



國立臺灣科技大學
財務金融研究所碩士班
碩士學位論文

學號：M11218014

XXXX

研 究 生：王士誠

指導教授：薛博今 博士

繆維中 博士

中 華 民 國 一 一 四 年 六 月

摘要

Abstract

誌謝

目錄

圖目錄

表目錄

第一章、緒論

第二章、文獻探討

第三章、資料來源

3.1 資料來源

本研究之樣本採用 Deribit 交易所¹提供之比特幣歐式現金結算選擇權歷史交易數據，包含每日交易量、收盤價、隱含波動率、現貨價及期貨價，期間涵蓋 2020 年 1 月至 2024 年 4 月。

依據資訊服務公司 The Block 公司公布之數據統計²，於全球加密貨幣選擇權市場中，Deribit 交易所之比特幣選擇權交易量為三大平台－Deribit、OKX 及 Binance 中占比最大，且未平倉量占市場總量 80% 以上（如圖 3-1）。

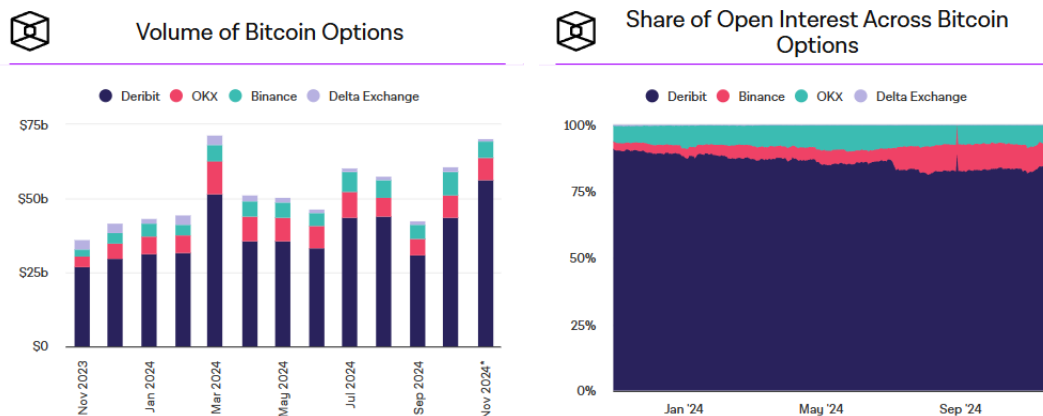


圖 3-1：比特幣選擇權市場交易量與未平倉量數據統計

（資料來源：The Block 官方網站）

Deribit 交易所成立於 2016 年，總部位於荷蘭，名字由「Derivatives」與「Bitcoin」組合而成，為最早推出加密貨幣選擇權商品的交易所，因具備高流動性和深度，Deribit 已成為全球最大的比特幣選擇權交易平台。其提供之比特幣歐式現金結算選擇權合約全天候皆可交易³，到期日為每天 08:00 (UTC+0)，並具有 1 日、2 日、

¹ Deribit 交易所官方網站：<https://www.deribit.com/>

² 資料來源：<https://www.theblock.co/data/crypto-markets/options>

³ Deribit 選擇權合約說明：<https://www.deribit.com/kb/options>

3 日、1 週、2 週、3 週後，以及每月月底（1、2、4、5、7、8、10、11 月）與季度（3、6、9、12 月）合約。

3.2 比特幣選擇權交易市場概況

本研究將透過比特幣選擇權歷史交易數據進行實證分析，探討選擇權市場中的隱含波動率與市場預期價格變動之關聯性，並計算風險中立機率密度函數（Risk Neutral Density），分析其於不同市場氛圍下之變化。

本研究透過對 Deribit 交易所數據進行分析，呈現圖 3-2 中買權與賣權的月交易量變化。如圖所示，自 2020 年 10 月起，選擇權交易量顯著增長，此趨勢歸因於 2020 年 10 月之前，Deribit 僅提供年度合約，而後增設了每日、每週及每季度到期之商品，從而推動交易量快速上升；至 2023 年 9 月，交易量再次大幅增長，主因為受到比特幣現貨價格大幅上漲之影響，買權交易量更於 2024 年 2 月達到歷史新高，顯示出市場對比特幣價格上漲之強烈預期。整段期間內，交易量存在明顯波動，反映了市場活躍度的變化，尤其在比特幣價格劇烈波動時更為明顯。自 2023 下半年開始，交易量明顯上升，顯示出比特幣選擇權交易市場流動性與深度之增強。

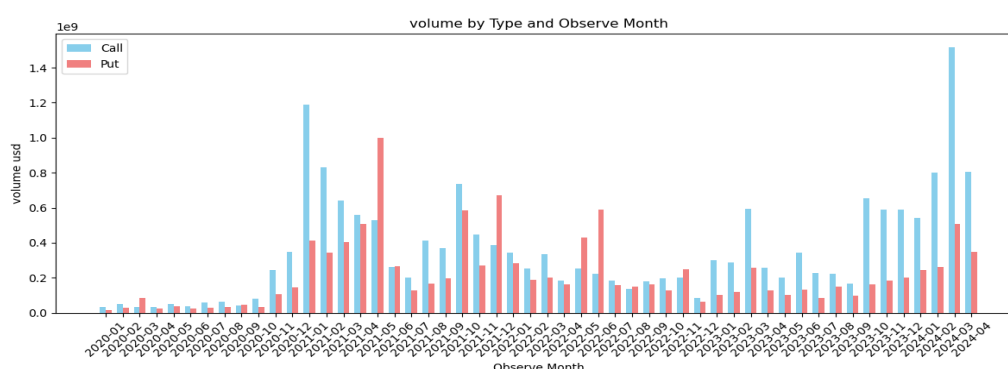


圖 3-2：2020 年 1 月至 2024 年 4 月比特幣選擇權買權、賣權每月交易量

第四章、研究方法

4.1 以理論計算風險中立機率密度之方法

下文中，符號 C 、 P 、 S 、 K 、及 T 均代表選擇權標準意義： C 為買權價格、 P 為賣權價格、 S 為標的資產現價、 K 為履約價格、 r 為無風險利率、 T 為選擇權距到期日天數，本研究也將使用 $f(K)$ 表示為風險中立機率密度函數（Risk Neutral Probability Density Function, RND）和 $F(K) = \int_{-\infty}^K f(z)dz$ 表示為風險中立機率累積分布函數（Risk Neutral Distribution Function）。

買權價格是其在到期日天數 T 前之收益預期，折現回當前之價值。於風險中立之情形下，該預期價格則可基於風險中立機率計算，並以無風險利率進行折現，公式如下：

$$C = \int_K^{\infty} e^{-rT} (S_T - K) f(S_T) dS_T \quad (1)$$

接著將買權價格 C 對履約價格 K 進行一次偏微分，可導出風險中立分布函數 $F(K)$ ，公式如下：

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial K} &= \frac{\partial}{\partial K} \left[\int_K^{\infty} e^{-rT} (S_T - K) f(S_T) dS_T \right] \\ &= e^{-rT} \left[-(K - K) f(K) + \int_K^{\infty} -f(S_T) dS_T \right] \\ &= -e^{-rT} \int_K^{\infty} f(S_T) dS_T \\ &= -e^{-rT} [1 - F(K)] \end{aligned}$$

移項可得風險中立分布函數 $F(K)$ 為：

$$F(K) = e^{rT} \frac{\partial C}{\partial K} + 1 \quad (2)$$

接著對公式(2)中之履約價格 K 再次進行偏微分，可導出於履約價格 K 處之 RND：

$$f(K) = \frac{\partial}{\partial K} \left[e^{rT} \frac{\partial C}{\partial K} + 1 \right] = e^{rT} \frac{\partial^2 C}{\partial K^2} \quad (3)$$

於實際選擇權交易市場，由於履約價格為離散形式，因此可利用觀察到之選擇權價格，透過有限差分法（Finite Difference Methods, FDM）求得公式(2)與公式(3)之近似解。假設距到期日 T 時，市場上有 N 個不同履約價格的選擇權，其中 K_1 代表最低履約價格， K_N 代表最高履約價格。我們將使用履約價格分別為 K_{n-1} 、 K_n 和 K_{n+1} 的三個選擇權，來求得以 K_n 為中心之的近似值，公式如下：

$$F(K_n) \approx e^{rT} \left[\frac{C_{n+1} - C_{n-1}}{X_{n+1} - X_{n-1}} \right] + 1 \quad (4)$$

$$f(K_n) \approx e^{rT} \frac{C_{n+1} - 2C_n + C_{n-1}}{(\Delta X)^2} \quad (5)$$

公式(1)至(5)說明了如何以理論方式從一組買權價格 C 中推導出介於履約價格 K_2 和 K_{N-1} 間之 RND。類似的推導方式亦可應用於從賣權價格 P 中計算 RND，對於賣權而言，與公式(2)至(5)對應之等價表達式如下：

$$F(K) = e^{rT} \frac{\partial P}{\partial K} \quad (6)$$

$$f(K) = e^{rT} \frac{\partial^2 P}{\partial K^2} \quad (7)$$

$$F(K_n) \approx e^{rT} \left[\frac{P_{n+1} - P_{n-1}}{X_{n+1} - X_{n-1}} \right] \quad (8)$$

$$f(K_n) \approx e^{rT} \frac{P_{n+1} - 2P_n + P_{n-1}}{(\Delta X)^2} \quad (9)$$

於本研究中， ΔX 為一固定之常數值，用以建構等距分布之人工選擇權價格，以填補市場中離散履約價格間之空缺值。此處理方式可解決交易數據稀疏或不均之問題，並確保履約價格之間距一致，便於透過有限差分法進行數值計算，提高估算結果之準確性。

4.2 以實務計算風險中立機率密度之方法

前一節所介紹的方法假設存在一組選擇權價格，且這些價格完全符合理論定價關係（公式(1)）。然而，當將其應用於實際市場中交易的選擇權價格時，會面臨幾個重要的問題與挑戰。首先，必須謹慎處理觀察到的選擇權價格中的市場缺陷，否則可能導致推導出的 RND 出現無法接受的特性，例如 RND 在某些區域出現負值。其次，需找到適當的方法來補全 RND 在 K_2 到 K_{N-1} 範圍之外的尾部。本節將介紹本研究與回顧文獻中提出之從市場選擇權價格中計算 RND 的方法，並說明我們在此採用的技術。

在傳統金融市場中，選擇權定價模型（如 Black-Scholes 模型）通常使用無風險利率作為參數，該利率一般由政府債券等低風險資產的收益率代表。然而，在比特幣等加密貨幣市場中，無風險利率的適用性受到限制，因此不被廣泛使用。其因為，比特幣市場缺乏統一的無風險資產。由於加密貨幣市場的去中心化特性，並無政府債券此類被廣泛接受之無風險資產，難以確定單一通用之無風險利率，使無風險利率在此市場中難以適用；並且，比特幣價格之波動率遠高於傳統資產。波動劇烈之特性對於選擇權價格的影響較無風險利率更為顯著，因此交易者更關注隱含波動率的變化，而非無風險利率；其次，在加密貨幣市場中，利率環境可能受到交易所規則與市場供需的影響，並不一定與傳統的無風險利率相關，傳統的利率指標難以反映加密貨幣市場的實際情形；此外，持有比特幣的成本與持有傳統貨幣或資產的成本不同，包括安全性面向和技術風險等因素，這些成本難以透過無風險利率量化，進一步限制了無風險利率在比特幣選擇權定價中的適用性。

本研究採用 Deribit 交易所之比特幣選擇權交易價格，其為適應加密貨幣市場的特性，計算選擇權價格時採用了更合適的模型（以比特幣計價），符合交易市場使用需求。為符合研究所需，本研究觀察傳統 Black-Scholes 模型（公式(10)），並與 Deribit 交易所提供之計算公式（公式(11)）比較可知，將 Deribit 交易所報價 $C_{Deribit}$ 乘上比特幣現貨價格 S_0 即可得到以美元計價之比特幣選擇權價格。

$$\begin{aligned}
C_{BS} &= S_0 \times N(d_1) - Ke^{-rT} \times N(d_2) \\
\Rightarrow C_{BS} &= S_0 \times \left[N(d_1) - \frac{Ke^{-rT}}{S_0} \times N(d_2) \right] \text{ and } F = S_0 e^{rT} \\
\Rightarrow \frac{C_{BS}}{S_0} &= N(d_1) - \frac{K}{F} \times N(d_2)
\end{aligned} \tag{10}$$

$$C_{Deribit} = N(d_1) - \frac{K}{F} \times N(d_2) \tag{11}$$

$$\begin{aligned}
\text{where } d_1 &= \frac{\ln\left(\frac{F}{K}\right) + \left(\frac{\sigma^2}{2}\right) \times T}{\sigma \times \sqrt{T}} \\
d_2 &= d_1 - \sigma \times \sqrt{T}
\end{aligned}$$

其中， C_{BS} 為 Black-Scholes 買權價格（以美元計價）、 $C_{Deribit}$ 為 Deribit 交易所比特幣買權價格（以比特幣計價）、 S_0 為比特幣現貨價格、 $N(x)$ ：常態分布的累積分布函數、 K 為履約價格、 r 為無風險利率、 T 為選擇權有效期、 F 為比特幣期貨價格、 \ln 為自然對數、 σ 為年化標準差。

在比特幣選擇權市場中，交易者多為風險偏好者，傾向操作價外選擇權（Out-of-the-Money, OTM options），主因為成本較低、槓桿效益高，以及對波動率的敏感性特別強。對於買方來說，由於比特幣市場本身波動性極高，這類選擇權對投機者及高風險偏好的投資人極具吸引力，儘管其到期變為無價值的機率較高，交易者仍

願意承擔這樣的風險；對於賣方而言，由於比特幣價格波動性顯著高於傳統金融市場，價外選擇權的權利金水準通常更高，進一步提升了賣方參與的誘因，使價外選擇權成為許多賣方用來創造穩定現金流的核心工具。綜上所述，價外選擇權具較佳之成交量與流動性，其價格可更有效率地反映市場氛圍，本研究將採用價外選擇權交易資料進行隱含波動率之計算，惟深度價外區間，為避免不合理之交易造成異常，將排除履約價格 10 美元以下之選擇權數據。

David Shimko (1993) 提出將市場選擇權價格轉換至隱含波動率（Implied Volatility, IV）後進行插值（Interpolation），因為隱含波動率曲線通常比價格數據更平滑且連續，適合進行插值與平滑處理，再將插值後的曲線重新轉換回買權價格，以計算 RND。此方法並不依賴選擇權價格符合 Black-Scholes 模型條件假設，而是僅將 Black-Scholes 公式作為一種計算工具，用來將數據轉換至更適合進行平滑處理的樣態。

Figlewski (2008) 提出的方法旨在解決價平附近選擇權隱含波動率數據的異常波動問題，尤其是買權與賣權價格在價平附近的跳躍現象，這種跳躍可能導致隱含波動率曲線不平滑，進而影響 RND 計算結果之穩定性。本研究參考其方法，若履約價格位於期貨價格之 0.9 到 1.1 倍間，則取其買賣權隱含波動率之平均作為數據點。公式如下：

$$IV_{mix}(K) = 0.5 \times IV_{call}(K) + 0.5 \times IV_{put}(K)$$

$$K \in [0.9 \times F, 1.1 \times F]$$

圖 4-1 呈現比特幣選擇權隱含波動率與履約價格之關係，顯示市場對價外選擇權具有較高偏好。同時，在價平附近可觀察到隱含波動率存在顯著的跳動現象。為減少價平位置隱含波動率之劇烈波動，本研究針對位於期貨價格 0.9 倍至 1.1 倍區間內之數據，將買權與賣權之隱含波動率取平均值，作為後續平滑處理的基礎數據。如圖 4-2 所示，綠色標記點代表平均後之隱含波動率，此方法能有效降低價平附近

買賣權隱含波動率之波動幅度。對於超出此區間之數據，則直接採用價外選擇權之隱含波動率數據。經上述處理後，最終建構之隱含波動率數據如圖 4-3 所示。

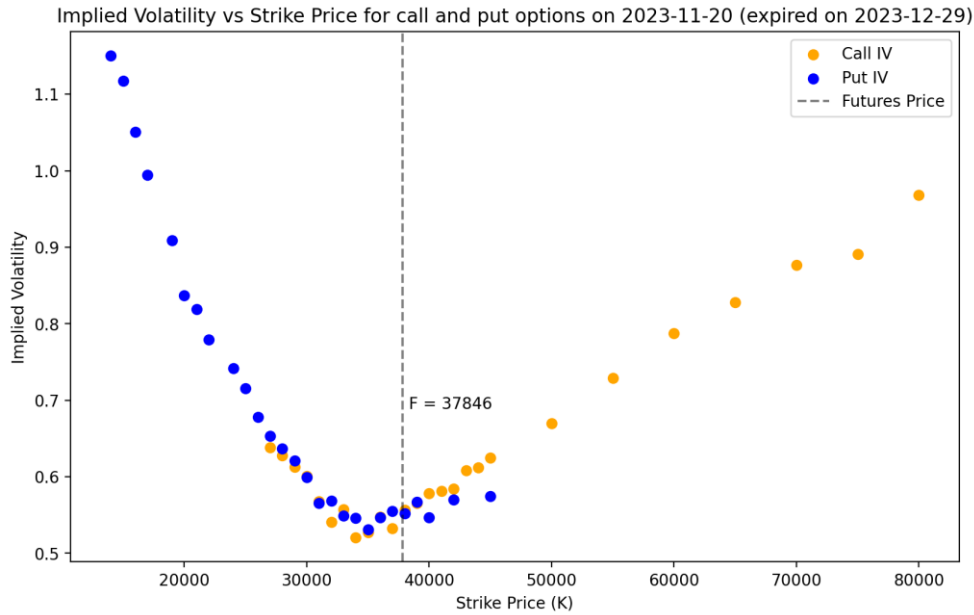


圖 4-1：2023 年 11 月 20 日比特幣選擇權隱含波動率分布圖（2023 年 12 月 29 日到期）

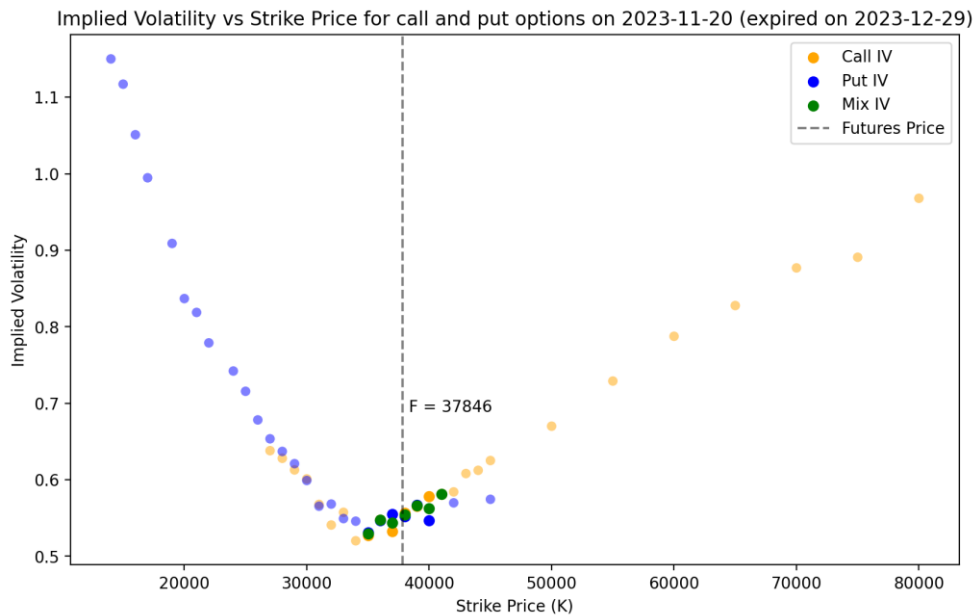


圖 4-2：2023 年 11 月 20 日比特幣選擇權隱含波動率分布圖（2023 年 12 月 29 日到期）

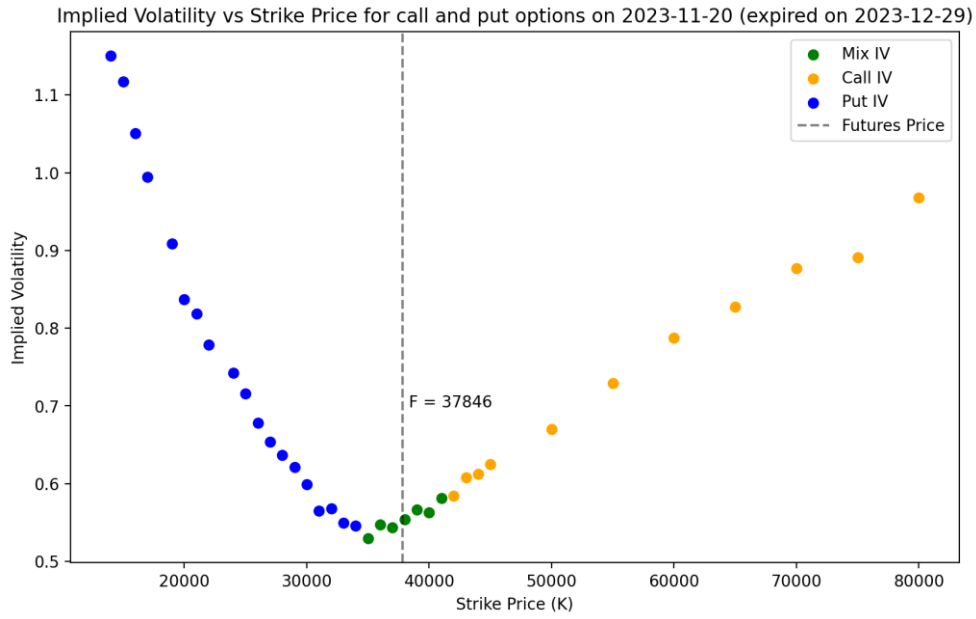


圖 4-3：2023 年 11 月 20 日比特幣選擇權隱含波動率分布圖（2023 年 12 月 29 日到期）

為了對處理後的隱含波動率數據進行更精確的擬合，本研究採用四階樣條函數（4th Spline）搭配單一節點（one knot）進行曲線擬合。節點（knot）設置於期貨價格處，此設計能在保持整體曲線連續性的同時，允許曲線在此關鍵位置具有更大的靈活度。採用四階樣條函數確保擬合曲線具有三階連續可導性（ C^3 continuity），不僅能有效捕捉隱含波動率曲線的細微變化，同時也避免過度擬合（over-fitting）的問題。

四階樣條函數的數學表示如下：

$$S(x) = \begin{cases} \sum_{i=0}^4 a_i (x - x_0)^i, & x < k \\ \sum_{i=0}^4 b_i (x - x_0)^i, & x \geq k \end{cases}$$

其中， k 為節點位置（即期貨價格）， x_0 為參考點， a_i 與 b_i 為待定係數。在節點處，函數需滿足以下連續性條件：

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=0}^4 a_i(k-x_0)^i = \sum_{i=0}^4 b_i(k-x_0)^i \\ \sum_{i=1}^4 i a_i(k-x_0)^{i-1} = \sum_{i=1}^4 i b_i(k-x_0)^{i-1} \\ \sum_{i=2}^4 i(i-1)a_i(k-x_0)^{i-2} = \sum_{i=2}^4 i(i-1)b_i(k-x_0)^{i-2} \\ \sum_{i=3}^4 i(i-1)(i-2)a_i(k-x_0)^{i-3} = \sum_{i=3}^4 i(i-1)(i-2)b_i(k-x_0)^{i-3} \end{array} \right.$$

這些條件分別確保了函數值及其一階、二階和三階導數在節點處的連續性。

將唯一節點設置於期貨價格處具有重要的經濟意義，因為此位置通常對應於價平選擇權（At-the-money options）。此節點的設置將曲線分為兩個區段，分別對應期貨價格以上與以下的區域，使得擬合曲線能更準確地反映價平附近的波動率特徵。這種分段擬合的方法特別適合處理選擇權隱含波動率在價平位置前後可能出現的不對稱特徵。

在實作層面，本研究運用 Python 的 SciPy 套件中的 LSQUnivariateSpline 方法進行曲線擬合。此方法採用最小平方法（Least Squares）進行參數估計，能有效處理非均勻分布的數據點，並通過指定的內部節點（internal knots）實現分段擬合。透過最小平方法與節點設置的結合，LSQUnivariateSpline 提供了一種靈活且穩定的數學工具，能夠在不均勻分布的數據中擬合出平滑且準確的隱含波動率曲線（如圖 4-4），為後續的風險中立密度函數（RND）計算提供了堅實的基礎。最小平方法公式如下：

$$\min_{\{a_i\}, \{b_i\}} \sum_{j=1}^n [y_j - S(x_j)]^2$$

其中， y_j 為實際觀測值， $S(x_j)$ 為樣條函數在 x_j 處之觀測值， $\{a_i\}, \{b_i\}$ 為樣條函數之待估參數集合， n 為數據點總數。

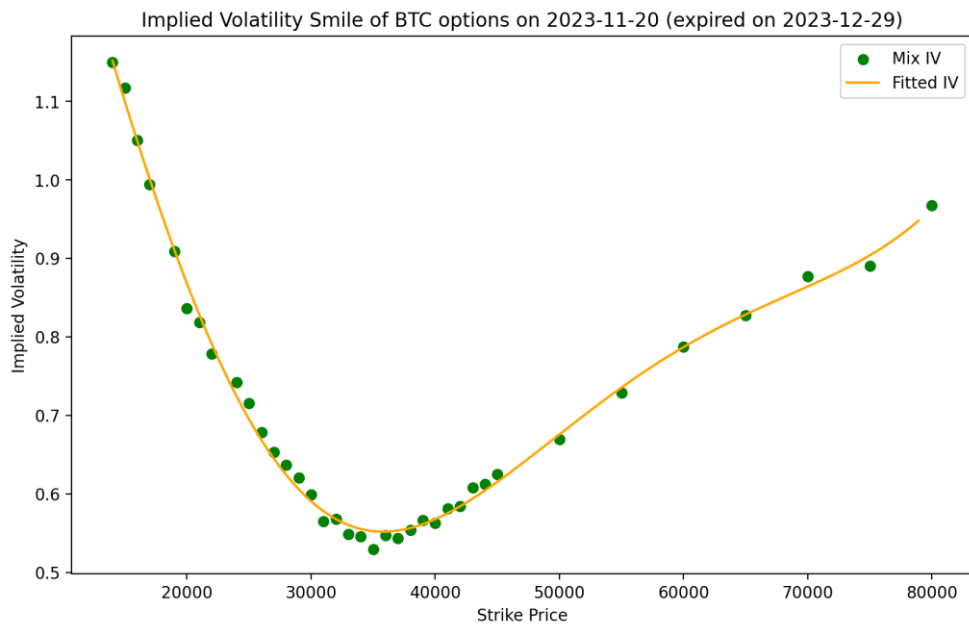


圖 4-4：2023 年 11 月 20 日比特幣選擇權隱含波動率擬合曲線（2023 年 12 月 29 日到期）

完成隱含波動率曲線的擬合後，將接續計算風險中立機率密度。首先，本研究使用擬合後的隱含波動率曲線，結合 Deribit 交易所採用的定價模型（公式(11)），計算不同履約價格下的理論買權價格，計算結果如圖 4-5。

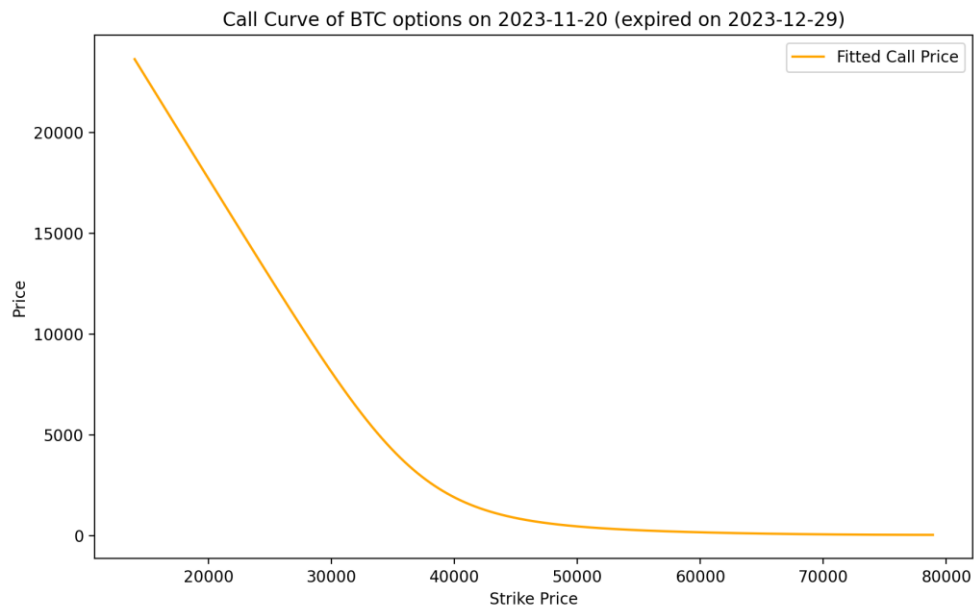


圖 4-5：2023 年 11 月 20 日比特幣選擇權理論買權價格（2023 年 12 月 29 日到期）

取得理論買權價格後，本研究採用有限差分法（中心差分法）進行離散數據微分，以計算風險中立機率密度。中心差分法相較於前向差分或後向差分，中心差分

法可有效降低截斷誤差(公式(4)、公式(5))。為了確保數值計算之穩定性與精確度，本研究在價格間距的設定上採取等距劃分方式，將 ΔX 設定為 0.1。選擇較小的價格間距不僅能提供更精細的密度估計結果，同時等距的劃分方式也有助於提高數值微分運算的穩定性。

完成風險中立機率密度計算後，為確保數據之可靠性與合理性，本研究將數據檢驗重點著重於累積分布函數 (CDF) 與右尾累積機率 (Right Cumulative Probability)。資料完整性之檢驗方面，本研究首先確保累積分布函數值與右尾累積機率值皆不存在缺失值，具缺失之觀測值皆被排除於分析範圍之外。其次，為了維持計算結果之理論一致性，本研究進一步限制這兩個機率值必須嚴格介於 0 與 1 之間，同時排除等於 0 或 1 的邊界值，以避免極端情況對後續分析造成影響。

$$\begin{cases} F(K) \text{ exists (non - missing)} \\ F_R(K) \text{ exists (non - missing)} \\ 0 < F(K) < 1 \\ 0 < F_R(K) < 1 \end{cases}$$

其中 $F(K)$ 為累積分布函數， $F_R(K)$ 為右尾累積機率， $F_R(K) = 1 - F(K)$ 。

檢驗標準之設定主要基於三個面向的考量，首先，從理論一致性的角度來看，這些標準確保了估計結果符合機率論中累積分配函數的基本性質，同時也滿足機率密度函數的基本要求。其次，就數值穩定性而言，這種過濾方式可以避免在後續分析中因極端值或異常值而導致的計算問題，有效提高整體估計結果的可靠性。最後，視實務應用角度，移除可能導致錯誤解讀的異常值，更能確保結果準確反映市場參與者的真實價格預期。

經計算之風險中立機率密度函數與其累積分布函數如圖 4-6、圖 4-7：

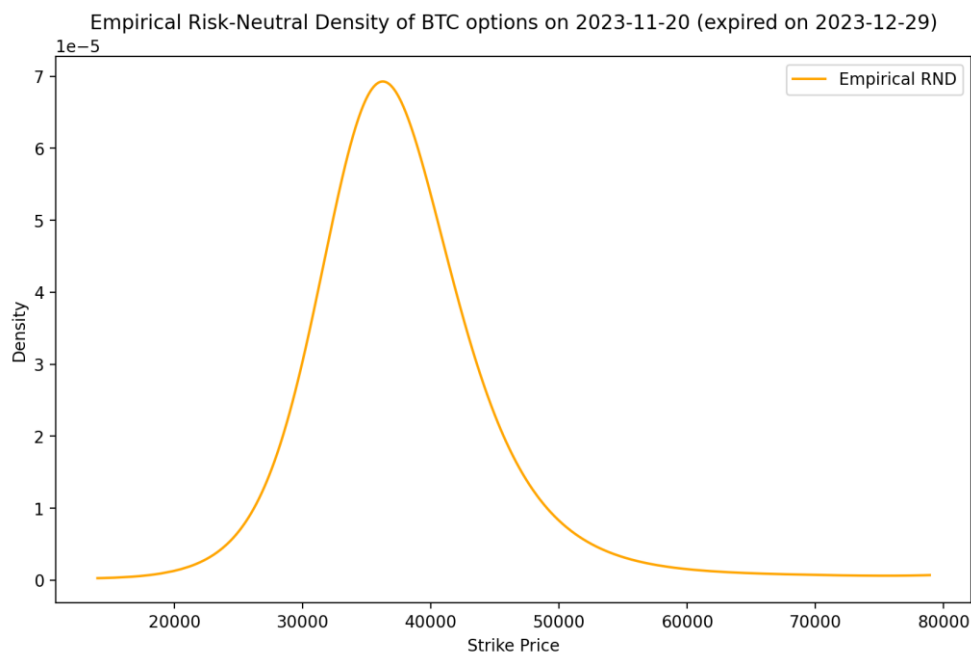


圖 4-6：2023 年 11 月 20 日比特幣選擇權風險中立機率密度函數（2023 年 12 月 29 日到期）

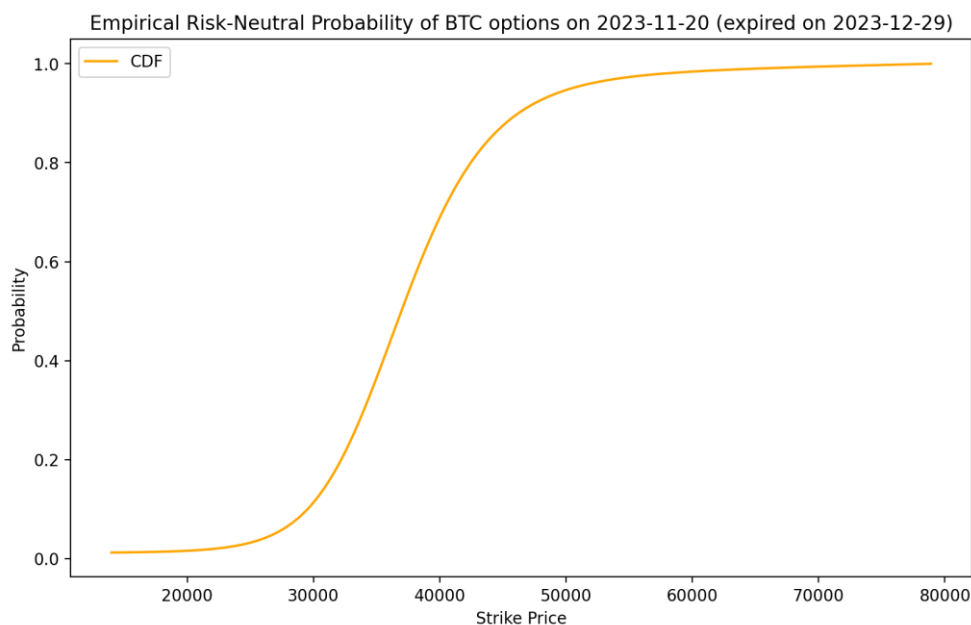


圖 4-7：2023 年 11 月 20 日比特幣選擇權風險中立機率累積分布函數（2023 年 12 月 29 日到期）

4.3 配適風險中立機率密度尾端分布

從市場選擇權價格中提取的風險中立機率密度（RND）僅能覆蓋有效交易履約價格的區間，為了完整描述市場預期，需要對 RND 的尾部進行延伸。Figlewski (2008) 提出使用廣義極值分布（Generalized Extreme Value Distribution, GEV）來配

適 RND 的尾部，其方法需要針對雙尾分別設定三個條件以確保尾部配適的連續性：

$$\begin{aligned} \text{右尾條件：} & \begin{cases} F_{GEVR}(K(\alpha_{1R})) = \alpha_{1R} \\ f_{GEVR}(K(\alpha_{1R})) = f_{EMP}(K(\alpha_{1R})) \\ f_{GEVR}(K(\alpha_{2R})) = f_{EMP}(K(\alpha_{2R})) \end{cases} \\ \text{左尾條件：} & \begin{cases} F_{GEVL}(-K(\alpha_{1L})) = 1 - \alpha_{1L} \\ f_{GEVR}(-K(\alpha_{1L})) = f_{EMP}(K(\alpha_{1L})) \\ f_{GEVR}(-K(\alpha_{2L})) = f_{EMP}(K(\alpha_{2L})) \end{cases} \end{aligned}$$

其中， F_{GEVR} 與 f_{GEVR} 分別為右尾 GEV 之累積分布函數與機率密度函數， F_{GEVL} 為左尾 GEV 之累積分布函數， f_{EMP} 為研究計算之實證風險中立機率密度函數 (Empirical RND)， $K(\alpha)$ 為對應於 Empirical RND 第 α 分位數之履約價格。以下為 Figlewski (2008) 適配條件整理：

- (1) 在接合點處，GEV 尾部的累積機率必須等於 RND 的累積機率
- (2) 在第一接合點處，GEV 密度函數值必須等於 RND 的密度函數值
- (3) 在第二接合點處，GEV 密度函數值也必須等於 RND 的密度函數值

而本研究採用廣義柏拉圖分布 (Generalized Pareto Distribution, GPD) 進行尾部配適。GPD 在極值理論中的核心地位源自 Balkema & de Haan (1974) 的開創性研究，他們證明了當觀測值超過足夠高的門檻值時，其超額分布會漸近收斂到 GPD，這個性質使得 GPD 特別適合用於描述尾部事件。選擇 GPD 而非 GEV 主要基於其參數結構優勢：GPD 僅需設定兩個參數：尺度參數 (scale parameter, σ) 與形狀參數 (shape parameter, ξ)，相較於 GEV 需要三個參數：位置參數 (location parameter, μ)、尺度參數 (scale parameter, σ) 及形狀參數 (shape parameter, ξ) 更為簡潔。這種簡潔的參數結構不僅能提升運算效率，也能降低過度配適 (over-fitting) 的風險。此外，Hosking & Wallis (1987) 的研究進一步驗證了 GPD 的門檻穩定性質，這使得它在實務應用上更具優勢。根據極值理論，GPD 與 GEV 在尾部具有相同的形狀參數，意味著兩種分配在描述極端事件時具有相同的漸近性質。然而，GPD 在實

務應用上更為直觀，特別是在金融風險管理領域，如 McNeil & Frey (2000) 的研究所示。實證研究方面，Birru & Figlewski (2012) 的研究進一步證實，GPD 與 GEV 在尾部配適的表現相當接近，且皆優於對數常態分配。這些特性使得 GPD 成為門檻超越模型中不可或缺的工具，特別是在需要精確描述超過特定門檻值的極端事件時。

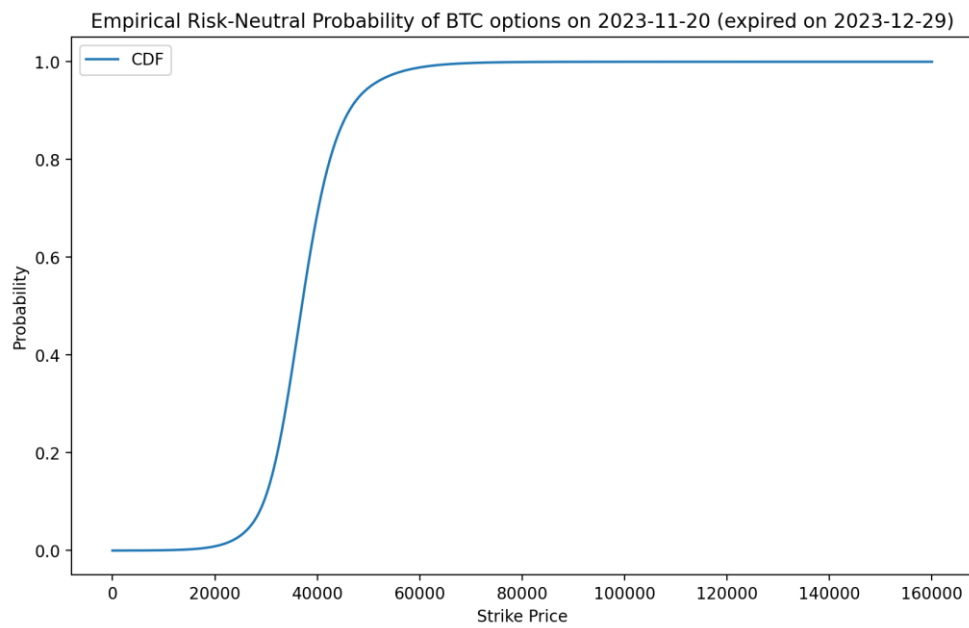
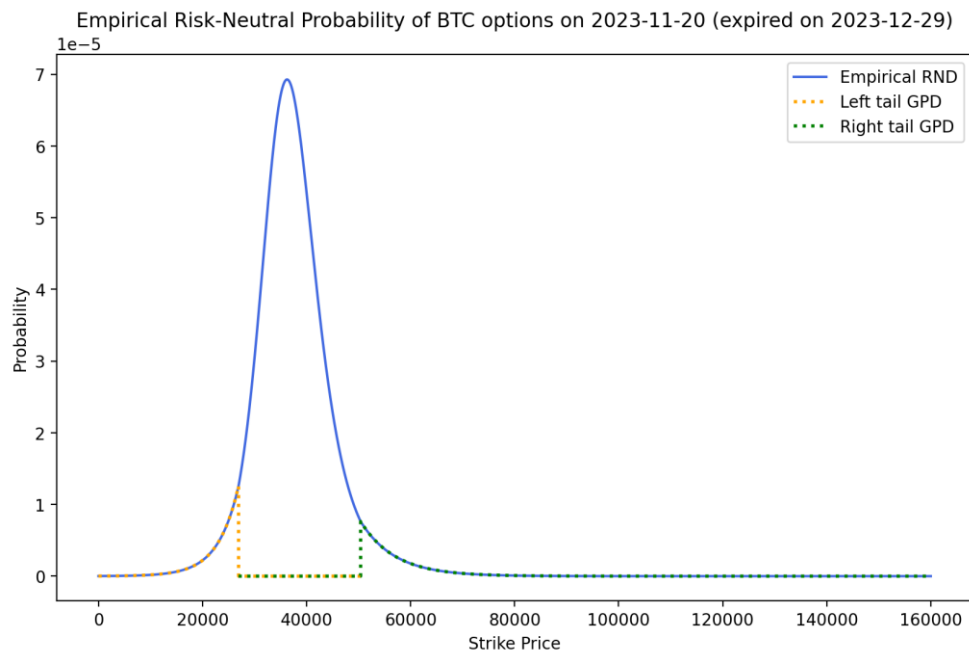
本研究提出兩種不同的 GPD 配適方法。第一種方法使用單一接合點，並結合斜率與累積分布函數（CDF）作為配適條件：

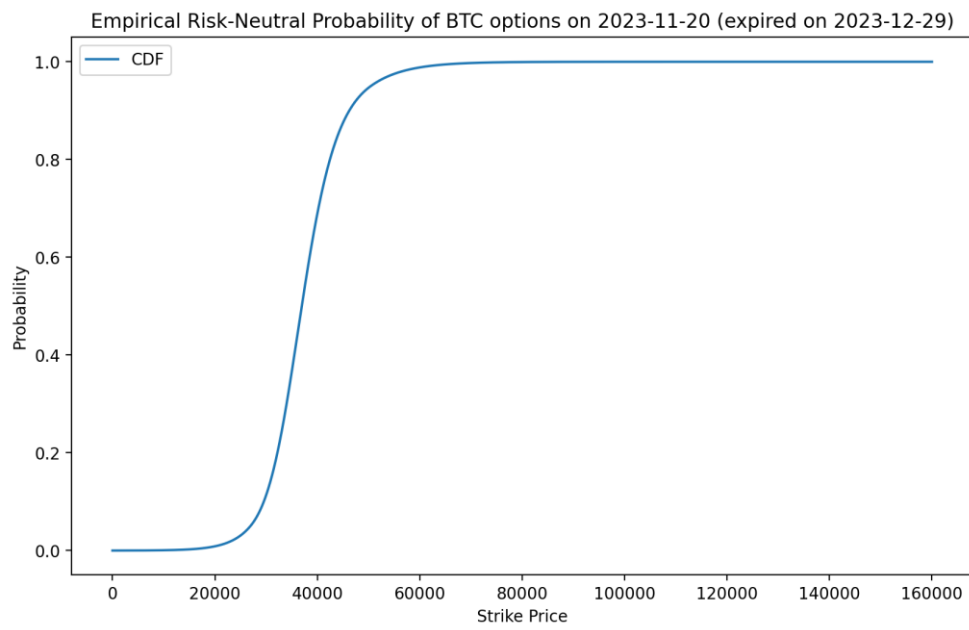
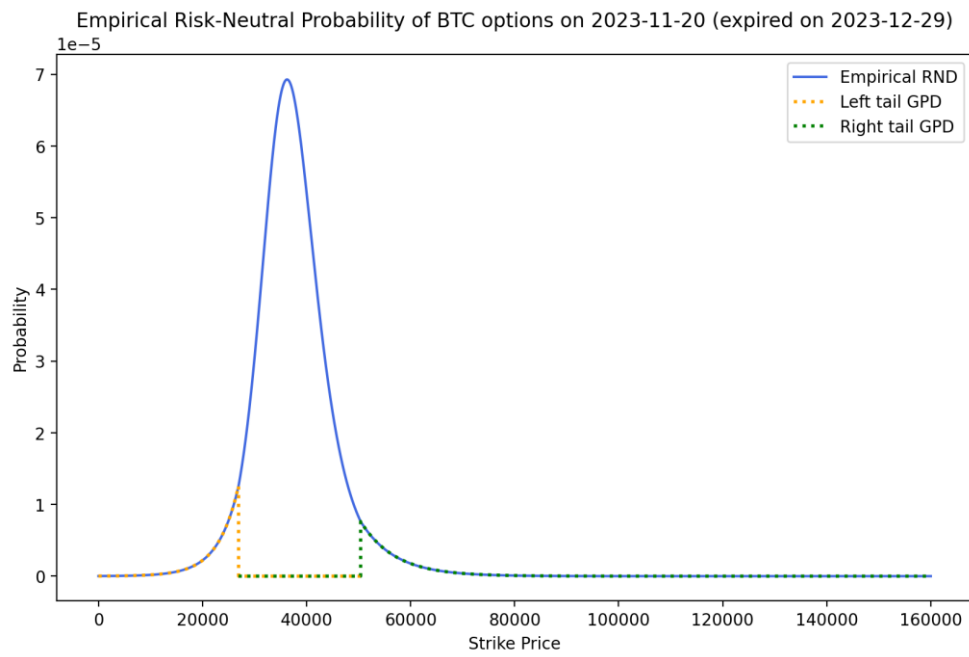
- (1) 在接合點處，GPD 的累積機率必須等於 RND 的累積機率
- (2) 在接合點處，GPD 的密度函數斜率必須等於 RND 的密度函數斜率。

第二種方法則採用兩個接合點，直接比較密度函數值：

- (1) 在第一個接合點處，GPD 的密度函數值必須等於 RND 的密度函數值
- (2) 在第二個接合點處，GPD 的密度函數值必須等於 RND 的密度函數值。

本研究對左尾與右尾分別進行配適。對於左尾，我們選擇累積機率為 5% 的點作為第一接合點，2% 作為第二接合點；對於右尾，則選擇累積機率為 95% 的點作為第一接合點，98% 作為第二接合點。此設計能確保尾部配適的平滑性，同時保持整體分布的連續性。為了最小化配適誤差，本研究採用最小平方法進行參數估計，透過數值優化方法求解 GPD 的形狀參數 (ξ) 與尺度參數 (σ)。此方法不僅能確保配適結果的準確性，也能維持整體分布的連續性與平滑性。





第五章、實證結果分析

參考 GPD 那篇論文、Jackwerth、韻軒學姐

兩個方法有什麼異同？

比較實際買權價格差異

跑每天的迴歸，找每天 RND 的 std, skewness, kurtosis

參考文獻