



國立臺灣科技大學  
財務金融研究所碩士班  
碩士學位論文

學號：M11218014

---

比特幣選擇權隱含風險中立機率密度  
之平滑尾部導取

Extracting Smooth Tails of Option Implied Risk-neutral Densities  
in the Bitcoin Market

研究生：王士誠  
指導教授：薛博今 博士  
繆維中 博士

中 華 民 國 一 一 四 年 五 月

# 摘要

本研究旨在探討風險中立機率密度 (Risk-neutral Density, RND) 尾部配適方法對比特幣選擇權市場報酬率預測能力之影響，並提出創新的單點加斜率配適法，與文獻中常用的雙點配適法 (Birru & Figlewski, 2012) 進行實證比較。自 Breeden 與 Litzenberger (1978) 開創性研究以來，從選擇權價格中提取 RND 已成為探索市場預期的重要方法，然而在處理極端市場條件下的尾部風險估計仍存挑戰。

本研究以全球最大比特幣選擇權交易平台 Deribit 於 2021 年至 2024 年的交易數據為基礎，結合廣義柏拉圖分布 (Generalized Pareto Distribution, GPD)，建立完整的尾部延伸模型。透過比較距到期日 1 天與 7 天之選擇權樣本，檢驗 RND 統計特徵對現貨報酬率的預測能力。實證結果顯示，在計算效率方面，單點加斜率配適法較雙點配適法平均提升 10.95%；在日報酬率預測中，單點配適法建構之模型以偏態 (Skewness)、中位數 (Median) 及前期報酬率為顯著預測變數 ( $R\text{-squared} = 0.0130$ )，表現優於雙點配適法 ( $R\text{-squared} = 0.0098$ )，此結果與 Conrad 等人 (2013) 及 Liu 與 Tsyvinski (2021) 關於偏態與動量效應的研究相呼應。

在週報酬率預測方面，兩種方法表現接近，最佳預測變數組合為超額峰態 (Excess Kurtosis)、中位數 (Median) 及加密貨幣恐懼與貪婪指數。超額峰態的預測力呼應 Amaya 等人 (2015) 研究結果，而恐懼與貪婪指數的顯著影響則與 He 等人 (2023) 的發現一致。樣本外預測結果顯示，無論在日報酬率或週報酬率預測中，兩種方法均產生正值的樣本外  $R$  平方，且單點配適法表現優於雙點配適法，顯示我們的預測模型具實質經濟價值 (Campbell & Thompson, 2008)。

本研究主要貢獻在於提出單點加斜率配適法，此方法提升 RND 尾部配適的效率與穩定性，更驗證了 RND 統計特徵在高波動性市場中的應用價值，為投資組合風險管理及交易策略優化提供具體指引。

# Abstract

This study investigates the impact of risk-neutral density (RND) tail estimation methods on return predictability in the Bitcoin options market and proposes an innovative single-point with slope estimation method, comparing it with the conventional two-point estimation approach documented in the literature (Birru & Figlewski, 2012). Since the pioneering work of Breeden and Litzenberger (1978), extracting RNDs from option prices has become an important technique for exploring market expectations, yet challenges remain in estimating tail risks under extreme market conditions.

Based on trading data from Deribit, the world's largest Bitcoin options trading platform, spanning from 2021 to 2024, this study integrates the Generalized Pareto Distribution (GPD) to develop a comprehensive tail extension model. By comparing options samples with 1-day and 7-day maturities, we examine the predictive power of RND statistical features on spot returns. Empirical results indicate that the single-point with slope estimation method improves computational efficiency by 10.95% compared to the two-point estimation method. For daily return prediction, the regression model constructed using the single-point estimation method identifies skewness, median, and lagged returns as significant predictive variables ( $R\text{-squared} = 0.0130$ ), outperforming the two-point estimation method ( $R\text{-squared} = 0.0098$ ). These findings align with research on skewness and momentum effects by Conrad et al. (2013) and Liu and Tsyvinski (2021).

For weekly return prediction, both methods perform similarly, with the optimal combination of predictive variables being excess kurtosis, median, and the Cryptocurrency Fear and Greed Index. The predictive power of excess kurtosis echoes the findings of Amaya et al. (2015), while the significant influence of the Fear and Greed Index is consistent with discoveries by He et al. (2023). Out-of-sample prediction results

demonstrate that both methods yield positive out-of-sample R-squared values for both daily and weekly return predictions, with the single-point estimation method outperforming the two-point estimation method, indicating that our predictive models possess substantial economic value (Campbell & Thompson, 2008).

The primary contribution of this research lies in the development of the single-point with slope estimation method, which enhances the efficiency and stability of RND tail estimation while validating the application value of RND statistical features in highly volatile markets, providing concrete guidance for portfolio risk management and trading strategy optimization.

## 誌謝

# 目錄

摘要 .....	I
Abstract .....	II
誌謝 .....	IV
目錄 .....	V
圖目錄 .....	VIII
表目錄 .....	IX
第一章、緒論 .....	11
1.1 研究背景與動機 .....	11
1.2 研究架構 .....	13
第二章、文獻回顧 .....	15
2.1 風險中立機率密度之基礎理論 .....	15
2.2 風險中立機率密度之估計方法 .....	15
2.3 風險中立分布之特性研究 .....	16
2.3.1 高階動差之特性與應用 .....	16
2.3.2 尾部風險特性與極值理論 .....	17
2.4 金融市場實證應用 .....	18
2.4.1 傳統金融市場 .....	18
2.4.2 加密貨幣市場 .....	19
第三章、資料來源 .....	21
3.1 資料來源 .....	21
3.2 比特幣選擇權交易市場概況 .....	22
第四章、研究方法 .....	26
4.1 以理論計算風險中立機率密度之方法 .....	26
4.2 以實務計算風險中立機率密度之方法 .....	28

4.2.1 比特幣適用之 Black-Scholes 模型 .....	28
4.2.2 比特幣選擇權隱含波動率計算 .....	29
4.2.3 比特幣選擇權隱含波動率曲線擬合 .....	32
4.2.4 比特幣選擇權風險中立機率密度函數計算 .....	34
4.3 配適風險中立機率密度尾部分布 .....	37
4.3.1 尾部 GEV 雙點配適法 .....	37
4.3.2 GPD 分布理論 .....	37
4.3.3 尾部 GPD 雙點配適法 .....	39
4.3.4 尾部 GPD 單點加斜率配適法 .....	41
4.4 風險中立機率密度函數之統計特徵 .....	43
4.4.1 動差之定義與意涵 .....	44
4.4.2 風險中立機率密度函數之統計特徵量 .....	44
4.4.3 統計特徵之市場意涵 .....	46
4.5 實證分析 .....	46
4.5.1 迴歸模型變數選擇與理論基礎 .....	46
4.5.2 迴歸模型設計 .....	48
4.5.3 新型方法之有效性驗證 .....	50
<b>第五章、實證結果分析 .....</b>	<b>52</b>
5.1 實證樣本擬合效果分析 .....	52
5.1.1 單點配適法與雙點配適法之比較 .....	52
5.1.2 計算效率之實證比較 .....	54
5.2 距離到期日 1 天之商品實證迴歸分析 .....	56
5.2.1 尾部 GPD 單點配適法 .....	56
5.2.2 尾部 GPD 雙點配適法 .....	58
5.2.3 兩方法比較分析 .....	60
5.3 距離到期日 7 天之商品實證迴歸分析 .....	62

5.3.1 尾部 GPD 單點配適法 .....	62
5.3.2 尾部 GPD 雙點配適法 .....	64
5.3.3 兩方法比較分析 .....	65
5.4 小結 .....	67
<b>第六章、結論與建議 .....</b>	<b>69</b>
6.1 研究結論 .....	69
6.2 研究建議 .....	70
<b>附錄 .....</b>	<b>72</b>
<b>參考文獻 .....</b>	<b>76</b>



## 圖目錄

圖 3-1：比特幣選擇權市場交易量與未平倉量數據統計 .....	21
圖 3-2：2020 年 1 月至 2024 年 4 月比特幣選擇權買權、賣權每月交易筆數 .....	23
圖 3-3：2020 年 1 月至 2024 年 4 月比特幣選擇權買權、賣權每月交易量 .....	23
圖 3-4：2020 年 1 月至 2024 年 4 月比特幣買權總交易量熱圖 .....	24
圖 3-5：2020 年 1 月至 2024 年 4 月比特幣賣權總交易量熱圖 .....	25
圖 4-1：2023 年 11 月 20 日比特幣選擇權隱含波動率分布圖 .....	31
圖 4-2：2023 年 11 月 20 日比特幣選擇權隱含波動率分布圖 .....	31
圖 4-3：2023 年 11 月 20 日比特幣選擇權隱含波動率分布圖 .....	32
圖 4-4：2023 年 11 月 20 日比特幣選擇權隱含波動率擬合曲線 .....	34
圖 4-5：2023 年 11 月 20 日比特幣選擇權理論買權價格 .....	34
圖 4-6：2023 年 11 月 20 日比特幣選擇權風險中立機率密度函數 .....	36
圖 4-7：2023 年 11 月 20 日比特幣選擇權風險中立機率累積分布函數 .....	36
圖 4-8：2023 年 11 月 20 日比特幣選擇權 GPD 尾部配適（雙點配適法） .....	40
圖 4-9：2023 年 11 月 20 日比特幣選擇權實證 RND 之 CDF（雙點配適法） .....	41
圖 4-10：2023 年 11 月 20 日比特幣選擇權 GPD 尾部配適（單點配適法） .....	43
圖 4-11：2023 年 11 月 20 日比特幣選擇權實證 RND 之 CDF（單點配適法） .....	43
圖 5-1：2022 年 7 月 10 日比特幣選擇權 GPD 尾部配適比較 .....	53
圖 5-2：2023 年 9 月 27 日比特幣選擇權 GPD 尾部配適比較 .....	53

## 表目錄

表 5-1：比特幣選擇權 GPD 尾部配適計算效率比較.....	55
表 5-2：距到期日 1 日之 RND 敘述統計量（單點配適法） .....	56
表 5-3：距到期日 1 日之 RND 單變數迴歸分析結果（單點配適法） .....	57
表 5-4：距到期日 1 日之 RND 雙變數迴歸分析結果（單點配適法） .....	57
表 5-5：距到期日 1 日之 RND 迴歸分析結果（單點配適法） .....	58
表 5-6：距到期日 1 日之 RND 敘述統計量（雙點配適法） .....	58
表 5-7：距到期日 1 日之 RND 單變數迴歸分析結果（雙點配適法） .....	59
表 5-8：距到期日 1 日之 RND 雙變數迴歸分析結果（雙點配適法） .....	59
表 5-9：距到期日 1 日之 RND 迴歸分析結果（雙點配適法） .....	60
表 5-10：距到期日 1 日之 RND 迴歸分析結果比較 .....	61
表 5-11：距到期日 7 日之 RND 敘述統計量（單點配適法） .....	62
表 5-12：距到期日 7 日之 RND 單變數迴歸分析結果（單點配適法） .....	63
表 5-13：距到期日 7 日之 RND 迴歸分析結果（單點配適法） .....	63
表 5-14：距到期日 7 日之 RND 敘述統計量（雙點配適法） .....	64
表 5-15：距到期日 7 日之 RND 單變數迴歸分析結果（單點配適法） .....	64
表 5-16：距到期日 7 日之 RND 迴歸分析結果（雙點配適法） .....	65
表 5-17：距到期日 7 日之 RND 迴歸分析結果比較 .....	66
附表 1：距到期日 1 日之 RND 三變數迴歸分析結果（單點配適法） .....	72
附表 2：距到期日 1 日之 RND 四變數迴歸分析結果（單點配適法） .....	72
附表 3：依據三變數模型拓展之四變數迴歸分析結果（日報酬單點配適法） .....	72
附表 4：距到期日 1 日之 RND 三變數迴歸分析結果（雙點配適法） .....	73
附表 5：距到期日 1 日之 RND 四變數迴歸分析結果（雙點配適法） .....	73
附表 6：距到期日 7 日之 RND 雙變數迴歸分析結果（單點配適法） .....	73
附表 7：距到期日 7 日之 RND 三變數迴歸分析結果（單點配適法） .....	74

附表 8：距到期日 7 日之 RND 四變數迴歸分析結果（單點配適法） .....	74
附表 9：距到期日 7 日之 RND 雙變數迴歸分析結果（雙點配適法） .....	74
附表 10：距到期日 7 日之 RND 三變數迴歸分析結果（雙點配適法） .....	75
附表 11：距到期日 7 日之 RND 四變數迴歸分析結果（雙點配適法） .....	75

# 第一章、緒論

## 1.1 研究背景與動機

金融市場風險評估工具的演進，一直是金融研究的核心課題之一。近年來，隨著加密貨幣生態系統的快速擴張，比特幣作為市值最大的加密資產，其衍生性商品市場亦呈現爆發性成長 (Akyildirim et al., 2020)。根據 The Block 的最新數據 (The Block, 2025) 顯示，2024 年比特幣期貨與選擇權交易量已超過 21 兆美元，其中選擇權交易量的年增長率高達 130%，遠超傳統金融衍生品市場。此現象反映了投資人對於加密貨幣風險管理工具日益增長的需求，同時也為研究者提供了探索新興市場價格發現機制的獨特視角 (Zulfiqar & Gulzar, 2021)。

加密貨幣市場具有顯著不同於傳統金融市場的特性：全天候交易、極高波動性、去中心化結構及特殊的投資者組成。特別是在波動性方面，比特幣的歷史年化波動率經常超過 100%，遠高於傳統股票指數約 15-20% 的波動水平 (Liu & Tsyvinski, 2021)。這種極端波動特性使得風險管理在此市場中尤為重要，也為選擇權價格中隱含資訊的解讀帶來獨特挑戰。

選擇權價格中蘊含的資訊不僅反映了市場共識的風險預期，更是探索市場微觀結構和投資者行為的重要窗口 (Bakshi et al., 2003)。傳統的 Black-Scholes 模型 (1973) 雖然為選擇權定價提供了理論基礎，但其假設的正態分配無法充分捕捉金融市場中常見的厚尾分布和偏態特徵。特別是在加密貨幣這類高波動性市場中，異常報酬和極端事件的頻率顯著高於傳統資產，使得對市場隱含風險分布的準確估計更為關鍵 (Chordia et al., 2021)。

從選擇權價格中提取風險中立機率密度 (Risk-neutral Density, RND) 是一種較為全面的方法，能夠捕捉市場對未來價格分布的完整預期。自 Breeden 和 Litzenberger (1978) 開創性研究以來，RND 方法在傳統金融市場研究中取得了顯著

進展。然而，其在加密貨幣市場的應用仍處於初步階段，面臨著獨特的挑戰 (López-Cabarcos et al., 2021)。加密貨幣投資者組成與行為模式的獨特性也可能使傳統 RND 估計方法的適用性受到挑戰。

現有文獻在處理 RND 尾部配適問題時，普遍採用雙點配適法結合廣義極值分配 (GEV) 或廣義柏拉圖分配 (GPD) 進行估計 (Birru & Figlewski, 2012; Figlewski, 2008)。然而，我們注意到這種方法存在顯著局限性，尤其在應用於高波動性的加密貨幣市場時：首先，雙點配適法要求同時滿足兩個接合點的連續性條件，不僅增加了計算複雜度，也可能影響估計結果的穩定性，造成擬合時出現曲折 (kinks) 現象；其次，在加密貨幣市場中，由於價格波動劇烈，選擇權價格的資訊內涵可能隨市場情緒快速變化，這使得雙點配適法之適用性受到挑戰；再者，現有研究較少探討 RND 特徵在不同預測期間的表現差異。

基於上述研究缺口，本研究提出一套創新的單點加斜率配適法，突破了傳統雙點配適法的限制。與現有方法不同，我們的方法僅要求在單一接合點處同時滿足累積分布函數值與密度函數斜率的連續性條件，此設計不僅大幅簡化了配適過程，更增強了方法在極端市況下的穩定性，適合應用於高波動性的加密貨幣市場。

本研究的方法論創新不僅僅是為了提升運算效率。更重要的是，我們的單點加斜率配適法能更準確捕捉比特幣選擇權市場隱含的極端風險特徵，為投資者提供更可靠的風險評估工具。Chang 等人 (2013) 與 Conrad 等人 (2013) 的研究已證實，RND 的高階動差（如偏態、峰度）具有顯著的資產報酬預測能力。然而，這些結論是否適用於結構截然不同的加密貨幣市場，以及不同的預測時間尺度，仍是有待深入探討的問題。

此外，加密貨幣市場有著獨特的投資者組成與行為模式。研究表明，相較於傳統金融市場，加密貨幣投資者更容易受到情緒和非理性因素影響 (M. He et al., 2023)。因此，將投資者情緒指標（如加密貨幣恐懼與貪婪指數）納入 RND 特徵預

測模型，可能揭示傳統金融理論難以解釋的市場動態。

本研究的主要貢獻可分為三個層面：

1. 方法論突破：我們提出的單點加斜率配適法，突破了傳統雙點配適法的局限，在保持理論一致性的同時，顯著提升了尾部配適的穩定性與效率。實證結果顯示，此方法不僅運算速度較傳統方法平均提升 10.95%，更能有效處理加密貨幣市場高波動期間的極端分布情況，大幅減少配適失敗的頻率。此突破為極值理論在金融市場的廣泛應用開闢了新途徑。
2. 多種時間尺度預測框架：通過比較日報酬率與週報酬率預測模型，本研究揭示了 RND 特徵在不同時間尺度下的差異性預測能力。我們發現在日報酬率預測中，偏態 (Skewness)、中位數 (Median) 及前期報酬率具有顯著預測力；而在週報酬率預測中，超額峰態 (Excess Kurtosis)、中位數 (Median) 及加密貨幣恐懼與貪婪指數 (Fear and Greed Index) 則成為關鍵預測因子。這些發現不僅填補了現有文獻的研究缺口，更為投資者制定不同期限的交易策略提供了重要指引。
3. 市場微觀結構洞見：通過深入分析比特幣選擇權市場 RND 特徵與市場報酬的關聯性，本研究為理解加密貨幣市場的微觀結構與價格發現機制提供了新視角。特別是，我們發現加密貨幣市場的風險偏好與傳統金融市場存在顯著差異，對偏態風險的定價模式也有所不同 (Akyildirim et al., 2020)。

## 1.2 研究架構

本研究共分為六個章節，研究架構如下：

「第一章、緒論」：說明研究背景、動機及貢獻。

「第二章、文獻回顧」：探討風險中立機率密度 (Risk-neutral Density, RND) 理論發展、估計方法及相關實證研究。

「第三章、資料來源」：介紹研究資料來源與市場概況。

「第四章、研究方法」：詳述研究方法，包含風險中立機率密度計算、尾部配適方法及實證迴歸模型設計。

「第五章、實證結果分析」：迴歸結果分析，並比較不同配適方法表現差異。

「第六章、結論與建議」：總結本研究實證結果，並展望後續研究改進面向。

## 第二章、文獻回顧

### 2.1 風險中立機率密度之基礎理論

風險中立機率密度 (Risk-neutral Density, RND) 的概念最早由 Breeden 和 Litzenberger (1978) 提出。他們證明了可從選擇權價格中提取市場對標的資產未來價格分布的預期，此開創性研究為選擇權定價理論開啟了嶄新方向。Shimko (1993) 進一步提出將市場選擇權價格轉換至隱含波動率空間進行插值的技術，此方法利用了隱含波動率曲線較價格數據更為平滑且連續的特性，有助於提升 RND 估計的準確度。

Christoffersen et al. (2013) 深入探討了選擇權隱含資訊的預測能力，發現風險中立偏態能有效預測未來報酬率的方向與幅度。Chang et al. (2013) 則從另一角度切入，研究風險中立峰度與市場報酬的關聯性，指出較高的風險中立峰度往往預示著未來較大的市場波動。

於極端市場情境下，Birru 和 Figlewski (2012) 針對 2008 年金融危機期間的 S&P 500 指數選擇權進行研究，發現 RND 形狀會隨市場壓力增加而產生顯著變化。為更準確描述此類極端情況，他們採用廣義極值分配 (GEV) 完善 RND 尾部估計，此方法在處理極端市場條件時展現出優異效果 (Hosking & Wallis, 1987)。Jackwerth (2020) 進一步分析 S&P 500 指數選擇權的風險中立機率，發現市場在重大事件發生時往往需要一定時間才能完全反映其影響，此研究為理解市場資訊效率提供重要實證。

### 2.2 風險中立機率密度之估計方法

Figlewski (2008) 針對美國市場投資組合進行深入研究，提出一套完整的風險中立機率密度估計框架，並將其分為參數法和非參數法兩大類，為實務應用提供重要參考。McNeil 和 Frey (2000) 提出結合 GARCH 模型與極值理論 (EVT) 的創新



方法，用以估計金融時間序列的尾部風險。他們特別強調，廣義柏拉圖分布(GPD)在建模金融時間序列極端事件時具有獨特優勢。

Orosi (2015) 提出一種新穎的參數法來估計風險中立機率密度函數，該方法透過設定適當的函數形式，並對模型參數施加限制條件，能夠產生具良好性質的風險中立密度估計。He et al. (2022) 則建議使用 GPD 估計 RND 尾部，此方法在處理極端市場條件時特別有效。最近，Uberti (2023) 提出了一種新的半參數估計方法，結合了參數法的穩定性和非參數法的靈活性，為 RND 估計提供了新的研究方向，顯示出風險中立密度估計方法論不斷精進的趨勢。

Ammann & Feser (2019) 針對風險中立動差的穩健估計方法進行深入研究，提出能有效減少市場雜訊、極端價格變動或流動性不足等情況下估計偏誤的改良方法。Hayashi (2020) 提出一套從波動率微笑分析風險中性機率密度函數的創新方法，該方法能完全避免數值方法可能產生的近似誤差。

近期，Dong et al. (2024) 提出創新的 Implied Willow Tree (IWT)方法，解決重建風險中立隨機過程的研究缺口。有別於傳統僅重建風險中性機率密度函數的方法，該研究直接從跨到期日的市場選擇權價格資料重建完整的風險中立過程，無需依賴任何預設參數模型。實證顯示此方法在美式選擇權、亞洲選擇權定價計算上的有效性，且對原始資料中的雜訊具備良好的處理能力。

## 2.3 風險中立分布之特性研究

### 2.3.1 高階動差之特性與應用

風險中立分布的高階動差，特別是偏態與峰度，在金融市場研究中扮演關鍵角色。Bali 和 Murray (2013) 以及 Conrad 等人 (2013) 的研究顯示，風險中立偏態與未來股票報酬間存在顯著的負向關係，這與投資者偏好正偏態的理論預期相符。Kim 與 Park (2018) 之實證研究亦證實，選擇權隱含偏態與後續股票報酬呈現顯著

負相關，即使控制多項公司特性變數後仍然成立。

Mei et al. (2017) 探討已實現偏態與已實現峰態對股市波動度預測的影響，樣本外預測結果顯示，兩者對未來波動度具有顯著的負向影響，且已實現偏態在中長期預測區間的表現優於已實現峰態，而在短期預測中則效果有限。

Fuertes et al. (2022) 研究發現，風險中立偏態（RNSK）在商品期貨價格預測中具有重要作用，買入 RNSK 為正值的期貨並賣出 RNSK 為負值的期貨能產生顯著超額報酬，尤其在期貨市場處於正價差階段時表現更佳，為商品期貨市場的資產配置與風險管理提供新視角。

Cortés et al. (2020) 探討使用半非參數方法從西德州中級原油選擇權中推導隱含風險中立密度函數的效能。結果表明，相較於傳統的對數常態分布，對數 SNP 分布能更準確地捕捉原油價格的 RND，其中偏度與峰度包含與石油市場預期相關的重要資訊。當市場出現負偏度時，表示預期標的價格下跌可能性較高；出現高狹峰則表示價格出現極端變化可能性較高。

Böök et al. (2025) 近期研究提出一套新方法估計波動率微笑，使用 S&P 500 指數短期選擇權數據推導出穩健的條件波動率、偏度和峰度指標。這些指標在預測美國股票風險溢酬及市場高階動差方面表現優異，無論是樣本內還是樣本外測試，均優於基於歷史報酬計算出的等效指標。

### 2.3.2 尾部風險特性與極值理論

針對極值理論的基礎研究，Balkema 和 de Haan (1974) 提出的閾值超越模型為後續金融市場極端事件研究奠定重要基礎。他們的研究證明，當樣本超過足夠高的閾值時，其分配會收斂至廣義柏拉圖分配，此發現對於估計金融市場的尾部風險具有關鍵意義。

Wang 和 Yen (2018) 研究顯示，基於極值理論建構的選擇權隱含尾部風險指標

能有效預測標的資產未來變動。實證結果發現，S&P 500 指數與 VIX 選擇權所隱含的尾部風險對未來報酬具顯著預測能力，特別在經濟衰退期間表現更為明顯。Chen et al. (2018) 針對崩盤風險與風險中立機率密度函數的關聯性進行深入探討，發現風險中立機率密度函數的高階動差，在預測及解釋崩盤風險與風險溢酬方面具有顯著解釋能力。其中偏態與風險溢酬具高度正相關，峰態則與外匯交換利差存在正相關，且峰態越高代表市場出現極端事件機率增加。

Lehnert (2022) 探討風險中立偏態與避險基金尾部風險之間的關聯性，實證結果顯示，指數選擇權市場的賣空行為會導致風險中立市場偏態與報酬間的負向關係，此研究挑戰了傳統將選擇權隱含偏態視為下行風險指標的觀點，為理解市場風險偏好提供新視角。

Conrad et al. (2013) 進一步擴展了結合 GARCH 模型與混合常態分配的方法，特別適用於捕捉金融市場中的非對稱波動特徵。Neumann 和 Skiadopoulos (2013) 則深入研究 S&P 500 選擇權的高階風險中立矩，發現市場對波動率、偏態與峰度的預期具有顯著的可預測性，特別是在市場波動較大的期間。

## 2.4 金融市場實證應用

### 2.4.1 傳統金融市場

Mohrschladt 和 Schneider (2021) 使用高頻交易資料分析價內外期權的隱含波動度差異，發現價內期權包含重要的市場資訊。Li et al. (2024) 的研究指出，風險中性偏態對未來股票報酬具有顯著預測能力，尤其在經濟衰退期間表現更為顯著，此發現與 Cujean 和 Hasler (2017) 的理論預測一致。

Feng et al. (2024) 最新研究發現，市場情緒與選擇權隱含波動率之間存在強烈關聯，特別是在市場不確定性較高的時期。Köse et al. (2024) 則從市場微觀結構角度，研究了交易者行為對選擇權價格形成的影響，發現機構投資人的交易行為對

RND 形狀有顯著影響。

在報酬預測方面，Amaya 等人 (2015) 的實證研究發現，已實現偏態對股票橫斷面報酬具有顯著解釋力，且此預測能力在控制其他風險因子後仍然顯著。Bali 和 Zhou (2016) 則從風險與不確定性角度切入，發現市場不確定性與預期報酬間存在顯著關聯，特別是在總體經濟不確定性較高的時期。Campbell 和 Thompson (2008) 的開創性研究則提出了評估預測模型經濟價值的框架，並證實即使看似微小的預測能力也可能帶來可觀的經濟效益。

Jondeau 等人 (2020) 研究個別股票偏態對指數期貨報酬的預測能力，實證結果顯示此指標在預測 S&P 500 指數期貨報酬方面展現顯著效果。即使控制流動性風險及經濟循環因素後，此預測關係依然成立，且個別偏態在樣本外預測指數期貨報酬方面同樣表現卓越。

## 2.4.2 加密貨幣市場

在加密貨幣市場方面，Zulfiqar 和 Gulzar (2021) 研究發現，主要加密貨幣交易所提供的選擇權交易，為投資人提供了更多元的避險工具。Baur 和 Smales (2022) 針對比特幣期貨市場的交易行為進行深入研究，發現槓桿資金交易者在比特幣期貨市場中扮演關鍵角色，不僅持有最大部位，且通常呈現淨空頭狀態，這些交易者展現出其能夠準確預測最大的市場波動之能力。

López-Cabarcos et al. (2021) 深入分析了比特幣市場的投資者情緒與價格波動的關係，發現社群媒體情緒指標對短期價格變動具有顯著預測力，此研究強調了情緒因素在加密貨幣市場定價中的重要性。Chordia et al. (2021) 的研究則指出，比特幣選擇權市場的 RND 往往呈現顯著的左偏和超額峰度。Akyildirim et al. (2020) 進一步發現，加密貨幣市場在投資者恐懼情緒升高時表現出較高波動性，且與傳統市場波動性指標呈現顯著相關。

在加密貨幣市場的動態特性研究方面，Liu and Tsyvinski (2021) 研究加密貨幣市場的風險與報酬特性，發現存在顯著的動量效應。Li 等人 (2021) 進一步證實 MAX 動量效應在加密貨幣市場特別顯著，具體而言，過去表現最佳的加密貨幣在未來期間仍傾向維持較佳表現，此現象與傳統金融市場的動量效應類似，但強度更為顯著。

Liu & Chen (2024) 研究發現，市值較大的加密貨幣表現出左偏特性，而市值較小的則呈現右偏，且非對稱性風險與未來報酬呈現負相關，意即偏度較低的加密貨幣通常能產生較高的報酬。Liu et al. (2023) 則運用機器學習方法預測加密貨幣報酬率，證實前期報酬率具有強大的預測能力。

## 第三章、資料來源

### 3.1 資料來源

本研究採用全球最大比特幣選擇權交易平台 Deribit 交易所 (Deribit, 2025) 提供之歷史交易數據作為研究樣本。研究期間涵蓋 2020 年 1 月至 2024 年 4 月，所蒐集資料包含每日交易量、收盤價、隱含波動率、現貨價及期貨價等交易資訊。選擇 Deribit 交易所作為研究對象，主要基於其在全球加密貨幣選擇權市場的領導地位。

根據加密貨幣資訊服務公司 The Block 之統計數據 (The Block, 2025) 顯示，在主要的三大交易平台 (Deribit、OKX 及 Binance) 中，Deribit 不僅擁有最大的交易量，其未平倉量更占整體市場 80% 以上的比重 (如圖 3-1)，此優勢地位主要源自其悠久的經營歷史與穩健的市場發展策略。

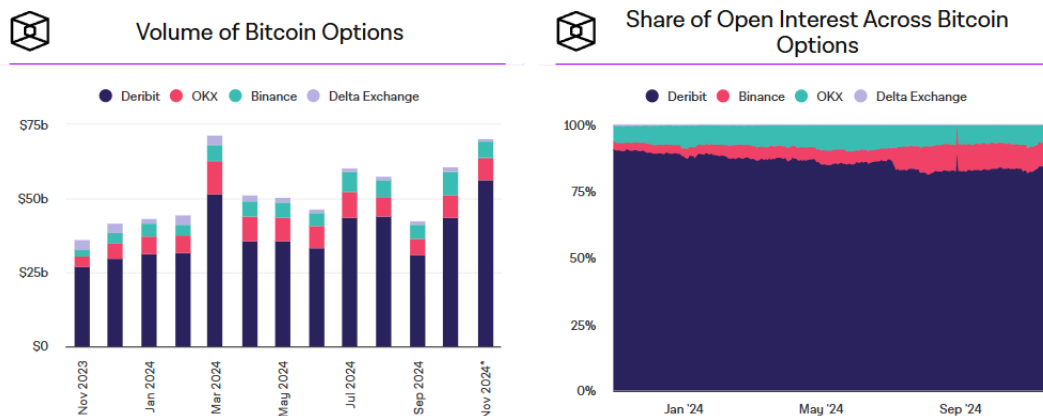


圖 3-1：比特幣選擇權市場交易量與未平倉量數據統計

(資料來源：The Block 官方網站)

Deribit 成立於 2016 年，總部設於荷蘭，其名稱由「Derivatives」(衍生性商品) 與「Bitcoin」(比特幣) 組合而成，為全球首家推出加密貨幣選擇權商品的專業交易所。

就商品設計而言，Deribit 提供之比特幣歐式現金結算選擇權採 24 小時全天候

交易機制 (Deribit Options, 2025), 到期時間統一設於世界標準時間 08:00(UTC+0)。

在到期日期的選擇上, 交易所提供多元化的商品組合, 包含: 短期合約 (1 日、2 日、3 日)、中期合約 (1 週、2 週、3 週)、月底到期長期合約 (1、2、4、5、7、8、10、11 月) 及季度到期長期合約 (3、6、9、12 月)。

此多樣化的商品設計不僅能滿足不同投資人的交易需求, 更有助於提升市場流動性與價格發現效率。特別是在 2020 年 10 月後, Deribit 增設每日與每週到期之商品, 大幅提升了市場參與度, 交易量也隨之顯著成長。

## 3.2 比特幣選擇權交易市場概況

本研究將透過比特幣選擇權歷史交易數據進行實證分析, 探討選擇權市場中的隱含波動率與市場預期價格變動之關聯性, 並計算風險中立機率密度函數 (Risk-neutral Density, RND), 分析其於不同市場氛圍下之變化。

在交易筆數 (圖 3-2) 與交易量 (圖 3-3) 方面, 自 2020 年 10 月起出現明顯的成長趨勢。此轉折點與 Deribit 擴充商品線、新增每日及每週到期商品的時間點相符, 顯示商品多樣化策略確實有效提升了市場活絡度。其次, 觀察 2023 年下半年的市場表現, 交易量再次呈現大幅增長態勢, 特別是在 2023 年 9 月後, 隨著比特幣現貨價格的強勁上漲, 買權交易量更於 2024 年 2 月創下歷史新高。此現象反映出市場參與者對比特幣後市持續看好, 投資人偏好透過選擇權商品進行投機或避險操作。就市場深度而言, 自 2023 年下半年以來, 交易量的持續攀升不僅反映出市場參與度的提高, 更顯示比特幣選擇權市場的流動性與深度已趨於成熟。這種市場結構的改善, 有助於降低交易成本、提升價格發現效率, 進而吸引更多機構投資人參與。比特幣選擇權市場展現出明顯的成長動能與結構性改善, 為後續研究提供了豐富且具代表性的數據基礎。

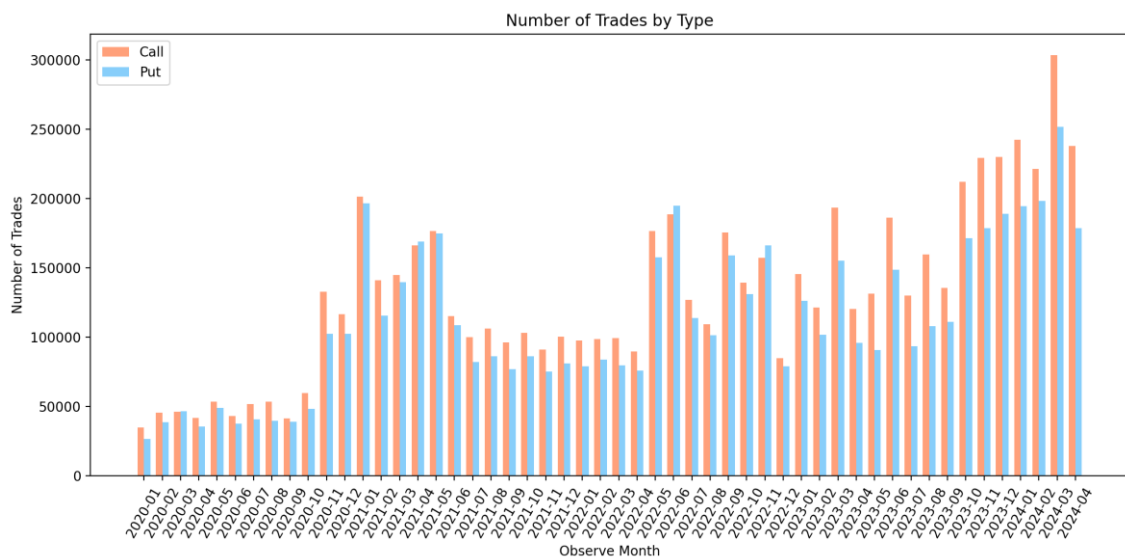


圖 3-2：2020 年 1 月至 2024 年 4 月比特幣選擇權買權、賣權每月交易筆數

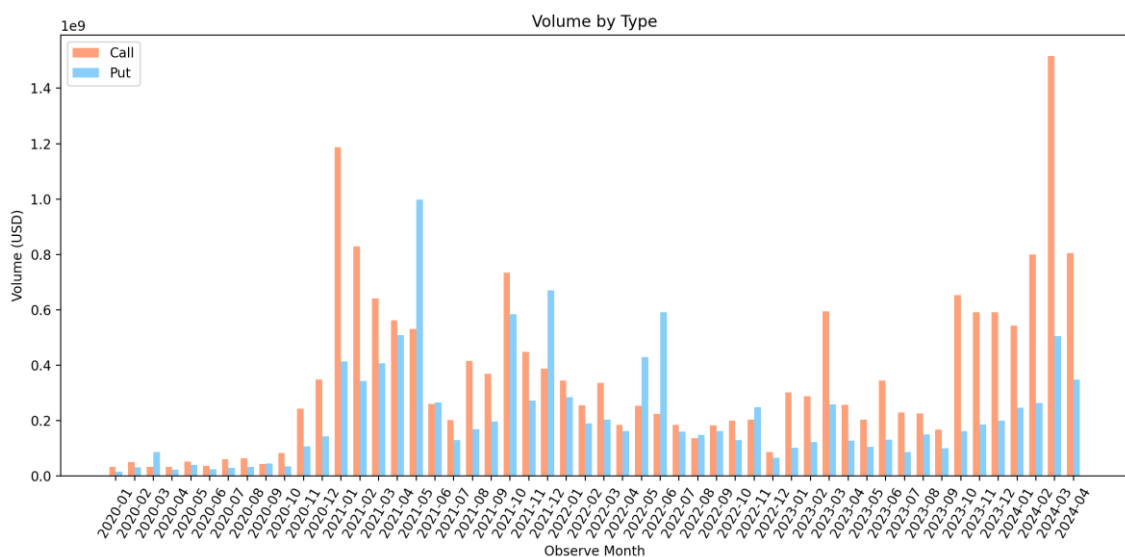


圖 3-3：2020 年 1 月至 2024 年 4 月比特幣選擇權買權、賣權每月交易量

本研究透過總交易量熱圖分析，觀察比特幣選擇權市場之交易型態。就買權市場而言（圖 3-4），交易活動明顯聚集於價平附近區域，尤以 Moneyness  $\left(\frac{StrikePrice(K)}{SpotPrice(S)}\right)$  介於 0.9 至 1.1 間之交易最為活絡。其中略偏價外（1.0-1.1）之買權更創下 2,072 百萬美元之最高交易量，顯示投資人偏好運用較具槓桿效果之價外買權進行交易。反觀深度價外（大於 1.5）之買權交易量相對稀少，顯示市場參與者對執行價過高之買權興趣缺乏。



就到期期間結構而言，短天期買權市場呈現較高之交易活絡度，尤以 31 至 90 天期間之買權在各比率區間均維持相當成交量。值得注意者為，極短天期（14 天以內）之買權於價平附近仍維持可觀交易量，此現象反映市場存在顯著之短線投機交易需求。另一方面，長天期（180 天以上）買權之交易相對清淡，惟於深度價外區域（大於 2.0）出現高達 392 百萬合約之異常交易量，研判可能與特定投資策略或法人避險需求有關。

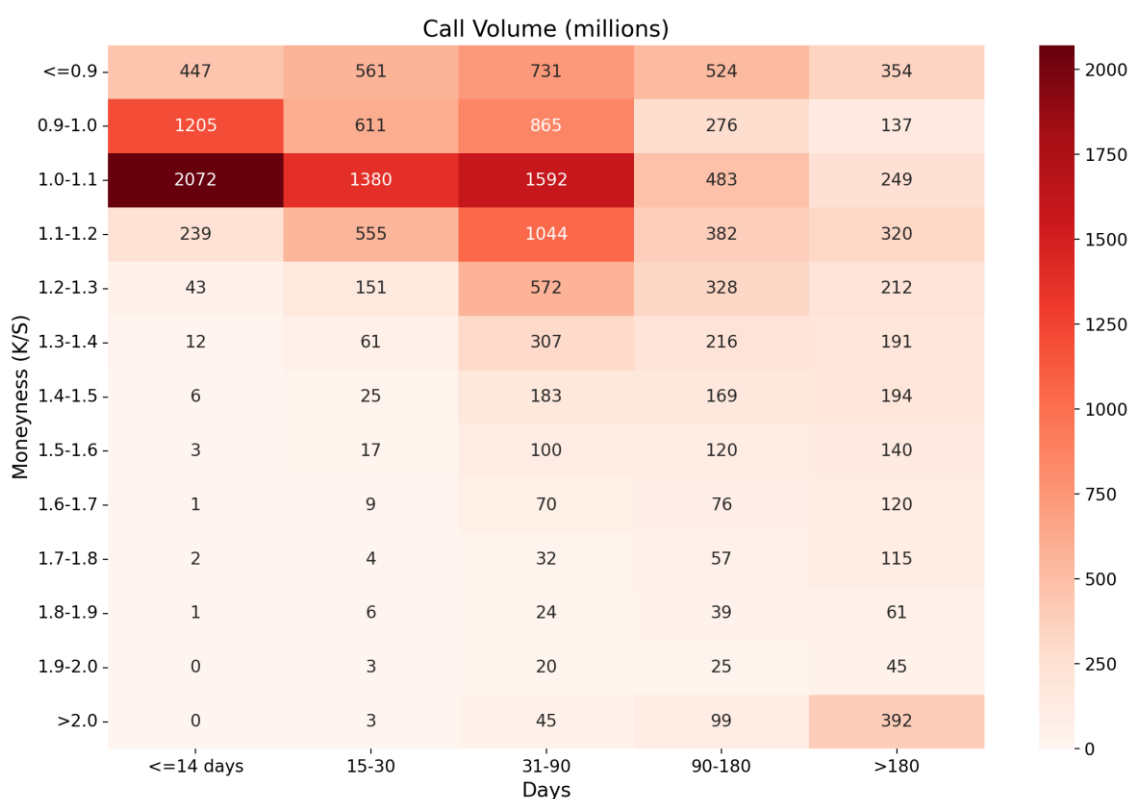


圖 3-4：2020 年 1 月至 2024 年 4 月比特幣買權總交易量熱圖

賣權市場(圖 3-5)則呈現迥異之交易特徵。交易活動高度集中於價平附近(0.9-1.0)，最高單一區塊交易量達 1,676 百萬美元，遠高於其他區域。深度價外（小於等於 0.7）賣權之交易量相對稀少，此現象顯示市場對比特幣大幅下跌之避險需求相對有限。就到期期間分配而言，短天期賣權（14 天以內及 15-90 天）於價平附近之交易最為活躍，而中長天期（90-180 天）賣權則於深度價內（大於 1.1）區域出現顯著之交易量（821 百萬美元）。極長天期（180 天以上）賣權之交易量分配較為平均，各比率區間均維持一定水準之成交量。

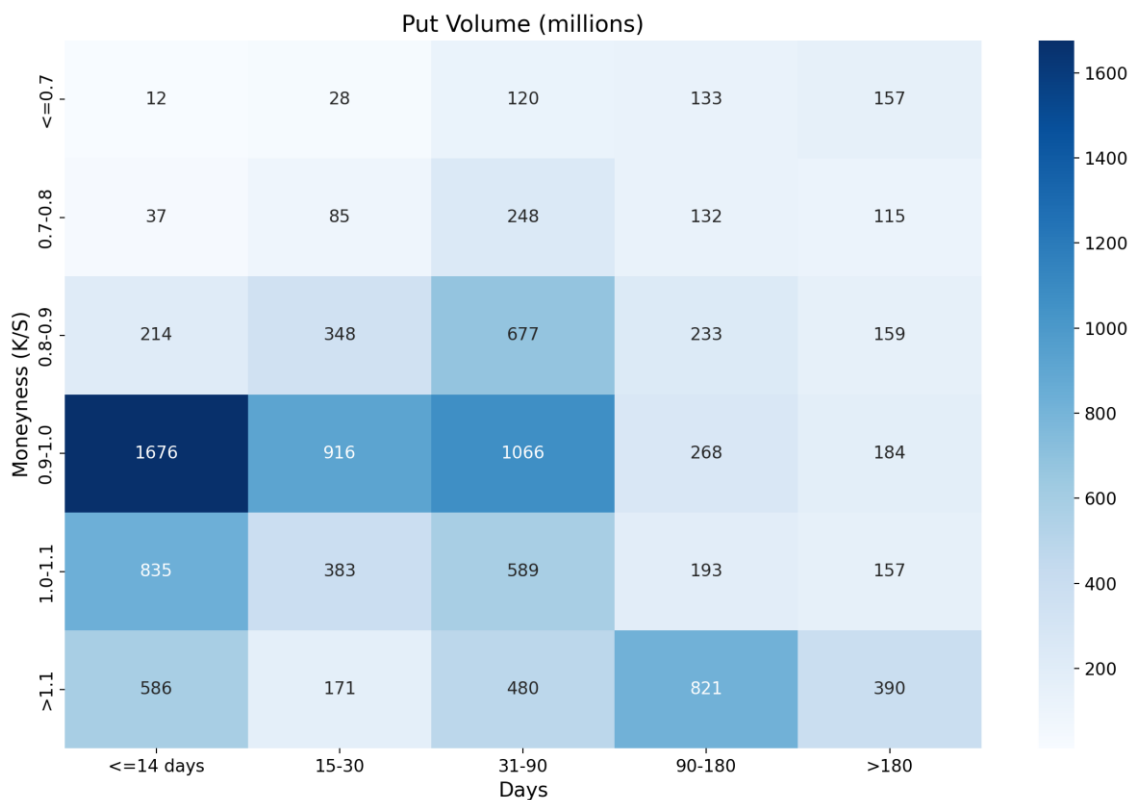


圖 3-5：2020 年 1 月至 2024 年 4 月比特幣賣權總交易量熱圖

比特幣選擇權市場已發展出相當程度之深度與流動性，交易活動主要集中於價平附近區域，反映市場參與者偏好進行較具效率之投機或避險操作。短天期選擇權普遍較受青睞，顯示市場參與者傾向採取短線交易策略。再者，買權整體交易量大於賣權之現象，可能反映市場對比特幣價格走勢持偏多看法。部分特定區域（如深度價外買權及深度價內賣權）出現之異常交易量，則可能與特定投資策略或法人避險需求密切相關。前述交易特徵共同構成當前比特幣選擇權市場之基本面貌，雖然市場已具備相當規模，惟仍以短期投機性交易為主要型態。

## 第四章、研究方法

### 4.1 以理論計算風險中立機率密度之方法

下文中，符號  $C$ 、 $P$ 、 $S$ 、 $K$ 、及  $T$  均代表選擇權標準意義： $C$  為買權價格、 $P$  為賣權價格、 $S$  為標的資產現價、 $K$  為履約價格、 $r$  為無風險利率、 $T$  為選擇權距到期日天數，本研究也將使用  $f(K)$  表示為風險中立機率密度函數（Risk-neutral Probability Density Function, RND）和  $F(K) = \int_{-\infty}^K f(z)dz$  表示為風險中立機率累積分布函數（Risk-neutral Distribution Function）。

買權價格是其在到期日天數  $T$  前之收益預期，折現回當前之價值。於風險中立之情形下，該預期價格則可基於風險中立機率計算，並以無風險利率進行折現，公式如下：

$$C = \int_K^{\infty} e^{-rT} (S_T - K) f(S_T) dS_T \quad (1)$$

接著將買權價格  $C$  對履約價格  $K$  進行一次偏微分，可導出風險中立分布函數  $F(K)$ ，公式如下：

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial K} &= \frac{\partial}{\partial K} \left[ \int_K^{\infty} e^{-rT} (S_T - K) f(S_T) dS_T \right] \\ &= e^{-rT} \left[ -(K - K) f(K) + \int_K^{\infty} -f(S_T) dS_T \right] \\ &= -e^{-rT} \int_K^{\infty} f(S_T) dS_T \\ &= -e^{-rT} [1 - F(K)] \end{aligned}$$

移項可得風險中立分布函數  $F(K)$  為：

$$F(K) = e^{rT} \frac{\partial C}{\partial K} + 1 \quad (2)$$

接著對公式(2)中之履約價格  $K$  再次進行偏微分，可導出於履約價格  $K$  處之 RND：

$$f(K) = \frac{\partial}{\partial K} \left[ e^{rT} \frac{\partial C}{\partial K} + 1 \right] = e^{rT} \frac{\partial^2 C}{\partial K^2} \quad (3)$$

於實際選擇權交易市場，由於履約價格為離散形式，因此可利用觀察到之選擇權價格，透過有限差分法（Finite Difference Methods, FDM）求得公式(2)與公式(3)之近似解。假設距到期日  $T$  時，市場上有  $N$  個不同履約價格的選擇權，其中  $K_1$  代表最低履約價格， $K_N$  代表最高履約價格。我們將使用履約價格分別為  $K_{n-1}$ 、 $K_n$  和  $K_{n+1}$  的三個選擇權，來求得以  $K_n$  為中心之的近似值，公式如下：

$$F(K_n) \approx e^{rT} \left[ \frac{C_{n+1} - C_{n-1}}{X_{n+1} - X_{n-1}} \right] + 1 \quad (4)$$

$$f(K_n) \approx e^{rT} \frac{C_{n+1} - 2C_n + C_{n-1}}{(\Delta X)^2} \quad (5)$$

公式(1)至(5)說明了如何以理論方式從一組買權價格  $C$  中推導出介於履約價格  $K_2$  和  $K_{N-1}$  間之 RND。類似的推導方式亦可應用於從賣權價格  $P$  中計算 RND，對於賣權而言，與公式(2)至(5)對應之等價表達式如下：

$$F(K) = e^{rT} \frac{\partial P}{\partial K} \quad (6)$$

$$f(K) = e^{rT} \frac{\partial^2 P}{\partial K^2} \quad (7)$$

$$F(K_n) \approx e^{rT} \left[ \frac{P_{n+1} - P_{n-1}}{X_{n+1} - X_{n-1}} \right] \quad (8)$$

$$f(K_n) \approx e^{rT} \frac{P_{n+1} - 2P_n + P_{n-1}}{(\Delta X)^2} \quad (9)$$

於本研究中， $\Delta X$  為一固定之常數值，用以建構等距分布之人工選擇權價格，以填補市場中離散履約價格間之空缺值。此處理方式可解決交易數據稀疏或不均之問題，並確保履約價格之間距一致，便於透過有限差分法進行數值計算，提高估算結果之準確性。

## 4.2 以實務計算風險中立機率密度之方法

前一節所介紹的方法假設存在一組選擇權價格，且這些價格完全符合理論定價關係（公式(1)）。然而，當將其應用於實際市場中交易的選擇權價格時，會面臨幾個重要的問題與挑戰。首先，必須謹慎處理觀察到的選擇權價格中的市場缺陷，否則可能導致推導出的 RND 出現無法接受的特性，例如 RND 在某些區域出現負值。其次，需找到適當的方法來補全 RND 在  $K_2$  到  $K_{N-1}$  範圍之外的尾部。本節將介紹本研究與回顧文獻中提出之從市場選擇權價格中計算 RND 的方法，並說明我們在此採用的技術。

### 4.2.1 比特幣適用之 Black-Scholes 模型

在傳統金融市場中，選擇權定價模型（如 Black-Scholes 模型）通常使用無風險利率作為參數，該利率一般由政府債券等低風險資產的收益率代表。然而，在比特幣等加密貨幣市場中，無風險利率的適用性受到限制，因此不被廣泛使用。其因為，比特幣市場缺乏統一的無風險資產。由於加密貨幣市場的去中心化特性，並無政府債券此類被廣泛接受之無風險資產，難以確定單一通用之無風險利率，使無風險利率在此市場中難以適用；並且，比特幣價格之波動率遠高於傳統資產。波動劇烈之特性對於選擇權價格的影響較無風險利率更為顯著，因此交易者更關注隱含波動率的變化，而非無風險利率；其次，在加密貨幣市場中，利率環境可能受到交易所規則與市場供需的影響，並不一定與傳統的無風險利率相關，傳統的利率指標難以反映加密貨幣市場的實際情形；此外，持有比特幣的成本與持有傳統貨幣或資產的成本不同，包括安全性面向和技術風險等因素，這些成本難以透過無風險利率

量化，進一步限制了無風險利率在比特幣選擇權定價中的適用性。

本研究採用 Deribit 交易所之比特幣選擇權交易價格，其為適應加密貨幣市場的特性，計算選擇權價格時採用了更合適的模型（以比特幣計價），符合交易市場使用需求。為符合研究所需，本研究觀察傳統 Black-Scholes 模型（公式(10)），並與 Deribit 交易所提供之計算公式（公式(11)）比較可知，將 Deribit 交易所報價  $C_{Deribit}$  乘上比特幣現貨價格  $S_0$  即可得到以美元計價之比特幣選擇權價格。

$$\begin{aligned}
 C_{BS} &= S_0 \times N(d_1) - Ke^{-rT} \times N(d_2) \\
 \Rightarrow C_{BS} &= S_0 \times \left[ N(d_1) - \frac{Ke^{-rT}}{S_0} \times N(d_2) \right] \text{ and } F = S_0 e^{rT} \\
 \Rightarrow \frac{C_{BS}}{S_0} &= N(d_1) - \frac{K}{F} \times N(d_2)
 \end{aligned} \tag{10}$$

$$C_{Deribit} = N(d_1) - \frac{K}{F} \times N(d_2) \tag{11}$$

$$\begin{aligned}
 \text{where } d_1 &= \frac{\ln\left(\frac{F}{K}\right) + \left(\frac{\sigma^2}{2}\right) \times T}{\sigma \times \sqrt{T}} \\
 d_2 &= d_1 - \sigma \times \sqrt{T}
 \end{aligned}$$

其中， $C_{BS}$  為 Black-Scholes 買權價格（以美元計價）、 $C_{Deribit}$  為 Deribit 交易所比特幣買權價格（以比特幣計價）、 $S_0$  為比特幣現貨價格、 $N(x)$ ：常態分布的累積分布函數、 $K$  為履約價格、 $r$  為無風險利率、 $T$  為選擇權有效期、 $F$  為比特幣期貨價格、 $\ln$  為自然對數、 $\sigma$  為年化標準差。

#### 4.2.2 比特幣選擇權隱含波動率計算

在比特幣選擇權市場中，交易者多為風險偏好者，傾向操作價外選擇權（Out-

of-the-Money, OTM options)，主因為成本較低、槓桿效益高，以及對波動率的敏感性特別強。對於買方來說，由於比特幣市場本身波動性極高，這類選擇權對投機者及高風險偏好的投資人極具吸引力，儘管其到期變為無價值的機率較高，交易者仍願意承擔這樣的風險；對於賣方而言，由於比特幣價格波動性顯著高於傳統金融市場，價外選擇權的權利金水準通常更高，進一步提升了賣方參與的誘因，使價外選擇權成為許多賣方用來創造穩定現金流的核心工具。綜上所述，價外選擇權具較佳之成交量與流動性，其價格可更有效率地反映市場氛圍，本研究將採用價外選擇權交易資料進行隱含波動率之計算，惟深度價外區間，為避免不合理之交易造成異常，將排除履約價格 10 美元以下之選擇權數據。

Shimko (1993) 提出將市場選擇權價格轉換至隱含波動率 (Implied Volatility, IV) 後進行插值 (Interpolation)，因為隱含波動率曲線通常比價格數據更平滑且連續，適合進行插值與平滑處理，再將插值後的曲線重新轉換回買權價格，以計算 RND。此方法並不依賴選擇權價格符合 Black-Scholes 模型條件假設，而是僅將 Black-Scholes 公式作為一種計算工具，用來將數據轉換至更適合進行平滑處理的樣態。

Figlewski (2008) 提出的方法旨在解決價平附近選擇權隱含波動率數據的異常波動問題，尤其是買權與賣權價格在價平附近的跳躍現象，這種跳躍可能導致隱含波動率曲線不平滑，進而影響 RND 計算結果之穩定性。本研究參考其方法，若履約價格位於期貨價格之 0.9 到 1.1 倍間，則取其買賣權隱含波動率之平均作為數據點。公式如下：

$$IV_{mix}(K) = 0.5 \times IV_{call}(K) + 0.5 \times IV_{put}(K)$$

$$K \in [0.9 \times F, 1.1 \times F]$$

圖 4-1 呈現比特幣選擇權隱含波動率與履約價格之關係，顯示市場對價外選擇權具有較高偏好。同時，在價平附近可觀察到隱含波動率存在顯著的跳動現象。為減少價平位置隱含波動率之劇烈波動，本研究針對位於期貨價格 0.9 倍至 1.1 倍區

間內之數據，將買權與賣權之隱含波動率取平均值，作為後續平滑處理的基礎數據。如圖 4-2 所示，綠色標記點代表平均後之隱含波動率，此方法能有效降低價平附近買賣權隱含波動率之波動幅度。對於超出此區間之數據，則直接採用價外選擇權之隱含波動率數據。經上述處理後，最終建構之隱含波動率數據如圖 4-3 所示。

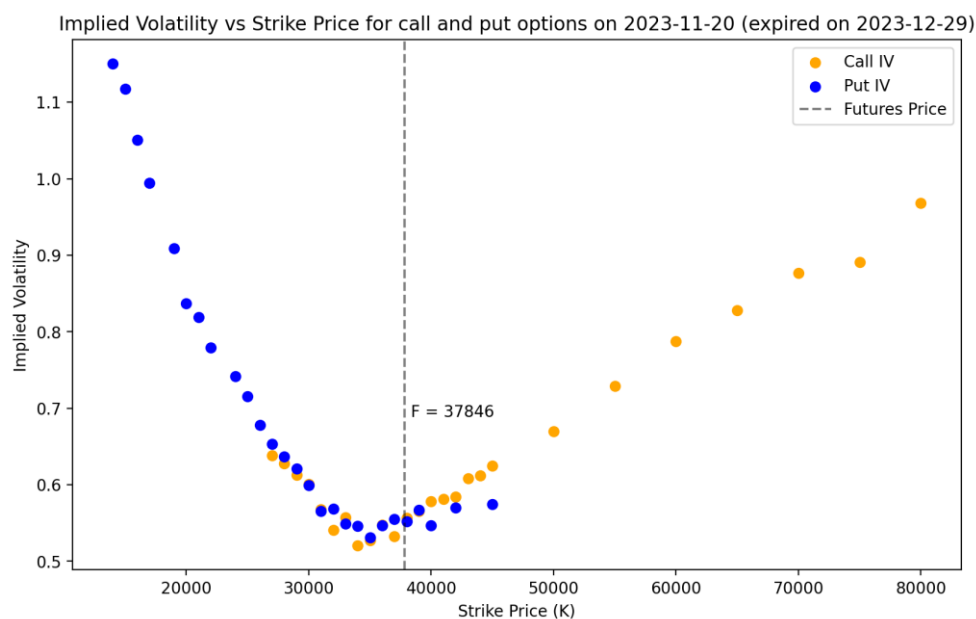


圖 4-1：2023 年 11 月 20 日比特幣選擇權隱含波動率分布圖（2023 年 12 月 29 日到期）

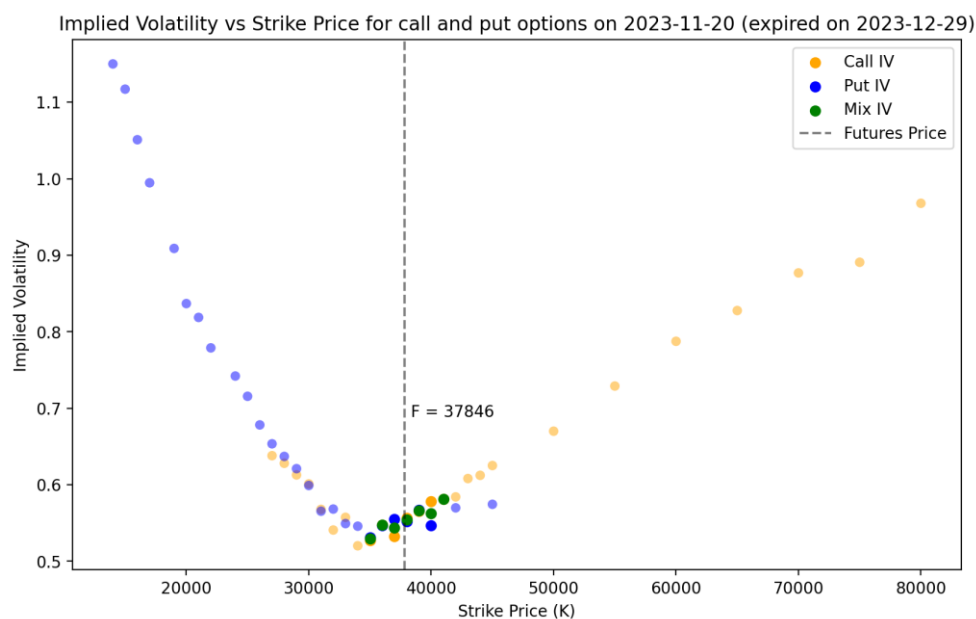


圖 4-2：2023 年 11 月 20 日比特幣選擇權隱含波動率分布圖（2023 年 12 月 29 日到期）



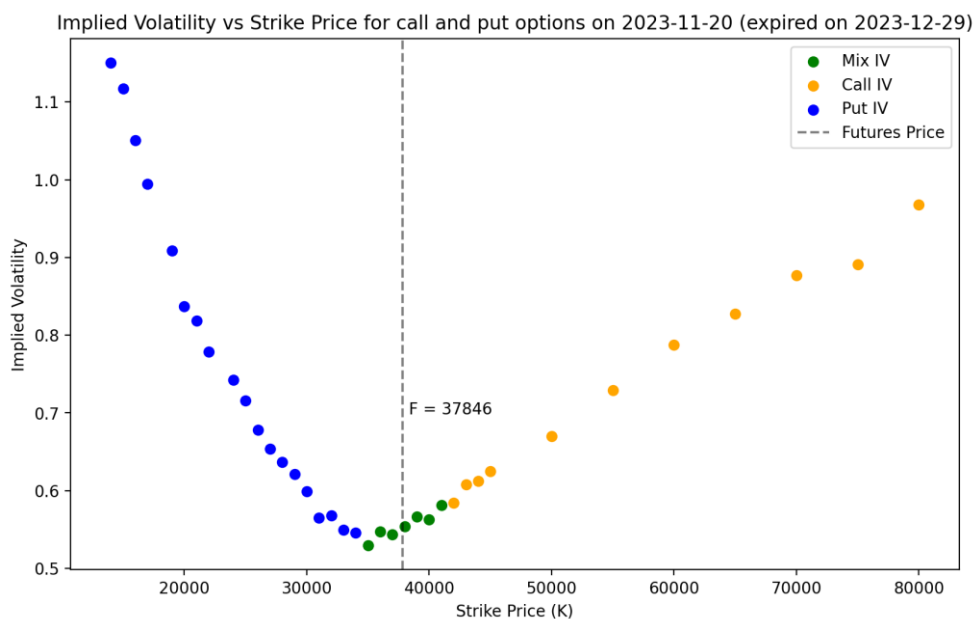


圖 4-3：2023 年 11 月 20 日比特幣選擇權隱含波動率分布圖（2023 年 12 月 29 日到期）

### 4.2.3 比特幣選擇權隱含波動率曲線擬合

為了對處理後的隱含波動率數據進行更精確的擬合，本研究採用四階樣條函數（4th Spline）搭配單一節點（one knot）進行曲線擬合。節點（knot）設置於期貨價格處，此設計能在保持整體曲線連續性的同時，允許曲線在此關鍵位置具有更大的靈活度。採用四階樣條函數確保擬合曲線具有三階連續可導性（ $C^3$  continuity），不僅能有效捕捉隱含波動率曲線的細微變化，同時也避免過度擬合（over-fitting）的問題。

四階樣條函數的數學表示如下：

$$S(x) = \begin{cases} \sum_{i=0}^4 a_i (x - x_0)^i, & x < k \\ \sum_{i=0}^4 b_i (x - x_0)^i, & x \geq k \end{cases}$$

其中， $k$  為節點位置（即期貨價格）， $x_0$  為參考點， $a_i$  與  $b_i$  為待定係數。在節點處，函數需滿足以下連續性條件：

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=0}^4 a_i(k-x_0)^i = \sum_{i=0}^4 b_i(k-x_0)^i \\ \sum_{i=1}^4 i a_i(k-x_0)^{i-1} = \sum_{i=1}^4 i b_i(k-x_0)^{i-1} \\ \sum_{i=2}^4 i(i-1)a_i(k-x_0)^{i-2} = \sum_{i=2}^4 i(i-1)b_i(k-x_0)^{i-2} \\ \sum_{i=3}^4 i(i-1)(i-2)a_i(k-x_0)^{i-3} = \sum_{i=3}^4 i(i-1)(i-2)b_i(k-x_0)^{i-3} \end{array} \right.$$

這些條件分別確保了函數值及其一階、二階和三階導數在節點處的連續性。

將唯一節點設置於期貨價格處具有重要的經濟意義，因為此位置通常對應於價平選擇權（At-the-money options）。此節點的設置將曲線分為兩個區段，分別對應期貨價格以上與以下的區域，使得擬合曲線能更準確地反映價平附近的波動率特徵。這種分段擬合的方法特別適合處理選擇權隱含波動率在價平位置前後可能出現的不對稱特徵。

在實作層面，本研究運用 Python 的 SciPy 套件中的 LSQUnivariateSpline 方法進行曲線擬合。此方法採用最小平方法（Least Squares）進行參數估計，能有效處理非均勻分布的數據點，並通過指定的內部節點（internal knots）實現分段擬合。透過最小平方法與節點設置的結合，LSQUnivariateSpline 提供了一種靈活且穩定的數學工具，能夠在不均勻分布的數據中擬合出平滑且準確的隱含波動率曲線（如圖 4-4），為後續的風險中立密度函數（RND）計算提供了堅實的基礎。最小平方法公式如下：

$$\min_{\{a_i\}, \{b_i\}} \sum_{j=1}^n [y_j - S(x_j)]^2$$

其中， $y_j$  為實際觀測值， $S(x_j)$  為樣條函數在  $x_j$  處之觀測值， $\{a_i\}, \{b_i\}$  為樣條函數之待估參數集合， $n$  為數據點總數。

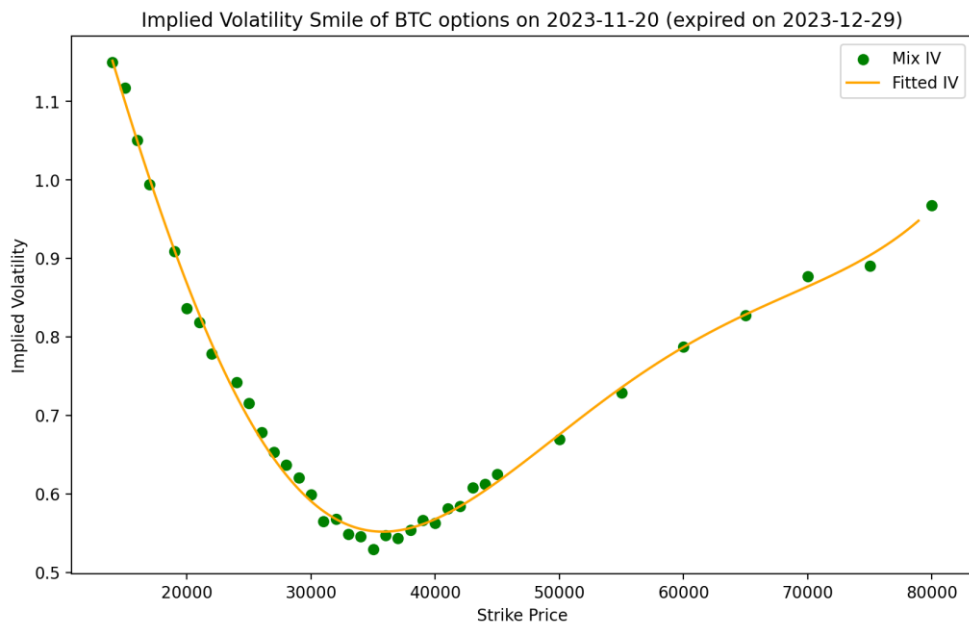


圖 4-4：2023 年 11 月 20 日比特幣選擇權隱含波動率擬合曲線（2023 年 12 月 29 日到期）

#### 4.2.4 比特幣選擇權風險中立機率密度函數計算

完成隱含波動率曲線的擬合後，將接續計算風險中立機率密度。首先，本研究使用擬合後的隱含波動率曲線，結合 Deribit 交易所採用的定價模型（公式(11)），計算不同履約價格下的理論買權價格，計算結果如圖 4-5。

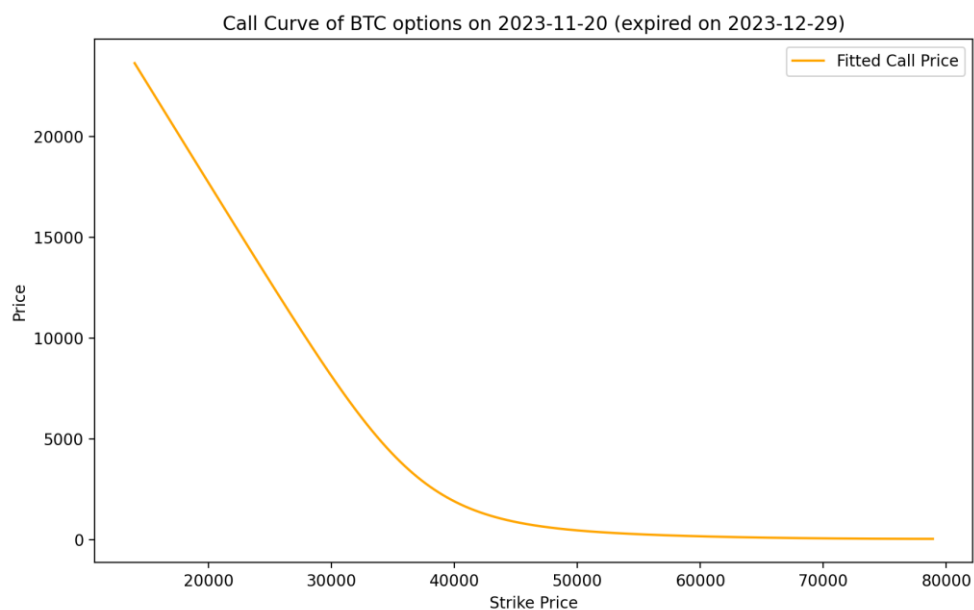


圖 4-5：2023 年 11 月 20 日比特幣選擇權理論買權價格（2023 年 12 月 29 日到期）

取得理論買權價格後，本研究採用有限差分法（中心差分法）進行離散數據微分，以計算風險中立機率密度。中心差分法相較於前向差分或後向差分，中心差分法可有效降低截斷誤差（公式(4)、公式(5)）。為了確保數值計算之穩定性與精確度，本研究在價格間距的設定上採取等距劃分方式，將  $\Delta X$  設定為 0.1。選擇較小的價格間距不僅能提供更精細的密度估計結果，同時等距的劃分方式也有助於提高數值微分運算的穩定性。

完成風險中立機率密度計算後，為確保數據之可靠性與合理性，本研究將數據檢驗重點著重於累積分布函數（Cumulative Distribution Function, CDF）與右尾累積機率（Right Cumulative Probability）。資料完整性之檢驗方面，本研究首先確保累積分布函數值與右尾累積機率值皆不存在缺失值，具缺失之觀測值皆被排除於分析範圍之外。其次，為了維持計算結果之理論一致性，本研究進一步限制這兩個機率值必須嚴格介於 0 與 1 之間，同時排除等於 0 或 1 的邊界值，以避免極端情況對後續分析造成影響。

$$\begin{cases} F(K) \text{ exists (non - missing)} \\ F_R(K) \text{ exists (non - missing)} \\ 0 < F(K) < 1 \\ 0 < F_R(K) < 1 \end{cases}$$

其中  $F(K)$  為累積分布函數， $F_R(K)$  為右尾累積機率， $F_R(K) = 1 - F(K)$ 。

檢驗標準之設定主要基於三個面向的考量，首先，從理論一致性的角度來看，這些標準確保了估計結果符合機率論中累積分配函數的基本性質，同時也滿足機率密度函數的基本要求。其次，就數值穩定性而言，這種過濾方式可以避免在後續分析中因極端值或異常值而導致的計算問題，有效提高整體估計結果的可靠性。最後，視實務應用角度，移除可能導致錯誤解讀的異常值，更能確保結果準確反映市場參與者的真實價格預期。

經計算之風險中立機率密度函數與其累積分布函數如圖 4-6、圖 4-7：

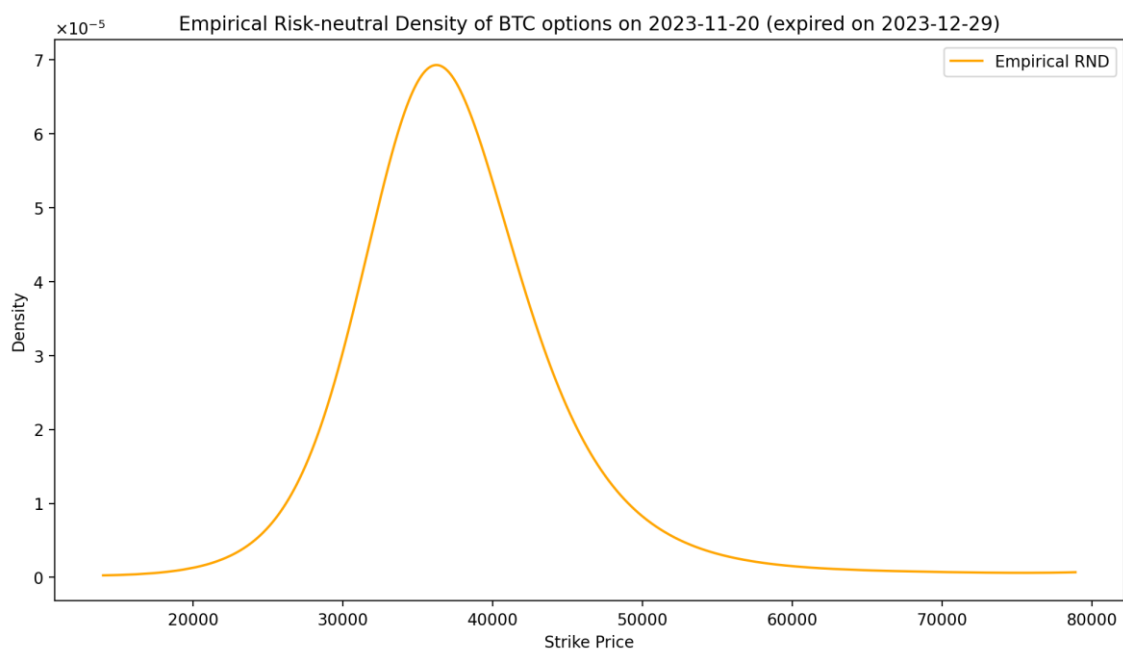


圖 4-6：2023 年 11 月 20 日比特幣選擇權風險中立機率密度函數（2023 年 12 月 29 日到期）

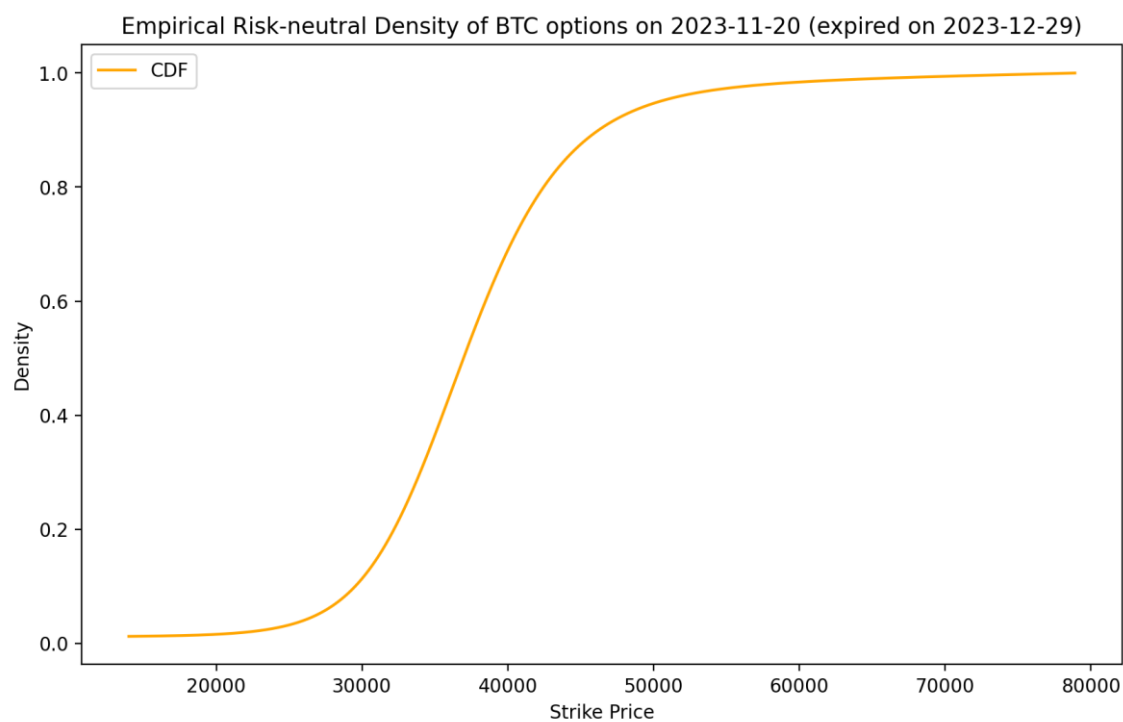


圖 4-7：2023 年 11 月 20 日比特幣選擇權風險中立機率累積分布函數（2023 年 12 月 29 日到期）

## 4.3 配適風險中立機率密度尾部分布

### 4.3.1 尾部 GEV 雙點配適法

從市場選擇權價格中提取的風險中立機率密度（RND）僅能覆蓋有效交易履約價格的區間，為了完整描述市場預期，需要對 RND 的尾部進行延伸。Figlewski (2008) 提出使用廣義極值分布（Generalized Extreme Value Distribution, GEV）來配適 RND 的尾部，其方法需要針對雙尾分別設定三個條件以確保尾部配適的連續性：

$$\begin{aligned} \text{右尾條件：} & \begin{cases} F_{GEVR}(K(\alpha_{1R})) = \alpha_{1R} \\ f_{GEVR}(K(\alpha_{1R})) = f_{EMP}(K(\alpha_{1R})) \\ f_{GEVR}(K(\alpha_{2R})) = f_{EMP}(K(\alpha_{2R})) \end{cases} \\ \text{左尾條件：} & \begin{cases} F_{GEVL}(-K(\alpha_{1L})) = 1 - \alpha_{1L} \\ f_{GEVR}(-K(\alpha_{1L})) = f_{EMP}(K(\alpha_{1L})) \\ f_{GEVR}(-K(\alpha_{2L})) = f_{EMP}(K(\alpha_{2L})) \end{cases} \end{aligned}$$

其中， $F_{GEVR}$  與  $f_{GEVR}$  分別為右尾 GEV 之累積分布函數與機率密度函數， $F_{GEVL}$  為左尾 GEV 之累積分布函數， $f_{EMP}$  為研究計算之實證風險中立機率密度函數（Empirical RND）， $K(\alpha)$  為對應於 Empirical RND 第  $\alpha$  分位數之履約價格。以下為 Figlewski (2008) 適配條件整理：

- (1) 在第一接合點處，GEV 尾部的累積機率必須等於 RND 的累積機率
- (2) 在第一接合點處，GEV 密度函數值必須等於 RND 的密度函數值
- (3) 在第二接合點處，GEV 密度函數值必須等於 RND 的密度函數值

### 4.3.2 GPD 分布理論

而本研究採用廣義柏拉圖分布（Generalized Pareto Distribution, GPD）進行尾部配適。GPD 在極值理論中的核心地位源自 Balkema 和 Haan (1974) 的開創性研究，他們證明了當觀測值超過足夠高的門檻值時，其超額分布會漸近收斂到 GPD，

這個性質使得 GPD 特別適合用於描述尾部事件。選擇 GPD 而非 GEV 主要基於其參數結構優勢：GPD 僅需設定兩個參數：尺度參數（scale parameter,  $\sigma$ ）與形狀參數（shape parameter,  $\xi$ ），相較於 GEV 需要三個參數：位置參數（location parameter,  $\mu$ ）、尺度參數（scale parameter,  $\sigma$ ）及形狀參數（shape parameter,  $\xi$ ）更為簡潔。這種簡潔的參數結構不僅能提升運算效率，也能降低過度配適（over-fitting）的風險。此外，Hosking 和 Wallis (1987) 的研究進一步驗證了 GPD 的門檻穩定性質，這使得它在實務應用上更具優勢。根據極值理論，GPD 與 GEV 在尾部具有相同的形狀參數，意味著兩種分配在描述極端事件時具有相同的漸近性質。然而，GPD 在實務應用上更為直觀，特別是在金融風險管理領域，如 McNeil 和 Frey (2000) 的研究所示。實證研究方面，Birru 和 Figlewski (2012) 的研究進一步證實，GPD 與 GEV 在尾部配適的表現相當接近，且皆優於對數常態分配。

GPD 之累積分布函數（Cumulative Distribution Function, CDF）數學表示式如下：

$$F_{GPD}(x; \sigma, \xi) = \begin{cases} 1 - (1 + \xi \frac{x}{\sigma})^{-\frac{1}{\xi}}, & \xi \neq 0 \\ 1 - \exp(-\frac{x}{\sigma}), & \xi = 0 \end{cases}$$

GPD 之機率密度函數（Probability Density Function, PDF）數學表示式如下：

$$f_{GPD}(x; \sigma, \xi) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma} (1 + \xi \frac{x}{\sigma})^{-\frac{1}{\xi}-1}, & \xi \neq 0 \\ \frac{1}{\sigma} \exp(-\frac{x}{\sigma}), & \xi = 0 \end{cases}$$

其中， $\sigma > 0$  為尺度參數，用以控制分布之離散程度，較大之  $\sigma$  值表示資料之變異性較大。而形狀參數  $\xi$  則決定分布之類型與尾部特性：

- (1) 當  $\xi > 0$  時：分布為柏拉圖分布（Pareto Distribution），具厚尾（heavy-tailed）特性；分布具無限支撐，定義域為  $[0, \infty)$ ；尾部衰減速度較緩

- (2) 當 $\xi = 0$ 時：分布退化為指數分布 (Exponential Distribution)，具固定衰減率；  
為最簡單之連續型無記憶分布；尾部衰減速度適中
- (3) 當 $\xi < 0$ 時：分布屬於貝他分布族 (Beta Family)，具有限支撐特性；分布函數  
僅於區間 $\left[0, -\frac{\sigma}{\xi}\right)$ 上有定義；於金融市場應用中較少採用，蓋因資產報酬率通常  
不存在明確上限

### 4.3.3 尾部 GPD 雙點配適法

Birru 和 Figlewski (2012) 提出 GPD 尾部雙點配適方法，採用兩個接合點，比較 GPD 與 RND 之密度函數值，設定之尾部配適條件如下：

- (1) 在第一個接合點處，GPD 的密度函數值必須等於 RND 的密度函數值
- (2) 在第二個接合點處，GPD 的密度函數值必須等於 RND 的密度函數值。

數學表達式如下：

右尾條件：

$$\begin{cases} f_{GPD}(K(\alpha_{1R})) = f_{EMP}(K(\alpha_{1R})) & (PDF \text{ 條件}) \\ f_{GPD}(K(\alpha_{2R})) = f_{EMP}(K(\alpha_{2R})) & (PDF \text{ 條件}) \end{cases}$$

左尾條件：

$$\begin{cases} f_{GPD}(K(\alpha_{1L})) = f_{EMP}(K(\alpha_{1L})) & (PDF \text{ 條件}) \\ f_{GPD}(K(\alpha_{2L})) = f_{EMP}(K(\alpha_{2L})) & (PDF \text{ 條件}) \end{cases}$$

GPD 之尺度參數與形狀參數則透過最小化以下目標函數求解：

右尾參數最小化目標函數：

$$\min_{\sigma, \xi} \{ [f_{GPD}(K(\alpha_{1R})) - f_{EMP}(K(\alpha_{1R}))]^2 + [f_{GPD}(K(\alpha_{2R})) - f_{EMP}(K(\alpha_{2R}))]^2 \}$$



左尾參數最小化目標函數：

$$\min_{\sigma, \xi} \{ [f_{GPD}(K(\alpha_{1L})) - f_{EMP}(K(\alpha_{1L}))]^2 + [f_{GPD}(K(\alpha_{2L})) - f_{EMP}(K(\alpha_{2L}))]^2 \}$$

其中， $\alpha_{1L}$  預設為 0.05； $\alpha_{2L}$  預設為 0.02； $\alpha_{1R}$  預設為 0.95； $\alpha_{2R}$  預設為 0.98。使用雙點配適法配適完成之實證 RND 曲線與其 CDF 如圖 4-8 及圖 4-9。

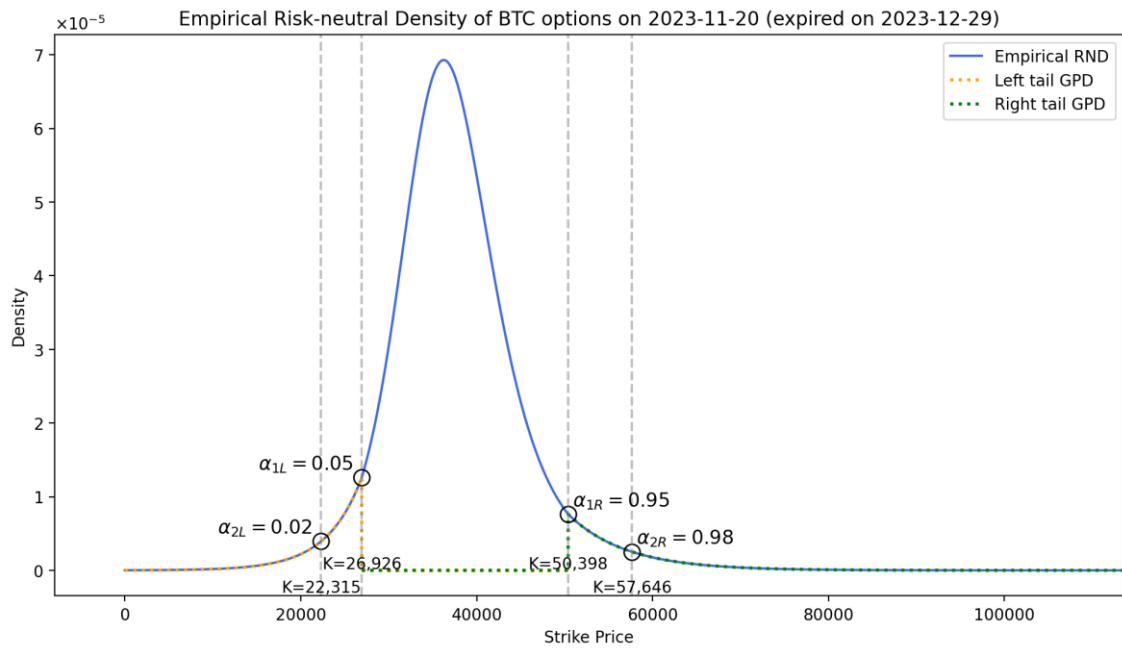


圖 4-8：2023 年 11 月 20 日比特幣選擇權實證 RND 與 GPD 尾部配適（雙點配適法）

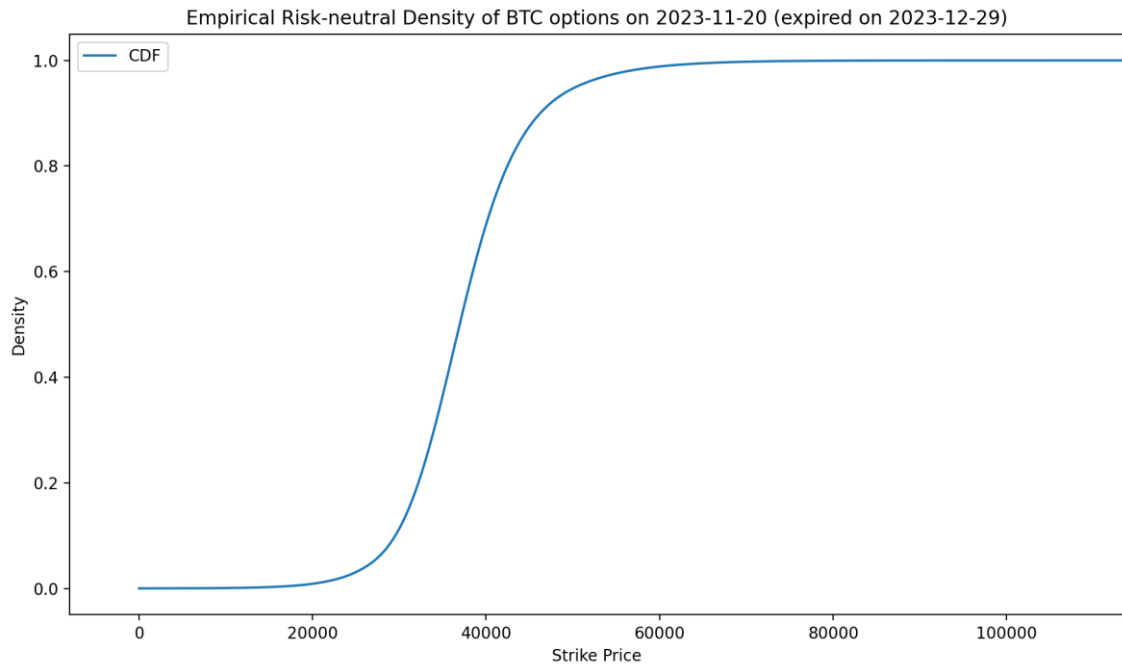


圖 4-9：2023 年 11 月 20 日比特幣選擇權實證 RND 之 CDF（雙點配適法）

#### 4.3.4 尾部 GPD 單點加斜率配適法

本研究提出使用 GPD 之單點加斜率配適法（以下簡稱為「單點配適法」），此改進方法不僅考慮了 CDF 值的配適，更加入了密度函數斜率的連續性條件。此方法的主要優勢在於能夠同時確保密度函數的連續性和平滑性，同時簡化了配適過程，提升計算效率。本研究設定之尾部配適條件如下：

- (1) 在接合點處，GPD 的累積機率必須等於 RND 的累積機率
- (2) 在接合點處，GPD 的密度函數斜率必須等於 RND 的密度函數斜率。

數學表達式如下：

右尾條件：

$$\begin{cases} F_{GPD}(K(\alpha_{1R})) = \alpha_{1R} & (CDF \text{ 條件}) \\ \frac{f_{GPD}(K(\alpha_{1R}) + \Delta x) - f_{GPD}(K(\alpha_{1R}))}{\Delta x} = \frac{f_{EMP}(K(\alpha_{1R}) + \Delta x) - f_{EMP}(K(\alpha_{1R}))}{\Delta x} & (\text{斜率條件}) \end{cases}$$

左尾條件：

$$\begin{cases} F_{GPD}(-K(\alpha_{1L})) = \alpha_{1L} & (CDF \text{ 條件}) \\ \frac{f_{GPD}(-K(\alpha_{1L}) + \Delta x) - f_{GPD}(-K(\alpha_{1L}))}{\Delta x} = \frac{f_{EMP}(K(\alpha_{1L}) + \Delta x) - f_{EMP}(K(\alpha_{1L}))}{\Delta x} & (\text{斜率條件}) \end{cases}$$

GPD 之尺度參數與形狀參數則透過最小化以下目標函數求解：

右尾參數最小化目標函數：

$$\min_{\sigma, \xi} \left\{ [F_{GPD}(K(\alpha_{1R})) - \alpha_{1R}]^2 + \left[ \frac{f_{GPD}(K(\alpha_{1R}) + \Delta x) - f_{GPD}(K(\alpha_{1R}))}{\Delta x} - \frac{f_{EMP}(K(\alpha_{1R}) + \Delta x) - f_{EMP}(K(\alpha_{1R}))}{\Delta x} \right]^2 \right\}$$

左尾參數最小化目標函數：

$$\min_{\sigma, \xi} \left\{ [F_{GPD}(-K(\alpha_{1L})) - \alpha_{1L}]^2 + \left[ \frac{f_{GPD}(-K(\alpha_{1L}) + \Delta x) - f_{GPD}(-K(\alpha_{1L}))}{\Delta x} - \frac{f_{EMP}(K(\alpha_{1L}) + \Delta x) - f_{EMP}(K(\alpha_{1L}))}{\Delta x} \right]^2 \right\}$$

其中， $\Delta x$ 為一固定之常數值，用以建構等距分布之人工選擇權價格，預設為 0.1； $\alpha_{1L}$ 預設為 0.05； $\alpha_{1R}$ 預設為 0.95。

本研究對左尾與右尾分別進行配適。對於左尾，我們選擇累積機率為 5% 的點作為接合點；對於右尾，則選擇累積機率為 95% 的點作為接合點。此設計能確保尾部配適的平滑性，同時保持整體分布的連續性。為了最小化配適誤差，本研究採用最小平方法進行參數估計，透過數值優化方法求解 GPD 的尺度參數與形狀參數。配適完成之實證 RND 曲線與其 CDF 如圖 4-10 與圖 4-11。

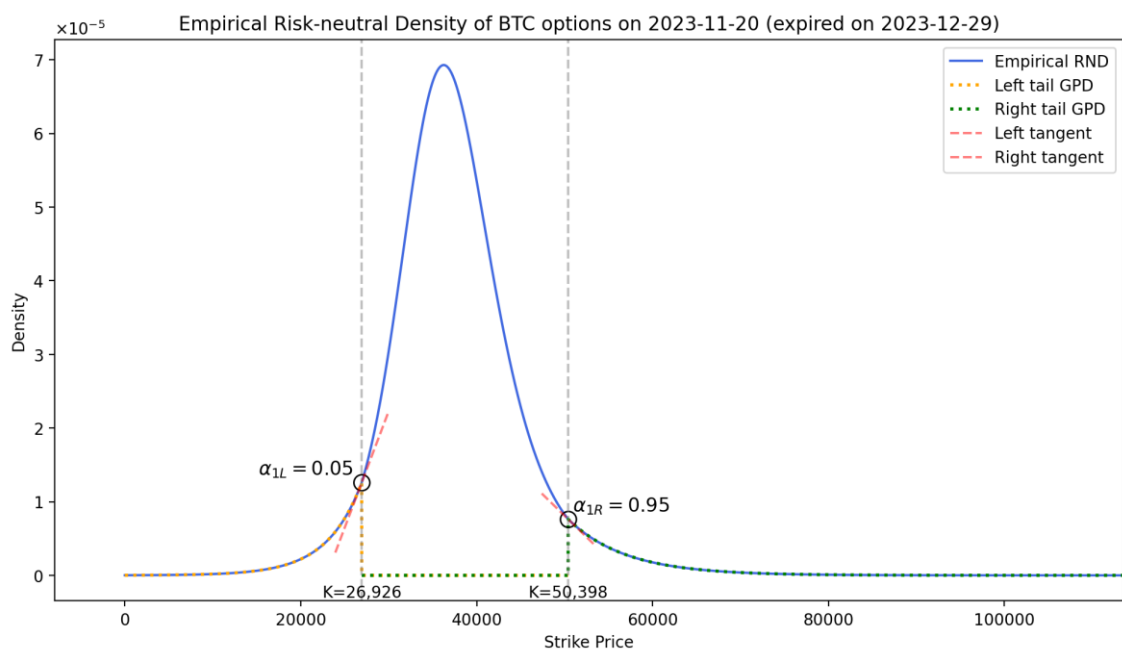


圖 4-10：2023 年 11 月 20 日比特幣選擇權實證 RND 與 GPD 尾部配適（單點配適法）

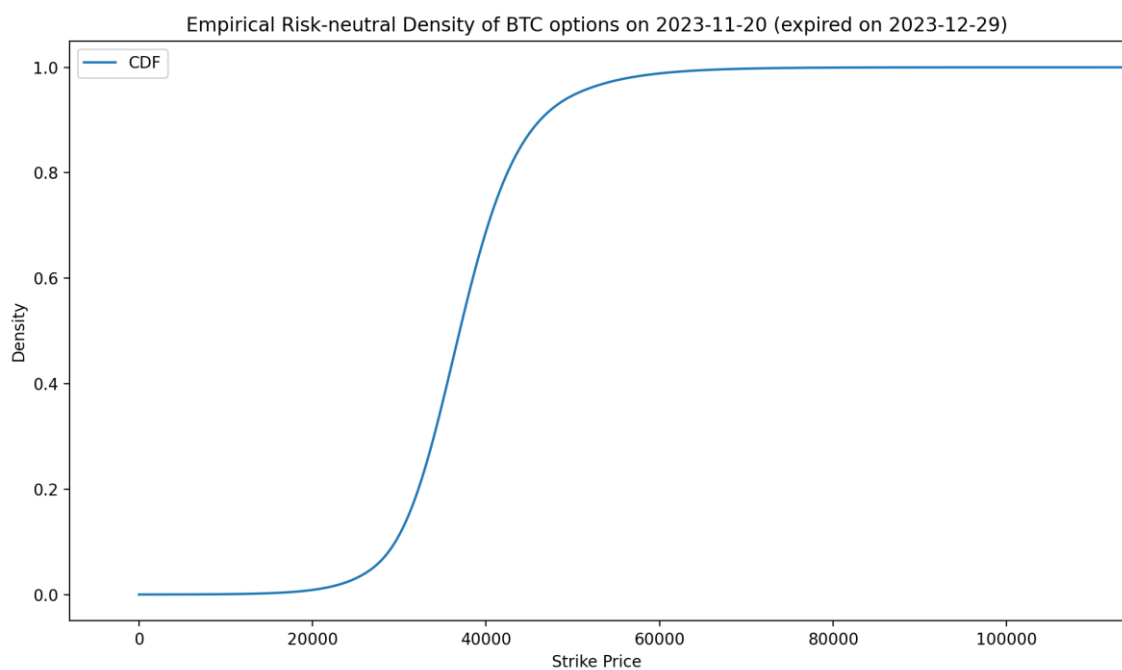


圖 4-11：2023 年 11 月 20 日比特幣選擇權實證 RND 之 CDF（單點配適法）

## 4.4 風險中立機率密度函數之統計特徵

本節將詳細介紹風險中立機率密度（RND）之統計特徵，包含各階動差及其衍生之統計量，藉以深入分析市場參與者對比特幣未來價格走勢之預期。

#### 4.4.1 動差之定義與意涵

動差 (Moment) 為描述機率分配特徵之重要統計量，可分為原始動差 (Raw Moment) 與中央動差 (Central Moment)。對於離散型履約價格  $K$ ，其第  $n$  階原始動差定義為：

$$m'_n = E[K^n] = \sum_{i=1}^N K_i^n f(K_i) \Delta K$$

而第  $n$  階中央動差則定義為：

$$m_n = E[(K - \bar{K})^n] = \sum_{i=1}^N (K_i - \bar{K})^n f(K_i) \Delta K$$

其中， $f(K_i)$  為風險中立機率密度函數 (RND)； $\Delta K$  為價格間距，設定為 0.1； $\bar{K}$  為期望值，即第一階原始動差  $m'_1$ ； $N$  為觀察值數量。

#### 4.4.2 風險中立機率密度函數之統計特徵量

近期研究顯示，選擇權隱含之統計特徵量不僅能有效描述市場預期，更具有顯著的預測能力。Chang et al. (2013) 發現風險中立偏態能有效預測股票報酬率，特別是在市場波動度較高的期間；而 Neumann and Skiadopoulos (2013) 則指出，風險中立峰度的變化往往領先市場走勢，為投資決策提供重要訊號。本研究將計算以下四個主要統計特徵量：

##### 1. 平均數 (Mean)

平均數為第一階原始動差，反映市場對標的資產未來價格水準之整體預期。Bali and Murray (2013) 指出，在風險中立定價理論下，RND 之平均數應等於無風險利率折現之遠期價格，此特性提供了重要的套利限制條件。公式如下：

$$\bar{K} = m'_1 = E[K] = \sum_{i=1}^N K_i f(K_i) \Delta K$$

## 2. 標準差 (Standard Deviation)

標準差為二階中央動差之平方根，衡量價格分散程度。Christoffersen et al. (2013) 發現，選擇權隱含之標準差較歷史波動率具有更強的預測能力，特別是在新興市場中。標準差反映市場對價格波動性之預期，其值越大表示市場參與者對未來價格走勢之不確定性越高。公式如下：

$$\sigma = \sqrt{m_2} = \sqrt{E[(K - \bar{K})^2]} = \sqrt{\sum_{i=1}^N (K_i - \bar{K})^2 f(K_i) \Delta K}$$

## 3. 偏態 (Skewness)

偏態為標準化後之三階中央動差，描述分配之不對稱性：

$$\text{Skewness} = \frac{m_3}{\sigma^3} = \frac{E[(K - \bar{K})^3]}{\sigma^3} = \frac{\sum_{i=1}^N (K_i - \bar{K})^3 f(K_i) \Delta K}{\sigma^3}$$

偏態係數在金融市場中具有重要意義。當觀察到正偏態時，表示價格分配右尾較長，意味著市場參與者預期有較高機率出現大幅上漲行情，反映市場整體呈現樂觀情緒。相反地，負偏態則顯示價格分配左尾較長，代表市場認為下跌風險較大，通常反映市場參與者較高的避險需求。Conrad et al. (2013) 的研究顯示，風險中立偏態不僅反映市場情緒，更蘊含了投資人對極端事件的預期；Li et al (2024) 實證研究顯示，偏態係數的動態變化往往可作為市場情緒轉折的前導指標，其變化趨勢對投資決策具有重要的參考價值。

## 4. 超額峰態 (Excess Kurtosis)

超額峰態 (Excess Kurtosis) 為標準化後之四階中央動差減去 3 (常態分配之峰態值)，用以描述分配尾部特徵。其計算方式為：

$$\text{Excess Kurtosis} = \frac{m_4}{\sigma^4} - 3 = \frac{E[(K - \bar{K})^4]}{\sigma^4} - 3 = \frac{\sum_{i=1}^N (K_i - \bar{K})^4 f(K_i) \Delta K}{\sigma^4} - 3$$

在實務應用中，超額峰態為評估市場極端風險的重要指標。Amaya et al. (2015) 指出，超額峰態能有效捕捉市場的極端風險，其預測能力在金融危機期間特別顯著。當觀察到正的超額峰態時，表示該分配相較於常態分配具有較為明顯的肥尾特性，即極端事件發生的機率高於常態分配的預期。

### 4.4.3 統計特徵之市場意涵

RND 的統計特徵不僅提供了數學層面的分布描述，更蘊含豐富的市場資訊。從價格預期的角度來看，分布的平均數反映了市場對未來價格水準的共識預期，若其與實際市場價格產生顯著偏離，可能暗示潛在的套利機會。這種價格偏離往往能為套利者提供獲利空間，同時也有助於市場價格的自我調整機制。

在風險評估方面，標準差作為傳統的波動風險指標，結合超額峰態所提供的極端風險資訊，能夠讓投資人更全面地評估市場風險。特別是在市場波動加劇時期，這些指標的變化往往能提供及時的風險預警訊號，協助投資人及時調整投資組合以因應市場變化。市場情緒的監測可透過偏態的變化趨勢，反映市場情緒的轉向，為投資策略的動態調整提供量化依據。

本研究將透過迴歸分析方法進行實證檢驗 RND 特徵值對於現貨報酬率之預測能力。通過分析這些統計特徵與未來市場走勢的關聯性，我們將能更深入地評估其在比特幣市場的應用價值，為投資決策提供更堅實的量化基礎。

## 4.5 實證分析

### 4.5.1 迴歸模型變數選擇與理論基礎

為探討比特幣選擇權隱含風險中立機率密度（RND）對標的資產價格走勢之預測能力，本研究採用多元迴歸分析法進行實證檢驗。被解釋變數（Y）設定為比

特幣之對數報酬率，解釋變數（X）則逐步納入 RND 之平均數（Mean）、標準差（Standard Deviation）、偏態（Skewness）、超額峰態（Excess Kurtosis）、中位數（Median）等統計特徵值，並加入加密貨幣恐懼與貪婪指數（Fear and Greed Index）、芝加哥選擇權交易所波動率指數（VIX）等市場情緒指標，以及前 1 期至前 4 期之歷史報酬率，藉以建構最具解釋力之預測模型。

Bali and Zhou (2016) 的研究發現，RND 的統計特徵值，特別是偏態與峰度，能有效預測資產報酬率的橫斷面變化。實證結果顯示，這些特徵值不僅反映了市場參與者的風險偏好，更蘊含了重要的定價資訊。此外，Amaya et al. (2015) 指出，RND 的超額峰態對於預測極端市場風險特別有效，這一發現在加密貨幣等高波動性市場中尤為重要。

López-Cabarcos et al. (2021) 針對比特幣波動度、股市表現及投資人情緒之間的關聯性進行研究，實證結果顯示，在市場穩定期間，VIX 報酬率及投資人情緒確實對比特幣波動度產生顯著影響。此外，Akyildirim et al. (2020) 運用高頻資料，探討加密貨幣與市場恐慌指標之間的動態關係，研究發現，加密貨幣與 VIX、VSTOXX 等市場恐慌指標之間存在時變的正向關聯性，且此關聯性會隨著金融市場壓力增加而顯著提升。M. He et al. (2023) 針對加密貨幣的報酬預測進行研究，研究採用每日更新且容易取得的加密貨幣恐懼與貪婪指數（Fear and Greed Index）作為預測變數，實證結果顯示，該指數在樣本內與樣本外均具有顯著的預測能力，從一日到一週的預測期間內，該指數對個別加密貨幣及市場指數的報酬均具有預測力。

Liu and Tsyvinski (2021) 針對加密貨幣市場的風險與報酬特性進行研究，結果顯示，加密貨幣市場存在顯著的動量效應（momentum effect），比特幣的當期報酬率能夠顯著預測未來 1 至 6 天的報酬表現；其次，Y. Li et al. (2021) 探討加密貨幣市場的 MAX 效應（maximum daily returns effect），研究發現加密貨幣市場存在正向 MAX 動量效應，擁有較高極端日報酬率的加密貨幣，在未來也傾向產生較高的



報酬；再者，Liu et al. (2023) 運用機器學習方法預測加密貨幣報酬率，於眾多預測變數中，前一日報酬率（previous 1-day return）具有最強的預測能力，其預測力甚至超過其他所有變數的綜合效果。

#### 4.5.2 迴歸模型設計

Campbell & Thompson (2008) 提出「經濟顯著性門檻」概念，其研究顯示透過逐步引入預測變數並設定嚴格的統計顯著性標準，能有效區分具有實質預測力的變數。Gu et al. (2020) 之實證資產定價研究中，特別針對高維度數據提出「分階段變數導入架構」，相較於一次性導入所有變數的模型，分階段建置能緩解過度擬合問題。

本研究將採用多層次的迴歸分析方法，從單變數逐步擴展至四變數模型，以系統性探討各項風險中立機率密度特徵對未來報酬率的預測能力。以下詳細說明各層次迴歸模型的設計：

##### 1. 單變數迴歸模型

單變數迴歸模型主要用於檢驗個別變數對未來報酬率的解釋能力，其基本形式為：

$$R_t = \beta_0 + \beta_1 \text{Variable}_{i,t-1} + \varepsilon_t, i \in \{1, 2, \dots, 11\}$$

其中， $R_t = \ln\left(\frac{\text{Close}_t}{\text{Close}_{t-1}}\right)$  為比特幣價格下期（T）報酬率，若選擇權樣本為 7 日後到期，則使用當日收盤價至 7 日後（到期日）收盤價計算報酬率。

$\text{Variable}_i$  將依序使用以下變數替換，進行單變數迴歸分析：平均數（Mean）、標準差（Std）、偏態（Skewness）、超額峰態（Excess Kurtosis）、中位數（Median）、加密貨幣恐懼貪婪指數（Fear and Greed Index）、芝加哥選擇權交易所波動率指數（VIX）、前 1 期報酬率（T-1 Return）、前 2 期報酬率（T-2 Return）、前 3 期報酬率

(T-3 Return)、前 4 期報酬率 (T-4 Return)。

## 2. 二變數迴歸模型

考慮到偏態 (Skewness) 在選擇權定價理論中的重要性，本研究設計二變數模型時將偏態作為固定因子，模型設定如下：

$$R_t = \beta_0 + \beta_1 Skewness_{t-1} + \beta_2 Variable_{i,t-1} + \varepsilon_t, i \in \{1, 2, \dots, 10\}$$

$Variable_i$  將依序使用以下變數替換，與偏態搭配進行雙變數迴歸分析：平均數 (Mean)、標準差 (Std)、超額峰態 (Excess Kurtosis)、中位數 (Median)、加密貨幣恐懼貪婪指數 (Fear and Greed Index)、芝加哥選擇權交易所波動率指數 (VIX)、前 1 期報酬率 (T-1 Return)、前 2 期報酬率 (T-2 Return)、前 3 期報酬率 (T-3 Return)、前 4 期報酬率 (T-4 Return)

## 3. 三變數迴歸模型

三變數模型進一步納入超額峰態 (Excess Kurtosis) 作為固定因子，形成：

$$R_t = \beta_0 + \beta_1 Skewness_{t-1} + \beta_2 ExcessKurtosis_{t-1} + \beta_3 Variable_{i,t-1} + \varepsilon_t, i \in \{1, 2, \dots, 9\}$$

$Variable_i$  將依序使用以下變數替換，與偏態和超額峰態搭配進行三變數迴歸分析：平均數 (Mean)、標準差 (Std)、中位數 (Median)、加密貨幣恐懼貪婪指數 (Fear and Greed Index)、芝加哥選擇權交易所波動率指數 (VIX)、前 1 期報酬率 (T-1 Return)、前 2 期報酬率 (T-2 Return)、前 3 期報酬率 (T-3 Return)、前 4 期報酬率 (T-4 Return)

## 4. 四變數迴歸模型

在三變數模型的基礎上，四變數模型加入標準差 (Std) 變數，完整模型如下：

$$R_t = \beta_0 + \beta_1 Skewness_{t-1} + \beta_2 ExcessKurtosis_{t-1} + \beta_3 Std_{t-1} + \beta_4 Variable_{i,t-1} + \varepsilon_t,$$

$$i \in 1, 2, \dots, 8$$

$Variable_i$ 將依序使用以下變數替換，與偏態、超額峰態及標準差搭配進行四變數迴歸分析：平均數（Mean）、中位數（Median）、加密貨幣恐懼貪婪指數（Fear and Greed Index）、芝加哥選擇權交易所波動率指數（VIX）、前 1 期報酬率（T-1 Return）、前 2 期報酬率（T-2 Return）、前 3 期報酬率（T-3 Return）、前 4 期報酬率（T-4 Return）

### 4.5.3 新型方法之有效性驗證

本研究提出之單點配適法相較於既有文獻採用之雙點配適法，在實務應用上具有計算效率之優勢。為客觀驗證此方法之有效性，本研究採用三項量化指標進行評估：均方誤差（Mean Squared Error, MSE）、樣本外 R 平方（Out-of-sample R-squared,  $R_{OS}^2$ ）及運算效率，以全面比較兩種方法所建構預測模型之準確度與實用性。

#### 1. 均方誤差（MSE）計算

均方誤差為評估預測模型準確度之常用指標（Orosi, 2015），其計算式如下：

$$MSE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2$$

其中， $y_i$ 為實際觀測值（即比特幣實際報酬率）， $\hat{y}_i$ 為模型預測值， $n$ 為樣本數量。MSE 值越小，表示模型預測誤差越小，預測準確度越高。

#### 2. 樣本外 R 平方（ $R_{OS}^2$ ）計算

參考 Campbell and Thompson (2008) 及 Welch and Goyal (2008) 之研究方法，

本研究採用樣本外 R 平方 ( $R_{OS}^2$ ) 評估模型之預測能力。 $R_{OS}^2$  衡量預測模型相對於歷史平均基準模型之預測改善程度，其計算式如下：

$$R_{OS}^2 = 1 - \frac{\sum_{t=s_0+1}^T (R_{t+1} - \hat{R}_{t+1})^2}{\sum_{t=s_0+1}^T (R_{t+1} - \bar{R}_{t+1})^2}$$

其中， $R_{t+1}$  為實際報酬率， $\hat{R}_{t+1}$  為預測模型之預測值， $\bar{R}_{t+1}$  為歷史平均報酬率（基準模型）， $s_0$  為初始樣本內期間長度， $T$  為總樣本數。當  $R_{OS}^2$  大於零時，表示預測模型優於歷史平均基準模型； $R_{OS}^2$  值越大，預測改善程度越顯著。

本研究採用滾動窗口法（rolling window approach）進行樣本外預測，初始樣本內期間設定為總樣本數的 80%，並逐步向前推進進行預測。透過比較單點配適法與雙點配適法之  $R_{OS}^2$  值，可客觀評估兩種方法在樣本外預測能力上的差異。

### 3. 運算效率比較

除了預測準確度外，本研究亦重視方法之實務應用可行性，特別是在處理大量數據時的運算效率。為客觀評估兩種方法之計算效能，本研究選擇十個具代表性之選擇權到期日，針對每一到期日分別計算 7 日之風險中立機率密度，並分別採用單點配適法與雙點配適法以廣義柏拉圖分配（GPD）配適尾部。為確保結果之可靠性與穩定性，本研究對每種方法進行十次重複運算，記錄其執行時間，並計算平均值，藉此全面評估兩種方法在實務應用中之運算效率差異。

## 第五章、實證結果分析

本章將詳細分析實證結果，首先於 5.1 節中比較單點配適法與雙點配適法之方法特性，包含整體擬合效果與計算效率兩個面向。在 5.1.1 節中，透過具體樣本展示兩種方法在不同市場情境下的擬合表現；而在 5.1.2 節則針對兩種方法的運算效率進行實證比較，以評估其實務應用可行性。接著在 5.2 節與 5.3 節分別針對距離到期日 1 天與 7 天之選擇權商品進行深入分析，並探討兩種配適方法在不同到期期間下之預測效果差異。

本研究選擇距離到期日分別為 1 天與 7 天的比特幣選擇權商品進行實證分析，主要基於以下原因。比特幣市場具有 24 小時不間斷交易的特性，且近年來交易量持續攀升，日均交易量已達數百億美元，顯示其具備充足的市場流動性。在流動性充沛的情況下，價格發現機制更為有效，市場參與者能夠迅速反應新資訊，使得選擇權價格更能即時反映市場預期；其次，比特幣市場對新資訊的反應速度極快，價格調整效率高。相較於傳統金融市場，加密貨幣市場的交易者多為科技導向的投資人，能夠快速接收與處理市場訊息。因此，選擇短期商品進行研究，可以更準確地捕捉市場參與者對風險的即時評估與反應。

### 5.1 實證樣本擬合效果分析

#### 5.1.1 單點配適法與雙點配適法之比較

為進一步比較單點配適法與雙點配適法之擬合效果，本研究選取觀察日 2022 年 7 月 10 日（到期日 2022 年 7 月 11 日）與 2023 年 9 月 27 日（到期日 2023 年 9 月 28 日）之樣本進行分析。就實證結果觀之，單點配適法展現出較佳之穩定性，其擬合曲線較為平滑且連續，顯示該方法在處理不同市場情境時具有較強之適應能力。

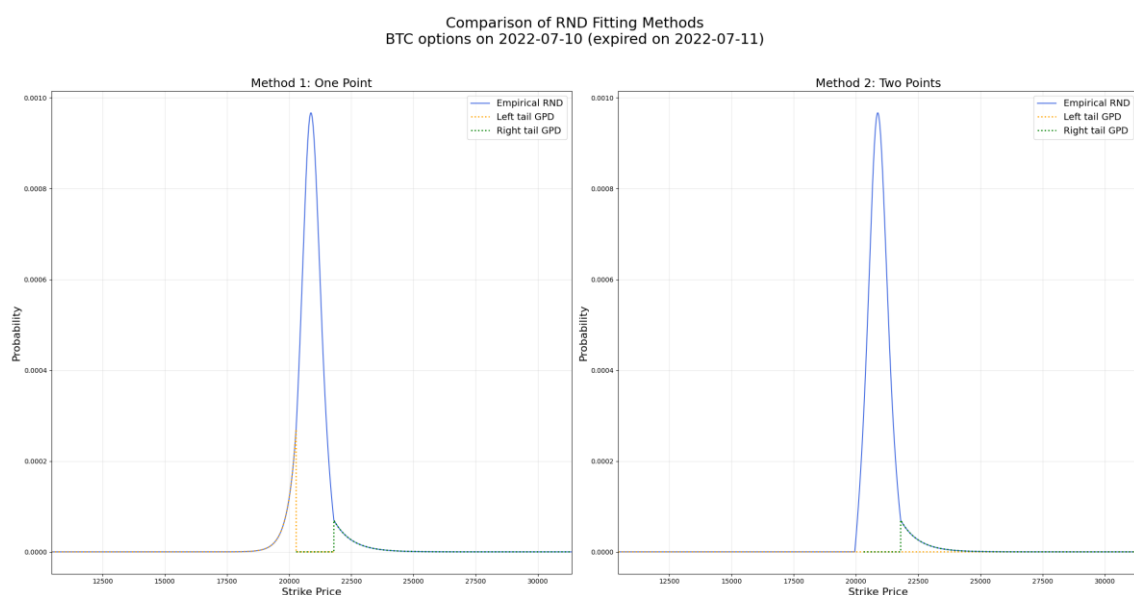


圖 5-1：2022 年 7 月 10 日比特幣選擇權 GPD 尾部配適比較  
(左側：單點配適法；右側：雙點配適法)

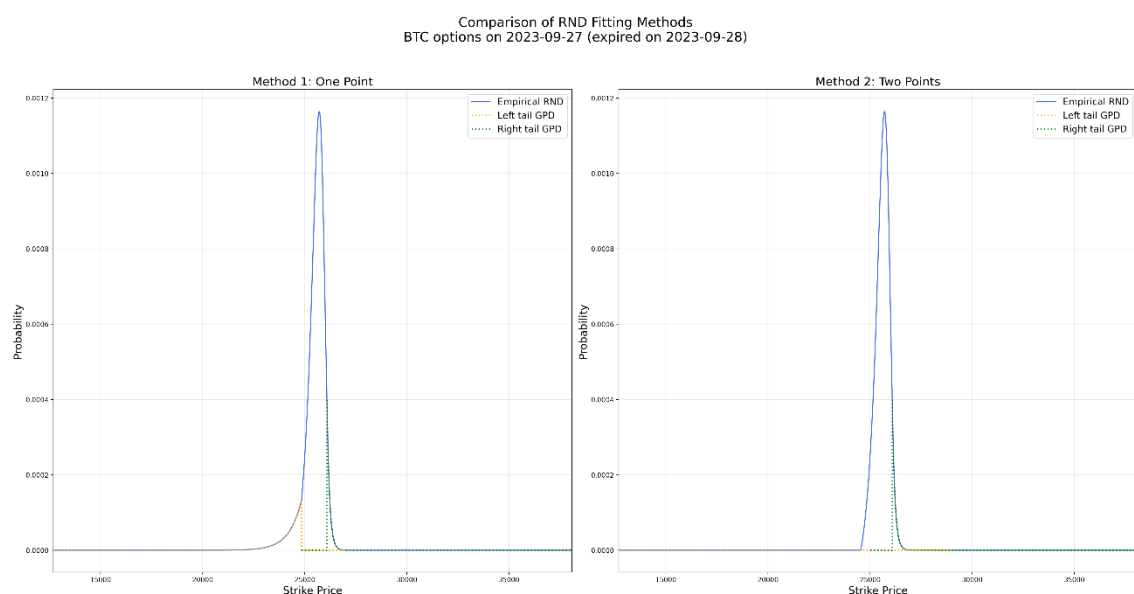


圖 5-2：2023 年 9 月 27 日比特幣選擇權 GPD 尾部配適比較  
(左側：單點配適法；右側：雙點配適法)

觀察圖中左側之單點配適法擬合結果可知，無論是在 2022 年或 2023 年之樣本中，其 RND 曲線能順利完成擬合，且在接合點處維持良好之連續性。特別是在尾部區域，單點配適法之擬合曲線呈現平緩遞減之態勢，符合機率密度函數之基本性質。此結果顯示單點配適法在處理極端值時具有較佳之穩健性。

反觀右側之雙點配適法擬合結果，雖然在大多數情況下亦能產生合理之擬合曲線，惟在某些市場情境下可能出現擬合失敗或曲線不連續之情形。究其原因，主要係因雙點配適法需同時滿足兩個接合點之連續性條件，當市場波動劇烈或價格分布極度偏斜時，較難找到同時滿足雙重條件之參數組合，進而影響擬合結果之品質。

就實務應用層面而言，單點配適法之計算效率較高且較不易出現無法擬合之情形，此優勢在進行大量樣本分析時尤為明顯。再者，單點配適法之擬合結果較為穩定，有助於後續統計特徵值之計算與分析。基於前述優勢，本研究認為在建構比特幣選擇權之風險中立機率密度函數時，單點配適法較雙點配適法更具實用價值。

### 5.1.2 計算效率之實證比較

為評估單點配適法與雙點配適法在實務應用上的可行性，本研究進行計算效率之實證比較。於相同硬體設備下，針對 2023 年 9 月至 12 月間共計 10 個到期日的選擇權商品進行測試，每次實驗皆產生 10 個週報酬的風險中立機率密度函數（RND），並以 GPD 分配進行尾部配適，結果如表 5-1。

就實證結果觀之，單點配適法展現出明顯的運算效率優勢。單點配適法的平均執行時間為 309.86 秒，最短與最長執行時間分別為 297.58 秒及 313.52 秒；相較之下，雙點配適法的平均執行時間為 347.95 秒，最短與最長執行時間則分別為 346.49 秒及 349.10 秒。整體而言，單點配適法較雙點配適法節省約 10.95% 的運算時間。

造成此運算效率差異的主要原因在於演算法的複雜度。雙點配適法需要同時滿足兩個接合點的連續性條件，在最佳化過程中需要考慮更多的限制條件，因此增加了計算負擔。反觀單點配適法僅需處理單一接合點，其最佳化過程較為直接，能夠更快速地收斂至合適的參數組合。值得注意的是，單點配適法不僅運算速度較快，其執行時間的穩定性亦優於雙點配適法。單點配適法的執行時間標準差較小，顯示其運算效能較為一致，這項特性在進行大規模實證分析時特別重要，有助於提升研

究效率並降低運算資源的浪費。

基於前述實證結果，本研究認為單點配適法在實務應用上具有明顯優勢，特別是在需要處理大量樣本或即時性較高的分析場景中，其較高的運算效率將能提供更好的應用彈性。這項發現對於後續發展自動化交易策略或風險監控系統具有重要的實務意涵。

接下來的小節將分別針對距離到期日 1 天與 7 天之選擇權商品進行實證分析，探討兩種配適方法在不同到期期間下之預測效果。

表 5-1：比特幣選擇權 GPD 尾部配適計算效率比較  
(左側：單點配適法；右側：雙點配適法)

執行時間：		2025/2/5 00:48	
執行條件：		每次生成 10 個週報酬的 RND，並以 GPD 分布配適尾部。	
選擇權到期日：		2023/9/22, 2023/9/29, 2023/10/13, 2023/10/20, 2023/10/27, 2023/11/10, 2023/11/17, 2023/11/24, 2023/12/15, 2023/12/22	
單點配適法		雙點配適法	
第 1 次執行時間(秒)	297.58	第 1 次執行時間(秒)	346.49
第 2 次執行時間(秒)	300.23	第 2 次執行時間(秒)	346.95
第 3 次執行時間(秒)	313.52	第 3 次執行時間(秒)	347.78
第 4 次執行時間(秒)	313.51	第 4 次執行時間(秒)	347.68
第 5 次執行時間(秒)	312.25	第 5 次執行時間(秒)	347.81
第 6 次執行時間(秒)	311.37	第 6 次執行時間(秒)	347.94
第 7 次執行時間(秒)	313.52	第 7 次執行時間(秒)	348.39
第 8 次執行時間(秒)	311.86	第 8 次執行時間(秒)	349.10
第 9 次執行時間(秒)	312.36	第 9 次執行時間(秒)	348.59
第 10 次執行時間(秒)	312.42	第 10 次執行時間(秒)	348.80
最短執行時間(秒)	297.58	最短執行時間(秒)	346.49
最長執行時間(秒)	313.52	最長執行時間(秒)	349.10
平均執行時間(秒)	309.86	平均執行時間(秒)	347.95



## 5.2 距離到期日 1 天之商品實證迴歸分析

### 5.2.1 尾部 GPD 單點配適法

本小節採用 2021 年 1 月 10 日至 2024 年 4 月 30 日間每日到期之選擇權商品，以到期日前 1 日作為觀察日導出 RND，並使用單點配適法建構完整 RND 函數，而後計算其平均數、標準差、偏度及峰度等數據作為解釋變數；以下期比特幣現貨報酬率作為被解釋變數，進行多層次迴歸分析，觀察 RND 是否具有預測效果。變數之敘述統計量如表 5-2，樣本數總計 832 個，觀察偏態（Skewness）與超額峰態（Excess Kurtosis）可發現，以單點配適法建構之 RND 函數，其偏態與超額峰態具有離群值，連帶影響該變數之平均數與標準差。

表 5-2：距到期日 1 日之 RND 統計特徵與比特幣報酬率的敘述統計量（單點配適法）

	Count	Mean	Std	Min	25%	Median	75%	Max
T Return (Y)	832	-0.0002	0.0336	-0.1670	-0.0155	-0.0003	0.0156	0.1353
Mean	832	35891.0208	14144.2251	0.0000	25047.4826	34274.1105	46035.6010	72614.4638
Std	832	1784.3452	1422.5234	0.0000	821.3941	1463.6223	2291.7552	12224.7221
Skewness	832	0.4054	7.2140	-12.5062	-0.7712	0.2451	1.0921	193.7010
Excess Kurtosis	832	56.6637	1392.5124	-140.8251	-0.2814	1.6822	4.2421	40084.7494
Median	832	36972.0948	14057.6155	7860.0000	25800.8750	35687.3500	46933.4000	72597.4000
Fear and Greed Index	832	46.9892	22.4770	6.0000	26.0000	49.0000	68.2500	95.0000
VIX	832	20.0917	5.2866	12.0700	16.1875	19.2250	23.0300	37.2100
T-1 Return	832	-0.0001	0.0337	-0.1670	-0.0155	-0.0003	0.0156	0.1353
T-2 Return	832	-0.0001	0.0337	-0.1670	-0.0153	-0.0003	0.0161	0.1353
T-3 Return	832	-0.0001	0.0337	-0.1670	-0.0153	-0.0003	0.0160	0.1353
T-4 Return	832	-0.0003	0.0337	-0.1670	-0.0157	-0.0004	0.0156	0.1353

依 4.5 小節設定之迴歸分析方法，單變數迴歸分析結果如表 5-3，可觀察平均數（Mean）、偏態（Skewness）、中位數（Median）及前四期報酬率（T-4 Return）具有顯著性，主要集中於 RND 分布特徵；而加密貨幣恐懼貪婪指數（Fear and Greed Index）與波動率指數（VIX）等市場情緒指標之預測能力極低，顯示技術面指標可能比市場情緒指標更具參考價值。

表 5-3：距到期日 1 日之 RND 單變數迴歸分析結果（單點配適法）

	Coefficient	p value	Significance	R-squared
<b>Mean</b>	-0.0866	0.0124	**	0.0075
Std	-0.0247	0.4761		0.0006
<b>Skewness</b>	0.0614	0.0770	*	0.0038
Excess Kurtosis	0.0515	0.1379		0.0027
<b>Median</b>	-0.0707	0.0416	**	0.0050
Fear and Greed Index	-0.0023	0.9462		0.0000
VIX	-0.0010	0.9777		0.0000
T-1 Return	-0.0402	0.2471		0.0016
T-2 Return	0.0276	0.4261		0.0008
T-3 Return	0.0093	0.7893		0.0001
<b>T-4 Return</b>	0.0617	0.0752	*	0.0038

註：\*表示於 10% 顯著水準下顯著；\*\*表示於 5% 顯著水準下顯著；\*\*\*表示於 1% 顯著水準下顯著

雙變數迴歸分析中，以偏態（Skewness）為固定變數，結果如表 5-4，可觀察中位數（Median）與前四期報酬率（T-4 Return）之加入可使迴歸模型具有穩定的預測能力，模型解釋力 R-squared 亦有上升，顯示 RND 中位數與短期動能策略可為預測報酬率提供額外資訊。三變數與四變數迴歸分析結果如附表 1 與附表 2。

表 5-4：距到期日 1 日之 RND 雙變數迴歸分析結果（單點配適法）

	Skewness_Coef	Skewness_p	Skewness_Sig	Variable_Coef	Variable_p	Variable_Sig	R-squared
Mean	0.0502	0.1510		-0.0796	0.0229	**	0.0100
Std	0.0607	0.0803	*	-0.0230	0.5064		0.0043
Excess Kurtosis	0.1211	0.2595		-0.0631	0.5565		0.0042
<b>Median</b>	0.0640	0.0647	*	-0.0730	0.0352	**	0.0091
Fear and Greed Index	0.0618	0.0758	*	-0.0063	0.8551		0.0038
VIX	0.0614	0.0771	*	0.0009	0.9792		0.0038
T-1 Return	0.0581	0.0956	*	-0.0347	0.3194		0.0050
T-2 Return	0.0624	0.0724	*	0.0298	0.3906		0.0046
T-3 Return	0.0615	0.0765	*	0.0100	0.7722		0.0039
<b>T-4 Return</b>	0.0602	0.0821	*	0.0606	0.0802	*	0.0074

註：\*表示於 10% 顯著水準下顯著；\*\*表示於 5% 顯著水準下顯著；\*\*\*表示於 1% 顯著水準下顯著

經多層次迴歸分析，本小節最終採用之迴歸模型變數為偏態（Skewness）、中

位數（Median）及前四期報酬率（T-4 Return）三個變數，模型結果如表 5-5，結果顯示偏態與前四期報酬率對於比特幣現貨報酬率預測具有正向影響，而中位數則具有負向影響；均方誤差（MSE）則顯示了比特幣之高波動性。本小節亦將此模型作為基礎，試圖加入第四個變數以找尋更具解釋力之模型，然而加入之變數皆不具統計顯著性（附表 3），可知此模型已展現出相對穩定之預測能力。

表 5-5：距到期日 1 日之 RND 迴歸分析結果（單點配適法）

	Coefficient	p value	Significance	R-squared	MSE
Skewness	0.0629	0.0690	*	0.0130	0.9858
Median	-0.0746	0.0311	**		
T-4 Return	0.0626	0.0705	*		

註：\*表示於 10% 顯著水準下顯著；\*\*表示於 5% 顯著水準下顯著；\*\*\*表示於 1% 顯著水準下顯著

### 5.2.2 尾部 GPD 雙點配適法

本小節採用 2021 年 1 月 10 日至 2024 年 4 月 30 日間每日到期之選擇權商品，以到期日前 1 日作為觀察日導出 RND，並使用雙點配適法建構完整 RND 函數，而後計算其平均數、標準差、偏度及峰度等數據作為解釋變數；以下期比特幣現貨報酬率作為被解釋變數，進行多層次迴歸分析，觀察 RND 是否具有預測效果。變數之敘述統計量如表 5-6，樣本數總計 831 個，較單點配適法少 1 個樣本，原因為使用雙點配適法時出現無法配適之問題，顯示單點配適法較為穩定。觀察偏態（Skewness）與超額峰態（Excess Kurtosis）可發現，以雙點配適法建構計算之統計特徵數據，受離群值影響較小。

表 5-6：距到期日 1 日之 RND 統計特徵與比特幣報酬率的敘述統計量（雙點配適法）

	Count	Mean	Std	Min	25%	Median	75%	Max
T Return (Y)	831	-0.0003	0.0336	-0.1670	-0.0156	-0.0004	0.0155	0.1353
Mean	831	36049.7626	13917.9793	771.3413	25159.9872	34158.9645	46118.6419	72614.4638
Std	831	1733.1035	1173.4002	179.8905	854.8143	1502.1723	2276.4792	10729.4925
Skewness	831	0.3140	1.7155	-12.5062	-0.5639	0.5011	1.1725	16.9925
Excess Kurtosis	831	2.9968	9.4980	-140.8251	-0.7554	1.3626	3.6404	61.3908

Median	831	37010.3730	14027.0369	15890.6000	25859.8500	35717.4000	46934.7000	72597.4000
Fear and Greed Index	831	47.0253	22.4806	6.0000	26.0000	49.0000	68.5000	95.0000
VIX	831	20.0818	5.2947	12.0700	16.1800	19.2000	23.0300	37.2100
T-1 Return	831	-0.0001	0.0337	-0.1670	-0.0156	-0.0003	0.0157	0.1353
T-2 Return	831	-0.0001	0.0337	-0.1670	-0.0153	-0.0003	0.0160	0.1353
T-3 Return	831	-0.0001	0.0337	-0.1670	-0.0153	-0.0003	0.0160	0.1353
T-4 Return	831	-0.0003	0.0337	-0.1670	-0.0157	-0.0004	0.0157	0.1353

依 4.5 小節設定之迴歸分析方法，單變數迴歸分析結果如表 5-7，可觀察平均數（Mean）、中位數（Median）及前四期報酬率（T-4 Return）具有顯著性。

表 5-7：距到期日 1 日之 RND 單變數迴歸分析結果（雙點配適法）

	Coefficient	p value	Significance	R-squared
<b>Mean</b>	-0.0707	0.0415	**	0.0050
Std	-0.0179	0.6054		0.0003
Skewness	-0.0250	0.4718		0.0006
Excess Kurtosis	0.0297	0.3922		0.0009
<b>Median</b>	-0.0703	0.0428	**	0.0049
Fear and Greed Index	-0.0022	0.9494		0.0000
VIX	-0.0009	0.9792		0.0000
T-1 Return	-0.0402	0.2476		0.0016
T-2 Return	0.0269	0.4383		0.0007
T-3 Return	0.0096	0.7830		0.0001
<b>T-4 Return</b>	0.0618	0.0748	*	0.0038

註：\*表示於 10% 顯著水準下顯著；\*\*表示於 5% 顯著水準下顯著；\*\*\*表示於 1% 顯著水準下顯著

雙變數迴歸分析中，以偏態（Skewness）為固定變數，結果如表 5-8，可觀察加入第二個變數後，偏態皆變為不具顯著性，顯示以雙點配適法建構之 RND 函數的統計特徵數據較無法穩定預測比特幣現貨報酬率；三變數與四變數迴歸分析結果如附表 4 與附表 5

表 5-8：距到期日 1 日之 RND 雙變數迴歸分析結果（雙點配適法）

	Skewness_Coef	Skewness_p	Skewness_Sig	Variable_Coef	Variable_p	Variable_Sig	R-squared
Mean	-0.0327	0.3485		-0.0741	0.0336	**	0.0061
Std	-0.0232	0.5069		-0.0153	0.6629		0.0009

Excess Kurtosis	-0.0232	0.5046		0.0283	0.4168		0.0014
Median	-0.0307	0.3768		-0.0727	0.0367	**	0.0059
Fear and Greed Index	-0.0249	0.4735		-0.0008	0.9805		0.0006
VIX	-0.0251	0.4715		0.0015	0.9648		0.0006
T-1 Return	-0.0339	0.3380		-0.0466	0.1877		0.0027
T-2 Return	-0.0236	0.4977		0.0256	0.4613		0.0013
T-3 Return	-0.0248	0.4754		0.0091	0.7942		0.0007
T-4 Return	-0.0221	0.5253		0.0608	0.0804	*	0.0043

註：\*表示於 10% 顯著水準下顯著；\*\*表示於 5% 顯著水準下顯著；\*\*\*表示於 1% 顯著水準下顯著

為與單點配適法建構之迴歸模型進行比較，本小節亦選擇偏態（Skewness）、中位數（Median）及前四期報酬率（T-4 Return）三個變數進入模型，模型結果如表 5-9，顯示偏態不具顯著性，雙點配適法建構之迴歸模型不具穩定之預測能力。

表 5-9：距到期日 1 日之 RND 迴歸分析結果（雙點配適法）

	Coefficient	p value	Significance	R-squared	MSE
Skewness	-0.0278	0.4233		0.0098	0.9890
Median	-0.0742	0.0330	**		
T-4 Return	0.0625	0.0718	*		

註：\*表示於 10% 顯著水準下顯著；\*\*表示於 5% 顯著水準下顯著；\*\*\*表示於 1% 顯著水準下顯著

### 5.2.3 兩方法比較分析

本研究針對距離到期日 1 日之比特幣選擇權商品，分別採用單點配適法與雙點配適法建構 RND，並進行實證迴歸分析比較。實證結果顯示，兩種方法在變數選擇與預測效果上存在明顯差異。

首先，就樣本數而言，單點配適法（832 個）較雙點配適法（831 個）多出 1 個有效樣本。此差異雖然微小，但反映出雙點配適法在某些市場情境下可能面臨無法配適的技術限制，顯示單點配適法在實務應用上具有較佳的穩定性。

針對具到期日 1 日之報酬率預測迴歸模型，本研究最終選擇三變數迴歸模型，模型變數納入偏態（Skewness）、中位數（Median）及前四期報酬率（T-4 Return）。依據兩方法計算出之統計特徵量對於模型表現有所影響，模型表現比較如表 5-10，

單點配適法下，三個變數皆達統計顯著水準。如結果所示，偏態對報酬率呈現正向影響，此與 Bali 和 Murray (2013) 以及 Conrad et al. (2013) 的研究結果形成對比，此差異可能源於加密貨幣市場與傳統股票市場的結構性差異，以及投資者行為模式的不同；前四期報酬率對比特幣日報酬率具有顯著預測力，此結果與 Liu and Tsyvinski (2021) 與 Liu et al. (2023) 的研究相符，顯示加密貨幣市場存在顯著的動量效應，前期報酬率能有效預測未來報酬表現；而中位數則具負向影響。反觀雙點配適法，偏態變數不具顯著性，僅中位數與前四期報酬率維持顯著水準，顯示單點配適法能更有效地捕捉市場偏態特徵對價格走勢的影響。

就模型整體預測效果而言，單點配適法之解釋能力 ( $R\text{-squared}=0.0130$ ) 優於雙點配適法 ( $R\text{-squared}=0.0098$ )，同時均方誤差 (MSE) 亦較低 ( $0.9858 < 0.9890$ )。此結果顯示，單點配適法不僅在變數顯著性表現較佳，其預測準確度亦優於雙點配適法。

為進一步評估兩種方法的預測能力，本研究使用總樣本數之 60% 作為初始樣本長度計算樣本外 R 平方 (Out-of-sample R-squared,  $R_{OS}^2$ )。結果顯示，單點配適法之樣本外 R 平方為 0.0134，而雙點配適法則為 0.0121。顯示在樣本外預測時，單點配適法的樣本外 R 平方值略高於雙點配適法，意味著其樣本外預測能力相對較佳。此結果與樣本內分析一致，進一步支持單點配適法在實務應用上的優勢。

表 5-10：距到期日 1 日之 RND 迴歸分析結果比較  
(左側：單點配適法；右側：雙點配適法)

	單點配適法						雙點配適法					
	Coef.	p value	Sig.	R-squared	MSE	$R_{OS}^2$	Coef.	p value	Sig.	R-squared	MSE	$R_{OS}^2$
Skewness	0.0629	0.0690	*	0.0130	0.9858	0.0134	-0.0278	0.4233		0.0098	0.9890	0.0121
Median	-0.0746	0.0311	**				-0.0742	0.0330	**			
T-4 Return	0.0626	0.0705	*				0.0625	0.0718	*			

註：\*表示於 10% 顯著水準下顯著；\*\*表示於 5% 顯著水準下顯著；\*\*\*表示於 1% 顯著水準下顯著

綜上所述，本研究發現在預測比特幣日報酬率時，單點配適法較雙點配適法具

有以下優勢：(1) 樣本配適的穩定性較高；(2) 能更有效捕捉市場偏態特徵；(3) 模型預測能力較佳，無論是在樣本內或樣本外評估中皆展現出相對優勢。

## 5.3 距離到期日 7 天之商品實證迴歸分析

### 5.3.1 尾部 GPD 單點配適法

本小節採用 2021 年 1 月 15 日至 2024 年 4 月 19 日間每日到期之選擇權商品，以到期日前 7 日作為觀察日導出 RND，並使用單點配適法建構完整 RND 函數，而後計算其平均數、標準差、偏度及峰度等數據作為解釋變數；以下期比特幣現貨報酬率作為被解釋變數，進行多層次迴歸分析，觀察 RND 是否具有預測效果。變數之敘述統計量如表 5-11，樣本數總計 119 個，偏態 (Skewness) 與超額峰態 (Excess Kurtosis) 之平均數皆大於 0，且較無極端值發生之情形。

表 5-11：距到期日 7 日之 RND 統計特徵與比特幣報酬率的敘述統計量（單點配適法）

	Count	Mean	Std	Min	25%	Median	75%	Max
T Return (Y)	119	-0.0070	0.0978	-0.3516	-0.0511	-0.0071	0.0423	0.3071
Mean	119	36529.4634	13781.4125	16591.1342	26070.6956	35496.4638	45453.7462	69393.9514
Std	119	3599.4222	2428.7791	710.3376	1727.0200	2868.8427	5085.2385	16566.9193
Skewness	119	0.0719	0.6877	-1.4832	-0.2484	0.0372	0.2935	4.2156
Excess Kurtosis	119	2.1573	2.9048	0.4791	1.2927	1.6335	1.9781	26.4692
Median	119	36497.0748	13738.8186	16678.0000	26066.9000	35379.1000	45497.1000	69137.5000
Fear and Greed Index	119	46.5378	22.4287	9.0000	25.0000	48.0000	69.0000	93.0000
VIX	119	20.0029	5.1284	12.2800	16.2950	18.8100	22.8100	32.0200
T-1 Return	119	-0.0060	0.0980	-0.3516	-0.0480	-0.0065	0.0463	0.3071
T-2 Return	119	-0.0061	0.0980	-0.3516	-0.0480	-0.0065	0.0463	0.3071
T-3 Return	119	-0.0055	0.0977	-0.3516	-0.0439	-0.0065	0.0463	0.3071
T-4 Return	119	-0.0055	0.0977	-0.3516	-0.0439	-0.0065	0.0463	0.3071

依 4.5 小節設定之迴歸分析方法，單變數迴歸分析結果如表 5-12，可觀察平均數 (Mean)、標準差 (Std) 及中位數 (Median) 具有顯著性；而加密貨幣恐懼貪婪指數 (Fear and Greed Index) 與波動率指數 (VIX) 等市場情緒指標之單獨預測能

力依然極低。

表 5-12：距到期日 7 日之 RND 單變數迴歸分析結果（單點配適法）

	Coefficient	p value	Significance	R-squared
Mean	-0.1559	0.0904	*	0.0243
Std	-0.1547	0.0931	*	0.0239
Skewness	-0.0607	0.5122		0.0037
Excess Kurtosis	-0.1145	0.2148		0.0131
Median	-0.1553	0.0917	*	0.0241
Fear and Greed Index	0.0277	0.7648		0.0008
VIX	-0.0505	0.5858		0.0025
T-1 Return	-0.0398	0.6677		0.0016
T-2 Return	0.0126	0.8920		0.0002
T-3 Return	0.0043	0.9626		0.0000
T-4 Return	-0.0849	0.3587		0.0072

註：\*表示於 10% 顯著水準下顯著；\*\*表示於 5% 顯著水準下顯著；\*\*\*表示於 1% 顯著水準下顯著

在進行雙變數、三變數及四變數等多重迴歸分析時，發現大部分解釋變數的預測效果並不顯著，此結果已列於附表 6 至附表 8。此現象顯示，單純增加變數數量並無法有效提升模型的預測能力，反而可能導致模型過度擬合的問題。

經過反覆測試不同變數的排列組合後，本研究發現在預測比特幣週報酬率時，超額峰態（Excess Kurtosis）與中位數（Median）這組配對展現出較佳的預測效果。在此基礎上，本研究進一步考量市場情緒指標，將加密貨幣恐懼貪婪指數（Fear and Greed Index）加入模型中，且具有顯著預測性。透過仔細篩選變數組合，而非盲目增加變數數量，本研究最終找到一個兼具統計顯著性與經濟意義的預測模型，迴歸模型結果如表 5-13。

表 5-13：距到期日 7 日之 RND 迴歸分析結果（單點配適法）

	Coefficient	p value	Significance	R-squared	MSE
Excess Kurtosis	-0.1620	0.0874	*	0.0666	0.9256
Median	-0.2706	0.0144	**		
Fear and Greed Index	0.2171	0.0561	*		

註：\*表示於 10% 顯著水準下顯著；\*\*表示於 5% 顯著水準下顯著；\*\*\*表示於 1% 顯著水準下顯著



### 5.3.2 尾部 GPD 雙點配適法

本小節採用 2021 年 1 月 15 日至 2024 年 4 月 19 日間每日到期之選擇權商品，以到期日前 7 日作為觀察日導出 RND，並使用雙點配適法建構完整 RND 函數，而後計算其平均數、標準差、偏度及峰度等數據作為解釋變數；以下期比特幣現貨報酬率作為被解釋變數，進行多層次迴歸分析，觀察 RND 是否具有預測效果。變數之敘述統計量如表 5-14，樣本數總計 119 個，偏態(Skewness)與超額峰態(Excess Kurtosis)之平均數皆大於 0，且敘述統計量與單點配適法高度相似，顯示對於週報酬，此二方法並無較大差異。

表 5-14：距到期日 7 日之 RND 統計特徵與比特幣報酬率的敘述統計量（雙點配適法）

	Count	Mean	Std	Min	25%	Median	75%	Max
T Return (Y)	119	-0.0070	0.0978	-0.3516	-0.0511	-0.0071	0.0423	0.3071
Mean	119	36529.5600	13781.3082	16592.5497	26071.3029	35496.4638	45453.7462	69393.9514
Std	119	3598.8321	2429.3086	708.7932	1725.0112	2868.8427	5085.2385	16566.9193
Skewness	119	0.0723	0.6879	-1.4832	-0.2469	0.0372	0.2912	4.2156
Excess Kurtosis	119	2.1404	2.9086	0.4327	1.2819	1.6078	1.9556	26.4692
Median	119	36497.0748	13738.8186	16678.0000	26066.9000	35379.1000	45497.1000	69137.5000
Fear and Greed Index	119	46.5378	22.4287	9.0000	25.0000	48.0000	69.0000	93.0000
VIX	119	20.0029	5.1284	12.2800	16.2950	18.8100	22.8100	32.0200
T-1 Return	119	-0.0060	0.0980	-0.3516	-0.0480	-0.0065	0.0463	0.3071
T-2 Return	119	-0.0061	0.0980	-0.3516	-0.0480	-0.0065	0.0463	0.3071
T-3 Return	119	-0.0055	0.0977	-0.3516	-0.0439	-0.0065	0.0463	0.3071
T-4 Return	119	-0.0055	0.0977	-0.3516	-0.0439	-0.0065	0.0463	0.3071

依 4.5 小節設定之迴歸分析方法，單變數迴歸分析結果如表 5-15，可觀察平均數（Mean）、標準差（Std）及中位數（Median）具有顯著性。

表 5-15：距到期日 7 日之 RND 單變數迴歸分析結果（單點配適法）

	Coefficient	p value	Significance	R-squared
<b>Mean</b>	-0.1559	0.0904	*	0.0243
<b>Std</b>	-0.1547	0.0930	*	0.0239
Skewness	-0.0608	0.5115		0.0037

Excess Kurtosis	-0.1157	0.2100		0.0134
<b>Median</b>	-0.1553	0.0917	*	0.0241
Fear and Greed Index	0.0277	0.7648		0.0008
VIX	-0.0505	0.5858		0.0025
T-1 Return	-0.0398	0.6677		0.0016
T-2 Return	0.0126	0.8920		0.0002
T-3 Return	0.0043	0.9626		0.0000
T-4 Return	-0.0849	0.3587		0.0072

註：\*表示於 10% 顯著水準下顯著；\*\*表示於 5% 顯著水準下顯著；\*\*\*表示於 1% 顯著水準下顯著

雙點配適法在進行雙變數、三變數及四變數等多重迴歸分析時，依然有單點配適法發生之問題，大部分解釋變數的預測效果並不顯著，此結果已列於附表 6 至附表 8。

為與單點配適法建構之迴歸模型進行比較，本小節亦選擇超額峰態（Excess Kurtosis）、中位數（Median）及加密貨幣恐懼貪婪指數（Fear and Greed Index）三個變數進入模型，模型結果如表 5-16，變數顯著性與模型預測能力皆與單點配適法模型相仿。

表 5-16：距到期日 7 日之 RND 迴歸分析結果（雙點配適法）

	Coefficient	p value	Significance	R-squared	MSE
Excess Kurtosis	-0.1620	0.0874	*	0.0666	0.9256
Median	-0.2706	0.0144	**		
Fear and Greed Index	0.2171	0.0561	*		

註：\*表示於 10% 顯著水準下顯著；\*\*表示於 5% 顯著水準下顯著；\*\*\*表示於 1% 顯著水準下顯著

### 5.3.3 兩方法比較分析

針對距離到期日 7 日之比特幣選擇權商品，本研究分別採用單點配適法與雙點配適法建構 RND，並進行實證迴歸分析比較。實證結果顯示，兩種方法在預測週報酬率時，皆能找到具有統計顯著性的變數組合。

就變數敘述統計量而言，兩種方法所計算之 RND 特徵值相當接近，顯示在週報酬率的預測上，單點配適法與雙點配適法皆能有效捕捉市場資訊。此結果與日報

酬率預測時所觀察到的差異形成對比，推測其原因可能為：週報酬率之預測區間較長，使得尾部配適方法對整體預測結果的影響程度相對降低。

模型預測效果方面，本研究亦選擇使用三變數迴歸模型，兩種方法皆納入超額峰態 (Excess Kurtosis)、中位數 (Median) 及加密貨幣恐懼貪婪指數 (Fear and Greed Index) 變數作為最佳預測變數組合，且模型之解釋能力 ( $R\text{-squared} = 0.0666$ ) 與預測誤差 ( $MSE = 0.9256$ ) 完全相同，統整比較如表 5-17。超額峰態之顯著預測力與 Amaya et al. (2015) 的研究結果一致，指出超額峰態能有效捕捉市場的極端風險，其預測能力在金融危機期間特別顯著；本研究亦發現加密貨幣恐懼與貪婪指數於週報酬率預測中具顯著預測力，此結果與 He et al. (2023) 的研究相符，他們發現該指數在樣本內與樣本外均具有顯著的預測能力，從一日到一週的預測期間內對加密貨幣報酬均具有預測力。此外，López-Cabarcos et al. (2021) 的研究也指出，投資者情緒指標對比特幣短期價格變動具有顯著預測力。

進一步檢視模型之樣本外預測能力，本研究使用總樣本數之 80% 作為初始樣本長度計算樣本外 R 平方 ( $R_{OS}^2$ ) 進行評估。實證結果顯示，單點配適法之樣本外 R 平方值為 0.3342，略高於雙點配適法之 0.3335。此結果雖然差異不大，但仍顯示單點配適法在樣本外預測表現上略勝一籌。值得注意的是，兩種方法之樣本外 R 平方皆為正值，且數值相當可觀，表示相較於簡單歷史平均模型，本研究所建構之預測模型具有經濟價值。

表 5-17：距到期日 7 日之 RND 迴歸分析結果比較  
(左側：單點配適法；右側：雙點配適法)

	單點配適法						雙點配適法					
	Coef.	p value	Sig.	R-squared	MSE	$R_{OS}^2$	Coef.	p value	Sig.	R-squared	MSE	$R_{OS}^2$
Excess Kurtosis	-0.1620	0.0874	*	0.0666	0.9256	0.3342	-0.1620	0.0874	*	0.0666	0.9256	0.3335
Median	-0.2706	0.0144	**				-0.2706	0.0144	**			
Fear and Greed Index	0.2171	0.0561	*				0.2171	0.0561	*			

綜上所述，本研究發現在預測週報酬率時，單點配適法不僅能達到與雙點配適法相當的樣本內預測效果，在樣本外預測能力上亦略勝一籌，再加上前述計算效率之優勢，顯示單點配適法在實務應用上確實較具發展潛力。

## 5.4 小結

本章透過實證分析比較單點配適法與雙點配適法在建構風險中立機率密度函數時的表現差異。研究發現，兩種方法在不同預測期間展現出不同的特性與優勢。

就日報酬率預測而言，單點配適法明顯優於雙點配適法。首先，在樣本完整性方面，單點配適法（832 個）較雙點配適法（831 個）能保留更多有效樣本，顯示其在處理極端市場情境時具有較佳的穩定性。其次，在變數預測能力方面，單點配適法建構之迴歸模型中，偏態（Skewness）、中位數（Median）及前四期報酬率（T-4 Return）三個變數皆達統計顯著水準，且模型解釋能力（R-squared = 0.0130）優於雙點配適法（R-squared = 0.0098）。此結果顯示單點配適法更能有效捕捉市場短期波動特徵。

在週報酬率預測方面，兩種方法的表現則較為接近。實證結果顯示，兩種方法皆以超額峰態（Excess Kurtosis）、中位數（Median）及加密貨幣恐懼貪婪指數（Fear and Greed Index）作為最佳預測變數組合，且具有相同的模型解釋能力（R-squared = 0.0666）與預測誤差（MSE = 0.9256）。此現象可能反映出在較長期的預測區間中，尾部配適方法對整體預測結果的影響程度相對降低。

本研究的樣本外預測結果顯示，不論在日報酬率與週報酬率預測中，兩種方法均能產生正值的樣本外 R 平方，且單點配適法之值均高於雙點配適法之值，顯示相較於歷史平均模型，我們的預測模型具有實質的經濟價值。

就計算效率而言，單點配適法展現出明顯優勢。在相同硬體設備下進行測試，單點配適法的平均執行時間為 309.86 秒，較雙點配適法的 347.95 秒節省約 10.95%

的運算時間。更重要的是，單點配適法的執行時間標準差較小，顯示其運算效能更為穩定，此特性在進行大規模實證分析時特別重要。

綜合本章研究發現，單點配適法不僅在日報酬率預測上表現較佳，在計算效率方面亦具有顯著優勢。雖然在週報酬率預測時，兩種方法的表現差異不明顯，但考慮到單點配適法的運算效率優勢，本研究認為在實務應用上，單點配適法較雙點配適法更具發展潛力，特別是在需要處理大量樣本或即時性較高的分析場景中。這項發現對於後續發展自動化交易策略或風險監控系統具有重要的實務意涵。

此外，本研究亦發現風險中立機率密度函數的統計特徵在不同時間尺度下展現出不同的預測能力。對於短期（日報酬率）預測，偏態與歷史報酬率具有較強的預測力；而對於中期（週報酬率）預測，超額峰態與市場情緒指標則扮演更為重要的角色。

## 第六章、結論與建議

### 6.1 研究結論

本研究針對比特幣選擇權市場，提出一套創新的風險中立機率密度（Risk-neutral Density, RND）尾部配適方法，並以單點配適法與雙點配適法進行比較，探討其在報酬率預測能力上的差異。透過實證分析，本研究獲得以下主要結論：

首先，在尾部配適方法的比較上，單點配適法展現出顯著的優勢。相較於雙點配適法，單點配適法在處理極端市場情境時具有更高的穩定性與計算效率。實證結果顯示，單點配適法的平均執行時間較雙點配適法節省約 10.95%，且在樣本完整性上也更具優勢，能有效避免因市場波動劇烈而導致的配適失敗問題。

針對日報酬率與週報酬率的預測能力，兩種方法的表現存在一定差異。在日報酬率的預測上，單點配適法建構的 RND 函數能更準確捕捉市場偏態，並在迴歸模型中展現出偏態（Skewness）(Bali & Murray, 2013; Chang et al., 2013; Conrad et al., 2013)、中位數（Median）及前四期報酬率（T-4 Return）(Liu & Tsyvinski, 2021)等變數的統計顯著性，其解釋能力（R-squared = 0.0130）與預測準確度均優於雙點配適法（R-squared = 0.0098）。這顯示單點配適法在短期市場波動的研究中具有更高的應用價值。

然而，在週報酬率的預測上，兩種方法的表現則較為接近。無論是單點配適法還是雙點配適法，皆以超額峰態（Excess Kurtosis）(Amaya et al., 2015)、中位數（Median）及加密貨幣恐懼貪婪指數（Fear and Greed Index）(M. He et al., 2023)作為最佳預測變數組合，且模型解釋能力（R-squared = 0.0666）與預測誤差（MSE = 0.9256）完全相同。這反映出在較長期的預測區間中，尾部配適方法對整體預測結果的影響程度相對降低，而市場情緒指標則扮演更為關鍵的角色。研究結果顯示出風險中立機率密度函數的統計特徵在不同時間尺度下具有不同的預測能力，對於

短期（日報酬率）預測，偏態與歷史報酬率具有較強的預測力；而對於中期（週報酬率）預測，超額峰態與市場情緒指標則扮演更為重要的角色。

本研究的樣本外預測結果顯示，在週報酬率預測中，單點配適法與雙點配適法均能產生正值的樣本外 R 平方（分別為 0.3342 與 0.3335），顯示相較於歷史平均模型，我們的預測模型具有實質的經濟價值 (Campbell & Thompson, 2008)。這一發現對於實務投資具有重要意義，表明從選擇權價格中提取的風險中立機率密度特徵，確實包含了有價值的前瞻性市場資訊。

最後，本研究的實證結果進一步驗證了 RND 統計特徵在市場預測中的重要性。偏態與超額峰態等高階動差不僅能反映市場參與者對極端事件的預期，亦能提供有價值的市場情緒資訊 (Chordia et al., 2021)，為投資決策與風險管理提供量化依據。特別是在比特幣等加密貨幣市場中，由於其波動性高且市場參與者結構獨特，這些統計特徵所蘊含的資訊可能比傳統金融市場更為豐富。

## 6.2 研究建議

基於本研究結果，提出以下幾點建議，以供後續研究與實務應用參考：

### 1. 方法論應用與改進

單點配適法在穩定性與計算效率方面展現出顯著優勢，特別適用於高頻交易或需處理大量樣本的研究場景。建議後續研究可進一步優化單點配適法的演算法結構，提升其在極端市場情境下的適應性。

### 2. 擴展研究範疇

本研究聚焦於比特幣選擇權市場，未來可將研究範圍擴展至其他加密貨幣或傳統金融市場，檢視單點配適法與雙點配適法在不同市場結構中的適用性與表現差異。例如，以太幣 (Ethereum) 選擇權為研究對象，或分析股指選擇權市場，探索 RND 統計特徵在不同市場中的預測能力。

### 3. 結合市場微觀結構因子

本研究主要聚焦於選擇權價格的隱含資訊，未來研究可進一步納入市場微觀結構因子（如交易量、買賣價差等），分析其對 RND 統計特徵的影響。特別是在高波動性的加密貨幣市場中，微觀結構因子可能對市場預期與價格形成機制具有重要作用。



## 附錄

附表 1：距到期日 1 日之 RND 三變數迴歸分析結果（單點配適法）

	Skewness_Coef	Skewness_p	Skewness_Sig	Kurtosis_Coef	Kurtosis_p	Kurtosis_Sig	Variable_Coef	Variable_p	Variable_Sig	R-squared
Mean	0.0844	0.4362		-0.0360	0.7387		-0.0783	0.0263	**	0.0101
Std	0.1232	0.2516		-0.0661	0.5387		-0.0239	0.4914		0.0047
Median	0.1055	0.3262		-0.0439	0.6833		-0.0718	0.0392	**	0.0093
Fear and Greed Index	0.1220	0.2566		-0.0636	0.5538		-0.0068	0.8444		0.0042
VIX	0.1211	0.2600		-0.0631	0.5571		0.0002	0.9961		0.0042
T-1 Return	0.1107	0.3049		-0.0555	0.6060		-0.0333	0.3398		0.0053
T-2 Return	0.1233	0.2513		-0.0643	0.5492		0.0300	0.3866		0.0051
T-3 Return	0.1201	0.2638		-0.0620	0.5641		0.0093	0.7899		0.0043
T-4 Return	0.1229	0.2518		-0.0662	0.5369		0.0610	0.0786	*	0.0079

註：\*表示於 10% 顯著水準下顯著；\*\*表示於 5% 顯著水準下顯著；\*\*\*表示於 1% 顯著水準下顯著

附表 2：距到期日 1 日之 RND 四變數迴歸分析結果（單點配適法）

	Skewness_Coef	Skewness_p	Skewness_Sig	Kurtosis_Coef	Kurtosis_p	Kurtosis_Sig	Std_Coef	Std_p	Std_Sig	Variable_Coef	Variable_p	Variable_Sig	R-squared
Mean	0.0827	0.4478		-0.0343	0.7513		0.0063	0.8655		-0.0807	0.0341	**	0.0101
Median	0.1034	0.3373		-0.0411	0.7034		0.0111	0.7750		-0.0769	0.0496	**	0.0094
Fear and Greed Index	0.1234	0.2515		-0.0661	0.5386		-0.0235	0.5088		-0.0016	0.9644		0.0048
VIX	0.1233	0.2516		-0.0662	0.5383		-0.0240	0.4910		-0.0012	0.9716		0.0048
T-1 Return	0.1127	0.2968		-0.0584	0.5878		-0.0252	0.4691		-0.0343	0.3269		0.0059
T-2 Return	0.1252	0.2442		-0.0671	0.5326		-0.0228	0.5113		0.0292	0.4005		0.0056
T-3 Return	0.1224	0.2552		-0.0651	0.5452		-0.0233	0.5046		0.0072	0.8356		0.0048
T-4 Return	0.1248	0.2451		-0.0688	0.5217		-0.0213	0.5401		0.0600	0.0837	*	0.0083

註：\*表示於 10% 顯著水準下顯著；\*\*表示於 5% 顯著水準下顯著；\*\*\*表示於 1% 顯著水準下顯著

附表 3：依據三變數模型拓展之四變數迴歸分析結果（日報酬單點配適法）

	Skewness_Coef	Skewness_p	Skewness_Sig	Median_Coef	Median_p	Median_Sig	T-4 Return_Coef	T-4 Return_p	T-4 Return_Sig	Variable_Coef	Variable_p	Variable_Sig	R-squared
Mean	0.0177	0.7255		0.1761	0.3957		0.0633	0.0672	*	-0.2567	0.2202		0.0148
Std	0.0637	0.0663	*	-0.0823	0.0342	**	0.0635	0.0670	*	0.0169	0.6627		0.0132
Excess Kurtosis	0.1070	0.3185		-0.0733	0.0350	**	0.0628	0.0697	*	-0.0467	0.6641		0.0132
Fear and Greed Index	0.0612	0.0771	*	-0.0966	0.0209	**	0.0576	0.0998	*	0.0397	0.3479		0.0140
VIX	0.0625	0.0709	*	-0.0830	0.0250	**	0.0610	0.0788	*	-0.0237	0.5215		0.0135
T-1 Return	0.0598	0.0855	*	-0.0736	0.0335	**	0.0628	0.0695	*	-0.0329	0.3433		0.0141
T-2 Return	0.0640	0.0647	*	-0.0751	0.0302	**	0.0618	0.0743	*	0.0293	0.3970		0.0139

T-3 Return	0.0631	0.0684 *	-0.0750	0.0305 **	0.0631	0.0685 *	0.0141	0.6835	0.0132
------------	--------	----------	---------	-----------	--------	----------	--------	--------	--------

註：\*表示於 10% 顯著水準下顯著；\*\*表示於 5% 顯著水準下顯著；\*\*\*表示於 1% 顯著水準下顯著

附表 4：距到期日 1 日之 RND 三變數迴歸分析結果（雙點配適法）

	Skewness_Coef	Skewness_p	Skewness_Sig	Kurtosis_Coef	Kurtosis_p	Kurtosis_Sig	Variable_Coef	Variable_p	Variable_Sig	R-squared
Mean	-0.0310	0.3751		0.0250	0.4717		-0.0730	0.0366	**	0.0067
Std	-0.0214	0.5418		0.0285	0.4133		-0.0157	0.6545		0.0017
Median	-0.0291	0.4034		0.0238	0.4941		-0.0712	0.0412	**	0.0064
Fear and Greed Index	-0.0233	0.5050		0.0283	0.4172		0.0005	0.9896		0.0014
VIX	-0.0232	0.5069		0.0283	0.4177		0.0001	0.9988		0.0014
T-1 Return	-0.0320	0.3677		0.0249	0.4755		-0.0447	0.2081		0.0033
T-2 Return	-0.0219	0.5307		0.0280	0.4209		0.0254	0.4661		0.0021
T-3 Return	-0.0230	0.5092		0.0287	0.4107		0.0102	0.7691		0.0015
T-4 Return	-0.0203	0.5595		0.0281	0.4198		0.0607	0.0809 *		0.0051

註：\*表示於 10% 顯著水準下顯著；\*\*表示於 5% 顯著水準下顯著；\*\*\*表示於 1% 顯著水準下顯著

附表 5：距到期日 1 日之 RND 四變數迴歸分析結果（雙點配適法）

	Skewness_Coef	Skewness_p	Skewness_Sig	Kurtosis_Coef	Kurtosis_p	Kurtosis_Sig	Std_Coef	Std_p	Std_Sig	Variable_Coef	Variable_p	Variable_Sig	R-squared
Mean	-0.0355	0.3182		0.0241	0.4896		0.0269	0.5032		-0.0863	0.0318	**	0.0072
Median	-0.0350	0.3249		0.0220	0.5277		0.0358	0.3963		-0.0914	0.0305	**	0.0073
Fear and Greed Index	-0.0215	0.5402		0.0287	0.4102		-0.0170	0.6400		0.0050	0.8909		0.0017
VIX	-0.0213	0.5460		0.0285	0.4136		-0.0157	0.6542		-0.0008	0.9813		0.0017
T-1 Return	-0.0301	0.3996		0.0251	0.4721		-0.0168	0.6307		-0.0451	0.2040		0.0036
T-2 Return	-0.0201	0.5675		0.0282	0.4175		-0.0153	0.6623		0.0251	0.4703		0.0023
T-3 Return	-0.0213	0.5439		0.0288	0.4084		-0.0148	0.6742		0.0088	0.8023		0.0017
T-4 Return	-0.0186	0.5957		0.0283	0.4165		-0.0147	0.6740		0.0605	0.0823 *		0.0053

註：\*表示於 10% 顯著水準下顯著；\*\*表示於 5% 顯著水準下顯著；\*\*\*表示於 1% 顯著水準下顯著

附表 6：距到期日 7 日之 RND 雙變數迴歸分析結果（單點配適法）

	Skewness_Coef	Skewness_p	Skewness_Sig	Variable_Coef	Variable_p	Variable_Sig	R-squared
Mean	-0.0401	0.6654		-0.1505	0.1066		0.0259
Std	0.0185	0.8601		-0.1636	0.1212		0.0242
Excess Kurtosis	0.0353	0.7822		-0.1390	0.2782		0.0138
Median	-0.0429	0.6430		-0.1502	0.1062		0.0259
Fear and Greed Index	-0.1021	0.3462		0.0803	0.4581		0.0084
VIX	-0.0750	0.4298		-0.0667	0.4830		0.0079
T-1 Return	-0.0538	0.5779		-0.0249	0.7963		0.0043

T-2 Return	-0.0653	0.4901		0.0248	0.7932		0.0043
T-3 Return	-0.0620	0.5077		0.0115	0.9021		0.0038
T-4 Return	-0.0515	0.5811		-0.0789	0.3982		0.0098

註：\*表示於 10% 顯著水準下顯著；\*\*表示於 5% 顯著水準下顯著；\*\*\*表示於 1% 顯著水準下顯著

附表 7：距到期日 7 日之 RND 三變數迴歸分析結果（單點配適法）

	Skewness_Coef	Skewness_p	Skewness_Sig	Kurtosis_Coef	Kurtosis_p	Kurtosis_Sig	Variable_Coef	Variable_p	Variable_Sig	R-squared
Mean	0.0685	0.5935		-0.1555	0.2228		-0.1591	0.0884	*	0.0385
Std	0.0644	0.6194		-0.0822	0.5435		-0.1410	0.2082		0.0273
Median	0.0660	0.6065		-0.1560	0.2212		-0.1591	0.0876	*	0.0386
Fear and Greed Index	-0.0054	0.9709		-0.1264	0.3322		0.0621	0.5716		0.0165
VIX	0.0163	0.9069		-0.1225	0.3708		-0.0355	0.7259		0.0148
T-1 Return	0.0820	0.5680		-0.1766	0.2032		-0.0750	0.4713		0.0182
T-2 Return	0.0312	0.8120		-0.1370	0.2893		0.0150	0.8744		0.0140
T-3 Return	0.0357	0.7840		-0.1393	0.2833		-0.0017	0.9859		0.0138
T-4 Return	0.0552	0.6700		-0.1524	0.2374		-0.0908	0.3330		0.0218

註：\*表示於 10% 顯著水準下顯著；\*\*表示於 5% 顯著水準下顯著；\*\*\*表示於 1% 顯著水準下顯著

附表 8：距到期日 7 日之 RND 四變數迴歸分析結果（單點配適法）

	Skewness_Coef	Skewness_p	Skewness_Sig	Kurtosis_Coef	Kurtosis_p	Kurtosis_Sig	Std_Coef	Std_p	Std_Sig	Variable_Coef	Variable_p	Variable_Sig	R-squared
Mean	0.0648	0.6165		-0.1846	0.2507		0.0612	0.7640		-0.2019	0.2372		0.0392
Median	0.0615	0.6348		-0.1861	0.2477		0.0631	0.7574		-0.2031	0.2339		0.0394
Fear and Greed Index	-0.0131	0.9283		-0.0336	0.8126		-0.1941	0.1101		0.1350	0.2543		0.0384
VIX	0.0427	0.7614		-0.0622	0.6664		-0.1431	0.2038		-0.0413	0.6830		0.0288
T-1 Return	0.1105	0.4462		-0.1196	0.4106		-0.1406	0.2105		-0.0743	0.4741		0.0317
T-2 Return	0.0603	0.6497		-0.0803	0.5561		-0.1410	0.2103		0.0145	0.8779		0.0275
T-3 Return	0.0645	0.6251		-0.0823	0.5478		-0.1410	0.2102		-0.0007	0.9940		0.0273
T-4 Return	0.0841	0.5219		-0.0957	0.4819		-0.1407	0.2094		-0.0904	0.3338		0.0353

註：\*表示於 10% 顯著水準下顯著；\*\*表示於 5% 顯著水準下顯著；\*\*\*表示於 1% 顯著水準下顯著

附表 9：距到期日 7 日之 RND 雙變數迴歸分析結果（雙點配適法）

	Skewness_Coef	Skewness_p	Skewness_Sig	Variable_Coef	Variable_p	Variable_Sig	R-squared
Mean	-0.0401	0.6654		-0.1505	0.1066		0.0259
Std	0.0185	0.8601		-0.1636	0.1212		0.0242
Excess Kurtosis	0.0353	0.7822		-0.1390	0.2782		0.0138
Median	-0.0429	0.6430		-0.1502	0.1062		0.0259

Fear and Greed Index	-0.1021	0.3462		0.0803	0.4581		0.0084
VIX	-0.0750	0.4298		-0.0667	0.4830		0.0079
T-1 Return	-0.0538	0.5779		-0.0249	0.7963		0.0043
T-2 Return	-0.0653	0.4901		0.0248	0.7932		0.0043
T-3 Return	-0.0620	0.5077		0.0115	0.9021		0.0038
T-4 Return	-0.0515	0.5811		-0.0789	0.3982		0.0098

註：\*表示於 10% 顯著水準下顯著；\*\*表示於 5% 顯著水準下顯著；\*\*\*表示於 1% 顯著水準下顯著

附表 10：距到期日 7 日之 RND 三變數迴歸分析結果（雙點配適法）

	Skewness_Coef	Skewness_p	Skewness_Sig	Kurtosis_Coef	Kurtosis_p	Kurtosis_Sig	Variable_Coef	Variable_p	Variable_Sig	R-squared
Mean	0.0685	0.5935		-0.1555	0.2228		-0.1591	0.0884	*	0.0385
Std	0.0644	0.6194		-0.0822	0.5435		-0.1410	0.2082		0.0273
Median	0.0660	0.6065		-0.1560	0.2212		-0.1591	0.0876	*	0.0386
Fear and Greed Index	-0.0054	0.9709		-0.1264	0.3322		0.0621	0.5716		0.0165
VIX	0.0163	0.9069		-0.1225	0.3708		-0.0355	0.7259		0.0148
T-1 Return	0.0820	0.5680		-0.1766	0.2032		-0.0750	0.4713		0.0182
T-2 Return	0.0312	0.8120		-0.1370	0.2893		0.0150	0.8744		0.0140
T-3 Return	0.0357	0.7840		-0.1393	0.2833		-0.0017	0.9859		0.0138
T-4 Return	0.0552	0.6700		-0.1524	0.2374		-0.0908	0.3330		0.0218

註：\*表示於 10% 顯著水準下顯著；\*\*表示於 5% 顯著水準下顯著；\*\*\*表示於 1% 顯著水準下顯著

附表 11：距到期日 7 日之 RND 四變數迴歸分析結果（雙點配適法）

	Skewness_Coef	Skewness_p	Skewness_Sig	Kurtosis_Coef	Kurtosis_p	Kurtosis_Sig	Std_Coef	Std_p	Std_Sig	Variable_Coef	Variable_p	Variable_Sig	R-squared
Mean	0.0648	0.6165		-0.1846	0.2507		0.0612	0.7640		-0.2019	0.2372		0.0392
Median	0.0615	0.6348		-0.1861	0.2477		0.0631	0.7574		-0.2031	0.2339		0.0394
Fear and Greed Index	-0.0131	0.9283		-0.0336	0.8126		-0.1941	0.1101		0.1350	0.2543		0.0384
VIX	0.0427	0.7614		-0.0622	0.6664		-0.1431	0.2038		-0.0413	0.6830		0.0288
T-1 Return	0.1105	0.4462		-0.1196	0.4106		-0.1406	0.2105		-0.0743	0.4741		0.0317
T-2 Return	0.0603	0.6497		-0.0803	0.5561		-0.1410	0.2103		0.0145	0.8779		0.0275
T-3 Return	0.0645	0.6251		-0.0823	0.5478		-0.1410	0.2102		-0.0007	0.9940		0.0273
T-4 Return	0.0841	0.5219		-0.0957	0.4819		-0.1407	0.2094		-0.0904	0.3338		0.0353

註：\*表示於 10% 顯著水準下顯著；\*\*表示於 5% 顯著水準下顯著；\*\*\*表示於 1% 顯著水準下顯著

## 參考文獻

- Akyildirim, E., Corbet, S., Lucey, B., Sensoy, A., & Yarovaya, L. (2020). The relationship between implied volatility and cryptocurrency returns. *Finance Research Letters*, 33, 101212. <https://doi.org/10.1016/j.frl.2019.06.010>
- Amaya, D., Christoffersen, P., Jacobs, K., & Vasquez, A. (2015). Does realized skewness predict the cross-section of equity returns? *Journal of Financial Economics*, 118(1), 135–167. <https://doi.org/10.1016/j.jfineco.2015.02.009>
- Ammann, M., & Feser, A. (2019). Robust estimation of risk-neutral moments. *Journal of Futures Markets*, 39(9), 1137–1166. <https://doi.org/10.1002/fut.22020>
- Bakshi, G., Kapadia, N., & Madan, D. (2003). Stock Return Characteristics, Skew Laws, and the Differential Pricing of Individual Equity Options. *The Review of Financial Studies*, 16(1), 101–143. <https://doi.org/10.1093/rfs/16.1.0101>
- Bali, T. G., & Murray, S. (2013). Does Risk-Neutral Skewness Predict the Cross Section of Equity Option Portfolio Returns? *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 48(4), 1145–1171.
- Bali, T. G., & Zhou, H. (2016). Risk, Uncertainty, and Expected Returns. *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 51(3), 707–735.
- Balkema, A. A., & Haan, L. de. (1974). Residual Life Time at Great Age. *The Annals of Probability*, 2(5), 792–804. <https://doi.org/10.1214/aop/1176996548>
- Baur, D. G., & Smales, L. A. (2022). Trading behavior in bitcoin futures: Following the “smart money.” *Journal of Futures Markets*, 42(7), 1304–1323. <https://doi.org/10.1002/fut.22332>
- Birru, J., & Figlewski, S. (2012). Anatomy of a meltdown: The risk neutral density for the S&P 500 in the fall of 2008. *Journal of Financial Markets*, 15(2), 151–180. <https://doi.org/10.1016/j.finmar.2011.09.001>
- Black, F., & Scholes, M. (1973). The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *Journal of Political Economy*, 81(3), 637–654.
- Böök, A., Imbet, J. F., Reinke, M., & Sala, C. (2025). The Forecasting Power of Short-Term Options. *The Journal of Derivatives*, 32(3), 80–116. <https://doi.org/10.3905/jod.2025.1.221>
- Breeden, D. T., & Litzenberger, R. H. (1978). Prices of State-Contingent Claims Implicit in Option Prices. *The Journal of Business*, 51(4), 621–651.

- Campbell, J. Y., & Thompson, S. B. (2008). Predicting Excess Stock Returns Out of Sample: Can Anything Beat the Historical Average? *The Review of Financial Studies*, 21(4), 1509–1531. <https://doi.org/10.1093/rfs/hhm055>
- Chang, B. Y., Christoffersen, P., & Jacobs, K. (2013). Market skewness risk and the cross section of stock returns. *Journal of Financial Economics*, 107(1), 46–68. <https://doi.org/10.1016/j.jfineco.2012.07.002>
- Chen, R.-R., Hsieh, P., & Huang, J. (2018). Crash risk and risk neutral densities. *Journal of Empirical Finance*, 47, 162–189. <https://doi.org/10.1016/j.jempfin.2018.03.006>
- Chordia, T., Lin, T.-C., & Xiang, V. (2021). Risk-Neutral Skewness, Informed Trading, and the Cross Section of Stock Returns. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 56(5), 1713–1737. <https://doi.org/10.1017/S0022109020000551>
- Christoffersen, P., Jacobs, K., & Chang, B. Y. (2013). Chapter 10—Forecasting with Option-Implied Information. In G. Elliott & A. Timmermann (Eds.), *Handbook of Economic Forecasting* (Vol. 2, pp. 581–656). Elsevier. <https://doi.org/10.1016/B978-0-444-53683-9.00010-4>
- Conrad, J., Dittmar, R. F., & Ghysels, E. (2013). Ex Ante Skewness and Expected Stock Returns. *The Journal of Finance*, 68(1), 85–124. <https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.2012.01795.x>
- Cortés, L. M., Mora-Valencia, A., & Perote, J. (2020). Retrieving the implicit risk neutral density of WTI options with a semi-nonparametric approach. *The North American Journal of Economics and Finance*, 54, 100862. <https://doi.org/10.1016/j.najef.2018.10.010>
- Cujean, J., & Hasler, M. (2017). Why Does Return Predictability Concentrate in Bad Times? *The Journal of Finance*, 72(6), 2717–2758. <https://doi.org/10.1111/jofi.12544>
- Deribit. (2025). <https://www.deribit.com/>
- Deribit Options. (2025). <https://www.deribit.com/>
- Dong, B., Xu, W., & Cui, Z. (2024). Implied Willow Tree. *The Journal of Derivatives*, 31(4), 44–74. <https://doi.org/10.3905/jod.2024.1.200>
- Feng, Y., He, M., & Zhang, Y. (2024). Market Skewness and Stock Return Predictability: New Evidence from China. *Emerging Markets Finance and Trade*, 60(2), 233–244. <https://doi.org/10.1080/1540496X.2023.2217327>

- Figlewski, S. (2008). *Estimating the Implied Risk Neutral Density for the U.S. Market Portfolio* (SSRN Scholarly Paper No. 1256783). Social Science Research Network. <https://papers.ssrn.com/abstract=1256783>
- Fuertes, A.-M., Liu, Z., & Tang, W. (2022). Risk-neutral skewness and commodity futures pricing. *Journal of Futures Markets*, 42(4), 751–785. <https://doi.org/10.1002/fut.22308>
- Gu, S., Kelly, B., & Xiu, D. (2020). Empirical Asset Pricing via Machine Learning. *The Review of Financial Studies*, 33(5), 2223–2273. <https://doi.org/10.1093/rfs/hhaa009>
- Hayashi, F. (2020). Analytically Deriving Risk-Neutral Densities from Volatility Smiles in Delta. *The Journal of Derivatives*, 27(4), 6–12. <https://doi.org/10.3905/jod.2020.1.099>
- He, M., Shen, L., Zhang, Y., & Zhang, Y. (2023). Predicting cryptocurrency returns for real-world investments: A daily updated and accessible predictor. *Finance Research Letters*, 58, 104406. <https://doi.org/10.1016/j.frl.2023.104406>
- He, Y., Peng, L., Zhang, D., & Zhao, Z. (2022). Risk Analysis via Generalized Pareto Distributions. *Journal of Business & Economic Statistics*, 40(2), 852–867. <https://doi.org/10.1080/07350015.2021.1874390>
- Hosking, J. R. M., & Wallis, J. R. (1987). Parameter and Quantile Estimation for the Generalized Pareto Distribution. *Technometrics*, 29(3), 339–349. <https://doi.org/10.2307/1269343>
- Jackwerth, J. (2020). What Do Index Options Teach Us About COVID-19? *The Review of Asset Pricing Studies*, 10(4), 618–634. <https://doi.org/10.1093/rapstu/raaa012>
- Jondeau, E., Wang, X., Yan, Z., & Zhang, Q. (2020). Skewness and index futures return. *Journal of Futures Markets*, 40(11), 1648–1664. <https://doi.org/10.1002/fut.22112>
- Kim, T. S., & Park, H. (2018). Is stock return predictability of option-implied skewness affected by the market state? *Journal of Futures Markets*, 38(9), 1024–1042. <https://doi.org/10.1002/fut.21921>
- Köse, N., Yildirim, H., Ünal, E., & Lin, B. (2024). The Bitcoin price and Bitcoin price uncertainty: Evidence of Bitcoin price volatility. *Journal of Futures Markets*, 44(4), 673–695. <https://doi.org/10.1002/fut.22487>

- Lehnert, T. (2022). Is Risk-Neutral Skewness an Indicator of Downside Risk? Evidence from Tail Risk Taking of Hedge Funds. *The Journal of Derivatives*, 29(3), 65–84. <https://doi.org/10.3905/jod.2022.1.148>
- Li, X., Wu, Z., Zhang, H., & Zhang, L. (2024). Risk-neutral skewness and stock market returns: A time-series analysis. *The North American Journal of Economics and Finance*, 70, 102040. <https://doi.org/10.1016/j.najef.2023.102040>
- Li, Y., Urquhart, A., Wang, P., & Zhang, W. (2021). MAX momentum in cryptocurrency markets. *International Review of Financial Analysis*, 77, 101829. <https://doi.org/10.1016/j.irfa.2021.101829>
- Liu, Y., & Chen, Y. (2024). Skewness risk and the cross-section of cryptocurrency returns. *International Review of Financial Analysis*, 96, 103626. <https://doi.org/10.1016/j.irfa.2024.103626>
- Liu, Y., Li, Z., Nekhili, R., & Sultan, J. (2023). Forecasting cryptocurrency returns with machine learning. *Research in International Business and Finance*, 64, 101905. <https://doi.org/10.1016/j.ribaf.2023.101905>
- Liu, Y., & Tsyvinski, A. (2021). Risks and Returns of Cryptocurrency. *The Review of Financial Studies*, 34(6), 2689–2727. <https://doi.org/10.1093/rfs/hhaa113>
- López-Cabarcos, M. Á., Pérez-Pico, A. M., Piñeiro-Chousa, J., & Šević, A. (2021). Bitcoin volatility, stock market and investor sentiment. Are they connected? *Finance Research Letters*, 38, 101399. <https://doi.org/10.1016/j.frl.2019.101399>
- McNeil, A. J., & Frey, R. (2000). Estimation of tail-related risk measures for heteroscedastic financial time series: An extreme value approach. *Journal of Empirical Finance*, 7(3), 271–300. [https://doi.org/10.1016/S0927-5398\(00\)00012-8](https://doi.org/10.1016/S0927-5398(00)00012-8)
- Mei, D., Liu, J., Ma, F., & Chen, W. (2017). Forecasting stock market volatility: Do realized skewness and kurtosis help? *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, 481, 153–159. <https://doi.org/10.1016/j.physa.2017.04.020>
- Mohrschladt, H., & Schneider, J. C. (2021). Option-implied skewness: Insights from ITM-options. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 131, 104227. <https://doi.org/10.1016/j.jedc.2021.104227>
- Neumann, M., & Skiadopoulos, G. (2013). Predictable Dynamics in Higher-Order Risk-Neutral Moments: Evidence from the S&P 500 Options. *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 48(3), 947–977.



- Orosi, G. (2015). Estimating Option-Implied Risk-Neutral Densities: A Novel Parametric Approach. *The Journal of Derivatives*, 23(1), 41–61.  
<https://doi.org/10.3905/jod.2015.23.1.041>
- Shimko, D. (1993). Bounds of probability. *Risk*, 6(4), 33–37.
- The Block*. (2025). The Block. <https://www.theblock.co/data/crypto-markets/options>
- Uberti, P. (2023). A theoretical generalization of the Markowitz model incorporating skewness and kurtosis. *Quantitative Finance*, 23(5), 877–886.  
<https://doi.org/10.1080/14697688.2023.2176250>
- Wang, Y.-H., & Yen, K.-C. (2018). The information content of option-implied tail risk on the future returns of the underlying asset. *Journal of Futures Markets*, 38(4), 493–510. <https://doi.org/10.1002/fut.21887>
- Welch, I., & Goyal, A. (2008). A Comprehensive Look at The Empirical Performance of Equity Premium Prediction. *The Review of Financial Studies*, 21(4), 1455–1508.  
<https://doi.org/10.1093/rfs/hhm014>
- Zulfiqar, N., & Gulzar, S. (2021). Implied volatility estimation of bitcoin options and the stylized facts of option pricing. *Financial Innovation*, 7(1), 67.  
<https://doi.org/10.1186/s40854-021-00280-y>