实验九　基于 AR 参数模型的随机信号功率谱估计

一．　实验目的

1. 了解随机信号的 AR 参数模型谱估计原理和计算方法。
2. 学习用 MATLAB 编写 AR 参数模型谱估计程序。

二．　实验原理

谱估计的经典法存在以下缺点：

1. 谱的分辨率较低，当分析的数据较短时更甚；
2. 方差性能不好，不是一致估计；
3. 周期图的一些改进方法主要用来改善周期图的方差性能，但往往又降低了分辨率和增大了偏差。因此，它们只是对周期图谱估计进行了某些方面性能改进，但不能根本解决经典谱估计的缺陷问题 。
4. 经典法将窗口以外的数据一律视为零 。（这不符合实际的情况）

现代谱估计即参数模型法—根据对所研究的信号的先验知识，对信号在窗口外的数据做出某种比较合理的假设。现代谱估计与经典谱估计不同，它以参数模型为基础，能够得到小方差和高分辨率；特别是在数据长度很短的情况，更具优势。具体做法如下：

1) 选择一个好的模型 。在输入是冲激函数或白噪声情况下，使输出为所研究的信号，至少也是对信号的一个良好近似；
2) 利用已知的自相关函数或数据求模型的参数；
3) 利用求出的模型参数估计该信号的功率谱 。

以 AR 建模为例将代入下式 $H_{AR}(z)=\dfrac{X(z)}{W(z)}=\dfrac{1}{A(z)}=\dfrac{1}{1+\sum\limits_{k=1}^{p}a_k{}^{(p)}z^{-k}}$

$$P_X(e^{jw})=\frac{\sigma_w{}^2}{\left|A(e^{j\omega})\right|^2}=\frac{\sigma_w{}^2}{\left|1+\sum\limits_{k=1}^{p}a_k{}^{p}e^{-j\omega k}\right|^2}$$

其中 a_k 由以下 Yule-Walker(Y-W)方程解出：

$$\begin{bmatrix} R(0) & R(1) & \ldots & R(p) \\ R(1) & R(0) & \ldots & P(p-1) \\ . & . & & . \\ . & . & \ldots & . \\ . & . & & . \\ R(p) & R(p-1) & \ldots & R(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \\ . \\ . \\ . \\ a_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_w^2 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{bmatrix}$$

只要已知或估计出 p+1 个自相关函数值，就能求出 AR 模型中的 p+1 个模型参数 $\{a_1, a_2, \ldots\ldots, a_p, \sigma_w^2\}$。

直接利用 Y-W 方程求解运算量数量级是 p^3。若利用系数矩阵的对称性和 Toeplitz 性质，则可构成一些高效算法。Levinson-Durbin 算法是其中最著名、使用最广泛的一种，其运算量数量级是 p^2，利用该算法由 k 阶模型参数求 k+1 阶模型参数的计算公式如下：

$$\left.\begin{aligned} &\sigma_k^2 = R(0) + \sum_{k=1}^{k} a_{k,i} R(i) \\ &D_k = \sum_{k=0}^{k} a_{k,i} R(k+1-i), a_{k,0} = 1 \\ &\rho_{k+1} = \frac{D_k}{\sigma_k^2} \\ &\sigma_{k+1}^2 = \sigma_k^2 - \rho_{k+1} D_k = (1-\rho_{k+1}^2)\sigma_k^2 \\ &a_{k+1,i} = a_{k,i} - \rho_{k+1} a_{k,k+1-i}, i = 1, 2, \ldots, k \end{aligned}\right\}$$

由于递推公式是建立在 x(n) 的前 p+1 个自相关函数已知的基础上，在实际工作中，我们往往并不能精确地知道 x(n)的自相关函数，而知道的仅仅是 N 点数据，即 $x_N(\mathrm{n}) = 0, 1, \ldots, \mathrm{N}-1$ 。

因此，求功率谱的步骤可以归纳为：

1）由 x_N 估计 $x(\mathrm{n})$ 的自相关函数 $\hat{R}_x(\mathrm{m}), \mathrm{m} = 0, 1, \ldots, p$；

2）$\hat{R}_x(\mathrm{m})$ 代替 $R_x(\mathrm{m})$，求 Y-W 方程。这时求出的模型参数是真实参数的估计值，$\hat{a}_p(1), \hat{a}_p(2), \ldots, \hat{a}_p(p), \hat{\sigma}_p^2$；

2）用这些参数求出 $x(\mathrm{n})$ 的功率谱估计 $\hat{P}_X(e^{jw})$ 。将 w 在单位圆上均匀抽样，共 N 点，得到离散谱 。

三. 实验内容

1. 对于给出的 300 点数据（见 data.mat，信号单位：V），利用有偏估计方法计算自相关序列 $\hat{R}_x(\mathrm{m})$ 并作图显示。

2. 利用 1 中求得的 $\hat{R}_x(\mathrm{m})$ 估计 3 阶 AR 模型参数 $\hat{a}_3(1), \hat{a}_3(2), \hat{a}_3(3), \hat{\sigma}_3^2$，计算 AR 模型功率谱估计并作图显示（本题需编程求解 Yule-Walker 方程，请勿直接调用函数）。

参考程序：

```
...
b = 1;
[h,w] = freqz(b,a);      %  AR 模型是一个全极点模型，所以 b=1；a 为 AR 模型参数
                         %  h 为 freqz 求出的频率响应，w 为对应的角频率。
P = e*abs(h).^2;         %  求功率，e 为模型白噪声方差。
plot(w*fs/(2*pi),P);     %  作图显示 AR 模型功率谱估计，w*fs/(2*pi) 将角频率转化
                         %  成频率形式 ，其中 fs=1 Hz，表示信号采样率。
...
```

3. 利用 2 中计算出来的 3 阶 AR 模型参数，采用 Levinson-Durbin 递推算法求解 4 阶 AR 模型参数。另外，使用函数 aryule 直接求出 4 阶 AR 模型参数。作图显示两种方法的功率谱，并比较这两种方法计算出来的方差和反射系数。

4. 已知随机信号 x(n) = A1*cos(2πf_1n) + A2*cos(2πf_2n) + A3*noise(n)，n=0,1,2...N-1，其中 noise 为白噪声(见数据 noise.mat)，A1=1.5，A2=2，A3=0.4，f_1=0.3，f_2=0.35，N=1024，采样率 f_s=1Hz。（信号单位：mV）。要求白噪声方差估计小于 0.3，选择合适的阶数使 AR 模型功率谱估计能够区分信号中 f_1 和 f_2 两个频率分量，作图显示功率谱。（使用函数 aryule 求 AR 模型参数）

5. 对于给出的脑电信号（见 EEG.mat，采样率 1000Hz，信号单位：μV），截取该信号的前 500 点、1000 点、5000 点，分别使用 Yule-Walker 方程计算 4 阶 AR 模型参数，求模型功率谱估计并作图显示。（使用函数 aryule 求 AR 模型参数）

四、实验报告要求

报告要求如下：

西安交通大学实验报告

成绩	

课　　程　医学信号处理　实验日期：　　　年　　月　　日

专业班级 ________　　交 报 告 日 期：　　　年　　月　　日

姓名 ________　学号 ________　报告退发：　(订正、重做)

报告内容应包含实验名称，实验目的，实验内容及结果，实验结果与回答分析讨论等。

五．相关 MATLAB 函数

1. 函数 randn

   功能：用于产生高斯白噪声

   语法：randn(n, m)

   说明：产生的信号大小 n*m。当 randn(n)，产生的信号大小为 n*n。

2. 函数 freqz

   功能：计算线性系统的频率响应，包括幅频和相频响应

   语法：[h,w]=freqz (b, a)

   说明：b，a 为 ARMA 模型系数向量，f 为频率响应包括幅频和相频信息，w 为对应的角频率。当 a=1 时，系统参数模型为 MA 模型；当 b=1 时，系统参数模型为 AR 模型。

3. 函数 aryule

   功能：利用 Yule-Walker 方法求解 AR 模型参数

   语法：[a,e,k] = aryule(x,p)

   说明：x 为观测信号，被假设为 AR 系统对应白噪声输入系统后的输出序列，p 表示选择的模型阶数。向量 a 表示包含了 AR 模型归一化的参数（不包括

白噪声的方差估计），e 表示输入白噪声的方差估计，向量 k 按升序保存着从 1 到 p 阶的反射系数。

六、Yule-Walker 方程的参考解法

用消元法求解 Yule-Walker 方程的计算过程较复杂，在第二题求解时可参考以下方法：

1. 写出三阶 Yule-Walker 方程

$$\begin{pmatrix} R(0) & R(1) & R(2) & R(3) \\ R(1) & R(0) & R(1) & R(2) \\ R(2) & R(1) & R(0) & R(1) \\ R(3) & R(2) & R(1) & R(0) \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a1 \\ a2 \\ a3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma^2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2. 通过计算方程得下式

$$R(0)+a1R(1)+a2R(2)+ a3\ R(3)= \sigma^2 \qquad (1)$$

$$R(1)+a1R(0)+a2R(1)+ a3\ R(2)= 0 \qquad (2)$$

$$R(2)+a1R(1)+a2R(0)+ a3\ R(1)= 0 \qquad (3)$$

$$R(3)+a1R(2)+a2R(1)+ a3\ R(0)= 0 \qquad (4)$$

3. 将式（2）、（3）、（4）的常数项移到右边

$$a1R(0)+a2R(1)+ a3R(2)= -R(1)$$

$$a1R(1)+a2R(0)+ a3R(1)= -R(2)$$

$$a1R(2)+a2R(1)+ a3R(0)= -R(3)$$

写为矩阵形式：

$$\begin{pmatrix} R(0) & R(1) & R(2) \\ R(1) & R(0) & R(1) \\ R(2) & R(1) & R(0) \end{pmatrix} \begin{bmatrix} a1 \\ a2 \\ a3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R(1) \\ -R(2) \\ -R(3) \end{bmatrix} \qquad (5)$$

4. 对式（5）左乘（6），计算得出 a1、a2、a3，带入（1）式，得到σ2。

$$\begin{pmatrix} R(0) & R(1) & R(2) \\ R(1) & R(0) & R(1) \\ R(2) & R(1) & R(0) \end{pmatrix}^{-1} \qquad (6)$$

注：求逆矩阵可使用 inv 函数；R（0）为 xcorr 函数求得的第 N 个点的值。