# 第四章、研究方法

## 4.1以理論計算風險中立機率密度之方法

下文中，符號C、P、S、K、及T均代表選擇權標準意義：C為買權價格、P為賣權價格、S為標的資產現價、K為履約價格、r為無風險利率、T為選擇權距到期日天數，本研究也將使用表示為風險中立機率密度函數（Risk Neutral Probability Density Function, RND）和表示為風險中立分布函數（Risk Neutral Distribution Function）。

買權價格是其在到期日天數T前之收益預期，折現回當前之價值。於風險中立之情形下，該預期價格則可基於風險中立機率計算，並以無風險利率進行折現，公式如下：

|  |  |
| --- | --- |
|  | () |

接著將買權價格C對履約價格K進行一次偏微分，可導出風險中立分布函數，公式如下：

移項可得風險中立分布函數為：

|  |  |
| --- | --- |
|  | () |

接著對公式(2)中之履約價格K再次進行偏微分，可導出於履約價格K處之RND：

|  |  |
| --- | --- |
|  | () |

於實際選擇權交易市場，由於履約價格為離散形式，因此可利用觀察到之選擇權價格，透過有限差分法（Finite Difference Methods, FDM）求得公式(2)與公式(3)之近似解。假設距到期日T時，市場上有N個不同履約價格的選擇權，其中K1代表最低履約價格，KN代表最高履約價格。我們將使用履約價格分別為Kn-1、Kn和Kn+1的三個選擇權，來求得以Kn為中心之的近似值，公式如下：

|  |  |
| --- | --- |
|  | () |
|  | () |

公式(1)至(5)說明了如何以理論方式從一組買權價格C中推導出介於履約價格K2和KN-1間之RND。類似的推導方式亦可應用於從賣權價格P中計算RND，對於賣權而言，與公式(2)至(5)對應之等價表達式如下：

|  |  |
| --- | --- |
|  | () |
|  | () |
|  | () |
|  | () |

於本研究中，ΔX為一固定之常數值，用以建構等距分布之人工選擇權價格，以填補市場中離散履約價格間之空缺值。此處理方式可解決交易數據稀疏或不均之問題，並確保履約價格之間距一致，便於透過有限差分法進行數值計算，提高估算結果之準確性。

## 4.2以實務計算風險中立機率密度之方法

前一節所介紹的方法假設存在一組選擇權價格，且這些價格完全符合理論定價關係（公式(1)）。然而，當將其應用於實際市場中交易的選擇權價格時，會面臨幾個重要的問題與挑戰。首先，必須謹慎處理觀察到的選擇權價格中的市場缺陷，否則可能導致推導出的RND出現無法接受的特性，例如RND在某些區域出現負值。其次，需找到適當的方法來補全RND在K2到KN-1範圍之外的尾部。本節將介紹本研究與回顧文獻中提出之從市場選擇權價格中計算RND的方法，並說明我們在此採用的技術。

在傳統金融市場中，選擇權定價模型（如Black-Scholes模型）通常使用無風險利率作為參數，該利率一般由政府債券等低風險資產的收益率代表。然而，在比特幣等加密貨幣市場中，無風險利率的適用性受到限制，因此不被廣泛使用。其因為，比特幣市場缺乏統一的無風險資產。由於加密貨幣市場的去中心化特性，並無政府債券此類被廣泛接受之無風險資產，難以確定單一通用之無風險利率，使無風險利率在此市場中難以適用；並且，比特幣價格之波動率遠高於傳統資產。波動劇烈之特性對於選擇權價格的影響較無風險利率更為顯著，因此交易者更關注隱含波動率的變化，而非無風險利率；其次，在加密貨幣市場中，利率環境可能受到交易所規則與市場供需的影響，並不一定與傳統的無風險利率相關，傳統的利率指標難以反映加密貨幣市場的實際情形；此外，持有比特幣的成本與持有傳統貨幣或資產的成本不同，包括安全性面向和技術風險等因素，這些成本難以透過無風險利率量化，進一步限制了無風險利率在比特幣選擇權定價中的適用性。

本研究採用Deribit交易所之比特幣選擇權交易價格，其為適應加密貨幣市場的特性，計算選擇權價格時採用了更合適的模型（以比特幣計價），符合交易市場使用需求。為符合研究所需，本研究觀察傳統Black-Scholes模型（公式(10)），並與Deribit交易所提供之計算公式（公式(11)）比較可知，將Deribit交易所報價乘上比特幣現貨價格即可得到以美元計價之比特幣選擇權價格。

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |
|  | () |
|  | () |
|  |  |
| 其中，CBS為Black-Scholes買權價格（以美元計價）、CDeribit為Deribit交易所比特幣買權價格（以比特幣計價）、S0為比特幣現貨價格、N(x)：常態分布的累積分布函數、K為履約價格、r為無風險利率、T為選擇權有效期、F為比特幣期貨價格、ln為自然對數、σ為年化標準差。 |  |

在比特幣選擇權市場中，交易者多為風險偏好者，傾向操作價外選擇權（Out-of-the-Money, OTM options），主因為成本較低、槓桿效益高，以及對波動率的敏感性特別強。對於買方來說，由於比特幣市場本身波動性極高，這類選擇權對投機者及高風險偏好的投資人極具吸引力，儘管其到期變為無價值的機率較高，交易者仍願意承擔這樣的風險；對於賣方而言，由於比特幣價格波動性顯著高於傳統金融市場，價外選擇權的權利金水準通常更高，進一步提升了賣方參與的誘因，使價外選擇權成為許多賣方用來創造穩定現金流的核心工具。綜上所述，價外選擇權具較佳之成交量與流動性，其價格可更有效率地反映市場氛圍，本研究將採用價外選擇權交易資料進行隱含波動率之計算，惟深度價外區間，為避免不合理之交易造成異常，將排除履約價格10美元以下之選擇權數據。

David Shimko（1993）提出將市場選擇權價格轉換至隱含波動率（Implied Volatility, IV）後進行插值（Interpolation），因為隱含波動率曲線通常比價格數據更平滑且連續，適合進行插值與平滑處理，再將插值後的曲線重新轉換回買權價格，以計算RND。此方法並不依賴選擇權價格符合Black-Scholes模型條件假設，而是僅將Black-Scholes公式作為一種計算工具，用來將數據轉換至更適合進行平滑處理的樣態。

Figlewski（2008）提出的方法旨在解決價平附近選擇權隱含波動率數據的異常波動問題，尤其是買權與賣權價格在價平附近的跳躍現象，這種跳躍可能導致隱含波動率曲線不平滑，進而影響RND計算結果之穩定性。本研究參考其方法，若履約價格位於期貨價格之0.9到1.1倍間，則取其買賣權隱含波動率之平均作為數據點。公式如下：

圖4-1呈現比特幣選擇權隱含波動率與履約價格之關係，顯示市場對價外選擇權具有較高偏好。同時，在價平附近可觀察到隱含波動率存在顯著的跳動現象。為減少價平位置隱含波動率之劇烈波動，本研究針對位於期貨價格0.9倍至1.1倍區間內之數據，將買權與賣權之隱含波動率取平均值，作為後續平滑處理的基礎數據。如圖4-2所示，綠色標記點代表平均後之隱含波動率，此方法能有效降低價平附近買賣權隱含波動率之波動幅度。對於超出此區間之數據，則直接採用價外選擇權之隱含波動率數據。經上述處理後，最終建構之隱含波動率數據如圖4-3所示。

一張含有 文字, 螢幕擷取畫面, 圖表, 繪圖 的圖片

自動產生的描述

圖4-1：2023年11月20日比特幣選擇權隱含波動率分布圖（2023年12月29日到期）

一張含有 文字, 螢幕擷取畫面, 圖表, 繪圖 的圖片

自動產生的描述

圖4-2：2023年11月20日比特幣選擇權隱含波動率分布圖（2023年12月29日到期）

一張含有 文字, 螢幕擷取畫面, 圖表, 繪圖 的圖片

自動產生的描述

圖4-3：2023年11月20日比特幣選擇權隱含波動率分布圖（2023年12月29日到期）

為了對處理後的隱含波動率數據進行更精確的擬合，本研究採用四階樣條函數（4th Spline）搭配單一節點（one knot）進行曲線擬合。節點（knot）設置於期貨價格處，此設計能在保持整體曲線連續性的同時，允許曲線在此關鍵位置具有更大的靈活度。採用四階樣條函數確保擬合曲線具有三階連續可導性（C³ continuity），不僅能有效捕捉隱含波動率曲線的細微變化，同時也避免過度擬合（over-fitting）的問題。

四階樣條函數的數學表示如下：

其中，為節點位置（即期貨價格），為參考點，與為待定係數。在節點處，函數需滿足以下連續性條件：

這些條件分別確保了函數值及其一階、二階和三階導數在節點處的連續性。

將唯一節點設置於期貨價格處具有重要的經濟意義，因為此位置通常對應於價平選擇權（At-the-money options）。此節點的設置將曲線分為兩個區段，分別對應期貨價格以上與以下的區域，使得擬合曲線能更準確地反映價平附近的波動率特徵。這種分段擬合的方法特別適合處理選擇權隱含波動率在價平位置前後可能出現的不對稱特徵。

在實作層面，本研究運用Python的SciPy套件中的LSQUnivariateSpline方法進行曲線擬合。此方法採用最小平方法（Least Squares）進行參數估計，能有效處理非均勻分布的數據點，並通過指定的內部節點（internal knots）實現分段擬合。透過最小平方法與節點設置的結合，LSQUnivariateSpline提供了一種靈活且穩定的數學工具，能夠在不均勻分布的數據中擬合出平滑且準確的隱含波動率曲線（如圖4-4），為後續的風險中立密度函數（RND）計算提供了堅實的基礎。最小平方法公式如下：

其中，為實際觀測值，為樣條函數在處之觀測值，為樣條函數之待估參數集合，為數據點總數。

一張含有 文字, 螢幕擷取畫面, 圖表, 繪圖 的圖片

自動產生的描述

圖4-4：2023年11月20日比特幣選擇權隱含波動率擬合曲線（2023年12月29日到期）

**使用離散公式計算RND**

## 4.3配適風險中立機率密度尾端分布

**那個人使用GEV or GPD，需要3個參數，提到那3個條件，因為會產生kinks（找他怪怪但我們不怪的）**

**所以我們modify他的條件，改用GPD，僅需2個參數**

**說明擬合條件，跟第3個條件**

**參考GEV、GPD論文**