國立臺灣科技大學
財務金融研究所碩士班

# 碩士學位論文

學號：M11218014

# 風險中立機率密度尾部配適方法與報酬率預測能力：比特幣選擇權之實證分析

**Risk Neutral Density Tail Estimation and Return Predictability: Empirical Evidence from the Bitcoin Options Market**

研究生：王士誠
指導教授：薛博今 博士
繆維中 博士

中 華 民 國 一 一 四 年 六 月

# 摘要

# Abstract

# 誌謝

# 目錄

# 圖目錄

# 表目錄

# 第一章、緒論

加密貨幣市場於過去十年間經歷了顯著的發展與轉變，隨著市場規模擴大，機構投資人的參與程度提升，加密貨幣衍生性商品市場亦呈現蓬勃發展之態勢。其中，比特幣選擇權市場的成長尤為顯著，根據加密貨幣資訊服務公司 The Block 之統計，截至 2024 年第三季，全球最大的比特幣選擇權交易平台 Deribit 之未平倉量已占整體市場 80% 以上的比重，顯示其在價格發現功能上扮演關鍵角色。

傳統金融市場中，選擇權價格蘊含著市場參與者對標的資產未來價格分配的預期。Breeden 和 Litzenberger (1978) 首次提出可從選擇權價格中提取風險中立機率密度（Risk Neutral Density, RND），為選擇權定價理論開創了嶄新的研究方向。然而，由於加密貨幣市場具有全天候交易、高波動性等特性，使得傳統的 RND 估計方法在應用上面臨諸多挑戰。特別是在處理 RND 尾部配適問題時，現有文獻多採用廣義極值分配（Generalized Extreme Value Distribution, GEV）或廣義柏拉圖分配（Generalized Pareto Distribution, GPD）進行估計。McNeil 和 Frey (2000) 提出結合 GARCH 模型與極值理論的方法來估計金融時間序列的尾部風險，特別強調 GPD 在建模金融時間序列極端事件上具有獨特優勢。

儘管如此，現有的尾部配適方法仍存在若干限制。首先，雙點配適法要求同時滿足兩個接合點的連續性條件，不僅增加了計算複雜度，也可能影響估計結果的穩定性。其次，在加密貨幣市場中，由於價格波動劇烈，選擇權價格的資訊內涵可能隨市場情緒快速變化，這使得雙點配適法之適用性受到挑戰。再者，現有研究較少探討 RND 特徵在不同預測期間的表現差異，特別是在加密貨幣這類新興市場中。

為了解決上述問題，本研究提出一套 RND 尾部使用 GPD 之單點配適法。此方法不僅簡化了接合點條件，更在保持理論一致性的前提下，提升了估計效率。具體而言，本研究的貢獻可分為三個面向：首先，在方法論層面，我們提出的單點配適法透過結合累積分布函數值與密度函數斜率的連續性條件，在維持估計品質的

同時，顯著提升了計算效率。實證結果顯示，此方法不僅能有效處理加密貨幣市場的高波動特性，在計算速度上更較傳統雙點配適法提升約 10.95%；其次，本研究深入探討了 RND 統計特徵對比特幣價格走勢的預測能力。特別是，我們發現在日報酬率預測中，偏態（Skewness）、中位數（Median）及前期報酬率等變數展現出顯著的預測力；而在週報酬率預測中，超額峰態（Excess Kurtosis）與市場情緒指標則扮演更重要的角色。這些發現不僅豐富了加密貨幣市場的實證研究文獻，更為投資決策提供了重要參考；最後，透過比較單點配適法與傳統雙點配適法在不同市場情境下的表現，本研究為實務應用提供了具體的指引。實證結果顯示，單點配適法在處理極端市場情況時展現出較佳的穩定性，這對於加密貨幣市場的風險管理具有重要意涵。

# 第二章、文獻回顧

## 2.1 風險中立機率密度方法論

風險中立機率密度（Risk Neutral Density, RND）之概念最早由 Breeden 和 Litzenberger (1978) 提出，研究證明了可從選擇權價格中提取出市場對標的資產未來價格分布之預期。此研究發現為選擇權定價理論開創了新的研究方向。Birru 和 Figlewski(2012)更進一步研究 2008 年金融危機期間 S&P 500 指數選擇權之 RND 變化，發現在市場壓力增加時，RND 之形狀會出現顯著變化，研究採用廣義極值分配（Generalized Extreme Value Distribution, GEV）以完善 RND 尾部的估計，此方法在處理極端市場條件下具有效果 (Hosking & Wallis, 1987)。

於實務應用層面，McNeil 和 Frey (2000) 提出結合 GARCH 模型與極值理論（EVT）的方法來估計金融時間序列的尾部風險。其研究特別強調，廣義柏拉圖分配（Generalized Pareto Distribution, GPD）在建模金融時間序列的極端事件上具有獨特優勢。實證結果顯示，結合 GARCH-GPD 之方法不僅能有效估計尾部風險，還能適當反映市場波動度的動態變化。

近期研究方面，Uberti (2023) 提出了一個納入偏態（Skewness）與峰態（Kurtosis）的 Markowitz 模型擴展，研究發現，當考慮偏態與峰態時，最佳投資組合的風險會高於傳統平均數－變異數模型。

風險中立機率密度之估計，主要可分為參數法和非參數法兩大類。參數法是假設 RND 符合特定的機率分布族，如對數常態分配或廣義極值分配；非參數法則直接從市場期權價格資料中提取 RND，不預設任何分配形式 (Figlewski, 2018)。He, Peng, Zhang, & Zhao (2022) 建議使用廣義柏拉圖分配來估計 RND 的尾部，這種方法在處理極端市場條件下特別有效。Figlewski (2018) 特別強調，建構 RND 時需要審慎處理期權價格中的雜訊和極端值。他建議採用四階或更高階的樣條函數進行

平滑化處理，以避免 RND 出現不合理的尖峰或負值機率。這個技術細節的處理對於確保 RND 估計的可靠性至關重要，也為後續研究提供了重要的方法論指引。

## 2.2 加密貨幣衍生性商品市場發展

隨著加密貨幣市場的蓬勃發展，比特幣衍生性金融商品的重要性與日俱增。Zulfiqar 和 Gulzar (2021) 指出，Deribit、LedgerX 等交易所提供的比特幣期權交易，為投資人提供了更多元的避險工具。特別是芝加哥商品交易所（CME）於 2020 年第一季推出比特幣選擇權，更為這個新興市場帶來重要的里程碑。根據其研究，比特幣期權市場展現出獨特的波動度特徵，特別是在隱含波動度方面呈現出明顯的前偏斜（Forward Skew）現象，這與商品期權市場的特徵相似。此外，短天期期權的波動度微笑（Volatility Smile）現象特別明顯，反映出市場對極端風險的定價考量。

風險特徵方面，Chordia et al. (2021) 之研究發現，比特幣期權市場的 RND 往往呈現出顯著的左偏和超額峰度，這反映了投資人對加密貨幣市場下跌風險的擔憂。Akyildirim et al. (2020) 進一步指出，加密貨幣市場在投資者「恐懼」情緒升高時表現出較高的波動性，且其波動性與 VIX 等傳統波動性指標在這些時期呈現顯著相關性。

值得注意的是，Jackwerth (2020) 透過分析 S&P 500 指數選擇權之風險中立機率，發現市場在 2020 年 2 月 20 日尚未反映出即將到來的危機，直到 3 月 16 日才完全體現出危機的影響。這個發現顯示加密貨幣市場的效率性與傳統金融市場類似，都需要一定時間來消化和反映重大事件的影響。

## 2.3 選擇權市場實證研究回顧

在實證研究方面，Mohrschladt 和 Schneider (2021) 使用高頻期權交易資料進行分析，發現價內期權與價外期權的隱含波動度差異具有重要的資訊含量。特別是

在計算模型自由隱含偏態（Model-Free Implied Skewness）時，若僅使用價外期權可能會忽略重要的市場資訊。他們的研究顯示，價內期權（ITM options）包含了重要的市場資訊，應納入分析考量。

Feng, He, and Zhang (2024) 針對市場偏態對股票報酬的預測能力進行研究，發現好偏態（Good Skewness）不僅在樣本內具有顯著的預測能力，在樣本外測試中也展現出優異的表現。特別是當與總體經濟變數和波動度變數相比較時，好偏態能提供互補或主導性的資訊。

Li, Wu, Zhang, & Zhang (2024) 的最新研究發現，風險中性偏態（Risk-Neutral Skewness, RNS）對未來股票報酬具有顯著的預測能力，尤其在經濟衰退期間表現更為顯著。從經濟學角度來看，RNS 包含了市場參與者對未來投資機會集合的預期。當 RNS 上升時，表明投資人預期未來報酬分配向右偏移，投資環境趨於改善。這種預測能力在經濟衰退期間表現更為顯著，這與 Cujean 和 Hasler (2017) 的理論預測一致，即在經濟狀況惡化時，不確定性上升導致投資人意見分歧加劇，進而強化了預測能力。

在市場情緒指標方面，Köse et al. (2024) 的研究指出，VIX 與比特幣價格之間存在統計顯著的負相關關係。具體而言，當 VIX 上升時，比特幣價格往往會下跌，這表明加密貨幣市場仍缺乏完善的保護性控制機制，使其具有較高的不確定性。

以上文獻回顧涵蓋了風險中立機率估計的理論發展、加密貨幣市場的特性，以及相關實證研究的重要發現，為本研究建立了堅實的理論基礎。這些研究成果不僅有助於我們理解比特幣選擇權市場的特性，也為後續的實證分析提供了重要的方法論參考。

# 第三章、資料來源

## 3.1 資料來源

本研究採用全球最大比特幣選擇權交易平台 Deribit 交易所[1]提供之歷史交易數據作為研究樣本。研究期間涵蓋 2020 年 1 月至 2024 年 4 月，所蒐集資料包含每日交易量、收盤價、隱含波動率、現貨價及期貨價等交易資訊。選擇 Deribit 交易所作為研究對象，主要基於其在全球加密貨幣選擇權市場的領導地位。

根據加密貨幣資訊服務公司 The Block 之統計數據[2]顯示，在主要的三大交易平台（Deribit、OKX 及 Binance）中，Deribit 不僅擁有最大的交易量，其未平倉量更占整體市場 80% 以上的比重（如圖 3-1），此優勢地位主要源自其悠久的經營歷史與穩健的市場發展策略。

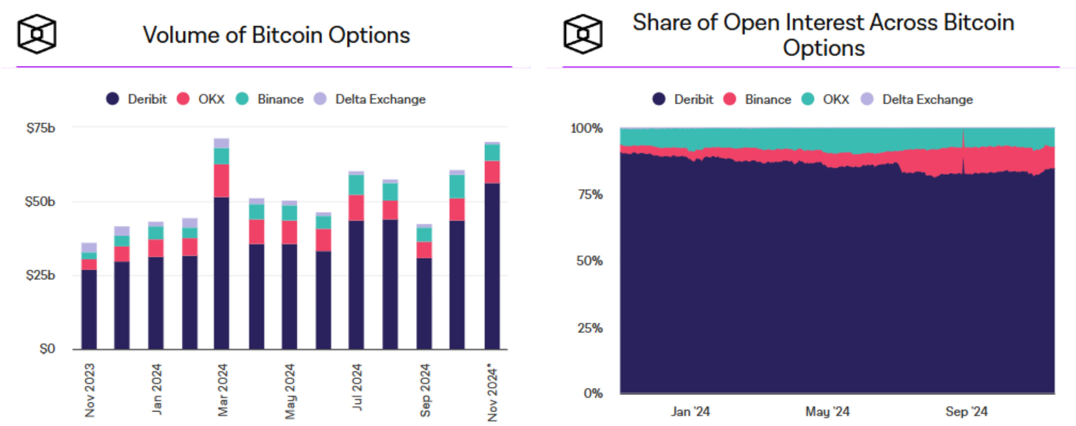


圖 3-1：比特幣選擇權市場交易量與未平倉量數據統計

（資料來源：The Block 官方網站）

Deribit 成立於 2016 年，總部設於荷蘭，其名稱由「Derivatives」（衍生性商品）與「Bitcoin」（比特幣）組合而成，為全球首家推出加密貨幣選擇權商品的專業交

[1] Deribit 交易所官方網站：https://www.deribit.com/

[2] 資料來源：https://www.theblock.co/data/crypto-markets/options

易所。

就商品設計而言，Deribit 提供之比特幣歐式現金結算選擇權採 24 小時全天候交易機制[3]，到期時間統一設於世界標準時間 08:00（UTC+0）。在到期日期的選擇上，交易所提供多元化的商品組合，包含：短期合約（1 日、2 日、3 日）、中期合約（1 週、2 週、3 週）、月底到期長期合約（1、2、4、5、7、8、10、11 月）及季度到期長期合約（3、6、9、12 月）

此多樣化的商品設計不僅能滿足不同投資人的交易需求，更有助於提升市場流動性與價格發現效率。特別是在 2020 年 10 月後，Deribit 增設每日與每週到期之商品，大幅提升了市場參與度，交易量也隨之顯著成長。

## 3.2 比特幣選擇權交易市場概況

本研究將透過比特幣選擇權歷史交易數據進行實證分析，探討選擇權市場中的隱含波動率與市場預期價格變動之關聯性，並計算風險中立機率密度函數（Risk Neutral Density, RND），分析其於不同市場氛圍下之變化。

在交易筆數（圖 3-2）與交易量（圖 3-3）方面，自 2020 年 10 月起出現明顯的成長趨勢。此轉折點與 Deribit 擴充商品線、新增每日及每週到期商品的時間點相符，顯示商品多樣化策略確實有效提升了市場活絡度。其次，觀察 2023 年下半年的市場表現，交易量再次呈現大幅增長態勢，特別是在 2023 年 9 月後，隨著比特幣現貨價格的強勁上漲，買權交易量更於 2024 年 2 月創下歷史新高。此現象反映出市場參與者對比特幣後市持續看好，投資人偏好透過選擇權商品進行投機或避險操作。就市場深度而言，自 2023 年下半年以來，交易量的持續攀升不僅反映出市場參與度的提高，更顯示比特幣選擇權市場的流動性與深度已趨於成熟。這種市場結構的改善，有助於降低交易成本、提升價格發現效率，進而吸引更多機構投

[3] Deribit 選擇權合約說明：https://www.deribit.com/kb/options

資人參與。比特幣選擇權市場展現出明顯的成長動能與結構性改善，為後續研究提供了豐富且具代表性的數據基礎。

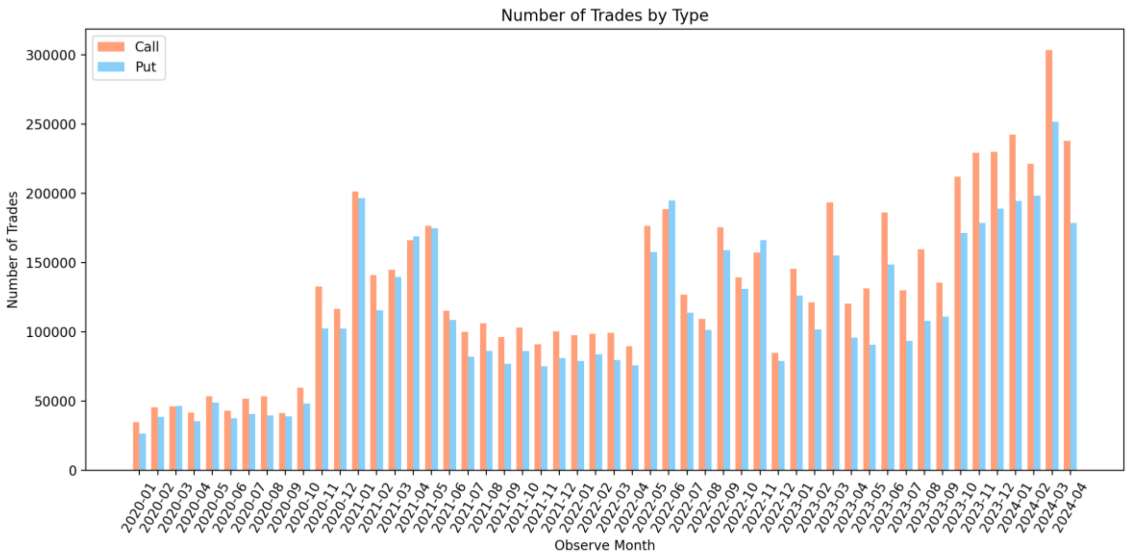


圖 3-2：2020 年 1 月至 2024 年 4 月比特幣選擇權買權、賣權每月交易筆數

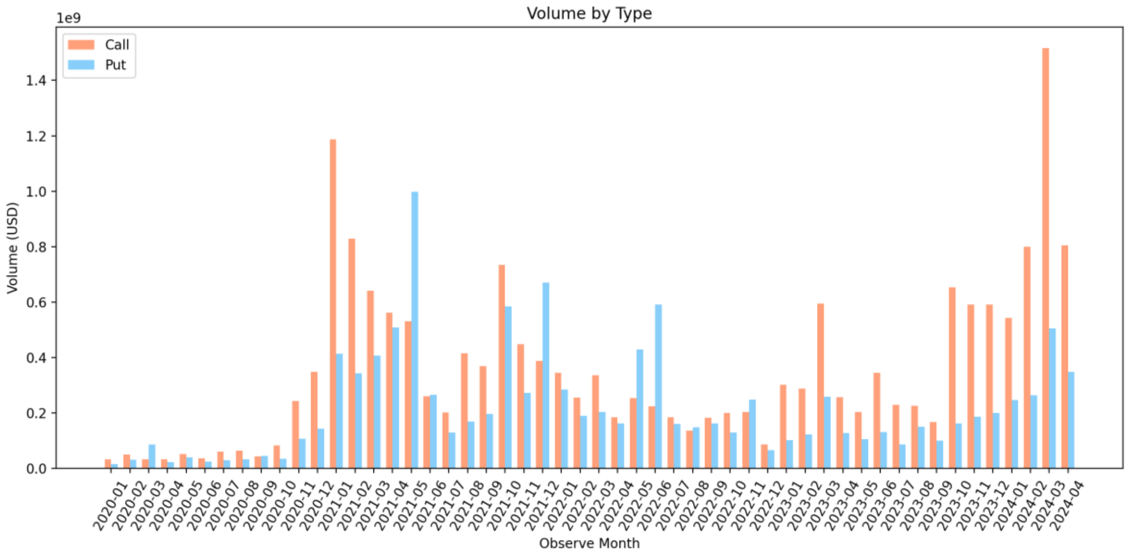


圖 3-3：2020 年 1 月至 2024 年 4 月比特幣選擇權買權、賣權每月交易量

本研究透過總交易量熱圖分析，觀察比特幣選擇權市場之交易型態。就買權市場而言（圖 3-4），交易活動明顯聚集於價平附近區域，尤以 Moneyness $\left(\frac{StrikePrice(K)}{SpotPrice(S)}\right)$介於 0.9 至 1.1 間之交易最為活絡。其中略偏價外（1.0-1.1）之買權更創下 2,072 百萬美元之最高交易量，顯示投資人偏好運用較具槓桿效果之價外買

權進行交易。反觀深度價外（大於 1.5）之買權交易量相對稀少，顯示市場參與者對執行價過高之買權興趣缺乏。

就到期期間結構而言，短天期買權市場呈現較高之交易活絡度，尤以 31 至 90 天期間之買權在各比率區間均維持相當成交量。值得注意者為，極短天期（14 天以內）之買權於價平附近仍維持可觀交易量，此現象反映市場存在顯著之短線投機交易需求。另一方面，長天期（180 天以上）買權之交易相對清淡，惟於深度價外區域（大於 2.0）出現高達 392 百萬合約之異常交易量，研判可能與特定投資策略或法人避險需求有關。

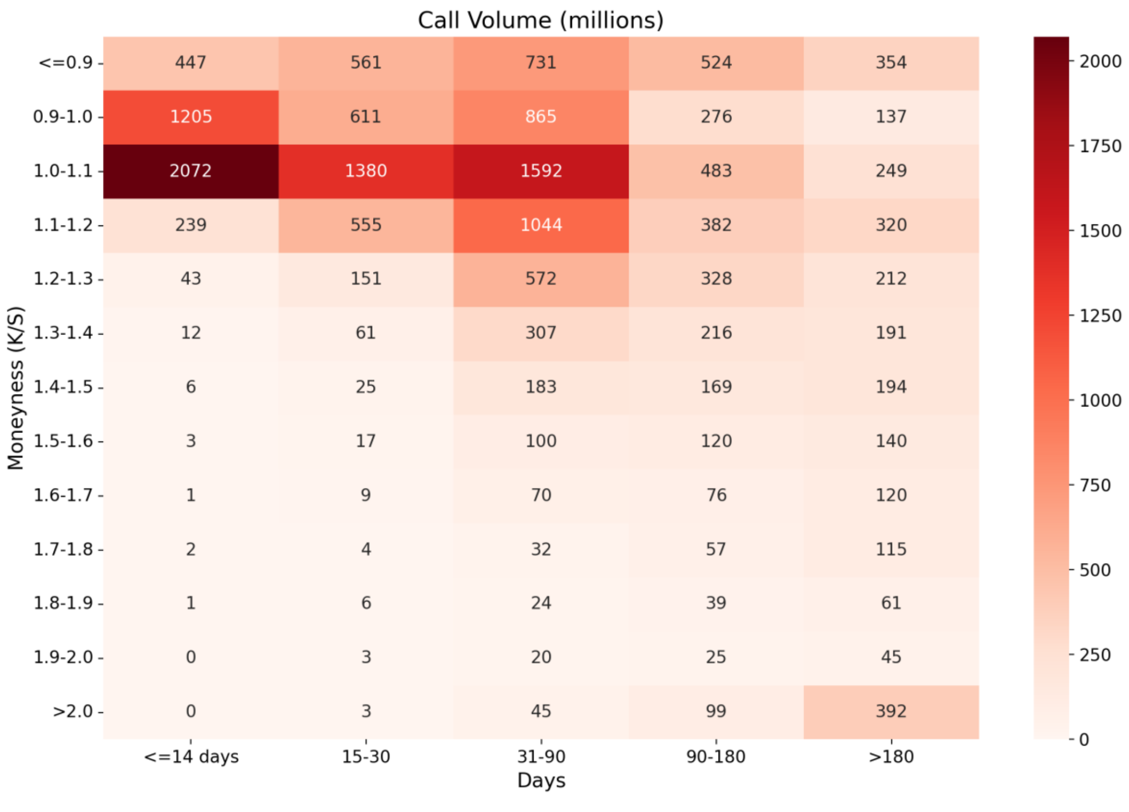


圖 3-4：2020 年 1 月至 2024 年 4 月比特幣買權總交易量熱圖

賣權市場(圖 3-5)則呈現迥異之交易特徵。交易活動高度集中於價平附近(0.9-1.0)，最高單一區塊交易量達 1,676 百萬美元，遠高於其他區域。深度價外（小於等於 0.7）賣權之交易量相對稀少，此現象顯示市場對比特幣大幅下跌之避險需求相對有限。就到期期間分配而言，短天期賣權（14 天以內及 15-90 天）於價平附近

之交易最為活躍，而中長天期（90-180 天）賣權則於深度價內（大於 1.1）區域出現顯著之交易量（821 百萬美元）。極長天期（180 天以上）賣權之交易量分配較為平均，各比率區間均維持一定水準之成交量。

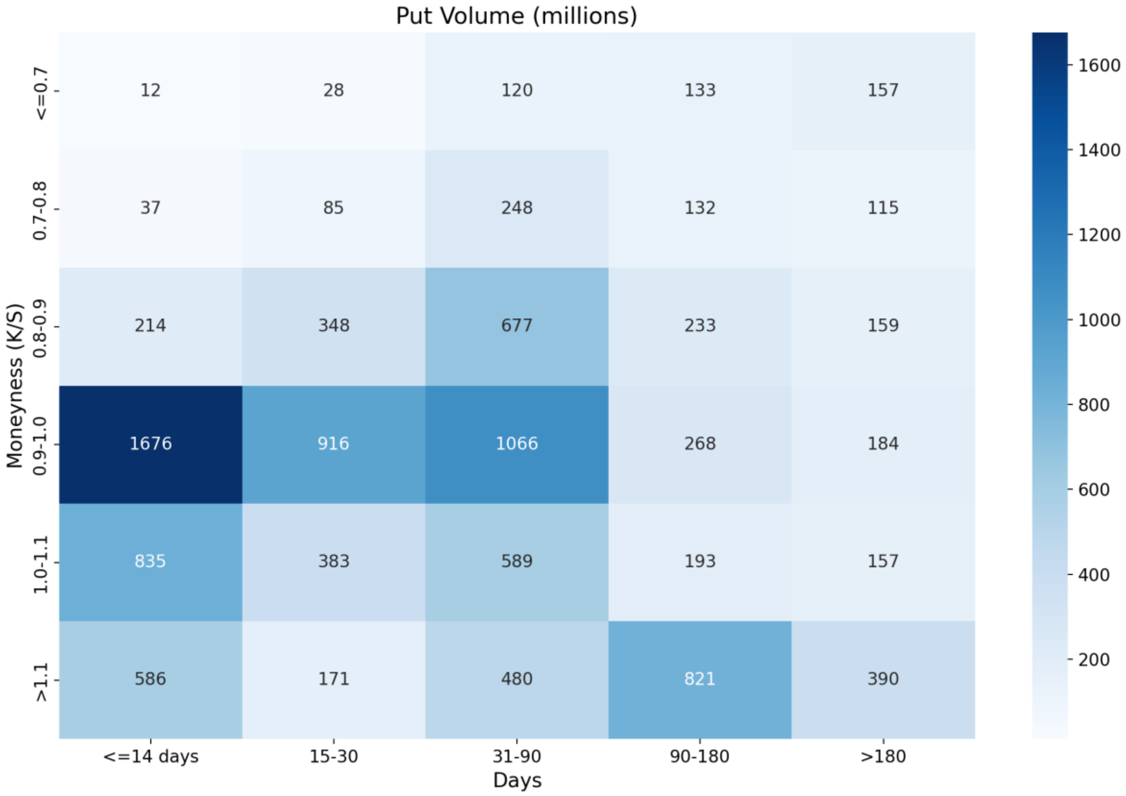


圖 3-5：2020 年 1 月至 2024 年 4 月比特幣賣權總交易量熱圖

比特幣選擇權市場已發展出相當程度之深度與流動性，交易活動主要集中於價平附近區域，反映市場參與者偏好進行較具效率之投機或避險操作。短天期選擇權普遍較受青睞，顯示市場參與者傾向採取短線交易策略。再者，買權整體交易量高於賣權之現象，可能反映市場對比特幣價格走勢持偏多看法。部分特定區域（如深度價外買權及深度價內賣權）出現之異常交易量，則可能與特定投資策略或法人避險需求密切相關。前述交易特徵共同構成當前比特幣選擇權市場之基本面貌，雖然市場已具備相當規模，惟仍以短期投機性交易為主要型態。

# 第四章、研究方法

## 4.1 以理論計算風險中立機率密度之方法

下文中，符號 C、P、S、K、及 T 均代表選擇權標準意義：C 為買權價格、P 為賣權價格、S 為標的資產現價、K 為履約價格、r 為無風險利率、T 為選擇權距到期日天數，本研究也將使用$f(K)$表示為風險中立機率密度函數（Risk Neutral Probability Density Function, RND）和$F(K)=\int_{-\infty}^{K}f(z)dz$表示為風險中立機率累積分布函數（Risk Neutral Distribution Function）。

買權價格是其在到期日天數 T 前之收益預期，折現回當前之價值。於風險中立之情形下，該預期價格則可基於風險中立機率計算，並以無風險利率進行折現，公式如下：

$$C=\int_{K}^{\infty}e^{-rT}\,(S_T-K)f(S_T)dS_T \tag{1}$$

接著將買權價格 C 對履約價格 K 進行一次偏微分，可導出風險中立分布函數$F(K)$，公式如下：

$$\begin{aligned}\frac{\partial C}{\partial K}&=\frac{\partial}{\partial K}\left[\int_{K}^{\infty}e^{-rT}\,(S_T-K)f(S_T)dS_T\right]\\&=e^{-rT}\left[-(K-K)f(K)+\int_{K}^{\infty}-f(S_T)dS_T\right]\\&=-e^{-rT}\int_{K}^{\infty}f(S_T)dS_T\\&=-e^{-rT}[1-F(K)]\end{aligned}$$

移項可得風險中立分布函數$F(K)$為：

$$F(K)=e^{rT}\frac{\partial C}{\partial K}+1 \tag{2}$$

接著對公式(2)中之履約價格 K 再次進行偏微分，可導出於履約價格 K 處之 RND：

$$f(K)=\frac{\partial}{\partial K}\left[e^{rT}\frac{\partial C}{\partial K}+1\right]=e^{rT}\frac{\partial^2 C}{\partial K^2} \tag{3}$$

於實際選擇權交易市場，由於履約價格為離散形式，因此可利用觀察到之選擇權價格，透過有限差分法（Finite Difference Methods, FDM）求得公式(2)與公式(3)之近似解。假設距到期日 T 時，市場上有 N 個不同履約價格的選擇權，其中 $K_1$ 代表最低履約價格，$K_N$ 代表最高履約價格。我們將使用履約價格分別為 $K_{n-1}$、$K_n$ 和 $K_{n+1}$ 的三個選擇權，來求得以 $K_n$ 為中心之的近似值，公式如下：

$$F(K_n)\approx e^{rT}\left[\frac{C_{n+1}-C_{n-1}}{X_{n+1}-X_{n-1}}\right]+1 \tag{4}$$

$$f(K_n)\approx e^{rT}\frac{C_{n+1}-2C_n+C_{n-1}}{(\Delta X)^2} \tag{5}$$

公式(1)至(5)說明了如何以理論方式從一組買權價格 C 中推導出介於履約價格 $K_2$ 和 $K_{N-1}$ 間之 RND。類似的推導方式亦可應用於從賣權價格 P 中計算 RND，對於賣權而言，與公式(2)至(5)對應之等價表達式如下：

$$F(K)=e^{rT}\frac{\partial P}{\partial K} \tag{6}$$

$$f(K)=e^{rT}\frac{\partial^2 P}{\partial K^2} \tag{7}$$

$$F(K_n)\approx e^{rT}\left[\frac{P_{n+1}-P_{n-1}}{X_{n+1}-X_{n-1}}\right] \tag{8}$$

$$f(K_n)\approx e^{rT}\frac{P_{n+1}-2P_n+P_{n-1}}{(\Delta X)^2} \tag{9}$$

於本研究中，$\Delta X$ 為一固定之常數值，用以建構等距分布之人工選擇權價格，以填補市場中離散履約價格間之空缺值。此處理方式可解決交易數據稀疏或不均之問題，並確保履約價格之間距一致，便於透過有限差分法進行數值計算，提高估算結果之準確性。

## 4.2 以實務計算風險中立機率密度之方法

前一節所介紹的方法假設存在一組選擇權價格，且這些價格完全符合理論定價關係（公式(1)）。然而，當將其應用於實際市場中交易的選擇權價格時，會面臨幾個重要的問題與挑戰。首先，必須謹慎處理觀察到的選擇權價格中的市場缺陷，否則可能導致推導出的 RND 出現無法接受的特性，例如 RND 在某些區域出現負值。其次，需找到適當的方法來補全 RND 在 $K_2$ 到 $K_{N-1}$ 範圍之外的尾部。本節將介紹本研究與回顧文獻中提出之從市場選擇權價格中計算 RND 的方法，並說明我們在此採用的技術。

### 4.2.1 比特幣適用之 Black-Scholes 模型

在傳統金融市場中，選擇權定價模型（如 Black-Scholes 模型）通常使用無風險利率作為參數，該利率一般由政府債券等低風險資產的收益率代表。然而，在比特幣等加密貨幣市場中，無風險利率的適用性受到限制，因此不被廣泛使用。其因為，比特幣市場缺乏統一的無風險資產。由於加密貨幣市場的去中心化特性，並無政府債券此類被廣泛接受之無風險資產，難以確定單一通用之無風險利率，使無風險利率在此市場中難以適用；並且，比特幣價格之波動率遠高於傳統資產。波動劇烈之特性對於選擇權價格的影響較無風險利率更為顯著，因此交易者更關注隱含波動率的變化，而非無風險利率；其次，在加密貨幣市場中，利率環境可能受到交易所規則與市場供需的影響，並不一定與傳統的無風險利率相關，傳統的利率指標難以反映加密貨幣市場的實際情形；此外，持有比特幣的成本與持有傳統貨幣或資產的成本不同，包括安全性面向和技術風險等因素，這些成本難以透過無風險利率

量化，進一步限制了無風險利率在比特幣選擇權定價中的適用性。

本研究採用 Deribit 交易所之比特幣選擇權交易價格，其為適應加密貨幣市場的特性，計算選擇權價格時採用了更合適的模型（以比特幣計價），符合交易市場使用需求。為符合研究所需，本研究觀察傳統 Black-Scholes 模型（公式(10)），並與 Deribit 交易所提供之計算公式（公式(11)）比較可知，將 Deribit 交易所報價$C_{Deribit}$乘上比特幣現貨價格$S_0$即可得到以美元計價之比特幣選擇權價格。

$$C_{BS} = S_0 \times N(d_1) - Ke^{-rT} \times N(d_2)$$

$$\Rightarrow C_{BS} = S_0 \times \left[ N(d_1) - \frac{Ke^{-rT}}{S_0} \times N(d_2) \right] \; and \; F = S_0 e^{rT}$$

$$\Rightarrow \frac{C_{BS}}{S_0} = N(d_1) - \frac{K}{F} \times N(d_2) \tag{10}$$

$$C_{Deribit} = N(d_1) - \frac{K}{F} \times N(d_2) \tag{11}$$

$$where \; d_1 = \frac{\ln\left(\frac{F}{K}\right) + \left(\frac{\sigma^2}{2}\right) \times T}{\sigma \times \sqrt{T}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma \times \sqrt{T}$$

其中，$C_{BS}$ 為 Black-Scholes 買權價格（以美元計價）、$C_{Deribit}$ 為 Deribit 交易所比特幣買權價格（以比特幣計價）、$S_0$ 為比特幣現貨價格、N(x)：常態分布的累積分布函數、K 為履約價格、r 為無風險利率、T 為選擇權有效期、F 為比特幣期貨價格、ln 為自然對數、$\sigma$ 為年化標準差。

### 4.2.2 比特幣選擇權隱含波動率計算

在比特幣選擇權市場中，交易者多為風險偏好者，傾向操作價外選擇權（Outof-the-Money, OTM options），主因為成本較低、槓桿效益高，以及對波動率的敏感性特別強。對於買方來說，由於比特幣市場本身波動性極高，這類選擇權對投機者及高風險偏好的投資人極具吸引力，儘管其到期變為無價值的機率較高，交易者仍願意承擔這樣的風險；對於賣方而言，由於比特幣價格波動性顯著高於傳統金融市場，價外選擇權的權利金水準通常更高，進一步提升了賣方參與的誘因，使價外選擇權成為許多賣方用來創造穩定現金流的核心工具。綜上所述，價外選擇權具較佳之成交量與流動性，其價格可更有效率地反映市場氛圍，本研究將採用價外選擇權交易資料進行隱含波動率之計算，惟深度價外區間，為避免不合理之交易造成異常，將排除履約價格 10 美元以下之選擇權數據。

Shimko (1993) 提出將市場選擇權價格轉換至隱含波動率（Implied Volatility, IV）後進行插值（Interpolation），因為隱含波動率曲線通常比價格數據更平滑且連續，適合進行插值與平滑處理，再將插值後的曲線重新轉換回買權價格，以計算 RND。此方法並不依賴選擇權價格符合 Black-Scholes 模型條件假設，而是僅將 Black-Scholes 公式作為一種計算工具，用來將數據轉換至更適合進行平滑處理的樣態。

Figlewski (2008) 提出的方法旨在解決價平附近選擇權隱含波動率數據的異常波動問題，尤其是買權與賣權價格在價平附近的跳躍現象，這種跳躍可能導致隱含波動率曲線不平滑，進而影響 RND 計算結果之穩定性。本研究參考其方法，若履約價格位於期貨價格之 0.9 到 1.1 倍間，則取其買賣權隱含波動率之平均作為數據點。公式如下：

$$IV_{mix}(K) = 0.5 \times IV_{call}(K) + 0.5 \times IV_{put}(K)$$

$$K \in [0.9 \times F, 1.1 \times F]$$

圖 4-1 呈現比特幣選擇權隱含波動率與履約價格之關係，顯示市場對價外選擇權具有較高偏好。同時，在價平附近可觀察到隱含波動率存在顯著的跳動現象。為減少價平位置隱含波動率之劇烈波動，本研究針對位於期貨價格 0.9 倍至 1.1 倍區

間內之數據，將買權與賣權之隱含波動率取平均值，作為後續平滑處理的基礎數據。如圖 4-2 所示，綠色標記點代表平均後之隱含波動率，此方法能有效降低價平附近買賣權隱含波動率之波動幅度。對於超出此區間之數據，則直接採用價外選擇權之隱含波動率數據。經上述處理後，最終建構之隱含波動率數據如圖 4-3 所示。

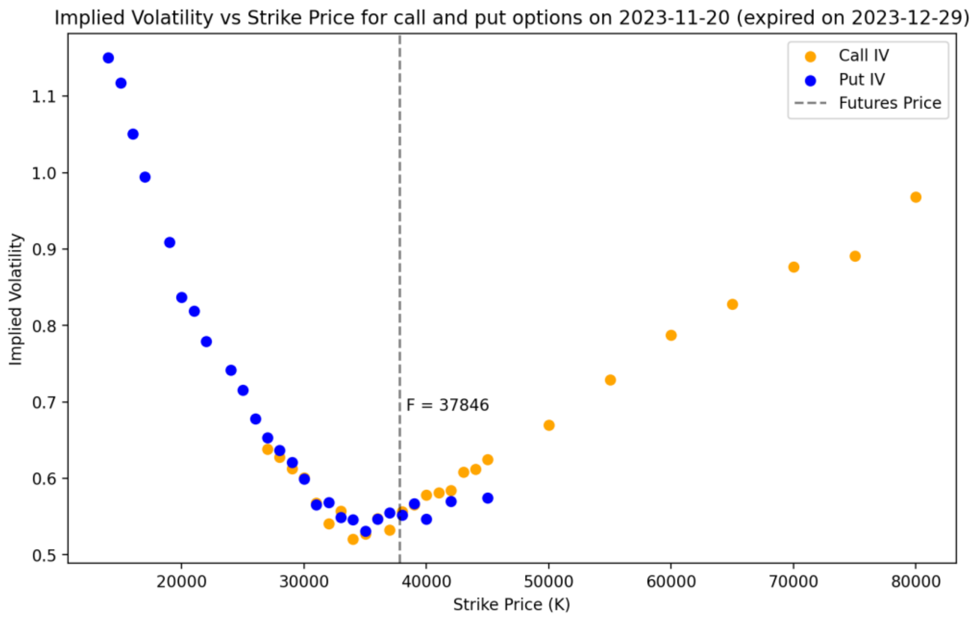


圖 4-1：2023 年 11 月 20 日比特幣選擇權隱含波動率分布圖（2023 年 12 月 29 日到期）

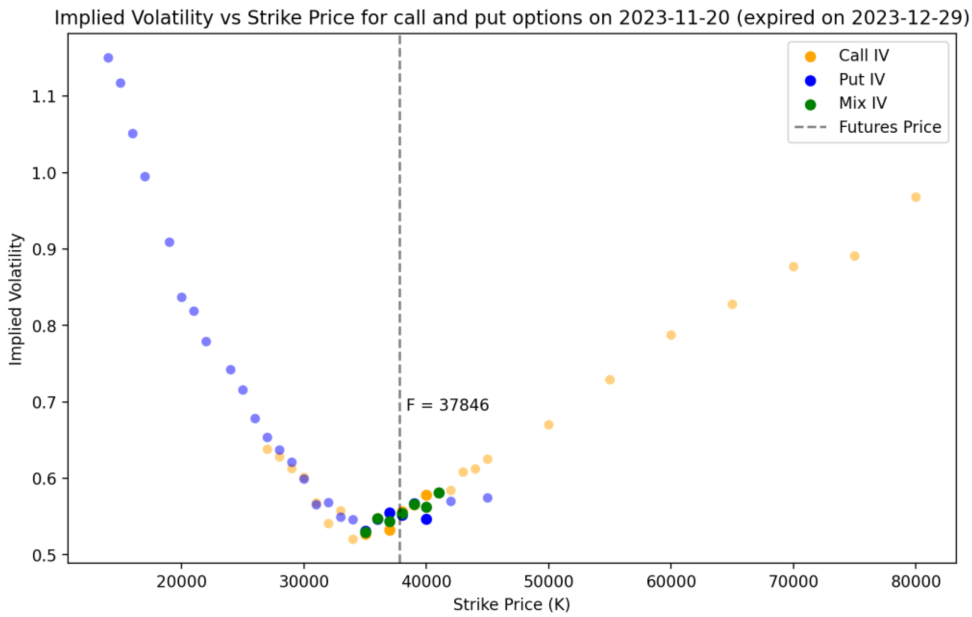


圖 4-2：2023 年 11 月 20 日比特幣選擇權隱含波動率分布圖（2023 年 12 月 29 日到期）

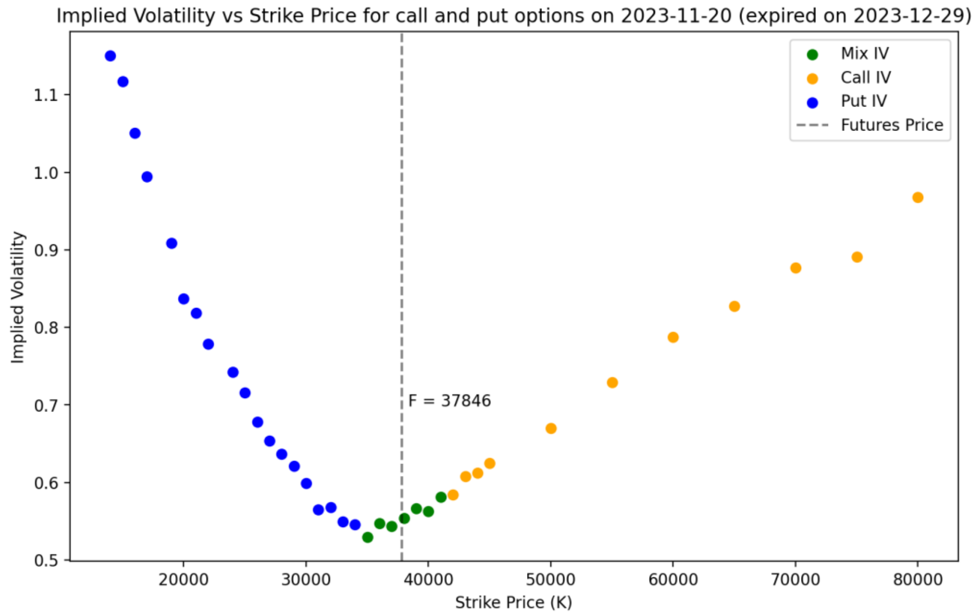


圖 4-3：2023 年 11 月 20 日比特幣選擇權隱含波動率分布圖（2023 年 12 月 29 日到期）

### 4.2.3 比特幣選擇權隱含波動率曲線擬合

為了對處理後的隱含波動率數據進行更精確的擬合，本研究採用四階樣條函數（4th Spline）搭配單一節點（one knot）進行曲線擬合。節點（knot）設置於期貨價格處，此設計能在保持整體曲線連續性的同時，允許曲線在此關鍵位置具有更大的靈活度。採用四階樣條函數確保擬合曲線具有三階連續可導性（$C^3$ continuity），不僅能有效捕捉隱含波動率曲線的細微變化，同時也避免過度擬合（over-fitting）的問題。

四階樣條函數的數學表示如下：

$$S(x) = \begin{cases} \sum_{i=0}^{4} a_i\,(x - x_0)^i, & x < k \\ \sum_{i=0}^{4} b_i\,(x - x_0)^i, & x \geq k \end{cases}$$

其中，$k$為節點位置（即期貨價格），$x_0$為參考點，$a_i$與$b_i$為待定係數。在節點處，函數需滿足以下連續性條件：

$$
\begin{cases}
\sum_{i=0}^{4} a_i (k - x_0)^i = \sum_{i=0}^{4} b_i (k - x_0)^i \\
\sum_{i=1}^{4} i\, a_i (k - x_0)^{i-1} = \sum_{i=1}^{4} i\, b_i (k - x_0)^{i-1} \\
\sum_{i=2}^{4} i(i-1) a_i (k - x_0)^{i-2} = \sum_{i=2}^{4} i(i-1) b_i (k - x_0)^{i-2} \\
\sum_{i=3}^{4} i(i-1)(i-2) a_i (k - x_0)^{i-3} = \sum_{i=3}^{4} i(i-1)(i-2) b_i (k - x_0)^{i-3}
\end{cases}
$$

這些條件分別確保了函數值及其一階、二階和三階導數在節點處的連續性。

將唯一節點設置於期貨價格處具有重要的經濟意義，因為此位置通常對應於價平選擇權（At-the-money options）。此節點的設置將曲線分為兩個區段，分別對應期貨價格以上與以下的區域，使得擬合曲線能更準確地反映價平附近的波動率特徵。這種分段擬合的方法特別適合處理選擇權隱含波動率在價平位置前後可能出現的不對稱特徵。

在實作層面，本研究運用 Python 的 SciPy 套件中的 LSQUnivariateSpline 方法進行曲線擬合。此方法採用最小平方法（Least Squares）進行參數估計，能有效處理非均勻分布的數據點，並通過指定的內部節點（internal knots）實現分段擬合。透過最小平方法與節點設置的結合，LSQUnivariateSpline 提供了一種靈活且穩定的數學工具，能夠在不均勻分布的數據中擬合出平滑且準確的隱含波動率曲線（如圖 4-4），為後續的風險中立密度函數（RND）計算提供了堅實的基礎。最小平方法公式如下：

$$
\min_{\{a_i\},\{b_i\}} \sum_{j=1}^{n} [y_j - S(x_j)]^2
$$

其中，$y_j$為實際觀測值，$S(x_j)$為樣條函數在$x_j$處之觀測值，$\{a_i\},\{b_i\}$為樣條函數之待估參數集合，$n$為數據點總數。

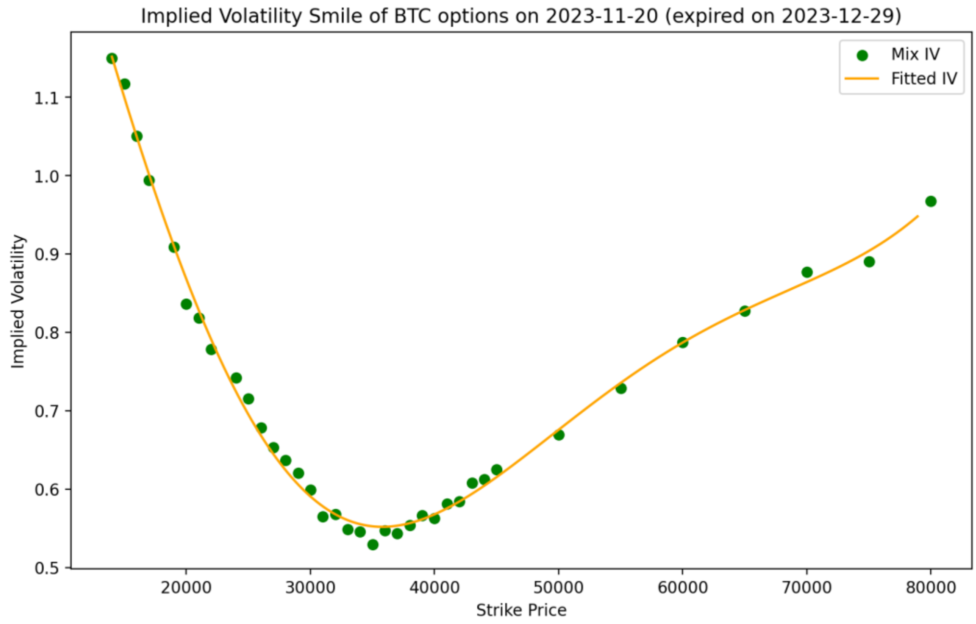


圖 4-4：2023 年 11 月 20 日比特幣選擇權隱含波動率擬合曲線（2023 年 12 月 29 日到期）

### 4.2.4 比特幣選擇權風險中立機率密度函數計算

完成隱含波動率曲線的擬合後，將接續計算風險中立機率密度。首先，本研究使用擬合後的隱含波動率曲線，結合 Deribit 交易所採用的定價模型（公式(11)），計算不同履約價格下的理論買權價格，計算結果如圖 4-5。

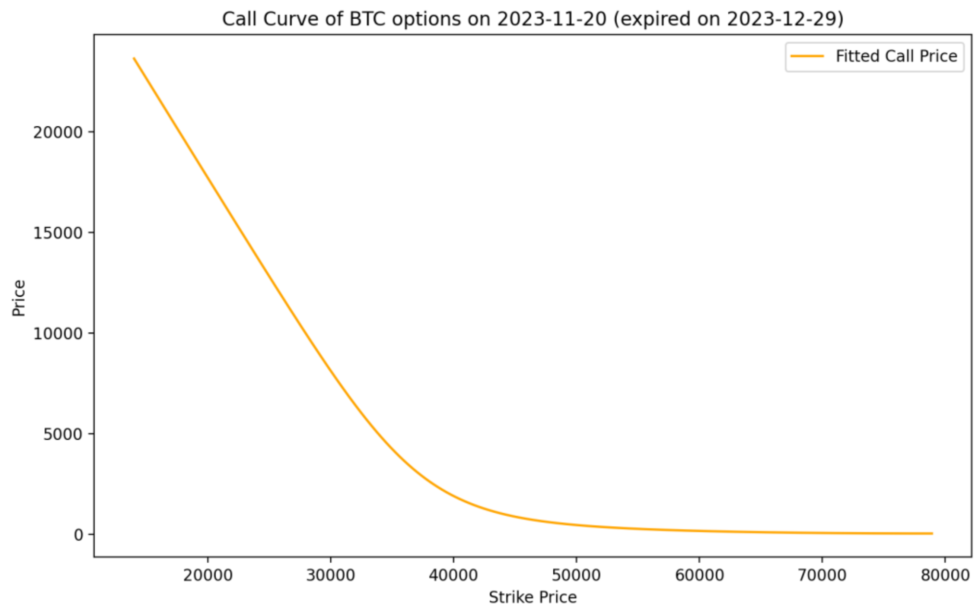


圖 4-5：2023 年 11 月 20 日比特幣選擇權理論買權價格（2023 年 12 月 29 日到期）

取得理論買權價格後，本研究採用有限差分法（中心差分法）進行離散數據微分，以計算風險中立機率密度。中心差分法相較於前向差分或後向差分，中心差分法可有效降低截斷誤差（公式(4)、公式(5)）。為了確保數值計算之穩定性與精確度，本研究在價格間距的設定上採取等距劃分方式，將 ΔX 設定為 0.1。選擇較小的價格間距不僅能提供更精細的密度估計結果，同時等距的劃分方式也有助於提高數值微分運算的穩定性。

完成風險中立機率密度計算後，為確保數據之可靠性與合理性，本研究將數據檢驗重點著重於累積分布函數（Cumulative Distribution Function, CDF）與右尾累積機率（Right Cumulative Probability）。資料完整性之檢驗方面，本研究首先確保累積分布函數值與右尾累積機率值皆不存在缺失值，具缺失之觀測值皆被排除於分析範圍之外。其次，為了維持計算結果之理論一致性，本研究進一步限制這兩個機率值必須嚴格介於 0 與 1 之間，同時排除等於 0 或 1 的邊界值，以避免極端情況對後續分析造成影響。

$$\begin{cases} F(K)\ exists\ (non-missing) \\ F_R(K)\ exists\ (non-missing) \\ 0 < F(K) < 1 \\ 0 < F_R(K) < 1 \end{cases}$$

其中$F(K)$為累積分布函數，$F_R(K)$為右尾累積機率，$F_R(K) = 1 - F(K)$。

檢驗標準之設定主要基於三個面向的考量，首先，從理論一致性的角度來看，這些標準確保了估計結果符合機率論中累積分配函數的基本性質，同時也滿足機率密度函數的基本要求。其次，就數值穩定性而言，這種過濾方式可以避免在後續分析中因極端值或異常值而導致的計算問題，有效提高整體估計結果的可靠性。最後，視實務應用角度，移除可能導致錯誤解讀的異常值，更能確保結果準確反映市場參與者的真實價格預期。

經計算之風險中立機率密度函數與其累積分布函數如圖 4-6、圖 4-7：

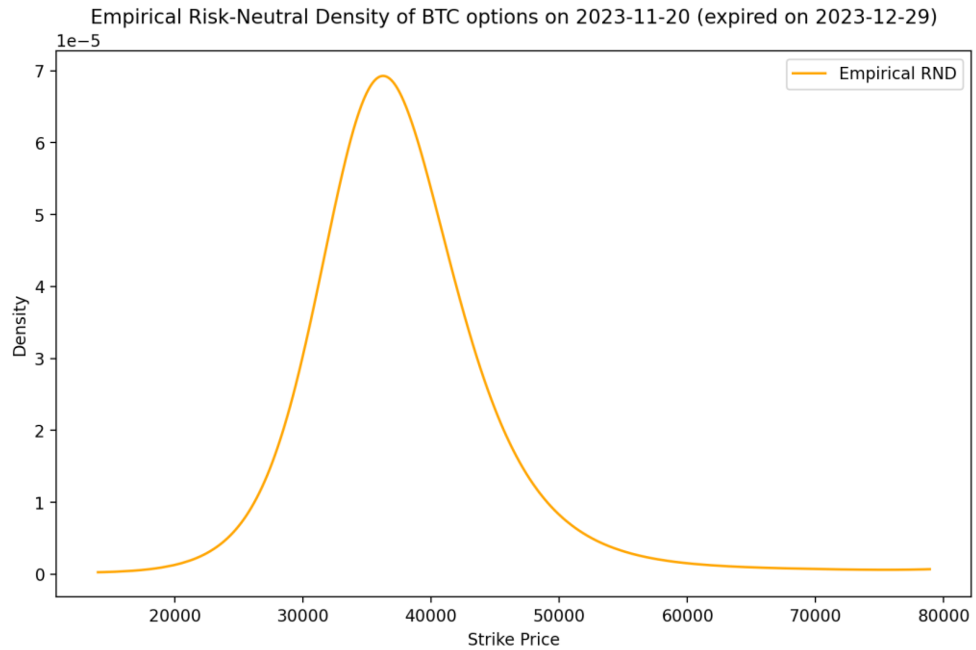


圖 4-6：2023 年 11 月 20 日比特幣選擇權風險中立機率密度函數（2023 年 12 月 29 日到期）

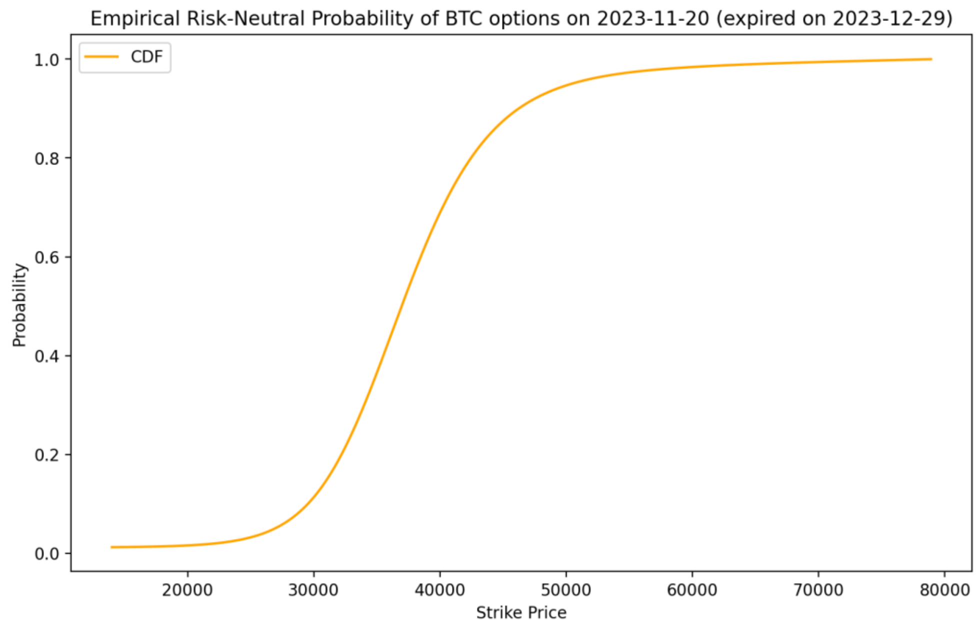


圖 4-7：2023 年 11 月 20 日比特幣選擇權風險中立機率累積分布函數（2023 年 12 月 29 日到期）

## 4.3 配適風險中立機率密度尾部分布

### 4.3.1 尾部 GEV 雙點配適法

從市場選擇權價格中提取的風險中立機率密度（RND）僅能覆蓋有效交易履

約價格的區間，為了完整描述市場預期，需要對 RND 的尾部進行延伸。(Figlewski, 2008) 提出使用廣義極值分布（Generalized Extreme Value Distribution, GEV）來配適 RND 的尾部，其方法需要針對雙尾分別設定三個條件以確保尾部配適的連續性：

$$
\text{右尾條件：}\begin{cases} F_{GEVR}\big(K(\alpha_{1R})\big) = \alpha_{1R} \\ f_{GEVR}\big(K(\alpha_{1R})\big) = f_{EMP}\big(K(\alpha_{1R})\big) \\ f_{GEVR}\big(K(\alpha_{2R})\big) = f_{EMP}\big(K(\alpha_{2R})\big) \end{cases}
$$

$$
\text{左尾條件：}\begin{cases} F_{GEVL}\big(-K(\alpha_{1L})\big) = 1 - \alpha_{1L} \\ f_{GEVR}\big(-K(\alpha_{1L})\big) = f_{EMP}\big(K(\alpha_{1L})\big) \\ f_{GEVR}\big(-K(\alpha_{2L})\big) = f_{EMP}\big(K(\alpha_{2L})\big) \end{cases}
$$

其中，$F_{GEVR}$與$f_{GEVR}$分別為右尾 GEV 之累積分布函數與機率密度函數，$F_{GEVL}$為左尾 GEV 之累積分布函數，$f_{EMP}$為研究計算之實證風險中立機率密度函數（Empirical RND），$K(\alpha)$為對應於 Empirical RND 第$\alpha$分位數之履約價格。以下為 Figlewski (2008) 適配條件整理：

(1) 在第一接合點處，GEV 尾部的累積機率必須等於 RND 的累積機率

(2) 在第一接合點處，GEV 密度函數值必須等於 RND 的密度函數值

(3) 在第二接合點處，GEV 密度函數值必須等於 RND 的密度函數值

### 4.3.2 GPD 分布理論

而本研究採用廣義柏拉圖分布（Generalized Pareto Distribution, GPD）進行尾部配適。GPD 在極值理論中的核心地位源自 Balkema 和 Haan (1974) 的開創性研究，他們證明了當觀測值超過足夠高的門檻值時，其超額分布會漸近收斂到 GPD，這個性質使得 GPD 特別適合用於描述尾部事件。選擇 GPD 而非 GEV 主要基於其參數結構優勢：GPD 僅需設定兩個參數：尺度參數（scale parameter, σ）與形狀參數（shape parameter, ξ），相較於 GEV 需要三個參數：位置參數（location parameter, μ）、尺度參數（scale parameter, σ）及形狀參數（shape parameter, ξ）更為簡潔。這種簡潔的參數結構不僅能提升運算效率，也能降低過度配適（over-fitting）的風險。

此外，Hosking 和 Wallis (1987) 的研究進一步驗證了 GPD 的門檻穩定性質，這使得它在實務應用上更具優勢。根據極值理論，GPD 與 GEV 在尾部具有相同的形狀參數，意味著兩種分配在描述極端事件時具有相同的漸近性質。然而，GPD 在實務應用上更為直觀，特別是在金融風險管理領域，如 McNeil 和 Frey (2000) 的研究所示。實證研究方面，Birru 和 Figlewski (2012) 的研究進一步證實，GPD 與 GEV 在尾部配適的表現相當接近，且皆優於對數常態分配。

GPD 之累積分布函數（Cumulative Distribution Function, CDF）數學表示式如下：

$$F_{GPD}(x;\sigma,\xi)=\begin{cases}1-(1+\xi\dfrac{x}{\sigma})^{-\frac{1}{\xi}}, & \xi\neq 0\\ 1-exp\,(-\dfrac{x}{\sigma}), & \xi=0\end{cases}$$

GPD 之機率密度函數（Probability Density Function, PDF）數學表示式如下：

$$f_{GPD}(x;\sigma,\xi)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sigma}(1+\xi\dfrac{x}{\sigma})^{-\frac{1}{\xi}-1}, & \xi\neq 0\\ \dfrac{1}{\sigma}exp\,(-\dfrac{x}{\sigma}), & \xi=0\end{cases}$$

其中，$\sigma>0$為尺度參數，用以控制分布之離散程度，較大之$\sigma$值表示資料之變異性較大。而形狀參數$\xi$則決定分布之類型與尾部特性：

(1) 當$\xi>0$時：分布為柏拉圖分布（Pareto Distribution），具厚尾（heavy-tailed）特性；分布具無限支撐，定義域為$[0,\infty)$；尾部衰減速度較緩

(2) 當$\xi=0$時：分布退化為指數分布（Exponential Distribution），具固定衰減率；為最簡單之連續型無記憶分布；尾部衰減速度適中

(3) 當$\xi<0$時：分布屬於貝他分布族（Beta Family），具有限支撐特性；分布函數僅於區間$\left[0,-\frac{\sigma}{\xi}\right)$上有定義；於金融市場應用中較少採用，蓋因資產報酬率通

常不存在明確上限

### 4.3.3 尾部 GPD 雙點配適法

Birru 和 Figlewski (2012) 提出 GPD 尾部雙點配適方法，採用兩個接合點，比較 GPD 與 RND 之密度函數值，設定之尾部配適條件如下：

(1) 在第一個接合點處，GPD 的密度函數值必須等於 RND 的密度函數值

(2) 在第二個接合點處，GPD 的密度函數值必須等於 RND 的密度函數值。

數學表達式如下：

右尾條件：

$$\begin{cases} f_{GPD}(K(\alpha_{1R})) = f_{EMP}(K(\alpha_{1R})) & (PDF\text{條件}) \\ f_{GPD}(K(\alpha_{2R})) = f_{EMP}(K(\alpha_{2R})) & (PDF\text{條件}) \end{cases}$$

左尾條件：

$$\begin{cases} f_{GPD}(K(\alpha_{1L})) = f_{EMP}(K(\alpha_{1L})) & (PDF\text{條件}) \\ f_{GPD}(K(\alpha_{2L})) = f_{EMP}(K(\alpha_{2L})) & (PDF\text{條件}) \end{cases}$$

GPD 之尺度參數與形狀參數則透過最小化以下目標函數求解：

右尾參數最小化目標函數：

$$\min_{\sigma,\xi}\{[f_{GPD}(K(\alpha_{1R})) - f_{EMP}(K(\alpha_{1R}))]^2 + [f_{GPD}(K(\alpha_{2R})) - f_{EMP}(K(\alpha_{2R}))]^2\}$$

左尾參數最小化目標函數：

$$\min_{\sigma,\xi}\{[f_{GPD}(K(\alpha_{1L})) - f_{EMP}(K(\alpha_{1L}))]^2 + [f_{GPD}(K(\alpha_{2L})) - f_{EMP}(K(\alpha_{2L}))]^2\}$$

其中，$\alpha_{1L}$預設為 0.05；$\alpha_{2L}$預設為 0.02；$\alpha_{1R}$預設為 0.95；$\alpha_{2R}$預設為 0.98。

### 4.3.4 尾部 GPD 單點配適法

本研究提出使用 GPD 之單點配適法，此改進方法不僅考慮了 CDF 值的配適，更加入了密度函數斜率的連續性條件。此方法的主要優勢在於能夠同時確保密度函數的連續性和平滑性，同時簡化了配適過程，提升計算效率。本研究設定之尾部配適條件如下：

(1) 在接合點處，GPD 的累積機率必須等於 RND 的累積機率

(2) 在接合點處，GPD 的密度函數斜率必須等於 RND 的密度函數斜率。

數學表達式如下：

右尾條件：

$$\begin{cases} F_{GPD}(K(\alpha_{1R})) = \alpha_{1R} & (CDF\text{條件}) \\ \dfrac{f_{GPD}(K(\alpha_{1R})+\Delta x) - f_{GPD}(K(\alpha_{1R}))}{\Delta x} = \dfrac{f_{EMP}(K(\alpha_{1R})+\Delta x) - f_{EMP}(K(\alpha_{1R}))}{\Delta x} & (\text{斜率條件}) \end{cases}$$

左尾條件：

$$\begin{cases} F_{GPD}(-K(\alpha_{1L})) = \alpha_{1L} & (CDF\text{條件}) \\ \dfrac{f_{GPD}(-K(\alpha_{1L})+\Delta x) - f_{GPD}(-K(\alpha_{1L}))}{\Delta x} = \dfrac{f_{EMP}(K(\alpha_{1L})+\Delta x) - f_{EMP}(K(\alpha_{1L}))}{\Delta x} & (\text{斜率條件}) \end{cases}$$

GPD 之尺度參數與形狀參數則透過最小化以下目標函數求解：

右尾參數最小化目標函數：

$$\min_{\sigma,\xi} \left\{ \left[F_{GPD}\big(K(\alpha_{1R})\big) - \alpha_{1R}\right]^2 + \left[\frac{f_{GPD}(K(\alpha_{1R})+\Delta x) - f_{GPD}(K(\alpha_{1R}))}{\Delta x} - \frac{f_{EMP}(K(\alpha_{1R})+\Delta x) - f_{EMP}(K(\alpha_{1R}))}{\Delta x}\right]^2 \right\}$$

左尾參數最小化目標函數：

$$\min_{\sigma,\xi}\left\{[F_{GPD}(-K(\alpha_{1L})) - \alpha_{1L}]^2 + \left[\frac{f_{GPD}(-K(\alpha_{1L}) + \Delta x) - f_{GPD}(-K(\alpha_{1L}))}{\Delta x} - \frac{f_{EMP}(K(\alpha_{1L}) + \Delta x) - f_{EMP}(K(\alpha_{1L}))}{\Delta x}\right]^2\right\}$$

其中，$\Delta x$為一固定之常數值，用以建構等距分布之人工選擇權價格，預設為 0.1；$\alpha_{1L}$預設為 0.05；$\alpha_{1R}$預設為 0.95。

本研究對左尾與右尾分別進行配適。對於左尾，我們選擇累積機率為 5%的點作為接合點；對於右尾，則選擇累積機率為 95%的點作為接合點。此設計能確保尾部配適的平滑性，同時保持整體分布的連續性。為了最小化配適誤差，本研究採用最小平方法進行參數估計，透過數值優化方法求解 GPD 的尺度參數與形狀參數。配適完成之實證 RND 曲線與其 CDF 如圖 4-8 與圖 4-9。

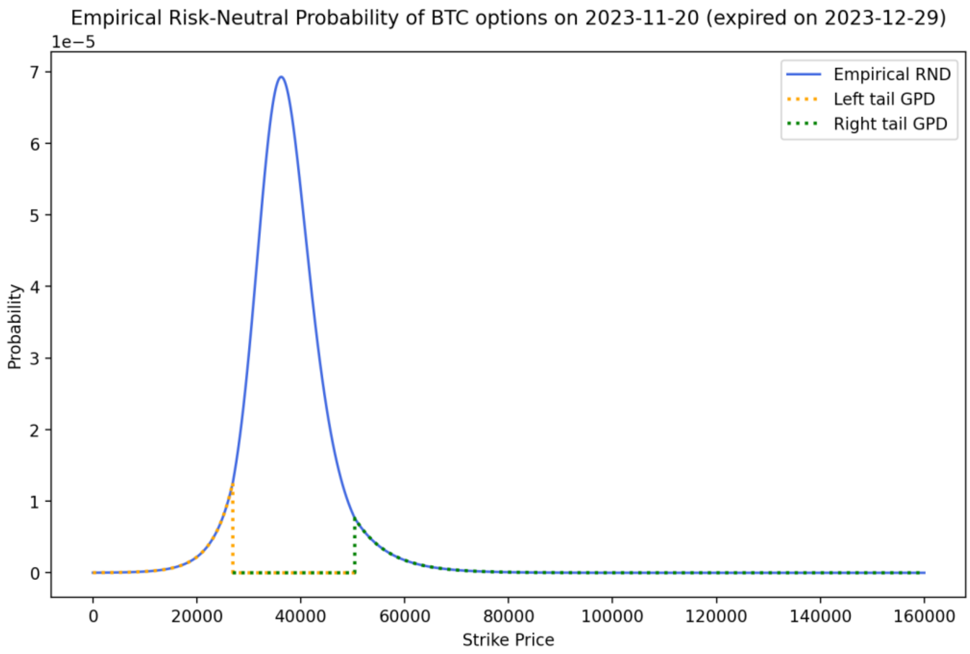


圖 4-8：2023 年 11 月 20 日比特幣選擇權實證 RND 與 GPD 尾部配適

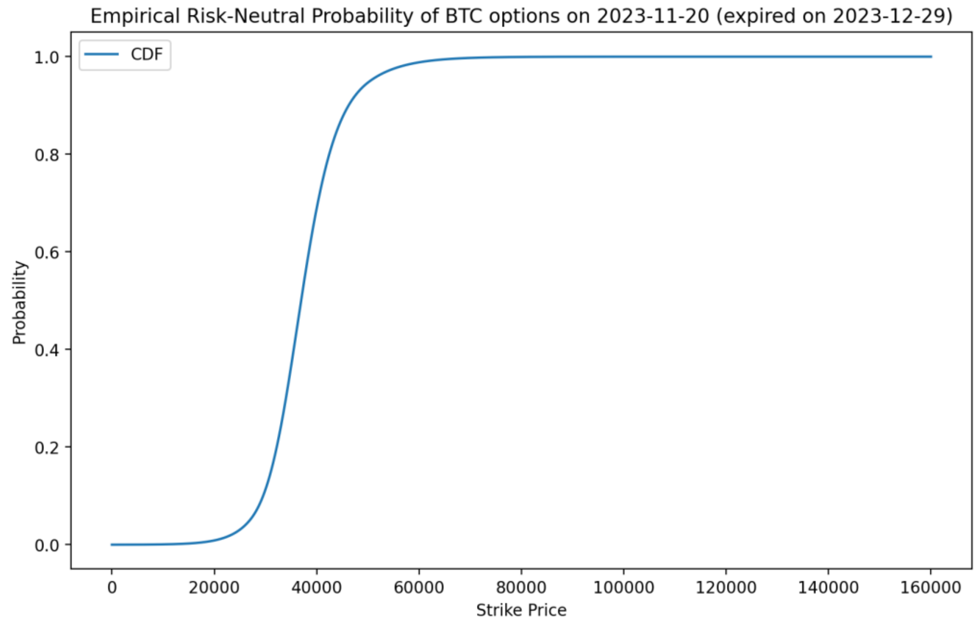


圖 4-9：2023 年 11 月 20 日比特幣選擇權實證 RND 之 CDF

## 4.4 風險中立機率密度函數之統計特徵

本節將詳細介紹風險中立機率密度（RND）之統計特徵，包含各階動差及其衍生之統計量，藉以深入分析市場參與者對比特幣未來價格走勢之預期。

### 4.4.1 動差之定義與意涵

動差（Moment）為描述機率分配特徵之重要統計量，可分為原始動差（Raw Moment）與中央動差（Central Moment）。對於離散型履約價格 K，其第 n 階原始動差定義為：

$$m_n' = E[K^n] = \sum_{i=1}^{N} K_i^n f(K_i)\,\Delta K$$

而第 n 階中央動差則定義為：

$$m_n = E[(K-\bar{K})^n] = \sum_{i=1}^{N} (K_i-\bar{K})^n f(K_i)\,\Delta K$$

其中，$f(K_i)$為風險中立機率密度函數（RND）；$\Delta K$為價格間距，設定為 0.1；$\overline{K}$為期望值，即第一階原始動差$m_1'$；$N$為觀察值數量。

### 4.4.2 風險中立機率密度函數之統計特徵量

1. 平均數（Mean）

平均數為第一階原始動差，反映市場對標的資產未來價格水準之整體預期：

$$\overline{K} = m_1' = E[K] = \sum_{i=1}^{N} K_i f(K_i)\,\Delta K$$

在風險中立定價理論下，RND 之平均數應等於無風險利率折現之遠期價格，此特性提供了重要的套利限制條件。

2. 標準差（Standard Deviation）

標準差為二階中央動差之平方根，衡量價格分散程度：

$$\sigma = \sqrt{m_2} = \sqrt{E[(K-\overline{K})^2]} = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} (K_i - \overline{K})^2 f(K_i)\,\Delta K}$$

標準差反映市場對價格波動性之預期，其值越大表示市場參與者對未來價格走勢之不確定性越高。

3. 偏態（Skewness）

偏態為標準化後之三階中央動差，描述分配之不對稱性：

$$\text{Skewness} = \frac{m_3}{\sigma^3} = \frac{E[(K-\overline{K})^3]}{\sigma^3} = \frac{\sum_{i=1}^{N} (K_i - \overline{K})^3 f(K_i)\,\Delta K}{\sigma^3}$$

偏態係數在金融市場中具有重要意義。當觀察到正偏態時，表示價格分配右尾較長，意味著市場參與者預期有較高機率出現大幅上漲行情，反映市場整體呈現樂

觀情緒。相反地，負偏態則顯示價格分配左尾較長，代表市場認為下跌風險較大，通常反映市場參與者較高的避險需求。實證研究 (Li et al., 2024) 顯示，偏態係數的動態變化往往可作為市場情緒轉折的前導指標，其變化趨勢對投資決策具有重要的參考價值。

4. 超額峰態（Excess Kurtosis）

超額峰態為標準化後之四階中央動差減去 3（常態分配之峰態值），用以描述分配尾部特徵。其計算方式為：

$$\text{Excess Kurtosis} = \frac{m_4}{\sigma^4} - 3 = \frac{E[(K-\bar{K})^4]}{\sigma^4} - 3 = \frac{\sum_{i=1}^{N}(K_i-\bar{K})^4 f(K_i)\,\Delta K}{\sigma^4} - 3$$

在實務應用中，超額峰態為評估市場極端風險的重要指標。當觀察到正的超額峰態時，表示該分配相較於常態分配具有較為明顯的肥尾特性，即極端事件發生的機率高於常態分配的預期。

## 4.4.3 統計特徵之市場意涵

RND 的統計特徵不僅提供了數學層面的分布描述，更蘊含豐富的市場資訊。從價格預期的角度來看，分布的平均數反映了市場對未來價格水準的共識預期，若其與實際市場價格產生顯著偏離，可能暗示潛在的套利機會。這種價格偏離往往能為套利者提供獲利空間，同時也有助於市場價格的自我調整機制。

在風險評估方面，標準差作為傳統的波動風險指標，結合超額峰態所提供的極端風險資訊，能夠讓投資人更全面地評估市場風險。特別是在市場波動加劇時期，這些指標的變化往往能提供及時的風險預警訊號，協助投資人及時調整投資組合以因應市場變化。市場情緒的監測可透過偏態的變化趨勢，反映市場情緒的轉向，為投資策略的動態調整提供量化依據。

本研究中將透過迴歸分析方法進行實證檢驗 RND 特徵值對於現貨報酬率之預

測能力。通過分析這些統計特徵與未來市場走勢的關聯性，我們將能更深入地評估其在比特幣市場的應用價值，為投資決策提供更堅實的量化基礎。

## 4.5 實證迴歸分析

為探討比特幣選擇權隱含風險中立機率密度（RND）對標的資產價格走勢之預測能力，本研究採用多元迴歸分析法進行實證檢驗。被解釋變數（Y）設定為比特幣之對數報酬率，解釋變數（X）則逐步納入 RND 之平均數（Mean）、標準差（Standard Deviation）、偏態（Skewness）、超額峰態（Excess Kurtosis）、中位數（Median）等統計特徵值，並加入加密貨幣恐懼與貪婪指數（Fear and Greed Index）、芝加哥選擇權交易所波動率指數（VIX）等市場情緒指標，以及前 1 期至前 4 期之歷史報酬率，藉以建構最具解釋力之預測模型。

本研究所提出之單點配適法相較於既有文獻採用之雙點配適法，在實務應用上具有計算效率之優勢。為驗證此方法之有效性，本研究將透過均方誤差（Mean Squared Error, MSE）指標與模型變數顯著性，比較兩種方法所建構預測模型之準確度，以量化評估本研究所提出方法之實證效果。

本研究採用多層次的迴歸分析方法，從單變數逐步擴展至四變數模型，以系統性探討各項風險中立機率密度特徵對未來報酬率的預測能力。以下詳細說明各層次迴歸模型的設計：

### 4.5.1 單變數迴歸模型

單變數迴歸模型主要用於檢驗個別變數對未來報酬率的解釋能力，其基本形式為：

$$R_t = \beta_0 + \beta_1 Variable_{i,t-1} + \varepsilon_t, i \in \{1, 2, \ldots, 11\}$$

其中，$R_t = ln(\frac{Close_t}{Close_{t-1}})$為比特幣價格下期（T）報酬率，若選擇權樣本為 7 日

後到期，則使用當日收盤價至 7 日後（到期日）收盤價計算報酬率；$Variable_i$為平均數（Mean）、標準差（Std）、偏態（Skewness）、超額峰態（Kurtosis）、中位數（Median）、加密貨幣恐懼貪婪指數（Fear and Greed Index）、波動率指數（VIX）、前 1 期報酬率（T-1 Return）、前 2 期報酬率（T-2 Return）、前 3 期報酬率（T-3 Return）、前 4 期報酬率（T-4 Return）

### 4.5.2 二變數迴歸模型

考慮到偏態（Skewness）在選擇權定價理論中的重要性，本研究設計二變數模型時將偏態作為固定因子，模型設定如下：

$$R_t = \beta_0 + \beta_1 Skewness_{t-1} + \beta_2 Variable_{i,t-1} + \varepsilon_t, i \in \{1, 2, \dots, 10\}$$

其中，$Variable_i$為平均數（Mean）、標準差（Std）、超額峰態（Kurtosis）、中位數（Median）、加密貨幣恐懼貪婪指數（Fear and Greed Index）、波動率指數（VIX）、前 1 期報酬率（T-1 Return）、前 2 期報酬率（T-2 Return）、前 3 期報酬率（T-3 Return）、前 4 期報酬率（T-4 Return）

### 4.5.3 三變數迴歸模型

三變數模型進一步納入超額峰態（Kurtosis）作為固定因子，形成：

$$R_t = \beta_0 + \beta_1 Skewness_{t-1} + \beta_2 Kurtosis_{t-1} + \beta_3 Variable_{i,t-1} + \varepsilon_t, i \in \{1, 2, \dots, 9\}$$

其中，$Variable_i$為平均數（Mean）、標準差（Std）、中位數（Median）、加密貨幣恐懼貪婪指數（Fear and Greed Index）、波動率指數（VIX）、前 1 期報酬率（T-1 Return）、前 2 期報酬率（T-2 Return）、前 3 期報酬率（T-3 Return）、前 4 期報酬率（T-4 Return）

### 4.5.4 四變數迴歸模型

在三變數模型的基礎上，四變數模型加入標準差（Std）變數，完整模型如下：

$$R_t = \beta_0 + \beta_1 Skewness_{t-1} + \beta_2 Kurtosis_{t-1} + \beta_3 Std_{t-1} + \beta_4 Variable_{i,t-1} + \varepsilon_t,$$
$$i \in 1,2, \dots ,8$$

其中，$Variable_i$為平均數（Mean）、中位數（Median）、加密貨幣恐懼貪婪指數（Fear and Greed Index）、波動率指數（VIX）、前 1 期報酬率（T-1 Return）、前 2 期報酬率（T-2 Return）、前 3 期報酬率（T-3 Return）、前 4 期報酬率（T-4 Return）

# 第五章、實證結果分析

本章將詳細分析實證結果，首先於 5.1 節中比較單點配適法與雙點配適法之方法特性，包含整體擬合效果與計算效率兩個面向。在 5.1.1 節中，透過具體樣本展示兩種方法在不同市場情境下的擬合表現；而在 5.1.2 節則針對兩種方法的運算效率進行實證比較，以評估其實務應用可行性。接著在 5.2 節與 5.3 節分別針對距離到期日 1 天與 7 天之選擇權商品進行深入分析，並探討兩種配適方法在不同到期期間下之預測效果差異。

本研究選擇距離到期日分別為1天與7天的比特幣選擇權商品進行實證分析，主要基於以下原因。比特幣市場具有 24 小時不間斷交易的特性，且近年來交易量持續攀升，日均交易量已達數百億美元，顯示其具備充足的市場流動性。在流動性充沛的情況下，價格發現機制更為有效，市場參與者能夠迅速反應新資訊，使得選擇權價格更能即時反映市場預期；其次，比特幣市場對新資訊的反應速度極快，價格調整效率高。相較於傳統金融市場，加密貨幣市場的交易者多為科技導向的投資人，能夠快速接收與處理市場訊息。因此，選擇短期商品進行研究，可以更準確地捕捉市場參與者對風險的即時評估與反應。

## 5.1 實證樣本擬合效果分析

### 5.1.1 單點配適法與雙點配適法之比較

為進一步比較單點配適法與雙點配適法之擬合效果，本研究選取觀察日 2022 年 7 月 10 日（到期日 2022 年 7 月 11 日）之樣本進行分析。就實證結果觀之，單點配適法展現出較佳之穩定性，其擬合曲線較為平滑且連續，顯示該方法在處理不同市場情境時具有較強之適應能力。

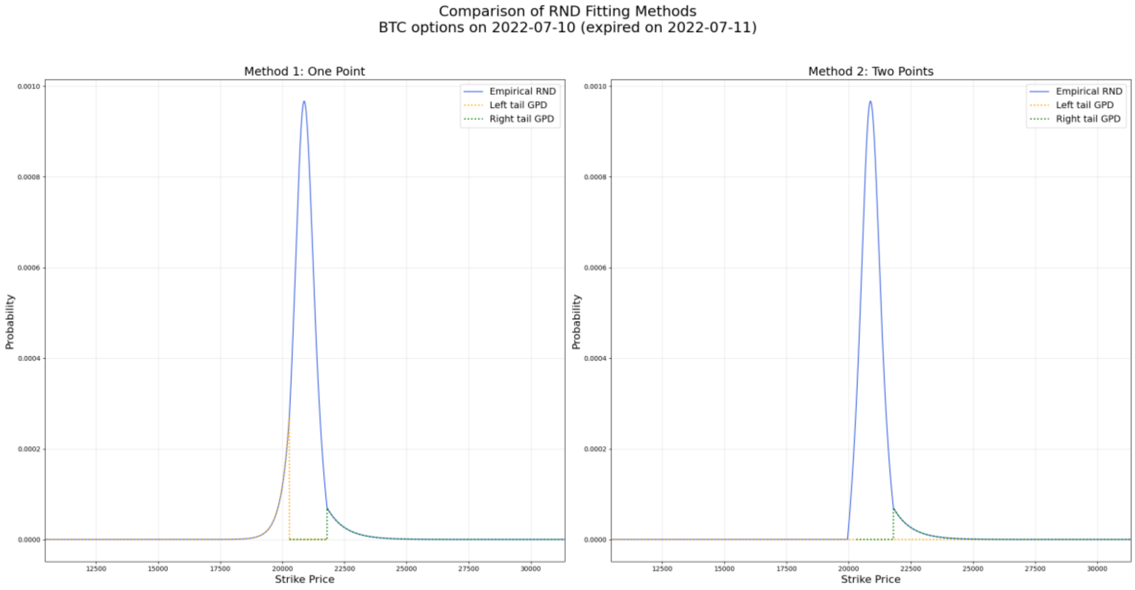


圖 5-1：2022 年 7 月 10 日比特幣選擇權 GPD 尾部配適比較

（左側：單點配適法；右側：雙點配適法）

觀察圖中左側之單點配適法擬合結果可知，其 RND 曲線能順利完成擬合，且在接合點處維持良好之連續性。特別是在尾部區域，單點配適法之擬合曲線呈現平緩遞減之態勢，符合機率密度函數之基本性質。此結果顯示單點配適法在處理極端值時具有較佳之穩健性。

反觀右側之雙點配適法擬合結果，雖然在大多數情況下亦能產生合理之擬合曲線，惟在某些市場情境下可能出現擬合失敗或曲線不連續之情形。究其原因，主要係因雙點配適法需同時滿足兩個接合點之連續性條件，當市場波動劇烈或價格分布極度偏斜時，較難找到同時滿足雙重條件之參數組合，進而影響擬合結果之品質。

就實務應用層面而言，單點配適法之計算效率較高且較不易出現無法擬合之情形，此優勢在進行大量樣本分析時尤為明顯。再者，單點配適法之擬合結果較為穩定，有助於後續統計特徵值之計算與分析。基於前述優勢，本研究認為在建構比特幣選擇權之風險中立機率密度函數時，單點配適法較雙點配適法更具實用價值。

### 5.1.2 計算效率之實證比較

為評估單點配適法與雙點配適法在實務應用上的可行性，本研究進行計算效率之實證比較。於相同硬體設備下，針對 2023 年 9 月至 12 月間共計 10 個到期日的選擇權商品進行測試，每次實驗皆產生 10 個週報酬的風險中立機率密度函數（RND），並以 GPD 分配進行尾部配適，結果如表 5-1。

就實證結果觀之，單點配適法展現出明顯的運算效率優勢。單點配適法的平均執行時間為 309.86 秒，最短與最長執行時間分別為 297.58 秒及 313.52 秒；相較之下，雙點配適法的平均執行時間為 347.95 秒，最短與最長執行時間則分別為 346.49 秒及 349.10 秒。整體而言，單點配適法較雙點配適法節省約 10.95% 的運算時間。

造成此運算效率差異的主要原因在於演算法的複雜度。雙點配適法需要同時滿足兩個接合點的連續性條件，在最佳化過程中需要考慮更多的限制條件，因此增加了計算負擔。反觀單點配適法僅需處理單一接合點，其最佳化過程較為直接，能夠更快速地收斂至合適的參數組合。值得注意的是，單點配適法不僅運算速度較快，其執行時間的穩定性亦優於雙點配適法。單點配適法的執行時間標準差較小，顯示其運算效能較為一致，這項特性在進行大規模實證分析時特別重要，有助於提升研究效率並降低運算資源的浪費。

基於前述實證結果，本研究認為單點配適法在實務應用上具有明顯優勢，特別是在需要處理大量樣本或即時性較高的分析場景中，其較高的運算效率將能提供更好的應用彈性。這項發現對於後續發展自動化交易策略或風險監控系統具有重要的實務意涵。

接下來的小節將分別針對距離到期日 1 天與 7 天之選擇權商品進行實證分析，探討兩種配適方法在不同到期期間下之預測效果。

表 5-1：比特幣選擇權 GPD 尾部配適計算效率比較

（左側：單點配適法；右側：雙點配適法）

| | | | |
|---|---|---|---|
| 執行時間： | 2025/2/5 00:48 | | |
| 執行條件： | 每次生成 10 個週報酬的 RND，並以 GPD 分布配適尾部。 | | |
| 選擇權到期日： | 2023/9/22, 2023/9/29, 2023/10/13, 2023/10/20, 2023/10/27, 2023/11/10, 2023/11/17, 2023/11/24, 2023/12/15, 2023/12/22 | | |
| 單點配適法 | | 雙點配適法 | |
| 第 1 次執行時間(秒) | 297.58 | 第 1 次執行時間(秒) | 346.49 |
| 第 2 次執行時間(秒) | 300.23 | 第 2 次執行時間(秒) | 346.95 |
| 第 3 次執行時間(秒) | 313.52 | 第 3 次執行時間(秒) | 347.78 |
| 第 4 次執行時間(秒) | 313.51 | 第 4 次執行時間(秒) | 347.68 |
| 第 5 次執行時間(秒) | 312.25 | 第 5 次執行時間(秒) | 347.81 |
| 第 6 次執行時間(秒) | 311.37 | 第 6 次執行時間(秒) | 347.94 |
| 第 7 次執行時間(秒) | 313.52 | 第 7 次執行時間(秒) | 348.39 |
| 第 8 次執行時間(秒) | 311.86 | 第 8 次執行時間(秒) | 349.10 |
| 第 9 次執行時間(秒) | 312.36 | 第 9 次執行時間(秒) | 348.59 |
| 第 10 次執行時間(秒) | 312.42 | 第 10 次執行時間(秒) | 348.80 |
| 最短執行時間(秒) | 297.58 | 最短執行時間(秒) | 346.49 |
| 最長執行時間(秒) | 313.52 | 最長執行時間(秒) | 349.10 |
| 平均執行時間(秒) | 309.86 | 平均執行時間(秒) | 347.95 |

## 5.2 距離到期日 1 天之商品實證迴歸分析

### 5.2.1 尾部 GPD 單點配適法

本小節採用 2021 年 1 月 10 日至 2024 年 4 月 30 日間每日到期之選擇權商品，以到期日前 1 日作為觀察日導出 RND，並使用單點配適法建構完整 RND 函數，而後計算其平均數、標準差、偏度及超額峰度等數據作為解釋變數；以下期比特幣現貨報酬率作為被解釋變數，進行多層次迴歸分析，觀察 RND 是否具有預測效果。變數之敘述統計量如表 5-2，樣本數總計 832 個，觀察偏態（Skewness）與超額峰態（Kurtosis）可發現，以單點配適法建構之 RND 函數，其偏態與超額峰態具有離群值，連帶影響該變數之平均數與標準差。

表 5-2：距到期日 1 日之 RND 統計特徵與比特幣報酬率的敘述統計量（單點配適法）

| | Count | Mean | Std | Min | 25% | Median | 75% | Max |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| T Return (Y) | 832 | -0.0002 | 0.0336 | -0.1670 | -0.0155 | -0.0003 | 0.0156 | 0.1353 |
| Mean | 832 | 35891.0208 | 14144.2251 | 0.0000 | 25047.4826 | 34274.1105 | 46035.6010 | 72614.4638 |
| Std | 832 | 1784.3452 | 1422.5234 | 0.0000 | 821.3941 | 1463.6223 | 2291.7552 | 12224.7221 |
| Skewness | 832 | 0.4054 | 7.2140 | -12.5062 | -0.7712 | 0.2451 | 1.0921 | 193.7010 |
| Kurtosis | 832 | 56.6637 | 1392.5124 | -140.8251 | -0.2814 | 1.6822 | 4.2421 | 40084.7494 |
| Median | 832 | 36972.0948 | 14057.6155 | 7860.0000 | 25800.8750 | 35687.3500 | 46933.4000 | 72597.4000 |
| Fear and Greed Index | 832 | 46.9892 | 22.4770 | 6.0000 | 26.0000 | 49.0000 | 68.2500 | 95.0000 |
| VIX | 832 | 20.0917 | 5.2866 | 12.0700 | 16.1875 | 19.2250 | 23.0300 | 37.2100 |
| T-1 Return | 832 | -0.0001 | 0.0337 | -0.1670 | -0.0155 | -0.0003 | 0.0156 | 0.1353 |
| T-2 Return | 832 | -0.0001 | 0.0337 | -0.1670 | -0.0153 | -0.0003 | 0.0161 | 0.1353 |
| T-3 Return | 832 | -0.0001 | 0.0337 | -0.1670 | -0.0153 | -0.0003 | 0.0160 | 0.1353 |
| T-4 Return | 832 | -0.0003 | 0.0337 | -0.1670 | -0.0157 | -0.0004 | 0.0156 | 0.1353 |

依 4.5 小節設定之迴歸分析方法，單變數迴歸分析結果如表 5-3，可觀察平均數（Mean）、偏態（Skewness）、中位數（Median）及前四期報酬率（T-4 Return）具有顯著性，主要集中於 RND 分布特徵；而加密貨幣恐懼貪婪指數（Fear and Greed Index）與波動率指數（VIX）等市場情緒指標之預測能力極低，顯示技術面指標可能比市場情緒指標更具參考價值。

表 5-3：距到期日 1 日之 RND 單變數迴歸分析結果（單點配適法）

| | Coefficient | p value | Significance | R-squared |
|---|---|---|---|---|
| **Mean** | -0.0866 | 0.0124 | ** | 0.0075 |
| Std | -0.0247 | 0.4761 | | 0.0006 |
| **Skewness** | 0.0614 | 0.0770 | * | 0.0038 |
| Kurtosis | 0.0515 | 0.1379 | | 0.0027 |
| **Median** | -0.0707 | 0.0416 | ** | 0.0050 |
| Fear and Greed Index | -0.0023 | 0.9462 | | 0.0000 |
| VIX | -0.0010 | 0.9777 | | 0.0000 |
| T-1 Return | -0.0402 | 0.2471 | | 0.0016 |
| T-2 Return | 0.0276 | 0.4261 | | 0.0008 |
| T-3 Return | 0.0093 | 0.7893 | | 0.0001 |
| **T-4 Return** | 0.0617 | 0.0752 | * | 0.0038 |

註：*表示於 10% 顯著水準下顯著；**表示於 5% 顯著水準下顯著；***表示於 1% 顯著水準下顯著

雙變數迴歸分析中，以偏態（Skewness）為固定變數，結果如表 5-4，可觀察中位數（Median）與前四期報酬率（T-4 Return）之加入可使迴歸模型具有穩定的預測能力，模型解釋力 R-squared 亦有上升，顯示 RND 中位數與短期動能策略可能為預測報酬率提供額外資訊。三變數與四變數迴歸分析結果如附表 1 與附表 2。

表 5-4：距到期日 1 日之 RND 雙變數迴歸分析結果（單點配適法）

| | Skewness_Coef | Skewness_p | Skewness_Sig | Variable_Coef | Variable_p | Variable_Sig | R-squared |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Mean | 0.0502 | 0.1510 | | -0.0796 | 0.0229 | ** | 0.0100 |
| Std | 0.0607 | 0.0803 | * | -0.0230 | 0.5064 | | 0.0043 |
| Kurtosis | 0.1211 | 0.2595 | | -0.0631 | 0.5565 | | 0.0042 |
| **Median** | 0.0640 | 0.0647 | * | -0.0730 | 0.0352 | ** | 0.0091 |
| Fear and Greed Index | 0.0618 | 0.0758 | * | -0.0063 | 0.8551 | | 0.0038 |
| VIX | 0.0614 | 0.0771 | * | 0.0009 | 0.9792 | | 0.0038 |
| T-1 Return | 0.0581 | 0.0956 | * | -0.0347 | 0.3194 | | 0.0050 |
| T-2 Return | 0.0624 | 0.0724 | * | 0.0298 | 0.3906 | | 0.0046 |
| T-3 Return | 0.0615 | 0.0765 | * | 0.0100 | 0.7722 | | 0.0039 |
| **T-4 Return** | 0.0602 | 0.0821 | * | 0.0606 | 0.0802 | * | 0.0074 |

註：*表示於 10% 顯著水準下顯著；**表示於 5% 顯著水準下顯著；***表示於 1% 顯著水準下顯著

經多層次迴歸分析，本小節最終採用之迴歸模型變數為偏態（Skewness）、中位數（Median）及前四期報酬率（T-4 Return）三個變數，模型結果如表 5-5，結果顯示偏態與前四期報酬率對於比特幣現貨報酬率預測具有正向影響，而中位數則具有負向影響；均方誤差（MSE）則顯示了比特幣之高波動性。本小節亦將此模型作為基礎，試圖加入第四個變數以找尋更具解釋力之模型，然而加入之變數皆不具統計顯著性（附表 3），可知此模型已展現出相對穩定之預測能力。

表 5-5：距到期日 1 日之 RND 迴歸分析結果（單點配適法）

| | Coefficient | p value | Significance | R-squared | MSE |
|---|---|---|---|---|---|
| Skewness | 0.0629 | 0.0690 | * | 0.0130 | 0.9858 |
| Median | -0.0746 | 0.0311 | ** | | |
| T-4 Return | 0.0626 | 0.0705 | * | | |

註：*表示於 10% 顯著水準下顯著；**表示於 5% 顯著水準下顯著；***表示於 1% 顯著水準下顯著

### 5.2.2 尾部 GPD 雙點配適法

本小節採用 2021 年 1 月 10 日至 2024 年 4 月 30 日間每日到期之選擇權商品，以到期日前 1 日作為觀察日導出 RND，並使用雙點配適法建構完整 RND 函數，而後計算其平均數、標準差、偏度及超額峰度等數據作為解釋變數；以下期比特幣現貨報酬率作為被解釋變數，進行多層次迴歸分析，觀察 RND 是否具有預測效果。變數之敘述統計量如表 5-6，樣本數總計 831 個，較單點配適法少 1 個樣本，原因為使用雙點配適法時出現無法配適之問題，顯示單點配適法較為穩定。觀察偏態（Skewness）與超額峰態（Kurtosis）可發現，以雙點配適法建構計算之統計特徵數據，受離群值影響較小。

表 5-6：距到期日 1 日之 RND 統計特徵與比特幣報酬率的敘述統計量（雙點配適法）

| | Count | Mean | Std | Min | 25% | Median | 75% | Max |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| T Return (Y) | 831 | -0.0003 | 0.0336 | -0.1670 | -0.0156 | -0.0004 | 0.0155 | 0.1353 |
| Mean | 831 | 36049.7626 | 13917.9793 | 771.3413 | 25159.9872 | 34158.9645 | 46118.6419 | 72614.4638 |
| Std | 831 | 1733.1035 | 1173.4002 | 179.8905 | 854.8143 | 1502.1723 | 2276.4792 | 10729.4925 |
| Skewness | 831 | 0.3140 | 1.7155 | -12.5062 | -0.5639 | 0.5011 | 1.1725 | 16.9925 |
| Kurtosis | 831 | 2.9968 | 9.4980 | -140.8251 | -0.7554 | 1.3626 | 3.6404 | 61.3908 |
| Median | 831 | 37010.3730 | 14027.0369 | 15890.6000 | 25859.8500 | 35717.4000 | 46934.7000 | 72597.4000 |
| Fear and Greed Index | 831 | 47.0253 | 22.4806 | 6.0000 | 26.0000 | 49.0000 | 68.5000 | 95.0000 |
| VIX | 831 | 20.0818 | 5.2947 | 12.0700 | 16.1800 | 19.2000 | 23.0300 | 37.2100 |
| T-1 Return | 831 | -0.0001 | 0.0337 | -0.1670 | -0.0156 | -0.0003 | 0.0157 | 0.1353 |
| T-2 Return | 831 | -0.0001 | 0.0337 | -0.1670 | -0.0153 | -0.0003 | 0.0160 | 0.1353 |
| T-3 Return | 831 | -0.0001 | 0.0337 | -0.1670 | -0.0153 | -0.0003 | 0.0160 | 0.1353 |
| T-4 Return | 831 | -0.0003 | 0.0337 | -0.1670 | -0.0157 | -0.0004 | 0.0157 | 0.1353 |

依 4.5 小節設定之迴歸分析方法，單變數迴歸分析結果如表 5-7，可觀察平均數（Mean）、中位數（Median）及前四期報酬率（T-4 Return）具有顯著性。

表 5-7：距到期日 1 日之 RND 單變數迴歸分析結果（雙點配適法）

| | Coefficient | p value | Significance | R-squared |
|---|---|---|---|---|
| **Mean** | -0.0707 | 0.0415 | ** | 0.0050 |
| Std | -0.0179 | 0.6054 | | 0.0003 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Skewness | -0.0250 | 0.4718 | | 0.0006 |
| Kurtosis | 0.0297 | 0.3922 | | 0.0009 |
| **Median** | -0.0703 | 0.0428 | ** | 0.0049 |
| Fear and Greed Index | -0.0022 | 0.9494 | | 0.0000 |
| VIX | -0.0009 | 0.9792 | | 0.0000 |
| T-1 Return | -0.0402 | 0.2476 | | 0.0016 |
| T-2 Return | 0.0269 | 0.4383 | | 0.0007 |
| T-3 Return | 0.0096 | 0.7830 | | 0.0001 |
| **T-4 Return** | 0.0618 | 0.0748 | * | 0.0038 |

註：*表示於 10% 顯著水準下顯著；**表示於 5% 顯著水準下顯著；***表示於 1% 顯著水準下顯著

雙變數迴歸分析中，以偏態（Skewness）為固定變數，結果如表 5-8，可觀察加入第二個變數後，偏態皆變為不具顯著性，顯示以雙點配適法建構之 RND 函數的統計特徵數據較無法穩定預測比特幣現貨報酬率；三變數與四變數迴歸分析結果如附表 4 與附表 5

表 5-8：距到期日 1 日之 RND 雙變數迴歸分析結果（雙點配適法）

| | Skewness_Coef | Skewness_p | Skewness_Sig | Variable_Coef | Variable_p | Variable_Sig | R-squared |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Mean | -0.0327 | 0.3485 | | -0.0741 | 0.0336 | ** | 0.0061 |
| Std | -0.0232 | 0.5069 | | -0.0153 | 0.6629 | | 0.0009 |
| Kurtosis | -0.0232 | 0.5046 | | 0.0283 | 0.4168 | | 0.0014 |
| Median | -0.0307 | 0.3768 | | -0.0727 | 0.0367 | ** | 0.0059 |
| Fear and Greed Index | -0.0249 | 0.4735 | | -0.0008 | 0.9805 | | 0.0006 |
| VIX | -0.0251 | 0.4715 | | 0.0015 | 0.9648 | | 0.0006 |
| T-1 Return | -0.0339 | 0.3380 | | -0.0466 | 0.1877 | | 0.0027 |
| T-2 Return | -0.0236 | 0.4977 | | 0.0256 | 0.4613 | | 0.0013 |
| T-3 Return | -0.0248 | 0.4754 | | 0.0091 | 0.7942 | | 0.0007 |
| T-4 Return | -0.0221 | 0.5253 | | 0.0608 | 0.0804 | * | 0.0043 |

註：*表示於 10% 顯著水準下顯著；**表示於 5% 顯著水準下顯著；***表示於 1% 顯著水準下顯著

為與單點配適法建構之迴歸模型進行比較，本小節亦選擇偏態（Skewness）、中位數（Median）及前四期報酬率（T-4 Return）三個變數進入模型，模型結果如表 5-9，顯示偏態不具顯著性，雙點配適法建構之迴歸模型不具穩定之預測能力。

表 5-9：距到期日 1 日之 RND 迴歸分析結果（雙點配適法）

| | Coefficient | p value | Significance | R-squared | MSE |
|---|---|---|---|---|---|
| Skewness | -0.0278 | 0.4233 | | 0.0098 | 0.9890 |
| Median | -0.0742 | 0.0330 | ** | | |
| T-4 Return | 0.0625 | 0.0718 | * | | |

註：*表示於 10% 顯著水準下顯著；**表示於 5% 顯著水準下顯著；***表示於 1% 顯著水準下顯著

### 5.2.3 兩方法比較分析

本研究針對距離到期日 1 日之比特幣選擇權商品，分別採用單點配適法與雙點配適法建構 RND，並進行實證迴歸分析比較。實證結果顯示，兩種方法在變數選擇與預測效果上存在明顯差異。

首先，就樣本數而言，單點配適法（832 個）較雙點配適法（831 個）多出 1 個有效樣本。此差異雖然微小，但反映出雙點配適法在某些市場情境下可能面臨無法配適的技術限制，顯示單點配適法在實務應用上具有較佳的穩定性。

其次，在變數預測能力方面，兩種方法雖然皆選用偏態（Skewness）、中位數（Median）及前四期報酬率（T-4 Return）作為預測變數，但其統計顯著性與影響方向卻有所不同。單點配適法下，三個變數皆達統計顯著水準（偏態與前四期報酬率在 10% 顯著水準下顯著，中位數在 5% 顯著水準下顯著），且偏態與前四期報酬率呈現正向影響，中位數則具負向影響。反觀雙點配適法，偏態變數不具顯著性，僅中位數與前四期報酬率維持顯著水準，顯示單點配適法能更有效地捕捉市場偏態特徵對價格走勢的影響。

最後，就模型整體預測效果而言，單點配適法之解釋能力（R-squared = 0.0130）優於雙點配適法（R-squared = 0.0098），同時均方誤差（MSE）亦較低（0.9858 < 0.9890）。此結果顯示，單點配適法不僅在變數顯著性表現較佳，其預測準確度亦優於雙點配適法。

綜上所述，本研究發現在預測比特幣日報酬率時，單點配適法較雙點配適法具

有以下優勢：(1) 樣本配適的穩定性較高；(2) 能更有效捕捉市場偏態特徵；(3) 模型預測能力較佳。

## 5.3 距離到期日 7 天之商品實證迴歸分析

### 5.3.1 尾部 GPD 單點配適法

本小節採用 2021 年 1 月 15 日至 2024 年 4 月 19 日間每日到期之選擇權商品，以到期日前 7 日作為觀察日導出 RND，並使用單點配適法建構完整 RND 函數，而後計算其平均數、標準差、偏度及超額峰度等數據作為解釋變數；以下期比特幣現貨報酬率作為被解釋變數，進行多層次迴歸分析，觀察 RND 是否具有預測效果。變數之敘述統計量如表 5-10，樣本數總計 119 個，偏態（Skewness）與超額峰態（Kurtosis）之平均數皆大於 0，且較無極端值發生之情形。

表 5-10：距到期日 7 日之 RND 統計特徵與比特幣報酬率的敘述統計量（單點配適法）

| | Count | Mean | Std | Min | 25% | Median | 75% | Max |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| T Return (Y) | 119 | -0.0070 | 0.0978 | -0.3516 | -0.0511 | -0.0071 | 0.0423 | 0.3071 |
| Mean | 119 | 36529.4634 | 13781.4125 | 16591.1342 | 26070.6956 | 35496.4638 | 45453.7462 | 69393.9514 |
| Std | 119 | 3599.4222 | 2428.7791 | 710.3376 | 1727.0200 | 2868.8427 | 5085.2385 | 16566.9193 |
| Skewness | 119 | 0.0719 | 0.6877 | -1.4832 | -0.2484 | 0.0372 | 0.2935 | 4.2156 |
| Kurtosis | 119 | 2.1573 | 2.9048 | 0.4791 | 1.2927 | 1.6335 | 1.9781 | 26.4692 |
| Median | 119 | 36497.0748 | 13738.8186 | 16678.0000 | 26066.9000 | 35379.1000 | 45497.1000 | 69137.5000 |
| Fear and Greed Index | 119 | 46.5378 | 22.4287 | 9.0000 | 25.0000 | 48.0000 | 69.0000 | 93.0000 |
| VIX | 119 | 20.0029 | 5.1284 | 12.2800 | 16.2950 | 18.8100 | 22.8100 | 32.0200 |
| T-1 Return | 119 | -0.0060 | 0.0980 | -0.3516 | -0.0480 | -0.0065 | 0.0463 | 0.3071 |
| T-2 Return | 119 | -0.0061 | 0.0980 | -0.3516 | -0.0480 | -0.0065 | 0.0463 | 0.3071 |
| T-3 Return | 119 | -0.0055 | 0.0977 | -0.3516 | -0.0439 | -0.0065 | 0.0463 | 0.3071 |
| T-4 Return | 119 | -0.0055 | 0.0977 | -0.3516 | -0.0439 | -0.0065 | 0.0463 | 0.3071 |

依 4.5 小節設定之迴歸分析方法，單變數迴歸分析結果如表 5-11，可觀察平均數（Mean）、標準差（Std）及中位數（Median）具有顯著性；而加密貨幣恐懼貪婪指數（Fear and Greed Index）與波動率指數（VIX）等市場情緒指標之單獨預測能

力依然極低。

表 5-11：距到期日 7 日之 RND 單變數迴歸分析結果（單點配適法）

| | Coefficient | p value | Significance | R-squared |
|---|---|---|---|---|
| **Mean** | -0.1559 | 0.0904 | * | 0.0243 |
| **Std** | -0.1547 | 0.0931 | * | 0.0239 |
| Skewness | -0.0607 | 0.5122 | | 0.0037 |
| Kurtosis | -0.1145 | 0.2148 | | 0.0131 |
| **Median** | -0.1553 | 0.0917 | * | 0.0241 |
| Fear and Greed Index | 0.0277 | 0.7648 | | 0.0008 |
| VIX | -0.0505 | 0.5858 | | 0.0025 |
| T-1 Return | -0.0398 | 0.6677 | | 0.0016 |
| T-2 Return | 0.0126 | 0.8920 | | 0.0002 |
| T-3 Return | 0.0043 | 0.9626 | | 0.0000 |
| T-4 Return | -0.0849 | 0.3587 | | 0.0072 |

註：*表示於 10% 顯著水準下顯著；**表示於 5% 顯著水準下顯著；***表示於 1% 顯著水準下顯著

在進行雙變數、三變數及四變數等多重迴歸分析時，發現大部分解釋變數的預測效果並不顯著，此結果已列於附表 6 至附表 8。此現象顯示，單純增加變數數量並無法有效提升模型的預測能力，反而可能導致模型過度擬合的問題。

經過反覆測試不同變數的排列組合後，本研究發現在預測比特幣週報酬率時，超額峰度（Kurtosis）與中位數（Median）這組配對展現出較佳的預測效果。在此基礎上，本研究進一步考量市場情緒指標，將加密貨幣恐懼貪婪指數（Fear and Greed Index）加入模型中，且具有顯著預測性。透過仔細篩選變數組合，而非盲目增加變數數量，本研究最終找到一個兼具統計顯著性與經濟意義的預測模型，迴歸模型結果如表 5-12。

表 5-12：距到期日 7 日之 RND 迴歸分析結果（單點配適法）

| | Coefficient | p value | Significance | R-squared | MSE |
|---|---|---|---|---|---|
| Kurtosis | -0.1620 | 0.0874 | * | 0.0666 | 0.9256 |
| Median | -0.2706 | 0.0144 | ** | | |
| Fear and Greed Index | 0.2171 | 0.0561 | * | | |

註：*表示於 10% 顯著水準下顯著；**表示於 5% 顯著水準下顯著；***表示於 1% 顯著水準下顯著

## 5.3.2 尾部 GPD 雙點配適法

本小節採用 2021 年 1 月 15 日至 2024 年 4 月 19 日間每日到期之選擇權商品，以到期日前 7 日作為觀察日導出 RND，並使用雙點配適法建構完整 RND 函數，而後計算其平均數、標準差、偏度及超額峰度等數據作為解釋變數；以下期比特幣現貨報酬率作為被解釋變數，進行多層次迴歸分析，觀察 RND 是否具有預測效果。變數之敘述統計量如表 5-13，樣本數總計 119 個，偏態（Skewness）與超額峰態（Kurtosis）之平均數皆大於 0，且敘述統計量與單點配適法高度相似，顯示對於週報酬，此二方法並無較大差異。

表 5-13：距到期日 7 日之 RND 統計特徵與比特幣報酬率的敘述統計量（雙點配適法）

| | Count | Mean | Std | Min | 25% | Median | 75% | Max |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| T Return (Y) | 119 | -0.0070 | 0.0978 | -0.3516 | -0.0511 | -0.0071 | 0.0423 | 0.3071 |
| Mean | 119 | 36529.5600 | 13781.3082 | 16592.5497 | 26071.3029 | 35496.4638 | 45453.7462 | 69393.9514 |
| Std | 119 | 3598.8321 | 2429.3086 | 708.7932 | 1725.0112 | 2868.8427 | 5085.2385 | 16566.9193 |
| Skewness | 119 | 0.0723 | 0.6879 | -1.4832 | -0.2469 | 0.0372 | 0.2912 | 4.2156 |
| Kurtosis | 119 | 2.1404 | 2.9086 | 0.4327 | 1.2819 | 1.6078 | 1.9556 | 26.4692 |
| Median | 119 | 36497.0748 | 13738.8186 | 16678.0000 | 26066.9000 | 35379.1000 | 45497.1000 | 69137.5000 |
| Fear and Greed Index | 119 | 46.5378 | 22.4287 | 9.0000 | 25.0000 | 48.0000 | 69.0000 | 93.0000 |
| VIX | 119 | 20.0029 | 5.1284 | 12.2800 | 16.2950 | 18.8100 | 22.8100 | 32.0200 |
| T-1 Return | 119 | -0.0060 | 0.0980 | -0.3516 | -0.0480 | -0.0065 | 0.0463 | 0.3071 |
| T-2 Return | 119 | -0.0061 | 0.0980 | -0.3516 | -0.0480 | -0.0065 | 0.0463 | 0.3071 |
| T-3 Return | 119 | -0.0055 | 0.0977 | -0.3516 | -0.0439 | -0.0065 | 0.0463 | 0.3071 |
| T-4 Return | 119 | -0.0055 | 0.0977 | -0.3516 | -0.0439 | -0.0065 | 0.0463 | 0.3071 |

依 4.5 小節設定之迴歸分析方法，單變數迴歸分析結果如表 5-14，可觀察平均數（Mean）、標準差（Std）及中位數（Median）具有顯著性。

表 5-14：距到期日 7 日之 RND 單變數迴歸分析結果（單點配適法）

| | Coefficient | p value | Significance | R-squared |
|---|---|---|---|---|
| **Mean** | -0.1559 | 0.0904 | * | 0.0243 |
| **Std** | -0.1547 | 0.0930 | * | 0.0239 |
| Skewness | -0.0608 | 0.5115 | | 0.0037 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Kurtosis | -0.1157 | 0.2100 | | 0.0134 |
| **Median** | -0.1553 | 0.0917 | * | 0.0241 |
| Fear and Greed Index | 0.0277 | 0.7648 | | 0.0008 |
| VIX | -0.0505 | 0.5858 | | 0.0025 |
| T-1 Return | -0.0398 | 0.6677 | | 0.0016 |
| T-2 Return | 0.0126 | 0.8920 | | 0.0002 |
| T-3 Return | 0.0043 | 0.9626 | | 0.0000 |
| T-4 Return | -0.0849 | 0.3587 | | 0.0072 |

註：*表示於 10% 顯著水準下顯著；**表示於 5% 顯著水準下顯著；***表示於 1% 顯著水準下顯著

雙點配適法在進行雙變數、三變數及四變數等多重迴歸分析時，依然有單點配適法發生之問題，大部分解釋變數的預測效果並不顯著，此結果已列於附表 6 至附表 8。

為與單點配適法建構之迴歸模型進行比較，本小節亦選擇超額峰態（Kurtosis）、中位數（Median）及加密貨幣恐懼貪婪指數（Fear and Greed Index）三個變數進入模型，模型結果如表 5-15，變數顯著性與模型預測能力皆與單點配適法模型相仿。

表 5-15：距到期日 7 日之 RND 迴歸分析結果（雙點配適法）

| | Coefficient | p value | Significance | R-squared | MSE |
|---|---|---|---|---|---|
| Kurtosis | -0.1620 | 0.0874 | * | 0.0666 | 0.9256 |
| Median | -0.2706 | 0.0144 | ** | | |
| Fear and Greed Index | 0.2171 | 0.0561 | * | | |

註：*表示於 10% 顯著水準下顯著；**表示於 5% 顯著水準下顯著；***表示於 1% 顯著水準下顯著

### 5.3.3 兩方法比較分析

針對距離到期日 7 日之比特幣選擇權商品，本研究分別採用單點配適法與雙點配適法建構 RND，並進行實證迴歸分析比較。實證結果顯示，兩種方法在預測週報酬率時，皆能找到具有統計顯著性的變數組合。

就變數敘述統計量而言，兩種方法所計算之 RND 特徵值相當接近，顯示在週報酬率的預測上，單點配適法與雙點配適法皆能有效捕捉市場資訊。此結果與日報酬率預測時所觀察到的差異形成對比，推測其原因可能為：週報酬率之預測區間較

長，使得尾部配適方法對整體預測結果的影響程度相對降低。

在模型預測效果方面，兩種方法皆選取超額峰度（Kurtosis）、中位數（Median）及加密貨幣恐懼貪婪指數（Fear and Greed Index）作為最佳預測變數組合，且模型之解釋能力（R-squared = 0.0666）與預測誤差（MSE = 0.9256）完全相同。

綜上所述，本研究發現在預測週報酬率時，單點配適法不僅能達到與雙點配適法相同的預測效果，更具有計算效率之優勢。

## 5.4 小結

本章透過實證分析比較單點配適法與雙點配適法在建構風險中立機率密度函數時的表現差異。研究發現，兩種方法在不同預測期間展現出不同的特性與優勢。

就日報酬率預測而言，單點配適法明顯優於雙點配適法。首先，在樣本完整性方面，單點配適法（832 個）較雙點配適法（831 個）能保留更多有效樣本，顯示其在處理極端市場情境時具有較佳的穩定性。其次，在變數預測能力方面，單點配適法建構之迴歸模型中，偏態（Skewness）、中位數（Median）及前四期報酬率（T-4 Return）三個變數皆達統計顯著水準，且模型解釋能力（R-squared = 0.0130）優於雙點配適法（R-squared = 0.0098）。此結果顯示單點配適法更能有效捕捉市場短期波動特徵。

在週報酬率預測方面，兩種方法的表現則較為接近。實證結果顯示，兩種方法皆以超額峰態（Kurtosis）、中位數（Median）及加密貨幣恐懼貪婪指數（Fear and Greed Index）作為最佳預測變數組合，且具有相同的模型解釋能力（R-squared = 0.0666）與預測誤差（MSE = 0.9256）。此現象可能反映出在較長期的預測區間中，尾部配適方法對整體預測結果的影響程度相對降低。

就計算效率而言，單點配適法展現出明顯優勢。在相同硬體設備下進行測試，單點配適法的平均執行時間為 309.86 秒，較雙點配適法的 347.95 秒節省約 10.95%

的運算時間。更重要的是，單點配適法的執行時間標準差較小，顯示其運算效能更為穩定，此特性在進行大規模實證分析時特別重要。

綜合本章研究發現，單點配適法不僅在日報酬率預測上表現較佳，在計算效率方面亦具有顯著優勢。雖然在週報酬率預測時，兩種方法的表現差異不明顯，但考慮到單點配適法的運算效率優勢，本研究認為在實務應用上，單點配適法較雙點配適法更具發展潛力，特別是在需要處理大量樣本或即時性較高的分析場景中。這項發現對於後續發展自動化交易策略或風險監控系統具有重要的實務意涵。

# 附錄

附表 1：距到期日 1 日之 RND 三變數迴歸分析結果（單點配適法）

| | Skewness_Coef | Skewness_p | Skewness_Sig | Kurtosis_Coef | Kurtosis_p | Kurtosis_Sig | Variable_Coef | Variable_p | Variable_Sig | R-squared |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Mean | 0.0844 | 0.4362 | | -0.0360 | 0.7387 | | -0.0783 | 0.0263 | ** | 0.0101 |
| Std | 0.1232 | 0.2516 | | -0.0661 | 0.5387 | | -0.0239 | 0.4914 | | 0.0047 |
| Median | 0.1055 | 0.3262 | | -0.0439 | 0.6833 | | -0.0718 | 0.0392 | ** | 0.0093 |
| Fear and Greed Index | 0.1220 | 0.2566 | | -0.0636 | 0.5538 | | -0.0068 | 0.8444 | | 0.0042 |
| VIX | 0.1211 | 0.2600 | | -0.0631 | 0.5571 | | 0.0002 | 0.9961 | | 0.0042 |
| T-1 Return | 0.1107 | 0.3049 | | -0.0555 | 0.6060 | | -0.0333 | 0.3398 | | 0.0053 |
| T-2 Return | 0.1233 | 0.2513 | | -0.0643 | 0.5492 | | 0.0300 | 0.3866 | | 0.0051 |
| T-3 Return | 0.1201 | 0.2638 | | -0.0620 | 0.5641 | | 0.0093 | 0.7899 | | 0.0043 |
| T-4 Return | 0.1229 | 0.2518 | | -0.0662 | 0.5369 | | 0.0610 | 0.0786 | * | 0.0079 |

註：*表示於 10% 顯著水準下顯著；**表示於 5% 顯著水準下顯著；***表示於 1% 顯著水準下顯著

附表 2：距到期日 1 日之 RND 四變數迴歸分析結果（單點配適法）

| | Skewness_Coef | Skewness_p | Skewness_Sig | Kurtosis_Coef | Kurtosis_p | Kurtosis_Sig | Std_Coef | Std_p | Std_Sig | Variable_Coef | Variable_p | Variable_Sig | R-squared |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Mean | 0.0827 | 0.4478 | | -0.0343 | 0.7513 | | 0.0063 | 0.8655 | | -0.0807 | 0.0341 | ** | 0.0101 |
| Median | 0.1034 | 0.3373 | | -0.0411 | 0.7034 | | 0.0111 | 0.7750 | | -0.0769 | 0.0496 | ** | 0.0094 |
| Fear and Greed Index | 0.1234 | 0.2515 | | -0.0661 | 0.5386 | | -0.0235 | 0.5088 | | -0.0016 | 0.9644 | | 0.0048 |
| VIX | 0.1233 | 0.2516 | | -0.0662 | 0.5383 | | -0.0240 | 0.4910 | | -0.0012 | 0.9716 | | 0.0048 |
| T-1 Return | 0.1127 | 0.2968 | | -0.0584 | 0.5878 | | -0.0252 | 0.4691 | | -0.0343 | 0.3269 | | 0.0059 |
| T-2 Return | 0.1252 | 0.2442 | | -0.0671 | 0.5326 | | -0.0228 | 0.5113 | | 0.0292 | 0.4005 | | 0.0056 |
| T-3 Return | 0.1224 | 0.2552 | | -0.0651 | 0.5452 | | -0.0233 | 0.5046 | | 0.0072 | 0.8356 | | 0.0048 |
| T-4 Return | 0.1248 | 0.2451 | | -0.0688 | 0.5217 | | -0.0213 | 0.5401 | | 0.0600 | 0.0837 | * | 0.0083 |

註：*表示於 10% 顯著水準下顯著；**表示於 5% 顯著水準下顯著；***表示於 1% 顯著水準下顯著

附表 3：依據三變數模型拓展之四變數迴歸分析結果（日報酬單點配適法）

| | Skewness_Coef | Skewness_p | Skewness_Sig | Median_Coef | Median_p | Median_Sig | T-4 Return_Coef | T-4 Return_p | T-4 Return_Sig | Variable_Coef | Variable_p | Variable_Sig | R-squared |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Mean | 0.0177 | 0.7255 | | 0.1761 | 0.3957 | | 0.0633 | 0.0672 | * | -0.2567 | 0.2202 | | 0.0148 |
| Std | 0.0637 | 0.0663 | * | -0.0823 | 0.0342 | ** | 0.0635 | 0.0670 | * | 0.0169 | 0.6627 | | 0.0132 |
| Kurtosis | 0.1070 | 0.3185 | | -0.0733 | 0.0350 | ** | 0.0628 | 0.0697 | * | -0.0467 | 0.6641 | | 0.0132 |
| Fear and Greed Index | 0.0612 | 0.0771 | * | -0.0966 | 0.0209 | ** | 0.0576 | 0.0998 | * | 0.0397 | 0.3479 | | 0.0140 |
| VIX | 0.0625 | 0.0709 | * | -0.0830 | 0.0250 | ** | 0.0610 | 0.0788 | * | -0.0237 | 0.5215 | | 0.0135 |
| T-1 Return | 0.0598 | 0.0855 | * | -0.0736 | 0.0335 | ** | 0.0628 | 0.0695 | * | -0.0329 | 0.3433 | | 0.0141 |
| T-2 Return | 0.0640 | 0.0647 | * | -0.0751 | 0.0302 | ** | 0.0618 | 0.0743 | * | 0.0293 | 0.3970 | | 0.0139 |

| | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| T-3 Return | 0.0631 | 0.0684 | * | -0.0750 | 0.0305 | ** | 0.0631 | 0.0685 | * | 0.0141 | 0.6835 | | 0.0132 |

註：*表示於 10% 顯著水準下顯著；**表示於 5% 顯著水準下顯著；***表示於 1% 顯著水準下顯著

附表 4：距到期日 1 日之 RND 三變數迴歸分析結果（雙點配適法）

| | Skewness_Coef | Skewness_p | Skewness_Sig | Kurtosis_Coef | Kurtosis_p | Kurtosis_Sig | Variable_Coef | Variable_p | Variable_Sig | R-squared |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Mean | -0.0310 | 0.3751 | | 0.0250 | 0.4717 | | -0.0730 | 0.0366 | ** | 0.0067 |
| Std | -0.0214 | 0.5418 | | 0.0285 | 0.4133 | | -0.0157 | 0.6545 | | 0.0017 |
| Median | -0.0291 | 0.4034 | | 0.0238 | 0.4941 | | -0.0712 | 0.0412 | ** | 0.0064 |
| Fear and Greed Index | -0.0233 | 0.5050 | | 0.0283 | 0.4172 | | 0.0005 | 0.9896 | | 0.0014 |
| VIX | -0.0232 | 0.5069 | | 0.0283 | 0.4177 | | 0.0001 | 0.9988 | | 0.0014 |
| T-1 Return | -0.0320 | 0.3677 | | 0.0249 | 0.4755 | | -0.0447 | 0.2081 | | 0.0033 |
| T-2 Return | -0.0219 | 0.5307 | | 0.0280 | 0.4209 | | 0.0254 | 0.4661 | | 0.0021 |
| T-3 Return | -0.0230 | 0.5092 | | 0.0287 | 0.4107 | | 0.0102 | 0.7691 | | 0.0015 |
| T-4 Return | -0.0203 | 0.5595 | | 0.0281 | 0.4198 | | 0.0607 | 0.0809 | * | 0.0051 |

註：*表示於 10% 顯著水準下顯著；**表示於 5% 顯著水準下顯著；***表示於 1% 顯著水準下顯著

附表 5：距到期日 1 日之 RND 四變數迴歸分析結果（雙點配適法）

| | Skewness_Coef | Skewness_p | Skewness_Sig | Kurtosis_Coef | Kurtosis_p | Kurtosis_Sig | Std_Coef | Std_p | Std_Sig | Variable_Coef | Variable_p | Variable_Sig | R-squared |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Mean | -0.0355 | 0.3182 | | 0.0241 | 0.4896 | | 0.0269 | 0.5032 | | -0.0863 | 0.0318 | ** | 0.0072 |
| Median | -0.0350 | 0.3249 | | 0.0220 | 0.5277 | | 0.0358 | 0.3963 | | -0.0914 | 0.0305 | ** | 0.0073 |
| Fear and Greed Index | -0.0215 | 0.5402 | | 0.0287 | 0.4102 | | -0.0170 | 0.6400 | | 0.0050 | 0.8909 | | 0.0017 |
| VIX | -0.0213 | 0.5460 | | 0.0285 | 0.4136 | | -0.0157 | 0.6542 | | -0.0008 | 0.9813 | | 0.0017 |
| T-1 Return | -0.0301 | 0.3996 | | 0.0251 | 0.4721 | | -0.0168 | 0.6307 | | -0.0451 | 0.2040 | | 0.0036 |
| T-2 Return | -0.0201 | 0.5675 | | 0.0282 | 0.4175 | | -0.0153 | 0.6623 | | 0.0251 | 0.4703 | | 0.0023 |
| T-3 Return | -0.0213 | 0.5439 | | 0.0288 | 0.4084 | | -0.0148 | 0.6742 | | 0.0088 | 0.8023 | | 0.0017 |
| T-4 Return | -0.0186 | 0.5957 | | 0.0283 | 0.4165 | | -0.0147 | 0.6740 | | 0.0605 | 0.0823 | * | 0.0053 |

註：*表示於 10% 顯著水準下顯著；**表示於 5% 顯著水準下顯著；***表示於 1% 顯著水準下顯著

附表 6：距到期日 7 日之 RND 雙變數迴歸分析結果（單點配適法）

| | Skewness_Coef | Skewness_p | Skewness_Sig | Variable_Coef | Variable_p | Variable_Sig | R-squared |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Mean | -0.0401 | 0.6654 | | -0.1505 | 0.1066 | | 0.0259 |
| Std | 0.0185 | 0.8601 | | -0.1636 | 0.1212 | | 0.0242 |
| Kurtosis | 0.0353 | 0.7822 | | -0.1390 | 0.2782 | | 0.0138 |
| Median | -0.0429 | 0.6430 | | -0.1502 | 0.1062 | | 0.0259 |
| Fear and Greed Index | -0.1021 | 0.3462 | | 0.0803 | 0.4581 | | 0.0084 |
| VIX | -0.0750 | 0.4298 | | -0.0667 | 0.4830 | | 0.0079 |
| T-1 Return | -0.0538 | 0.5779 | | -0.0249 | 0.7963 | | 0.0043 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| T-2 Return | -0.0653 | 0.4901 | | 0.0248 | 0.7932 | | 0.0043 |
| T-3 Return | -0.0620 | 0.5077 | | 0.0115 | 0.9021 | | 0.0038 |
| T-4 Return | -0.0515 | 0.5811 | | -0.0789 | 0.3982 | | 0.0098 |

註：*表示於 10% 顯著水準下顯著；**表示於 5% 顯著水準下顯著；***表示於 1% 顯著水準下顯著

附表 7：距到期日 7 日之 RND 三變數迴歸分析結果（單點配適法）

| | Skewness_Coef | Skewness_p | Skewness_Sig | Kurtosis_Coef | Kurtosis_p | Kurtosis_Sig | Variable_Coef | Variable_p | Variable_Sig | R-squared |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Mean | 0.0685 | 0.5935 | | -0.1555 | 0.2228 | | -0.1591 | 0.0884 | * | 0.0385 |
| Std | 0.0644 | 0.6194 | | -0.0822 | 0.5435 | | -0.1410 | 0.2082 | | 0.0273 |
| Median | 0.0660 | 0.6065 | | -0.1560 | 0.2212 | | -0.1591 | 0.0876 | * | 0.0386 |
| Fear and Greed Index | -0.0054 | 0.9709 | | -0.1264 | 0.3322 | | 0.0621 | 0.5716 | | 0.0165 |
| VIX | 0.0163 | 0.9069 | | -0.1225 | 0.3708 | | -0.0355 | 0.7259 | | 0.0148 |
| T-1 Return | 0.0820 | 0.5680 | | -0.1766 | 0.2032 | | -0.0750 | 0.4713 | | 0.0182 |
| T-2 Return | 0.0312 | 0.8120 | | -0.1370 | 0.2893 | | 0.0150 | 0.8744 | | 0.0140 |
| T-3 Return | 0.0357 | 0.7840 | | -0.1393 | 0.2833 | | -0.0017 | 0.9859 | | 0.0138 |
| T-4 Return | 0.0552 | 0.6700 | | -0.1524 | 0.2374 | | -0.0908 | 0.3330 | | 0.0218 |

註：*表示於 10% 顯著水準下顯著；**表示於 5% 顯著水準下顯著；***表示於 1% 顯著水準下顯著

附表 8：距到期日 7 日之 RND 四變數迴歸分析結果（單點配適法）

| | Skewness_Coef | Skewness_p | Skewness_Sig | Kurtosis_Coef | Kurtosis_p | Kurtosis_Sig | Std_Coef | Std_p | Std_Sig | Variable_Coef | Variable_p | Variable_Sig | R-squared |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Mean | 0.0648 | 0.6165 | | -0.1846 | 0.2507 | | 0.0612 | 0.7640 | | -0.2019 | 0.2372 | | 0.0392 |
| Median | 0.0615 | 0.6348 | | -0.1861 | 0.2477 | | 0.0631 | 0.7574 | | -0.2031 | 0.2339 | | 0.0394 |
| Fear and Greed Index | -0.0131 | 0.9283 | | -0.0336 | 0.8126 | | -0.1941 | 0.1101 | | 0.1350 | 0.2543 | | 0.0384 |
| VIX | 0.0427 | 0.7614 | | -0.0622 | 0.6664 | | -0.1431 | 0.2038 | | -0.0413 | 0.6830 | | 0.0288 |
| T-1 Return | 0.1105 | 0.4462 | | -0.1196 | 0.4106 | | -0.1406 | 0.2105 | | -0.0743 | 0.4741 | | 0.0317 |
| T-2 Return | 0.0603 | 0.6497 | | -0.0803 | 0.5561 | | -0.1410 | 0.2103 | | 0.0145 | 0.8779 | | 0.0275 |
| T-3 Return | 0.0645 | 0.6251 | | -0.0823 | 0.5478 | | -0.1410 | 0.2102 | | -0.0007 | 0.9940 | | 0.0273 |
| T-4 Return | 0.0841 | 0.5219 | | -0.0957 | 0.4819 | | -0.1407 | 0.2094 | | -0.0904 | 0.3338 | | 0.0353 |

註：*表示於 10% 顯著水準下顯著；**表示於 5% 顯著水準下顯著；***表示於 1% 顯著水準下顯著

附表 9：距到期日 7 日之 RND 雙變數迴歸分析結果（雙點配適法）

| | Skewness_Coef | Skewness_p | Skewness_Sig | Variable_Coef | Variable_p | Variable_Sig | R-squared |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Mean | -0.0401 | 0.6654 | | -0.1505 | 0.1066 | | 0.0259 |
| Std | 0.0185 | 0.8601 | | -0.1636 | 0.1212 | | 0.0242 |
| Kurtosis | 0.0353 | 0.7822 | | -0.1390 | 0.2782 | | 0.0138 |
| Median | -0.0429 | 0.6430 | | -0.1502 | 0.1062 | | 0.0259 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Fear and Greed Index | -0.1021 | 0.3462 | | 0.0803 | 0.4581 | | 0.0084 |
| VIX | -0.0750 | 0.4298 | | -0.0667 | 0.4830 | | 0.0079 |
| T-1 Return | -0.0538 | 0.5779 | | -0.0249 | 0.7963 | | 0.0043 |
| T-2 Return | -0.0653 | 0.4901 | | 0.0248 | 0.7932 | | 0.0043 |
| T-3 Return | -0.0620 | 0.5077 | | 0.0115 | 0.9021 | | 0.0038 |
| T-4 Return | -0.0515 | 0.5811 | | -0.0789 | 0.3982 | | 0.0098 |

註：*表示於 10% 顯著水準下顯著；**表示於 5% 顯著水準下顯著；***表示於 1% 顯著水準下顯著

附表 10：距到期日 7 日之 RND 三變數迴歸分析結果（雙點配適法）

| | Skewness_Coef | Skewness_p | Skewness_Sig | Kurtosis_Coef | Kurtosis_p | Kurtosis_Sig | Variable_Coef | Variable_p | Variable_Sig | R-squared |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Mean | 0.0685 | 0.5935 | | -0.1555 | 0.2228 | | -0.1591 | 0.0884 | * | 0.0385 |
| Std | 0.0644 | 0.6194 | | -0.0822 | 0.5435 | | -0.1410 | 0.2082 | | 0.0273 |
| Median | 0.0660 | 0.6065 | | -0.1560 | 0.2212 | | -0.1591 | 0.0876 | * | 0.0386 |
| Fear and Greed Index | -0.0054 | 0.9709 | | -0.1264 | 0.3322 | | 0.0621 | 0.5716 | | 0.0165 |
| VIX | 0.0163 | 0.9069 | | -0.1225 | 0.3708 | | -0.0355 | 0.7259 | | 0.0148 |
| T-1 Return | 0.0820 | 0.5680 | | -0.1766 | 0.2032 | | -0.0750 | 0.4713 | | 0.0182 |
| T-2 Return | 0.0312 | 0.8120 | | -0.1370 | 0.2893 | | 0.0150 | 0.8744 | | 0.0140 |
| T-3 Return | 0.0357 | 0.7840 | | -0.1393 | 0.2833 | | -0.0017 | 0.9859 | | 0.0138 |
| T-4 Return | 0.0552 | 0.6700 | | -0.1524 | 0.2374 | | -0.0908 | 0.3330 | | 0.0218 |

註：*表示於 10% 顯著水準下顯著；**表示於 5% 顯著水準下顯著；***表示於 1% 顯著水準下顯著

附表 11：距到期日 7 日之 RND 四變數迴歸分析結果（雙點配適法）

| | Skewness_Coef | Skewness_p | Skewness_Sig | Kurtosis_Coef | Kurtosis_p | Kurtosis_Sig | Std_Coef | Std_p | Std_Sig | Variable_Coef | Variable_p | Variable_Sig | R-squared |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Mean | 0.0648 | 0.6165 | | -0.1846 | 0.2507 | | 0.0612 | 0.7640 | | -0.2019 | 0.2372 | | 0.0392 |
| Median | 0.0615 | 0.6348 | | -0.1861 | 0.2477 | | 0.0631 | 0.7574 | | -0.2031 | 0.2339 | | 0.0394 |
| Fear and Greed Index | -0.0131 | 0.9283 | | -0.0336 | 0.8126 | | -0.1941 | 0.1101 | | 0.1350 | 0.2543 | | 0.0384 |
| VIX | 0.0427 | 0.7614 | | -0.0622 | 0.6664 | | -0.1431 | 0.2038 | | -0.0413 | 0.6830 | | 0.0288 |
| T-1 Return | 0.1105 | 0.4462 | | -0.1196 | 0.4106 | | -0.1406 | 0.2105 | | -0.0743 | 0.4741 | | 0.0317 |
| T-2 Return | 0.0603 | 0.6497 | | -0.0803 | 0.5561 | | -0.1410 | 0.2103 | | 0.0145 | 0.8779 | | 0.0275 |
| T-3 Return | 0.0645 | 0.6251 | | -0.0823 | 0.5478 | | -0.1410 | 0.2102 | | -0.0007 | 0.9940 | | 0.0273 |
| T-4 Return | 0.0841 | 0.5219 | | -0.0957 | 0.4819 | | -0.1407 | 0.2094 | | -0.0904 | 0.3338 | | 0.0353 |

註：*表示於 10% 顯著水準下顯著；**表示於 5% 顯著水準下顯著；***表示於 1% 顯著水準下顯著

# 參考文獻


Akyildirim, E., Corbet, S., Lucey, B., Sensoy, A., & Yarovaya, L. (2020). The relationship between implied volatility and cryptocurrency returns. *Finance Research Letters*, *33*, 101212. https://doi.org/10.1016/j.frl.2019.06.010

Balkema, A. A., & Haan, L. de. (1974). Residual Life Time at Great Age. *The Annals of Probability*, *2*(5), 792–804. https://doi.org/10.1214/aop/1176996548

Birru, J., & Figlewski, S. (2012). Anatomy of a meltdown: The risk neutral density for the S&P 500 in the fall of 2008. *Journal of Financial Markets*, *15*(2), 151–180. https://doi.org/10.1016/j.finmar.2011.09.001

Breeden, D. T., & Litzenberger, R. H. (1978). Prices of State-Contingent Claims Implicit in Option Prices. *The Journal of Business*, *51*(4), 621–651.

Chordia, T., Lin, T.-C., & Xiang, V. (2021). Risk-Neutral Skewness, Informed Trading, and the Cross Section of Stock Returns. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, *56*(5), 1713–1737. https://doi.org/10.1017/S0022109020000551

Cujean, J., & Hasler, M. (2017). Why Does Return Predictability Concentrate in Bad Times? *The Journal of Finance*, *72*(6), 2717–2758. https://doi.org/10.1111/jofi.12544

Feng, Y., He, M., & Zhang, Y. (2024). Market Skewness and Stock Return Predictability: New Evidence from China. *Emerging Markets Finance and Trade*, *60*(2), 233–244. https://doi.org/10.1080/1540496X.2023.2217327

Figlewski, S. (2008). *Estimating the Implied Risk Neutral Density for the U.S. Market Portfolio* (SSRN Scholarly Paper No. 1256783). Social Science Research Network. https://papers.ssrn.com/abstract=1256783

Figlewski, S. (2018). Risk-Neutral Densities: A Review. *Annual Review of Financial Economics*, *10*(Volume 10, 2018), 329–359. https://doi.org/10.1146/annurev-financial-110217-022944

He, Y., Peng, L., Zhang, D., & Zhao, Z. (2022). Risk Analysis via Generalized Pareto Distributions. *Journal of Business & Economic Statistics*, *40*(2), 852–867. https://doi.org/10.1080/07350015.2021.1874390

Hosking, J. R. M., & Wallis, J. R. (1987). Parameter and Quantile Estimation for the Generalized Pareto Distribution. *Technometrics*, *29*(3), 339–349. https://doi.org/10.2307/1269343

Jackwerth, J. (2020). What Do Index Options Teach Us About COVID-19? *The Review of Asset Pricing Studies*, *10*(4), 618–634. https://doi.org/10.1093/rapstu/raaa012

Köse, N., Yildirim, H., Ünal, E., & Lin, B. (2024). The Bitcoin price and Bitcoin price uncertainty: Evidence of Bitcoin price volatility. *Journal of Futures Markets*, *44*(4), 673–695. https://doi.org/10.1002/fut.22487

Li, X., Wu, Z., Zhang, H., & Zhang, L. (2024). Risk-neutral skewness and stock market returns: A time-series analysis. *The North American Journal of Economics and Finance*, *70*, 102040. https://doi.org/10.1016/j.najef.2023.102040

McNeil, A. J., & Frey, R. (2000). Estimation of tail-related risk measures for heteroscedastic financial time series: An extreme value approach. *Journal of Empirical Finance*, *7*(3), 271–300. https://doi.org/10.1016/S0927-5398(00)00012-8

Mohrschladt, H., & Schneider, J. C. (2021). Option-implied skewness: Insights from ITM-options. *Journal of Economic Dynamics and Control*, *131*, 104227. https://doi.org/10.1016/j.jedc.2021.104227

Shimko, D. (1993). Bounds of probability. *Risk*, *6*(4), 33–37.

Uberti, P. (2023). A theoretical generalization of the Markowitz model incorporating skewness and kurtosis. *Quantitative Finance*, *23*(5), 877–886. https://doi.org/10.1080/14697688.2023.2176250

Zulfiqar, N., & Gulzar, S. (2021). Implied volatility estimation of bitcoin options and the stylized facts of option pricing. *Financial Innovation*, *7*(1), 67. https://doi.org/10.1186/s40854-021-00280-y