向量的叉积

南理工泰州科技学院
叶志鹏

2023 年 3 月 21 日

1 向量叉积的原始定义

- 设两个向量 $\vec{a}=(x_1,y_1,z_1),\vec{b}=(x_2,y_2,z_2)$，两向量的夹角为 θ, 则叉积定义为

$$\mathbf{c}=\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\mathbf{n}|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\theta \tag{1}$$

其中 n 为与 a,b 向量都垂直的单位向量，方向按照右手螺旋定则。$\vec{c}$ 大小为

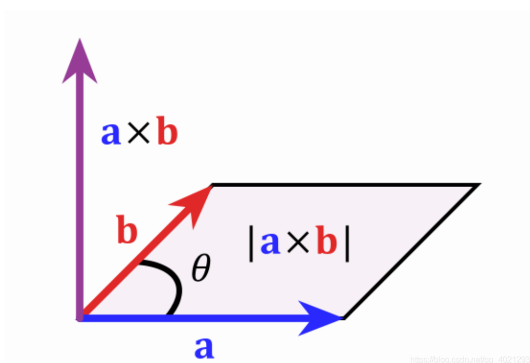

图 1: 叉积可视化

$|a||b|sin\theta$, 即 a,b 向量组成的平行四边形面积。

- 向量叉积的定义是为了解决物理或工程上的一些问题，如力矩问题 $M=F\times r$。

2 向量叉积的坐标系表达

- 将向量 a, b 写出坐标表达 $a = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}, \quad b = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$。则向量叉积定义如下:

$$\begin{aligned}
\mathbf{a} \times \mathbf{b} = &(x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k}) \times (x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k}) \\
=&x_1\mathbf{i} \times (x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k}) + y_1\mathbf{j} \times (x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k}) + z_1\mathbf{k} \times (x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k}) \\
=&x_1x_2(\mathbf{i} \times \mathbf{i}) + x_1y_2(\mathbf{i} \times \mathbf{j}) + x_1z_2(\mathbf{i} \times \mathbf{k}) + \\
&y_1x_2(\mathbf{j} \times \mathbf{i}) + y_1y_2(\mathbf{j} \times \mathbf{j}) + y_1z_2(\mathbf{j} \times \mathbf{k}) + \\
&z_1x_2(\mathbf{k} \times \mathbf{i}) + z_1y_2(\mathbf{k} \times \mathbf{j}) + z_1z_2(\mathbf{k} \times \mathbf{k})
\end{aligned} \tag{2}$$

其中 i, j, k 分别为 x, y, z 轴方向的单位向量，则根据公式 1, 可得

$$\begin{aligned}
&i \times i = j \times j = k \times k = 0, \\
&i \times j = k, \quad j \times k = i, \quad k \times i = j, \\
&j \times i = -k, \quad k \times j = -i, \quad i \times k = -j
\end{aligned}$$

则公式化简为:

$$\begin{aligned}
\mathbf{a} \times \mathbf{b} &= (y_1z_2 - z_1y_2)\,\mathbf{i} + (z_1x_2 - x_1z_2)\,\mathbf{j} + (x_1y_2 - y_1x_2)\,\mathbf{k} \\
&= (y_1z_2 - z_1y_2, z_1x_2 - x_1z_2, x_1y_2 - y_1x_2)
\end{aligned} \tag{3}$$