

# FOTONIKA

Martin ČOPIČ  
Mojca VILFAN

Recenzenti: \*\*\*

Lektor: \*\*\*

Risbe in diagrami: Mojca Vilfan in Andrej Petelin

Oblikovanje, postavitve in prelom: Mojca Vilfan

Naslovne slike poglavij: Mojca Vilfan, Martin Rigler (str. 120 in 176), Andrej Petelin (str. 37), ESO (str. 93), Irena Drevenšek (str. 140), in NASA (str. 238)

*©Kopiranje in razmnoževanje besedila ali njegovih delov ter slik je dovoljeno samo z odobritvijo avtorjev knjige.*

LJUBLJANA, 2019

# Kazalo

<b>1</b>	<b>Interakcija svetlobe s snovjo .....</b>	<b>7</b>
1.1	Kvantizacija elektromagnetnega polja	7
1.2	Sevanje črnega telesa	9
1.3	Absorpcija, spontano in stimulirano sevanje	10
1.4	Absorpcijski koeficient	14
1.5	Nasičenje absorpcije	15
1.6	Optično ojačevanje	17
1.7	Optično črpanje trinivojskega sistema	17
1.8	Homogena in nehomogena razširitev spektralne črte	20
1.9	*Nasičenje nehomogeno razširjene absorpcijske črte	21
1.10	*Izpeljava verjetnosti za prehod	24
1.11	*Rabijeve oscilacije	27
<b>2</b>	<b>Laser .....</b>	<b>29</b>
2.1	Laser	29
2.2	Zasedbene enačbe	31
2.3	Spektralna širina enega laserskega nihanja	34
2.4	Primerjava laserjev in navadnih svetil	36
2.5	Večfrekvenčni laser	37
2.6	Relaksacijske oscilacije	39
2.7	Sunkovni laserji	41
2.8	Delovanje v sunkih s preklopom dobrote	42
2.9	Uklepanje faz	44
2.10	*Stabilizacija frekvence laserja na nasičeno absorpcijo	47
2.11	*Absolutna meritev frekvence laserja in definicija metra	49
2.12	*Semiklasični model laserja	51
<b>3</b>	<b>Optična vlakna .....</b>	<b>56</b>
3.1	Planparalelni vodnik	56
3.2	Račun lastnih rodov v planparalelnem vodniku	58
3.3	Cilindrično vlakno	62

---

3.4	Disperzija	69
3.5	*Potovanje kratkega sunka po enorodovnem vlaknu	73
3.6	Izgube in ojačenje v optičnih vlaknih	77
3.7	Sklopitev svetlobe v optične vodnike	81
3.8	Sklopitev med optičnimi vodniki	82
3.9	*Vpliv spremembe lomnega količnika vlakna na širjenje svetlobe	86
3.10	Nelinearni pojavi v optičnih vlaknih	88



# Predgovor

Fotonika je veda o svetlobi. Obsega izredno široka področja nastanka svetlobe in svetlobnih virov, uporabe svetlobe v različne namene, širjenja optičnih signalov in njihovega spreminjanja ter zaznavanja svetlobe. V zadnjih desetletjih je zato fotonika doživela izreden razcvet v raziskavah in tehnološki uporabi.

V pričujoči knjigi bomo obravnavali osnove fotonike. Po kratki ponovitvi splošne optike bomo spoznali delovanje laserjev in lastnosti laserske svetlobe, nadaljevali z nelinearnimi optičnimi pojavi in modulacijo svetlobe ter zaključili s prenosom in detekcijo laserskih signalov. Knjiga je zato zelo primerna predvsem za študente II. stopnje fizike, ki že imajo znanje optike in zahtevanih matematičnih prijemov, ga pa priporočava vsakemu, ki ga področje fotonike zanima, naj bo to ljubiteljsko ali profesionalno. Bralcu v razmislek sva dodala nekaj nalog, zahtevnejša podpoglavja pa so označena z zvezdico.

Prvotno gradivo za to knjigo je nastalo po zapiskih s predavanj pri predmetu Elektrooptika in kasneje Fotonika ter Fizika laserjev. Gradivo sva dopolnila, posodobila in prilagodila obravnavani snovi pri predmetih Fotonika I in Fotonika II. Za pomoč pri pripravi se najlepše zahvaljujemo prof. dr. Ireni Drevenšek Olenik, ki je kot dolgoletna predavateljica Fotonike znatno pripomogla k oblikovanju te knjige, in Andreju Petelinu za pomoč pri delu ter ostalim sodelavcem z Odseka za kompleksne snovi Instituta "Jožef Stefan" za sodelovanje pri pripravi.

Avtorja

## Priporočena dodatna literatura

- A. Yariv in P. Yeh, Photonics, Sixth Edition, Oxford University Press, 2007.
- B. E. A. Saleh in M. C. Teich, Fundamentals of Photonics, 2nd Edition, Wiley, New Jersey, 2007.
- G. A. Reider, Photonics, An Introduction, Springer, Berlin, 2016.
- W. T. Silfvast, Laser Fundamentals, Second Edition, Cambridge University Press, 2008.
- C. C. Davis, Lasers and Electro-Optics, Cambridge University Press, 2006.
- O. Svelto, Principles of Lasers, Fifth Edition, Springer, New York, 2010
- K. F. Renk, Basics of Laser Physics, Second Edition, Springer, Berlin, 2017.
- J. W. Goodman, Statistical Optics, Second Edition, Wiley, New Jersey, 2015.
- W. Demtröder, Laser Spectroscopy, Fifth Edition, Springer, Berlin, 2014.
- G. New, Introduction to Nonlinear Optics, Cambridge University Press, 2011.
- R. W. Boyd, Nonlinear Optics, Third Edition, Academic Press, 2008.
- V. Degiorgio in I. Cristiani, Photonics, A Short Course, Springer International, 2016.

# 1. Interakcija svetlobe s snovjo

V prejšnjih poglavjih smo obravnavali svetlobo v praznem prostoru. Oglejmo si zdaj osnovne procese interakcije svetlobe s snovjo. To je seveda zelo obširna tema in jo bomo obdelali le v obsegu, potrebnem za razumevanje ojačevanja svetlobe s stimulirano emisijo, kar je osnova za delovanje laserjev. Najprej bomo na kratko pogledali termodinamsko ravnovesje svetlobe v stiku s toplotnim zalogovnikom, torej sevanje črnega telesa, ki zahteva kvantno obravnavo elektromagnetnega polja. Nato bomo vpeljali fenomenološki Einsteinov opis mikroskopskih procesov absorpcije, spontane in stimulirane emisije in pokazali, da ti procesi niso neodvisni. Izpeljali bomo izraze za absorpcijski koeficient in koeficient ojačenja, na koncu poglavja pa bomo nakazali še kvantnomehansko izpeljavo verjetnosti za prehod atoma iz višjega energijskega stanja v nižje s sevanjem.

## 1.1 Kvantizacija elektromagnetnega polja

Ravni valovi so enostavne in zelo prikladne rešitve valovne enačbe (enačba ??), zato jih pogosto uporabimo za bazo, po kateri razvijemo elektromagnetno polje. Možen je razvoj po celotnem prostoru, vendar je tedaj nekoliko nerodna normalizacija baznih funkcij. Če se omejimo na le del prostora, se temu problemu izognemo. Mora pa biti izbrani del prostora dovolj velik, da končni rezultat ni odvisen od izbire njegove velikosti in oblike.

Najpreprosteje je vzeti votlino v obliki velike kocke s stranico  $L$  in idealno prevodnimi stenami. Rešitve Maxwellovih enačb (enačbe ??-??) znotraj take votline so ob upoštevanju robnih pogojev (enačbe ??-??) stoječa valovanja. Zapišemo jih v obliki

$$\begin{aligned} E_x &= E_{x0} \cos \frac{\pi l x}{L} \sin \frac{\pi m y}{L} \sin \frac{\pi n z}{L} e^{-i\omega t} \\ E_y &= E_{y0} \sin \frac{\pi l x}{L} \cos \frac{\pi m y}{L} \sin \frac{\pi n z}{L} e^{-i\omega t} \\ E_z &= E_{z0} \sin \frac{\pi l x}{L} \sin \frac{\pi m y}{L} \cos \frac{\pi n z}{L} e^{-i\omega t}, \end{aligned} \quad (1.1)$$

kjer so  $l, m$  in  $n$  cela števila. Vsako stoječe valovanje je določeno z valovnim vektorjem

$$\mathbf{k} = \left( \frac{\pi l}{L}, \frac{\pi m}{L}, \frac{\pi n}{L} \right), \quad (1.2)$$

katerega velikost je povezana s frekvenco  $k = \omega/c$ . Iz Maxwellove enačbe za prazen prostor  $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$  (enačba ??) sledi  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0$ . Za vsako trojico števil  $l, m$  in  $n$  obstajata tako dve neodvisni polarizaciji.

---

**Naloga 1.1.1** Pokaži, da stoječe valovanje, zapisano z enačbami (1.1), reši valovno enačbo (enačba ??) v kocki s stranico  $L$  in zadosti robnim pogojem idealno prevodnih sten votline.

---

Preštejmo, koliko je lastnih valovanj v intervalu velikosti valovnega vektorja med  $k$  in  $k + dk$  – to smo na hitro naredili že pri obravnavni resonatorjev (enačba ??). Možni valovni vektorji tvorijo tridimenzionalno mrežo v prvem oktantu prostora vseh valovnih vektorjev. Razmik med dvema zaporednima mrežnima točkama v smeri ene od osi je  $\pi/L$ . Število točk v osmini krogelne lupine med  $k$  in  $k + dk$  je za dovolj velike  $l$ ,  $m$  in  $n$  enako prostornini lupine, deljeni s prostornino, ki pripada posamezni mrežni točki, to je  $(\pi/L)^3$ . Upoštevati moramo še, da sta pri vsakem  $\mathbf{k}$  dovoljeni dve polarizaciji, zato

$$dN = \left(\frac{L}{\pi}\right)^3 \pi k^2 dk. \quad (1.3)$$

Zapišemo število stanj na enoto volumna

$$\frac{dN}{V} = \frac{k^2}{\pi^2} dk \quad (1.4)$$

in ga prevedemo na frekvenčno odvisnost

$$\frac{dN}{V} = \frac{8\pi v^2}{c^3} dv = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} d\omega. \quad (1.5)$$

Vpeljemo gostoto stanj  $\rho(\omega)$ , to je število valovanj na frekvenčni interval<sup>1</sup> na enoto volumna votline

$$\rho(\omega) = \frac{dN}{V d\omega} = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3}. \quad (1.6)$$

Vsote po lastnih valovanjih, to je po dovoljenih vrednostih valovnega vektorja  $k$ , lahko z uporabo gostote stanj spremenimo v integrale po  $k$  ali po  $\omega$

$$\sum_k \dots \Rightarrow V \int \rho(k) \dots dk = V \int \rho(\omega) \dots d\omega. \quad (1.7)$$

Označimo brezdimenzijski krajevni del rešitve (enačbe 1.1) z  $\mathbf{E}_\alpha$ , kjer  $\alpha$  označuje trojico števil  $l$ ,  $m$  in  $n$  in še obe možni polarizaciji. Pripadajoče magnetno polje izračunamo z Maxwelllovo enačbo (enačba ??)

$$\nabla \times \mathbf{E}_\alpha = i\omega_\alpha \mathbf{B}_\alpha. \quad (1.8)$$

Polja  $\mathbf{E}_\alpha$  in  $\mathbf{B}_\alpha$  tvorijo poln ortogonalen sistem, zato jih lahko uporabimo za razvoj poljubnega elektromagnetnega polja v votlini

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{\sqrt{V\epsilon_0}} \sum_\alpha p_\alpha(t) \mathbf{E}_\alpha(\mathbf{r}) \quad \text{in} \quad (1.9)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = i\sqrt{\frac{\mu_0}{V}} c_0 \sum_\alpha \omega_\alpha q_\alpha(t) \mathbf{B}_\alpha(\mathbf{r}). \quad (1.10)$$

Vstavimo splošen razvoj (enačbi 1.9 in 1.10) v Maxwelllovi enačbi (enačbi ?? in ??), upoštevamo zvezo (enačba 1.8) in njej analogno za rotor magnetnega polja. Sledi

$$p_\alpha = \dot{q}_\alpha \quad \text{in} \quad \omega_\alpha^2 q_\alpha = -\dot{p}_\alpha, \quad (1.11)$$

od koder sledi še

$$\ddot{p}_\alpha + \omega_\alpha^2 p_\alpha = 0. \quad (1.12)$$

Ta enačba da seveda pričakovano časovno odvisnost oblike  $e^{-i\omega_\alpha t}$ .

<sup>1</sup>V tem poglavju bomo ohlapno uporabljali besedo frekvenca tudi za krožno frekvenco. Iz zapisa bo vedno jasno, za katero frekvenco gre.



**Naloga 1.1.2** Uporabi razvoj polja (enačbi 1.9 in 1.10) in iz Maxwellovih enačb izpelji enačbo (1.12).

Z upoštevanjem razvoja (enačbi 1.9 in 1.10) in ob ustrezni normalizaciji zapišemo energijo polja – Hamiltonovo funkcijo<sup>2</sup>

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \int (\epsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{\mu_0}) dV = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} (p_{\alpha}^2 + \omega_{\alpha}^2 q_{\alpha}^2). \quad (1.13)$$

Gornji zapis (enačbi 1.12 in 1.13) kaže, da lahko elektromagnetno polje v votlini obravnavamo kot sistem neodvisnih harmonskih oscilatorjev. Pri tem se koeficienti razvoja  $p_{\alpha}$  in  $q_{\alpha}$  obnašajo kot gibalne količine in koordinate.

Prehod v kvantno mehaniko dosežemo tako, da klasičnim spremenljivkam gibalne količine in koordinate priredimo operatorje  $\hat{p}_{\alpha}$  in  $\hat{q}_{\alpha}$ , ki morajo zadoščati komutacijskim pravilom

$$[\hat{q}_{\alpha}, \hat{p}_{\beta}] = i\hbar \delta_{\alpha, \beta}. \quad (1.14)$$

Iz kvantne mehanike vemo, da so lastne vrednosti energije harmonskega oscilatorja, opisanega s Hamiltonovo funkcijo (enačba 1.13), diskretne. Njihove vrednosti so enake


$$W_{n, \alpha} = \hbar \omega_{\alpha} (n_{\alpha} + \frac{1}{2}), \quad n_{\alpha} = 0, 1, 2, \dots \quad (1.15)$$

**Razliki energije harmonskega oscilatorja, če se  $n_{\alpha}$  spremeni za 1, pravimo foton.** Energija fotona je tako enaka  $\hbar \omega$ ,  $n$  pa predstavlja število fotonov z dano energijo.

Celotno energijo kvantiziranega elektromagnetnega polja v votlini izračunamo tako, da seštejemo prispevke vseh možnih stanj

$$W = \sum_{\alpha} \hbar \omega_{\alpha} n_{\alpha}, \quad (1.16)$$

pri čemer smo izpustili ničelno energijo. Izpuščali jo bomo tudi v nadaljevanju, saj je to energija osnovnega stanja, ki se ne more sprostiti.

 Vidna svetloba z valovno dolžino 500 nm ima frekvenco  $\nu = 6 \cdot 10^{14}$  Hz. Ustrezna energija fotona je  $W = 4 \cdot 10^{-19}$  J oziroma  $W = 2,5$  eV.

## 1.2 Sevanje črnega telesa

Obravnavajmo sevanje v votlini, ki je v toplotnem ravnovesju s stenami s temperaturo  $T$ . Iz statistične fizike vemo, da verjetnost  $P$ , da je v izbranem stanju votline  $\alpha$  število fotonov enako  $n_{\alpha}$ , zapišemo z Boltzmannovo porazdelitvijo

$$P(n_{\alpha}) = \frac{e^{-W_{n\alpha}/k_B T}}{\sum_{\alpha} e^{-W_{n\alpha}/k_B T}} = \frac{e^{-\beta \hbar \omega_{\alpha} n_{\alpha}}}{\sum_{\alpha} e^{-\beta \hbar \omega_{\alpha} n_{\alpha}}} = e^{-\beta \hbar \omega_{\alpha} n_{\alpha}} (1 - e^{-\beta \hbar \omega_{\alpha}}), \quad (1.17)$$

pri čemer  $\beta = 1/k_B T$  in  $k_B$  Boltzmannova konstanta.

<sup>2</sup>Irski matematik Sir William Rowan Hamilton, 1805–1865.

Povprečno število fotonov v stanju  $\alpha$  je potem

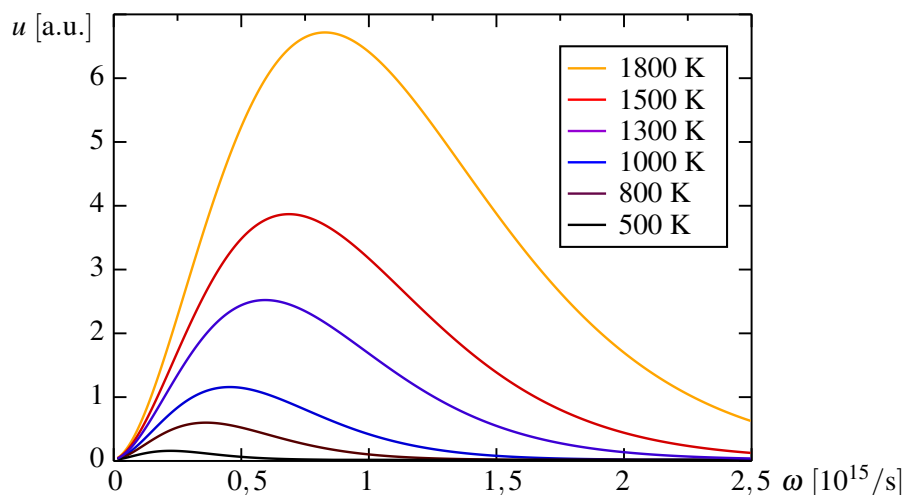
$$\langle n_\alpha \rangle = \sum_\alpha n_\alpha P(n_\alpha) = \frac{1}{e^{\beta \hbar \omega_\alpha} - 1}. \quad (1.18)$$

Povprečno energijo posameznega stanja zapišemo kot produkt energije tega stanja in povprečnega števila fotonov v tem stanju

$$\langle W_\alpha \rangle = \hbar \omega_\alpha \langle n_\alpha \rangle = \frac{\hbar \omega_\alpha}{e^{\beta \hbar \omega_\alpha} - 1}. \quad (1.19)$$

Ravnovesno gostoto energije elektromagnetnega polja v votlini na frekvenčni interval izračunamo tako, da povprečno energijo posameznega stanja pomnožimo z gostoto stanj  $\rho(\omega)$  (enačba 1.6). Dobimo znano formulo za energijo na enoto volumna na enoto frekvence, to je Planckov zakon<sup>3</sup>. Planckov zakon opiše spektralno gostoto energije svetlobe  $u$ , izsevane iz črnega telesa, ki je v toplotnem ravnovesju z okolico s temperaturo  $T$

$$u(\omega) = \hbar \omega \langle n \rangle \rho(\omega) = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \frac{\omega^3}{e^{\beta \hbar \omega} - 1}. \quad (1.20)$$



Slika 1.1: Planckov spekter za sevanje črnega telesa pri različnih temperaturah

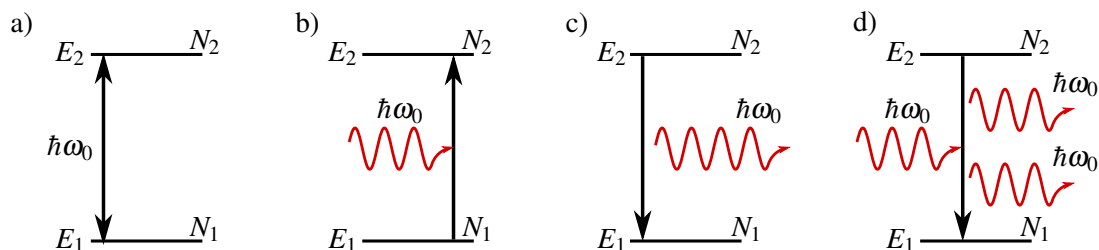
### 1.3 Absorpcija, spontano in stimulirano sevanje

Oglejmo si osnovne procese interakcije svetlobe s snovjo. Naj bo v votlini poleg elektromagnetnega polja še  $N$  atomov, ki se med seboj ne motijo. Za začetek naj bodo atomi prav enostavni: imajo naj le dve energijski stanji z energijama  $E_1$  in  $E_2$  (slika 1.2 a). Stanje  $E_2$  naj ima višjo energijo od  $E_1$ , razlika med njima pa naj bo

$$E_2 - E_1 = \hbar \omega_0. \quad (1.21)$$

Zaradi interakcije s poljem pri frekvenci prehoda  $\omega_0$  atomi prehajajo iz nižjega stanja v višje in obratno. Prehajanje med obema stanjema opisujejo trije procesi: absorpcija, spontano sevanje in stimulirano sevanje.

<sup>3</sup>Nemški fizik in nobelovec Max Karl Ernst Ludwig Planck, 1858–1947.



Slika 1.2: Shema energijskih nivojev dvonivojskega atoma (a) in treh vrst prehodov med njima: absorpcija (b), spontano sevanje (c) in stimulirano sevanje (d).

### Absorpcija fotona

Absorpcija fotona je prehod, pri katerem se foton z ustrežno energijo absorbira, atom pa preide iz nižjega energijskega stanja v višje (slika 1.2 b). Verjetnost za prehod na časovno enoto, ki jo označimo z  $r_{12}$ , je sorazmerna spektralni gostoti energije polja  $u(\omega)$ , to je energiji na enoto volumna in frekvenčni interval, pri frekvenci prehoda  $\omega_0$ . Sorazmernostni koeficient označimo z  $B_{12}$  in zapišemo

$$r_{12} = B_{12}u(\omega_0). \quad (1.22)$$

To je enostavno razumeti. Več kot je fotonov v votlini pri frekvenci, ki je v bližini frekvence prehoda, več fotonov se lahko absorbira in večja je verjetnost za prehod atoma v višje stanje. Pri absorpciji se seveda število fotonov v enem od stanj polja pri frekvenci  $\omega_0$  zmanjša za ena.

### Spontano sevanje

Atom v vzbujenem stanju ni stabilen, temveč prej ali slej spontano preide v nižje stanje. Temu pojavu pravimo spontano sevanje ali spontana emisija (slika 1.2 c).

Pri spontanem sevanju je foton izsevan v katerokoli stanje polja v bližini frekvence prehoda. Smer izsevane svetlobe je poljubna, v odsotnosti zunanega polja pa je poljubna tudi polarizacija izsevane svetlobe. Verjetnost za prehod na časovno enoto označimo z  $A_{21}$ . Za dovoljene prehode je vrednost  $A_{21} \sim 10^6\text{--}10^8/\text{s}$ , za prepovedane pa okoli  $\sim 10^4/\text{s}$ . Karakteristični (naravni) razpadni čas gornjega stanja vpeljemo kot  $\tau = 1/A_{21}$ .

Zaradi končnega življenjskega časa ima vzbujeno stanje končno spektralno širino. Če ni Dopplerjeve razširitve, je atomska spektralna črta najpogostejše kar Lorentzove oblike z vrhom pri  $\omega_0$  (enačba ??)

$$g(\omega - \omega_0) = \frac{1}{\pi} \frac{\gamma}{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2}. \quad (1.23)$$

Funkcija  $g(\omega)$  je normirana

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) d\omega = 1, \quad (1.24)$$

za grobe ocene pa se funkcijo  $g$  pogosto nadomesti s pravokotnikom širine  $2\gamma$  in višine  $1/2\gamma$ .

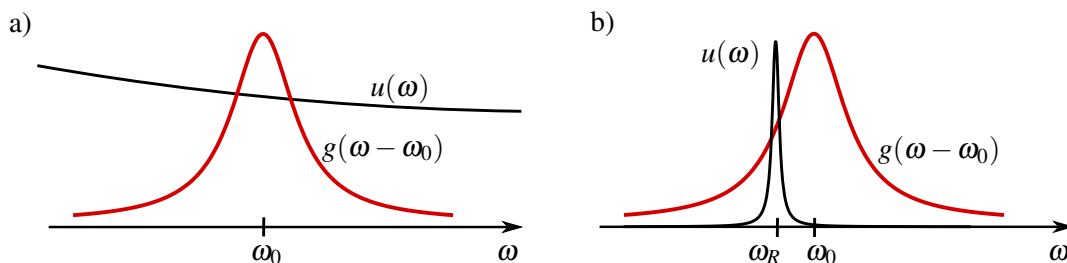
### Stimulirano sevanje

Tretji pojav je prehod atoma iz višjega stanja v nižje zaradi interakcije s poljem. Temu procesu pravimo stimulirano sevanje ali stimulirana emisija. Tudi verjetnost za stimuliran prehod na časovno enoto  $r_{21}$  je sorazmerna s spektralno gostoto energije polja pri frekvenci prehoda  $\omega_0$

$$r_{21} = B_{21}u(\omega_0). \quad (1.25)$$

V tem primeru smo sorazmernostni koeficient označili z  $B_{21}$ . Kadar pride do stimuliranega sevanja, se število atomov v vzbujenem stanju zmanjša, število fotonov v stanju, ki je prehod povzročilo, pa se poveča. Izsevana svetloba ima enako fazo, frekvenco, polarizacijo in smer potovanja kot vpadna. Tipične vrednosti parametra so  $B_{21} \sim 10^{16} - 10^{20} \text{ m}^3/\text{Js}^2$ .

Pomudimo se še nekoliko pri izrazih za absorpcijo (enačba 1.22) in za stimulirano emisijo (enačba 1.25). Zapisani enačbi veljata le, kadar je spektralna gostota elektromagnetnega polja  $u(\omega)$  preko celotne spektralne širine prehoda približno konstantna (slika 1.3 a). To je gotovo res, če obravnavamo sevanje v votlini, ki je v termičnem ravnovesju z okolico (črno telo).



Slika 1.3: Pri izračunu verjetnosti za absorpcijo in stimulirano emisijo je pomembna oblika spektralne gostote elektromagnetnega polja  $u(\omega)$ . V prvem primeru je bistveno širša (a), v drugem pa bistveno ožja (b) od širine atomske spektralne črte  $g(\omega - \omega_0)$ .

V splošnem primeru, ko se spekter vpadne svetlobe spreminja v območju atomske spektralne črte, moramo sešteti prispevke po ozkih frekvenčnih intervalih

$$r_{12} = B_{12} \int g(\omega - \omega_0) u(\omega) d\omega. \quad (1.26)$$

Gornji zapis preverimo na primeru spektra črnega telesa, ki se ne spreminja dosti v območju prehoda. Takrat  $u(\omega_0)$  postavimo pred integral in po pričakovanju dobimo znano zvezo (enačba 1.22).

Če pa na atome svetimo s svetlobo s spektrom, ki je ozek v primerjavi s spektralno širino prehoda (na primer iz laserskega resonatorja), je verjetnost za prehod odvisna tudi od tega, kako blizu osrednje frekvence prehoda je frekvenca vpadne svetlobe (slika 1.3 b). Naj bo  $w_R$  gostota energije skoraj monokromatske vpadne svetlobe s frekvenco  $\omega_R$ . Verjetnost za absorpcijo na časovno enoto je potem

$$r_{12} = B_{12}g(\omega_R - \omega_0)w_R. \quad (1.27)$$

Koeficiente  $A_{21}$ ,  $B_{12}$  in  $B_{21}$ , s katerimi smo opisali spontano sevanje, absorpcijo in stimulirano emisijo, je prvi vpeljal Einstein<sup>4</sup>, zato jih imenujemo tudi Einsteinovi koeficienti. Poglejmo si jih podrobneje.

<sup>4</sup>Nemški fizik in nobelovec Albert Einstein, 1879–1955.

### Einsteinovi koeficienti

Zasedenost stanj določa število atomov v določenem stanju. Ker zaenkrat obravnavamo preproste modele atomov z zgolj dvema stanjema, zapišemo samo dve zasedenosti. Naj bo  $N_1$  zasedenost nižjega stanja,  $N_2$  zasedenost višjega stanja, skupno število atomov pa  $N_1 + N_2 = N$ . V prisotnosti svetlobe se število atomov v spodnjem in zgornjem stanju lahko spreminja, skupno število pa se ohranja.

Obravnavajmo termično ravnovesje, ko je spekter svetlobe bistveno širši od širine atomskega prehoda (slika 1.3 a), tako da lahko za zapis verjetnosti za prehod uporabimo enačbi (1.22) in (1.25). Zasedenost višjega nivoja se zmanjšuje zaradi spontanin in stimuliranih prehodov v nižje stanje, povečuje pa se zaradi absorpcije. To zapišemo z enačbo

$$\frac{dN_2}{dt} = -A_{21}N_2 - r_{21}N_2 + r_{12}N_1 = -A_{21}N_2 - B_{21}u(\omega_0)N_2 + B_{12}u(\omega_0)N_1. \quad (1.28)$$

Zaradi ohranitve skupnega števila atomov velja

$$\frac{dN_1}{dt} = -\frac{dN_2}{dt}. \quad (1.29)$$

V termičnem ravnovesju sta zasedenosti konstantni, tako da lahko zapišemo

$$\frac{dN_1}{dt} = A_{21}N_2 + B_{21}u(\omega_0)N_2 - B_{12}u(\omega_0)N_1 = 0. \quad (1.30)$$

Vemo tudi, da v termičnem ravnovesju za zasedenosti  $N_1$  in  $N_2$  velja Boltzmannova porazdelitev

$$\frac{N_2}{N_1} = e^{-\beta(E_2-E_1)} = e^{-\beta\hbar\omega_0}, \quad (1.31)$$

kjer je  $\beta = 1/k_B T$ . Izrazimo spektralno gostoto  $u(\omega_0)$  iz enačbe (1.30)

$$u(\omega_0) = \frac{A_{21}}{B_{12}\frac{N_1}{N_2} - B_{21}} \quad (1.32)$$

in z uporabo enačbe (1.31) dobimo

$$u(\omega_0) = \frac{A_{21}/B_{12}}{e^{\beta\hbar\omega_0} - B_{21}/B_{12}}. \quad (1.33)$$

Po drugi strani vemo, da je v termičnem ravnovesju spektralna gostota energije sevanja  $u(\omega_0)$  enaka termični Planckovi gostoti  $u(\omega_0)$  (enačba 1.20). Iz primerjave obeh zapisov ugotovimo, da morata biti koeficienta  $B_{21}$  in  $B_{12}$  enaka in določimo zvezo med koeficientoma  $A_{21}$  in  $B_{12}$

$$A_{21} = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2c^3} B_{12} \quad \text{in} \quad B_{12} = B_{21}. \quad (1.34)$$

Koeficient pred  $B_{12}$  v prvi enačbi je ravno enak gostoti stanj elektromagnetnega polja  $\rho(\omega)$  (enačba 1.6), pomnoženi z energijo fotona  $\hbar\omega$ . Videli bomo, da to ni slučaj, saj to izhaja iz verjetnosti za prehod v kvantni elektrodinamiki (poglavje 1.10). Pozoren bralec je lahko tudi opazil, da je z enačbo (1.33), ki smo jo dobili le z uporabo Boltzmannove porazdelitve za atome, že določena oblika Planckove formule, ne da bi kar koli rekli o fotonih.

★ Zveza  $B_{12} = B_{21}$  velja le v primeru nede degeneriranih stanj. V realnih sistemih so stanja pogosto degenerirana in je treba gornje enačbe ustrezno popraviti

$$\frac{B_{21}}{B_{12}} = \frac{g_1}{g_2}, \quad (1.35)$$

pri čemer  $g_1$  in  $g_2$  označujeta degeneriranost stanj.

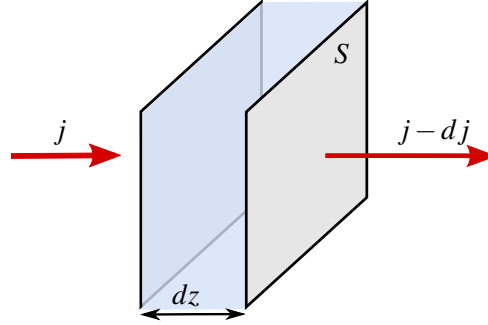
## 1.4 Absorpcijski koeficient

Naj na izbran volumen plina vpadna snop svetlobe s frekvenco  $\omega$ , ki je blizu frekvence atomskega prehoda  $\omega_0$ . Gostota vpadnega energijskega toka je  $j = w_\omega c$  (enačba ??), pri čemer je  $w_\omega$  gostota energije. Obravnavajmo primer, ko je spekter vpadnega snopa ozek v primerjavi s širino atomskega prehoda (slika 1.3 b). V tej obliki je zapis enačb sicer bolj zapleten, a hkrati bolj priročen pozneje pri obravnavi laserja. Privzemimo še, da je stanje stacionarno.

Ko svetlobni snop vpadne na plast plina debeline  $dz$ , se gostota energijskega toka zmanjša zaradi absorpcije in hkrati poveča zaradi stimulirane emisije (slika 1.4). Spontano sevanje, ki je seveda tudi prisotno, lahko zanemarimo, saj je svetloba izsevana na vse strani enakomerno in le majhen del je izsevan v smeri snopa. Sprememba energije snopa v časovni enoti je enaka razliki med številom absorpcij in stimuliranih prehodov v tem času, pomnoženih z energijo fotona<sup>5</sup>

$$dP = r_{12} \frac{(N_2 - N_1)}{V} S dz \hbar \omega = \frac{(N_2 - N_1)}{V} B_{21} g w_\omega \hbar \omega S dz, \quad (1.36)$$

pri čemer smo verjetnost za prehod izrazili iz enačbe (1.27).



Slika 1.4: K absorpciji svetlobe v plasti atomov

S  $S$  smo označili presek snopa, z  $V$  pa volumen plina. Sledi

$$dj = \frac{(N_2 - N_1)}{V} B_{21} g \hbar \omega \frac{j}{c} dz. \quad (1.37)$$

Priročno je vpeljati presek za absorpcijo

$$\sigma(\omega) = \frac{B_{21} g \hbar \omega}{c}. \quad (1.38)$$

Z njim se izraz (1.37) poenostavi v

$$\frac{dj}{dz} = \frac{\Delta N}{V} \sigma(\omega) j, \quad (1.39)$$

kjer  $\Delta N$  označuje  $N_2 - N_1$ . Navadno obravnavamo pline, ki so blizu termičnega ravnovesja. V tem primeru je  $N_2 < N_1$  in  $dj$  negativen, zato pride do absorpcije svetlobe z absorpcijskim koeficientom  $\mu$ . Zapišemo

$$\frac{dj}{j} = -\mu dz \quad (1.40)$$

<sup>5</sup>Zaradi preglednosti tukaj pišemo obliko atomske spektralne črte kot  $g$ , pri čemer je to vrednost Lorentzove krivulje z osrednjo frekvenco  $\omega_0$  pri  $\omega$ , torej  $g(\omega - \omega_0)$ .

in

$$\mu(\omega) = \frac{\Delta N}{V} \sigma(\omega) = \frac{\Delta N}{V} B_{21} g \frac{\hbar \omega}{c}. \quad (1.41)$$

Tako smo makroskopski koeficient absorpcije svetlobe v plinu atomov povezali z Einsteinovim koeficientom  $B_{21}$ . Povejmo še, da so tipične velikosti presekov za absorpcijo  $\sigma \sim 10^{-24} - 10^{-16} \text{ m}^2$ .



Energija se pri absorpciji v plinu dvonivojskih atomov seveda ne izgublja. Atom, ki je prešel v vzbujeno stanje, se s spontano emisijo vrne nazaj v osnovno, svetloba pa se izseva na vse strani – se siplje.

## 1.5 Nasičenje absorpcije

Čeprav je videti izraz za zmanjševanje gostote svetlobnega toka pri prehodu skozi absorbirajoči plin (enačba 1.40) preprost, ga ni mogoče enostavno integrirati, saj je absorpcijski koeficient  $\mu$  odvisen od gostote energijskega toka. Pri dovolj velikem svetlobnem toku namreč z absorpcijo znaten delež atomov preide v višje stanje, zato se zmanjša razlika  $\Delta N$  in posledično se zmanjša tudi absorpcijski koeficient  $\mu$ . Takrat se absorpcija v plinu nasiti in pojavu pravimo nasičenje absorpcije.

Naj na plin vpada snop monokromatske svetlobe. Atomi v plinu prehajajo med nivojema zaradi absorpcije, spontane in stimulirane emisije. Podobno kot smo zapisali termično ravnovesje v primeru širokega spektra (enačba 1.30), zapišemo stacionarno enačbo

$$\frac{dN_1}{dt} = A_{21}N_2 + B_{21}g\Delta N \frac{j}{c} = 0, \quad (1.42)$$

pri čemer smo za verjetnost za prehod uporabili enačbo (1.27) in upoštevali  $w = j/c$ . Zasedenost višjega stanja  $N_2$  lahko izrazimo s celotnim številom atomov  $N$  in razliko zasedenosti  $\Delta N$

$$N_2 = \frac{1}{2}(N_1 + N_2) + \frac{1}{2}(N_2 - N_1) = \frac{1}{2}N + \frac{1}{2}\Delta N. \quad (1.43)$$

S tem lahko izračunamo razliko zasedenosti

$$\Delta N = -\frac{N}{1 + 2\frac{Bg}{cA}j}. \quad (1.44)$$

Pri majhni gostoti toka  $j$  so praktično vsi atomi v osnovnem stanju in prispevajo k absorpciji. Pri velikih gostotah toka pa imenovalec gornjega izraza močno naraste, razlika zasedenosti gre proti nič in absorpcija se zmanjšuje. Ko drugi člen v imenovalcu (enačba 1.44) doseže vrednost 1, pravimo, da gostota energijskega toka doseže vrednost saturacijske gostote. Zapišemo jo kot

$$j_s(\omega) = \frac{cA_{21}}{2B_{21}g} = \frac{\hbar\omega^3}{2\pi^2c^2g}, \quad (1.45)$$

pri čemer smo upoštevali zvezo med koeficientoma  $A_{21}$  in  $B_{21}$  (enačba 1.34). Kot vidimo, je saturacijska gostota odvisna le od krožne frekvence vpadnega valovanja in vrednosti  $g(\omega - \omega_0)$ , ki je približno obratna vrednost širine atomskega prehoda. Za črto z valovno dolžino 600 nm in širino  $10^8 \text{ s}^{-1}$  znaša saturacijska gostota svetlobnega toka okoli  $20 \text{ mW/cm}^2$ . Tako veliko gostoto svetlobnega toka je v tako ozkem frekvenčnem intervalu z navadnimi svetili praktično nemogoče doseči, medtem ko jo z laserji z lahkoto.

Izraz za razliko zasedenosti stanj zapišemo v preglednejši obliki

$$\Delta N = -\frac{N}{1 + j/j_s(\omega)}. \quad (1.46)$$

Vstavimo gornji izraz v enačbo za zmanjševanje gostote toka (enačba 1.39) in dobimo

$$dj = -\frac{\mu_0}{1 + j/j_s} j dz, \quad (1.47)$$

kjer je

$$\mu_0 = \frac{N}{V} \sigma = \frac{N B_{21} g \hbar \omega}{V c} \quad (1.48)$$

absorpcijski koeficient pri majhnih gostotah vpadnega toka.

Enačbo (1.47) brez težav integriramo

$$\ln \frac{j}{j_0} + \frac{j - j_0}{j_s} = -\mu_0 z, \quad (1.49)$$

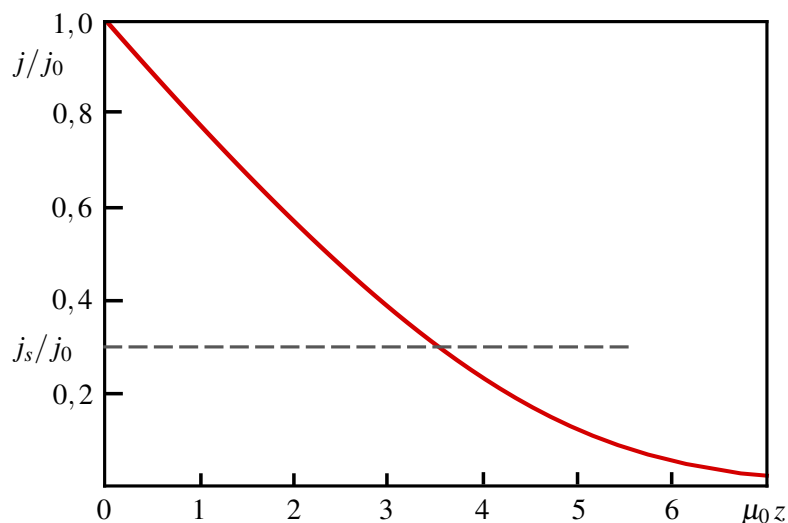
kjer smo z  $j_0$  označili začetno gostoto svetlobnega toka. Kadar je ta dosti manjša od  $j_s$ , lahko drugi člen v gornji enačbi zanemarimo in gostota svetlobnega toka eksponentno pojema

$$j = j_0 e^{-\mu_0 z}. \quad (1.50)$$

Pri zelo velikih vpadnih gostotah, ko pride do nasičenja absorpcije, lahko prvi člen v izrazu zanemarimo in pride do linearnega zmanjševanja gostote svetlobnega toka

$$j = j_0 - \mu_0 j_s z. \quad (1.51)$$

V primeru močnega vpadnega toka je zasedenost osnovnega in vzbujenega nivoja skoraj enaka in absorpcija je omejena s tem, kako hitro se lahko atomi vračajo v osnovno stanje preko spontanega sevanja.



Slika 1.5: Pojemanje gostote svetlobnega toka v absorbirajočem plinu (enačba 1.49)



## 1.6 Optično ojačevanje

V prejšnjih razdelkih smo obravnavali prehod svetlobe skozi dvonivojski plin. V termičnem ravnovesju je zgornji nivo manj zaseden od spodnjega in v plinu pride do absorpcije svetlobe. Če pa nekako dosežemo stanje obrnjene zasedenosti, za katerega velja  $N_2 > N_1$ , se snop svetlobe pri prehodu skozi plin ojačuje. Ta pojav je osnova za delovanje laserjev.

Stanje obrnjene zasedenosti seveda ni v termičnem ravnovesju in ga je treba vzdrževati z dovajanjem energije plinu oziroma *črpanjem*. Načinov, kako dosežemo obrnjeno zasedenost s črpanjem, je veliko. Zaenkrat opišimo le nekaj osnovnih mehanizmov, podrobneje jih bomo spoznali na konkretnih primerih laserjev, ki jih bomo obravnavali v poglavju ??.

V plinih je najpogostejši način črpanja vzbujanje z električnim tokom. Elektroni, ki so glavni nosilci toka, se zaletavajo v atome ali ione plina in jih vzbujajo v višje nivoje, pri čemer lahko pride do obrnjene zasedenosti med nekim parom nivojev. Tako črpanje uporabljamo na primer v argonskem laserju.

Pogost proces v plinih je tudi prenos energije med atomi s trki. V mešanici dveh plinov, pri katerih se nek nivo enih atomov ujema po energiji z nekim nivojem drugih atomov, lahko vzbujen atom prve vrste pri trku preda energijo brez sevanja atomu druge vrste, ta pa iz osnovnega stanja preide v ustrezen višji nivo. Če je pod tem nivojem še drugo vzbujeno stanje, katerega življenjski čas je krajši od življenjskega časa zgornjega nivoja, pride do obrnjene zasedenosti. Primer uporabe takega črpanja je He-Ne laser.

V trdnih neprevodnih kristalih sta v optičnem področju absorpcija in sevanje pri določeni valovni dolžini navadno posledica primesi. Obrnjeno zasedenost para nivojev primesi največkrat dosežemo tako, da kristal obsevamo s svetlobo s frekvenco, ki ustreza prehodu na nek nivo nad izbranim parom. Tako črpanje uporabljamo na primer v Nd:YAG in Ti:safir laserjih.

V polprevodnikih dosežemo obrnjeno zasedenost med prevodnim in valenčnim pasom z vbrizgavanjem elektronov in vrzeli v območje  $p$ - $n$  stika z električnim tokom v prevodni smeri.

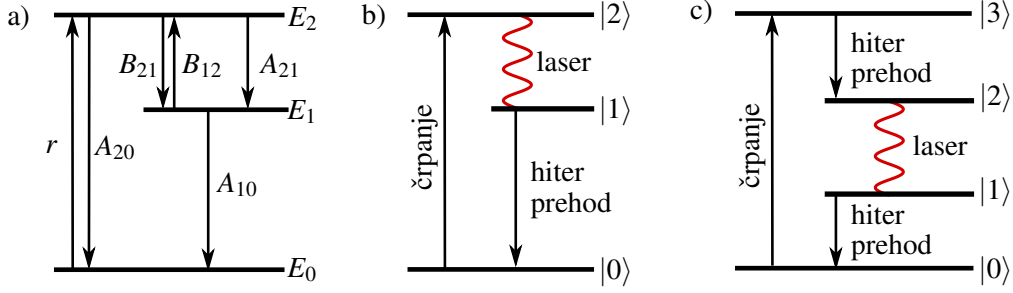
## 1.7 Optično črpanje trinivojskega sistema

Kot primer optičnega ojačevanja si oglejmo najpreprostejši model optičnega črpanja. Gre za plin atomov s tremi nivoji, tako imenovani trinivojski sistem. Osnovno stanje, ki ga označimo z  $|0\rangle$ , naj ima energijo  $E_0$ . Poleg tega naj imajo atomi še dve vzbujeni stanji z energijo  $E_1$  (stanje  $|1\rangle$ ) in energijo  $E_2 > E_1$  (stanje  $|2\rangle$ ), tako da je energijska razlika med vzbujenima nivojema  $E_2 - E_1 = \hbar\omega_0$  (slika 1.6 a).

Na tak trinivojski plin svetimo s črpalno svetlobo, ki vzbuja atome iz osnovnega stanja  $|0\rangle$  v stanje  $|2\rangle$ , pri čemer je lahko spektralna gostota  $u_p$  črpalne svetlobe široka. Po plinu naj se širi še monokromatska svetloba z gostoto energije  $w$  in frekvenco  $\omega$ , ki je blizu frekvence prehoda  $\omega_0$  med stanjema  $|1\rangle$  in  $|2\rangle$ . Ugotoviti želimo, pri katerih pogojih lahko dosežemo obrnjeno zasedenost med stanjema  $|1\rangle$  in  $|2\rangle$  in s tem ojačevanje svetlobe okoli frekvence  $\omega_0$  (slika 1.6 b).



Trinivojski laserski sistem na sliki (1.6 b) je pravzaprav poseben primer bolj realističnega štirinivojskega sistema, pri katerem gornji črpalni nivo sovпада z gornjim laserskim nivojem. Sicer se tretji vzbujeni nivo, v katerega črpamo, praviloma zelo hitro prazni v drugega vzbujenega, od tam pa počasi v prvega vzbujenega, kot kaže slika (1.6 c). Obravnava štirinivojskih sistemov je bolj zapletena od obravnave trinivojskih sistemov, ki pa za opis delovanja laserjev povsem zadošča. Podrobneje bomo večnivojske sisteme obravnavali na konkretnih laserskih primerih (poglavje ??).



Slika 1.6: Shema energijskih nivojev trinivojskega sistema in oznake koeficientov za prehode med njimi (a). V plinskih laserjih je stanje obrnjene zasedenosti navadno med vzbujenima stanjema (b), pogosto pa so laserji štiri- ali večnivojski (d).

Zapišimo enačbe za spreminjanje zasedenosti posameznih stanj. Osnovno stanje  $|0\rangle$  se prazni zaradi absorpcije črpalne svetlobe in polni zaradi spontanega prehoda iz stanj  $|1\rangle$  in  $|2\rangle$ , stimulirane prehode iz stanja  $|2\rangle$  pa bomo zanemarili. Zasedenost stanja  $|2\rangle$  se povečuje zaradi absorpcije s spodnjih nivojev in zmanjšuje zaradi spontanega in stimuliranega sevanja. Srednje stanje se polni s stimuliranimi in spontanimi prehodi iz stanja  $|2\rangle$  in prazni zaradi absorpcije v  $|2\rangle$  in spontanega prehoda v  $|0\rangle$ . Pri tem velja, da je vsota vseh treh zasedenosti enaka številu vseh atomov in  $N_0 + N_1 + N_2 = N$ . Zasedbene enačbe so tako

$$\frac{dN_0}{dt} = -rN_0 + A_{20}N_2 + A_{10}N_1 \quad (1.52)$$

$$\frac{dN_1}{dt} = -A_{10}N_1 + B_{21}gw(N_2 - N_1) + A_{21}N_2 \quad (1.53)$$

$$\frac{dN_2}{dt} = rN_0 - A_{20}N_2 - A_{21}N_2 - B_{21}gw(N_2 - N_1). \quad (1.54)$$

Pri zapisu smo predpostavili, da je  $N_0 \approx N \gg N_1, N_2$ , zato smo lahko črpanje  $B_{20}u_p(N_0 - N_2)$ , ki je praktično konstantno, zapisali s koeficientom  $r$ . Mehanizem črpanja smo tako skrili v  $r$  in prav nič ni pomembno, na kakšen način poteka. S tem smo obravnavo posplošili z optičnega črpanja na druge sisteme.

Zanima nas stacionarno stanje, ko so vsi trije časovni odvodi enaki nič. Tako iz druge enačbe sistema (enačba 1.53) sledi

$$B_{21}gwN_2 + A_{21}N_2 = B_{21}gwN_1 + A_{10}N_1 \quad (1.55)$$

in

$$N_2 = \frac{B_{21}gw + A_{10}}{B_{21}gw + A_{21}}N_1. \quad (1.56)$$

Brez škode lahko zanemarimo tudi spontano sevanje iz stanja  $|2\rangle$  v osnovno stanje. Tako iz prve enačbe sistema (enačba 1.52) dobimo

$$N_1 = \frac{rN}{A_{10}} \quad (1.57)$$

in zapišemo razliko zasedenosti kot

$$N_2 - N_1 = \left( \frac{N_2}{N_1} - 1 \right) N_1 = \frac{A_{10} - A_{21}}{A_{21} + B_{21}gw} \frac{rN}{A_{10}}. \quad (1.58)$$

Iz gornje enačbe sledi, da pride do obrnjene zasedenosti, če je  $A_{10} > A_{21}$ , torej kadar je razpadni čas stanja  $|1\rangle$  krajši od razpadnega časa stanja  $|2\rangle$ . Tak rezultat smo seveda lahko pričakovali.

V praktičnih primerih navadno velja  $A_{10} \gg A_{21}$ . Ob upoštevanju zveze  $j = wc$  povežemo razliko zasedenosti z gostoto vpadnega svetlobnega toka

$$N_2 - N_1 = \frac{rN}{A_{21}} \frac{1}{1 + \frac{B_{21}gj}{cA_{21}}} = \frac{rN}{A_{21}} \frac{1}{1 + j/j_s}. \quad (1.59)$$

Konstante smo pospravili v saturacijsko gostoto svetlobnega toka

$$j_s = \frac{cA_{21}}{B_{21}g}. \quad (1.60)$$



Vidimo, da je izraz za saturacijsko gostoto toka v trinivojskem sistemu (enačba 1.60) zelo podoben izrazu za saturacijsko gostoto v dvonivojskem sistemu (enačba 1.45), razlikujeta se le v faktorju 2. Do te razlike pride zaradi različnega števila stanj, saj pogoj  $N_1 + N_2 = N$  v trinivojskem sistemu ne velja.

Poglejmo, kaj se zgodi s svetlobo ob vpadu na plast trinivojskega plina. Naj ima vpadna svetloba frekvenco  $\omega$  in gostoto svetlobnega toka  $j = wc$ . Račun je zelo podoben računu za absorpcijo (enačba 1.37). Sprememba gostote toka na debelini  $dz$  je enaka

$$dj = \frac{(N_2 - N_1)}{V} B_{21}g \frac{\hbar\omega}{c} j dz, \quad (1.61)$$

pri čemer gostota toka  $j$  nastopa tudi v izrazu za razliko zasedenosti (enačba 1.59). Če to upoštevamo, dobimo diferencialno enačbo za gostoto toka

$$\frac{1}{j} \left( 1 + \frac{j}{j_s} \right) dj = G dz \quad (1.62)$$

oziroma

$$dj = \frac{G}{1 + j/j_s} j dz, \quad (1.63)$$

ki je spet zelo podobna enačbi za absorpcijo (enačba 1.47). Z  $G$  smo označili t.i. koeficient ojačenja pri majhni gostoti vpadnega toka. Podan je z

$$G = \frac{N}{V} \frac{r}{A_{21}} \sigma = \frac{rNB_{21}\hbar\omega g}{VcA_{21}}, \quad (1.64)$$

pri čemer smo koeficient ojačenja izrazili s presekom za stimulirano sevanje  $\sigma$ . Rešitev diferencialne enačbe (enačba 1.63) je prikazana na sliki (1.7).

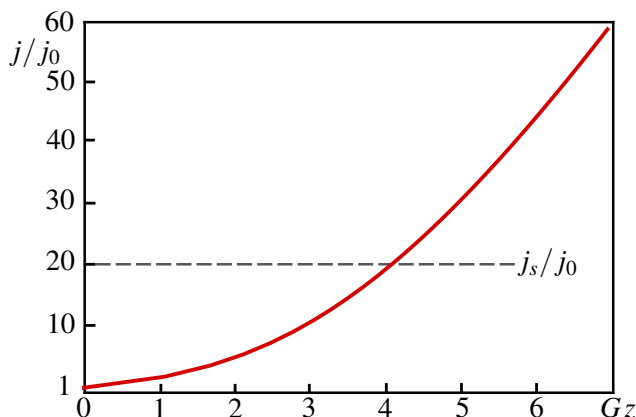
Obnašanje gostote svetlobnega toka ima, tako kot pri absorpciji, dva režima. Pri majhnih gostotah toka  $j \ll j_s$  je naraščanje eksponentno

$$j(z) = j_0 e^{Gz}. \quad (1.65)$$

Pri velikih gostotah toka pride do nasičenja in gostota svetlobnega toka narašča linearno

$$j(z) = j_0 + j_s Gz. \quad (1.66)$$

V tem primeru je gostota toka tako velika, da vsi atomi, ki jih s črpanjem spravimo v najvišje stanje, preidejo v stanje  $|1\rangle$  s stimuliranim sevanjem. Pri konstantnem črpanju je tedaj linearno naraščanje gostote toka razumljivo.



Slika 1.7: Naraščanje gostote svetlobnega toka pri optičnem ojačevanju

Vrnimo se k preseku za stimulirano sevanje  $\sigma$  (enačba 1.64). Opazimo, da je enak preseku za absorpcijo (enačba 1.38) dvonivojskega sistema in tako odvisen od frekvence in sorazmeren vrednosti atomske spektralne črte pri frekvenci prehoda. Za He-Ne laser ( $\lambda = 633$  nm in  $\Delta\nu \sim 1,5$  GHz) znaša  $\sigma \sim 10^{-16}$  m<sup>2</sup>, za Nd:YAG (1064 nm in  $\Delta\nu \sim 150$  GHz) pa  $\sigma \sim 10^{-22}$  m<sup>2</sup>. Zaradi različnih presekov, različnih gostot atomov in različnih načinov črpanja se koeficienti ojačenja v večnivojskih sistemih med seboj precej razlikujejo. Tipičen koeficient ojačenja v He-Ne laserju z dolžino  $L = 0,5$  m je  $GL \sim 1,015$ , v Nd:YAG laserju z dolžino ojačevalnega sredstva  $L = 10$  cm pa  $GL \sim 50$ . Pri prvem laserju je sicer velik presek za stimulirano sevanje, vendar je gostota atomov v obrnjeni zasedenosti razmeroma majhna. V drugem primeru pa močno črpanje prevlada nad majhnim presekom in pride do velikega ojačenja.

## 1.8 Homogena in nehomogena razširitev spektralne črte

Doslej smo privzeli, da svetijo vsi atomi obravnavane snovi pri isti frekvenci  $\omega_0$  in z isto spektralno širino, ki smo jo popisali s funkcijo  $g(\omega - \omega_0)$ , z vrhom pri  $\omega_0$ . Če to velja, je razširitev spektralne črte homogena. Funkcija  $g(\omega - \omega_0)$  je v tem primeru Lorentzove oblike

$$g_L(\omega - \omega_0) = \frac{1}{\pi} \frac{\gamma}{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2} \quad (1.67)$$

s širino črte  $\Delta\omega_L = 2\gamma$  (glej sliko ??). Primera homogene razširitve sta naravna širina in razširitev zaradi trkov med atomi. Homogena razširitev je pogosto večja od obratne vrednosti razpadnega časa nivoja. V plinu namreč prihaja do trkov, ki lahko zmotijo le fazo sevanja, ne da bi povzročili prehod, razširijo pa spektralno črto. V trdni snovi pa homogeno razširitev brez prehoda povzročajo termična nihanja lokalnega polja.

Spektralna črta je lahko razširjena tudi zato, ker svetloba, izhajajoča iz različnih atomov, nima povsem iste frekvence. Tedaj govorimo o nehomogeni razširitvi. Najpomembnejši primer nehomogene razširitve je Dopplerjeva razširitev v plinu. Atomi plina vedno sevajo pri praktično isti frekvenci  $\omega_0$ , vendar jih zaradi gibanja opazovalec v mirujočem (laboratorijskem) sistemu v skladu z Dopplerjevim pojavom zazna pri različnih frekvencah.

Tako so opazovane frekvence posameznih atomov  $\omega$  odvisne od hitrosti  $v$  atoma glede na smer opazovanja. Zapišemo jih kot

$$\omega = \omega_0 - \frac{v}{c} \omega_0 = \omega_0 - k_0 v. \quad (1.68)$$

Označimo z  $\mathcal{N}(v)$  porazdelitev gostote atomov po hitrostih, pri čemer se omejimo le na premikanje v smeri opazovanja. V termičnem ravnovesju je  $\mathcal{N}(v)$  Maxwellova porazdelitev

$$\mathcal{N}(v) = \frac{N}{V} \left( \frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{1/2} e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}}, \quad (1.69)$$

kjer je  $m$  masa posameznega atoma. Porazdelitev atomov po frekvencah izračunamo tako, da hitrost izrazimo iz enačbe (1.68), poleg tega funkcijo  $g_D(\omega - \omega_0)$  normiramo. Sledi

$$g_D(\omega - \omega_0) = \frac{c}{\omega_0} \left( \frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{1/2} \exp \left( -\frac{mc^2}{2k_B T} \frac{(\omega - \omega_0)^2}{\omega_0^2} \right). \quad (1.70)$$

Dopplerjeva razširitev v plinu je torej Gaussove oblike. Njena širina pri polovični višini<sup>6</sup> je

$$\Delta\omega_D = 2\sqrt{\frac{2k_B T \ln 2}{mc^2}} \omega_0. \quad (1.71)$$

---

**Naloga 1.8.1** Izpelji obliko nehomogeno razširjene črte za Dopplerjevo razširitev (enačba 1.70) in pokaži, da je njena širina podana z enačbo (1.71).

---

Izračunajmo Dopplerjevo razširitev na primeru He-Ne laserja. Za prehod atoma neona pri 632,8 nm in temperaturi 300 K je izračunana vrednost  $\Delta\omega_D = 8 \cdot 10^9 \text{ s}^{-1}$  oziroma  $\Delta\nu = 1,4 \text{ GHz}$ . Dejanske izmerjene vrednosti širine črte za He-Ne laser znašajo okoli 1,5 GHz, kar je znatno več od naravne širine črte (1,2 MHz). Še bolj izrazite so razširitve zaradi nehomogenosti v trdninskih laserjih, na primer v Nd:YAG laserju, v katerem je širina črte  $\Delta\nu = 150 \text{ GHz}$ . Nehomogena razširitev zaradi Dopplerjevega pojava v redkem plinu ali zaradi nehomogenosti v trdnih snoveh je tako kar nekaj redov velikosti večja od homogene naravne širine in razširitve zaradi trkov.



Pri nehomogenih razširitvah bi za bolj natančen izračun morali upoštevati tudi naravno širino posameznega atoma. To bi zapisali s konvolucijo Lorentzove in Gaussove funkcije in dobili tako imenovan Voigtov profil<sup>7</sup>, ki pa ga ne moremo preprosto analitično zapisati.

## 1.9 \*Nasičenje nehomogeno razširjene absorpcijske črte

V razdelku (1.5) smo obravnavali nasičenje absorpcije pri homogeno razširjenem prehodu. Pri nasičenju absorpcije, kadar prevladuje nehomogena razširitev, nastopijo pomembni novi pojavi.

Začnimo z dvonivojskim plinom, na katerega vpada močan snop monokromatske svetlobe s frekvenco  $\omega_s$ , ki je blizu osrednje frekvence  $\omega_0$  Dopplerjevo razširjene črte. S svetlobo lahko sodeluje le skupina atomov, pri kateri se Dopplerjevo premaknjena frekvenca od  $\omega_s$  ne razlikuje več kot za homogeno širino, ki jo opisuje funkcija  $g(\omega - \omega_s)$ . Zato ne moremo zapisati zasedbenih enačb za vse atome hkrati, ampak le za tiste, ki imajo hitrost med  $v$  in  $v + dv$  in ki absorbirajo svetlobo pri frekvenci  $\omega_0 - kv$ .

<sup>6</sup>Celotno širino na polovični višini imenujemo FWHM – *Full width at half maximum*.

<sup>7</sup>Nemški fizik Woldemar Voigt, 1850–1919.

Naj bosta  $\mathcal{N}_1(v)$  in  $\mathcal{N}_2(v)$  hitrostni porazdelitvi atomov v osnovnem in vzbujenem stanju. Gostota  $\mathcal{N}_2(v)$  se spreminja podobno kot celotna zasedenost v homogenem primeru (enačba 1.28)

$$\frac{d\mathcal{N}_2(v)}{dt} = -A\mathcal{N}_2(v) - Bg(\omega_S - \omega_0 + kv)\frac{j}{c}(\mathcal{N}_2(v) - \mathcal{N}_1(v)), \quad (1.72)$$

kjer je  $j$  gostota vpadnega svetlobnega toka. Upoštevali smo, da je zaradi Dopplerjevega pojava prehod premaknjen k frekvenci  $\omega_0 - kv$ . Velja tudi

$$\mathcal{N}_1(v) + \mathcal{N}_2(v) = \mathcal{N}(v) \quad (1.73)$$

in

$$\frac{d\mathcal{N}_2(v)}{dt} = -\frac{d\mathcal{N}_1(v)}{dt}. \quad (1.74)$$

Vpeljimo  $\mathcal{Z}(v) = \mathcal{N}_1(v) - \mathcal{N}_2(v)$ . Podobno kot v enačbi (1.43) zapišemo

$$\mathcal{N}_2(v) = \frac{1}{2}\mathcal{N}(v) - \frac{1}{2}\mathcal{Z}(v) \quad (1.75)$$

in dobimo

$$\mathcal{Z}(v) = -A\mathcal{Z}(v) + A\mathcal{N}(v) - 2Bg(\omega_S - \omega_0 + kv)\frac{j}{c}\mathcal{Z}(v). \quad (1.76)$$

V stacionarnem stanju je

$$\mathcal{Z}(v) = \frac{\mathcal{N}(v)}{1 + \frac{2B}{Ac}g(\omega_S - \omega_0 + kv)j}. \quad (1.77)$$

Če je nasičenje majhno, lahko imenovalc razvijemo

$$\mathcal{Z}(v) \approx \mathcal{N}(v) \left( 1 - \frac{2B}{Ac}g(\omega_S - \omega_0 + kv)j \right). \quad (1.78)$$

Porazdelitev  $\mathcal{Z}(v)$  je podobna nemoteni porazdelitvi atomov po hitrosti  $\mathcal{N}(v)$ , le da je pri hitrosti  $v = (\omega_0 - \omega_S)/k$  zmanjšana zaradi vpliva vpadne svetlobe. Atomi s to hitrostjo namreč svetlobo absorbirajo in s tem prehajajo v gornje stanje. V porazdelitvi atomov tako nastane vdolbina, ki jo imenujemo Bennettova vdolbina<sup>8</sup> (slika 1.8). Širina vdolbine je določena s homogeno širino prehoda, to je s funkcijo  $g(\omega_S - \omega_0 + kv)$ , globina pa z gostoto vpadnega toka  $j$ .

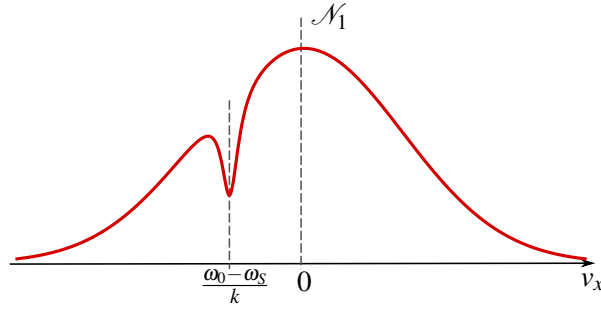
Naj na snov poleg močnega vpadnega žarka pri  $\omega_S$  vпада še šibko valovanje pri frekvenci  $\omega'$ . Izračunajmo absorpcijski koeficient za valovanje pri  $\omega'$ . Upoštevati moramo, da k absorpciji prispevajo vsi atomi, katerih hitrost je taka, da je prehod dovolj blizu  $\omega'$ . Absorpcijski koeficient potem izračunamo s seštevanjem po porazdelitvi  $\mathcal{Z}(v)$  (enačba 1.41)

$$\mu(\omega') = \frac{\hbar\omega'}{c} \int \mathcal{Z}(v)Bg(\omega' - \omega_0 + k'v)dv. \quad (1.79)$$

Homogena razširitev je dosti manjša od Dopplerjeve širine, zato v prvem približku Lorentzovo funkcijo  $g$  v enačbi (1.79) nadomestimo kar z  $\delta(\omega)$ , v izrazu za  $\mathcal{Z}$  (enačba 1.77) pa jo pustimo. Tako je absorpcijski koeficient za šibko testno svetlobo

$$\begin{aligned} \mu(\omega') &= \frac{\hbar\omega'}{k'c} B \frac{\mathcal{N}(\frac{\omega_0 - \omega'}{k'})}{1 + \frac{2Bj}{Ac}g(\omega_S - \omega')} \\ &\approx \hbar B \mathcal{N} \left( \frac{\omega_0 - \omega'}{k'} \right) \left( 1 - \frac{2Bj}{Ac}g(\omega_S - \omega') \right). \end{aligned} \quad (1.80)$$

<sup>8</sup>Ameriški fizik William Ralph Bennett Jr., 1930–2008.



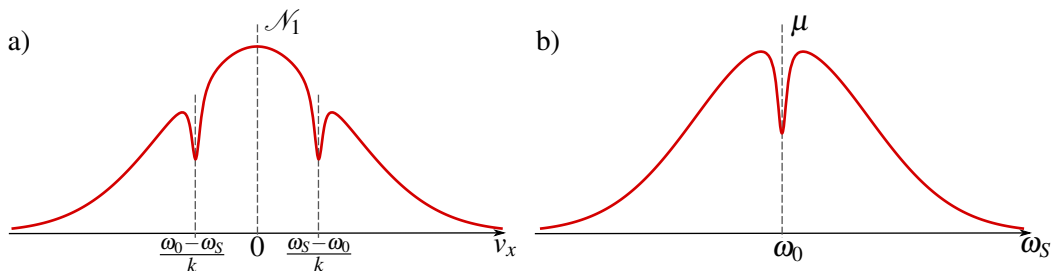
Slika 1.8: Porazdelitev atomov po hitrosti v osnovnem stanju, kjer zaradi absorbirane svetlobe nastane Bennettova vdolbina. Podobno obliko ima tudi absorpcijski koeficient.

V drugi vrstici smo uporabili približek (enačba 1.78). Vidimo, da je odvisnost  $\mu(\omega')$  Gaussove oblike z vdolbino pri  $\omega_S$  in je tako podobna porazdelitvi, kot jo kaže slika (1.8). Odvisnost  $\mu(\omega')$  lahko tudi izmerimo, tako da spreminjamo frekvenco testnega snopa  $\omega'$ .

★ Merjenje absorpcije s testnim žarkom omogoča opazovanje oblike homogene črte kljub mnogo večji nehomogeni Dopplerjevi razširitvi. V moderni spektroskopiji ima zato ta metoda velik pomen.

Izračunajmo še absorpcijski koeficient za prvi, močan vpadni snop, tako da v gornjem izrazu vstavimo  $\omega' = \omega_S$ . Vodilni člen  $\mathcal{N}((\omega_0 - \omega_S)/k)$  opisuje običajno Gaussovo obliko Dopplerjevo razširjene črte, izraz v oklepaju pa da zmanjšanje absorpcije zaradi nasičenja, ki je odvisno le od vrednosti  $g(0)$  in zato enako za vse  $\omega_S$ . Z enim samim vpadnim snopom svetlobe torej vdolbine v absorpciji ne moremo zaznati, saj je izmerjena črta kljub nasičenju Gaussove oblike.

Namesto z dvema različnima snopoma, od katerih lahko šibkemu testnemu snopu spreminjamo frekvenco, lahko vdolbino v porazdelitvi zaznamo tudi z enim samim snopom spremenljive frekvence, ki se po prvem prehodu skozi plin odbije od ogledala in vrne v nasprotni smeri. S tem se v porazdelitvi atomov v spodnjem stanju simetrično pri hitrostih  $\pm(\omega_0 - \omega_S)/k$  pojavita dve Bennettovi vdolbini (slika 1.9 a). Kadar je  $\omega_S$  blizu  $\omega_0$ , se vdolbini vsaj delno prekrivata, stopnja nasičenja se poveča in v krivulji za absorpcijo svetlobe se pojavi vdolbina (slika 1.9 b). Imenujemo jo Lambova vdolbina<sup>9</sup>.



Slika 1.9: Porazdelitev atomov po hitrosti v osnovnem stanju, če svetloba prehaja skozi plin v dveh smereh (a). Če frekvenca vpadne svetlobe približno sovpada s centralno frekvenco prehoda, se vdolbini prekrivata in absorpcija se zmanjša (b).

Zapišimo enačbe za ta primer. Vpadni snop svetlobe povzroči spremembo zasedenosti pri prehodu skozi plin v obeh smereh, zato je zdaj

$$\mathcal{Z}(v) \approx \mathcal{N}(v) \left( 1 - \frac{2Bj}{Ac} (g(\omega_S - \omega_0 + kv) + g(\omega_S - \omega_0 - kv)) \right). \quad (1.81)$$

<sup>9</sup>Ameriški fizik in nobelovec Willis Eugene Lamb Jr., 1913–2008.

Podobno kot prej izračunamo absorpcijski koeficient za širjenje svetlobe v pozitivni smeri

$$\begin{aligned}\mu_+(\omega_S) &= \frac{\hbar\omega}{c} B \int \mathcal{L}(v) g(\omega_S - \omega_0 + kv) dv \\ &\approx \hbar B \mathcal{N} \left( \frac{\omega_S - \omega_0}{k} \right) \left( 1 - \frac{2Bj}{Ac} (g(0) + g(2(\omega_S - \omega_0))) \right).\end{aligned}\quad (1.82)$$

Izmerjeni absorpcijski profil je odvisen od frekvence vpadne svetlobe  $\omega_S$  in ima pri  $\omega_0$  vdolbino, ki je zopet podobna homogeno razširjeni črti. Faktor 2 v argumentu funkcije  $g(2(\omega_S - \omega_0))$  je posledica našega grobega približka, ko smo v integraciji  $g(\omega_S - \omega_0 + kv)$  nadomestili kar z  $\delta$  funkcijo. Natančnejši račun pokaže, da je vrh pri  $\omega_0$  kar oblike  $g(\omega_S - \omega_0)$ .

**Naloga 1.9.1** Pokaži, da je rezultat natančnejše izpeljave absorpcijskega koeficienta

$$\mu_+(\omega_S) = \hbar B \mathcal{N} \left( \frac{\omega_S - \omega_0}{k} \right) \left( 1 - \frac{Bj}{Ac} (g(0) + g(\omega_S - \omega_0)) \right). \quad (1.83)$$

Pri računu privzemi, da je širina Dopplerjeve porazdelitve bistveno večja od širine homogene razširitve (enačba 1.67) in Maxwelllovo porazdelitev postavi pred integral.

## 1.10 \*Izpeljava verjetnosti za prehod

Verjetnosti za prehod atoma iz enega stanja v drugo s sevanjem, ki smo jih opisali s fenomenološkimi Einsteinovimi koeficienti  $A_{21}$  in  $B_{21}$  (razdelek 1.3), je mogoče izpeljati tudi drugače. Pri tem se poslužimo kvantne elektrodinamike, kar pomeni kvantno obravnavo tako atoma kot elektromagnetnega polja. Povsem strog račun je zahteven in presega okvir te knjige, zato si na kratko oglejmo le, kako pridemo do rezultata z uporabo Fermijevega zlatega pravila.

Postavimo dvonivojski atom v votlino z elektromagnetnim poljem. Izračunajmo verjetnost, da zaradi interakcije s poljem atom preide iz stanja  $|2\rangle$  v stanje  $|1\rangle$ , pri čemer se število fotonov v izbranem stanju elektromagnetnega polja  $\alpha$  poveča z  $n_\alpha$  na  $n_\alpha + 1$ . V vseh ostalih stanjih polja naj bo število fotonov enako nič.

Med atomom in poljem privzemimo električno dipolno interakcijo

$$\hat{H}_i = -e\hat{E}(\mathbf{r}, t)\hat{x}, \quad (1.84)$$

kjer je  $\hat{x}$  operator koordinate elektrona v atomu. Privzeli smo, da je nihajoče polje polarizirano v smeri osi  $x$ . Stanja celotnega sistema, to je atoma in polja, zapišemo v obliki produkta atomskih stanj in stanja elektromagnetnega polja, pri čemer moramo navesti število fotonov v vsakem nihanju votline  $\alpha$ . Zapišemo okrajšano

$$|i, n_\alpha\rangle \equiv |i\rangle |\{n_\alpha\}\rangle. \quad (1.85)$$

Začetno stanje celotnega sistema naj bo tako  $|2, n_\alpha\rangle$ , kar pomeni, da je atom v gornjem stanju (stanju 2), polje pa ima  $n_\alpha$  fotonov v enem samem stanju  $\alpha$ . Ustrezno končno stanje po prehodu je  $|1, n_\alpha + 1\rangle$ .

V prvem redu teorije motenj je verjetnost za prehod iz začetnega v končno stanje na časovno enoto, pri čemer z delta funkcijo izberemo le prehod, pri katerem se ohranja energija, enaka

$$w_{21} = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle 1, n_\alpha + 1 | \hat{H}_i | 2, n_\alpha \rangle|^2 \delta(E_2 - E_1 - \hbar\omega_\alpha). \quad (1.86)$$



Operator elektromagnetnega polja lahko po enačbi (1.10) razvijemo po lastnih nihanjih votline

$$\hat{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{\sqrt{V\epsilon_0}} \sum_{\alpha} \hat{p}_{\alpha}(t) E_{\alpha}(\mathbf{r}), \quad (1.87)$$

kjer je  $\hat{p}_{\alpha}$  operator gibalne količine stanja  $\alpha$ ,  $E_{\alpha}$  pa funkcija, ki popisuje krajevno odvisnost polja. Vemo, da se vsako elektromagnetno nihanje votline obnaša kot harmonski oscilator. Zato lahko vpeljemo kreacijske in anihilacijske operatorje

$$\hat{a}_{\alpha}^{\dagger} = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega_{\alpha}}} (\omega_{\alpha}\hat{q}_{\alpha} - i\hat{p}_{\alpha}) \quad \text{in} \quad (1.88)$$

$$\hat{a}_{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega_{\alpha}}} (\omega_{\alpha}\hat{q}_{\alpha} + i\hat{p}_{\alpha}). \quad (1.89)$$

Kreacijski operatorji povečujejo, anihilacijski pa zmanjšujejo število fotonov v danem stanju

$$\hat{a}_{\alpha}^{\dagger}|n_{\alpha}\rangle = \sqrt{n_{\alpha}+1}|n_{\alpha}+1\rangle \quad \text{in} \quad (1.90)$$

$$\hat{a}_{\alpha}|n_{\alpha}\rangle = \sqrt{n_{\alpha}}|n_{\alpha}-1\rangle. \quad (1.91)$$

Edini od nič različni matrični elementi so tako oblike

$$\langle n_{\alpha}+1|\hat{a}_{\alpha}^{\dagger}|n_{\alpha}\rangle = \sqrt{n_{\alpha}+1} \quad \text{in} \quad (1.92)$$

$$\langle n_{\alpha}-1|\hat{a}_{\alpha}|n_{\alpha}\rangle = \sqrt{n_{\alpha}}. \quad (1.93)$$

Operatorje  $\hat{p}_{\alpha}$  lahko izrazimo s kreacijskimi in anihilacijskimi operatorji in jih vstavimo v razvoj električnega polja (enačba 1.87). Dobimo

$$\hat{E}(\mathbf{r}, t) = -i \sum_{\alpha} \sqrt{\frac{\hbar\omega_{\alpha}}{2V\epsilon_0}} (\hat{a}_{\alpha}^{\dagger} - \hat{a}_{\alpha}) E_{\alpha}(\mathbf{r}). \quad (1.94)$$

Nadaljujemo z izračunom matričnega elementa. Operator koordinate  $\hat{x}$  deluje le na atomski del stanja,  $\hat{E}$  pa le na elektromagnetno polje, zato velja

$$\langle 1, n_{\alpha}+1|\hat{H}_i|2, n_{\alpha}\rangle = -e \langle 1, n_{\alpha}+1|\hat{E}\hat{x}|2, n_{\alpha}\rangle \quad (1.95)$$

$$= -e \langle 1|\hat{x}|2\rangle \langle n_{\alpha}+1|\hat{E}|n_{\alpha}\rangle. \quad (1.96)$$

Vstavimo polje, ki smo ga izrazili s kreacijskimi in anihilacijskimi operatorji (enačba 1.94), upoštevamo zvezi (1.92) in (1.93) in zapišemo

$$\begin{aligned} \langle n_{\alpha}+1|\hat{E}|n_{\alpha}\rangle &= -i \sum_{\beta} \sqrt{\frac{\hbar\omega_{\beta}}{2V\epsilon_0}} \langle n_{\alpha}+1|\hat{a}_{\beta}^{\dagger} - \hat{a}_{\beta}|n_{\alpha}\rangle E_{\beta}(\mathbf{r}) \\ &= -i \sqrt{\frac{\hbar\omega_{\alpha}}{2V\epsilon_0}} \sqrt{n_{\alpha}+1} E_{\alpha}(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (1.97)$$

Od vseh operatorjev v razvoju polja je namreč od nič različen matrični element le za kreacijski operator za stanje  $\alpha$ .

Vpeljimo še simbol za matrični element koordinate med atomskima stanjema  $\langle 1|\hat{x}|2\rangle = x_{12}$ . Iskana verjetnost za prehod iz začetnega stanja, v katerem je v votlini vzbujen atom in  $n_{\alpha}$  fotonov, v končno stanje, v katerem je atom v osnovnem stanju in  $n_{\alpha}+1$  fotonov v stanju  $\alpha$ , je tako

$$w_{21} = \frac{\pi e^2 \omega_{\alpha} x_{12}^2}{V\epsilon_0} (n_{\alpha}+1) E_{\alpha}^2(\mathbf{r}) \delta(E_2 - E_1 - \hbar\omega_{\alpha}). \quad (1.98)$$

Verjetnost za prehod je sorazmerna z  $n_\alpha + 1$  in je od nič različna, tudi če je število kvantov polja enako nič. To opisuje seveda spontano sevanje. Prispevek, ki je sorazmeren s številom že prisotnih fotonov, pa predstavlja stimulirano sevanje. Verjetnost za prehod vsebuje še kvadrat prostorske odvisnosti polja  $E_\alpha^2(\mathbf{r})$ . Če ne poznamo natančnega položaja atoma ali če je plin atomov enakomerno porazdeljen po votlini, lahko ta člen nadomestimo s povprečno vrednostjo. Za stoječe valovanje je to  $1/2$ .

Kolikšna pa je verjetnost za spontano emisijo? Spontana emisija je možna v vsa elektromagnetna nihanja votline s pravo frekvenco. Celotno verjetnost za prehod atoma iz vzbujenega stanja v osnovno izračunamo tako, da seštejemo verjetnosti za prehod z izsevanim fotonom v določenem stanju. Spomnimo se, da je ta verjetnost ravno enaka Einsteinovem koeficientu  $A_{21}$  (enačba 1.34)

$$A_{21} = \sum_{\alpha} w_{21} = \sum_{\alpha} \frac{\pi e^2 \omega_{\alpha} x_{12}^2}{2V \epsilon_0} \delta(E_2 - E_1 - \hbar \omega_{\alpha}). \quad (1.99)$$

Za prostorsko odvisnost polja  $E^2(\mathbf{r})$  smo vzeli povprečje  $1/2$ . Vsoto po nihanjih lahko z uporabo enačbe (1.7) spremenimo v integral in upoštevamo enačbo (1.6). Dobimo

$$A_{21} = \frac{\pi e^2 x_{12}^2}{2\hbar \epsilon_0} \int \rho(\omega_{\alpha}) \omega_{\alpha} \delta(\omega_0 - \omega_{\alpha}) d\omega_{\alpha} = \frac{e^2 \omega_0^3 x_{12}^2}{\epsilon_0 \hbar c^3}, \quad (1.100)$$

pri čemer smo z  $\omega_0 = (E_2 - E_1)/\hbar$  označili frekvenco prehoda. S tem smo izpeljali vrednost Einsteinovega koeficienta  $A_{21}$ .



Pri gornjem izračunu Einsteinovega koeficienta  $A_{21}$  smo privzeli, da so vsi dipoli urejeni v smeri svetlobe. Če želimo rezultat izenačiti s koeficientom, ki smo ga vpeljali za izotropno sevanje črnega telesa, ga moramo pomnožiti s faktorjem  $\langle \cos^2 \vartheta \rangle = 1/3$ .

Zaradi spontanega sevanja vzbujeno atomsko stanje nikoli ni popolnoma stacionarno. Poleg tega energija stanja s končnim razpadnim časom ni natančno določena, zato moramo verjetnost za stimulirano sevanje (enačba 1.98) malo popraviti. Delta funkcijo energije nadomestimo s končno široko funkcijo  $g(\omega - \omega_0)$ , ki ima vrh pri  $\omega_0$ . Zaradi spremembe integracijske spremenljivke nastopi še dodaten faktor  $1/\hbar$  in zapišemo

$$w_{21} = \frac{\pi e^2 \omega_{\alpha} x_{12}^2}{2V \epsilon_0 \hbar} (n_{\alpha} + 1) g(\omega_{\alpha} - \omega_0). \quad (1.101)$$

Poglejmo še Einsteinov koeficient za stimulirano sevanje  $B_{21}$ . Lahko ga izrazimo iz enačbe (1.27), če upoštevamo, da je gostota energije polja  $n_{\alpha} \hbar \omega_{\alpha}/V$

$$B_{21} = \frac{V w_{21}}{n_{\alpha} \hbar \omega_{\alpha} g(\omega_{\alpha} - \omega_0)} = \frac{\pi e^2 x_{12}^2}{2\epsilon_0 \hbar^2}. \quad (1.102)$$

Razmerje Einsteinovih koeficientov izračunamo z uporabo enačb (1.100) in (1.102) in dobimo

$$\frac{A_{21}}{B_{21}} = \frac{\hbar \omega_{\alpha}^3}{\pi^2 c^3}, \quad (1.103)$$

ki se ujema z razmerjem, ki smo ga izpeljali z uporabo Planckove formule (enačba 1.34). Prehojena pot jasno kaže zvezo med spontanim in stimuliranim sevanjem ter gostoto stanj elektromagnetnega polja.

## 1.11 \*Rabijeve oscilacije

Ko močna svetloba vpada na dvonivojski sistem, lahko v primeru, da je frekvenca vpadne svetlobe  $\omega$  blizu frekvence prehoda  $\omega_0$ , pride do periodične izmenjave energije med svetlobnim poljem in dvonivojskim sistemom. Oscilacije števila fotonov oziroma pričakovane vrednosti zasedenosti nivojev imenujemo Rabijeve oscilacije<sup>10</sup>.

Obravnavajmo sklopitev dvonivojskega sistema z elektromagnetnim valovanjem v semiklasičnem modelu. To pomeni, da dvonivojski sistem obravnavamo kvantno, svetlobo, ki vpada nanj, pa kot klasično skalarno polje. V odsotnosti električnega polja zapišemo Hamiltonian za elektron kot

$$H_0 = \hbar\omega_1|1\rangle\langle 1| + \hbar\omega_2|2\rangle\langle 2|, \quad (1.104)$$

pri čemer je  $\omega_2 - \omega_1 = \omega_0$  frekvenca prehoda. V prisotnosti svetlobnega polja moramo dodati še člen, ki opisuje dipolno interakcijo. Celoten Hamiltonian postane časovno odvisen in ga zapišemo kot

$$H = \hbar\omega_1|1\rangle\langle 1| + \hbar\omega_2|2\rangle\langle 2| - e\hat{x}E_0 \cos(\omega t). \quad (1.105)$$

Schrödingerjevo enačbo

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi\rangle = H |\psi\rangle \quad (1.106)$$

rešujemo z nastavkom

$$|\psi\rangle = c_1(t)e^{-i\omega_1 t}|1\rangle + c_2(t)e^{-i\omega_2 t}|2\rangle, \quad (1.107)$$

saj je valovna funkcija, ki popisuje stanje sistema, na splošno kombinacija obeh stanj. Nastavek (enačba 1.107) in Hamiltonian (enačba 1.105) vstavimo v enačbo (1.106), ki jo enkrat pomnožimo z  $\langle 1|$ , drugič pa z  $\langle 2|$  in izpeljemo sistem dveh sklopljenih enačb

$$\frac{dc_1}{dt} = -\frac{i}{\hbar}V \cos(\omega t)e^{-i\omega_0 t} c_2 \quad \text{in} \quad \frac{dc_2}{dt} = -\frac{i}{\hbar}V \cos(\omega t)e^{i\omega_0 t} c_1, \quad (1.108)$$

pri čemer je  $V = -\langle 1|e\hat{x}E_0|2\rangle$ . Zapišemo še  $\cos(\omega t)$  kot kompleksno število in zanemarimo hitro spreminjajočo se komponento pri  $\omega_0 + \omega$ , tako da enačbi prepisemo v

$$\frac{dc_1}{dt} = -\frac{i}{2\hbar}V e^{-i\Delta t} c_2 \quad \text{in} \quad \frac{dc_2}{dt} = -\frac{i}{2\hbar}V e^{i\Delta t} c_1, \quad (1.109)$$

kjer je  $\Delta = \omega_0 - \omega$ . Dodajmo še začetni pogoj, da je sistem v osnovnem stanju in torej  $c_1(0) = 1$  in  $c_2(0) = 0$ . Rešitvi enačb (1.109) sta tako

$$c_1(t) = e^{-i\Delta t/2} \left( \cos\left(\frac{\Omega t}{2}\right) + i\frac{\Delta}{\Omega} \sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right) \right) \quad \text{in} \quad (1.110)$$

$$c_2(t) = \frac{V}{i\hbar\Omega} e^{i\Delta t/2} \sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right). \quad (1.111)$$

Pri tem smo vpeljali Rabijevo frekvenco

$$\Omega = \sqrt{\Delta^2 + \left(\frac{V}{\hbar}\right)^2} = \sqrt{(\omega_0 - \omega)^2 + \left(\frac{\langle 1|\hat{x}|2\rangle eE_0}{\hbar}\right)^2}. \quad (1.112)$$

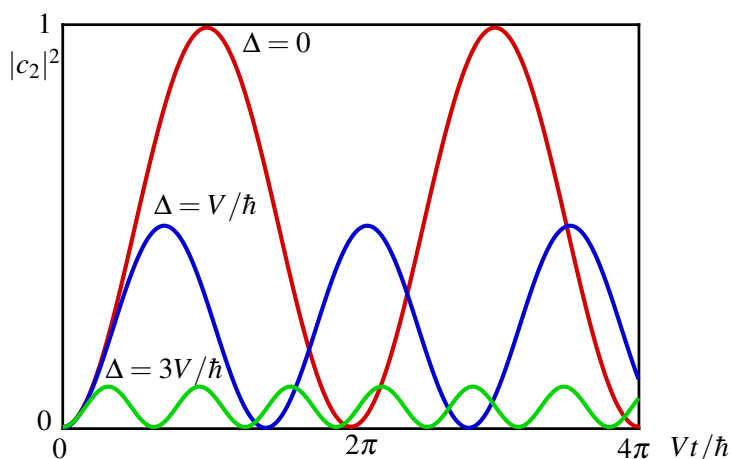
<sup>10</sup> Ameriški fizik in nobelovec Isidor Isaac Rabi, 1898–1988.

**Naloga 1.11.1** Pokaži, da enačbi (1.110) in (1.111) rešita sistem enačb (1.109) ob izbranih začetnih pogojih.

Poglejmo rezultat podrobneje. Verjetnost, da najdemo atom v stanju  $|2\rangle$ , je enaka

$$P_2(t) = |c_2(t)|^2 = \frac{V^2}{\hbar^2 \Omega^2} \sin^2(\Omega t/2). \quad (1.113)$$

Če je frekvenca vpadne svetlobe točno enaka frekvenci prehoda, je  $\Delta = 0$  in  $\Omega = V/\hbar$ . Takrat je amplituda nihanja zasedenosti vzbujenega stanja kar enaka 1 in sistem v celoti periodično prehaja iz osnovnega stanja v vzbujeno in nazaj. To pomeni, da prihaja izmenično do popolne absorpcije svetlobe in do popolne stimulirane emisije. Pri odstopajoči vpadni frekvenci se amplituda nihanja zmanjša, hkrati pa se poveča frekvenca oscilacij. Frekvenca oscilacij pa ni odvisna zgolj od frekvence vpadnega valovanja, ampak tudi od njegove amplitude električne poljske jakosti. Zelo groba ocena Rabijeve frekvence je zato  $\Omega \sim \text{MHz}$ .



Slika 1.10: Rabijeve oscilacije za tri različne vrednosti odstopanja frekvence vpadne svetlobe od frekvence prehoda  $\Delta = \omega_0 - \omega$ . Z naraščajočim odstopanjem se amplituda oscilacij zmanjšuje, njihova frekvenca pa povečuje.

★ Rabijeve oscilacije niso omejene samo na optične prehode, ampak se pojavijo pri vrsti dvonivojskih sistemov, ki interagirajo z spreminjajočim se zunanjim poljem. Poznamo jih na primer pri jedrski magnetni resonanci (NMR) ali kvantnih logičnih vezjih.

## 2. Laser

V prejšnjih poglavjih smo spoznali resonatorje, pojasnili ojačevanje svetlobe in opisali črpanje, ki je potrebno za ojačevanje optičnega signala. V tem poglavju bomo vsa ta spoznanja združili in komponente sestavili v eno samo napravo – laser. Opisali bomo delovanje laserjev in spoznali njihove prednosti pred navadnimi svetili. Zapisali bomo zasedbene enačbe in razložili delovanje laserjev, spoznali zanimive spremljujoče pojave, opisali načine delovanja laserjev v sunkih in na koncu predstavili še semiklasični model laserja.

### 2.1 Laser

Spoznali smo, da se svetloba pri prehodu skozi sredstvo z obrnjeno zasedenostjo med dvema nivojema ojačuje. Postavimo tako sredstvo v optični resonator. Na začetku nastaja predvsem spontano izsevana svetloba, ki se med zrcaloma resonatorja odbija in ob vsakem preletu skozi snov postopoma ojačuje. Vzbuja se nihanja resonatorja z nihajnimi frekvencami blizu frekvence atomskega prehoda, pri katerih snov ojačuje. Energija nihanj z dovolj majhnimi izgubami narašča, dokler se ojačenje ne izenači z izgubami. Sistem preide v stacionarno stanje in seva močno koherentno svetlobo. Tak izvor svetlobe imenujemo laser. Beseda laser je nastala iz kratice za *Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation* – ojačenje svetlobe s stimuliranim sevanjem.



Slika 2.1: Shema laserja s ključnimi deli: ojačevalno sredstvo, črpalni mehanizem in resonator

★ Kot klasično analogijo za laser vzemimo klarinet, ki je sestavljen iz cevi in ustnika. Cev deluje kot resonator, v katerem nastane stojni zvočni val, pri čemer je frekvenca stoječega vala določena z dolžino cevi in s številom vozlov. Naloga ustnika je dovajanje energije in s tem vzdrževanje konstantne amplitude nihanja. To glasbenik doseže s pihanjem v ustnik in tresenjem prožnega jezička, ki s treslji proizvaja zvok. Tresenje jezička je približno periodično in vsebuje mnogo različnih frekvenc, tudi take, ki ustrezajo frekvenci stojećih valov v cevi. Ko amplituda tlaka v cevi naraste nad neko mejo, pride do zanimivega pojava. Nihanje tlaka v gornjem koncu cevi povratno deluje na ustnik in ga sili, da niha s frekvenco najmočnejše vzbujenega stoječega vala v cevi, druge frekvence pa zamrejo. Moč pihanja gre le še v nihanje jezička s pravo frekvenco in ojačuje nihanje zračnega stolpca. Tako se s povratno zvezo med nihanjem jezička in stoječim valovanjem v cevi vzdržuje stoječe valovanje s konstantno amplitudo.

V grobem ima laser tri ključne sestavne dele: ojačevalno sredstvo, črpalni mehanizem in ukrivljeni zrcali, ki tvorita resonator (slika 2.1). Črpalni mehanizem vzdržuje obrnjeno zasedenost v ojačevalnem sredstvu, resonator pa omogoča, da se svetloba dovolj ojači in tako stimulirano sevanje prevlada nad spontanim. Odbojnost vsaj enega od zrcal mora biti manjša od 1, da skozenj lahko izhaja svetloba.

Pri osnovnem opisu delovanja laserja se omejimo na najpreprostejši model in privzemimo, da frekvenca le enega resonatorskega nihanja sovpada s frekvenco prehoda aktivne snovi. Ta privzetelek v večini laserjev ni avtomatično izpolnjen, vendar ga je pogosto mogoče doseči z dodatnimi elementi v resonatorju. Aktivno snov oziroma ojačevalno sredstvo v laserju stalno črpamo in s tem vzdržujemo obrnjeno zasedenost.

Naj bo  $W$  energija svetlobnega valovanja v resonatorju. Zaradi izgub skozi zrcali in zaradi absorpcije ter sipanja v resonatorju se energija na en obhod resonatorja zmanjša za (enačba ??)

$$\Delta W_{\text{izgube}} = -\Lambda W = -(1 - \mathcal{R}_1 + 1 - \mathcal{R}_2 + 2\alpha L) W, \quad (2.1)$$

kjer so  $\Lambda$  celotne izgube,  $\alpha$  so izgube na enoto poti zaradi absorpcije in sipanja,  $L$  je dolžina resonatorja,  $\mathcal{R}_1$  in  $\mathcal{R}_2$  pa sta odbojnosti zrcal. V ojačevalnem sredstvu, v katerem vzdržujemo obrnjeno zasedenost, pride do ojačevanja s stimuliranim sevanjem. Energija nihanja resonatorja se tako na en obhod po enačbi (1.63) poveča za

$$\Delta W_{\text{ojačenje}} = \frac{G}{1 + W/W_s} W 2L'. \quad (2.2)$$

Namesto saturacijske gostote svetlobnega toka  $j_s$  smo vpeljali saturacijsko energijo  $W_s = V j_s / c$ ,  $L'$  pa označuje dolžino ojačevalnega sredstva. Račun pogosto poenostavimo, tako da vzamemo  $L' = L$ , tukaj pa zaradi jasnosti obdržimo ločen zapis. Privzeli smo tudi, da je ojačenje na en obhod dovolj majhno, da enačbe (1.63) ni treba integrirati.

V stacionarnem stanju se zmanjšanje energije zaradi izgub ravno izenači s povečanjem energije zaradi ojačenja. Zapišemo

$$|\Delta W_{\text{izgube}}| = |\Delta W_{\text{ojačenje}}|, \quad (2.3)$$

od koder sledi

$$\Lambda W = \frac{G 2L'}{1 + W/W_s} W. \quad (2.4)$$

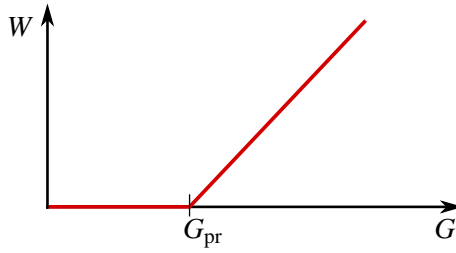
Ta enačba ima dve rešitvi za energijo svetlobnega nihanja. Prva je  $W = 0$ , druga pa

$$W = W_s \left( \frac{G}{G_{\text{pr}}} - 1 \right), \quad (2.5)$$

pri čemer je

$$G_{\text{pr}} = \frac{\Lambda}{2L'}. \quad (2.6)$$

Združimo obe rešitvi: energija svetlobe v laserju je pod določeno vrednostjo ojačenja, imenujemo jo ojačenje na pragu delovanja  $G_{\text{pr}}$ , enaka nič, nad pragom pa linearno narašča z ojačenjem  $G$  (slika 2.2). Ojačenje je seveda odvisno od stopnje obrnjene zasedenosti, ta pa je povezana z močjo črpanja.



Slika 2.2: Odvisnost energije svetlobe v laserju od ojačenja

Izhodna moč laserja je enaka energiji, ki zapusti resonator skozi izhodno zrcalo, deljeni s časom obhoda resonatorja  $2L/c$

$$P = (1 - \mathcal{R}_1) \frac{c}{2L} W. \quad (2.7)$$

Ker so vsi predfaktorji v gornji enačbi konstantni, je izhodna moč kar sorazmerna z energijo svetlobe v resonatorju. Odvisnost izhodne moči laserja od črpanja je tako do konstante enaka, kot je prikazana na sliki (2.2).

**Naloga 2.1.1** Izračunaj izhodno moč iz laserja pri dani dolžini resonatorja  $L = L'$ , odbojnosti enega zrcala  $\mathcal{R}_2 = 1$ , notranjih izgubah na enoto dolžine  $\alpha$  in ojačenju  $G$ . Pokaži, da je izhodna moč največja pri odbojnosti izhodnega zrcala

$$\mathcal{R}_1 = 1 - 2\alpha L \left( \sqrt{\frac{G}{\alpha}} - 1 \right). \quad (2.8)$$

## 2.2 Zasedbene enačbe

Za podrobnejši opis delovanja laserja zapišimo zasedbene enačbe. Enačbam za zasedenost atomskih nivojev v trinivojskem sistemu (enačbe 1.52–1.54) dodamo še enačbo za energijo lastnega valovanja v resonatorju. Še naprej obravnavajmo primer, ko je vzbujeno le eno resonatorsko stanje, opazujemo pa prehode med prvim in drugim vzbujenim stanjem (slika 1.6 b).

Preden zapišemo enačbe, napravimo še nekaj poenostavitev. Najprej privzamemo, da je razpadni čas spodnjega laserskega stanja  $|1\rangle$ , ki ga določa koeficient  $A_{10}$ , dosti krajši od razpadnega časa zgornjega stanja  $|2\rangle$ . Tedaj vsi atomi iz spodnjega stanja zelo hitro preidejo v osnovno stanje in  $N_1 \approx 0$ , če le ni preveč stimuliranega sevanja. Zanimarimo tudi spontano sevanje iz drugega vzbujenega nivoja  $A_{20} \approx 0$ . Celoten sistem potem opišemo z dvema spremenljivkama: prva je  $N_2$ , ki označuje zasedenost drugega vzbujenega stanja in hkrati približno obrnjeno zasedenost; druga je število fotonov  $n$ , ki opisuje energijo v izbranem stanju resonatorja. Gostota energije polja je  $w = n\hbar\omega/V$ , pri čemer je  $V$  volumen resonatorja.

Zasedbeni enačbi sta

$$\frac{dN_2}{dt} = rN - A_{21}N_2 - B_{21}gN_2 \frac{\hbar\omega}{V} n = rN - A_{21}N_2 - \frac{\sigma c}{V} N_2 n \quad (2.9)$$

in

$$\frac{dn}{dt} = \frac{\sigma c}{V} N_2 (n + 1) - \frac{2}{\tau} n. \quad (2.10)$$



Prva enačba sledi neposredno iz enačbe (1.54) ob upoštevanju zgoraj navedenih poenostavitvev. Drugo pa dobimo s sledečim razmislekom. Energija svetlobe oziroma število fotonov v resonatorju se povečuje predvsem zaradi stimuliranega sevanja, ki predstavlja zadnji člen v enačbi (2.9). Vemo pa, da je verjetnost za prehod atoma iz višjega v nižje stanje z izsevanjem fotona v izbrano stanje elektromagnetnega polja sorazmerna z  $n + 1$  (enačba 1.101), kjer je  $n$  število fotonov v izbranem stanju. Če torej namesto  $n$  v zadnjem členu enačbe (2.9) pišemo  $n + 1$ , opišemo poleg stimuliranega sevanja tudi prispevek spontanega sevanja. Dodamo še člen, s katerim popišemo zmanjševanje energije svetlobe v resonatorju zaradi izgub, kar opišemo z razpadnim časom  $\tau/2$  (enačba ??).

Gornji enačbi predstavljata sistem dveh sklopljenih diferencialnih enačb za časovni razvoj števila fotonov v resonatorskem stanju in za zasedenost gornjega atomskega stanja. Enačbi sta nelinearni in ju ne znamo analitično rešiti. Vseeno pa lahko nekaj povemo o takem sistemu.

Poglejmo najprej stacionarne rešitve, za katere velja  $\dot{N}_2 = 0$  in  $\dot{n} = 0$ . Iz enačbe (2.9) izrazimo  $N_2$  in ga vstavimo v enačbo (2.10). Sledi

$$\frac{2}{\tau}n(A_{21}V + \sigma cn) = \sigma crN(n + 1). \quad (2.11)$$

Enačbo zapišemo še bolj pregledno, če vpeljemo koeficient ojačenja  $G$  (enačba 1.64) in ojačenje na pragu  $G_{\text{pr}}$  (enačbi ?? in 2.6)

$$G_{\text{pr}}n \left( 1 + \frac{\sigma c}{VA_{21}}n \right) = G(n + 1). \quad (2.12)$$

Vpeljemo še brezdimenzijsko konstanto  $p$ , pri čemer upoštevamo zvezo med Einsteinovimi koeficienti (enačba 1.34)

$$p = \frac{VA_{21}}{\sigma c} = \frac{VA_{21}}{B_{21}\hbar\omega g} = \frac{V\omega^2}{\pi^2 c^3 g} \simeq \frac{V\omega^2}{\pi^2 c^3} \Delta\omega. \quad (2.13)$$

V zadnjem izrazu smo privzeli, da je  $g \simeq 1/\Delta\omega$ . Parameter  $p$  je torej približno enak produktu gostote stanj elektromagnetnega polja v resonatorju (enačba 1.6) in širine atomskega prehoda (ter volumna), torej kar številu vseh stanj v frekvenčnem intervalu atomskega prehoda. To število je navadno precej veliko  $p \sim 10^8 - 10^{10}$ .



S primerjavo izraza za  $p$  (enačba 2.13) z izrazom za saturacijsko gostoto toka (enačba 1.60) vidimo, da  $p$  predstavlja število fotonov v resonatorju, pri katerem pride do nasičenja ojačenja, če je frekvenca nihanja resonatorja blizu centra atomske črte.

Enačbo (2.12) prepišemo

$$\frac{n^2}{p} - \left( \frac{G}{G_{\text{pr}}} - 1 \right)n - \frac{G}{G_{\text{pr}}} = 0 \quad (2.14)$$

s pozitivno rešitvijo

$$n = \frac{p}{2} \left( \left( \frac{G}{G_{\text{pr}}} - 1 \right) + \sqrt{\left( \frac{G}{G_{\text{pr}}} - 1 \right)^2 + \frac{4G}{pG_{\text{pr}}}} \right). \quad (2.15)$$

Ker je  $p$  zelo veliko število, lahko koren razvijemo, če le ni ojačenje preveč blizu praga, ko je  $G/G_{\text{pr}} \simeq 1$ .



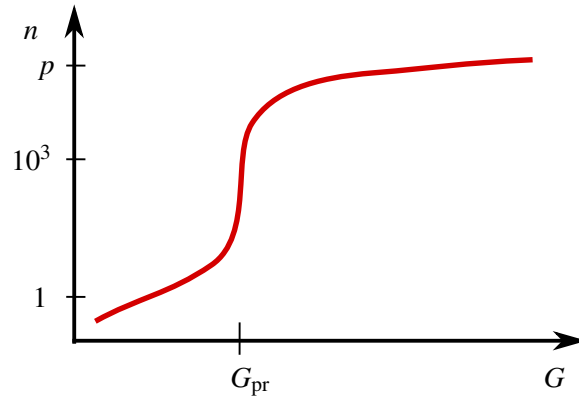
Pod pragom je  $G < G_{\text{pr}}$  in

$$n \approx \frac{p}{2} \left( \left( \frac{G}{G_{\text{pr}}} - 1 \right) + \left( 1 - \frac{G}{G_{\text{pr}}} \right) + \frac{2G}{p(G_{\text{pr}} - G)} \right) = \frac{G}{G_{\text{pr}} - G}. \quad (2.16)$$

Pri razvoju korena smo upoštevali, da mora biti pozitiven. Nad pragom je število fotonov

$$n \approx p \left( \frac{G}{G_{\text{pr}}} - 1 \right) = \frac{W_s}{\hbar\omega} \left( \frac{G}{G_{\text{pr}}} - 1 \right). \quad (2.17)$$

Rezultat, ki je po pričakovanju skladen z enačbo (2.5), si oglejmo podrobneje. Pod pragom so izgube večje od črpanja in gre praktično vsa moč, ki jo dovedemo v sistem, preko spontanega sevanja v veliko število stanj elektromagnetnega polja. Število fotonov v izbranem resonatorskem nihanju je tako okoli ena do neposredne bližine praga, kjer hitro naraste (slika 2.3), nad pragom je reda velikosti  $p$ . Nad pragom povsem prevlada stimulirano sevanje v eno samo izbrano nihanje resonatorja. Prehod preko praga je zaradi velikega  $p$  tako hiter, da ga ni mogoče izmeriti. Izjema so polprevodniški laserji, katerih volumen – in posledično tudi  $p$  – je tako majhen, da je mogoče opaziti zvezen prehod preko praga.



Slika 2.3: Odvisnost števila fotonov v resonatorju od ojačenja za  $p = 10^5$ .

Izračunamo še stacionarno zasedenost zgornjega atomskega nivoja. Iz enačbe (2.10) sledi

$$N_2 = \frac{2V}{\tau\sigma c} \frac{n}{n+1} \approx \frac{2V}{\tau\sigma c}. \quad (2.18)$$

Na pragu je po enačbi (2.15)  $n = \sqrt{p}$ . Sledi

$$N_{2\text{pr}} = \frac{2V}{\tau\sigma c} \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{p}+1}. \quad (2.19)$$

Ker je  $p$  zelo veliko število, iz gornjih enačb sledi, da zasedenost višjega nivoja oziroma obrnjena zasedenost narašča do bližine praga, nad pragom pa je praktično konstantna in skoraj natanko enaka kot na pragu. To ni težko razumeti. Nad pragom je število fotonov v resonatorju veliko in linearno narašča z močjo črpanja. S tem se povečuje hitrost praznjenja gornjega atomskega stanja s stimuliranim sevanjem, kar ravno izniči učinek povečanja črpanja. V stacionarno delujočem laserju obrnjene zasedenosti torej ni mogoče povečati nad vrednost na pragu  $N_{2\text{pr}}$ . To ima pomembne praktične posledice, kot bomo videli v nadaljevanju.



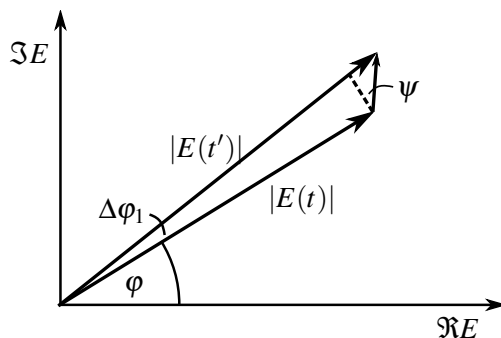
Obravnava laserja z zasedbenimi enačbami je seveda zelo groba. Nismo upoštevali, da je prostorska odvisnost polja v delujočem laserju drugačna od lastnega stanja praznega resonatorja. Poleg tega smo privzeli, da so atomi lahko le v lastnih energijskih stanjih, kar je res le v primeru stacionarnih stanj brez zunanjega, časovno odvisnega polja svetlobe. Bolj podroben pristop je semiklasični model, pri katerem za opis svetlobe uporabimo klasično valovno enačbo, za atome pa kvantno mehaniko (glej poglavje 2.12). Ta model zadošča za opis skoraj vseh pojavov v laserjih razen vpliva spontanega sevanja. Za dosledno obravnavo tega je treba svetlobo opisati s pomočjo kvantne elektrodinamike, kar presega okvir te knjige.

Povzemimo na kratko, kaj smo spoznali o delovanju enofrekvenčnega laserja. Pri dovolj velikem ojačenju, ki ravno pokriva izgube resonatorja, je v stacionarnem stanju energija in s tem amplituda izbranega lastnega nihanja resonatorja različna od nič. Frekvenca svetlobe je določena z izbranim lastnim stanjem resonatorja, ki določa tudi prostorsko odvisnost valovanja v resonatorju in obliko izhodnega snopa. V navadnem stabilnem resonatorju je polje po obliki zelo blizu Gaussovemu snopu, zato je tak tudi izhodni snop. Gaussova prostorska odvisnost izhodnega snopa je morda najpomembnejša lastnost laserjev. Gaussov snop se, kot vemo, najmanj širi zaradi uklona in ga je mogoče zbrati v piko približne velikosti valovne dolžine. Laser se tako najbolj približa idealno točkastemu izvoru svetlobe.

## 2.3 Spektralna širina enega laserskega nihanja

Povejmo še nekaj o spektralni širini svetlobe enofrekvenčnega laserja. Če bi se lastno stanje elektromagnetnega polja v resonatorju obnašalo kot klasično harmonsko nihalo, bi bil spekter laserja neskončno ozek. Vendar imajo laserji končno spektralno širino – v idealnem primeru zaradi kvantizacije elektromagnetnega polja, v praksi pa zaradi zunanjih motenj. Poskusimo oceniti razširitev zaradi vpliva kvantizacije. Zaradi nje je poleg stimuliranega sevanja vedno prisotno tudi spontano sevanje. To predstavlja kvantni šum, ki vodi do razširitve spektra.

Predstavimo amplitudo nihanja  $E(t)$  na izbranem mestu v resonatorju kot kompleksno število, ki ga v kompleksni ravnini določata dolžina  $|E(t)|$  in faza  $\varphi$  (slika 2.4). Pri tem fazo določimo glede na neko začetno izbrano fazo. Ker je energija svetlobe sorazmerna s številom fotonov, je dolžina sorazmerna s korenom iz števila fotonov v izbranem nihanju. Stimulirano sevanje, ki ravno pokriva izgube resonatorja, vzdržuje dolžino  $|E(t)|$  praktično konstantno, nespremenjena ostaja tudi faza. Spontano sevanje velikosti amplitude nihanja ne spreminja dosti, vendar stohastična narava spontano izsevanih fotonov vpliva na njeno fazo. Majhen prispevek spontanega sevanja preko spreminjajoče se faze skrajša koherenčni čas in določa spodnjo mejo za širino spektralne črte.



Slika 2.4: Amplituda polja v resonatorju in njena sprememba zaradi spontanega sevanja

Pri spontani emisiji se izseva en foton s poljubno fazo. Prispevek  $h$  kompleksni amplitudi ima torej dolžino 1 in poljubno smer (slika 2.4). Zanima nas povprečje kvadrata spremembe faznega kota pri enem spontano izsevanem fotonu

$$\overline{\Delta\phi_1^2} = \overline{\left(\frac{\cos\psi}{\sqrt{n}}\right)^2} = \frac{1}{2n}, \quad (2.20)$$

kjer  $\psi$  označuje kot med fazo celotnega polja in spontano izsevanega fotona. Zaporedne spontane emisije so med seboj neodvisne, zato izračunamo povprečni kvadrat spremembe faze pri  $m$  emisijah tako, da seštejemo povprečne kvadrate za posamezne fotone

$$\overline{\Delta\phi_m^2} = m\overline{\Delta\phi_1^2} = \frac{m}{2n}. \quad (2.21)$$

Ocenimo še število spontano izsevanih fotonov na časovno enoto. Vemo, da stimulirano sevanje ravno pokrije izgube resonatorja, zato je stimulirano izsevanih fotonov na časovno enoto  $2\bar{n}/\tau$ . Vemo tudi, da je razmerje med verjetnostjo za stimulirano in spontano sevanje enako številu fotonov v danem stanju polja (enačba 1.98), zato je število spontaniziranih sevanj na časovno enoto kar  $2/\tau$ . Tako je število spontano izsevanih fotonov v času  $t$  enako  $m = 2t/\tau$  in

$$\overline{\Delta\phi^2(t)} = \frac{t}{n\tau}. \quad (2.22)$$

Čas  $t_p$ , v katerem se faza znatno spremeni, je torej velikostnega reda

$$t_p \sim \bar{n}\tau = \frac{W}{\hbar\omega} \tau = \frac{P}{\hbar\omega} \tau^2. \quad (2.23)$$

Ker je število fotonov v nihanju nad pragom zelo veliko ( $\sim 10^9$  v majhnem He-Ne laserju),  $\tau$  pa je  $\sim 10^{-7}$ , je karakteristični čas za fazno razširitev idealnega laserja  $t_p \sim 100$  s.

Iz enačbe (2.23) vidimo tudi, da je spektralna širina, ki je podana z  $1/t_p$ , obratno sorazmerna z izhodno močjo laserja. Spodnjo mejo za spektralno širino pri dani izhodni moči laserja podaja Schawlow-Townseva limita<sup>1</sup>

$$\Delta\nu_{\min} = \frac{\pi\hbar\nu}{P} \Delta\nu_R^2, \quad (2.24)$$

pri čemer  $\Delta\nu_R$  predstavlja širino nihanja praznega resonatorja.<sup>2</sup> V neposredni bližini praga, kjer je  $\bar{n} \sim 1$ , je spektralna širina približno enaka širini nihanja praznega resonatorja.

Dejanski laserji seveda nimajo niti približno tako ozkega spektra, kot smo ga pravkar ocenili. Vemo, da je frekvenca laserja določena z dolžino resonatorja ( $\nu = nc/2L$ ), pri čemer je  $n$  zelo veliko celo število. Že majhna sprememba dolžine resonatorja povzroči spremembo frekvence laserja, pri znatnejši spremembi dolžine pa lahko pride tudi do preskoka vzbujenega stanja resonatorja, to je števila  $n$ . Dolžina resonatorja se spreminja predvsem zaradi zunanjih mehanskih motenj in zaradi spreminjanja temperature. Če se posebej ne potrudimo s konstrukcijo resonatorja, so fluktuacije frekvence kar reda velikosti razmika med sosednimi stanji resonatorja, to je reda velikosti  $\sim 100$  MHz. Fluktuacije dolžine je mogoče zmanjšati s skrbno konstrukcijo, temperaturno stabilizacijo in uporabo materialov z majhnim toplotnim raztežkom. Na tak način je mogoče dobiti laser z efektivno spektralno širino pod  $\sim 1$  MHz.

<sup>1</sup>Ameriška fizika in nobelovca Arthur Leonard Schawlow, 1921–1999, in Charles Hard Townes, 1915–2015.

<sup>2</sup>Natančnejši izračun odstopa od preprosto izpeljanega za faktor 2. V zapisanem izrazu je že upoštevan pravi predfaktor.



Zapisali smo, da lahko s posebno konstrukcijo laserjev dosežemo spektralno širino pod  $\sim 1\text{ MHz}$ . Vendar najmanjša dosežena spektralna širina znaša  $\sim 10\text{ mHz}$ , kar je še 8 velikostnih redov manj! Gre za prav poseben laser iz monokristalov silicija, hlajenega na  $-150\text{ }^\circ\text{C}$ . Fluktuacije dolžine resonatorja so pogojene s termičnimi fluktuacijami v odbojnih plasteh, ki znašajo okoli  $10^{-17}\text{ m}$ . Koherentna dolžina takega laserja je več milijonov kilometrov<sup>3</sup>.

Tu velja opozoriti, da je narava spektralne razširitve v laserju drugačna kot v navadnih svetilih. V drugem poglavju smo videli, da intenziteta svetlobe navadnega svetila fluktuiira na časovni skali koherentnega časa, ki je obraten spektralni širini (poglavje ??). Šum navadnih svetil je torej amplitudno moduliran šum. Pri enofrekvenčnem laserju je drugače. Amplituda in intenziteta izhodne svetlobe sta konstantni, fluktuiira le frekvenca oziroma faza. Šum laserja je torej v obliki frekvenčne modulacije.

## 2.4 Primerjava laserjev in navadnih svetil

Povzemimo, kar smo se do zdaj naučili o laserjih in jih primerjajmo z navadnimi svetili. Primerjajmo enofrekvenčni laser, v katerem je vzbujeno le eno osnovno stanje resonatorja Gaussove oblike, z navadnim nekoherentnim izvorom svetlobe.

Svetlobni snop iz laserja ima dve takoj očitni odliki: je zelo usmerjen in zelo enobarven. Prva lastnost je posledica tega, da je lastno stanje stabilnega resonatorja Gaussove oblike in je zato tak tudi izhodni snop. Divergenca Gaussovega snopa je posledica uklona in je najmanjša možna. Valovne fronte izhodne svetlobe so gladke in na dani razdalji ves čas enake, zato je laserski snop prostorsko idealno koherenten. Koherenten Gaussov snop lahko z ustrezno optiko zberemo v piko velikosti valovne dolžine, s čimer dosežemo že pri razmeroma majhni izhodni moči zelo veliko gostoto svetlobnega toka. To je zelo uporabno v tehnologiji, na primer za natančno in čisto obdelavo materialov, ter v medicini, kjer laserje uporabljajo za zahtevne kirurške posege.

Kako pa je z navadnimi svetili? V njih atomi sevajo neodvisno, zato izsevana svetloba ni prostorsko koherentna. Valovna fronta na danem mestu je nepravilna in se v koherentnem času znatno spremeni. Vendar tudi iz svetlobe navadnega nekoherentnega svetila lahko pridobimo koherenten snop, če na dano razdaljo od svetila postavimo zaslonko, ki je manjša od koherentne ploskve na tistem mestu (glej razdelek ??). Ocenimo moč tako dobljenega koherentnega snopa za zaslonko.

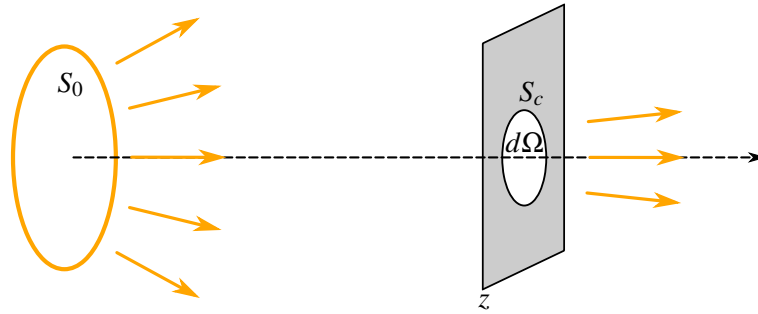
Svetilo naj ima svetlost  $B^4$ . Moč koherentnega snopa za zaslonko, ki prepušča svetlobo skozi prostorski kot  $\Delta\Omega$ , je (slika 2.5)

$$P = BS_0\Delta\Omega = \frac{BS_0S_c}{z^2} \sim \frac{BS_0}{z^2} \frac{\lambda^2 z^2}{S_0} = B\lambda^2. \quad (2.25)$$

Pri tem je  $S_0$  površina svetila,  $z$  oddaljenost zaslonke od svetila,  $S_c$  pa velikost koherentne ploskve, za katero smo uporabili oceno (enačba ??). Da iz  $S_0 = 1\text{ mm}^2$  velikega svetila dosežemo koherenten snop svetlobe z valovno dolžino okoli  $550\text{ nm}$ , mora biti premer zaslonke, ki jo postavimo  $1\text{ m}$  od izvora, okoli  $0,6\text{ mm}$ . V tem primeru znaša moč, ki prehaja skozi zaslonko, pri svetlosti  $100\text{ W/cm}^2$  le približno  $3 \cdot 10^{-7}\text{ W}$ . Pri podobni divergenci žarka je močno navadno svetilo torej štiri rede velikosti šibkejšje od zelo šibkih laserjev z močjo  $1\text{ mW}$ .

<sup>3</sup>Phys. Rev. Lett. **118**, 263202 (2017).

<sup>4</sup>Svetilnost je moč, izsevana v dan prostorski kot  $I = dP/d\Omega$ ; svetlost pa je svetilnost na enoto ploskve  $B = I/S = dP/Sd\Omega$ .



Slika 2.5: K izračunu moči koherentnega snopa svetlobe iz nekoherentnega svetila

Druga odlična lastnost svetlobe iz enofrekvenčnega laserja je njena zelo majhna spektralna širina. Z nekaj truda je ta lahko pod 1 kHz, emisijske črte v plinu pa so zaradi Dopplerjeve razširitve široke vsaj nekaj GHz, pa še to le v razmeroma redkem in hladnem plinu, kjer je svetlost majhna. Primerjajmo spektralno gostoto moči laserja in navadnih svetil. Majhen He-Ne laser seva 1 mW v približno  $10^7$  Hz in spektralna gostota moči je  $dP/d\nu \sim 10^{-10}$  W/Hz. Po drugi strani zelo svetla živosrebrna svetilka seva v močno razširjene spektralne črte s širino okoli 10 nm, kar ustreza  $\sim 10^{13}$  Hz. Spektralna gostota v koherentnem snopu, ki smo ga pripravili iz navadne svetilke, je tako le okoli  $3 \cdot 10^{-20}$  W/Hz. Šolski He-Ne laser torej prekaša najmočnejše nekoherentno svetilo za 10 velikostnih redov. Z laserji je seveda mogoče doseči znatno večje moči, v sunkih tipično do okoli  $10^{12}$  W, tako da po spektralni gostoti moči v koherentnem snopu laserji prekašajo običajna svetila 20–25 velikostnih redov. Verjetno v zgodovini težko najdemo še kak drug izum, ki je prinesel tolikšno izboljšavo v neki bistveni količini in tako ni nenavadno, da je prihod laserjev v začetku 60-ih let povzročil preporod optike.

## 2.5 Večfrekvenčni laser

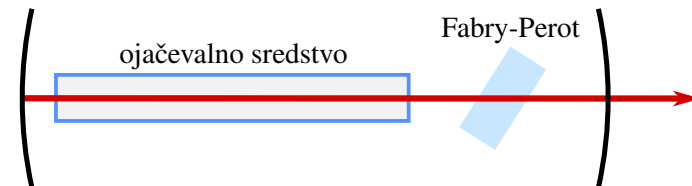
Do zdaj smo obravnavali laserje, v katerih je bilo vzbujeno eno samo valovanje. Vendar je ojačevalna širina večine aktivnih sredstev navadno večja od razlike med frekvencami posameznih stanj resonatorja. V plinih, na primer, je ojačevalna širina zaradi Dopplerjevega pojava vsaj nekaj GHz, lastne frekvence resonatorja pa so pri 30 cm dolgem resonatorju razmaknjene za 500 MHz. Tako se lahko zgodi, da ojačenje v laserju za več nihanj hkrati presega ojačenje na pragu in vzbujenih je več nihanj. Svetloba iz takega večfrekvenčnega laserja ni monokromatska, temveč je sestavljena iz množice ozkih črt znotraj ojačevalnega pasu. Izsevana svetloba tako ni bistveno bolj monokromatska od ustrezne spektralne komponente svetlečega plina. Ostaja pa seveda prostorsko koherentna.

Za holografijo, interferometrijo in nekatere spektroskopske uporabe potrebujemo ozko spektralno črto. Zato moramo poskrbeti, da je vzbujeno le eno samo nihanje resonatorja, najbolje tisto, ki je najbližje vrhu ojačenja aktivnega sredstva. To dosežemo tako, da za vsa ostala nihanja povečamo izgube, na primer s Fabry-Perotovim etalom, ki ga vstavimo v laserski resonator (slika 2.6). Njegova prepustnost v odvisnosti od krožne frekvence  $\omega$ , debeline  $L$ , lomnega količnika  $n$ , odbojnost sten  $\mathcal{R}$  in nagiba glede na os resonatorja  $\varphi$  je podana z enačbo (??)

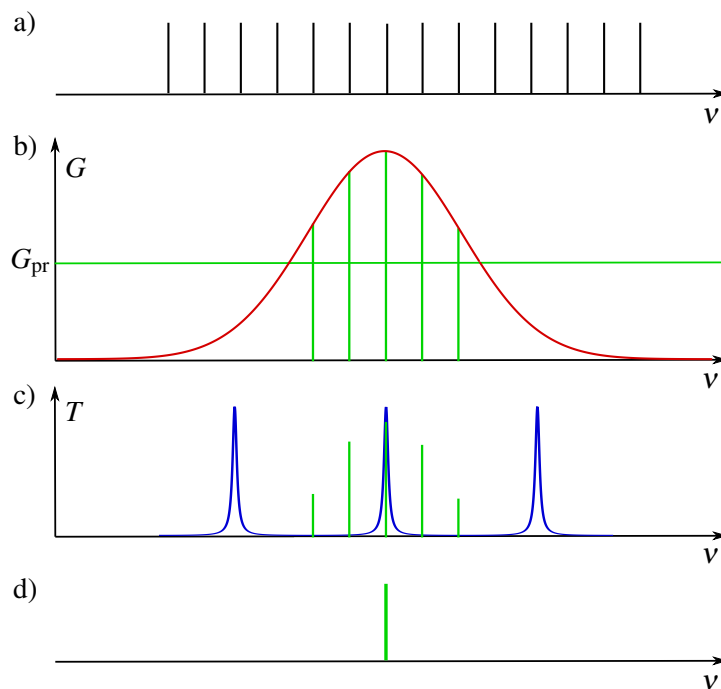
$$T = \frac{1}{1 + \frac{4\mathcal{R}}{(1-\mathcal{R})^2} \sin^2\left(\frac{n\omega}{c} L \cos \varphi\right)} \quad (2.26)$$

in jo kaže slika (??).

Debelino etalona in njegov nagib izberemo tako, da vrh prepustnosti sovпада z izbranim stanjem resonatorja. Izgube za ostala nihanja, ki bi sicer bila ojačena, se tako povečajo in laser sveti le pri eni sami izbrani frekvenci. Ta proces je shematsko prikazan na sliki (2.7): izmed vseh možnih stanj v resonatorju (a) svetijo le tista, za katere je ojačenje nad pragom (b). Ko v resonator dodamo Fabry-Perotov etalon z razmeroma velikim razmikom med sosednjimi vrhovi prepustnosti (c), je ojačeno eno samo nihanje (d). Ker zadošča že zmerno povečanje izgub, je odbojnost sten etalona navadno dokaj nizka, pod 0,5.



Slika 2.6: Shema laserja s Fabry-Perotovim etalonom



Slika 2.7: Lastne frekvence resonatorja (a) in frekvenčna odvisnost ojačenja z označenim pragom delovanja (b). Z zeleno so označene tiste lastne frekvence, ki se v laserju ojačujejo. Ko dodamo Fabry-Perotov etalon z dano prepustnostjo (c), povečamo izgube za vse načine, ki bi sicer bili ojačeni, razen za enega. Tako dosežemo delovanje laserja pri eni sami frekvenci (d).

★ Nagib etalona omogoča natančno spreminjanje izbrane frekvence, poleg tega pa je nujen, da se neprepuščena svetloba odbije ven iz smeri osi resonatorja. Če bi bila os etalona vzporedna z osjo resonatorja, bi se pojavile dodatne resonance, kar bi močno motilo delovanje laserja.

Opisali smo, kako v laserju dosežemo delovanje pri enem samem longitudinalnem nihanju. Poleg tega je treba omejiti tudi ojačenje višjih prečnih nihanj. To navadno dosežemo z zaslonkami, saj so snopi višjih redov bolj razširjeni od osnovnega.

## 2.6 Relaksacijske oscilacije

Stacionarno delovanje laserjev smo že dodobra spoznali. Za obravnavo nestacionarnega delovanja pa se moramo vrniti k obravnavi zasedbenih enačb (2.9) in (2.10). Na splošno je treba zapisan sistem diferencialnih enačb reševati numerično, vseeno pa lahko nekaj povemo o obnašanju laserja v bližini stacionarnega delovanja.

Spet se omejimo na enofrekvenčni laser, v katerem zasedenost vzbujenega stanja in število fotonov v njem opišemo z enačbama (2.9) in (2.10). Najprej zaradi preglednosti vpeljemo brezdimenzijski čas  $t' = tA$  in  $\tau' = \tau A$ , kar pomeni, da merimo čas v enotah življenjskega časa laserskega nivoja. Ponovno uporabimo parameter  $p = VA/(B\hbar\omega g)$  (enačba 2.13), ki pomeni število stanj elektromagnetnega polja v volumnu  $V$  in znotraj spektralne širine laserskega nivoja. Enačbi zapišemo

$$\frac{dN_2}{dt'} = -\frac{nN_2}{p} - N_2 + N_{20} \quad (2.27)$$

$$\frac{dn}{dt'} = \frac{nN_2}{p} - \frac{2}{\tau'}n. \quad (2.28)$$

Pri tem smo vpeljali konstanto  $N_{20} = rN/A$ , ki ima tudi nazoren pomen. Predstavlja zasedenost, ki bi jo dobili pri danem stacionarnem črpanju, če v izbranem stanju ne bi bilo fotonov in s tem ne stimuliranega sevanja. Meri torej moč črpanja. V enačbi za hitrost spreminjanja števila fotonov smo zanemarili prispevek spontanega sevanja, za katerega smo že ugotovili, da se pozna le do praga.

Poiščimo približne rešitve sistema sklopljenih diferencialnih enačb z linearizacijo. Naj laser najprej deluje stacionarno, v nekem trenutku pa se nekoliko izmakne iz stacionarnega stanja. To se lahko zgodi, na primer, če spremenimo moč črpanja. Trenutno zasedenost  $N_2$  in število fotonov  $n$  lahko zapišemo v obliki

$$N_2 = N_{2s} + x \quad \text{in} \quad n = n_s + y, \quad (2.29)$$

kjer sta  $N_{2s}$  in  $n_s$  vrednosti v stacionarnem stanju. Zanju velja

$$N_{2s} = \frac{2p}{\tau'} \quad (2.30)$$

in

$$n_s = p \frac{N_{20} - N_{2s}}{N_{2s}} = p(a - 1). \quad (2.31)$$

Enačba (2.30) je v skladu s tem, da je stacionarna zasedenost enaka zasedenosti na pragu, ta pa je odvisna od izgub resonatorja. Razmerje  $a = N_{20}/N_{2s}$  je mera za moč črpanja in mora biti v delujočem laserju večje od 1. V večini praktičnih primerov doseže vrednosti  $a \sim 5$ .

Vstavimo nastavka (enačbi 2.29) v enačbi (2.27 in 2.28). Dobimo sistem enačb

$$\frac{dx}{dt'} = -\frac{n_s N_{2s}}{p} - N_{2s} + N_{20} - \frac{1}{p}(n_s x + N_{2s} y + xy) - x \quad (2.32)$$

$$\frac{dy}{dt'} = \frac{n_s N_{2s}}{p} - \frac{2}{\tau'} n_s + \frac{1}{p}(n_s x + N_{2s} y + xy) - \frac{2}{\tau'} y. \quad (2.33)$$

Ker sta  $x$  in  $y$  majhna v primerjavi s stacionarnimi vrednostmi, lahko mešan produkt  $xy$  zanemarimo. Vsi členi, ki vsebujejo le stacionarne vrednosti, dajo ravno 0, saj smo jih tako določili.

Če upoštevamo še izraza za stacionarni vrednosti (enačbi 2.30 in 2.31), zapišemo linearizirani diferencialni enačbi za odmika od stacionarnih vrednosti

$$\frac{dx}{dt'} = -ax - \frac{2}{\tau'}y \quad \text{in} \quad \frac{dy}{dt'} = (a-1)x. \quad (2.34)$$

Zapisan linearni sistemi diferencialnih enačb s konstantnimi koeficienti rešimo tako, da poiščemo rešitev v obliki eksponentne funkcije

$$x = x_0 e^{\lambda t'} \quad \text{in} \quad y = y_0 e^{\lambda t'}. \quad (2.35)$$

Dobljeni homogeni sistem linearnih enačb

$$(a + \lambda)x_0 + \frac{2}{\tau'}y_0 = 0 \quad (2.36)$$

$$-(a-1)x_0 + \lambda y_0 = 0 \quad (2.37)$$

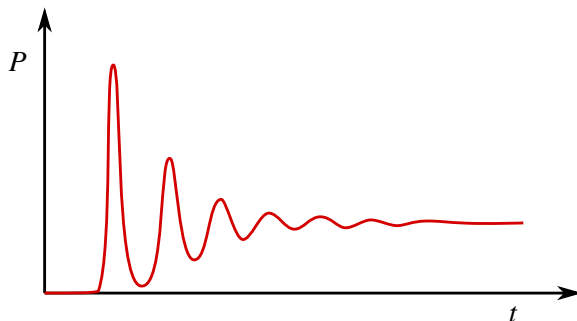
ima netrivialno rešitev le, če je njegova determinanta enaka nič

$$\lambda^2 + a\lambda + \frac{2}{\tau'}(a-1) = 0. \quad (2.38)$$

Rešitvi sta

$$\lambda = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - \frac{2}{\tau'}(a-1)}. \quad (2.39)$$

Obnašanje rešitve je odvisno od velikosti brezdimenzijskega relaksacijskega časa nihanja resonatorja  $\tau' = A\tau$ . Kratek račun pokaže, da je za  $\tau' > 2$  izraz pod korenem za vse vrednosti  $a$  pozitiven in laser se vrača v stacionarno stanje eksponentno. Za  $\tau' < 2$  pa je koren v določenem območju parametra  $a$  imaginaren in laser se vrača v stacionarno stanje z dušenim nihanjem, ki mu pravimo relaksacijske oscilacije. Primer takega nihanja pri vključitvi laserja kaže slika (2.8).



Slika 2.8: Relaksacijske oscilacije intenzitete laserja po vklopu

Poglejmo še primer. Vzemimo vrednost  $\tau \sim 10^{-7}$  s in razpadno konstanto laserskega nivoja  $A \sim 10^5/\text{s}$ . Tedaj je  $\tau' \sim 10^{-2}$  in relaksacijske oscilacije se pojavijo pri vseh dosegljivih vrednostih črpanja nad pragom, to je za  $a > 1$ . Ker  $a$  v praksi ni nikoli dosti večji od 3–5, je krožna frekvenca oscilacij v brezdimenzijskih enotah približno enaka  $\omega_r' \sim 1/\sqrt{\tau'}$ . Ko preidemo nazaj na prave enote časa, dobimo  $\omega_r \sim \sqrt{A/\tau}$ . Krožna frekvenca relaksacijskih oscilacij je v tem primeru velikostnega reda geometrijske sredine med razpadnima konstantama nihanja resonatorja in atomskega stanja. Tipične vrednosti frekvence relaksacijskih oscilacij so  $\sim 10^5$  Hz, karakteristični čas dušenja pa  $\sim 10^{-5}$  s.



Relaksacijske oscilacije so praktično pomembne, saj določajo gornjo mejo hitrosti, s katero lahko izhodna moč laserja sledi modulaciji črpanja. Poleg tega se pri tej frekvenci pojavi resonanca, pri kateri se šum črpanja ojačeno prenaša v šum izhodne moči.



## 2.7 Sunkovni laserji

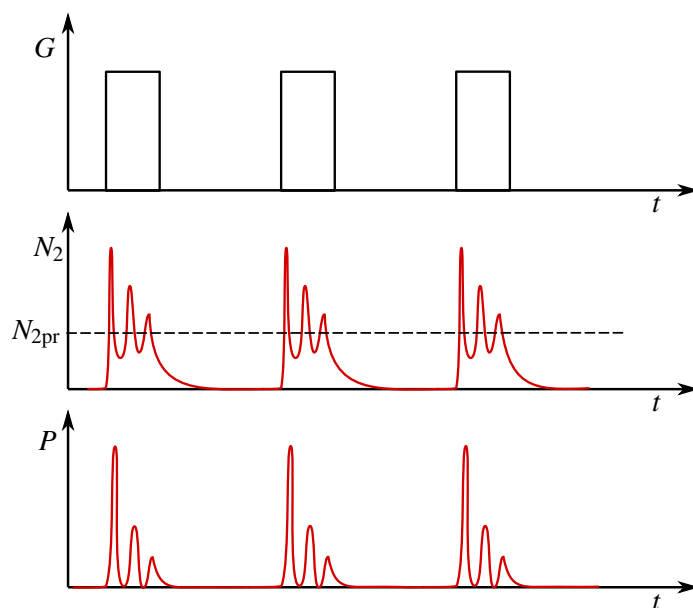
Kadar potrebujemo veliko izhodno moč laserja pri zmerni povprečni porabi energije, zvezno delujoči laserji, ki smo jih obravnavali do zdaj, niso primerni. Poslužiti se moramo sunkovnih laserjev, ki v kratkem časovnem intervalu delujejo z zelo veliko izhodno močjo.

Poglejmo primer. Močan zvezno delujoč laser ima izhodno moč 10 kW. Sunkovni laser pa naj oddaja svetlobo v 10 ns dolgih sunkih s povprečno energijo 1 J in s ponovitvijo 1000/s. Povprečna moč, s katero deluje tak laser, je 1 kW, moč, ki jo dosega v sunkih, pa je 100 MW. Tako pri nižji povprečni moči laserja dosežemo moči, ki so za 5–10 velikostnih redov večje od moči zvezno delujočih laserjev.

V grobem ločimo dva načina sunkovnega delovanja laserjev. V prvem primeru periodično spreminjamo črpalno moč, v drugem pa periodično spreminjamo izgube v resonatorju. V slednjo skupino uvrščamo laserje na preklop dobrote in laserje, ki uklepajo faze valovanj.

Obravnavajmo najprej najpreprostejši način, pri katerem moduliramo črpanje. To dosežemo na primer z bliskavko ali drugim sunkovnim laserjem. V intervalu črpanja je ojačenje večje od izgub in svetloba izhaja iz laserja, ko pa črpanja ni, so izgube prevelike in laser ne sveti. Tipična frekvenca modulacije črpanja je  $\nu \sim 20$  Hz. Najbolj pogosto se modulacija črpanja uporablja v polprevodniških laserjih, saj je zelo preprosto modulirati črpalni električni tok.

Vendar se pri modulaciji črpanja lahko pojavi težava. Ko ob močnem črpanju obrnjena zasedenost znatno preseže zasedenost praga (v nestacionarnem stanju je to mogoče), laser posveti in v kratkem času zasedenost pade nazaj pod prag. Če tedaj črpanje še traja, zasedenost naraste in laser ponovno posveti. To se lahko večkrat ponovi. Razmiki med zaporednimi sunki so reda velikosti periode relaksacijskih oscilacij, so pa lahko precej nepravilni (slika 2.9). Pri takem režimu delovanja v posameznem sunku ne dobimo razpoložljive energije črpanja v enem samem lepo oblikovanem sunku, kar močno omejuje uporabnost tega pristopa.



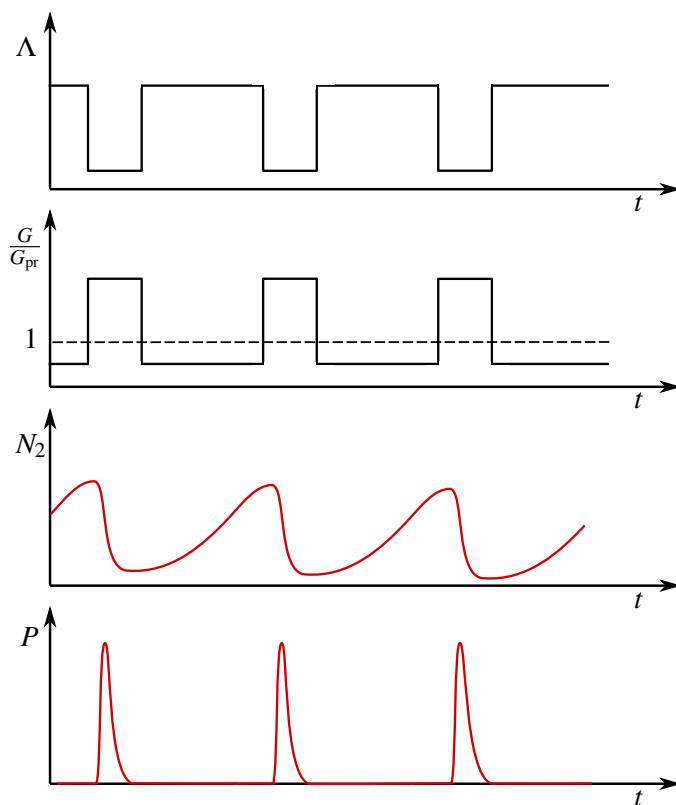
Slika 2.9: Delovanje sunkovnega laserja z periodično moduliranim črpanjem, pri katerem se pojavijo neželene oscilacije

## 2.8 Delovanje v sunkih s preklpom dobrote

Namesto modulacije črpanja lahko v sunkovnih laserjih periodično spreminjamo izgube. Čim večje so namreč izgube, višji je prag za delovanje laserja in večja je lahko stopnja inverzije. Tako v sistemu atomov shranimo več energije, ki se lahko izseva iz sistema preko stimuliranega sevanja. Ko je enkrat ustvarjena velika obrnjena zasedenost, izgube zelo hitro zmanjšamo. Optično ojačenje je veliko in energija svetlobe v kratkem času močno naraste. S tem se tudi obrnjena zasedenost hitro zniža na vrednost močno pod pragom. Predstavljamo si lahko, da dobimo prvi nihaj relaksacijskih oscilacij, le da je začetno stanje daleč od stacionarnega in zato linearni približek ne drži več. Iz laserja dobimo kratek in zelo močan sunek svetlobe, pri čemer je energija sunka skoraj tolikšna kot je bila energija obrnjene zasedenosti. Tipične dolžine sunkov, ki jih dosežemo na ta način, so  $t \sim 10$  ns, sunki pa se ponavljajo s frekvenco  $\nu \sim 1\text{--}100$  kHz. Dogajanje v laserju kaže slika (2.10).



V elektrotehniki se izgube resonatorjev podajajo z dobroto  $Q$ , to je razmerjem frekvence lastnega stanja in njegove širine. Ker s povečanjem izgub spremenimo širino črte in z njo dobroto, opisano tehniko imenujemo preklp dobrote.



Slika 2.10: Izgube ( $\Lambda$ ), relativno ojačenje ( $G/G_{pr}$ ), zasedenost višjega nivoja ( $N_2$ ) in izsevana moč laserja ( $P$ ) v odvisnosti od časa, kadar laser deluje v režimu preklopa dobrote.

Izgube resonatorja je mogoče spreminjati na več načinov. Najpreprosteje je vrteti eno od ogledal. Tedaj je resonator uglašen le v kratkem trenutku, ko je ogledalo pravokotno na os. Metoda je dokaj uspešna, a zastarela. Boljši in danes najbolj razširjen način je z vgradnjo elektro-optičnega ali akusto-optičnega modulatorja, o katerih bomo govorili v nadaljevanju (poglavje ??). Na kratko povejmo, da lahko z njimi električno krmilimo izgube z visoko frekvenco.

Kot smo že povedali, nelinearnih laserskih enačb za zasedenost in število fotonov (enačbi 2.9) in (2.10) ne moremo analitično rešiti. Preden jih podrobneje pogledamo, napravimo nekaj ocen. Dolžina sunka je odvisna od hitrosti, s katero se izprazni zgornji laserski nivo. To se ne more zgoditi hitreje kot v nekaj preletih sunka skozi resonator. Trajanje sunka je torej vsaj nekajkrat  $2L/c$ , to je za 15 cm dolg resonator vsaj nekaj ns.

Ocenimo še hitrost naraščanja števila fotonov na začetku in njegovega upadanja na koncu sunka. Zapišimo najprej še enkrat enačbi za zasedenost in število fotonov, pri čemer upoštevajmo, da nas zanima le dogajanje v času sunka, ki je zeko kratek v primerjavi z atomskim razpadnim časom, zato ustrezní člen v enačbi (2.9) zanemarimo. Navadno je tudi črpanje prešibko, da bi med sunkom znatno vplivalo na zasedenost, zato lahko člen  $rN$  izpustimo. S črpanjem seveda ustvarimo začetno zasedenost  $N_{20}$ . Tako ostane

$$\frac{dN_2}{dt} = -\frac{\sigma c}{V} n N_2 \quad (2.40)$$

$$\frac{dn}{dt} = \frac{\sigma c}{V} n N_2 - \frac{2}{\tau} n. \quad (2.41)$$

Na začetku sunka je  $n$  majhen,  $N_2$  pa velik in njegova vrednost se ne razlikuje dosti od začetne vrednosti  $N_{20}$ . Število fotonov na začetku sunka tako narašča približno eksponentno

$$n(t) = n_0 e^{t N_{20} \sigma c / V} = n_0 e^{t / \tau_r}. \quad (2.42)$$

Začetnega števila fotonov ne poznamo, vemo pa, da je velikostnega reda 1, saj predstavlja spontano emisijo. Da  $n$  naraste na znatno vrednost, recimo več od  $10^{10}$  fotonov, je potreben čas blizu  $30 \tau_r$ .

Proti koncu sunka  $N_2$  pojema zaradi sevanja svetlobe in  $N_2 \rightarrow 0$ . Ostane samo še en člen, ki da preprosto rešitev

$$n(t) = \tilde{n}_0 e^{-2t / \tau}. \quad (2.43)$$

Eksponentno pojevanje števila fotonov na koncu sunka je torej določeno z izgubami resonatorja (enačba ??).

Dogajanja v vmesnih časih ne moremo enostavno popisati, lahko pa najdemo medsebojno zvezo med  $n$  in  $N_2$ , če iz enačb eliminiramo čas. Izrazimo  $dt$  iz enačbe (2.40) in ga vstavimo v enačbo (2.41). Sledi

$$dn = -dN_2 + \frac{\tilde{N}_2}{N_2} dN_2, \quad (2.44)$$

kjer smo zapisali  $\tilde{N}_2 = 2V / (\sigma c \tau)$ . Enačbo brez težav integriramo

$$n = N_{20} - N_2 + \tilde{N}_2 \ln \frac{N_2}{N_{20}}. \quad (2.45)$$

Pri tem smo privzeli, da je na začetku sunka  $n = 0$  in  $N_2 = N_{20}$ .

Iz dobljene zveze najprej izračunamo, kolikšna je končna zasedenost  $N_{2k}$ . Na koncu mora biti zopet  $n = 0$ , kar da transcendentno enačbo za  $N_{2k}$

$$\ln \frac{N_{2k}}{N_{20}} = \frac{N_{2k}}{N_{20}} - \frac{N_{20}}{\tilde{N}_2}. \quad (2.46)$$

Enačba ima obliko

$$\ln \frac{x}{a} = x - a, \quad (2.47)$$

kjer je  $x = N_{2k}/N_{20}$  in  $a = N_{20}/\tilde{N}_2$ , in jo lahko preprosto numerično rešimo. Izkaže se, da kadar je začetna zasedenost  $N_{20}$  le malo nad pragom, tudi končna zasedenost  $N_{2k}$  ne pade dosti pod prag, zato je izraba energije slabša. Pri večjih začetnih vrednostih  $N_{20}$  pa pade končna zasedenost praktično na nič. Za  $a = 2$ , na primer, je  $x = 0,41$ , medtem ko je že pri  $a = 4$  vrednost  $x$  le še 0,08.

Ko poznamo začetno in končno vrednost zasedenosti, lahko izračunamo celotno energijo sunka  $W = \hbar\omega(N_{20} - N_{2k})$ . Če je začetna vrednost dovolj nad pragom, lahko končno zasedenost zanemarimo in je

$$W \approx \hbar\omega N_{20}. \quad (2.48)$$

Trenutna moč, ki izhaja iz laserja, je dana s  $P = (\hbar\omega/2\tau)n$ . Največja je v vrhu sunka, ki je določen z  $dn/dN_2 = 0$ . Ta enačba ima rešitev pri  $N_2 = \tilde{N}_2$ , vrh sunka je torej natanko tedaj, ko pade zasedenost  $N_2$  na prag  $\tilde{N}_2$ .

Izsevna moč je tedaj

$$P_{\max} = \frac{n_{\max}\hbar\omega}{2L/c} (1 - \mathcal{R}) = \frac{2n_{\max}\hbar\omega}{\tau}. \quad (2.49)$$

Ko vstavimo še vrednost za  $n_{\max}$ , dobimo

$$P_{\max} = \frac{2\hbar\omega}{\tau} (N_{20} - \tilde{N}_2 - \tilde{N}_2 \ln(N_{20}/\tilde{N}_2)). \quad (2.50)$$

Ker je navadno  $N_{20} \gg \tilde{N}_2$ , je  $n_{\max} \approx N_{20}$  in

$$P_{\max} \approx \frac{2\hbar\omega N_{20}}{\tau}. \quad (2.51)$$

Poglejmo primer. Naj bo presek za stimulirano sevanje  $\sigma = B\hbar\omega g/c$  okoli  $10^{-19}\text{cm}^2$  in začetna gostota zasedenosti  $N_{20}/V = 10^{19}\text{cm}^3$ , kar so tipični podatki za neodimov laser. Tedaj je  $\tau_r = 30$  ps in čas naraščanja sunka okoli  $\sim 1$  ns. Število fotonov se nato zmanjšuje s krakterističnim razpadnim časom resonatorja  $\tau/2 \sim 2L/(c(1 - \mathcal{R}))$ . Za dosego kratkih sunkov svetlobe je zato v laserjih s preklopom dobrote odbojnost izhodnega zrcala navadno dokaj nizka, recimo 0,5. Pri  $L = 15$  cm je tako  $\tau = 4$  ns. Celotno trajanje sunka je v izbranem primeru tako  $\sim 10$  ns, pri čemer traja okoli 100 ns od preklopa dobrote, da sunek zraste iz šuma spontanega sevanja. Energija sunka je blizu  $N_{20}\hbar\omega$ , to je pri aktivnem volumnu  $0,5\text{ cm}^3$  nekaj desetink joula. Od tod lahko ocenimo, da je moč v vrhu sunka velikostnega več 10 MW.

## 2.9 Uklepanje faz

Krajše sunke kot s preklopom dobrote je mogoče dobiti z uklepanjem faz. Pri tem gre za povsem drugačen način, ki je prav presentljiva manifestacija koherentnosti laserske svetlobe. Spoznali smo že, da v laserju navadno niha več nihanj hkrati, pri čemer so njihove frekvence enakomerno razmaknjene za  $\Delta\omega = \pi c/L$  (enačba ??). Celotno električno polje v neki točki v laserju zapišemo kot vsoto

$$E(t) = \sum_{m=-N/2}^{N/2} A_m e^{i(\omega_0 + m\Delta\omega)t + i\phi_m(t)}, \quad (2.52)$$

pri čemer je  $N$  število vseh vzbujenih nihanj. Upoštevali smo, da ima vsako nihanje lahko poljubno fazo  $\varphi_m(t)$ , ki je na splošno predvsem zaradi zunanjih motenj slučajna funkcija časa. Zaradi tega se tudi celotno polje slučajno spreminja, kar močno zmanjšuje uporabnost takega laserja.

Denimo, da nekako dosežemo enake faze vseh nihanj. Poleg tega zaradi enostavnosti računa privzemimo, da so tudi vse amplitude  $A_m$  enake. Tedaj postane vsota (2.52) geometrijska in jo brez težav seštejemo

$$E(t) = A_0 e^{i\omega_0 t} \frac{\sin(N\Delta\omega t/2)}{\sin(\Delta\omega t/2)}. \quad (2.53)$$

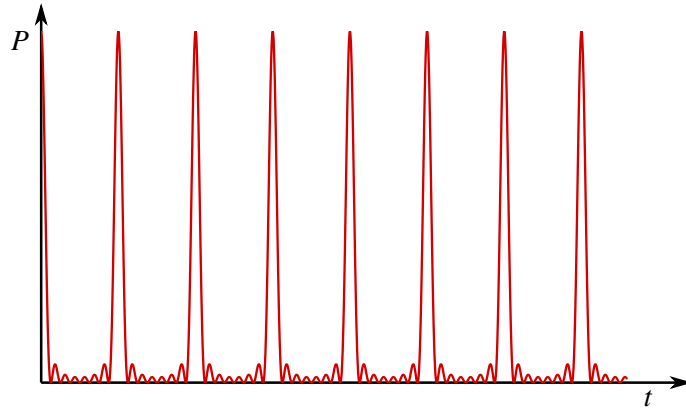
Moč izhodne svetlobe ima časovno odvisnost

$$P(t) = P_0 \frac{\sin^2(N\Delta\omega t/2)}{\sin^2(\Delta\omega t/2)}, \quad (2.54)$$

ki jo kaže slika (2.11). Predstavlja periodično zaporedje sunkov, ki si sledijo s periodo  $T = 2\pi/\Delta\omega = 2L/c$ , kar je enako času obhoda svetlobe v resonatorju. Konstanta  $P_0$  je moč posameznega nihanja. Moč v vrhu sunka je tako  $N^2 P_0$ , povprečna moč pa  $N P_0$ . Računsko je pojav enak kot uklon na mrežici in lahko rečemo, da imamo opravka z interferenco v času. Dolžina sunkov je

$$\tau_{ML} = \frac{T}{N} = \frac{2\pi}{N\Delta\omega} = \frac{2\pi}{\Delta\omega_G}, \quad (2.55)$$

ker je  $N$  ravno število nihanj znotraj širine ojačevanja  $\Delta\omega_G$ . Dolžina sunka je torej obratno sorazmerna s širino ojačevanja aktivnega sredstva.



Slika 2.11: Časovna odvisnost moči večfrekvenčnega laserja z enakimi (uklenjenimi) fazami

Premislimo še, kakšna je prostorska odvisnost električnega polja v resonatorju. Polje na danem mestu opisuje enačba 2.53. Še krajevno odvisnost dobimo, če v 2.53 zamenjamo  $t$  s  $(t - z/c)$ . To pa predstavlja svetlobni paket, ki potuje sem in tja med ogledali resonatorja. Na izhodnem ogledalu se ga vsakič nekaj odbije, nekaj pa gre ven iz resonatorja (slika ??). Razmik med sunki, ki izhajajo iz resonatorja, je  $2L$ , prostorska dolžina posameznega sunka pa  $\tau_{ML}c = 2L/N$ .

V našem računu predpostavka, da so vse amplitude  $A_m$  enake, ni prav nič bistvena za osnovne ugotovitve. Če vzamemo realističen primer, da so amplitude oblike  $A_m = A_0 \exp[(m\Delta\omega/\Delta\omega_G)^2]$ , vsote 2.52 ne znamo točno sešteti, lahko pa jo približno pretvorimo v integral, ki je Fourierova transformiranka Gaussove funkcije (Pri prehodu z diskretne vsote na integral seveda izgubimo

Slika 2.12: Prostorska odvisnost fazno uklenjenih sunkov.

periodičnost zaporedja sunkov.). Ta je zopet Gaussova funkcija, katere širina je obratna vrednost širine prvotne funkcije, prav podobno, kot smo dobili zgoraj. Odvisnost amplitud nihanj od  $m$  vpliva torej le na točno obliko sunkov, osnovne ugotovitve pa se ne spremenijo. (Naloga).

Pač pa je predpostavka, da so vse faze  $\phi_m$  enake, bistvena. V naši dosedanji sliki mnogofrekvenčnih laserjev so resonatorska stanja med seboj neodvisna, zato so faze poljubne in se zaradi motenj lahko še spreminjajo. Da dobijo za vsa nihanja isto vrednost, moramo poskrbeti posebej. Tako *uklepanje faz* je mogoče doseči na več načinov. Ena možnost je, da moduliramo izgube resonatorja s frekvenco, ki je ravno enaka razliki frekvenc med resonatorskimi stanji. To ni težko razložiti. Naj bo modulator tak, da je večino časa zaprt, le v razmikih  $T = 2L/c$  naj bo kratek čas odprt. Postavimo ga tik ob eno ogledalo. Tedaj se v resonatorju očitno lahko uspešno ojačuje le kratek sunek, kakršen je na sliki ???. Izgube za vsa nihanja bodo majhne le tedaj, kadar bodo vse faze enake. V praksi ni potrebno, da je modulacija tako izrazita. Običajno zadošča sinusna modulacija izgub, kjer je relativna prepustnost v minimumu za nekaj destink manjša od maksimalne.

Kako pri modulaciji pride do uklepanja faz, lahko uvidimo še drugače. Modulacija amplitude posameznega nihanja povzroči, da se v spektru nihanja pojavita še stranska pasova pri frekvencah  $\omega_m \pm \Delta\omega$ . Ta se ravno pokrivata z obema sosednjima nihanjema in se konstruktivno prištejeta, če imata enako fazo. S tem pa so tudi izgube manjše in ima delovanje laserja z uklenjenimi fazami najnižji prag. Zadnji razmislek tudi pove, da ni dobra le amplitudna modulacija, temveč tudi fazna (ali frekvenčna), saj se tudi tedaj pojavijo stranski pasovi.

Za modulacijo se najpogosteje uporabljajo akustooptični modulatorji, pri katerih izkoriščamo uklon svetlobe na stoječih zvočnih valovih v primernem kristalu (Glej 7. poglavje). Frekvenca zvočnega vala mora biti enaka polovici zahtevane modulacijske frekvence, za 1,5 m dolg laser torej 50 MHz.

Poleg opisanega aktivnega postopka je mogoče faze ukleniti tudi tako, da v resonator postavimo plast barvila, ki močno absorbira svetlobo laserja pri majhni gostoti toka, pri veliki gostoti toka pa pride do nasičenja absorpcije (glej razdelek 4.5), zato postane barvilo prozorno. Na začetku imamo v laserju predvsem spontano sevanje, ki se pri enem prehodu skozi aktivno snov deloma ojači. Barvilo najmanj absorbira največjo fluktuacijo. Pri dovolj velikem ojačenju bo ta rastla in spet dobimo fazno uklenjeni sunek. Ker mora po prehodu sunka absorpcija v barvilo zopet hitro narasti, mora biti relaksacijski čas barvila zelo kratek, v območju pikosekund.

Z uklepanjem faz je danes mogoče dobiti sunke z dolžino pod 100 fs ( $10^{-13}$  s). Tak sunek traja le še nekaj deset optičnih period. S posebnimi prijemi jih lahko še skrajšajo na okoli 10 fs. Če je

potrebna večja energija sunkov, jih ojačijo, kar ne pokvari mnogo osnovnega sunka. Zelo kratke svetlobne sunke danes na široko uporabljajo za študij hitre molekularne dinamike in kratkoživih vzbujenih elektronskih stanj v polvodnikih in mnogih drugih snoveh. Z njimi se je časovna ločljivost povečala za nekaj redov velikosti [?].

## 2.10 \*Stabilizacija frekvence laserja na nasičeno absorpcijo

Še ožjo lasersko črto lahko dobimo z aktivno stabilizacijo dolžine resonatorja. Ideja je taka: frekvenco svetlobe, ki izhaja iz laserja, primerjamo z nekim standardom in iz razlike ugotovimo spremembo dolžine resonatorja. Eno od obeh zrcal je nameščeno na piezoelektričnem nosilcu, ki mu z električno napetostjo lahko spreminjamo dolžino in tako popravimo dolžino resonatorja.

Pogalvitna težava je seveda, kako najti dovolj stabilen primerjalni standard za frekvenco. Ena možnost je, da izhodno svetlobo spustimo skozi konfokalni interferometer, ki je skoraj v resonanci z laserjem in ima dovolj ozek vrh prepustnosti. Majhen premik frekvence laserja bo povzročil, da se bo spremenil skozi interferometer prepuščen svetlobni tok. Na prvi pogled je videti, da s tem nismo nič pridobili, saj bo resonančna frekvenca interferometra stabilna tudi le toliko, kot je stabilna njegova dolžina. Vendar je z izolacijo in temperaturno stabilizacijo možno držati dolžino praznega resonatorja - interferometra - mnogo natančneje kot dolžino laserja, v katerem imamo aktivno sredstvo, ki mu moramo dovajati energijo.

Druga možnost je stabilizirati laser na primerno molekularno absorpcijsko črto. Te so lahko zelo ozke, zato je tudi spekter laserja lahko izredno ozek, pod 1 kHz. Pri tem moti Dopplerjeva razširitev absorpcijske črte, ki pa se ji je mogoče izogniti. Kako to napravimo in kako je bila s tem omogočena nova definicija metra, si bomo pogledali v razdelku ????

V drugem razdelku smo videli, da je efektivna spektralna širina enofrekvenčnega laserja odvisna od fluktuacij dolžine optične poti svetlobe pri preletu resonatorja. Na to lahko poleg spreminjanja geometrijske dolžine vpliva še spreminjanje lomnega količnika. Če se posebej ne potrudimo, laser sveti nekje blizu vrha ojačevalnega pasu, pri čemer frekvenca pleše za znaten del razmika med resonatorskimi stanji. V šolskem He-Ne laserju je to na primer nekaj deset MHz.

Bistveno manjšo širino lahko dosežemo z aktivno stabilizacijo dolžine resonatorja. Pri tem je pogalvitni problem, kako dobiti primerjalni standard. S stabilizacijo na pomožni interferometer, ki smo jo na kratko opisali v drugem razdelku, lahko dobimo zelo ozko črto, ki pa ima le toliko natančno določeno frekvenco, kot poznamo dolžino interferometra. Včasih, na primer za natančna interferometrična merjenja dolžin, s tem nismo zadovoljni in potrebujemo drug, absoluten standard.

Tak standard za frekvenco so ozki prehodi v primernem razredčenem plinu. Vendar naletimo na težavo. Zaradi Dopplerjevega pojava so absorpcijske črte močno razširjene. Pomagamo si s pojavom nasičenja absorpcije, o katerem smo govorili v razdelku 4.9. Tam smo videli, da se pri dvakratnem prehodu monokromatskega snopa svetlobe skozi plin v nasprotnih smereh pojavi v sredini Dopplerjevo razširjene črte vdolbina, ki ima obliko homogeno razširjene črte. Homogena širina je lahko mnogo manjša od Dopplerjeve in je zato vdolbina uporabna kot frekvenčni standard.

V laserski resonator postavimo poleg aktivnega sredstva še celico s primernim plinom, ki ima absorpcijsko črto v bližini vrha ojačenja aktivnega sredstva. Za He-Ne laser pri 633 nm so to na primer pare joda. Zaradi absorpcije se povečajo izgube v laserju in izhodna moč se zmanjša. Spreminjajmo sedaj dolžino resonatorja in s tem frekvenco laserja. Ko se ta približa na homogeno širino centru absorpcijske črte pri  $\omega_0$ , se absorpcija zmanjša in s tem se moč laserja poveča.

Slika 2.13: Odvisnost moči laserja z nasičenim absorberjem od frekvence

Slika 2.14: Shema stabilizacije laserja na nasičeno absorpcijo

Odvisnost moči laserja z absorberjem od dolžine kaže slika ???. Povečanje moči v vrhu običajno ni prav veliko, manj od procenta.

Shema stabilizacije na nasičeno absorpcijo je prikazana na sliki ???. Eno od zrcal resonatorja je na piezoelektričnem nosilcu. Nanj vodimo izmenično napetost s frekvenco  $\Omega$  in s tem moduliramo frekvenco laserja, da se vozi preko absorpcijske vdolbine pri  $\omega_0$ . Zaradi tega se spreminja tudi izhodna moč laserja, ki jo opazujemo s fotodiodo. Kadar je srednja frekvenca laserja enaka  $\omega_0$ , se moč zmanjša simetrično pri odmikih navzgor in navzdol od  $\omega_0$  in se zato spreminja z dvojno frekvenco modulacije  $2\Omega$ . Kadar pa je srednja frekvenca laserja nekoliko odmaknjena od  $\omega_0$ , se izhodna moč pri odmiku v zrcala v eno stran spremeni drugače kot v drugo, kar pomeni, da je v signalu s fotodiode tudi komponenta s frekvenco  $\Omega$ . Da držimo srednjo frekvenco laserja enako  $\omega_0$ , moramo torej meriti komponento izhodne moči pri modulačijski frekvenci in s povratno zanko skrbeti, da je ta enaka nič.

Komponento signala s frekvenco  $\Omega$  zaznamo s faznim detektorjem, ki deluje tako, da signal množi z referenčno modulačijsko napetostjo. V produktu dobimo istosmerno komponento, ki je sorazmerna signalu pri frekvenci  $\Omega$  in ki jo izločimo z nizkopasovnim filtrom. Izhod iz faznega detektorja je tako sorazmeren odmiku srednje frekvence laserja od  $\omega_0$ . Preko primerneega ojačevalnika ga vodimo na piezoelektrični nosilec zrcala in tako popravljamo dolžino laserja.



Napravimo kvantitativno oceno opisane stabilizacijske sheme. Odvisnost izhodne moči od frekvence laserja  $\omega$  lahko približno zapišemo v obliki

$$P(\omega) = P_0 + \frac{P_1 \gamma^2}{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2} . \quad (2.56)$$

$P_0$  je moč laserja brez saturacijskega vrha pri  $\omega_0$ ,  $P_1$  pa povečanje moči pri  $\omega_0$ . Predpostavili smo, da se ojačenje laserja in nehomogeno razširjeni del absorpcije ne spreminjata mnogo preko homogene širine absorberja in je zato  $P_0$  približno konstantna. Frekvenco laserja moduliramo:

$$\omega = \omega_0 + \Delta\omega + a \sin \Omega t . \quad (2.57)$$

Z  $\Delta\omega$  smo označili odstopanje srednje frekvence laserja od centra absorpcijske črte  $\omega_0$ . Če sta  $a$  in  $\Delta\omega$  majhna v primeri s homogeno širino  $\gamma$ , lahko imenovalc v enačbi 2.56 razvijemo:

$$P(\omega) = P_0 + P_1 \left[ 1 - \frac{1}{\gamma^2} \Delta\omega^2 + \frac{2}{\gamma^2} a \Delta\omega \sin \Omega t - \frac{a^2}{\gamma^2} \sin^2 \Omega t \right] . \quad (2.58)$$

Amplituda signala pri  $\Omega$  je  $2P_1 a \Delta\omega / \gamma^2$ . Najmanjša razlika, ki jo lahko zaznamo, je določena s šumom meritve. Kot bomo videli v poglavju o detekciji svetlobe, je osnovni izvor šuma fotodiode Poissonov šum števila parov elektron-vrzel, ki nastanejo zaradi fotoefekta v p-n spoju. Najmanjša sprememba svetlobne moči, ki jo lahko izmerimo, je (glej 10???. poglavje)

$$P_N \simeq \sqrt{\hbar \omega P \frac{1}{\tau}} , \quad (2.59)$$

kjer je  $P$  celotna svetlobna moč, ki vpada na diodo,  $\tau$  pa čas meritve, ki je v našem primeru določen s časovno konstanto nizkopasovnega filtra na izhodu faznega detektorja.

Vzemimo na primer He-Ne laser, stabiliziran na iodove pare. Povprečna moč laserja  $P_0$  naj je 10 mW in  $P_1 = 0.1$  mW. Širina absorpcijske črte  $\gamma = 10^6 \text{ s}^{-1}$ . Izberimo amplitudo modulacije  $a = 10^5 \text{ s}^{-1}$  in  $\tau = 10^{-4} \text{ s}$ . Časovna konstanta  $\tau$  ne sme biti prevelika, določa namreč, kako hitro popravljamo dolžino laserja. Gornje vrednosti dajo za najmanjšo zaznavno moč pri  $\Omega$   $P_N = 0.5 \times 10^{-8} \text{ W}$ . Najmanjše merljivo odstopanje frekvence laserja je tedaj

$$\Delta\omega_N = \frac{P_N \gamma^2}{2P_1 a} = 2.5 \times 10^3 \text{ s}^{-1} . \quad (2.60)$$

Takšno in še boljše stabilnost frekvence tudi zares dosežejo. Pozoren bralec bo opazil, da je  $\Delta\omega_N < 0.01 \gamma$ , to je, položaj absorpcijskega vrha je na opisan način mogoče določiti z natančnostjo nekaj tisočink celotne širine.

Na absorpcijsko črto stabiliziranega laserja navadno ne uporabljamo direktno, temveč z njim kontroliramo drug laser. Del izhodne svetlobe iz obeh laserjev zmešamo na detekcijski fotodiodi. V signalu dobimo utripanje, ki je enako razliki frekvenc obeh laserjev. S spreminjanjem dolžine drugega laserja skrbimo, da je frekvenca utripanja konstantna. Na ta način lahko v ozkem frekvenčnem intervalu še spreminjamo frekvenco drugega laserja.

Z merjenjem utripanja med dvema stabiliziranima laserjema ugotavljajo tudi njihovo stabilnost.

## 2.11 \*Absolutna meritev frekvence laserja in definicija metra

Najnatančneje merljiva količina je čas odnosno frekvenca. Frekvence laserja, ki sveti v vidnem področju seveda ni mogoče direktno prešteti. Pač pa je v začetku sedemdesetih let uspelo s

Slika 2.15: Primerjalna veriga za meritev frekvence He-Ne laserja

heterodinsko tehniko, ki se v mikrovalovni tehniki pogosto uporablja, napraviti primerjavo stabiliziranega He-Ne laserja z osnovno cezijevo uro in tako določiti frekvenco absorpcijske črte metana pri  $3.39 \mu\text{m}$  z isto natančnostjo, kot jo ima cezijeva ura.

S heterodinsko tehniko primerjamo frekvenci dveh ali več valovanj tako, da jih zmešamo na primernem nelinearnem elementu, običajno neki diodi. Zaradi nelinearnosti dobimo v odzivu diode različne mnogokratnike vpadnih frekvenc, njihove vsote in razlike. Od teh je kakšna lahko dovolj nizka, da jo lahko direktno preštejemo.

Za primerjanje frekvenc nad mikrovalvnim področjem je potreben ustrezen mešalni element. Polvodniške diode ne bodo uporabne pri približno 20 GHz. Za višje frekvence uporabijo diode kovina-izolator-kovina, ki jih sestavljajo oksidirana površina niklja, ki se je dotika ostra volframska konica. Taka dioda deluje kot uporaben mešalni element do frekvenc okoli 200 THz, to je skoraj do vidnega področja.

Za primerjavo He-Ne laserja, stabiliziranega na metan pri  $3.39 \mu\text{m}$ , z osnovno cezijevo uro

je bilo potrebno zgraditi celo verigo vmesnih primerjav, ki jo kaže slika ???. Frekvenco CO<sub>2</sub> laserja dobimo na primer iz utripanja med frekvencama CO<sub>2</sub> laserja pri 10.2  $\mu\text{m}$  in pri 9.3  $\mu\text{m}$ , trikratnikom frekvence HCN laserja in še klistrona s frekvenco 20 GHz. Na ta način so izmerili, da je frekvenca CH<sub>4</sub> črte na katero je stabiliziran He-Ne laser, 88.376181627 THz.

Valovno dolžino laserja dobimo z interferometrično primerjavo z dolžinskim standardom, ki je bil do leta 1984 določen z neko kriptonovo črto. Iz znane frekvence in valovna dolžine določimo hitrost svetlobe. Zaradi relativno velike širine črte kriptonove svetilke je bil po starem meter definiran le z relativno natančnostjo  $10^{-8}$ , kar je pomenilo, da tudi hitrost svetlobe ne more biti določena bolj natančno. Meritev frekvence laserja pa je dosti natančnejša. Zato je bilo smiselno opustiti meter kot osnovno enoto in raje definirati hitrost svetlobe kot pretvornik med sekundo in metrom. Z njeno vrednost so vzeli, kar so dobili z naboljšo primerjavo stabiliziranega laserja in kriptonove črte:  $c = 299792458 \text{ m/s}$ . Na metan ali jod stabilizirani laser je postal sekundarni standard za dolžino. Laser je pravzaprav pri tem le pomožna naprava; standard je ustrezeni molekularni prehod.

## 2.12 \*Semiklasični model laserja

Doslej smo laserje obravnavali le z modelom zasedbenih enačb. Ta je zelo grob, saj smo zanemarili nekaj pomembnih pojavov. Svetlobo v resonatorju smo opisali smo opisali le s celotno energijo ali številom fotonov in se za njeno valovno naravo nismo menili. Kar privzeli smo, da je frekvenca delujočega laserja in oblika polja v njem enaka kot za lastno stanje praznega resonatorja. Aktivno snov smo opisali le z zasedenostjo zgornjega in spodnjega laserskega stanja in smo s tem izpustili možnost, da se zaradi sodelovanja z elektromagnetnim poljem atomi nahajajo v nestacionarnem, mešanem stanju.

Gornje pomanjkljivosti odpravimo s tem, da elektromagnetno polje v resonatorju obravnavamo z valovno enačbo, za atome aktivne snovi pa upoštevamo, da se pokoravajo Schroedingerjevi enačbi. S tem dobimo *semiklasični model* laserja. Za še natančnejši opis pa moramo tudi svetlobo obravnavati kvantno, kar presega okvir te knjige.

Aktivna snov naj bo še naprej kar najenostavnejša, to je množica enakih dvonivojskih atomov s stanji  $|1\rangle$  in  $|2\rangle$ , ki imata energiji  $W_1$  in  $W_2$ . Atomi s svetlobo sodelujejo preko dipolne interakcije oblike  $e\hat{x}E(t)$ , kjer je  $E(t)$  polje v resonatorju, ki naj bo zaradi preprostosti polarizirano v smeri osi  $x$ . Časovno odvisno stanje atomov zapišimo v obliki

$$|\psi\rangle = c_1(t)|1\rangle \exp(-iW_1t/\hbar) + c_2(t)|2\rangle \exp(-iW_2t/\hbar) . \quad (2.61)$$

Iz Schroedingerjeve enačbe dobimo za koeficienta  $c_1(t)$  in  $c_2(t)$

$$\dot{c}_1 = \frac{1}{i\hbar} E(t) v_{12} e^{-i\omega_0 t} c_2, \quad \dot{c}_2 = \frac{1}{i\hbar} E(t) v_{12} e^{i\omega_0 t} c_1 , \quad (2.62)$$

kjer je  $\omega_0 = (W_2 - W_1)/\hbar$  in  $v_{12} = e\langle 1|\hat{x}|2\rangle$ .

Električni dipolni moment atoma v stanju *ket*  $\psi$  je

$$p = -e\langle \psi|\hat{x}|\psi\rangle = -(c_1^* c_2 e^{-i\omega_0 t} + c_1 c_2^* e^{i\omega_0 t}) v_{12} . \quad (2.63)$$

Razdelimo  $p$  na dva dela:

$$p = p^+ + p^- = v_{12} [\eta(t) + \eta^*(t)] , \quad (2.64)$$

kjer smo vpeljali  $\eta(t) = c_1^* c_2 e^{-i\omega_0 t}$ .

Zanima nas, kako se dipolni moment spreminja s časom. Zato s pomočjo enačb 2.62 izrazimo

$$\dot{\eta} = -i\omega_0 \eta - \frac{1}{i\hbar} E(t) v_{12} (|c_2|^2 - |c_1|^2). \quad (2.65)$$

$|c_i|^2$  je verjetnost za zasedenost stanja  $|i\rangle$ . Izraz v oklepaju na desni strani gornje enačbe torej meri razliko zasednosti obeh stanj; označimo ga z  $\zeta$ . Podobno kot zgoraj izrazimo časovni odvod

$$\dot{\zeta} = \frac{2v_{12}}{i\hbar} E(t) (\eta^* - \eta). \quad (2.66)$$

S tem smo iz Schroedingerjeve enačbe dobili enačbe za časovni razvoj diponega momenta in obrnjene zasedenosti, ki pa jih moramo še dopolniti. Naj bo atom na začetku v stanju  $|2\rangle$  in naj bo  $E(t) = 0$ . Začetna vrednost  $\zeta(0) = 1$  in po enačbi 2.66 naj bi bila  $\zeta(t)$  konstantna. Vemo pa, da se atom, ki je v vzbujenem stanju, sčasoma vrne v osnovno stanje. Verjetnost za prehod na časovno enoto smo označili z  $A$ . Poleg tega moramo na nek način upoštevati še črpanje, s katerim vzdržujemo obrnjeno zasedenost in s tem lasersko delovanje. Za podroben opis črpanja bi morali v Hamiltonov operator dodati ustrezne člene in morda upoštevati še druga stanja atomov, vendar nas take podrobnosti na tem mestu ne zanimajo. Zaradi črpanja stacionarna vrednost  $\zeta$  v odsotnosti laserskega polja  $E(t)$  ni -1, temveč zavzame neko vrednost  $\zeta_0$  med -1 in 1, odvisno od moči črpanja. Tako lahko enačbo 2.66 popravimo:

$$\dot{\zeta} = A(\zeta_0 - \zeta) + \frac{2v_{12}}{i\hbar} E(t) (\eta^* - \eta), \quad (2.67)$$

kjer prvi člen popisuje spontane prehode v nižje stanje in vpliv črpanja.

Podobno dopolnimo še enačbo 2.65. Pri  $E(t) = 0$  da časovno odvisnost  $\eta$  oblike  $e^{-i\omega_0 t}$ , to je brez dušenja. Vema pa, da polarizacija v mešanem stanju razpada vsaj zaradi spontanega sevanja, lahko pa še zaradi drugih vplivov, na primer trkov z drugimi atomi. Označimo koeficient dušenja polarizacije z  $\gamma$ , ki meri tudi spektralno širino svetlobe, ki jo sevajo atomi pri prehodu  $2 \rightarrow 1$ . Tako imamo

$$\dot{\eta} = -(i\omega_0 \eta + \gamma) - \frac{1}{i\hbar} E(t) v_{12} \zeta. \quad (2.68)$$

Tej enačbi moramo dodati še konjugirano kompleksno enačbo. Enačbe 2.67 in 2.68 pogosto imenujejo Blochove enačbe. Najprej so jih uporabili za obravnavo jedrske magnetne resonance.

Potrebujemo še enačbo za polje  $E(t)$ . Zanj dobimo iz Maxwellovih enačb valovno enačbo, kjer moramo upoštevati, da imamo tudi od nič različno polarizacijo snovi, ki je v primeru, da so vsi atomi enakovredni, podana z

$$P = \frac{N}{V} v_{12} (\eta + \eta^*) = P^+ + P^-. \quad (2.69)$$

Valovna enačba je tedaj [?]

$$\nabla^2 E - \frac{1}{c^2} \ddot{E} = \mu_0 \ddot{P}. \quad (2.70)$$

Namesto mikroskopske količine  $\zeta$  lahko uvedemo še gostoto obrnjene zasedenosti  $Z = (N/V)\zeta$ , pa lahko enačbi 2.67 in 2.68 prepišemo v obliko

$$\dot{P}^\pm = (\mp i\omega_0 - \gamma) P^\pm + \frac{v_{12}^2}{i\hbar} E Z \quad (2.71)$$

$$\dot{Z} = A(Z_0 - Z) - \frac{2}{i\hbar} E(P^- - P^+). \quad (2.72)$$

Prehod od enačb 2.67 in 2.68 na ?? je mogoč le, kadar so vsi atomi enakovredni, to je, kadar ni nehomogene razširitve. Kako je v primeru nehomogene razširitve, si bralec lahko ogleda v [?].

Enačbe 2.67, 2.68 ali ??, skupaj z 2.70 dajejo semiklasični opis sodelovanja svetlobe in snovi. Iz izpeljave je vidno, da je v njem spontano sevanje obravnavano pomankljivo, le s fenomenološkim nastavkom, kar je moč popraviti tako, da tudi elektromagnetno polje kvantiziramo. Kljub tej pomanjkljivosti je s semiklasičnim modelom mogoče zelo podrobno obravnavati večino pojavov v laserjih in tudi druge probleme širjenja svetlobe po snovi. Reševanje zapisanega sistema nelinearnih parcialnih diferencialnih enačb pa je na splošno zelo težavno.

Da bomo semiklasične enačbe le nekoliko поблиže spoznali, na kratko pogledjmo najenostavnejši primer, to je laser, v katerem je vzbujeno le eno resonatorsko stanje. Polje ima tedaj obliko

$$E(\vec{r}, t) = E_\lambda(t) u_\lambda(\vec{r}), \quad (2.73)$$

kjer je  $u_\lambda(\vec{r})$  krajevni del lastnega stanja resonatorja, ki zadošča enačbi

$$\nabla^2 u_\lambda - \frac{\omega_\lambda^2}{c^2} u_\lambda = 0. \quad (2.74)$$

$E_\lambda(t)$  opisuje časovno odvisnost, ki je za laser v stacionarnem delovanju periodična, vendar frekvenca ni nujno kar enaka lastni frekvenci praznega resonatorja  $\omega_\lambda$ , temveč jo moramo še izračunati.

Tudi polarizacijo lahko razvijemo po lastnih funkcijah  $u_\lambda(\vec{r})$ . Ker so te med seboj ortogonalne, preide valovna enačba 2.70 v

$$\omega_\lambda^2 E_\lambda - \dot{E}_\lambda = \frac{1}{\epsilon_0} \dot{P}_\lambda. \quad (2.75)$$

Razstavimo  $E_\lambda(t)$  na dva dela:

$$E_\lambda(t) = E_\lambda^+(t) + E_\lambda^-(t) = A^+(t) e^{-i\omega_\lambda t} + A^-(t) e^{i\omega_\lambda t}. \quad (2.76)$$

Dejanska frekvenca laserja je blizu  $\omega_\lambda$ , zato pričakujemo, da bosta amplitudi  $A^\pm(t)$  v primerjavi z  $e^{-i\omega_\lambda t}$  le počasni funkciji časa. Izračunajmo

$$\begin{aligned} \ddot{E}_\lambda^+ &= -\omega_\lambda^2 E_\lambda^+ - 2i\omega_\lambda \dot{A}^+ e^{-i\omega_\lambda t} + \ddot{A}^+ e^{-i\omega_\lambda t} \\ &\simeq -\omega_\lambda^2 E_\lambda^+ - 2i\omega_\lambda (\dot{E}_\lambda^+ + i\omega_\lambda E_\lambda^+) \end{aligned} \quad (2.77)$$

V drugi vrstici smo izpustili člen z  $\ddot{A}^+$ , ker pričakujemo, da je majhen. S tem smo napravili približek *počasne amplitude*.

Polarizacija snovi je približno periodična s frekvenco  $\omega_0$ , z amplitudo, ki je tudi počasna funkcija časa. Zato je  $\ddot{P}_\lambda^+ \simeq -\omega_0^2 P_\lambda^+$ . Pri drugem odvodu polja po času smo potrebovali en člen več, ker se člen  $-\omega_\lambda^2 E_\lambda^+$  na levi strani enačbe 2.70 odšteje. Z uporabo tega približka in enačb 2.74 in 2.77 preide valovna enačba 2.70 za eno nihanje v

$$\dot{E}_\lambda^+ = -i\omega_\lambda E_\lambda^+ + \frac{i\omega_0}{2\epsilon_0} P_\lambda^+. \quad (2.78)$$

Doslej nismo upoštevali, da je polje v praznem resonatorju dušeno, zato moramo gornjo enačbo še popraviti:

$$\dot{E}_\lambda^+ = (-i\omega_\lambda - \frac{1}{\tau}) E_\lambda^+ + \frac{i\omega_0}{2\epsilon_0} P_\lambda^+. \quad (2.79)$$

Kadar v reosnatorju ni snovi, je dobljena enačba enaka kot enačba ??.

Enačbi ?? in 2.71 sta nelinearni, zato ju n moč kar tako prepisati za primer razvoja po lastnih stanjih resonatorja. Pri enačbi za razvoj polarizacije ?? imamo v zadnjem členu na desni produkt komponente polja  $E_\lambda$  in obrnjene zasedenosti  $Z$ , od katere bistveno prispeva le krajevno povprečje  $\bar{Z}$ , ki se tudi s časom le počasi spreminja. Seveda vsebuje  $Z$  tudi krajevno odvisne komponente, ki pa so pomembne predvsem zato, ker sklapljajo različna lastna stanja resonatorja, kar presega našo trenutno obravnavo. Tako imamo

$$\dot{P}_\lambda^+ = (-i\omega_0 - \gamma)P_\lambda^+ + \frac{v_{12}^2}{i\hbar} E_\lambda^+ \bar{Z}. \quad (2.80)$$

Enačbo za  $\bar{Z}$  dobimo iz 2.71. V zadnjem členu imamo produkte  $E^\pm P^\pm = E_\lambda^\pm P_\lambda^\pm u_\lambda^2(\vec{r})$ , kar moramo prostorsko povprečiti. Funkcije  $u_\lambda(\vec{r})$  so normirane, tako da je  $\int u_\lambda^2(\vec{r}) dV = V$ . Tako imamo  $\overline{u_\lambda^2(\vec{r})} = 1$  in

$$\dot{\bar{Z}} = A(\bar{Z}_0 - \bar{Z}) - \frac{2}{i\hbar} (E_\lambda^+ + E_\lambda^-)(P_\lambda^- - P_\lambda^+), \quad (2.81)$$

kjer je  $\bar{Z}_0$  povprečje nenasičene zasedenosti  $Z_0$ . V zadnjem členu nastopajo produkti, ki nihajo s frekvencami  $\omega_\lambda - \omega_0$  in  $\omega_\lambda + \omega_0$ . Obe frekvenci sta si zelo blizu, zato je njuna vsota mnogo večja od razlike. Členi  $E_\lambda^+ P_\lambda^+$  in  $E_\lambda^- P_\lambda^-$  se torej zelo hitro spreminjajo in skoraj nič ne vplivajo na valovanje blizu  $\omega_\lambda$ , zato jih izpustimo. S tem je časovna odvisnost  $\bar{Z}$  podana z

$$\dot{\bar{Z}} = A(\bar{Z}_0 - \bar{Z}) - \frac{2}{i\hbar} (E_\lambda^+ P_\lambda^- - E_\lambda^- P_\lambda^+). \quad (2.82)$$

Enačbe 2.79, 2.80 in 2.82, skupaj s konjugirano kompleksnimi enačbami za  $E_\lambda^-$  in  $P_\lambda^-$ , so zaključen sistem, ki opisuje delovanje enofrekvenčnega laserja. Uporabimo jih za izračun frekvence izhodne svetlobe.

Naj bo stanje stacionarno. Tedaj lahko polje zapišemo v obliki  $E_\lambda^+ = E_0 e^{-i\Omega t}$ , kjer je  $E_0$  realna konstanta, frekvenca svetlobe  $\omega$  pa je blizu  $\omega_0$  in  $\omega_\lambda$ . V stacionarnem stanju mora imeti polarizacija enako časovno odvisnost:  $P_\lambda^+ = P_0 e^{-i\Omega t}$ . Tedaj je v enačbi 2.82 drugi oklepaj konstanten in mora biti tudi  $\bar{Z}$  v stacionarnem stanju od časa neodvisna. Sistem enačb 2.79, 2.80 in 2.82 tako da

$$\begin{aligned} -[i(\omega_\lambda - \Omega) + \frac{1}{\tau}]E_0 - \frac{i\omega_0}{2\epsilon_0} P_0 &= 0 \\ -[i(\omega_0 - \Omega) + \gamma]P_0 + \frac{v_{12}^2}{i\hbar} E_0 \bar{Z} &= 0 \\ A(\bar{Z}_0 - \bar{Z}) - \frac{2}{i\hbar} E_0 (P_0^* - P_0) &= 0. \end{aligned} \quad (2.83)$$

Najprej izračunamo  $P_0$  iz druge enačbe, ga postavimo v tretjo in izračunamo  $\bar{Z}$ :

$$\bar{Z} = \bar{Z}_0 \left[ 1 + \frac{v_{12}^2}{\hbar^2 A} E_0^2 \frac{2\gamma}{(\omega_0 - \Omega)^2 + \gamma^2} \right]^{-1} \quad (2.84)$$

Ta izraz že poznamo.  $\pi v_{12}^2 / (\epsilon_0 \hbar^2)$  je Einsteinov koeficient  $B$ .  $E_0^2$  je sorazmern gostoti energije polja v resonatorju, zadnji ulomek v oklepaju pa podaja obliko homogeno razširjene atomske črte:

$$\bar{Z} = \bar{Z}_0 \left[ 1 + \frac{2B}{A} g(\omega_0 - \Omega) w \right]^{-1} \quad (2.85)$$

To je natanko enako izrazu za nasičenje zasedenosti stanj, ki smo ga izpeljali iz zasedbenih enačb v četrtem poglavju.

Postavimo  $P_0$  iz prve enačbe sistema 2.83 v drugo:

$$E_0[i(\Omega - \omega_\lambda) + \frac{1}{\tau}][i(\Omega - \omega_0) + \gamma] = -\frac{v_{12}^2 \omega_0}{2\hbar \epsilon_0} E_0 \bar{Z}. \quad (2.86)$$

V delujočem laserju je  $E_0 \neq 0$ , zato lahko krajšamo.  $\bar{Z}$  je realen, tako da mora biti imaginarni del leve strani enak nič:

$$(\Omega - \omega_\lambda)\gamma + (\Omega - \omega_0)\frac{1}{\tau} = 0. \quad (2.87)$$

Od tod lahko izračunamo frekvenco laserja

$$\Omega = \frac{\omega_\lambda \gamma + \omega_0 \frac{1}{\tau}}{\gamma + \frac{1}{\tau}}. \quad (2.88)$$

Frekvenca torej ni enaka frekvenci praznega resonatorja  $\omega_\lambda$ , temveč je premaknjena proti centru atomske črte  $\omega_0$ . Premik je odvisen od razmerja širine atomske črte in izgub resonatorja.

Bralec lahko sam iz enačbe 2.86 izračuna še energijo svetlobe v resonatorju in rezultat primerja s tistim, ki smo ga dobili z uporabo zasedbenih enačb.

Gornji primer uporabe polklasičnih enačb je zelo preprost. Prava moč modela se pokaže pri obravnavi mnogofrekvenčnega laserja, na primer pri računu uklepanja faz laserskih nihanj, kar pa presega okvir te knjige. Več bo bralec našel v [?].

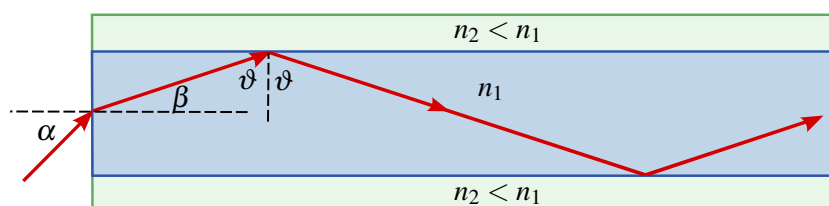
## 3. Optična vlakna

Moderna komunikacijska tehnologija zahteva vedno hitrejši prenos vedno večje količine podatkov. Navadne kovinske vodnike so zato v računalniških in telekomunikacijskih povezavah nadomestila optična vlakna, ki jih odlikujejo majhne izgube, neobčutljivost na elektromagnetne in medsebojne motnje ter zmožnost prenosa izjemno velike količine podatkov. V tem poglavju bomo opisali mehanizme prenosa podatkov po optičnih vodnikih in spoznali omejitve pri prenosu, predvsem disperzijo in izgube, ter načine, kako se z njimi spopadamo.

### 3.1 Planparalelni vodnik

#### Geometrijski opis

Klasično pojasnimo delovanje optičnih vlaken s totalnim odbojem na meji med dvema dielektrikom. Kadar prehaja svetloba iz snovi z večjim lomnim količnikom v sredstvo z manjšim lomnim količnikom, se pri vpadnih kotih, ki so večji od kritičnega kota, totalno odbije.



Slika 3.1: Klasična razlaga valovnega vodnika

Najpreprostejši optični vodnik je planparalelna plast dielektrika, ki je obdana s snovjo z manjšim lomnim količnikom (slika 3.1). Plasti z večjim lomnim količnikom ( $n_1$ ) rečemo sredica, okoliški snovi z lomnim količnikom  $n_2 < n_1$  pa plašč. Žarek potuje po vodniku, če je vpadni kot na mejo med sredico in plaščem  $\vartheta$  večji od kota totalnega odboja  $\vartheta_c$ , za katerega velja

$$\sin \vartheta_c = \frac{n_2}{n_1}. \quad (3.1)$$

Obstaja torej največji vpadni kot  $\alpha_{\max}$ , pri katerem se vpadna svetloba ujame v vlakno. Z njim povezana je numerična odprtina (apertura) vlakna, ki jo izračunamo kot

$$NA = \sin \alpha_{\max} = n_1 \sin \beta_{\max} = n_1 \sin(\pi/2 - \vartheta_c) = n_1 \cos \vartheta_c = n_1 \sqrt{1 - \sin^2 \vartheta_c}. \quad (3.2)$$

Upoštevajoč enačbo (3.1) numerično odprtino zapišemo kot

$$NA = \sqrt{n_1^2 - n_2^2}. \quad (3.3)$$

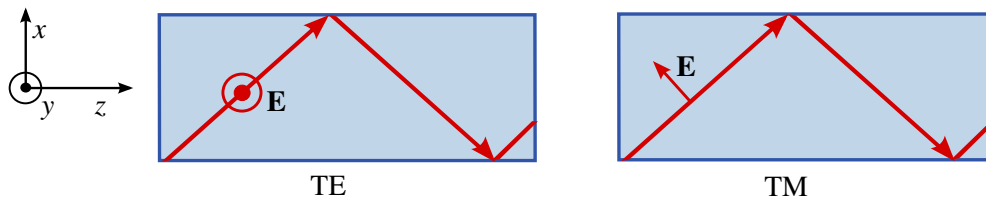
Razlika med lomnima količnikoma sredice in plašča je navadno majhna, tipično le nekaj stotink, zato je numerična odprtina optičnih vodnikov  $NA \lesssim 0,1$ . Kot, pod katerim lahko vpada svetloba v vodnik (ali vlakno), da se vanj ujame, je tako navadno le nekaj stopinj.



### Valovni opis

Za natančen opis širjenja svetlobe po vodnikih ali vlaknih<sup>1</sup>, ki imajo polmer sredice od nekaj do nekaj deset mikrometrov, geometrijska optika ne zadošča. Rešiti moramo Maxwellove enačbe (enačbe ??–??) z ustreznimi robnimi pogoji (enačbe ??–??), kar je za cilindrična vlakna dokaj dolg in zapleten račun. Zato določimo najprej osnovne značilnosti valovanja, ki se širi po planparalelnem vodniku.

Glede na smer polarizacije električne poljske jakosti ločimo dva primera (slika 3.2). Če je smer električne poljske jakosti valovanja vzporedna z mejnima ploskvama (smer  $y$ ), govorimo o transverzalnem električnem (TE) valovanju. V nasprotnem primeru, ko je z mejnima ploskvama vzporedna magnetna poljska jakost in leži električna poljska jakost v ravnini  $xz$ , govorimo o transverzalnem magnetnem (TM) valovanju.



Slika 3.2: Polarizaciji TE (levo) in TM (desno) valovanj v valovnem vodniku

Geometrijskemu žarku, ki pod kotom potuje po sredici in se na njeni meji odbija, ustreza v valovni sliki val, ki ima prečno komponento valovnega vektorja  $k_x$  različno od nič. Ker je valovanje v prečni smeri omejeno na sredico končne debeline (naj bo debelina sredice enaka  $a$ ), lahko  $k_x$  zavzame le diskretne vrednosti. Te so v grobem približno enake  $N\pi/a$ , pri čemer je  $N$  celo število. Pravimo, da vsak  $N$  določa en rod valovanj v vodniku. Po drugi strani obstaja največji  $k_x$ , za katerega približno velja

$$k_{x\max} \approx k_0 \sin \alpha_{\max} = k_0 n_1 \cos \vartheta_c = k_0 \sqrt{n_1^2 - n_2^2}. \quad (3.4)$$

Število rešitev za  $k_x$  je tako omejeno in točno določeno, odvisno pa je od razlike lomnih količnikov in od debeline vodnika oziroma polmera vlakna. V nadaljevanju bomo spoznali, da v optičnih vlaknih en rod vselej obstaja, za razliko od dielektričnih in kovinskih vodnikov, kakršne poznamo iz mikrovalovne tehnike, po katerih se pod določeno frekvenco valovanje ne more širiti. Enorodovna optična vlakna, torej vlakna, po katerih se širi en sam rod, imajo še posebej lepe lastnosti za uporabo v komunikacijskih sistemih.

Povejmo še nekaj o hitrosti valovanja v vodniku. Naj bo  $\beta$  velikost komponente valovnega vektorja vzdolž smeri  $z$  in odvisnost polja od koordinate vzdolž vodnika  $\exp(i\beta z)$ . Po Pitagorovem izreku velikost valovnega vektorja v sredici vodnika zapišemo kot

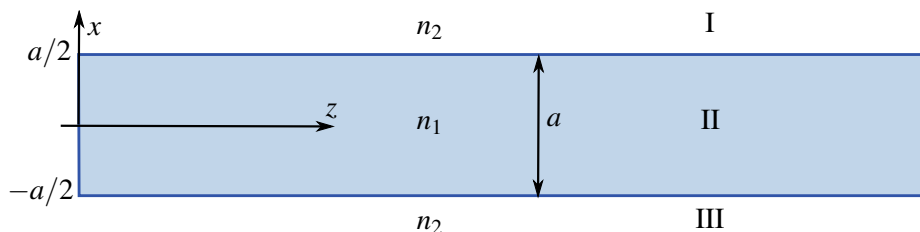
$$k_1 = n_1 \frac{\omega}{c_0} = \sqrt{\beta^2 + k_x^2}. \quad (3.5)$$

Vidimo, da za dano vrednost  $k_x$  zveza med valovnim številom  $\beta$  in krožno frekvenco  $\omega$  ni linearna. Fazna hitrost valovanja  $v_f = \omega/\beta$  je tako odvisna od krožne frekvence in pride do disperzije. Grupna hitrost  $v_g = d\omega/d\beta$  se zaradi nelinearne zveze med  $\beta$  in  $\omega$  razlikuje od faze hitrosti in njena frekvenčna odvisnost ima pomembne posledice za uporabo vlaken pri prenosu podatkov. Več o tem bomo spoznali v nadaljevanju poglavja.

<sup>1</sup>Dogovorimo se, da besedo vlakno uporabljamo za cilindrične strukture, besedo vodnik pa za planparalelne in njim podobne strukture.

### 3.2 Račun lastnih rodov v planparalelnem vodniku

Poiščimo rešitve valovne enačbe v planparalelnem vodniku. To je preprost dvodimenzionalen model optičnega vlakna, ki je sestavljen iz plasti prozornega dielektrika z lomnim količnikom  $n_1$  in plašča z lomnim količnikom  $n_2$ . Zaradi enostavnosti privzamemo, da je plašč na obeh straneh sredice enak. Sredica naj bo debela  $a$ , izhodišče koordinatnega sistema si izberemo na sredini plasti. Ločimo tri območja, kjer rešujemo valovno enačbo: območje II označuje sredico, območji I in III pa sta v plašču nad sredico oziroma pod njo.



Slika 3.3: K izračunu lastnih rodov v simetričnem planparalelnem vodniku

Krajevni del valovne enačbe, ki jo rešujemo, opisuje Helmholtzeva enačba (enačba ??)

$$\nabla^2 \mathbf{E} + n^2(x) k_0^2 \mathbf{E} = 0, \quad (3.6)$$

kjer je  $k_0 = \omega/c$ ,  $n(x)$  pa nezvezno spremeni vrednost ob prehodu iz sredice v plašč. Nastavek za rešitev naj bo oblike

$$\mathbf{E}(x, z) = \mathbf{e} \psi(x) e^{i\beta z}. \quad (3.7)$$

Omejimo se le na primer TE polarizacije (za izračun lastnih rodov TM polariziranega valovanja glej nalogo 3.2.1). Vstavimo nastavek (enačba 3.7) v enačbo (3.6) in zapišemo

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} + (k_0^2 n_1^2 - \beta^2) \psi = 0 \quad \text{v sredici oziroma območju II} \quad (3.8)$$

in

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} + (k_0^2 n_2^2 - \beta^2) \psi = 0 \quad \text{v plašču oziroma območjih I in III.} \quad (3.9)$$

Iz zveze (enačba 3.5) sledi  $k_0^2 n_1^2 - \beta^2 = k_x^2$ , zato lahko rešitve prve enačbe zapišemo v obliki

$$\psi_{II}(x) = C \cos(k_x x) + D \sin(k_x x), \quad (3.10)$$

rešitve v plašču pa so oblike

$$\psi_I(x) = A \exp(-\kappa x) + B \exp(\kappa x), \quad \psi_{III}(x) = F \exp(-\kappa x) + G \exp(\kappa x), \quad (3.11)$$

pri čemer smo vpeljali  $\kappa^2 = \beta^2 - k_0^2 n_2^2$ .

Da valovanje ostane ujeto v vlakno, mora biti  $\kappa$  realno število. Le tako namreč dosežemo eksponentno pojemanje električne poljske jakosti z oddaljenostjo od sredice, sicer je valovanje v vseh treh območjih oscilatorno in ni ujeto v vlakno.

Iz zahteve, da sta  $k_x$  in  $\kappa$  realna, sledi pogoj za valovno število  $\beta$

$$k_0 n_2 < \beta < k_0 n_1. \quad (3.12)$$

Poleg tega zahteva po končnosti rešitve da pogoj, da je v območju I (pri  $x > a/2$ ) koeficient  $B = 0$ , v območju III (pri  $x < -a/2$ ) pa  $F = 0$ . Hitro ugotovimo, da so zaradi simetrije vlakna lastne rešitve lahko le sode ali lihe funkcije.

### Sode rešitve

Poglejmo najprej sode rešitve. V sredici bo različen od nič samo  $C$ , v območjih I in III pa bosta amplitudi enaki in  $A = G$  (slika 3.4 a). Dobimo

$$\psi_I(x) = A \exp(-\kappa x), \quad (3.13)$$

$$\psi_{II}(x) = C \cos(k_x x), \quad (3.14)$$

$$\psi_{III}(x) = A \exp(\kappa x). \quad (3.15)$$

Zvezo med koeficientoma  $A$  in  $C$  določimo z upoštevanjem robnih pogojev. Na meji med sredico in plaščem morata biti tangencialni komponenti električne in magnetne poljske jakosti zvezni (enačbi ?? in ??). Iz tega izpeljemo pogoj, da se za TE valovanje na meji ohranja amplituda električne poljske jakosti. Pri  $x = a/2$  zapišemo

$$A \exp(-\kappa a/2) = C \cos(k_x a/2). \quad (3.16)$$

Drugi pogoj sledi iz zveze  $\nabla \times \mathbf{E} = i\omega\mu_0 \mathbf{H}$ , ki izhaja neposredno iz Maxwelllove enačbe (?). Ker se na meji ohranja tangencialna komponenta  $\mathbf{H}$ , to je v tem primeru  $H_z$ , se posledično ohranja odvod električne poljske jakosti  $dE_y/dx$ . Pri  $x = a/2$  velja

$$-A\kappa \exp(-\kappa a/2) = -Ck_x \sin(k_x a/2). \quad (3.17)$$

Enačbo za  $k_x$  izpeljemo iz zahteve, da sta gornja robna pogoja hkrati izpolnjena. Izraza za robna pogoja delimo in dobimo sekularno enačbo za sode rešitve

$$\frac{\kappa}{k_x} = \tan \frac{k_x a}{2}. \quad (3.18)$$

Rešitve enačbe so diskretne in vsaki vrednosti  $k_x$  ustreza en sodi rod oziroma sodi lastni način. Pri tem je zveza med  $\kappa$  in  $k_x$

$$\kappa^2 + k_x^2 = k_0^2 (n_1^2 - n_2^2). \quad (3.19)$$

### Lihe rešitve

Oglejmo si še lihe rešitve v planparalelnem vodniku. V sredici je od nič različen le  $D$ , polji v plašču pa sta nasprotno enaki in  $A = -G$  (slika 3.4 b). Sledi

$$\psi_I(x) = A \exp(-\kappa x), \quad (3.20)$$

$$\psi_{II}(x) = D \sin(k_x x), \quad (3.21)$$

$$\psi_{III}(x) = -A \exp(\kappa x). \quad (3.22)$$

Z upoštevanjem zveznosti električne poljske jakosti in njenega odvoda na meji med sredico in plaščem zapišemo robna pogoja pri  $x = a/2$

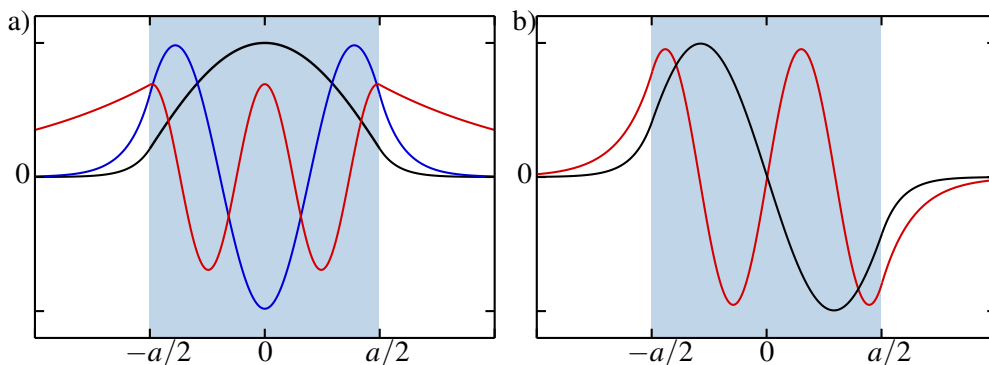
$$A \exp(-\kappa a/2) = D \sin(k_x a/2) \quad (3.23)$$

in

$$-\kappa A \exp(-\kappa a/2) = Dk_x \cos(k_x a/2). \quad (3.24)$$

Ustrezna sekularna enačba za lihe rešitve je

$$-\frac{k_x}{\kappa} = \tan \frac{k_x a}{2}. \quad (3.25)$$



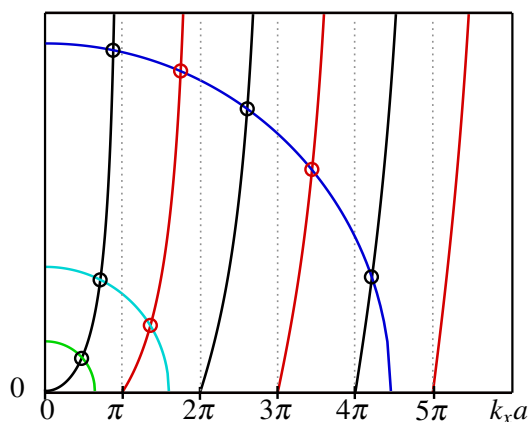
Slika 3.4: Prečne oblike električne poljske jakosti za sode (a) in lihe (b) rodove v simetričnem planparalelnem valovnem vodniku. Modra barva označuje sredico, beli del pa plašč vodnika.

★ Če ne prej, je bralec ob slikah (3.4) zagotovo opazil podobnost s kvantnim delcem, ujetim v končni enodimenzionalni potencialni jami. Svetloba, ujeta v vodnik ali vlakno, ustreza vezanim stanjem delca, numerična odprtina pa je tisti parameter, ki določa globino potencialne jame. Pri majhnih vrednostih obstaja samo ena rešitev za vezano stanje, pri globlji jami je rešitev več. Podobno kot v kvantni mehaniki tudi v tem primeru ena rešitev za vezano stanje vedno obstaja.

Sekularnih enačb za lastne rodove (enačbi 3.18 in 3.25) ne moremo rešiti analitično. Rešujemo jih numerično, zelo nazorna pa je tudi grafična predstavitev (slika 3.5). Enačbo za sode rodove (enačba 3.18) pomnožimo s  $k_x a$  in narišemo funkcijo  $k_x a \tan(k_x a/2)$  (črne črte). Enačbo za lihe rodove (enačba 3.25) preoblikujemo in narišemo  $-k_x a \cot(k_x a/2)$  (rdeče črte). Nato pri danih parametrih  $n_1$ ,  $n_2$ ,  $a$  in  $k_0$  narišemo krožnico za  $\kappa a$ , ki sledi iz enačbe (3.19)

$$(\kappa a)^2 + (k_x a)^2 = k_0^2 a^2 (n_1^2 - n_2^2) = k_0^2 a^2 NA^2. \quad (3.26)$$

Število presečišč krivulj s krožnico določa število lastnih rodov v vodniku, lega presečišča pa pripadajočo vrednost  $k_x$ . Na sliki so narisane tri krožnice za tri različne debeline vodnika  $a$  (pri istih lomnih količnikih in isti valovni dolžini svetlobe). V najtanjšem vodniku (zelena črta) je presečišče le eno in tak vodnik imenujemo enorodovni vodnik. Z večanjem debeline število lastnih rodov narašča in taki vodniki so večerodovni. Lastni rodovi v večerodovnem vodniku so izmenično sodi in lihi, začnši z osnovnim rodom, ki je vedno sod.



Slika 3.5: K izračunu  $k_x$  v valovnem vodniku za TE polarizacijo. Število presečišč krožnice s krivuljami določa število lastnih rodov v vodniku. Zelena krožnica prestavlja enorodovni vodnik, turkizna dvorodovnega in modra petorodovnega s tremi sodimi in dvema lihima rešitvama.

S slike (3.5) razberemo še eno pomembno lastnost vodnikov. Ne glede na to, kako majhen je polmer krožnice, krožnica vedno seka črno krivuljo. To pomeni, da v še tako tankem vodniku vsaj ena rešitev za  $k_x$  vedno obstaja in ta je vedno soda.

Ocenimo še število lastnih rodov v vodniku. S slike (3.5) vidimo, da je največja možna vrednost  $k_x$  omejena s polmerom krožnice  $k_0 a N A$ , ki ga imenujemo tudi normirana frekvenca  $V$ . Do te vrednosti je po ena rešitev na vsak interval dolžine  $\pi$ , izmenično soda in liha, zato je celotno število rodov za eno polarizacijo

$$N \approx \frac{k_0 a N A}{\pi} = \frac{V}{\pi}. \quad (3.27)$$

Za enorodovni vodnik velja  $V < \pi$  oziroma  $a < \frac{\lambda}{2NA}$ . Tipičen enorodovni vodnik ima tako debelino  $a \lesssim 5 \mu\text{m}$ , večrodovni vodnik z okoli 20 rodovi pa  $a \sim 50 \mu\text{m}$ .

**Naloga 3.2.1** Ponovi izračun za TM valovanje in pokaži, da sta sekularni enačbi enaki

$$\frac{\kappa}{k_x} \left( \frac{n_1}{n_2} \right)^2 = \tan \frac{k_x a}{2} \quad \text{in} \quad -\frac{k_x}{\kappa} \left( \frac{n_2}{n_1} \right)^2 = \tan \frac{k_x a}{2}. \quad (3.28)$$

Namig: Zapiši enačbe za magnetno poljsko jakost  $\mathbf{H}$  in upoštevaj ustrezne robne pogoje.

Podoben račun lahko naredimo tudi za TM valovanje (glej nalogo 3.2.1). Zaradi drugačnih robnih pogojev se sekularni enačbi razlikujeta od tistih za TE polarizacijo. Razlika je v faktorju  $(n_1/n_2)^2$ , ki pa je v tipičnem vodniku zelo blizu ena. Zato se tudi rešitve za prečno komponento  $k_x$  le malo razlikujejo. Bolj pomembna je ugotovitev, da je število dovoljenih rodov za TM polarizacijo enako številu dovoljenih rodov za TE polarizacijo, saj je največji  $k_x$  v obeh primerih določen z enakim polmerom  $V$ . Vse lastne rodove, ki se širijo v danem vodniku, torej zajamemo z opisom TE sodih in lihih ter TM sodih in lihih rodov.

Ugotovili smo, da je električna poljska jakost tudi izven sredice vodnika različna od nič. Poglejmo še, kako je z energijskim tokom. Čeprav se velika večina pretaka po sredici, delež, ki se pretaka po plašču, ni vedno zanemarljiv. To posebej velja za višje rodove. Delež energijskega toka, ki se pretaka po sredici, izračunamo z integralom

$$\Gamma = \frac{\int_{-a/2}^{a/2} j dS}{\int_{-\infty}^{\infty} j dS}. \quad (3.29)$$

**Naloga 3.2.2** Pokaži, da je razmerje med energijskim tokom  $P_p$ , ki se pretaka po plašču, in energijskim tokom, ki se pretaka po sredici vodnika  $P_s$ , za sode rodove enako

$$\frac{P_p}{P_s} = \frac{n_2}{n_1} \frac{2k_x}{\kappa} \frac{\cos^2(k_x a/2)}{k_x a + \sin(k_x a)}, \quad (3.30)$$

in za lihe rodove

$$\frac{P_p}{P_s} = \frac{n_2}{n_1} \frac{2k_x}{\kappa} \frac{\sin^2(k_x a/2)}{k_x a - \sin(k_x a)}. \quad (3.31)$$

### 3.3 Cilindrično vlakno

Do zdaj smo obravnavali ravninski valovni vodnik. V praksi svetlobo navadno usmerjamo po optičnih vlaknih, ki imajo cilindrično geometrijo. Najpreprostejši primer je cilindrično vlakno, v katerem je lomni količnik cilindrične sredice konstanten in nekoliko večji od lomnega količnika plašča. Navadno je  $n_1 - n_2 \sim 0,001$ . Pogosto se uporablja bolj zapletene konstrukcije, pri katerih se lomni količnik sredice spreminja z oddaljenostjo od osi. Z zapletenejšo geometrijo namreč zmanjšamo disperzijo v vlaknu in s tem povečamo zmogljivost prenašanja velike količine podatkov na dolge razdalje – najzmogljivejša komercialna vlakna zmorejo prenos več deset terabitov na sekundo<sup>2</sup>.

Račun za širjenje svetlobe po cilindričnem vlaknu s homogeno sredico je podoben kot za planparalelni vodnik, vendar je precej bolj zapleten. V cilindrični geometriji namreč ni delitve na čiste električne in magnetne transverzalne valove, saj so robni pogoji sklopljeni. Na splošno se rešitve izražajo v obliki kombinacij Besslovih funkcij. Izkaže se, da je osnovni rod, ki se širi po cilindričnem vlaknu, po obliki zelo podoben osnovnemu Gaussovemu snopu, zato je sklopitev laserskih snopov v optična vlakna zelo učinkovita. Tudi v cilindričnih vlaknih obstaja končno število lastnih rodov, ki je odvisno od polmera sredice in lomnih količnikov sredice in plašča. Če je polmer zadosti majhen (razlika lomnih količnikov navadno je), obstaja le en lastni rod in optično vlakno je enorodovno. Sicer je vlakno večrodovno.

#### Valovna enačba v cilindričnem vlaknu

Točen izračun za rodove v cilindričnem vlaknu presega okvire te knjige, zato si oglejmo le izhodiščne enačbe in rešitve.<sup>3</sup> Za jakost električnega in magnetnega polja velja Helmholtzeva enačba (enačba ??)

$$\nabla^2 \mathbf{E} + n^2(r) k_0^2 \mathbf{E} = 0, \quad (3.32)$$

pri čemer je  $n(r < a) = n_1$  lomni količnik sredice in  $n(r > a) = n_2$  lomni količnik plašča, ki je dovolj debel, da njegova debelina ne vpliva na potovanje svetlobe.  $\mathbf{E}$  in  $\mathbf{H}$  sta vektorja in imata po tri komponente, ki pa so med seboj odvisne. Izračunajmo naprej  $E_z$  z nastavkom

$$E_z = R(r) e^{i\nu\phi} e^{i\beta z}, \quad (3.33)$$

pri čemer je  $\nu$  celo število zaradi zahteve po enoličnosti rešitve pri spremembi kota za  $2\pi$ . Za  $R(r)$  v sredici vlakna velja enačba

$$r^2 R(r)'' + r R(r)' + (k_s^2 r^2 - \nu^2) R(r) = 0, \quad (3.34)$$

kjer je

$$k_s^2 = k_0^2 n_1^2 - \beta^2, \quad (3.35)$$

in v plašču

$$r^2 R(r)'' + r R(r)' + (-\kappa^2 r^2 - \nu^2) R(r) = 0, \quad (3.36)$$

kjer je

$$\kappa^2 = \beta^2 - k_0^2 n_2^2. \quad (3.37)$$

<sup>2</sup>Za doprinos k razvoju in uporabi optičnih vlaken je leta 2009 Charles K. Kao prejel Nobelovo nagrado.

<sup>3</sup>Točen izračun lahko bralec poišče npr. v C. C. Davis, *Lasers and Electro-optics*, Cambridge University Press.

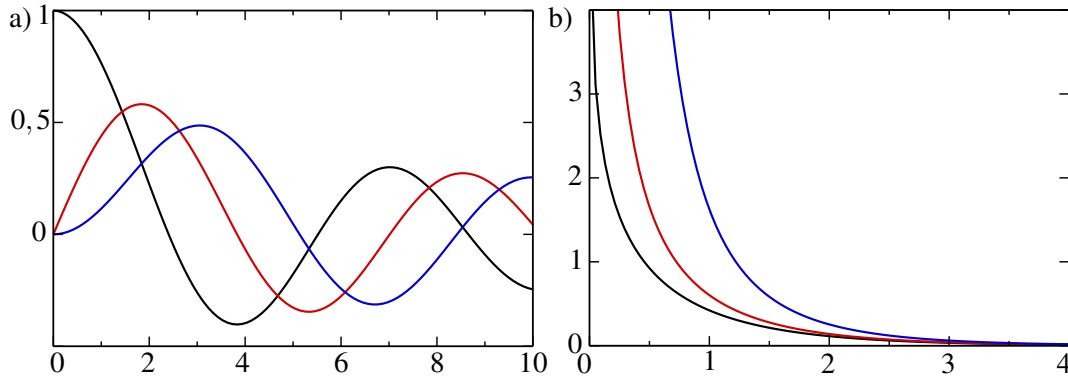
V enačbah (3.34) in (3.36) prepoznamo Besslovo diferencialno enačbo. Upoštevajoč le funkcije, ki na izbranem območju ne divergirajo, zapišemo rešitve v sredici kot

$$E_z(r, \varphi, z) = AJ_v(k_s r) \sin(v\varphi) e^{i\beta z} \quad \text{in} \quad H_z(r, \varphi, z) = BJ_v(k_s r) \cos(v\varphi) e^{i\beta z}. \quad (3.38)$$

Podobno zapišemo tudi rešitve v plašču

$$E_z(r, \varphi, z) = CK_v(\kappa r) \sin(v\varphi) e^{i\beta z} \quad \text{in} \quad H_z(r, \varphi, z) = DK_v(\kappa r) \cos(v\varphi) e^{i\beta z}. \quad (3.39)$$

Pri tem so  $A, B, C$  in  $D$  konstante,  $J_v(x)$  je Besslova funkcija prve vrste reda  $v$ ,  $K_v(x)$  pa je modificirana Besslova funkcija druge vrste reda  $v$  (slika 3.6).



Slika 3.6: Besslove funkcije: (a) Besslove funkcije prve vrste  $J_0(x)$  (črna),  $J_1(x)$  (rdeča) in  $J_2(x)$  (modra), ki predstavljajo oblike rešitev v sredici vlakna, in (b) modificirane Besslove funkcije druge vrste  $K_0(x)$  (črna),  $K_1(x)$  (rdeča) in  $K_2(x)$  (modra), ki predstavljajo rešitev v plašču vlakna.

Ko enkrat poznamo komponenti  $E_z$  in  $H_z$ , lahko z uporabo Maxwellovih enačb izračunamo še preostale komponente. Nato z upoštevanjem robnih pogojev zapišemo štiri enačbe za pet neznank ( $A, B, C, D$  in  $\beta$ ), tako da ostane ena spremenljivka (amplituda polja) prosta. Na ta način izračunamo celotni jakosti električnega in magnetnega polja v vlaknu in podobno kot pri valovnem vodniku tudi tukaj zapišemo sekularno enačbo, ki jo moramo rešiti numerično. Pri vsakem  $v$  obstaja več rešitev, zato lastne rodove označujemo s parom indeksov  $v$  in  $m$ , npr.  $TE_{01}$  ali  $HE_{31}$ .

### TE in TM rodovi

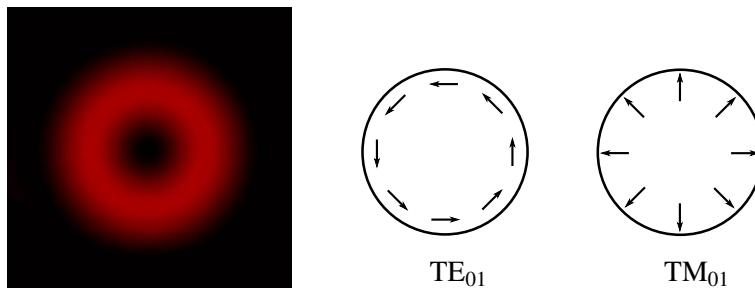
Najprej si oglejmo rešitve, pri katerih je  $v = 0$  in so tako neodvisne od kota  $\varphi$ . V klasični sliki so to žarki, ki potujejo po osi vlakna. Iz robnih pogojev sledi, da gre za transversalne TE rodove, za katere velja  $E_z = 0$ ,  $E_r = 0$  in  $E_\varphi \propto J_1(k_s r)$ . Električno poljsko jakost za TE zapišemo kot

$$\mathbf{E} \propto \mathbf{e}_\varphi J_1(k_s r). \quad (3.40)$$

Podobno lahko prepoznamo tudi TM rodove, pri katerih je  $H_z = 0$ ,  $H_r = 0$  in  $H_\varphi \propto J_1(k_s r)$ . Ustrezna električna poljska jakost za TM rodove je

$$\mathbf{E} \propto \mathbf{e}_r J_1(k_s r). \quad (3.41)$$

Amplitudi električne poljske jakosti sta za TE in TM rodove enaki, zato sta enaki tudi sliki gostote svetlobnega toka (slika 3.7). Opazimo, da je v osi vlakna gostota svetlobnega toka enaka nič, zato sklepamo, da to niso osnovni načini širjenja svetlobe po cilindričnem vlaknu.

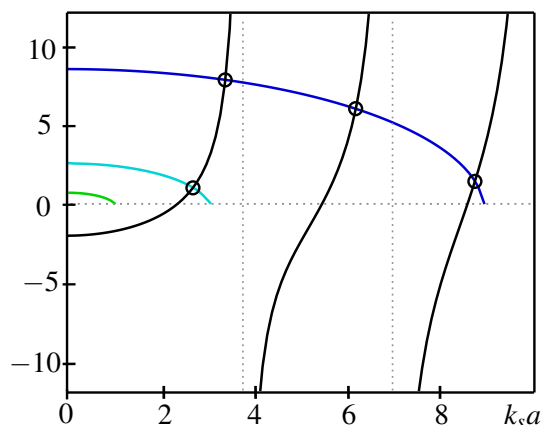


Slika 3.7: Intenziteta in smer električnega polja v vlaknu za rodova  $TE_{01}$  in  $TM_{01}$

Podobno kot smo zapisali sekularno enačbo v valovnem vodniku (enačbi 3.18 in 3.25), tudi tukaj zapišemo enačbo za dovoljene vrednosti  $k_s$ . Ob približku, da se lomna količnika sredice in plašča le malo razlikujeta, je poenostavljena enačba za TE valovanje

$$-k_s a \frac{J_0(k_s a)}{J_1(k_s a)} = \kappa a \frac{K_0(\kappa a)}{K_1(\kappa a)}, \quad (3.42)$$

pri čemer velja zveza  $\kappa^2 + k_s^2 = (NA)^2 k_0^2$ . Zaporedne rešitve enačbe ustrezajo rodovom  $TE_{0m}$ . Če želimo izračunati še valovne vektorje za rodove  $TM_{0m}$ , moramo levo stran enačbe (3.42) pomnožiti z  $(n_1/n_2)^2$ . Ker je ta faktor približno enak ena, se rešitve enačb med seboj le malo razlikujejo.



Slika 3.8: K izračunu prečnih komponent valovnega vektorja  $k_s$  v cilindričnem vlaknu za TE polarizacijo. Leva stran sekularne enačbe je narisana s črno, desna pa za tri različne vrednosti parametra  $V = k_0 a NA$ .

Zapisano sekularno enačbo rešujemo numerično, lahko pa se je lotimo grafično in na sliki (3.8) poiščemo presečišča krivulj. Na sliki je leva stran enačbe prikazana s črno barvo, desna pa za tri različne vrednosti  $V = k_0 a NA$ . Pri velikem  $V$  (modra črta) ima sistem tri rešitve, pri srednjem  $V$  (turkizna črta) eno rešitev, pri majhnem  $V$  (zelena črta) pa se krivulji ne sekata. To pomeni, da pri dovolj majhnem polmeru vlakna  $a$  TE rod ne obstaja.

Zapišimo to ugotovitev še matematično. Desna stran enačbe da realne rešitve za  $k_s a \leq V$ . Po drugi strani pa leva stran enačbe postane pozitivna šele pri  $J_0(k_s a) = 0$ , to je pri  $k_s a = 2,405$ . Da ima tak sistem vsaj eno rešitev, mora veljati  $V > 2,405$ . Polmer, pri katerem se  $TE_{01}$  (ali  $TM_{01}$ ) valovanje z dano valovno dolžino sploh širi po vlaknu, je torej navzdol omejen z

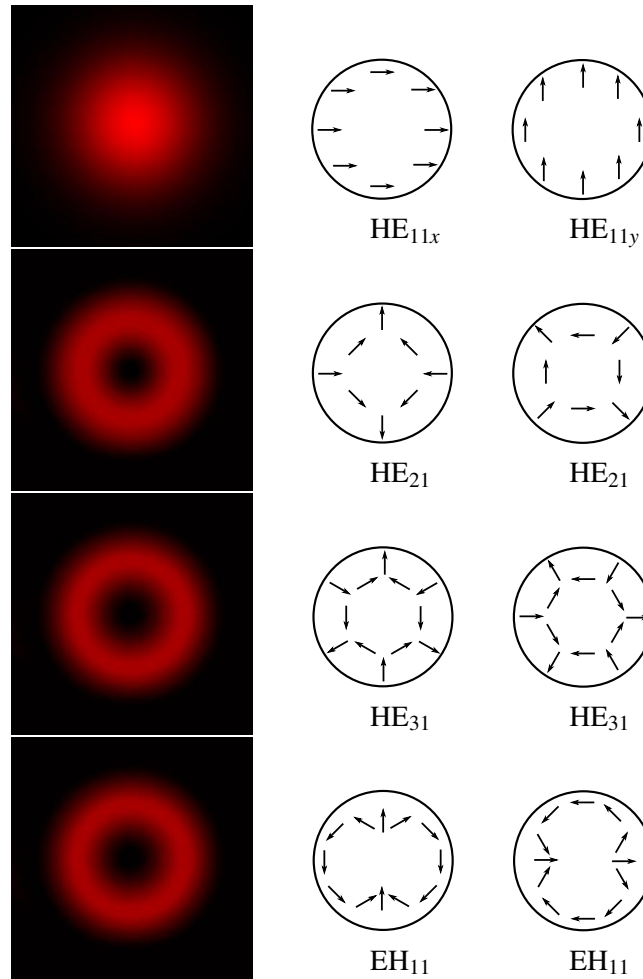
$$a \geq \frac{2,405}{k_0 NA}. \quad (3.43)$$



### Hibridni HE in EH rodovi

Poglejmo zdaj rešitve, pri katerih je  $v \neq 0$ . V tem primeru je vseh šest komponent električnega in magnetnega polja valovanja različnih od nič in vsi rodovi imajo tudi komponento v smeri  $z$ . Take rodove imenujemo hibridni rodovi in jih označimo s HE, če je  $E_z$  razmeroma velik ali vsaj primerljiv z  $E_r$  in  $E_\phi$ , oziroma z EH, če je  $H_z$  po velikosti primerljiv s  $H_r$  in  $H_\phi$  ali večji od njiju.

Sekularna enačba za hibridne rodove je precej bolj zapletena in je ne bomo zapisali. Oglejmo si le njihovo obliko (slika 3.9). Najpomembnejši hibridni rod je  $HE_{11}$ , ki je sorazmeren z  $J_0(k_s r)$  in zato v središču različen od nič. To je osnovni rod, za katerega rešitev sekularne enačbe vedno obstaja in se zato širi po še tako tankem vlaknu.



Slika 3.9: Intenziteta in smer električnega polja v vlaknu za rodove  $HE_{11}$ ,  $HE_{21}$ ,  $HE_{31}$  in  $EH_{11}$

Po obliki je osnovni  $HE_{11}$  rod zelo podoben Gaussovemu profilu  $\exp(-r^2/w^2)$ , zato ga lahko razmeroma dobro opišemo z Gaussovim približkom. Pri tem efektivni polmer snopa  $w$  izračunamo po Marcusejevi formuli<sup>4</sup>

$$w = (0,65 + \frac{1,619}{V^{3/2}} + \frac{2,879}{V^6})a, \quad (3.44)$$

pri čemer je  $V = k_0 a N A$ . Podobnost profila osnovnega  $HE_{11}$  roda z Gaussovo funkcijo omogoča zelo dobro sklopitev Gaussovih snopov, ki izhajajo iz laserja, v cilindrična vlakna.

<sup>4</sup>D. Marcuse, Bell Syst. Tech. J. 56, 703 (1977).

Na sliki (3.9) je poleg osnovnega  $HE_{11}$  roda še nekaj primerov višjih rodov. Opazimo, da imajo vsi rodovi, razen osnovnega, v osi vlakna minimum. Poleg tega opazimo tudi podobnost med oblikami posameznih rodov, do katere pride zaradi majhne razlike med lomnima količnikoma sredice in plašča ( $n_1 \approx n_2$ ). V takem primeru se sekularne enačbe poenostavijo, nekateri rodovi so med seboj degenerirani in dajo enako rešitev. Poleg rodov z enako obliko in različno polarizacijo so tako med seboj degenerirani še  $HE_{v+1,m}$  in  $EH_{v-1,m}$  rodovi. Degenerirane rodove lahko združimo v linearne kombinacije teh valov in nastanejo pretežno linearno polarizirani LP rodovi.

### LP rodovi

Za praktično uporabo so najpomembnejši linearno polarizirani (LP) rodovi. Taki rodovi niso točne rešitve valovne enačbe v cilindrični geometriji, ampak jih zapišemo kot linearno kombinacijo lastnih rodov, ki so zaradi majhne razlike med lomnima količnikoma sredice in plašča degenerirani. Tudi te rodove označimo z dvema indeksoma: prvi določa število azimutalnih vozlov, drugi pa število radialnih vrhov. Poglejmo nekaj primerov (slika 3.10).

Osnovni  $LP_{01}$  je kar približno enak osnovnemu  $HE_{11}$  rodu. Električna poljska jakost je

$$\mathbf{E}_{LP01} \propto \begin{Bmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \end{Bmatrix} J_0(k_s a), \quad (3.45)$$

saj ima dve možni smeri polarizacije. Na splošno so  $LP_{0m}$  zelo podobni rodovom  $HE_{1m}$ .

Višje rodove, na primer  $LP_{11}$  sestavimo kot linearno kombinacijo  $TE_{01}$  ali  $TM_{01}$  in  $HE_{21}$ . Električna poljska jakost v  $LP_{11}$  je tako

$$\mathbf{E}_{LP11} \propto \begin{Bmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \end{Bmatrix} J_1(k_s a) \begin{Bmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{Bmatrix}, \quad (3.46)$$

kar opisuje štiri različne oblike rodov  $LP_{11}$ .

Tudi  $LP_{21}$  rodovi, ki nastanejo kot kombinacija  $HE_{31}$  in  $EH_{11}$  rodov, imajo štiri oblike

$$\mathbf{E}_{LP21} \propto \begin{Bmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \end{Bmatrix} J_2(k_s a) \begin{Bmatrix} \cos 2\varphi \\ \sin 2\varphi \end{Bmatrix}. \quad (3.47)$$

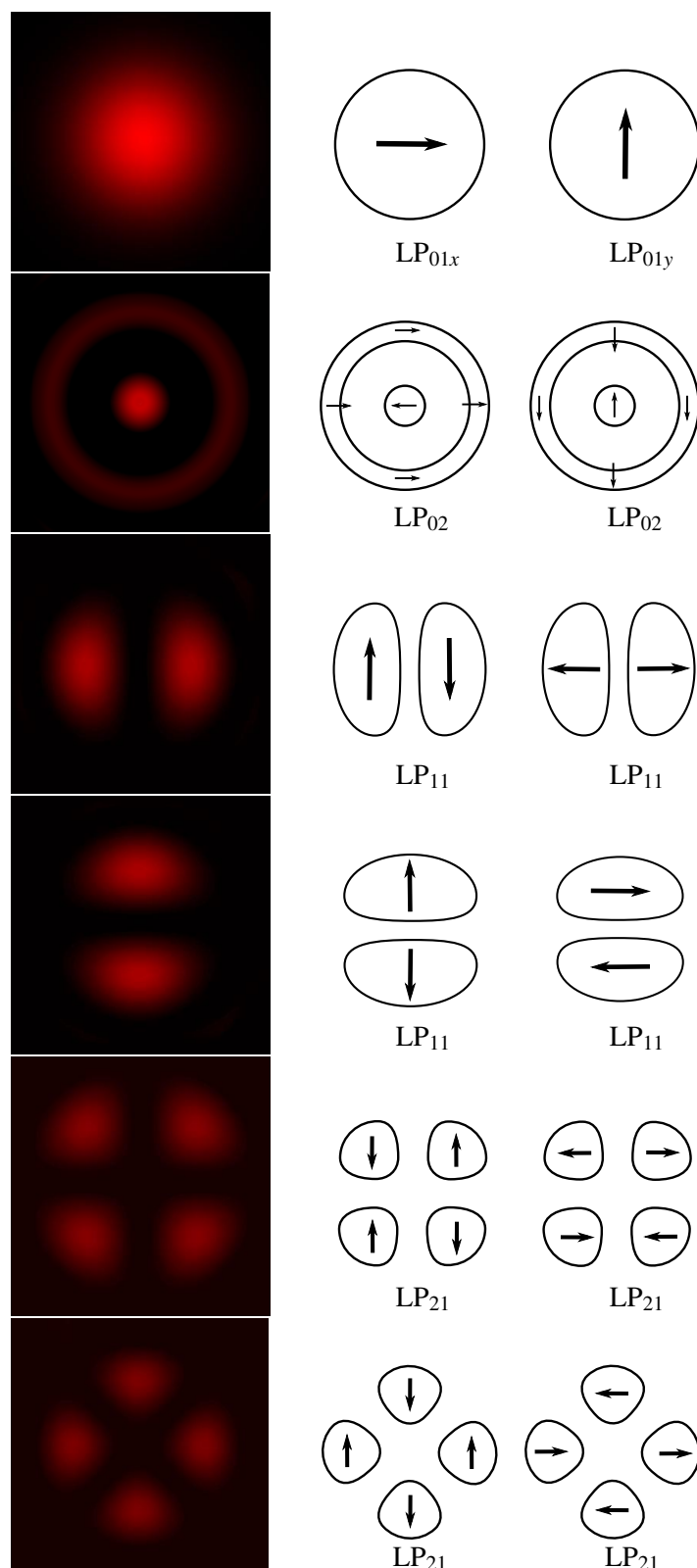
Linearno polarizirani LP rodovi imajo precejšnjo uporabno vrednost. To so namreč rodovi, ki jih v vlaknu vzbudimo, ko nanj posvetimo s polarizirano lasersko svetlobo. Zavedati pa se moramo, da to niso lastni rodovi vlakna, ampak njihove linearne kombinacije, ki po vlaknu potujejo z malenkost različnimi hitrostmi. Polarizacija svetlobe se zato vzdolž vlakna ne ohranja povsem.



Število rodov v večrodovnem cilindričnem vlaknu pri izbrani normirani frekvenci  $V = k_0 a N A$  lahko približno ocenimo z uporabo asimptotičnega razvoja Besslovih funkcij za velike argumente. Približna ocena vključuje vse dovoljene rešitve pri vsaki vrednosti  $v$  in dve polarizaciji. To vodi do rezultata

$$N = \frac{4V^2}{\pi^2}. \quad (3.48)$$

V vlaknu s polmerom sredice  $20 \mu\text{m}$  in numerično aperturo  $0,2$  se tako pri valovni dolžini  $1 \mu\text{m}$  lahko širi 256 rodov.



Slika 3.10: Intenziteta in smer električnega polja v vlaknu za približno linearne rodove LP<sub>01</sub>, LP<sub>02</sub>, LP<sub>11</sub> in LP<sub>21</sub>.

### Cilindrično vlakno s parabolničnim profilom lomnega količnika

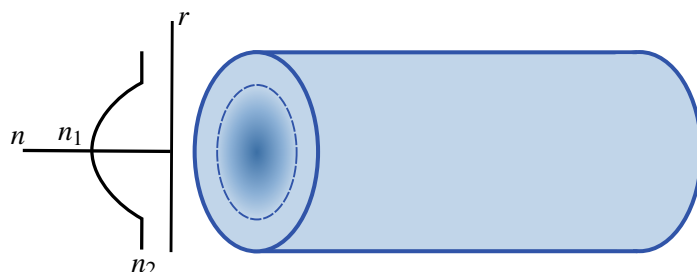
Čeprav je račun lastnih načinov v cilindričnem vlaknu zapleten, lahko razmeroma enostavno poiščemo rešitve za vlakno, v katerem je dielektrična konstanta kvadratna funkcija radialne koordinate  $r$ .

$$\varepsilon(r) = \varepsilon_1 - Cr^2, \quad (3.49)$$

pri čemer je sprememba navadno majhna. Zapišemo še enačbo z lomnimi količniki in vpeljemo brezdimenzijski parameter  $\Delta$

$$n^2(r < a) = n_1^2 - \Delta^2 \frac{r^2}{a^2}, \quad (3.50)$$

pri čemer  $a$  označuje polmer sredice vlakna. Enačbo lahko tudi razvijemo za majhno razliko  $\Delta$  in za vse smiselne vrednosti  $r$  ima tudi lomni količnik parabolni profil. Parabolna sredica je seveda omejena, okoli nje pa je plašč s konstantnim lomnim količnikom  $n_2 \approx n_1 - \Delta^2/2n_1$  (slika 3.11). Tipičen polmer sredice  $a$  je nekaj deset mikrometrov, plašča pa približno petkrat toliko.



Slika 3.11: Parabolni profil lomnega količnika sredice zmanjša disperzijo v vlaknu. Plašč je praviloma bistveno debelejši od sredice vlakna.

Električno poljsko jakost za izbrano polarizacijo zapišemo v obliki

$$E = E_0 \psi(x, y) e^{i\beta z - i\omega t}. \quad (3.51)$$

Pri tem smo zanemarili, da zaradi odvisnosti od prečnih koordinat in pogoja  $\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$  polje ne more imeti povsod iste smeri; za bolj natančen račun bi morali zapisati enačbo za vektorsko polje. Vstavimo približni nastavek (enačba 3.51) in krajevno odvisnost lomnega količnika (enačba 3.50) v valovno enačbo (enačba ??)

$$\nabla_{\perp}^2 \psi + \left[ k_0^2 \left( n_1^2 - \Delta^2 \frac{r^2}{a^2} \right) - \beta^2 \right] \psi = 0. \quad (3.52)$$

Rešitve lahko zapišemo v obliki

$$\psi(x, y) = X(x)Y(y), \quad (3.53)$$

od koder sledita dve neodvisni enačbi

$$X'' - \frac{k_0^2 \Delta^2}{a^2} X x^2 - \lambda_1 X = 0 \quad \text{in} \quad Y'' - \frac{k_0^2 \Delta^2}{a^2} Y y^2 - \lambda_2 Y = 0, \quad (3.54)$$

pri čemer sta  $\lambda_1$  in  $\lambda_2$  konstanti. Opazimo, da sta enačbi popolnoma enaki enačbama za krajevni del lastnih funkcij harmonskega oscilatorja v kvantni mehaniki. Rešitev posamezne enačbe je tako produkt Gaussove in Hermitove funkcije

$$X_n(x) = e^{-\xi^2 x^2 / 2} H_n(\xi x), \quad (3.55)$$

pri čemer je  $\xi = \sqrt{k_0 \Delta / a}$ .

**Naloga 3.3.1** Uporabi nastavek (enačba 3.55) in pokaži, da reši enačbo (3.54). Pri tem si pomagaj z diferencialno enačbo za Hermitove polinome

$$\left( \frac{d^2}{dx^2} - 2x \frac{d}{dx} + 2n \right) H_n(x) = 0. \quad (3.56)$$

Lastne vrednosti enačbe so oblike

$$\beta_{mn}^2 = n_1^2 k_0^2 \left( 1 - \frac{2\Delta}{k_0 n_1^2 a} (m+n+1) \right). \quad (3.57)$$

Drugi člen v oklepaju je navadno zelo majhen, zato lahko izraz razvijemo in

$$\beta_{mn} = n_1 k_0 \left( 1 - \frac{\Delta}{k_0 n_1^2 a} (m+n+1) \right) = n_1 k_0 - \frac{\Delta(m+n+1)}{n_1 a}. \quad (3.58)$$

Ob privzetku, da je parameter  $\Delta$  neodvisen od krožne frekvence, je grupna hitrost

$$v_g = \left( \frac{d\beta_{mn}}{d\omega} \right)^{-1} = \frac{c_0}{n_1} \quad (3.59)$$

in torej enaka za vse rodove. To je pomembna značilnost vlakna s paraboličnim profilom lomnega količnika. V dejanskem vlaknu je seveda taka odvisnost mogoča le v omejenem območju sredice, zato je tudi gornja analiza le približna in velja dobro za tiste rodove, ki se ne raztezajo dosti izven sredice.

Neodvisnost grupne hitrosti od roda je praktično zelo pomembna. Grupna hitrost namreč določa čas potovanja svetlobnega sunka, ki lahko predstavlja en bit informacije. Če se po vlaknu širi več rodov z različnimi grupnimi hitrostmi, se sunek po prehodu skozi vlakno razširi, kar – kot bomo podrobneje videli v naslednjem razdelku – omejuje uporabno dolžino vlakna. Temu se sicer lahko izognemo z uporabo enorodovnih vlaken, ki pa so dražja, poleg tega morata divergenca in polmer svetlobnega snopa natančno ustrezati značilnostim enorodovnega vlakna, da se izognemo izgubam. Zato se za krajše povezave (do nekaj 100 m) uporabljajo večrodovna vlakna, ki imajo sredico s približno paraboličnim profilom lomnega količnika.

### 3.4 Disperzija

Pri prenosu velike količine podatkov na daljavo je zelo pomembno, da se oblika svetlobnih sunkov, ki prenašajo informacijo, čim bolj ohranja. Na obliko sunka močno vpliva disperzija, to je odvisnost fazne in grupne (skupinske) hitrosti valovanja od krožne frekvence. Zaradi disperzije se kratki sunki, ki potujejo po vlaknu, podaljšajo in tako omejujejo količino informacije, ki jo lahko prenašamo po vlaknu dane dolžine. Največja količina vhodnih podatkov na časovno enoto je kar obratno sorazmerna z dolžino izhodnih sunkov svetlobe.



Slika 3.12: Zaradi disperzije se sunki svetlobe, ki potujejo skozi vlakno, podaljšajo, zato jih na izhodu iz vlakna ne moremo več ločiti.

Pri potovanju svetlobe po optičnih vlaknih poznamo tri vrste disperzije: rodovno, materialno in valovodno. V večrodovnih vlaknih je povsem prevladujoča rodovna disperzija, ki je posledica dejstva, da se različni rodovi po vlaknu širijo z različnimi hitrostmi. V enorodovnih vlaknih rodovne disperzije ni, zato prideta do izraza materialna disperzija, ki se pojavi zaradi odvisnosti lomnega količnika vlakna od valovne dolžine svetlobe, in valovodna disperzija, ki se pojavi zaradi nelinearne zveze med valovnim številom  $\beta$  in krožno frekvenco valovanja.

### Rodovna disperzija

Na primeru planparalelnega vodnika smo pokazali, da vsaki rešitvi sekularnih enačb (enačbi 3.18 in 3.25) ustreza en lastni rod v vlaknu. Ker se vrednosti  $k_x$  za različne rodove med seboj razlikujejo in so posledično vrednosti  $\beta$  za vsak rod drugačne, se posamezni rodovi po vlaknu širijo z različnimi hitrostmi. Kratek sunek svetlobe, sestavljen iz več različnih rodov, se tako po prehodu skozi vlakno razdeli na posamezne delne sunke oziroma se efektivno podaljša. Izračunajmo razliko med časom, ki ga za širjenje po vlaknu dane dolžine potrebuje osnovni rod, in časom, ki ga za isto razdaljo potrebuje zadnji še dovoljeni rod.

Osnovni rod določa prva rešitev sekularne enačbe in je zato pripadajoča vrednost  $k_x$  zelo majhna oziroma v približku  $k_s \approx 0$ . Ustrezno valovno število je po enačbi

$$\beta = \sqrt{\left(\frac{\omega}{c_0}\right)^2 n_1^2 - k_x(\omega)^2} \quad (3.60)$$

kar približno enako  $\beta_0 \approx k_0 n_1$ . Za zadnji še dovoljeni rod velja  $k_x a \approx V$  in  $\beta_N \approx k_0 n_2$ , pri čemer je  $n_2$  lomni količnik plašča. Zapišemo še grupno hitrost, s katero potujejo sunki svetlobe po vlaknu

$$v_g = \frac{d\omega}{d\beta} = \left(\frac{d\beta}{d\omega}\right)^{-1}. \quad (3.61)$$

Za prehod vlakna z dolžino  $L$  potrebuje osnovni rod

$$t_0 = \frac{L}{v_{g0}} = L \frac{d\beta_0}{d\omega} = L \frac{n_1}{c_0}, \quad (3.62)$$

zadnji rod pa

$$t_N = \frac{L}{v_{gN}} = L \frac{d\beta_N}{d\omega} = L \frac{n_2}{c_0}. \quad (3.63)$$

Podaljšanje sunka zaradi rodovne disperzije je potem

$$\tau \approx \frac{L}{c_0} (n_1 - n_2). \quad (3.64)$$

Največja frekvenca modulacije vhodnega signala, pri kateri izhodne sunke še zaznamo ločeno, je približno obratno sorazmerna z dolžino izhodnih sunkov. Za 1 km dolgo vlakno z  $\Delta n = 0,05$  je tako modulatorska frekvenca oziroma količina podatkov v časovni enoti le okoli 10 MHz. Čeprav lahko disperzijo zmanjšamo s paraboličnim profilom lomnega količnika, so večrodovna vlakna za prenos podatkov na dolge razdalje praktično neuporabna.



Med rodovno disperzijo uvrščamo tudi polarizacijsko disperzijo, do katere pride zaradi različnih hitrosti valovanj z različnima polarizacijama. V idealnem cilindričnem vlaknu potujeta obe polarizaciji z enako hitrostjo. V realnem vlaknu pa pride na nečistočah in asimetrijah v vlaknu do različnih hitrosti za različni polarizaciji. Ker so nečistoče slučajno in neodvisno razporejene, tako disperzijo zelo težko odpravimo.

### Materialna disperzija

Optična vlakna so navadno narejena iz stekla, katerega lomni količnik je odvisen od valovne dolžine svetlobe. Zaradi tako imenovane materialne disperzije različne spektralne komponente svetlobnega sunka po vlaknu potujejo z različnimi hitrostmi in sunek se po prehodu skozi vlakno podaljša. Pri obravnavi se omejimo na enorodovna vlakna, v katerih rodovne disperzije ni.

Ker je sunek svetlobe končno dolg, je končna tudi njegova spektralna širina  $\Delta\lambda = \lambda_{\max} - \lambda_{\min}$ . Dolžino sunka  $\tau$  po prehodu skozi vlakno dolžine  $L$  približno zapišemo kot

$$\tau = \frac{dt}{d\lambda} \Delta\lambda = \Delta\lambda \frac{d}{d\lambda} \left( \frac{L}{v_g} \right) = \Delta\lambda \frac{d}{d\lambda} \left( L \frac{d\beta}{d\omega} \right). \quad (3.65)$$

Za enorodovno vlakno velja  $k_x \approx 0$  in  $\beta \approx n_1 \omega / c_0$ , pri čemer valovodne disperzije zaenkrat ne upoštevamo. Velja

$$\frac{d\beta}{d\omega} = \frac{n_1}{c_0} + \frac{\omega}{c_0} \frac{dn_1}{d\omega} = \frac{n_1}{c_0} - \frac{\lambda}{c_0} \frac{dn_1}{d\lambda}, \quad (3.66)$$

od koder sledi

$$\tau = \Delta\lambda L \left( -\frac{\lambda}{c_0} \frac{d^2 n_1}{d\lambda^2} \right). \quad (3.67)$$

Če vpeljemo  $D_m$  kot koeficient materialne disperzije

$$D_m = -\frac{\lambda}{c_0} \frac{d^2 n_1}{d\lambda^2}, \quad (3.68)$$

zapišemo dolžino sunka po prehodu skozi vlakno kot

$$\tau = |D_m| L \Delta\lambda. \quad (3.69)$$

Koeficient disperzije navadno izrazimo v enotah ps/nmkm, njegova vrednost pa je lahko pozitivna ali negativna, zato smo v končnem izrazu za dolžino sunka dodali absolutno vrednost. V snoveh, ki jih uporabljamo za izdelavo optičnih vlaken, je  $D_m \sim 10$  ps/nmkm, lahko pa seže tudi do več 100 ps/nmkm, odvisno seveda od valovne dolžine in izbrane snovi.

Materialno disperzijo lahko zmanjšamo na več načinov. Lahko uporabimo čim bolj enobarven vir svetlobe, da zmanjšamo  $\Delta\lambda$ . Za izbrano snov lahko celo izberemo valovno dolžino, pri kateri je koeficient materialne disperzije enak nič. Za  $\text{SiO}_2$  je to pri okoli 1300–1500 nm, odvisno od dopiranja stekla. Še najbolj uporabna je rešitev, pri kateri z materialno disperzijo izničimo vpliv valovodne disperzije in na ta način zmanjšamo skupno disperzijo v vlaknu.

### Valovodna disperzija

Spomnimo se, da v optičnem vodniku velja nelinearna zveza med prečno ( $k_x$ ) in vzdolžno ( $\beta$ ) komponento valovnega vektorja (enačba 3.60). Pri tem  $k_x$  izračunamo numerično iz sekularne enačbe, rešitev pa je odvisna od valovne dolžine svetlobe. Tudi v cilindričnih vlaknih je valovno število  $\beta$  nelinearna funkcija krožne frekvence, zato pride do disperzije. Izhajamo iz zveze (enačba 3.65)

$$\tau = \frac{dt}{d\lambda} \Delta\lambda = \Delta\lambda \frac{d}{d\lambda} \left( L \frac{d\beta}{d\omega} \right). \quad (3.70)$$

Upoštevamo zvezo med valovno dolžino in krožno frekvenco in za podaljšanje začetnega kratkega sunka dobimo

$$\tau = -\frac{\lambda^2}{2\pi c_0} \frac{d^2\beta}{d\lambda^2} L \Delta\lambda. \quad (3.71)$$

Ko vpeljemo  $D_v$  kot koeficient valovodne disperzije

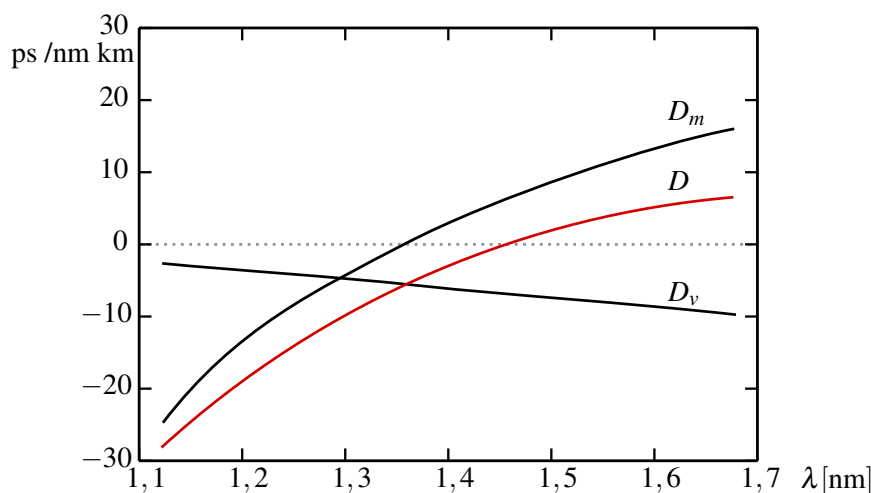
$$D_v = -\frac{\lambda^2}{2\pi c_0} \frac{d^2\beta}{d\lambda^2}, \quad (3.72)$$

se izraz za dolžino sunka poenostavi v

$$\tau = |D_v| L \Delta\lambda. \quad (3.73)$$

Koeficient valovodne disperzije je praviloma najmanjši,  $D_v \sim 1\text{--}10$  ps/nm km. Znatno postane v enorodovnih vlaknih v območju, kjer je materialna disperzija zelo majhna ali celo enaka nič. V vlaknih s homogeno sredico se valovodni disperziji ne moremo izogniti, lahko pa jo pri dani valovni dolžini približno izničimo z materialno (slika 3.13).

Ker ima sunek svetlobe vedno neko končno spektralno širino, disperzije v optičnem vlaknu nikoli ne moremo povsem odpraviti. Pri celotni disperziji 5 ps/nm km in spektralni širini 1 nm znaša v 100 km dolgem vlaknu najvišja frekvenca modulacije vhodnega signala, ki ga na izhodu še lahko razločimo, okoli 2 GHz. V nadaljevanju bomo videli, da je pri prenosu podatkov v vlaknih poglavitni omejujoči faktor ravno disperzija in ne absorpcija.



Slika 3.13: Odvisnost koeficientov disperzije od valovne dolžine v  $\text{SiO}_2$  vlaknu.  $D_m$  je koeficient materialne disperzije,  $D_v$  valovodne,  $D$  pa je vsota obeh. Pri valovni dolžini okoli 1450 nm se materialna in valovodna disperzija odštejeta in skupna disperzija je praktično enaka nič.

★ Na valovodno disperzijo je mogoče vplivati tudi s konstrukcijo vlakna. Pokazali smo že, da v idealnem primeru v vlaknu s paraboličnim profilom lomnega količnika disperzije ni. V praksi je sredica sestavljena iz več plasti z različnimi lomnimi količniki in različnimi debelinami, s čimer se prispevek valovodne disperzije spremeni. Na ta način lahko položaj ničle celotne disperzije premaknemo k valovni dolžini izvora oziroma k valovni dolžini, pri kateri je v vlaknu najmanj absorpcije in izgub.



### 3.5 \*Potovanje kratkega sunka po enorodovnem vlaknu

#### Podaljšanje sunka zaradi disperzije

Poglejmo si podrobneje, kako po enorodovnem vlaknu ali drugem sredstvu z disperzijo potuje kratek sunek valovanja z dano začetno obliko. Sinek zapišemo kot

$$E(x, y, z, t) = \psi(x, y) a(z, t), \quad (3.74)$$

kjer je  $\psi(x, y)$  lastna rešitev prečnega dela valovne enačbe, ki določa zvezo  $\beta(\omega)$ . Funkcija  $a(z, t)$  opisuje obliko in potovanje sunka v smeri  $z$ . Pri  $z = 0$  jo razvijemo po krožnih frekvencah z ustreznimi amplitudnimi faktorji

$$a(0, t) = \int \tilde{A}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega. \quad (3.75)$$

Ko sunek potuje vzdolž osi  $z$ , vsaki komponenti pripišemo ustrezen fazni faktor  $i\beta(\omega)z$ . Tako velja

$$a(z, t) = \int \tilde{A}(\omega) e^{i\beta(\omega)z - i\omega t} d\omega. \quad (3.76)$$

Osnovni sunek naj bo približno monokromatičen s krožno frekvenco  $\omega_0$ , kar pomeni, da je mnogo daljši od optične periode. Potem lahko  $\beta(\omega)$  razvijemo okoli  $\omega_0$ , pri čemer vpeljemo razliko krožnih frekvenc  $\Omega = \omega - \omega_0$

$$\beta(\omega_0 + \Omega) \approx \beta(\omega_0) + \frac{d\beta}{d\omega} \Omega + \frac{1}{2} \frac{d^2\beta}{d\omega^2} \Omega^2 = \beta(\omega_0) + \beta' \Omega + \frac{1}{2} \beta'' \Omega^2. \quad (3.77)$$

Enačbo (3.76) prepišemo v

$$a(z, t) = \int \tilde{A}(\Omega) e^{i\beta(\omega_0 + \Omega)z - i(\omega_0 + \Omega)t} d\Omega = e^{i\beta(\omega_0)z - i\omega_0 t} A(z, t). \quad (3.78)$$

Funkcija  $A(z, t)$  predstavlja prostorsko in časovno odvisnost ovojnice sunka. Z upoštevanjem razvoja (enačba 3.77) jo zapišemo kot

$$A(z, t) = \int \tilde{A}(\Omega) \exp\left(i\beta' \Omega z + \frac{i}{2} \beta'' \Omega^2 z - i\Omega t\right) d\Omega. \quad (3.79)$$

Odvajajmo ovojnicu najprej po  $z$

$$\frac{\partial A(z, t)}{\partial z} = \int \tilde{A}(\Omega) \left(i\beta' \Omega + \frac{i}{2} \beta'' \Omega^2\right) \exp\left(i\beta' \Omega z + \frac{i}{2} \beta'' \Omega^2 z - i\Omega t\right) d\Omega, \quad (3.80)$$

nato pa še enkrat

$$\frac{\partial A(z, t)}{\partial t} = \int \tilde{A}(\Omega) (-i\Omega) \exp\left(i\beta' \Omega z + \frac{i}{2} \beta'' \Omega^2 z - i\Omega t\right) d\Omega \quad (3.81)$$

in dvakrat parcialno po  $t$

$$\frac{\partial^2 A(z, t)}{\partial t^2} = \int \tilde{A}(\Omega) (-\Omega^2) \exp\left(i\beta' \Omega z + \frac{i}{2} \beta'' \Omega^2 z - i\Omega t\right) d\Omega. \quad (3.82)$$

Primerjamo izračunane odvode in dobimo enačbo

$$\frac{\partial A(z, t)}{\partial z} = -\beta' \frac{\partial A}{\partial t} - \frac{i}{2} \beta'' \frac{\partial^2 A}{\partial t^2}. \quad (3.83)$$

Enačbo lahko nekoliko poenostavimo z vpeljavo novih neodvisnih spremenljivk

$$\begin{aligned}\tau &= t - \beta' z \quad \text{in} \\ \zeta &= z.\end{aligned}\tag{3.84}$$

Uporabimo verižno pravilo odvajanja in dobimo

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial \tau} (-\beta') + \frac{\partial}{\partial \zeta}\tag{3.85}$$

in

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \tau}.\tag{3.86}$$

Z novima spremenljivkama se enačba (3.83) prepiše v

$$\beta'' \frac{\partial^2 A}{\partial \tau^2} - 2i \frac{\partial A}{\partial \zeta} = 0.\tag{3.87}$$

Poglejmo enačbo podrobneje. Če ni disperzije in je  $\beta'' = 0$ , se  $A$  vzdolž koordinate  $\zeta$  ne spreminja. To pomeni, da se oblika sunka ob odsotnosti disperzije ohranja in sunek poljubne začetne oblike nepopačen potuje po vlaknu z grupno hitrostjo  $1/\beta'$ .

Če je disperzija različna od nič, ostaneta v enačbi oba člena. Opazimo, da ima enačba enako obliko kot obosna valovna enačba, ki smo jo v drugem poglavju uporabili za obravnavo koherentnih snopov (enačba ??). Razlika med obosno valovno enačbo in enačbo (3.87) je v tem, da vlogo prečne koordinate prevzame čas  $\tau$ . To, kar je bila prej širina snopa, je zdaj torej dolžina sunka. Spomnimo se, da obosno valovno enačbo rešijo Gaussovi snopi (enačba ??).



Podobnost med pojavoma seže dlje od formalne oblike. Pri snopih, ki so omejeni v prečni smeri, disperzija fazne in grupne hitrosti po prečnih komponentah valovnega vektorja povzroča spreminjanje prečnega preseka snopa. Pri časovno omejenih sunkih v sredstvu s frekvenčno disperzijo se namesto preseka sunka spreminja njegova vzdolžna oblika oziroma njegova dolžina.

Celotnega računa ni treba ponavljati, namesto tega kar v izrazu za Gaussove snope (enačba ??) napravimo ustrezno zamenjavo spremenljivk. Iz enačbe (3.87) razberemo, da valovnemu številu  $k$  pri snopih ustreza parameter  $\mu = (d^2\beta/d\omega^2)^{-1}$ . Poleg tega vpeljemo dolžino sunka  $\sigma$ , ki ustreza polmeru Gaussovega snopa  $w$ , in parameter  $b$ , ki ustreza krivinskemu radiju  $R$ . Oba parametra sta seveda odvisna od  $\zeta$ , tako kot sta parametra  $w$  in  $R$  odvisna od  $z$ .

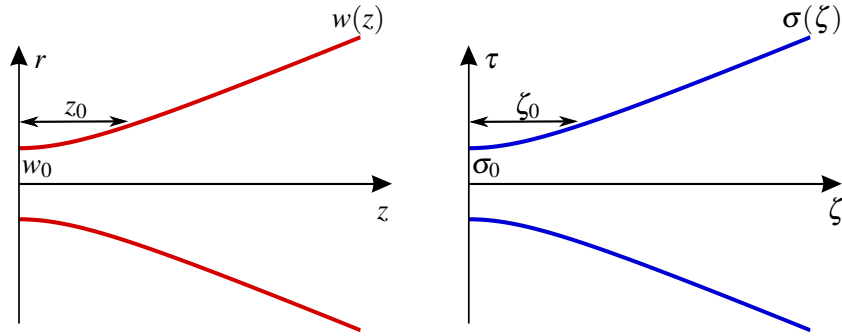
Na podlagi analogije zapišemo obliko podaljšanega Gaussovega sunka

$$A(\zeta, \tau) = \frac{A_0}{\sqrt{1 + \frac{\zeta^2}{\zeta_0^2}}} \exp\left(-\frac{\tau^2}{\sigma^2}\right) \exp\left(-i\frac{\mu\tau^2}{2b}\right) e^{i\phi(\zeta)}.\tag{3.88}$$

Pri tem za dolžino sunka  $\sigma$  velja enaka zveza kot za polmer Gaussovega snopa (enačba ??)

$$\sigma^2 = \sigma_0^2 \left(1 + \left(\frac{\zeta}{\zeta_0}\right)^2\right).\tag{3.89}$$

Tu je  $\sigma_0$  trajanje sunka pri  $\zeta = 0$ , to je na začetku, kjer je sunek najkrajši. Krivinskemu radiju valovnih front (enačba ??) v tem primeru ustreza količina  $b = \zeta (1 + \zeta_0^2/\zeta^2)$ . Po analogiji s snopi lahko sklepamo, da se najmanj podaljšuje ravno sunek z Gaussovo časovno odvisnostjo.



Slika 3.14: Primerjava širitve Gaussovega snopa in podaljšanja Gaussovega sunka

Zanimivo je pogledati odvod faze po  $\tau$ , ki predstavlja spremembo krožne frekvence glede na centralno krožno frekvenco sunka  $\omega_0$

$$\omega - \omega_0 = \frac{\mu \tau}{b}. \quad (3.90)$$

Za pozitivne vrednosti  $\mu$  je krožna frekvenca na začetku sunka, to je pri  $\tau < 0$ , manjša od  $\omega_0$ , z naraščajočim časom pa se linearno povečuje proti koncu sunka. Obnašanje je torej podobno črikanju, ki ga poznamo iz nelinearne optike (slika ?? a).

★ Pri  $\zeta = 0$  je sunek najkrajši možen pri dani spektralni širini. Lahko si mislimo, da je sunek najkrajši, to je omejen s Fourierovo transformacijo spektra, kadar se vse frekvenčne komponente seštevajo z isto fazo, to je pri  $\zeta = 0$ . Da nastanejo najkrajši sunki, kadar je faza vseh delnih valov enaka, smo spoznali že pri fazno uklenjenih sunkih iz večfrekvenčnih laserjev (poglavje 2.9). Pri potovanju sunka se zaradi disperzije faze frekvenčnih komponent različno spreminjajo in sunek se podaljša. Pri tem je pomemben drugi odvod valovnega števila po krožni frekvenci. Linearno spreminjanje faze namreč ne povzroči razširitve, temveč le spremembo v grupni in fazni hitrosti.

**Naloga 3.5.1** Naj bo vpadni sunek svetlobe Gaussove oblike  $E(x, y, z = 0, t) = \psi(x, y)e^{-at^2 - i\omega_0 t}$ . Pokaži, da je ustrezna funkcija  $\tilde{A}(\Omega)$  oblike

$$\tilde{A}(\Omega) = \frac{1}{\sqrt{4\pi a}} e^{-\Omega^2/4a}. \quad (3.91)$$

Nato vpelji novi spremenljivki  $\tau$  in  $\zeta$  in z neposredno integracijo (enačba 3.79) pokaži, da je podaljšan sunek pri  $z \neq 0$  enak ovojnic, zapisani z enačbo (3.88), pri čemer je

$$\zeta_0 = \frac{\mu}{2a}. \quad (3.92)$$

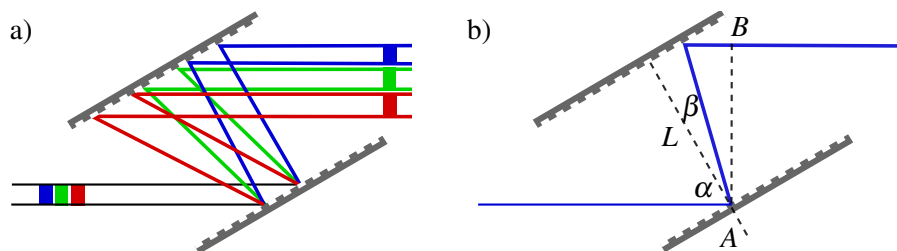
**Naloga 3.5.2** Uporabi enačbo (3.89) in pokaži, da je podaljšanje Gaussovega sunka svetlobe oblike  $I \propto \exp(-2\tau^2/\sigma^2)$  pri dani dolžini vlakna enako

$$\sigma(L) = \sigma_0 \sqrt{1 + \left( \frac{2L}{\sigma_0^2 \mu} \right)^2} \quad (3.93)$$

in za velike dolžine enako izrazu, ki smo ga izračunali pri valovodni disperziji (enačba 3.73).

### Kompenzacija disperzije

Razširitev sunka zaradi pozitivne disperzije je pri  $\mu > 0$  mogoče kompenzirati s parom vzporednih uklonskih mrežic, kot kaže slika (3.15). Prva mrežica različne frekvenčne komponente razkloni, druga pa ponovno zbere, vendar so pri tem dolžine optičnih poti za različne komponente različno dolge. Pokazali bomo, da je celoten učinek enak kot pri razširjanju sunka po sredstvu z negativno disperzijo. Vzporednost uklonskih mrežic zagotavlja vzporednost izhodnih žarkov, vendar so različne komponente vpadne svetlobe med seboj razmaknjene (slika 3.15 a). V praksi zato uporabimo ali dva para uklonskih mrežic ali pa zrcalo, ki svetlobo usmeri po isti poti nazaj.



Slika 3.15: Kompenzacija disperzije z uklonskima mrežicama (a) in shema z oznakami (b).

Naj na par vzporednih uklonskih mrežic vпада ravni val pod kotom  $\alpha$ , odbije pa naj se pod kotom  $\beta = \beta(\omega)$  (slika 3.15 b). Pot, ki jo prepotuje žarek od vpada na mrežico do izhoda iz sistema (med točkama A in B), je enaka

$$P = \frac{L}{\cos \beta} (1 + \cos(\alpha + \beta)). \quad (3.94)$$

Zaradi uklona velja zveza  $\sin \alpha - \sin \beta = \lambda / \Lambda$ , pri čemer je  $\lambda$  valovna dolžina svetlobe,  $\Lambda$  pa perioda uklonske mrežice. Pri fazi moramo upoštevati še fazni premik na drugi mrežici

$$\Phi_m = \frac{2\pi}{\Lambda} L \tan \beta = qL \tan \beta. \quad (3.95)$$

Celotna sprememba faze je tako  $\Phi = \omega P / c + \Phi_m$ .

**Naloga 3.5.3** Pokaži, da je drugi odvod faze po kotni frekvenci enak

$$\frac{d^2 \Phi}{d\omega^2} = - \frac{L c q^2}{\sqrt{\omega^2 - (\omega \sin \alpha - c q)^2}^{3/2}}. \quad (3.96)$$

Račun v nalogi (3.5.3) pokaže, da je disperzija, ki je določena z drugim odvodom faze po kotni hitrosti (enačba 3.96), vedno negativna. Par vzporednih uklonskih mrežic torej deluje kot sredstvo z negativno disperzijo in sunek, ki se je razširil zaradi potovanja po sredstvu s pozitivno disperzijo, lahko ponovno skrajša do meje, določene s širino spektra.

★ Postopek kompenzacije disperzije se uporablja za pridobivanje zelo močnih zelo kratkih sunkov svetlobe. Sunku iz fazno uklenjenega barvilnega ali Ti:safirnega laserja se najprej v nelinearnem sredstvu razširi spekter, hkrati se sunek tudi časovno podaljša. Podaljšan sunek lahko ojačimo, česar s prvotnim kratkim in razmeroma močnim sunkom ne bi mogli narediti. Razširjen in ojačen sunek nato s parom uklonskih mrežic skrajšamo za faktor 10–100 glede na prvotno dolžino sunka. Tako nastanejo zelo močni sunki svetlobe, dolgi le okoli 10 fs, kar je le še nekaj optičnih period<sup>5</sup>.

<sup>5</sup>Za to odkritje sta leta 2018 Donna Strickland in Gérard Mourou prejela Nobelovo nagrado.

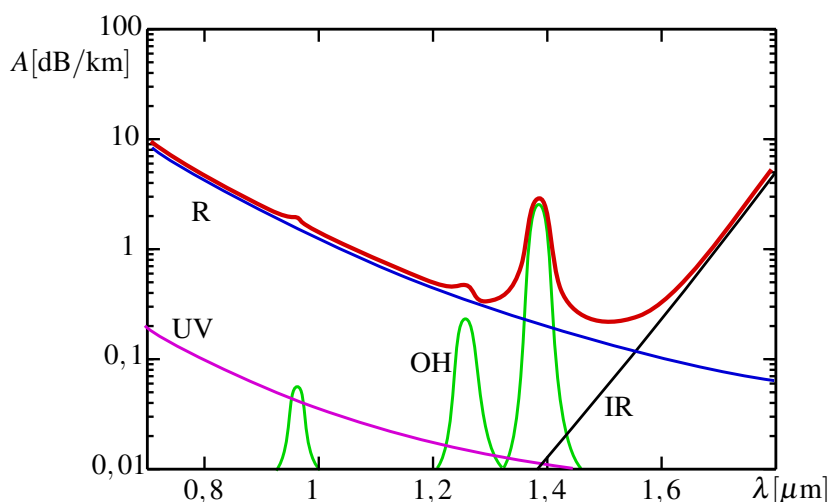
### 3.6 Izgube in ojačenje v optičnih vlaknih

Pri prenosu informacij z optičnimi vlakni je poleg disperzije, ki signal popači, treba upoštevati tudi izgube, ki signal oslabijo. Do izgub pride predvsem zaradi absorpcije svetlobe v vlaknu, Rayleighovega sipanja na fluktuacijah gostote, sipanja na nečistočah, upognjenosti vlakna in, kot bomo videli v nadaljevanju, prihaja do izgub tudi na stiku med vlakni. Za prenos na dolge razdalje je tako potreben razmeroma močen signal, ki pa ne sme biti premočen, saj lahko v vlaknu pride do nelinearnih optičnih pojavov. V praksi zato optični signal, ki potuje po čezoceanskih vlaknih, ojačujemo in s tem nadomestimo izgube.

Za merilo izgub v vlaknu vpeljemo atenuacijski koeficient, merjen v decibelih ali dB/km

$$A[\text{dB}] = -10 \log_{10} \frac{j(z)}{j(0)}, \quad (3.97)$$

pri čemer je  $j(z)$  intenziteta svetlobe po prepotovanju razdalji  $z$ ,  $j(0)$  pa začetna intenziteta. Če se po prepotovanem kilometru signal zmanjša na primer na polovico, so izgube 3 dB/km. Pri izdelavi optičnih vlaken se najpogosteje uporablja kremenovo steklo, ki ima pri valovni dolžini 1,55  $\mu\text{m}$  izgube okoli 0,2 dB/km. Za primerjavo: navadno steklo ima pri vidni svetlobi atenuacijski koeficient okoli 1000 dB/km.



Slika 3.16: Izgube v vlaknu v odvisnosti od valovne dolžine: vijolična črta – UV absorpcija, črna črta – IR absorpcija, zelena črta – absorpcija na OH ionih in modra črta – izgube zaradi Rayleighovega sipanja. Z rdečo črto so označene skupne izgube.

Slika (3.16) prikazuje odvisnost izgub od valovne dolžine za dobro enorodovno vlakno iz kremenovega stekla. Celotne izgube (rdeča črta) so sestavljene iz vrste različnih prispevkov. Pri kratkih valovnih dolžinah je absorpcija velika zaradi elektronskih prehodov v steklu (vijolična črta). Širina reže za  $\text{SiO}_2$  je namreč okoli 8,9 eV, kar ustreza valovni dolžini okoli 140 nm. Pri velikih valovnih dolžinah pride do absorpcije zaradi vibracijskih prehodov (črna črta). Čeprav so ti prehodi pri nižjih frekvencah, so vrhovi zelo široki in sežejo do okoli 1500 nm. Absorpcija na nečistočah lahko ob pazljivi izdelavi postane skoraj v celotnem območju praktično zanemarljiva. Najbolj problematična nečistoča je voda oziroma  $\text{OH}^-$  ioni, ki imajo velik dipolni moment in izrazito absorpcijo pri 1380 nm (zelena črta). Zelo pomemben prispevek k izgubam, posebej pri krajših valovnih dolžinah, je Rayleighovo sipanje na fluktuacijah gostote, saj je sorazmerno z  $\lambda^{-4}$  (modra črta).

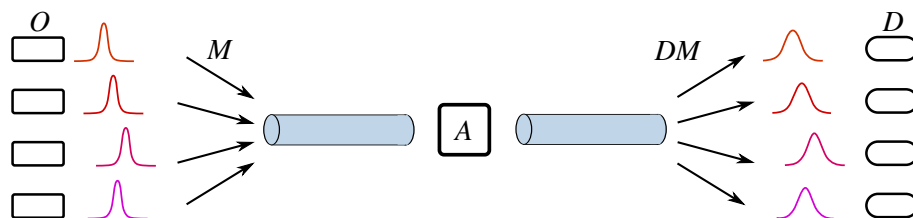
- ★ Sipanje na fluktuacijah gostote predstavlja pglavitni del izgub v vlaknu. Na splošno so gostotne fluktuacije v steklu zaradi amorfne zgradbe neizogibne, v vlaknih pa so navadno še precej večje. Med izdelavo steklo namreč močno segrejejo (na okoli 2000 °C), da lahko iz njega vlečejo vlakno, termične fluktuacije gostote pa pri hitrem ohlajanju ostanejo zamrznjene v vlaknu.

S slike je razvidno, da so skupne izgube najmanjše okoli 1,55  $\mu\text{m}$ , zato se to območje največ uporablja za prenos signalov na velike razdalje. Izgube so tako majhne, da omogočajo prenos signala do nekaj sto kilometrov brez vmesnega ojačevanja. Teh izgub na vlaknih se ne bo dalo več kaj dosti izboljšati, saj so že zdaj na meji, določeni s termičnimi fluktuacijami. Pri dolžini optičnih zvez tako izgube niso več glavna omejitve, ampak je to popačitev signala zaradi disperzije.

- ★ Pri prenosu signalov z optičnimi vlakni vpeljemo različne pasove, ki ustrezajo različnim valovnim dolžinam. Pri valovnih dolžinah 1260–1360 nm je tako imenovani pas O (*original*), ki so ga sprva uporabljali zaradi razpoložljivih virov svetlobe in nizke disperzije. Sledita pas E (*extended*, 1360–1460 nm) in pas S (*short*, 1460–1530 nm). Najširše uporabljan je pas C (*conventional*) pri valovnih dolžinah 1530–1565 nm, sledita mu še pas L (*long*, 1565–1625 nm) in pas U (*ultralong*, 1625–1675 nm).

Po optičnem vlaknu lahko prenašamo več signalov hkrati, če za vsakega posebej uporabimo drugo valovno dolžino. Temu procesu pravimo razvrščanje po valovni dolžini (WDM – *wavelength-division multiplexing*) in z njim dosežemo vzporeden prenos podatkov in hitrosti prenosa do 100 Tb/s.

Shematsko je tak način prenosa podatkov prikazan na sliki (3.17). Oddajniki (O) oddajo sunke svetlobe, ki se rahlo razlikujejo v valovni dolžini. Z multiplekserjem (M) signale iz različnih kanalov zberemo in jih usmerimo v enorodovno vlakno. Vlakno prenaša signal, vmes ga po potrebi ojačimo (A), nato z demultiplekserjem (DM) signal razstavimo na posamezne kanale, ki jih zaznamo z ločenimi detektorji (D). Razlika v valovnih dolžinah med posameznimi signali je tipično 0,8 nm. Zanimivo je tudi, da so (de)multiplekserji pasivni in za svoje delovanje ne potrebujejo elektrike.

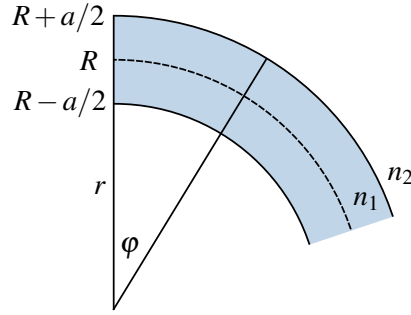


Slika 3.17: Shematski prikaz prenosa več signalov hkrati po enorodovnem vlaknu

### \*Izgube v ukrivljenem vlaknu

V vseh primerih do zdaj smo privzeli, da je vlakno povsem ravno oziroma da so mejne ploskve valovnega vodnika vzporedne. Kadar je vlakno ukrivljeno, del valovanja uhaja v plašč in izgube pri prenosu se povečajo. Te izgube postanejo znatne, kadar je krivinski radij ukrivljenega vlakna tipično centimeter ali manj. Poglejmo si pojav podrobneje na planparalelnem vodniku.

Naj bo vodnik dvodimenzionalna plast debeline  $a$  z lomnim količnikom  $n_1$ , ki je obdana s snovjo z lomnim količnikom  $n_2$ . Vodnik naj zdaj ne bo raven, temveč ukrivljen s krivinskim radijem  $R$ , tako da tvori del kolobarja z notranjim radijem  $R - a/2$  in zunanjam radijem  $R + a/2$ . Privzamemo, da je  $R \gg a$  (slika 3.18).



Slika 3.18: K izračunu izgub v ukrivljenem vodniku

Zapišimo Helmholtzevo enačbo (enačba ??) v cilindrični geometriji

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial E}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 E}{\partial \varphi^2} + k_0^2 n^2(r) E = 0, \quad (3.98)$$

pri čemer ima  $n(r)$  vrednost  $n_1$  v sredici in  $n_2$  v plašču. Pri tem ne pozabimo, da  $r$  ni več radialna koordinata vlakna, ampak označuje oddaljenost od središča krivine. Zanimajo nas rešitve oblike

$$E(r, \varphi) = \psi(r) e^{im\varphi}, \quad (3.99)$$

kjer bomo privzeli, da je  $\psi(r)$  znatna le v sredici.

Naj bo  $z = R\varphi$  dolžina loka vzdolž sredine sredice. Tedaj je faza nastavka (enačba 3.99) enaka  $m\varphi = mz/R$  in valovno število  $\beta = m/R$ . Ker je valovna dolžina svetlobe dosti manjša od  $R$ , je  $m$  zelo veliko število. Funkcija  $\psi$  zadošča enačbi

$$\frac{d^2\psi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\psi}{dr} + \left( k_0^2 n^2(r) - \frac{m^2}{r^2} \right) \psi = 0. \quad (3.100)$$

Rešitve gornje enačbe za  $\psi$  so kombinacije Besslovih funkcij reda  $m$ , kar pa zaradi velikosti  $m$  ni posebno zanimivo.

Dosti več bomo izvedeli, če se problema lotimo malo drugače. Namesto  $r$  in  $\varphi$  vpeljemo koordinati  $x = r - R$  in  $z = R\varphi$ . S tem preidemo nazaj na koordinate planparalelne plasti in iščemo popravke valovne enačbe v sredici (3.8), ki so reda  $1/R$ . Zapišemo

$$\frac{m^2}{r^2} = \frac{m^2}{(R+x)^2} \approx \frac{m^2}{R^2} \left( 1 - 2\frac{x}{R} \right) = \beta^2 \left( 1 - 2\frac{x}{R} \right). \quad (3.101)$$

Z upoštevanjem gornje zveze enačbo (3.100) nadomestimo s približno enačbo za prečno obliko polja

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + (k_0^2 n^2(r) - \beta^2) \psi + \frac{1}{R} \left( \frac{d\psi}{dx} + 2\beta^2 x \psi \right) = 0. \quad (3.102)$$

Člen, ki vsebuje prvi odvod  $d\psi/dx$ , lahko odpravimo z nastavkom

$$\psi(x) = e^{-x/2R} \zeta(x) \quad (3.103)$$

in dobimo

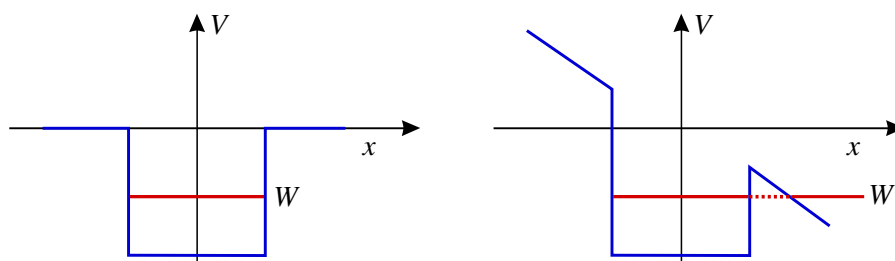
$$\frac{d^2\zeta}{dx^2} + \left( k_0^2 n^2(r) - \beta^2 - \frac{1}{4R^2} \right) \zeta + \frac{2\beta^2}{R} x \zeta = 0. \quad (3.104)$$

Gornja enačba je podobna enačbi za izračun lastnih rodov v planparalelnem vodniku (3.8), pri čemer se  $\beta^2$  poveča za  $1/4R^2$ . Poleg tega je prisoten dodatni člen, ki je linearen v  $x$ . Če ponovno naredimo primerjavo med lastnimi načini v valovnem vodniku in stanji delca, ujetega v končno potencialno jamo, ta člen ustreza potencialni energiji delca v konstantnem zunanjem električnem polju (slika 3.19). Podobno kot lahko ujeti delci uhajajo iz potencialne jame v prisotnosti zunanjega polja (tunelirajo), uhaja tudi svetloba iz ukrivljenega vlakna.

Po analogiji s kvantno mehaniko, kjer ukrivljenost vodnika ustreza električni poljski jakosti, lahko izgube iz vodnika (oziroma delež prepuščene svetlobe) zapišemo kot

$$A \propto e^{-CR}, \quad (3.105)$$

pri čemer je  $C$  konstanta, odvisna od lomnih količnikov sredice in plašča, od polmera vlakna ter od valovne dolžine potujoče svetlobe.



Slika 3.19: Lastni načini širjenja svetlobe po ravnem vodniku so analogni stanjem delca v končni potencialni jami (levo), načini širjenja po ukrivljenem vodniku so podobni stanjem delca v konstantnem zunanjem električnem polju (desno). Zaradi spremenjenega potenciala delci tunelirajo, svetloba pa uhaja iz ukrivljenega vlakna.

### Ojačevanje v vlaknih

Zaradi izgub pri prenosu signalov na več tisoč kilometrov dolge razdalje je treba signal med prenosom ojačevati. To lahko naredimo elektronsko, kjer optični signal pretvorimo v električnega, tega ojačimo in ga nato pretvorimo nazaj v optičnega. Precej bolj priročna rešitev je optično ojačevanje v vlaknu samem.

V ta namen se najpogosteje uporablja vlakno, dopirano z erbijevimi ioni<sup>6</sup>. Na določenih razdaljah (na okoli 100 km) svetlobo iz navadnega vlakna sklopimo v vlakno, v katerem so erbijevi ioni. S črpalnim laserjem erbijske ione vzbudimo, da dosežemo obrnjeno zasedenost. Ko na dopirani del vlakna vpade svetlobni sunek z valovno dolžino okoli 1550 nm, pride do stimulirane emisije in sunek se ojači. Gre za povsem enak princip ojačevanja svetlobe, kot ga poznamo iz delovanja laserja, le da tukaj svetloba ni ujeta v resonator, ampak se postopoma ojačuje vzdolž vlakna. Pri tem se intenziteta črpalnega laserja postopoma zmanjšuje, kar omejuje dolžino, na kateri se signal ojačuje. Spektralna širina ojačenja je zaradi sklopitve z ioni v steklu razmeroma široka, tudi 40 nm. To pomeni, da se hkrati ojačujejo signali različnih valovnih dolžin, kar je še posebej uporabno pri prenosu več signalov naenkrat.

V praksi se uporabljajo vlakna, v katerih je delež erbijevih ionov okoli  $\sim 10^{-4}$ . Črpalni laser je polprevodniški laser, ki deluje pri valovni dolžini 900 nm ali 1,48  $\mu\text{m}$  z močjo okoli 20–100 mW. Na ta način lahko v 10–30 m dolgih odsekih vlaken dosežemo več 1000-kratno ojačenje (30–40 dB), kar je dovolj za kompenzacijo izgub.

<sup>6</sup>EDFA - *Erbium-doped fiber amplifier*, ojačevalnik na vlakno, dopirano z erbijem



### 3.7 Sklopitev svetlobe v optične vodnike

Do zdaj smo govorili o svetlobi, ki potuje po valovnem vodniku ali optičnem vlaknu. Kako pa svetlobo sploh sklopimo v vodnik? Poznamo več načinov sklopitve, obravnavali bomo čelno sklopitev, bočno sklopitev s prizmo in bočno sklopitev s periodično strukturo. Prvi način navadno uporabljamo pri cilindričnih vlaknih, ostala dva načina pa najpogosteje pri planarnih valovodnih strukturah.

#### Čelna sklopitev

Sklopitev svetlobe v večrodovno vlakno lahko obravnavamo geometrijsko, kot smo to naredili na začetku poglavja (slika 3.1). Izračunali smo, da je največji vpadni kot, pod katerim se svetloba še sklopi v vlakno, določen z numerično odprtino vlakna  $\sin \alpha_{\max} = NA$  (enačba 3.2).

Za bolj natančen izračun izkoristka sklopitve svetlobe v optično vlakno vpeljemo tako imenovani prekrivalni integral, ki pove, kolikšen delež vpadne svetlobe z električno poljsko jakostjo  $E(r, \varphi)$  se sklopi z izbranim rodod vlakna. To naredimo tako, da vpadni val razvijemo po lastnih rodovih vlakna, iz ortogonalnosti pa sledi prekrivalni integral, ki ga moramo seveda ustrezno normirati. Za sklopitev v rod, označen z indeksoma  $n$  in  $m$ , zapišemo prekrivalni integral kot

$$\eta = \frac{|\int E(x, y) E_{n,m}^*(x, y) dx dy|^2}{(\int |E(x, y)|^2 dx dy) (\int |E_{n,m}(x, y)|^2 dx dy)}, \quad (3.106)$$

oziroma v cilindričnih koordinatah

$$\eta = \frac{|\int E(r, \varphi) E_{n,m}^*(r, \varphi) r dr d\varphi|^2}{(\int |E(r, \varphi)|^2 r dr d\varphi) (\int |E_{n,m}(r, \varphi)|^2 r dr d\varphi)}. \quad (3.107)$$

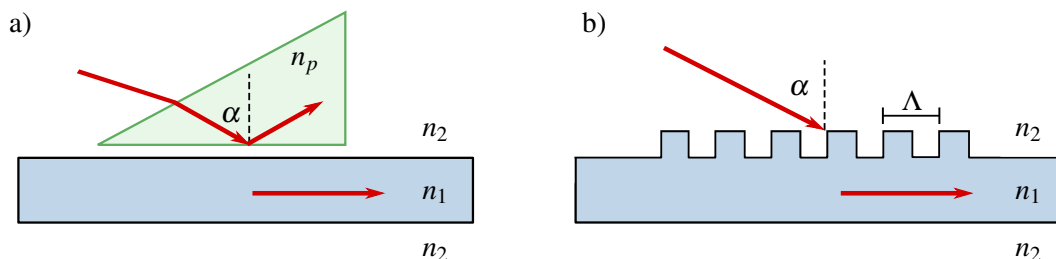
Točen račun gornjega integrala je na splošno precej zapleten, saj vsebuje integrale Besslovih funkcij. V primeru osnovnega roda račun poenostavimo, tako da prečno odvisnost polja nadomestimo z Gaussovim profilom z ustreznim efektivnim polmerom (po enačbi 3.44).

#### Bočna sklopitev

Neposredna sklopitev svetlobe v optični vodnik preko plašča ni mogoča. V vodniku je namreč lomni količnik sredice vedno večji od lomnega količnika plašča, zato dovolj velikega vstopnega kota, pod katerim bi se svetloba ujela v sredico, ni mogoče doseči. Za sklopitev preko stranice zato uporabimo drugačen pristop, navadno s prizmo ali s periodično strukturo na vlaknu.

V prvem primeru uporabimo prizmo, kot kaže slika (3.20 a). Lomni količnik prizme je pri tem večji od lomnega količnika plašča  $n_p > n_2$ . Vhodni žarek vpada na prizmo, se ob prehodu vanjo lomi, nato pa se na stranici, ki je vzporedna z vodnikom, totalno odbije. V tankem vmesnem območju med prizmo in sredico vodnika se pojavi evanescentni val s komponento valovnega vektorja  $\beta_v = k_0 n_p \sin \alpha$  v smeri vzporedno z vodnikom.

Pogoj za uspešno sklopitev v vlakno je ujemanje vzdolžne komponente valovnega vektorja vpadne svetlobe  $\beta_v$  z vzdolžno komponentno valovnega vektorja  $\beta_n$  tistega rodu, ki ga želimo vzbuditi. S spreminjanjem vpadnega kota  $\alpha$  spreminjamo  $\beta_v$  in v vodniku vzbujamo različne rodove. Pri tem mora biti razdalja med prizmo in vodnikom dovolj majhna (tipično reda valovne dolžine svetlobe), da se v valovod ob izpolnjenem pogoju ujemanja faze sklopi znaten delež vpadne svetlobe.



Slika 3.20: Dva primera bočne sklopitve svetlobe v valovni vodnik: sklopitev s prizmo (a) in sklopitev s periodično strukturo (b)

Tudi sklopitev s periodično strukturo na valovnem vodniku (slika 3.20 b) deluje na ujemanju vzdolžnih komponent valovnega vektorja vpadnega vala in valovnega vektorja ustreznega rodu. Ko vpade val pod kotom  $\alpha$  glede na valovni vodnik, periodična struktura na vodniku spremeni njegovo fazo za večkratnik  $2\pi z/\Lambda$ , pri čemer je  $\Lambda$  perioda strukture. Če dosežemo, da se komponenta novega valovnega vektorja  $\beta = k_0 n_2 \sin \alpha + 2\pi/\Lambda$  izenači s komponento valovnega vektorja za izbrani rod v vlaknu, se vpadna svetloba sklopi v vlakno.

★ Oba opisana načina za sklopitev svetlobe v vlakno lahko uporabimo tudi za sklopitev svetlobe iz vlakna, pri čemer mora biti ravno tako izpolnjen pogoj ujemanja faz. Sklapljanje svetlobe skozi prizmo je uporabno tudi za raziskave tankih plasti snovi. Iz pogoja za ujemanje faz lahko določimo lastnosti tanke plasti, na primer njen lomni količnik.

### 3.8 Sklopitev med optičnimi vodniki

#### Čelna sklopitev dveh vlaken

Pri telekomunikacijah z optičnimi vodniki so spoji med posameznimi vodniki neizogibni. V idealnem primeru sta vodnika povsem enaka in se natančno stikata, tako da na spoju ne prihaja do dodatnih izgub ali popačenja signala. Čim pa se pojavijo odstopanja v velikosti polmera sredice, razlike v vrednostih lomnih količnikov ali nenatančna poravnava sredice, na spoju pride do izgub. Tipično znašajo izgube na spoju vlaken do okoli 0,2–0,5 dB.

Omejimo se na spoj enorodovnih vlaken, v katerih krajevni del električne poljske jakosti osnovnega roda zapišemo kot

$$E(r, \varphi, z) = \psi(r, \varphi) e^{i\beta z}. \quad (3.108)$$

Podobno kot smo zapisali prekrivalni integral pri sklopitvi svetlobe v vlakno (enačba 3.107), vpeljemo prekrivalni integral za izračun sklopitve med dvema vlaknoma, ki pove, kolikšen delež svetlobe moči iz prvega vlakna se sklopi v osnovni rod v drugem vlaknu. Sklopitveni faktor je

$$\eta = \frac{|\int \psi_1(r, \varphi) \psi_2^*(r, \varphi) r dr d\varphi|^2}{(\int |\psi_1|^2 r dr d\varphi) (\int |\psi_2|^2 r dr d\varphi)}, \quad (3.109)$$

pri čemer z indeksom 1 označimo osnovni rod v prvem vlaknu, z indeksom 2 pa v drugem. Tudi tukaj račun poenostavimo in namesto Besslovega profila uporabimo Gaussov profil z ustreznim efektivnim polmerom snopa (enačba 3.44).

Izračunajmo za primer sklopitveni faktor in izgube na spoju dveh vlaken z rahlo različnima polmeroma. Po Marcusejevi formuli najprej določimo efektivna polmera Gaussovih snopov v obeh vlaknih  $w_1$  in  $w_2$ . Prečni profil v vlaknih je potem

$$\psi_{1,2} = A_{1,2} e^{-r^2/w_{1,2}^2}. \quad (3.110)$$

Vstavimo gornja nastavka v prekrivalni integral (enačba 3.109) in dobimo

$$\eta = \frac{|\int A_1 e^{-r^2/w_1^2} A_2 e^{-r^2/w_2^2} 2\pi r dr|^2}{\left(\int A_1^2 e^{-2r^2/w_1^2} 2\pi r dr\right) \left(A_2^2 e^{-2r^2/w_2^2} 2\pi r dr\right)}, \quad (3.111)$$

od koder sledi

$$\eta = \frac{4w_1^2 w_2^2}{(w_1^2 + w_2^2)^2}. \quad (3.112)$$

Kadar sta polmera vlaken enaka, je prekrivanje popolno in  $\eta = 1$ . Z naraščajočo razliko med polmeroma pa vrednost  $\eta$  pojema. Pri tem ni pomembno, ali ima večji polmer prvo ali drugo vlakno, v obeh primerih pride do izgube signala. Intuitivno razumemo, da se signal izgubi pri prehodu iz večjega v manjše vlakno, obratno pa je tudi res, saj se v širšem končnem vlaknu poleg osnovnega vzbudijo tudi višji rodovi.

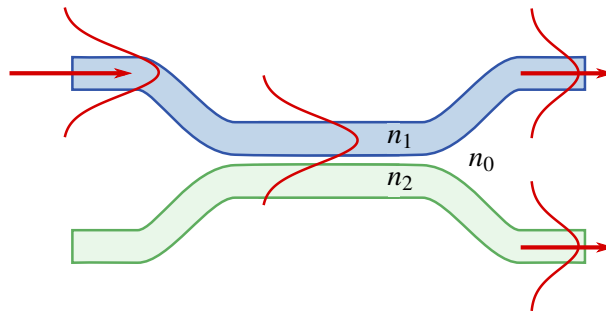
Pri prehodu iz vlakna z  $w = 10 \mu\text{m}$  v vlakno s polmerom  $w = 8 \mu\text{m}$  (ali obratno), je sklopitveni faktor (oziroma razmerje med prepuščeno in vpadno intenziteto svetlobe) enak 0,95. Po enačbi (3.97) so izgube za izračunano sklopitev enake 0,21 dB.

**Naloga 3.8.1** Izračunaj prekrivalni integral (enačba 3.111) in pokaži veljavnost enačbe (3.112). Poleg tega pokaži tudi, da je sklopitveni faktor za dve enaki vzporedni vlakni, ki sta iz osi izmaknjeni za  $\Delta$ , enak

$$\eta = \exp\left(-\frac{\Delta^2}{w^2}\right). \quad (3.113)$$

### Vzdolžna sklopitev

Ob prenosu signala po optičnem valovodu večina energijskega toka potuje po sredici, energijski tok pa seže tudi izven nje, v plašč (enačba 3.29). Če sta dva vzporedna valovoda dovolj blizu, da se evanescentni električni polji enega in drugega vodnika v plašču prekrivata, pride do sklopitve vodnikov in prenosa energijskega toka iz enega vodnika v drugega.



Slika 3.21: Sklopitev med dvema vzporednima vodnikoma

Za podrobnejšo obravnavo bi morali zapisati Maxwellove enačbe z ustreznimi robnimi pogoji in jih rešiti za sklopljen primer dveh vzporednih vodnikov. Tak račun je izredno zapleten, zato se bomo poslužili približka šibke sklopitve in privzeli, da so rodovi v vodnikih taki, kot če bi vodniki ne bili sklopljeni. Sklopitev torej ne bo spremenila oblike lastnih rodov, bo pa spremenila njihovo amplitudo, ki bo tako postala odvisna od vzdolžne koordinate  $z$ .

Imejmo dva enorodovna vodnika z lomnima količnikoma sredice  $n_1$  in  $n_2$  in enako debelino  $a$ , med njima in okoli njiju pa naj bo snov z lomnim količnikom  $n_0$ . Širina reže med vodnikoma naj bo  $2d$ . Potem zapišemo električni poljski jakosti v prvem in drugem vodniku kot

$$E_1(x, z) = A(z) \psi_1(x) e^{i\beta_1 z} \quad \text{in} \quad (3.114)$$

$$E_2(x, z) = B(z) \psi_2(x) e^{i\beta_2 z}, \quad (3.115)$$

pri čemer se  $A(z)$  in  $B(z)$  le počasi spreminjata s koordinato  $z$ . Skupna električna poljska jakost, ki je v našem približku kar vsota prispevkov  $E_1$  in  $E_2$ , mora zadoščati Helmholtzevi enačbi (enačba ??)

$$\nabla^2 E(x, z) + k_0^2 n(x)^2 E(x, z) = 0. \quad (3.116)$$

Pri tem smo z  $n(x)$  označili prečno odvisnost lomnega količnika. Vstavimo nastavek za električno poljsko jakost v gornjo enačbo in zapišemo

$$A e^{i\beta_1 z} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi_1(x) - \beta_1^2 \psi_1 + k_0^2 n(x)^2 \psi_1 \right) + \\ B e^{i\beta_2 z} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi_2(x) - \beta_2^2 \psi_2 + k_0^2 n(x)^2 \psi_2 \right) + 2i\beta_1 A' \psi_1 e^{i\beta_1 z} + 2i\beta_2 B' \psi_2 e^{i\beta_2 z} = 0. \quad (3.117)$$

Pri tem smo člena z drugim odvodom  $\partial^2 A / \partial z^2$  in  $\partial^2 B / \partial z^2$  zanemarili. Zapišimo enačbi za nemoteni funkciji  $\psi$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi_1(x) + (k_0^2 n_1(x)^2 - \beta_1^2) \psi_1 = 0 \quad (3.118)$$

in

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi_2(x) + (k_0^2 n_2(x)^2 - \beta_2^2) \psi_2 = 0. \quad (3.119)$$

Lomna količnika  $n_1(x)$  in  $n_2(x)$  sta tukaj tudi funkciji prečne koordinate. Naj bo  $n_1(x)$  povsod enak  $n_0$  razen v sredici prvega vodnika, kjer je  $n_1$ , in naj bo  $n_2(x)$  povsod enak  $n_0$ , razen v sredici drugega vlakna, kjer je enak  $n_2$ . Sledi

$$A e^{i\beta_1 z} k_0^2 (n(x)^2 - n_1(x)^2) \psi_1 + B e^{i\beta_2 z} k_0^2 (n(x)^2 - n_2(x)^2) \psi_2 + \\ 2i\beta_1 A' \psi_1 e^{i\beta_1 z} + 2i\beta_2 B' \psi_2 e^{i\beta_2 z} = 0. \quad (3.120)$$

Enačbo pomnožimo s kompleksno konjugirano vrednostjo  $\psi_1^*$  in integriramo po  $x$ . Upoštevamo, da se funkciji  $\psi_1$  in  $\psi_2$  le malo prekrivata, in zapišemo

$$\frac{dA}{dz} = iAK_{11} + iB e^{i(\beta_2 - \beta_1)z} K_{12}, \quad (3.121)$$

pri čemer sta

$$K_{11} = \frac{k_0^2}{2\beta_1} \int \psi_1^* \psi_1 (n^2 - n_1^2) dx \quad \text{in} \quad K_{12} = \frac{k_0^2}{2\beta_1} \int \psi_1^* \psi_2 (n^2 - n_2^2) dx. \quad (3.122)$$

Koeficient  $K_{11}$  določa spremembo faze v vlaknu zaradi prisotnosti drugega vlakna, kar lahko zanemarimo. Tako ostane samo sklopitveni člen

$$\frac{dA}{dz} = iBe^{i(\beta_2 - \beta_1)z} K_{12} \quad (3.123)$$

in podobno za  $B$

$$\frac{dB}{dz} = iAe^{i(-\beta_2 + \beta_1)z} K_{21}. \quad (3.124)$$

Prvo enačbo odvajamo, upoštevamo drugo in zapišemo

$$\frac{\partial^2 A}{\partial z^2} - i\Delta\beta \frac{\partial A}{\partial z} + K_{12}K_{21}A = 0. \quad (3.125)$$

Enačbo rešujemo z nastavkom

$$A = e^{i\Delta\beta z/2} (a_1 e^{i\gamma z} + a_2 e^{-i\gamma z}). \quad (3.126)$$

**Naloga 3.8.2** Pokaži, da nastavek (enačba 3.126) reši enačbo (3.125) in pokaži, da med parametri enačb velja sledeča zveza

$$\gamma^2 = K^2 + \frac{\Delta\beta^2}{4}, \quad (3.127)$$

pri čemer je  $K = \sqrt{K_{12}K_{21}}$  in  $\Delta\beta = \beta_2 - \beta_1$ . Nato uporabi enačbo (3.123) in pokaži, da je rešitev za amplitudo  $B$  enaka izrazu v enačbi (3.128).

Ko poznamo  $A$ , lahko z uporabo enačbe (3.123) izračunamo še  $B$

$$B = \frac{1}{K_{21}} e^{-i\Delta\beta z/2} \left( \left( \frac{\Delta\beta}{2} + \gamma \right) a_1 e^{i\gamma z} + \left( \frac{\Delta\beta}{2} - \gamma \right) a_2 e^{-i\gamma z} \right). \quad (3.128)$$

Naj bo  $A(z=0) = A_0$  in  $B(z=0) = 0$ . To pomeni, da potuje svetloba na začetku le po prvem vlaknu, potem pa se sklopi v drugega. S tema začetnima pogojevma zapišemo izraza za  $A$  in  $B$

$$A = A_0 e^{i\Delta\beta z/2} \left( \cos(\gamma z) - \frac{i\Delta\beta}{2\gamma} \sin(\gamma z) \right) \quad \text{in} \quad B = A_0 e^{-i\Delta\beta z/2} \frac{iK_{21}}{\gamma} \sin(\gamma z). \quad (3.129)$$

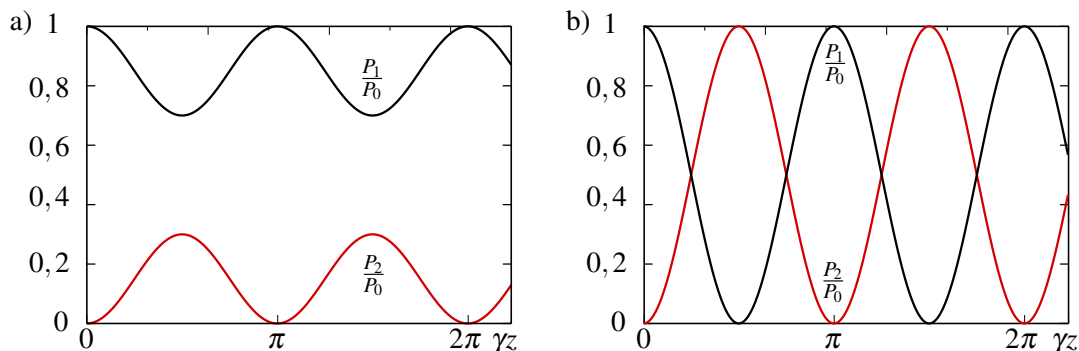
Moč, ki se pretaka po posameznem vlaknu, je tako z upoštevanjem zveze (3.127)

$$P_1 = P_0 \left( \cos^2(\gamma z) + \frac{\Delta\beta^2}{4\gamma^2} \sin^2(\gamma z) \right) = P_0 \left( 1 - \frac{K^2}{\gamma^2} \sin^2(\gamma z) \right) \quad (3.130)$$

in

$$P_2 = P_0 \frac{K^2}{\gamma^2} \sin^2(\gamma z). \quad (3.131)$$

Privzeli smo, da velja  $|K_{12}| = |K_{21}| = K$ . Obe funkciji sta oscilirajoči in svetloba se periodično pretaka med vlaknoma s periodo  $\pi/\gamma$  (slika 3.22). Amplituda prenosa je odvisna od sklopitvenega faktorja  $K$  in ujemanja valovnih števil v obeh vlaknih. Večji koeficient  $K$  in manjše odstopanje  $\Delta\beta$  vodita v večji prenos svetlobnega toka v drugo vlakno.



Slika 3.22: Prenos svetlobnega toka med dvema sklopljenima vodnikoma. V prvem primeru (a) sta vodnika različna, v drugem primeru (b) pa sta vodnika enaka in pride do popolnega prenosa.

Če sta vlakni enaki, je  $\Delta\beta = 0$  in  $\gamma = K$ , tako da pride do popolnega prenosa svetlobnega toka iz enega vlakna v drugo in seveda tudi obratno. Takrat veljata enačbi

$$P_1 = P_0 \cos^2(\gamma z) \quad \text{in} \quad (3.132)$$

$$P_2 = P_0 \sin^2(\gamma z). \quad (3.133)$$

Na ta način lahko v drugo vlakno sklopimo poljuben delež vpadne svetlobe. Do celotnega prenosa svetlobnega toka v drugo vlakno pride pri dolžini sklopitve  $L = \pi/2\gamma$ . Pri dolžini  $L = \pi/4\gamma$  sklopimo eno polovico intenzitete vpadne svetlobe in govorimo o 3-dB sklopitvi.

★ Pri izbrani dolžini sklopitve med vlaknoma je intenziteta svetlobe, ki preide v drugo vlakno, močno odvisna od parametra  $\gamma$ , torej od prekrivalnega integrala in od razlike  $\Delta\beta$ . Z rahlim spreminjanjem parametrov, na primer lomnega količnika enega od vlaken, lahko spreminjamo delež svetlobe v drugem vlaknu. V ta namen pogosto uporabimo elektro-optični pojav in s spreminjanjem priključene napetosti na enem od vlaken natančno določimo delež svetlobe, ki preide v drugo vlakno.

### 3.9 \*Vpliv spremembe lomnega količnika vlakna na širjenje svetlobe

Sprememba lomnega količnika sredice ali plašča vlakna povzroči spremembo valovnega števila  $\beta$  za izbran rod. V enorodovnih vlaknih je to mogoče izkoristiti za izdelavo senzorjev, na primer temperature ali tlaka. Spremembo valovnega števila, do katere pride zaradi zunanjih vplivov, izmerimo preko spremembe faze valovanja na izhodu iz vlakna z ustrezno sestavljenim interferometrom. Ker je dolžina vlakna lahko velika (v nekaj centimetrom velik tulec lahko brez težav navijemo kilometre vlakna), je celotna sprememba faze velika že pri majhnih spremembah merjene količine. Po drugi strani pa že majhna sprememba valovnega števila povzroča neželene spremembe faze in odboje pri prenosu informacij. V tem razdelku zato pogledjmo, kako se spremeni valovno število pri dani spremembi lomnega količnika in koliko svetlobe se odbije.

Obravnavajmo rod z vzdolžno komponento valovnega vektorja  $\beta_{lm}$  in prečnim profilom  $\psi_{lm}(r, \varphi)$ . Ta mora zadoščati Helmholtzevi enačbi (enačba ??)

$$\nabla_{\perp}^2 \psi_{lm} + (\varepsilon(r)k_0^2 - \beta_{lm}^2) \psi_{lm} = 0. \quad (3.134)$$

Naj se dielektrična konstanta na delu vlakna spremeni za  $\delta\varepsilon$ . Posledično se na tem mestu spremenita tudi valovno število  $\beta = \beta_{lm} + \delta\beta$  in prečna oblika  $\psi = \psi_{lm} + \delta\psi$ .

Tudi popravljena funkcija  $\psi$  mora zadoščati enačbi (3.134), zato za perturbacijo velja

$$\nabla_{\perp}^2 \delta\psi + (\epsilon(r)k_0^2 - \beta_{lm}^2) \delta\psi + \delta\epsilon k_0^2 \psi_{lm} = 2\beta_{lm} \delta\beta \psi_{lm}, \quad (3.135)$$

pri čemer smo zanemarili produkte majhnih količin. Množimo obe strani enačbe s  $\psi_{lm}^*$ , integriramo po preseku vlakna in dobimo

$$\begin{aligned} & \int \psi_{lm}^* \nabla_{\perp}^2 \delta\psi dS + \int (\epsilon(r)k_0^2 - \beta_{lm}^2) \delta\psi \psi_{lm}^* dS + k_0^2 \int \delta\epsilon |\psi_{lm}|^2 dS \\ &= 2\beta_{lm} \delta\beta \int |\psi_{lm}|^2 dS. \end{aligned} \quad (3.136)$$

Prvi člen na levi preoblikujemo z uporabo zvez

$$\int (u \nabla_{\perp}^2 v - v \nabla_{\perp}^2 u) dS = \int \nabla_{\perp} \cdot (u \nabla_{\perp} v - v \nabla_{\perp} u) dS = \oint (u \nabla_{\perp} v - v \nabla_{\perp} u) \cdot ds. \quad (3.137)$$

Funkciji  $\psi_{lm}$  in  $\delta\psi$  opisujeta vodene valove, zato morata iti njune vrednosti za velike  $r$  proti nič. Posledično gre proti nič tudi integral po krivulji  $ds$  in velja

$$\int \psi_{lm}^* \nabla_{\perp}^2 \delta\psi dS = \int \delta\psi \nabla_{\perp}^2 \psi_{lm}^* dS. \quad (3.138)$$

Funkcija  $\psi_{lm}^*$  zadošča enačbi (3.134), zato se v enačbi (3.136) prvi in drugi člen odštejeta. Iskan popravek k valovnem številu je tako

$$\delta\beta = \frac{k_0^2 \int \delta\epsilon |\psi_{lm}|^2 dS}{2\beta \int |\psi_{lm}|^2 dS}. \quad (3.139)$$



Ta rezultat je seveda analogen kvantno-mehanskemu rezultatu, ki sledi iz teorije motenj za spremembo energije lastnega stanja delca pri majhni spremembi Hamiltonovega operatorja. Rezultat je tudi intuitivno razumljiv: v najnižjem redu je  $\delta\beta$  sorazmerna s uteženim povprečjem  $\delta\epsilon$ , pri čemer je utež  $\psi_{lm}$ .

Sprememba valovnega števila  $\delta\beta$  v delu vlakna ne povzroči le spremembe faze, ampak tudi delni odboj. To je le nekoliko druga oblika odboja na (zvezni ali ostri) meji dveh dielektrikov ali, splošneje, odboja valovanja na območju, kjer se spremeni fazna hitrost valovanja. Amplitudo odbitega valovanja, do katerega pride na območju vlakna, kjer se spreminja  $\beta$ , najpreprosteje dobimo z uporabo enačbe za odboj na meji dveh dielektrikov pri pravokotnem vpadu. Odbita amplituda je tedaj (enačba ??)

$$E_r = \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} E_0, \quad (3.140)$$

pri čemer  $n_1$  in  $n_2$  označujeta nespremenjen in rahlo spremenjen lomni količnik sredice vlakna.

Mislamo si, da je sprememba  $\beta$  na delu vlakna sestavljena iz majhnih stopničastih sprememb  $\Delta\beta_i$  na intervalih  $\Delta z$ . Za ravno valovanje je sprememba fazne hitrosti sorazmerna s spremembo lomnega količnika, zato iz enačbe (3.140) sledi, da je delež odbitega valovanja na stopničasti spremembi  $\Delta\beta_i$  enak

$$\Delta E_i = \frac{\Delta\beta_i}{2\beta} E_0. \quad (3.141)$$

Privzeli smo, da je delež odbitega valovanja tako majhen, da ni treba upoštevati spremembe amplitude vpadnega vala  $E_0$ . Celotno odbito valovanje je vsota prispevkov na posameznih stopnicah  $\Delta\beta_i$ , pri čemer moramo upoštevati še različne faze delno odbitih valovanj

$$E_r = \sum \frac{\Delta\beta_i}{2\beta} e^{2i\beta z_i} E_0 = \frac{1}{2\beta} \sum \frac{d\beta}{dz} e^{2i\beta z_i} \Delta z E_0. \quad (3.142)$$

Preidemo z vsote na integral in zapišemo amplitudo odbitega valovanja

$$E_r = \frac{E_0}{2\beta} \int \frac{d\beta}{dz} e^{2i\beta z} dz. \quad (3.143)$$

Za primer pogledjmo linearno spremembo lomnega količnika in linearno spremembo valovnega števila za  $\Delta\beta_0$  na razdalji  $L$ . Krajši račun pokaže, da je delež intenzitete odbitega valovanja

$$\frac{I_r}{I_0} = \left( \frac{\Delta\beta_0}{2\beta} \frac{\sin \beta L}{\beta L} \right)^2. \quad (3.144)$$

Odbojnost je največja, kadar je  $L \ll 1/\beta$ , torej kadar je sprememba  $\beta$  ostra stopnica. Čim počasnejša je sprememba, tem manj je odboja. Kadar je  $\sin \beta L = 0$ , pride do destruktivne interference vseh delnih odbojev in odbojnost je enaka nič.

**Naloga 3.9.1** Naj se valovno število ob prehodu spreminja kot funkcija erf

$$\beta(z) = \frac{2\Delta\beta_0}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt. \quad (3.145)$$

Pokaži, da je amplituda odbitega valovanja v tem primeru enaka

$$\frac{E_r}{E_0} = \frac{\Delta\beta_0}{\beta} e^{-\beta^2}. \quad (3.146)$$

### 3.10 Nelinearni pojavi v optičnih vlaknih

V osmem poglavju smo podrobno obravnavali nelinearne optične pojave v snovi. Spoznali smo nelinearne pojave drugega reda, do katerih pride v snoveh brez centra inverzije, in nelinearne pojave tretjega reda, do katerih pride v vseh snoveh ob dovolj velikih vpadnih močeh svetlobe. Na kratko povzemimo, kako se ti pojavi odražajo v optičnih vodnikih.

#### Pojavi drugega reda

Optična vlakna so praviloma narejena iz  $\text{SiO}_2$ , za katerega zaradi simetrije molekul velja, da je  $\chi^{(2)} = 0$ . Nelinearnih pojavov drugega reda zato ne opazimo, razen izjemoma na morebitnih nepravilnostih v steklu. Da bi izkoristili nelinearne optične pojave drugega reda in v vodnikih dosegli na primer optično frekvenčno podvajanje, morajo biti vodniki zgrajeni iz snovi, ki imajo nelinearno susceptibilnost različno od nič. Prednost vodnikov pred navadnimi kristali je v tem, da svetloba znotraj sredice vodnika potuje brez uklona. Posledično je pretvorba iz osnovne v frekvenčno podvojeno svetlobo, ki je sorazmerna s kvadratom dolžine (enačba ??), zelo učinkovita. Seveda mora biti izpolnjen tudi pogoj za ujemanje faz. To omogoča rodovna disperzija, zaradi katere lahko rodova pri osnovni in podvojeni frekvenci potujeta po vodniku z enako propagacijsko konstanto.



### Pojavi tretjega reda

V navadnih optičnih vlaknih prevladujejo nelinearni pojavi tretjega reda, ki jih v grobem delimo v dve skupini. Prva vključuje neelastično sipanje (Ramanovo in Brillouinovo), druga pa pojave, ki temeljijo na optičnem Kerrovem pojavu.

Obravnavajmo najprej stimulirano Ramanovo sipanje (SRS), ki smo ga spoznali v poglavju (??). Spomnimo se, da se pri SRS intenziteta svetlobe pri vpadni frekvenci zmanjšuje, na njen račun pa se eksponentno povečuje intenziteta valovanja z malenkost nižjo frekvenco. Razlika frekvenc ustreza vibracijskemu prehodu molekul v snovi. SRS v telekomunikacijskih vlaknih vodi do popačenja signala in povečanja spektralne širine. Po drugi strani stimulirano Ramanovo sipanje izkoriščamo za ojačenje signala v vodnikih. Če v vlakno posvetimo z močno črpalno svetlobo, katere frekvenca se od signalnega žarka razlikuje za vibracijsko frekvenco ( $\sim 13$  THz), se signalni žarek ojači. Ker je spekter  $\text{SiO}_2$  razmeroma širok ( $\sim 5$  THz), tega pogoja ni težko izpolniti.

Pri stimuliranem Brillouinovem sipanju (SBS) pride do odboja vpadne svetlobe na optično vzbujenem akustičnem valu v snovi (poglavje ??). Posledično se signal v smeri naprej oslabi, pojavi pa se odbit val, katerega intenziteta narašča eksponentno z intenziteto vpadne svetlobe. Neželenemu pojavu se lahko izognemo z zmanjšanjem vpadne moči (pod  $\sim 100$  mW na kanal) ali povečanjem spektralne širine vpadne svetlobe.

Druga skupina nelinearnih pojavov temelji na spreminjanju lomnega količnika z intenziteto vpadne svetlobe (Kerrov pojav, poglavje ??). Opišimo tri pojave:

1. Samo-fazna modulacija ali lastna fazna modulacija (*SPM – Self-phase modulation*). Različni deli sunka zaradi različne intenzitete občutijo različen lomni količnik in pride do tako imenovanega čričkanja (enačba ?? in slika ??). Pojav vodi do spektralne razširitve in zaradi disperzije tudi do časovnega podaljšanja sunka. Z ustrezno disperzijo dosežemo krajšanje sunkov ali pojav optičnih solitonov (poglavje ??).
2. Navzkrižna fazna modulacija (*CPM – Cross-phase modulation*). Ko po vlaknu potuje več svetlobnih sunkov hkrati, prvi sunek povzroči spremembo lomnega količnika, drugi sunki pa to spremembo občutijo. Gre za medsebojno motnjo med sunki, ki vodi do spektralne razširitve. Pojav lahko izkoristimo za krajšanje sunkov ali za izdelavo optičnih stikal, saj lahko z zunanjim kontrolnim žarkom spreminjamo fazo izbranega sunka.
3. Sklopitev štirih valov (*FWM – Four-wave mixing*). Če po vlaknu potuje več valovanj z različnimi frekvencami, pride zaradi nelinearne sklopitve do pojava valovanj pri dodatnih frekvencah (vsotah in razlikah obstoječih valovanj). V primeru, da uporabimo vlakno z zelo majhno disperzijo ali celo brez nje, pride do ujemanja faz in znatne pretvorbe v druge frekvence.

# Stvarno kazalo

NEP, 261

SNR

see Razmerje signal proti šumu, 258

$\pi$ -napetost, 181, 182, 184

Čričkanje, 165, 237

Črpanje, 81, 94

Štirinivojski sistem, 81, 123, 125, 127

Šum, 256

štetja, 256, 257

seštevanje, 260

sevanja ozadja, 256, 260

temnega toka, 256, 260

termični, 256, 259

Življenjski čas nihanj, 62

Absorpcija, 78, 225, 239

Absorpcija fotona, 75, 82

Absorpcijski koeficient, 78, 80, 86

Akusto-optični modulator, 190

Akusto-optični pojav, 186, 188, 191

Atenuacijski koeficient, 225

Avtokorelacijska funkcija, 28

BaTiO<sub>3</sub>, 24, 141, 142, 178

Bennettova vdolbina, 86

Besslov snop, 45

divergenca, 45

Bining, *glej* Združevanje pikslov

Bolometer, 238, 240, 254

Boltzmannova porazdelitev, 73, 77, 259

Braggov odboj, 66, 189, 200

Braggov uklon, 188, 192, 193

Brewstrov kot, 16

Brewstrovo okno, 17

Brillouinovo sipanje, 173

stimulirano, 173, 237

CaCO<sub>3</sub>, *glej* Kalcit

CS<sub>2</sub>, 159–161, 175

Detektor, 238

CCD, 254

CMOS, 254, 256

kvantni, 238, 243

občutljivost, 238, 244

odzivni čas, 238–240, 252

prag detekcije, 238

spektralni odziv, 238, 248

termični, 238, 239

DFG, *glej* Generacija razlike frekvenc

Dielektričnost, 9, 21, 191, 195

inverzna, 176, 186

Disperzija, 165, 166, 205, 217

kompensacija, 224

materialna, 218

podaljšanje sunka, 220, 221

polarizacijska, 220

rodovna, 220, 236

valovodna, 219

Dobrota resonatorja, 63

Dopplerjeva razširitev, 29, 54, 84, 85, 121, 123, 125

Dvolomnost, 23, 147, 182, 187

dvoosne snovi, 21, 180, 182

enoosne snovi, 21, 22, 147, 179, 180, 195, 198

Dvonivojski sistem, 74, 77, 85, 88, 91

Einsteinovi koeficienti, 76, 88, 90

Elasto-optični pojav, 186

Elasto-optični tenzor, 187

Električna polarizacija, 9, 140, 158, 174, 191

Električno polje

gostota, 9, 21

jakost, 9, 11, 140

Elektro-optična modulacija

amplitudna, 176, 183

fazna, 176, 184

frekvenčna, 176, 184

linearna, 184

longitudinalna, 179, 183, 184

transverzalna, 181

Elektro-optični deflektor, 186

Elektro-optični pojav, 176

kvadratni, *glej* Kerrov pojav

linearni, *glej* Pockelsov pojav

Elektro-optični tenzor, 177

Elektromagnetno valovanje, 11, 71

Energija polja, 73

- Energijski nivoji  
 argon, 123  
 CO<sub>2</sub>, 125  
 ekscimer, 126  
 He-Ne, 121  
 Nd:YAG, 127  
 Ti:safir, 129  
 Erbij, 131, 229  
 Evanescentno polje, 16, 231
- Fabry-Perotov interferometer, 53, 55, 63, 69  
 Faktor  $M^2$ , 40  
 Fotocelica, *glej* Fotodioda, vakuumaska  
 Fotodioda, 248, 258  
   *p-i-n*, 248, 252, 253  
   *p-n*, 248, 252  
   fotovoltaik, 248, 250, 251  
   heterostruktura, 252  
   kratko sklenjena, 248, 250, 251  
   plazovna, 238, 243, 253, 254, 260  
   polprevodniška, 238, 243, 261  
   prevodna smer, 248, 249  
   Schottkyjeva, 252, 254  
   vakuumaska, 238, 243  
   zaporna smer, 248, 250, 252, 253  
 Fotoefekt, 238, 243  
   notranji, 243, 246, 248  
   zunanji, 243  
 Foton, 73  
 Fotopomnoževalka, 243, 246, 260  
 Fotoprevodnik, 243, 246, 254  
 Fotoupornik, *glej* Fotoprevodnik  
 Fouriereva optika, 38  
 Fouriereva spektroskopija, 32  
 Frankova prosta energija, 201  
 Fraunhoferjev uklon, 20, 34, 37, 44  
 Frederiksov prehod, 201  
 Fresnel-Kirchhoffov integral, 18  
 Fresnelov uklon, 19, 34, 37, 38, 44  
 Fresnelove enačbe, 15  
 Fresnelovo število, 20, 55, 62
- GaAs, 157, 160, 178, 245  
 GaP, 157  
 GaSe, 157  
 Gaussov snop, 39, 42, 56  
   divergenca, 40  
   dolžina grla, 40  
   efektivni polmer, 213, 228  
   faza, 41  
   frekvenčno podvajanje, 150, 151  
   grlo, 39  
   intenziteta, 42  
   krivinski radij, 41  
   polmer, 39  
 Gaussov sunek, 222  
 Generacija razlike frekvenc, 142  
 Generacija vsote frekvenc, 142  
 Germanij, 246, 248, 260, 261  
 Gibljivost, 247  
 Gostota električnega toka, 247  
 Gostota energije, 11, 13, 74, 196  
 Gostota energijskega toka, 11–13, 29, 164, 194, 209  
 Gostota stanj, 53, 72, 77  
 Gouyeva faza, 42, 43, 60
- Hamiltonova funkcija, 73, 91  
 Harmonski oscilator, 73, 89, 174, 216  
 Helmholtzeva enačba, 11, 38, 45, 206, 210, 226  
 Hermite-Gaussovi snopi, 43, 66  
 Heterodinska detekcija, 262  
 Hitrost valovanja, 10, 21  
   fazna, 205  
   grupna, 167, 205, 217, 221  
   solitonov, 164  
 Hologram, 194  
 Homodinska detekcija, 263  
 Huyensovo načelo, 19
- Infrardeče valovanje, 17, 32, 121, 124, 144, 153, 155, 225, 238, 242, 243, 245, 246, 248, 254, 260, 263  
 InGaAs, 248  
 Intenziteta, *glej* Gostota energijskega toka  
 Interferenca, 25, 28, 32, 35  
 Iterbij, 131  
 Izgube v optičnih vlaknih, 225  
   Rayleighovo sipanje, 225  
   spoj dveh vlaken, 228  
   ukriviljeno vlakno, 226  
 Izgube v resonatorju, 62, 67, 93, 94  
   notranje, 62  
 Izhodna moč laserja, 95  
 Izstopno delo, 243
- Johnson-Nyquistov šum, *glej* Šum, termični  
 Johnsonov šum, *glej* Šum, termični  
 Jonesov vektor, 13  
 Jonesova matrika, 14

- Kalcit, 24
- Karakteristika diode, 250
- Karakteristika fotodiode, 251, 253
- KDP, 24, 141, 145, 149, 151, 178, 179, 181
- Kerrov pojav, 177
- optični, 158, 171, 237
- Kerrov tenzor, 177
- $\text{KH}_2\text{PO}_4$ , *glej* KDP
- Kirchhoffov integral, 18, 64
- Kleinmanova domneva, 141
- Koeficient  $M$ , 194
- Koeficient ojačenja, 83, 96
- Koherenčna dolžina, 28
- Koherenčna ploskev, 32, 34
- Koherenčna razdalja, 26, 32
- Koherenčni čas, 25, 28, 30
- Koherenca, 25
- časovna, 25, 27
- prostorska, 26, 32
- Kompleksna ukrivljenost, 42
- Kompleksni krivinski radij, 42
- Kvantizacija polja, 71, 88
- Kvantna limita detekcije, 262
- Kvantni izkoristek, 244, 247
- notranji, 244
- zunanji, 244
- Laguerre-Gaussovi snopi, 44
- Lambova vdolbina, 87
- Laser, 93, 120
- argonski, 81, 123, 126
- $\text{CO}_2$ , 124, 126
- ekscimerni, 126
- He-Ne, 48, 81, 84, 85, 121, 126
- Nd:steklo, 128, 129
- Nd:YAG, 81, 84, 85, 127, 128, 144
- organska barvila, 130, 224
- polprevodniški, 81
- Ti:safir, 81, 128, 129, 224
- vlakenski, 29, 66, 131
- zgradba, 122, 123, 125, 128, 131
- Laserski sistemi, 120
- Lastne frekvence resonatorja, 53, 54, 60
- LED, 29
- $\text{LiNbO}_3$ , 24, 141, 155, 156, 175, 178, 181, 187
- $\text{LiTaO}_3$ , 241, 242
- Lomni količnik, 10, 21, 22, 147, 176, 180, 187, 188, 195, 204
- efektivni, 159
- izredni, 22
- nelinearni, 159
- redni, 22
- Lomni zakon, 15, 23
- Magnetizacija, 9
- Magnetna permeabilnost, 9
- Magnetno polje
- gostota, 9, 11
- jakost, 9
- Makerjeve oscilacije, 146
- Marcusejeva formula, 213, 228
- Matrike ABCD, 49, 51, 59
- Maxwellova porazdelitev, 85
- Maxwellove enačbe, 9
- robni pogoji, 10
- Metoda sklopljenih valov, 191
- Metoda vzdolžnega premika, 162
- Michelsonov interferometer, 27
- Multipleksiranje, 226
- Nasičena absorpcija, 79
- nehomogeno razširjene črte, 85
- Navzkrižna fazna modulacija, 237
- Navzkrižna korelacijska funkcija, 33
- Nedejavni žarek, 154
- Nelinearna optika, 140
- drugega reda, 142, 236
- tretjega reda, 158, 237
- v vlaknih, 236
- Neodim, 131
- Neujemanje faz, 155
- Ničelna energija, 73
- Normirana frekvenca, 209
- Notranje ojačenje, 253, 260
- Numerična odprtina, 204
- Nyquistov šum, *glej* Šum, termični
- Območje bližnjega polja, 40
- Obosna valovna enačba, 38, 43, 56, 152, 162, 222
- Obrnjena zasedenost, 81, 82, 95, 229
- Ojačenje s stimuliranim sevanjem, *glej* Stimulirano sevanje
- Ojačenje signala, 247
- Ojačevanje s stimuliranim sevanjem, *glej* Stimulirano sevanje
- Omejen snop, 37
- Operator
- anihilacijski, 89
- kreacijski, 89

- Optična fazna konjugacija, 169, 170
- Optična os, 22
- Optična pinceta, 190
- Optični parametrični oscilator, 155
- Optični vodnik, 204
- število rodov, 209
  - enorodovni, 205, 208
  - lastni rodovi, 206
  - lihi rodovi, 207
  - plašč, 204
  - planparalelni, 204, 206, 226
  - sodi rodovi, 207
  - sredica, 204
  - TE rodovi, 206
  - TM rodovi, 209
  - večrodovni, 208
- Optično črpanje, 82
- Optično frekvenčno podvajanje, 142, 144, 150, 236
- Optično ojačevanje, 81, 84, 93
- v vlaknih, 175, 229
- Optično parametrično ojačevanje, 153
- Optično usmerjanje, 142, 156
- Optično vlakno, 131, 204, 210
- dopirano z erbijem, 229
  - EH rodovi, 213
  - enorodovno, 205, 210, 221, 225
  - HE rodovi, 213
  - LP rodovi, 214
  - parabolični profil, 216
  - TE rodovi, 211
  - TM rodovi, 211
  - večrodovno, 210, 220
- Paraksialna enačba, *glej* Obosna valovna enačba
- Parametrično ojačevanje, *glej* Optično parametrično ojačevanje
- Pasovna širina detekcije, 258
- PbS, 246
- Piksel, 254, 256
- Piroelektrični detektor, 238, 241
- Planckov zakon, 74, 260
- Ploščica  $\lambda/2$ , 14, 181, 197
- Ploščica  $\lambda/4$ , 14, 184
- Ploskev valovnega vektorja, 21
- Pockelsov pojav, 177
- Pockelsov tenzor, *glej* Elektro-optični tenzor
- Poissonova porazdelitev, 257
- Polarizacija, 13
- cirkularna, 13
  - eliptična, 13, 21
  - linearna, 13
  - TE, 15, 205
  - TM, 15, 205
- Polprevodniška fotodioda, *glej* Fotodioda, polprevodniška
- Polprevodnik
- izpraznjeni sloj, 249
  - tip *n*, 249
  - tip *p*, 249
- Poyntingov izrek, 11
- Poyntingov vektor, 11, 45
- Prag delovanja laserja, 94, 96
- Preklop dobre, 190
- Prekrivalni integral, 228, 230
- Presek za absorpcijo, 78, 84
- Presek za stimulirano sevanje, 83, 84
- Preslikava z lečo, 46
- Rabijeva frekvenca, 91
- Rabijeve oscilacije, 91
- Raman-Nathov uklon, 188, 194
- Ramanovo sipanje, 173
- anti-Stokesovo, 173
  - stimulirano, 173, 237
  - Stokesovo, 173
- Ravni val, 12, 26, 37, 38, 71
- Rayleighova dolžina, 40
- Rayleighovo območje, *glej* Območje bližnjega polja
- Rayleighovo sipanje, 173, 225
- Razmerje signal proti šumu, 238, 258
- Razpadni čas, 75
- Resonator, 53, 93
- ciklični, 66
  - koncentrični, 58, 59
  - konfokalni, 58, 61, 62, 64
  - nestabilni, 59
  - odprti, 54
  - parametrični oscilator, 155
  - planparalelni, 56, 58, 59, 61
  - simetrični, 57
- Samo-fazna modulacija, 237
- Samozbiranje, 158, 160
- Saturacijska energija, 94
- Saturacijska gostota toka, 79, 83
- Schrödingerjeva enačba, 91
- nelinearna, 163, 168
- Sekularna enačba

- lihi rodovi, 207
- sodi rodovi, 207
- TE rodovi, 212
- Semiklasični model, 91
- Sevanje črnega telesa, 29, 32, 74, 76, 260
- SFG, *glej* Generacija vsote frekvenc
- SHG, *glej* Optično frekvenčno podvajanje
- Silicij, 246–248, 254, 260, 261
- SiO<sub>2</sub>, 168, 175, 218, 219, 225, 236, 252, 254
- Sklopitev štirih valov, 237
- Sklopitev med valovodi, 231
  - 3-dB sklopitev, 234
- Sklopitev resonatorja
  - z okolico, 66
  - z resonatorjem, 70
- Sklopitev v optično vlakno, 230
  - čelna sklopitev, 230
  - bočna sklopitev, 230
- Soliton
  - krajevni, 160–162
  - optični, 165, 166, 237
- Spekter, 29
  - Gaussov, 29, 31, 85
  - Lorentzov, 29, 31, 63, 75, 84
  - Planckov, 32
  - Voigtov, 85
- Spektralna črta, 75, 98
  - homogena razširitev, 84
  - nehomogena razširitev, 84, 129
- Spektralna gostota energije, 74–77
- Spontano sevanje, 75, 82, 90, 93
- Stabilnost resonatorja, 55, 57, 60
- Standardni odklon, 257
- Stik  $p$ - $n$ , 249
- Stimulirano sevanje, 76, 82, 90, 229
- Stoječe valovanje, 53, 55, 66, 71
- Susceptibilnost
  - efektivna, 144, 148, 174
  - električna, 9
  - kompleksna, 175
  - linearna, 140
  - magnetna, 9
  - nelinearna, 140, 141
  - nelinearna, efektivna, 159
- Tekočekristalni prikazovalnik, 197
- Tekoči kristali, 24, 195
  - 5CB, 195
  - direktor, 195
  - holesterik, 200
  - nematik, 195
  - zasukan nematik, 197, 198
- Telur, 24, 141, 150
- TEM<sub>00</sub>, 59
- Temni tok, 245, 250, 251, 260
- Teraherčno valovanje, 156, 238, 240
- Termistor, 240
- Termočlen, 238, 241
- TGS, 241
- Tirna vrtilna količina, 45
- Totalni odboj, 16, 66, 204, 231
- Trinivojski sistem, 81, 95, 121
- Ujemanje faz, 146, 147, 150, 152, 154, 158, 236
- Uklepanje faz, 190, 223, 224
- Uklon, 17, 37, 64, 187, 188
- Uklonska mrežica, 109, 125, 131, 188, 190, 224
- Ultravijolično valovanje, 123, 126, 150, 225, 238, 243, 245, 248, 252
- Valovna enačba, 10, 210
  - nelinearna, 142, 166, 171
- Valovni vektor, 12, 71, 205
- Valovno število, 11, 206
- van Cittert-Zernikov izrek, 34
- Varianca, 257
- Verjetnost za prehod, 75, 88
- Wiener-Hinčinov izrek, 30
- Youngov poskus, 25, 32
- Z-scan, *glej* Metoda vzdolžnega premika
- Zaporni tok, *glej* Temni tok
- Zasedbene enačbe, 95
- Zasedenost stanj, 77
- Združevanje pikslov, 255
- ZnSe, 160
- ZnTe, 157, 178