

ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΟΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ

ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ Η/Υ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ

Εργασία εξαμήνου 2017-18

ΔΙΔΑΣΚΩΝ: ΕΥΣΤΡΑΤΙΟΣ ΓΑΛΛΟΠΟΥΛΟΣ

Διονυσόπουλος Φώτιος 5753

Ιανουάριος 2018

Contents

1	Μέρος Α	2
1.1	Υποερώτημα 1	2
1.2	Υποερώτημα 2	2
1.2.1	Σχέση τάξης <i>Sherman-Morrison-Wodbury</i>	2
1.2.2	Εκτέλεση με τριδιαγώνια μητρώα	2
1.2.3	Μητρώα για τα οποία δεν ισχύει η σχέση SMW	2
1.3	Υποερώτημα 3	3
1.4	Υποερώτημα 4	4
1.5	Υποερώτημα 6	4
2	Μέρος Β	5
2.1	Υποερώτημα 1	5
2.2	Υποερώτημα 2	5
2.3	Υποερώτημα 3	5
2.4	Υποερώτημα 4	5
3	Μέρος Γ	6
3.1	Υποερώτημα 1	6
3.2	Υποερώτημα 2	6
3.3	Υποερώτημα 3	7
3.4	Υποερώτημα 4	7
3.5	Υποερώτημα 5	7
3.6	Υποερώτημα 6	7
3.7	Υποερώτημα 7	7
4	Μέρος Δ	10
4.1	Υποερώτημα 1	10
4.2	Υποερώτημα 2	10
4.3	Υποερώτημα 3	10
4.4	Υποερώτημα 4	10
5	Χαρακτηριστικά συστήματος	14

1 Μέρος Α

Ζητούμενο του πρώτου μέρους είναι η κατασκευή της μεθόδου "Boosting" με βάση την εργασία του *G.W.Stewart*.

1.1 Υποερώτημα 1

Εγκαταστάθηκε με επιτυχία το Matrix Computation Toolbox του N. Higham.

1.2 Υποερώτημα 2

1.2.1 Σχέση τάξης *Sherman-Morrison-Wodbury*

Κατασκευάστηκε η συνάρτηση A_2.a η οποία δημιουργώντας τυχαία μητρώα A, W και H Τα αποτελέσματα παρατίθενται στον πίνακα 1.

n	t	SMW
10	2	Αληθής
10	8	Αληθής
10	10	Αληθής
10	12	Ψευδής
20	20	Αληθής
10	100	Ψευδής
1000	100	Αληθής
1000	2000	Ψευδής

Table 1: Αποτελέσματα SMW

Συνήθως, όταν το t είναι μεγαλύτερο από το n τότε συνήθως η ισότητα δεν ισχύει. Επίσης, όταν είναι τετραγωνικό το μητρώο, τότε ισχύει.

1.2.2 Εκτέλεση με τριδιαγώνια μητρώα

Δημιουργήθηκε η συνάρτηση A_2.b η οποία είναι ίδια με την προηγούμενη με την μόνη διαφορά ότι κατασκευάζει το μητρώο A χρησιμοποιώντας την εντολή *tril* της *MatLab*, δημιουργώντας έτσι, ένα τριδιαγώνιο μητρώο. Τα αποτελέσματα παρατίθενται στον πίνακα 2.

1.2.3 Μητρώα για τα οποία δεν ισχύει η σχέση SMW

Σε αυτό το μέρος, εκτελέστηκε η συνάρτηση για ειδικά μητρώα τα οποία βρίσκονται στο Toolbox του Highman. Τα αποτελέσματα παρατίθενται στον πίνακα 3.

n	t	SMW
10	2	Αληθής
10	8	Αληθής
10	10	Αληθής
10	12	Ψευδής
20	20	Αληθής
10	100	Ψευδής
1000	100	Ψευδής
1000	2000	Ψευδής

Table 2: Αποτελέσματα SMW

n	t	Μητρώο	SMW
10	2	makejcf	Αληθής
10	10	makejcf	Αληθής
20	20	makejcf	Αληθής
10	100	makejcf	Ψευδής
10	2	augment	Αληθής
10	10	augment	Αληθής
20	20	augment	Αληθής
10	100	augment	Ψευδής

Table 3: Αποτελέσματα SMW με ειδικά μητρώα

1.3 Υποερώτημα 3

Στο συγκεκριμένο υποερώτημα, ζητούμενο ήταν η υλοποίηση της LU με την μέθοδο Boosting με βάση το paper του G.W.Stewart. Για την υλοποίηση του μέρους αυτού χρησιμοποιήθηκε μια ενδεικτική υλοποίηση της κανονικής LU με οδήγηση. Πιο αναλυτικά, με την εντολή `"/"` (Forward Slash) της MatLab, γίνεται υπολογισμός των πολλαπλασιαστών που μηδενίζουν τα στοιχεία κάτω από τον οδηγό της στήλης του μητρώου. Έπειτα, έγινε ο μηδενισμός των στοιχείων χρησιμοποιώντας τους πολλαπλασιαστές και κάνοντας την αφαίρεση των γραμμών μεταξύ τους. Όσον αφορά το Boosting, η φιλοσοφία είναι ότι εάν το στοιχείο διαγώνιο στοιχείο (i, i) είναι μικρότερο από ένα κατώφλι τότε στο στοιχείο αυτό προστίθενται μια τιμή έτσι ώστε να είναι αρκετά μεγάλο για να μην γίνουν ενναλλαγές γραμμών. Ο αλγόριθμος της επίλυσης LU, βασίστηκε στο αρχείο `ger` του MC Toolbox, έγιναν μικρές απλοποιήσεις με στόχο την καλύτερη κατανόηση του. Στο κώδικα εμπεριέχονται σχόλια επεξήγησης για καλύτερη κατανόηση.

1.4 Υποερώτημα 4

Εκτελώντας την εντολή *rank* της *MatLab* με όρισμα το $LU - A$, παρατηρήθηκε ότι η τάξη του μητρώου είναι ίδια με τις φορές που έγινε η τόνωση.

1.5 Υποερώτημα 6

Σε αυτό το μέρος, ζητούμενο ήταν η υλοποίηση συνάρτησης η οποία λύνει το σύστημα $Ax = b$ με τη χρήση της τόνωσης. Οι διαφορές με την *luboost* ήταν ότι προστέθηκε η συνθήκη *if* η οποία ελέγχει αν το διαγώνιο στοιχείο είναι μικρότερο του 10^{-2} , εάν ήταν τότε γίνεται η τόνωση. Επίσης, προστέθηκαν στο τέλος της συνάρτησης οι εντολές $y = L/b$ και $x = U/y$, οι οποίες χρησιμοποιούν τα L και U για να λύσουν το σύστημα $Ax=b$.

2 Μέρος Β

2.1 Υποερώτημα 1

Στο πρώτο μέρος υλοποιήθηκε αλγόριθμος με βάση την αναδρομή $Ax^{(k+1)} = -Ex^k + b$. Ο κώδικας, βρίσκεται στο αρχείο *B_1* και με την χρήση της *while* γίνεται η αναδρομή με συνθήκη $\|Ax - b\| > 10^{-6}$ το οποίο σημαίνει ότι η επανάληψη συνεχίζεται μέχρι το κατάλοιπο να γίνει μικρότερο του 10^{-6} .

2.2 Υποερώτημα 2

Θα πρέπει η φασματική ακτίνα του μητρώου γίνει μικρότερη από 1. Εάν η μέγιστη απόλυτη ιδιοτιμή είναι μικρότερη από τη μονάδα τότε ξέρουμε εξ' αρχής ότι η μέθοδος θα συγκλίνει.

2.3 Υποερώτημα 3

Στο 3ο μέρος, δημιουργήθηκαν τα μητρώα όπως τα ζητά στην εκφώνηση και εκτελέστηκε ξανά ο αλγόριθμος για όλους τους συνδυασμούς των n και h .

2.4 Υποερώτημα 4

Για το πρώτο υποερώτημα, δημιουργήθηκε script, το οποίο κατασκευάζει τυχαίους W, H στις σωστές διαστάσεις και παράγει το $A = A + WH^T$. Με εντολή *single* της *MatLab* οι κατάλληλες μεταβλητές γίνονται μονής ακρίβειας. Στην συνέχεια βρίσκεται ο αλγόριθμος της επαναληπτικής εκλέπτυνσης ο οποίος επίσης συγκλίνει όταν η φασματική ακτίνα του μητρώου γίνει μικρότερη από 1. Τα πειράματα για διάφορα μητρώα έδειξαν ότι ο αλγόριθμος επαναληπτική εκλέπτυνσης είναι πιο ακριβής σε σχέση με τον παραπάνω αλγόριθμο. Επίσης, χάρη στο γεγονός ότι η ακρίβεια στις περισσότερες μεταβλητές είναι μονή, ο χρόνος μειώθηκε.

3 Μέρος Γ

Στόχος αυτού του ερωτήματος ήταν η επίλυση συστημάτων με ειδική μορφή μπλοκ. Πιο συγκεκριμένα, σκοπός ήταν η δημιουργία μητρώων «βέλους» και η εφαρμογή της μεθόδου LU σε αυτά.

3.1 Υποερώτημα 1

Υλοποιήθηκε κώδικας ο οποίος, με την χρήση της συνάρτησης *kron*, δημιουργεί ένα βορειοδυτικό μητρώο. Ο αλγόριθμος εκτελεί την εξής διαδικασία: αρχικά κατασκευάζει τα μητρώα D και T. Στη συνέχεια, δημιουργείται η διαγώνιος του μητρώου χρησιμοποιώντας την *kron* με όρισμα το ταυτοτικό μητρώο διάστασης n και το μητρώο D. Έπειτα, δημιουργείται ένας πίνακας διάστασης n ο οποίος έχει '1' στην πρώτη γραμμή και στήλη με εξαίρεση το στοιχείο (1,1) το οποίο είναι '0', ο πίνακας αυτός τοποθετείται ως όρισμα στην *kron* για την εύρεση του γινομένου κρόνεκερ. Οι δυο παραπάνω πίνακες αθροίζονται έχοντας το επιθυμητό αποτέλεσμα.

3.2 Υποερώτημα 2

Τα αποτελέσματα για $m=4$ και $n=20$ φαίνεται στο σχήμα 1

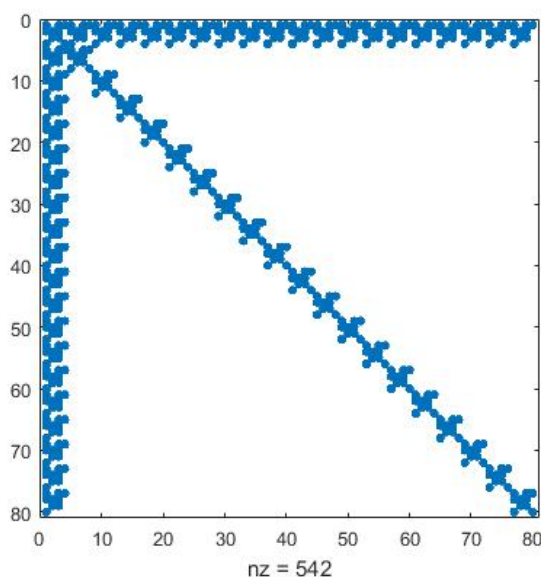


Figure 1: Βορειοδυτικό μητρώο

3.3 Υποερώτημα 3

Η αναπαράσταση των μητρώων L και U φαίνεται στο σχήμα 2

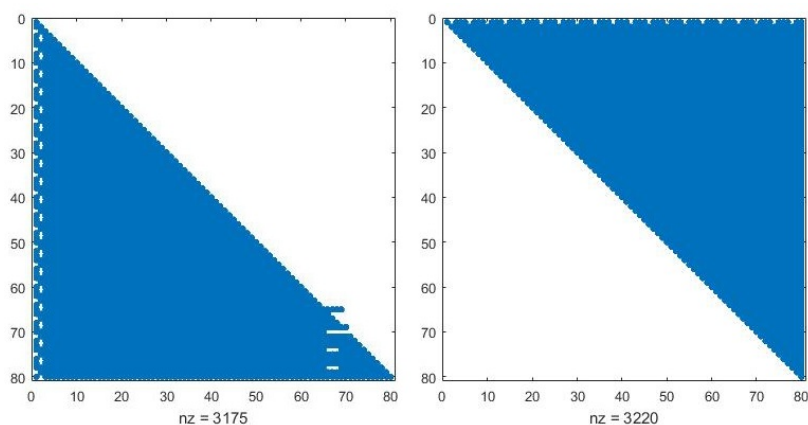


Figure 2: L U για Βορειοδυτικό μητρώο.

3.4 Υποερώτημα 4

Η τιμή του γεμίματος είναι 11.6513

3.5 Υποερώτημα 5

Η τιμή του γεμίματος μειώθηκε μετατρέποντας το μητρώο από $B\Delta$ σε NA . Το μητρώο W είναι ένα μητρώο μετάθεσης το οποίο κάνει εναλλαγές μεταξύ των πρώτων και τελευταίων m γραμμών. Το ανάστροφο W εναλλάσσει τις πρώτες με τις τελευταίες m στήλες. Το νέο γέμισμα έχει τιμή 1.4668. Προφανώς, πρόκειται για πολύ μικρότερη τιμή. Τα αποτελέσματα των L και U φαίνονται στο σχήμα 3, επίσης το νέο B βρίσκεται στο σχήμα 4.

3.6 Υποερώτημα 6

Τα αποτελέσματα παρατίθενται στον Table 4.

Τα αποτελέσματα για το $A \setminus b$ είναι αρκετά πιο γρήγορα από την λύση του $WAW^T Wx = Wb$. Σε αυτή την περίπτωση δεν βοήθησε η αλλαγή του μητρώου από $B\Delta$ σε NA .

3.7 Υποερώτημα 7

Τα αποτελέσματα παρατίθενται στον Table 5. Μεταξύ τους, όπως και πριν, δείχνουν ότι η κλασσική επίλυση συστήματος είναι αρκετά πιο γρήγορη. Σε

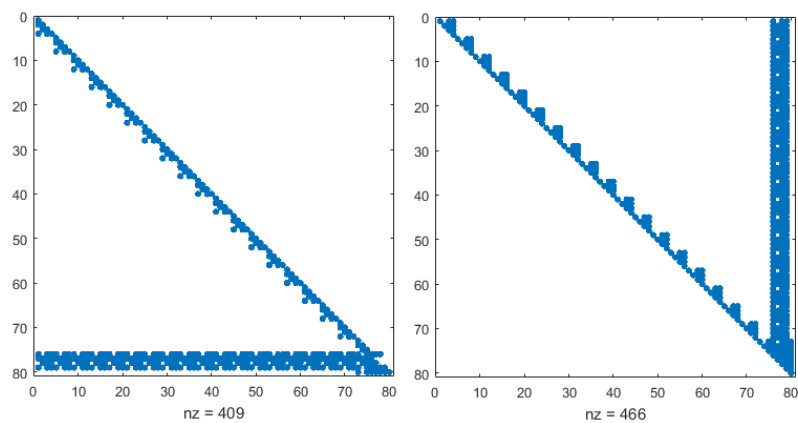


Figure 3: L U για Νοτιοανατολικό μητρώο.

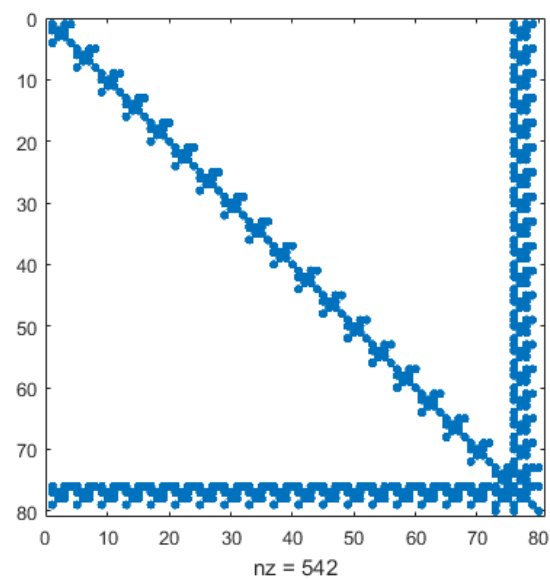


Figure 4: Νοτιοανατολικό μητρώο

(m,n)	$A \setminus b$	$WAW^TWx = Wb$	$\Sigma\phi\acute{\alpha}\lambda\mu\alpha$
(4, 250)	0.069943	0.273420	1.583944e-11
(8, 125)	0.063198	0.258423	3.225376e-11
(8, 250)	0.364480	1.729078	1.646661e-11
(16, 125)	0.360349	1.714735	4.901213e-11
AVG	0.213809	0.995365	-

Table 4: Χρόνος εκτέλεσης για τις εντολές

σύγκριση με το προηγούμενο υποερώτημα φαίνεται ότι η *sparse* της MatLab είναι η καταλληλότερη συνάρτηση στην περίπτωση μας αφού τα μητρώα A και B είναι αραιά.

(m,n)	$A \setminus b$	$WAW^TWx = Wb$	$\Sigma\phi\acute{\alpha}\lambda\mu\alpha$
(4, 250)	0.008456	0.202465	9.126588e-12
(8, 125)	0.008227	0.243140	8.378187e-12
(8, 250)	0.023452	1.258115	2.718048e-12
(16, 125)	0.025439	1.311252	1.427636e-12
AVG	0.016393	0.753743	-

Table 5: Χρόνος εκτέλεσης για τις εντολές

4 Μέρος Δ

Σκοπός αυτού του μέρους ήταν η κατασκευή πολυωνύμου κυβικής πολυπλοκότητας.

4.1 Υποερώτημα 1

Κατασκευάστηκαν δύο συναρτήσεις, οι $T_{X(n)}$ και $T_{QR(n)}$ οι οποίες μέσω της `polyfit`, βρίσκουν κάποιες θεωρητικές τιμές για να γίνει το fitting με την θεωρητική καμπύλη. Πιο αναλυτικά, γίνεται η μέτρηση του χρόνου που αναλογεί στην εκτέλεση των εντολών $x = qr(A)$ και $[Q, R] = qr(A)$ και με βάση αυτές τις μετρήσεις κατασκευάζονται οι όροι του πολυωνύμου.

4.2 Υποερώτημα 2

Στη συνέχεια, μέσω της `polyval`, κατασκευάζονται οι μετρήσεις παίρνοντας σαν ορίσματα τους όρους του πολυωνύμου και το διάστημα `[200:200:1400]` και `[250:200:1750]`.

4.3 Υποερώτημα 3

Τα σχήματα για τις καμπύλες του πολυωνύμου 3ου βαθμού φαίνονται στις εικόνες 5 και 6. Είναι ξεκάθαρο το γεγονός ότι οι θεωρητικές τιμές είναι αρκετά ακριβείς. Επίσης, τα αποτελέσματα για την $x = qr(A)$ είναι πιο εκθετικά όσο μεγαλώνει το n .

4.4 Υποερώτημα 4

Ζητούμενο του τελευταίου μέρους ήταν η εκτέλεση των παραπάνω για πολυώνυμα 2ου και 4ου βαθμού. Τα σχήματα για τις καμπύλες του πολυωνύμου 2ου βαθμού φαίνονται στις εικόνες 7 και 8.

Ενώ τα σχήματα για τις καμπύλες του πολυωνύμου 4ου βαθμού φαίνονται στις εικόνες 9 και 10.

Το κυριότερο συμπέρασμα είναι το γεγονός ότι όσο μεγαλώνει ο βαθμός του πολυωνύμου τόσο πιο εκθετική γίνεται η παράσταση. Επίσης, όσο πιο μικρός είναι ο βαθμός τόσο πιο δύσκολο είναι για την `polyfit` να κάνει επιτυχημένο 'fitting'.

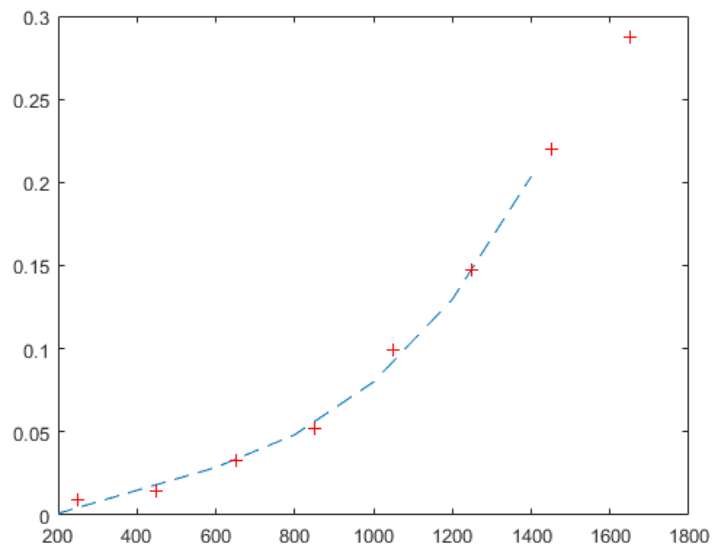


Figure 5: $x = \text{qr}(A)$ 3ου Βαθμού

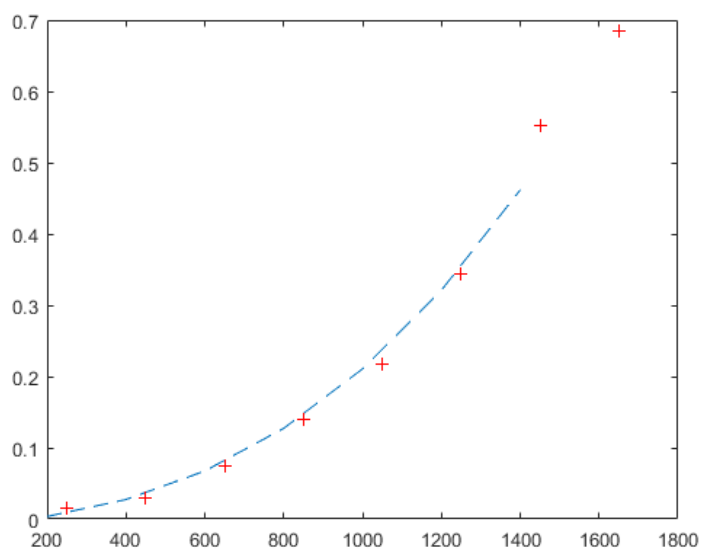


Figure 6: $[Q,R] = \text{qr}(A)$ 3ου Βαθμού

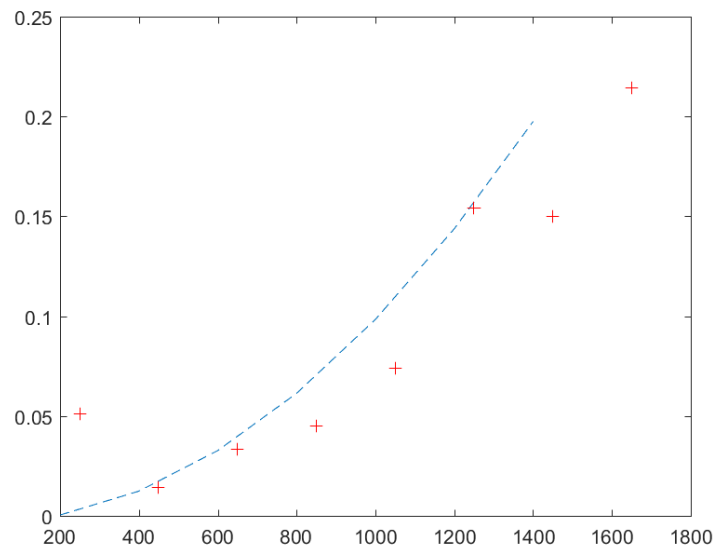


Figure 7: $x = \text{qr}(A)$ 2ου Βαθμού

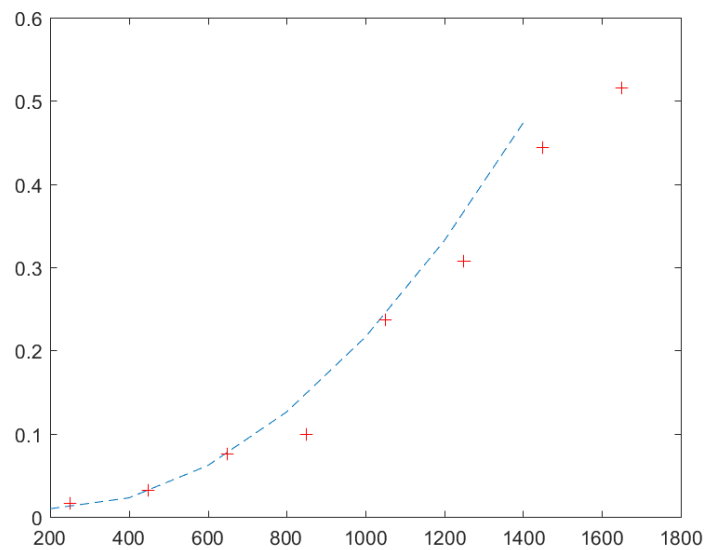


Figure 8: $[Q,R] = \text{qr}(A)$ 2ου Βαθμού

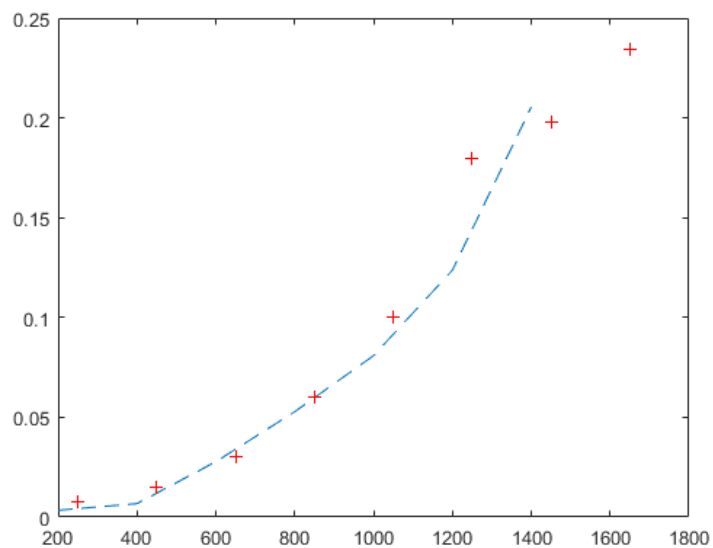


Figure 9: $x = \text{qr}(A)$ 4ου Βαθμού

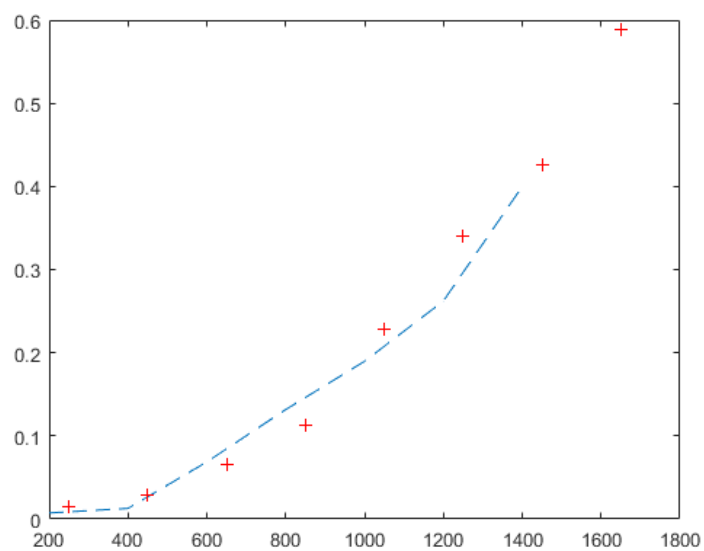


Figure 10: $[Q,R] = \text{qr}(A)$ 4ου Βαθμού

5 Χαρακτηριστικά συστήματος

Υπολογιστικό σύστημα: ASUS Zenbook UX410UA-GV010T

Λειτουργικό: Windows 10 Home Edition

Επεξεργαστής: Intel Core i5-7200U 2.5GHz

RAM: 8GB DDR4 2133 MHz

Κρυφή μνήμη: L1D 2x32 KB, L1I 2x32 KB, L2 2x256 KB και L3 1x3 MB

Matlab: R2017b