenguaje $L_1 \cap L_2$ está formado solo por las palabras que pertenecen a los lenguajes L_1 y L_2 a la vez.

$$L_1 \cap L_2 = \{x | x \in L_1 \text{ y } x \in L_2\}$$

simultáneamente

Teoría Computacional
Prof. Luis Enrique Hernández Olvera

9

9



Operaciones entre lenguajes

3. **Diferencia.** La diferencia de los lenguajes L_1 y L_2 es el lenguaje $L_1 - L_2$, el cual está formado solo por las cadenas que pertenecen al lenguaje L_1 que no existen en el lenguaje L_2 a la vez.

$$L_1 - L_2 = \{x | x \in L_1 \text{ y } x \notin L_2\}$$

Teoría Computacional
Prof. Luis Enrique Hernández Olvera

10

10



Operaciones entre lenguajes

- Consideremos el alfabeto $\Sigma = \{0, 1\}$ y los lenguajes:

$$A = \{\lambda, 0, 1, 10, 11\}$$

$$B = \{\lambda, 1, 0110, 11010\}$$

- Entonces:

$$A \cup B = \{\lambda, 0, 1, 10, 11, 0110, 11010\}$$

$$A \cap B = \{\lambda, 1\}$$

$$A - B = \{0, 10, 11\}$$

Teoría Computacional
Prof. Luis Enrique Hernández Olvera

11

11



Operaciones entre lenguajes

- 4. Concatenación:** Sean dos lenguajes definidos sobre el mismo alfabeto $L_1 \subseteq \Sigma^*$, $L_2 \subseteq \Sigma^*$, se denomina concatenación de los dos lenguajes $L_1 \cdot L_2$ ($L_1 L_2$) al conjunto de todas las cadenas formadas concatenando una palabra del primer lenguaje con una del segundo.

$$L_1 \cdot L_2 = \{w \cdot x \mid w \in L_1 \text{ y } x \in L_2\}$$

- La definición anterior sólo es válida si L_1 y L_2 contienen al menos un elemento. Para la concatenación de L con el lenguaje vacío Φ se tiene que: $\Phi L = L \Phi = \Phi$

Teoría Computacional
Prof. Luis Enrique Hernández Olvera

12

12



Operaciones entre lenguajes

- En general $AB \neq BA$.
Ejemplo
- Si $\Sigma = \{a, b, c\}$, $A = \{a, ab, ac\}$, $B = \{b, b^2\}$, entonces
- $AB = \{ab, ab^2, \text{ab}^2, ab^3, acb, acb^2\}$.
- $BA = \{ba, bab, bac, b^2a, b^2ab, b^2ac\}$

Teoría Computacional
Prof. Luis Enrique Hernández Olvera

13

13



Operaciones entre lenguajes

- La concatenación de lenguajes tiene las siguientes propiedades:
- i. Operación cerrada: la concatenación de dos lenguajes sobre el mismo alfabeto es también un lenguaje sobre el mismo alfabeto.
- ii. Propiedad asociativa: $(L_1 L_2)L_3 = L_1(L_2 L_3)$
- iii. Existencia de un elemento neutro: cualquiera que sea el lenguaje L , el lenguaje de la palabra vacía cumple que:

$$\{\lambda\}L = L\{\lambda\} = L$$

Teoría Computacional
Prof. Luis Enrique Hernández Olvera

14

14



Operaciones entre lenguajes

5. Potencia de un lenguaje: Desde el punto de vista estricto esta no es una nueva operación, sino un caso particular de la anterior. Se denomina potencia *i-ésima* de un lenguaje a la operación que consiste en concatenarlo consigo mismo *i*-veces.

$$L^n = \begin{cases} \{\lambda\}, & \text{si } n = 0 \\ L \cdot L^{n-1}, & \text{si } n \geq 1 \end{cases}$$

Definiremos también:

- $L^1 = L$
- $L^{i+1} = L^i L = L L^i$ ($i > 0$)
- $L^i L^j = L^{i+j}$ ($i, j > 0$)
- $L^0 = \{\lambda\}$

Teoría Computacional
Prof. Luis Enrique Hernández Olvera

15

15



Operaciones entre lenguajes

6. Reflexión de lenguajes: Sea L un lenguaje cualquiera. Se llama *lenguaje reflejo* o *inverso* de L , y se representa con:

$$L^{-1} : \{ x^{-1} \mid x \in L \}$$

L^{-1} es el lenguaje que contiene todas las palabras inversas de L .

Teoría Computacional
Prof. Luis Enrique Hernández Olvera

16

16



Operaciones entre lenguajes

- 7. Cierre u operación estrella (cerradura de Kleene):** La operación cierre de un lenguaje L es otro L^* obtenido uniendo el lenguaje L con todas sus potencias posibles, incluso L^0 .

$$L^* = \{\lambda\} \cup \{L\} \cup \{LL\} \cup \{LLL\} \dots = \bigcup_{n=0}^{\infty} L^n$$

- Puesto que el alfabeto Σ es también un lenguaje sobre Σ , puede aplicársele esta operación.

Teoría Computacional
Prof. Luis Enrique Hernández Olvera

17

17



Operaciones entre lenguajes

- 8. Cierre o clausura positiva:** La operación de cierre positivo de un lenguaje L es otro lenguaje L^+ obtenido uniendo el lenguaje L con todas sus potencias posibles, excepto L^0 .

$$L^+ = \{L\} \cup \{LL\} \cup \{LLL\} \dots = \bigcup_{n=1}^{\infty} L^n$$

- Ninguna clausura positiva contiene la palabra vacía, a menos que dicha palabra este en L .
- Puesto que el alfabeto Σ es también un lenguaje sobre Σ , puede aplicársele esta operación.

$$\Sigma^+ = \Sigma^* - \{\lambda\}$$

Teoría Computacional
Prof. Luis Enrique Hernández Olvera

18

18



Operaciones entre lenguajes

- Son evidentes las siguientes identidades:

$$L^* = L^+ \cup \{\lambda\}$$

$$L^+ = L L^* = L^* L$$

Teoría Computacional
Prof. Luis Enrique Hernández Olvera

19

19



Ejercicios: Lenguajes

1. Sea:

$$\Sigma_1 = \{a, b, c, d, \dots, z\}$$

- $L_1 = \{\text{anita, lava, la, tina}\}$
- $L_2 = \{\text{hola, mundo}\}$
- $L_3 = \{\text{uno, dos, tres, cuatro, cinco}\}$

Obtener:

- $(L_1 \cup L_2) L_3$
- $(L_1 L_2) \cup L_3$
- L_1^2
- L_2^+
- L_2^*
- L_2^{-1}

Teoría Computacional
Prof. Luis Enrique Hernández Olvera

20

20



Ejercicios: Lenguajes

2. Sea:

- $\Sigma_1 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, F\}$
- $L_1 = \{001AF, 10FFAA, 109012, 667800\}$
- $L_2 = \{00, 10, 12, 45, 66, 77\}$
- $L_3 = \{1, 0, 3, 5, 6, F, A, B, C\}$

Obtener:

- $(L_1 \cup L_2) L_3$
- $(L_1 L_2) \cup L_3$
- L_1^2
- L_2^+
- $L_2^{-1} \cup (L_1 \cup L_3)$
- L_2^{-1}