实验八　随机信号功率谱的经典估计

一、实验目的

1. 利用功率谱的经典法估计实现对随机信号的功率谱估计。

2. 观察数据长度、窗函数、平均次数等对谱估计的分辨率、稳定性、主瓣宽度和旁瓣效应的影响 。

3. 学习使用 FFT 提高谱估计的运算速度 。

4. 掌握不同经典功率谱估计方法的优缺点 。

二、实验内容

1. 已知随机信号 $x(n) = A1*\cos(2\pi f_1 n) + A2*\cos(2\pi f_2 n) + noise(n)$，n=0,1...N-1 其中 *noise* 为白噪声(见数据 noise.mat)，A1=2，A2=2，f_1=0.32，f_2=0.35，N=1024，采样率 fs=1Hz。（信号单位：mV）

1）当 $x(n)$ 样本数分别取 N1=64，N2=128，N3=256 时，显示截取信号，用周期图法求功率谱并作图(横坐标用频率 f 表示，单位 Hz)，对比功率谱有何不同；

2）当 N2=128，A1=0.2，A2=2 时，用周期图法求功率谱并作图；

3）利用修正周期图法对 1）中 N2=128、N3=256 的序列计算功率谱并作图；（选用窗函数：巴特利特 bartlett、汉宁窗 hanning）；

4）将信号 $x(n)$分成 K 段，当段长为 128、256、512 时，分别用 Bartlett 法求功率谱并作图；

5）①取子序列长度 L=128，选用汉宁窗 hanning，相邻子序列长度重叠率为 50%，利用 Welch 法求信号 $x(n)$ 的功率谱并作图。与 4）中段长为 128 时对比有什么不同？

②取 K=7，重叠率为 50%，计算子序列长度 L 应为多少？并与 4）中 K=8 时 Bartlett 法谱估计结果进行对比。

（本题请先根据参考程序自行编写修正平均周期法的程序，再调用 Matlab 中 pwelch 函数，对比结果并验证自编程序的正确性）

6）将 5）中相邻子序列长度重叠率改为 25%、90%，利用 Welch 法求功率谱的结果如何？分析其中的原因。

参考程序：

```
P = 0;                                                  % 保存信号总能量
K = (N - L)/(L/2)+1;                                    % 信号段数
w =hanning(L,'periodic');                               % 窗函数
U = sum(abs(w).^2)/L;                                   % 窗函数每个样本的平均能量
for   j = 1 : K
      xi = x((j-1)*64+1: (j-1)*64+128);                 % 截取第 j 个子序列
      xi_hanning = xi’ .*   w;                          % 对子序列加窗运算
   P = P+abs((fft(xi_hanning,L))).^2/(K*L*U);           % 进行 FFT 变换
end
```

2. 信号为脑电信号，信号采样率 *fs*=1000Hz，信号单位：μV。使用下面不同的方法求信号的功率谱。（脑电信号数据 EEG.mat）

1）取长度 N=1024、5120，画出脑电信号图形，使用周期图法求功率谱并作图。

2）使用修正周期图法计算 1）中脑电信号的功率谱并作图（选择窗函数：海明窗 hamming）。

3）取长度 N=5120，分别用 Bartlett 和 Welch 法计算功率谱并作图（Bartlett 法：K=5，L=1024；Welch 法：子序列长度 L=1024，重叠率为 50%，窗函数选用 hanning，使用 pwelch 函数。）

三、实验报告要求

报告要求如下：

西安交通大学实验报告

成绩	

课　　程 医学信号处理专题实验　　实验日期：　年　　月　　日

专业班级 ______________　　交报告日期：　　年　　月　　日

姓名__________　学号 ____________ 报　告　退　发：(订正、重做)

报告内容应包含实验名称，实验目的，实验内容及结果，实验结果与回答分析讨论等。

附录：

一．　实验原理

1. 基本周期图法

简称周期图法。假设已知随机信号 $x(n)$ 的 N 个样本点，利用周期图方法，信号 $x(n)$ 的功率谱估计为：

$$\hat{P}(w)=\frac{1}{N}\left|\sum_{n=0}^{N-1}x(n)\mathrm{e}^{-jwn}\right|^2 \quad (1\text{-}1)$$

利用上述方法得到的谱估计方差与信号 $x(n)$ 的功率谱平方$[P(w)]^2$成正比，周期图法作为功率谱的估计是很粗糙的，不仅会产生偏差，而且由于滞后窗频率特性主瓣的平滑作用，分辨任何两个频率接近的窄带成分能力有限，为了减小它的方差，可以将信号序列进行分段处理，然后再求各分段结果的平均，引出了下面的一些改善的周期图方法，它特别适用于FFT直接计算功率谱估值。

2. 修正周期图法

由周期图法上可知信号 x(n) 的功率谱估计可以表示为：

$$\hat{P}(\mathrm{w})=\frac{1}{N}\left|\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^R(n)\mathrm{e}^{-jwn}\right|^2 \quad (1\text{-}2)$$

其中 $W_N^R(n)$ 表示长度为N的矩形窗。

虽然矩形窗傅里叶变换的主瓣比其他形状的窗的主瓣要窄，因而周期图被平滑的程度最轻，但是由于矩形窗的傅里叶变换的旁瓣比其他形式的窗的旁瓣要高，因而旁瓣泄漏现象严重。当将式（1-2）中矩形数据窗 $W_N^R(n)$ 改成其他的数据窗 $W_N(n)$，计算出来的周期图便是修正周期图。可用以下式子定义：

$$\hat{P}(\mathrm{w})=\frac{1}{UN}\left|\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N(n)\mathrm{e}^{-jwn}\right|^2 \quad (1\text{-}3)$$

其中N数据的长度，U 表示窗函数序列每个样本的平均能量：

$$U=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}|W_N(n)|^2 \quad (1\text{-}4)$$

3. 平均周期图方法------Bartlett **法**

假设将一个随机序列 x(n) （$0 \le n < N$ ）分成K段，每段长度为L，各段之间互不重叠，因而有N=K*L 。因此，第i段的信号序列可表示为：

$$x_i(\mathrm{n}) = x(\mathrm{n} + \mathrm{i}\,L) \qquad 0 \le n < L, 0 \le i \le K\text{-}1 \qquad （1\text{-}5）$$

每一段信号序列的周期图可写成：

$$\hat{I}_i(\mathrm{w}) = \frac{1}{L} \left| \sum_{n=0}^{L-1} x_i(\mathrm{n})\,\mathrm{e}^{-jwn} \right|^2 \qquad 0 \le i \le K\text{-}1 \quad （1\text{-}6）$$

于是，功率谱估计定义为：

$$\hat{P}(\mathrm{w}) = \frac{1}{K} \sum_{i=0}^{K-1} \hat{I}_i(\mathrm{w}) \qquad （1\text{-}7）$$

对于固定的记录长度来讲，分段数 K 增大可使谱估计的方差减小，但是由于 L 的减小，相应的功率谱主瓣增宽，谱分辨率降低，显然，方差和分辨率也是矛盾的。除了分辨率降低以外，分段处理还会引起序列的长度有限所带来的旁瓣效应。为减小这种影响，最有效的办法是给分段序列用适当的窗函数加权，可以得到较平滑的谱估计，当然，相应的分辨率也有所下降。

4. 修正平均周期图法------Welch 法

主要是对平均周期图方法做了2点修改，一是让子序列 $x_i(\mathrm{n})$ 有部分重叠，二是对子序列可以加除矩形窗以外的数据窗。设子序列 $x_i(\mathrm{n})$ 的长度为L，相邻两个子序列有L-D点重叠，总共有K个子序列，于是第i个子序列为：

$$x_i(n) = x(n + iD) \qquad 0 \le n \le L-1, 0 \le i \le K\text{-}1 \qquad （1\text{-}8）$$

则K个子序列的总长度N=L+(K-1)*D。若D=L，则N=K*L，即为平均周期图方法。Welch法可以用以下式子表示：

$$\hat{P}(\mathrm{w}) = \frac{1}{KLU} \sum_{i=0}^{K-1} \left| \sum_{n=0}^{L-1} W_N(n) x_i(n + iD)\,\mathrm{e}^{-jwn} \right|^2 \qquad （1\text{-}9）$$

其中U 表示窗函数序列每个样本的平均能量，即

$$U=\frac{1}{L}\sum_{n=0}^{L-1}|W_N(n)|^2 \qquad （1-10）$$

对于给定的N和K，用Welch法得到的估计方差小于用Bartlett法得到的估计方差。

二、MATLAB 相关函数

1. 函数 randn

   功能：用于产生高斯白噪声

   语法：randn(n, m)

   说明：产生的信号大小 n*m。当 randn(n)，产生的信号大小为 n*n。

2. 函数 pwelch

   功能：用于信号的频谱分析

   语法：pwelch(x,window,noverlap,NFFT,Fs)

   说明：x 表示原信号；window 代表窗函数向量；noverlap 为相邻子序列的重叠数(子序列样本数*重叠率)；NFFT 表示 FFT 点数，一般为 2 的幂次方；Fs 表示信号的采样率。