Chapitre 1

Notions fondamentales en théorie des graphes

1.1 Introduction

La notion de graphes et les problèmes liés aux graphes peuvent être rencontrés dans différentes situations de la vie réelle ainsi que dans des problèmes d'ingénierie notamment en informatique. Les graphes représentent, d'abord, un moyen de modélisation, ainsi qu'un moyen permettant de raisonner sur de nombreux problèmes.

Les graphes permettent de modéliser des entités reliées par des liens. La disposition des entités et surtout des liens (ce que l'on appelle la topologie du graphe) permet d'induire plusieurs propriétés intéressantes. Pour illustrer cela, nous allons prendre quelques exemples introductifs.

Exemple 1 : modélisation d'un réseau d'amis

Dans la vie courante, une personne est amie avec plusieurs personnes pouvant aussi être des amis à d'autres personnes, et ainsi de suite. Dans les réseaux sociaux par exemple, ces relations permettent d'établir des communautés et des règles s'appliquant au partage des données. Il est intéressant de noter (et ceci peut être montré par la théorie des graphes) que dans n'importe ensemble de groupes d'amis, il y a toujours au moins deux personnes ayant le même nombre d'amis.

Exemple 2 : modélisation d'un réseau routier

Un réseau routier est constitué d'un ensemble de villes reliées par des routes. La visualisation d'un tel réseau est utile si l'on veut retrouver son chemin lorsqu'on est perdu, ou si l'on veut trouver le plus court chemin entre deux villes. La théorie des graphes permet de construire des chemins intéressants comme celui qui passe une seule fois par chaque ville ou celui qui passe une seule fois par chaque route.

Exemple 3 : modélisation d'un réseau de télécommunication

Un réseau informatique est constitué d'un ensemble de machines (des ordinateurs, des hubs, des switches, des routeurs, des répétiteurs, etc.) et des liaisons physiques (câbles métalliques, fibres optiques, ondes radio, etc.). Un routeur permet d'acheminer un paquet vers la bonne sortie afin que ce dernier puisse retrouver son chemin vers la destination. On est notamment intéressée par connaître le chemin optimal dans le réseau (en termes de temps de transmission, énergie utilisée, nombre de sauts, etc.) ainsi que le débit maximal du réseau, ce qui permet d'éviter des situations agaçantes comme la congestion du réseau.

Exemple 4 : modélisation de la résolution d'un problème

En informatique, et notamment en intelligence artificielle, la résolution d'un problème consiste à trouver une séquence d'actions permettant de passer d'une situation initiale à une situation but. Chaque action appliquée permet de passer d'une situation à une autre. Ceci crée une sorte de liens entre les situations possibles du problème. En recherchant un chemin basé sur ces liens, on arrive alors à résoudre le problème.

Exemple 5 : modélisation de programmes

Lorsqu'on apprend la programmation, on décrit un programme (dans le cas d'un langage impératif comme le langage C) comme étant une séquence d'actions. On utilise souvent la métaphore d'une recette de cuisine pour illustrer cela. On peut, cependant, considérer un programme d'un autre point de vue. Chaque action du programme permet de changer les valeurs des variables en leur affectant de nouvelles valeurs. On désigne généralement les valeurs de variables d'un programme par le terme "état". Une instruction est alors vue comme un lien deux états, et tout le programme est considéré comme étant un ensemble de liens entre différents états. Ceci permet, par exemple, de détecter les cycles dans un programme (ce qui correspond à des boucles infinies) et permet de raisonner sur le comportement d'un programme (ce que l'on appelle la sémantique d'un programme).

Ces exemples (et bien d'autres) illustrent la notion de graphes et leur intérêt dans le monde réel. Nous allons alors donner une série de définitions et de propriétés des graphes permettant de répondre à des questions de la vie réelle.

D'une manière informelle, on peut définir un graphe par une représentation figurative où l'on retrouve un ensemble de points (appelés *nœuds* ou *sommets*) reliés par un ensemble de courbes droites ou non. Ces liens représentent généralement une relation ou une dépendance entre les sommets. Ils sont appelés des *arêtes* si la relation est symétrique (on parle de graphe non-orienté), ou des *arcs* sinon (on parle de graphe orienté).

1.2 Les graphes non-orientés

1.2.1 Définitions générales et propriétés

Un graphe non-orienté est défini par une paire (X, E) où X est l'ensemble de sommets et E est un ensemble d'arêtes (en d'autres termes, c'est un ensemble de liens entre les sommets de X). Un lien est représenté par une paire (s, t) avec $s, t \in X$ mais l'ordre n'est pas important ici. De plus, un lien peut figurer plusieurs fois. Les sommets sont généralement nommés, mais on peut être ramené à nommer les arêtes aussi. Une arête reliant un sommet à lui-même est appelée une boucle.

La figure 1.1 montre le schéma d'un graphe dont les sommets sont $\{a, b, c, d, e\}$ et les arêtes sont $\{A = (a, b), B = (a, c), C = (b, b), E = (c, d), F = (c, d), G = (d, e), H = (b, d)\}$. La figure 1.2 montre un graphe dont les sommets sont $\{p, q, r, s\}$ et les arêtes sont $\{U = (p, r), V = (p, q), X = (p, s), Y = (q, s), Z = (r, s)\}$.

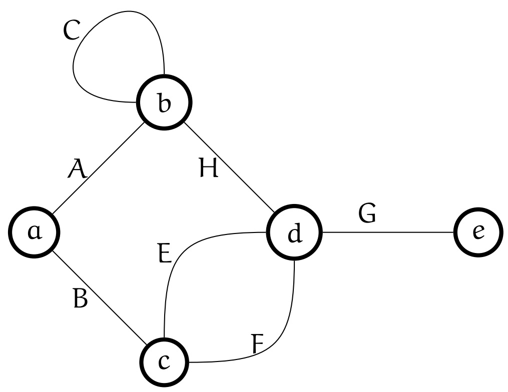


Figure 1.1 : exemple d'un multi-graphe

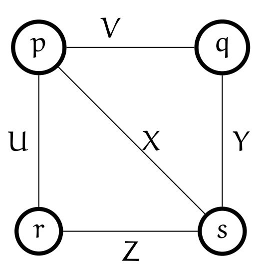


Figure 1.2 : exemple d'un graphe simple

Remarque : le dessin d'un graphe n'est pas caractéristique, plusieurs schémas géométriques du même graphe peuvent être dessinés. Une arête peut être rectiligne ou une courbe. Si on peut tracer un graphe sans que deux arêtes ne s'entrecoupent, alors on dit qu'il est *planaire*.

Si une arête A part d'un sommet x, on dit que A est incidente à x. Deux sommets reliés par une arête sont dits adjacents. Lorsque deux arêtes ont un somment en commun, on dit aussi qu'elles sont adjacentes. Dans la figure 1.1, les sommets a et b sont adjacents et les arrêtes A et B sont adjacentes.

Souvent, on associe une information à une arête, on l'appelle alors la valeur de l'arête (on peut utiliser aussi le terme *étiquette* ou parfois le terme *poids*). Un graphe possédant des valeurs aux arêtes est dit *graphe valué*.

1.2.2 L'ordre et les degrés d'un graphe

Le nombre de sommets d'un graphe G est dit l'ordre du graphe, on le note par $\mathtt{ordre}(G)$. Le nombre d'arêtes d'un graphe est dit la taille du graphe, on le note par $\mathtt{taille}(G)$.

Soit un sommet x d'un graphe G, on note par $d_G(x)$ le nombre d'arêtes incidentes à x et on l'appelle le degré du sommet x. Le degré d'un graphe est égal au degré maximal des degrés de ses sommets (noté $d(G)$).

Dans le graphe de la figure 1.3, l'ordre du graphe est 7. Les degrés des sommets sont donnés par le tableau suivant :

Sommet	$\mathbf{a}$	$\mathbf{b}$	$\mathbf{c}$	$\mathbf{d}$	$\mathbf{e}$	$\mathbf{f}$	$\mathbf{g}$
Degré $(\mathbf{d_G(x)})$	4	2	2	3	2	1	0

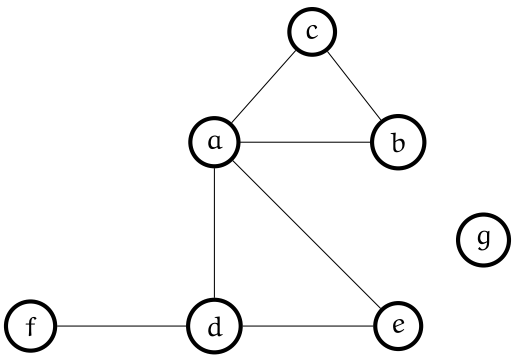


Figure 1.3 : des exemples de types de sommets (g est isolé, et f est pendant)

Le degré de ce graphe est donc égal à 4 (le degré de a). Le sommet g est dit un sommet *isolé* (son degré est 0), le sommet f est dit *pendant* (son degré est 1). Notons que la somme des degrés des sommets est paire. Elle est même égale au double du nombre d'arêtes. Ceci n'est pas une propriété spécifique de ce graphe, comme le laisse voir le théorème suivant :

Théorème 1

Pour tout graphe $G = (X, E)$, l'égalité $\sum_{s \in X} d(s) = 2 \times \mathtt{taille}(G)$ est satisfaite. La somme des degrés des sommets d'un graphe est alors toujours paire.

Proposition 1

Une application directe de ce théorème implique que le nombre de sommets ayant un degré impair d'un graphe est pair.

On peut maintenant facilement répondre à la question suivante : peut-on trouver un groupe de cinq personnes tel que chaque personne est amie avec exactement trois autres personnes ?

Un graphe est dit *régulier* si tous ces sommets ont le même degré. Si ce degré est est k, alors le graphe est dit k-régulier. On peut constater que si un graphe est k-régulier et k est impair, alors le graphe contient un nombre pair de sommets.

1.2.3 Terminologie pour quelques types particuliers de graphes

Il existe des types particuliers de graphes selon la topologie des arêtes. Ces types peuvent avoir des propriétés spécifiques. Le tableau suivant donne certains de ces types :

Multi-graphe

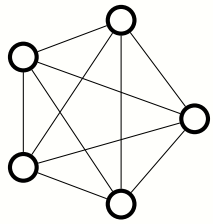
Dans un multi-graphe, plusieurs liens peuvent exister entre deux sommets.
►►► Le graphe de la figure 1.1 est un multi-graphe.

Graphe simple

Dans un graphe simple, il ne peut y avoir qu'un seul lien (au plus) entre deux sommets. De plus, il n'y a pas de boucle. Un graphe simple possède la propriété suivante : il existe toujours deux sommets ayant le même degré.
►►► Le graphe de la figure 1.2 est un graphe simple.

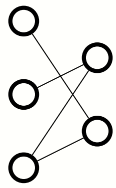
Graphe complet

Un graphe simple est dit complet si chaque sommet est relié à tout autre sommet. Le graphe complet contenant n sommets est noté K_n. La taille du graphe K_n est $n(n-1)/2$. Il s'agit aussi d'un graphe régulier (il est (n-1)-régulier).



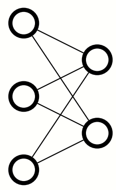
Graphe biparti

Les sommets d'un graphe biparti peuvent être divisés en deux ensembles disjoints X et Y tels que les arêtes relient un sommet de X à un sommet de Y (pas d'arêtes antre les sommets du même ensemble).



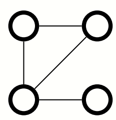
Graphe biparti complet

Dans un graphe biparti, si tout sommet de X est relié à tout sommet de Y, on dit qu'il est biparti complet, il est noté par $K_{m,n}$ où m est le nombre de sommets de X et n est le nombre de sommets de Y. La taille du graphe $K_{m,n}$ est mn. Ce graphe ne peut être régulier que si $m = n$.



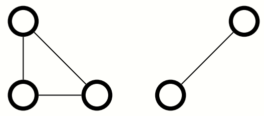
Graphe connexe

Un graphe connexe est un graphe qui permet de partir de n'importe quel sommet pour rejoindre n'importe quel autre sommet en suivant une ou plusieurs arêtes.



Graphe non-connexe

C'est un graphe ayant au moins un sommet ne permettant pas de rejoindre au moins un autre sommet.



Les graphes bipartis sont utilisés pour modéliser des problèmes d'affectation d'un ensemble de sources à un ensemble de destination. Par exemple, le premier ensemble peut correspondre à des tâches tandis que le deuxième peut correspondre à des ressources nécessaires pour effectuer les tâches. Les arêtes décrivent alors les possibilités d'affectation.

Parmi les graphes possibles, certains ont des applications intéressantes. On présente alors dans la suite certains d'entre eux.

1.2.4 Graphes planaires

L'appellation initiale des graphes vient du fait qu'on les dessine. Leurs propriétés géométriques peuvent alors être utilisées pour modéliser des contraintes structurelles, notamment dans un espace à deux dimensions. Un graphe *planaire* a la particularité d'être clair lorsqu'on le dessine. On entend ici la propriété suivante : en le dessinant, on ne peut pas trouver deux arêtes s'entrecoupant hormis aux sommets. Il est important de comprendre ce que l'on entend par dessiner les arêtes : le dessin d'une arête peut se faire par n'importe quelle courbe continue, qu'elle soit rectiligne ou non.

Les graphes planaires ont plusieurs applications. Par exemple, on peut les utiliser pour concevoir des circuits imprimés où les liaisons électriques ne doivent pas s'entrecouper. Pour les applications informatiques, les graphes planaires sont plus simples à visualiser sur un écran. En évitant les chevauchements des arêtes, ils évitent aux humains d'apercevoir de faux sommets.

Prenons un exemple : le graphe de la figure 1.4 est dessiné avec deux arêtes s'entrecoupent en un point. On peut, cependant, le redessiner selon la figure 1.5 sans aucune intersection entre les arêtes. Il s'agit donc d'un graphe planaire.

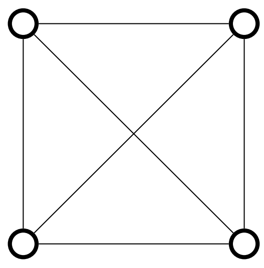


Figure 1.4 : dessin du graphe avec deux arêtes s'entrecoupant

Dans un graphe planaire, on appelle *face* une région du plan limitée par les arêtes, telle que deux points arbitraires puissent être reliés par une arête ne rencontrent ni sommet ni arête. Dans la figure 1.5, le graphe possède 4 faces : 3 de surface finie (A, B et C) et une de surface infinie (D). Les frontières d'une face sont l'ensemble des arêtes qui l'entourent. On définit le *degré d'une face* par le nombre d'arêtes qui la limitent. Ainsi, dans le graphe de la figure 1.5, toutes les faces ont un degré égal à trois.

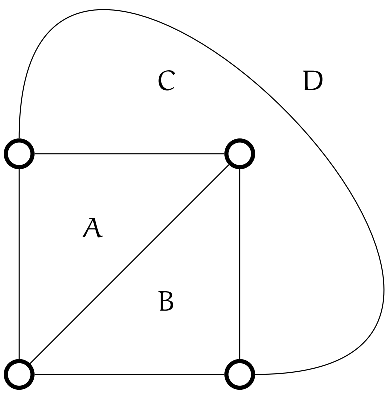


Figure 1.5 : le même graphe mais sans chevauchement

On peut donner deux théorèmes concernant les graphes planaires :

Théorème 2

La somme des degrés des faces d'un graphe planaire est égale au double de sa taille.

Théorème 3

(dit de planarité) Dans un graphe G, soient S l'ordre du graphe, A sa taille et R nombre le de ses faces. Si G est planaire alors $S - A + R = 2$.

On peut vérifier ces propriétés pour le graphe de la figure 1.5 :

1. La taille du graphe est 6, la somme des degrés des faces est 3+3+3+3=12. Vérifiée.
2. S=4, A=6 et R=4 : 4-6+4=2. Vérifiée.

On peut utiliser le dernier théorème pour prouver que le graphe $K_{3,3}$ n'est pas planaire. En effet, l'ordre de ce graphe est 6, et sa taille est de 9. S'il est planaire, il devrait contenir un nombre de faces $R = 2 + A - S = 2 + 9 - 6 = 5$. Si on exclut la face externe, il reste alors quatre faces F_1, F_2, F_3 et F_4 (F_5 désigne la face externe qui a forcément un degré supérieur ou égal à 3). Soient X l'ensemble des sommets à gauche et Y l'ensemble des sommets à droite. Si on prend un sommet de X, la région correspondante se construit en rajoutant un sommet de Y, puis un autre de X (différent du premier) et ensuite un autre de Y qui nous permet de revenir vers le premier sommet. Donc une région doit avoir un degré minimal de 4. En utilisant le premier théorème, on a alors :

$$\sum_{i=1}^{5} d(F_i) = 18$$

or d'après notre raisonnement, on devrait avoir :

$$\sum_{i=1}^{5} d(F_i) \geqslant 4 \times 4 + 3 = 19$$

Contradiction ! Donc, le graphe n'est pas planaire.

On peut aussi montrer que le graphe K_5 n'est pas planaire. Il est évident de noter que si un graphe contient un autre graphe non-planaire alors le premier n'est pas planaire non plus.

Les deux autres types de graphes que l'on étudiera nécessitent de définir la notion de circuits, elle-même basée sur les chaînes et les chemins très importants en théorie des graphes.

La figure 1.6 donne un exemple d'un autre graphe non-planaire.

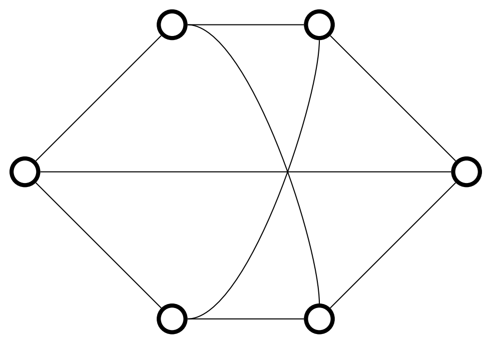


Figure 1.6 : un graphe non planaire

1.2.5 Les chaînes, les cycles et cocycles

Une chaîne du sommet x_0 vers le sommet x_k dans un graphe G est une séquence de sommets x_0, x_1,..., x_k telle qu'il existe une arête entre les sommets x_{i-1} et x_i pour tout $i = 1..k$. Les chaînes x_0, x_1,..., x_k et x_k, x_{k-1},..., x_1, x_0 (obtenue en inversant l'ordre des sommets de la chaîne) sont identiques.

Remarque : cette définition n'est pas très précise. En fait, elle est seulement valable pour les graphes simples. Pour les multi-graphes, on doit également indiquer les arêtes par lesquelles on passe d'un sommet à un autre.

Dans le graphe de la figure 1.7, on peut voir en gras la chaîne b, a, d, f (équivalente à f, d, a, b). Notons aussi que la suite b, a, c, b, a, d, f est également une chaîne bien que certains sommet apparaissent plusieurs fois. Pour les différencier, on dit d'une chaîne qu'elle est *élémentaire* si aucun sommet ne peut figurer plus qu'une fois dans la chaîne.

On peut également définir une chaîne *simple* comme étant une chaîne dans laquelle une arête figure au plus une fois. Par exemple, la chaîne a, c, b, a, d, f est simple mais pas élémentaire.

Une chaîne dont le sommet initial et final sont identiques est dite *fermée*. Si, de surcroît, elle est simple, alors on dit qu'elle forme un *cycle*. Dans la figure 1.7, les cycles sont a, b, c, a et a, e, d, a.

Pour un graphe $G = (X, E)$, on considère un ensemble de sommets $W \subseteq X$. Un *cocycle* est l'ensemble des arêtes ayant un sommet dans W et un autre dans $X - W$. De cette façons, si on enlève le cocycle d'un ensemble W, alors on isole ses sommets du reste du graphe. Dans le graphe de la figure 1.7, si on prend $W = \{a, e, d\}$ alors son cocycle est $\{(a, c), (a, b), (f, d)\}$.

Les chaînes permettent de définir des mesures utiles pour un graphe. On définit, d'abord, la longueur d'une chaîne par le nombre d'arêtes qui la composent. La longueur de la chaîne b, a, d, f est 3. La distance entre deux sommets et égale à la longueur minimale des chaînes qui les relient. Par exemple, la distance entre b et d est de 2. Enfin, on appelle *diamètre* d'un graphe la distance maximale entre deux sommets quelconques (comparez cela avec le diamètre d'un disque). Le diamètre du graphe considéré ici est alors de 3.

Les longueurs et les cycles nous donnent un théorème intéressant caractérisant les graphes bipartis. Il permet par exemple de montrer que le graphe de la figure 1.7 n'est pas biparti.

Théorème 4

Un graphe est biparti si et seulement s'il ne contient aucun cycle de longueur impaire.

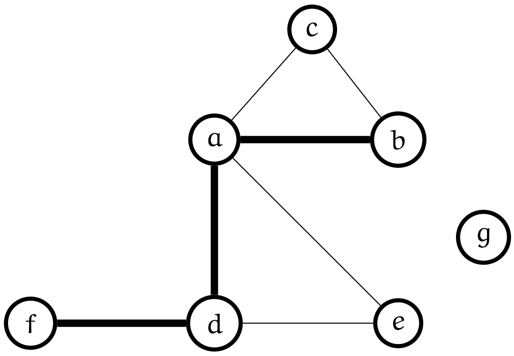


Figure 1.7 : exemple de chaîne : b, a, d, f

1.2.6 Graphe eulérien

Dans un graphe G, on appelle *cycle eulérien* un cycle passant une seule fois par toutes les arêtes du graphe. Le graphe est alors dit *eulérien*. On peut définir un graphe eulérien par un graphe que l'on peut tracer (c'est-à-dire tracer toutes ses arêtes) sans lever la main et sans passer deux fois par la même arête. Attention, pour parler de cycle eulérien, il faut que le sommet de départ soit le même que le sommet final (sinon, c'est une chaîne eulérienne seulement comme expliqué ci-bas).

Une chaîne est dite *eulérienne* si elle permet de passer une seule fois par toutes les arêtes du graphe. Si un graphe non-eulérien possède une chaîne eulérienne, alors on dit qu'il est *semi-eulérien*.

L'appellation "eulérien" provient d'un problème célèbre concernant la ville dite à l'époque Königsberg (aujourd'hui Kaliningrad) et ses ponts. La carte des points de cette ville est donnée par la figure 1.8. Le graphe correspondant est donné par la figure 1.9. Le problème consiste à passer par chacun des ponts de la ville une seule fois. Euler était le premier à résoudre ce problème.

Euler a même démontré un théorème donnant des critères nécessaires et suffisants pour qu'un graphe soit eulérien.

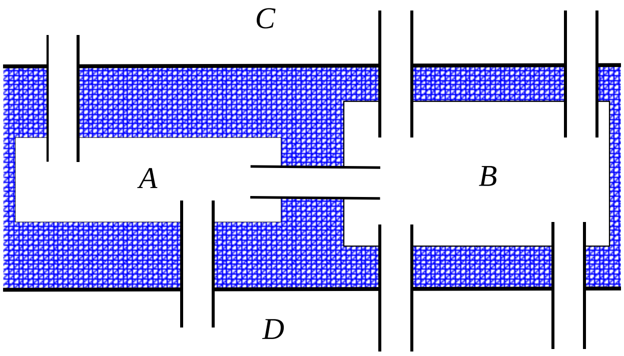


Figure 1.8 : carte des cours d'eau et des ponts de Königsberg

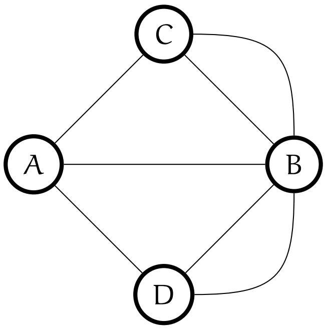


Figure 1.9 : le graphe correspondant au problème de Königsberg

Théorème 5

— Un graphe connexe admet une chaîne eulérienne si et seulement si tous ses sommets sont de degré pair sauf éventuellement deux d'entre eux.
— Un graphe connexe admet un cycle eulérien si et seulement si tous ses sommets sont de degré pair.

Ainsi, le graphe de la figure 1.9 n'est pas semi-eulérien car il possède trois sommets ayant des degrés impairs (A a un degré de 3, C a un degré de 3 et D a un degré de 3). Évidemment, il ne peut pas être eulérien.

Considérons maintenant le problème de l'enveloppe montré par la figure 1.10. Dans ce graphe, les sommets (a, b et c) ont un degré pair, mais les sommets d et e ont un degré impair. En vertu du théorème précédent, le graphe est semi-eulérien, mais il n'est pas eulérien. Une chaîne eulérienne est alors : $d, a, c, b, e, a, b, d, e$.

La construction d'une chaîne eulérienne peut se faire selon plusieurs algorithmes, l'un d'eux est l'algorithme de Fleury, qui nécessite bien sûr que le graphe soit au moins semi-eulérien.

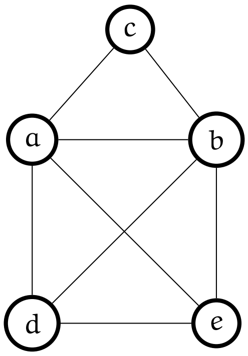


Figure 1.10 : problème de l'enveloppe

Algorithme de Fleury

si *le graphe est eulérien* **alors**
    commencer par n'importe quel sommet
sinon
    commencer par un sommet dont le degré est impair.

choisir le prochain sommet en fonction des arêtes incidentes non encore visitées. Si l'on doit choisir entre un pont et un non-pont alors on choisit un non-pont. Un pont est une arête telle que si elle est supprimée, certaines parties du graphe ne seront plus accessibles. Lorsqu'une arête est sélectionnée, alors elle est enlevée du graphe.

s'arrêter lorsqu'il n'y a plus d'arêtes.

Pour décider si une arête est un pont ou non, on peut utiliser l'algorithme suivant :

Algorithme pour décider si une arête (u, v) **est un pont**

si *il y a un seul sommet adjacent à* u *(qui est* v*)* **alors**
    ce n'est pas un pont
sinon
    calculer le nombre de sommets accessibles depuis u, soit le nombre a
    enlever l'arrête (u, v) puis calculer le nombre de sommets accessible depuis u, soit le nombre b
    si $a > b$ **alors**
        c'est un pont
    sinon
        ce n'est pas un pont

1.2.7 Graphe hamiltonien

Dans un graphe G, on appelle cycle *hamiltonien* un cycle passant une seule fois par chacun des sommets de G. Si un tel cycle existe, alors le graphe est dit *hamiltonien*.

Une chaîne est dite *hamiltonienne* si elle permet de passer une seule fois par chacun des sommets du graphe. Si un graphe non-hamiltonien contient une chaîne hamiltonienne, alors on dit qu'il est *semi-hamiltonien*.

Les graphes hamiltoniens possèdent beaucoup d'applications. On les retrouve notamment dans le problème du voyageur de commerce où un commerçant doit visiter toutes les villes d'un certain réseau une seule fois tout en minimisant le coût des déplacements.

Il n'existe pas de propriété simple pour un graphe semi-hamiltonien. Mais on peut déjà dire que :

- Un graphe possédant un sommet de degré 1 ne peut pas être hamiltonien
- Si, dans un graphe, un sommet est de degré 2, alors les deux arêtes; incidentes à ce sommet doivent faire partie du cycle hamiltonien;
- Les graphes complets K_n sont hamiltoniens.

Il existe deux théorèmes (en fait un théorème et son application directe) permettant de définir des conditions suffisantes (et pas nécessaires) d'un graphe hamiltonien.

Théorème 6

Soit G un graphe simple d'ordre $n > 3$. Si pour toute paire (x, y) de sommets non adjacents, on a : $d(x) + d(y) \geqslant n$, alors G est hamiltonien.

On peut dériver une autre caractéristique (plus forte mais plus simple à vérifier) pour un graphe hamiltonien : pour $n > 3$, si pour sommet x on a $d(x) \geqslant n/2$ alors le graphe est hamiltonien.

Si on applique cela au graphe de la figure 1.10, on aura le tableau suivant (en jaune, ce sont les seuls cas où les sommets ne sont pas adjacents). Étant donné que l'ordre du graphe est 5, il est alors hamiltonien.

Sommet	$\mathbf{a(d(a) = 4)}$	$\mathbf{b(d(b) = 4)}$	$\mathbf{c(d(c) = 2)}$	$\mathbf{\underline{d}(d(\underline{d}) = 3)}$	$\mathbf{e(d(e) = 3)}$
$\mathbf{a}$					
$\mathbf{b}$					
$\mathbf{c}$				$d(c) + d(\underline{d}) = 5$	$d(c) + d(e) = 5$
$\mathbf{\underline{d}}$					
$\mathbf{e}$					

1.2.8 Graphe partiel et sous-graphe

Soit $G = (X, E)$ un graphe. On appelle *graphe partiel* le graphe $G' = (X, E')$ tel que $E' \subset E$. En d'autres termes, on enlève quelques arêtes de E.

Soit $A \subset X$ un ensemble de sommets. On appelle *sous-graphe* induit par A le graphe $(A, E(A))$ dont les sommets appartiennent à A, les arêtes sont celles de A ayant les deux extrémités en A.

On appelle *clique*, d'un graphe G, un sous-graphe complet de G. Parmi toutes les cliques, la clique maximale (celle ayant le plus de sommets) possèdent des propriétés intéressantes pour certains algorithmes notamment dans la coloration. La figure 1.11 donne un graphe avec ses cliques. Il existe deux cliques ici, l'une (en jaune) a un ordre de 3, l'autre (maximale) est d'ordre 4.

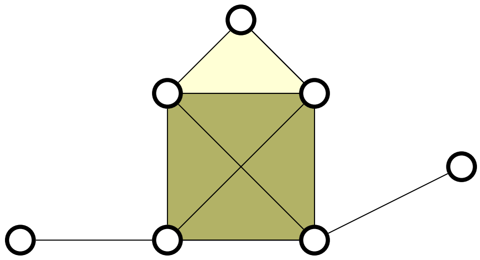


Figure 1.11 : un graphe avec ses cliques

Comme exemples des sous-graphes et graphes partiels, on considère la carte des villes et routes en Algérie. Un sous-graphe serait une vue d'une région ou d'une wilaya avec toutes leurs routes. Un graphe partiel peut correspondre à la vue des routes nationales uniquement.

À partir de la notion des sous-graphes, on peut aussi définir la notion des composantes connexes. Une composante connexe est un sous-graphe qui est connexe et maximal (en termes d'ordre). Le graphe utilisé pour définir la notion du "graphe non-connexe" (en section 1.2.3) possède deux composantes connexes. Un graphe connexe contient une seule composante connexe.

Un *stable* d'un graphe est un ensemble de ses sommets n'ayant aucune arête entre eux (pris deux à deux). Par exemple, pour un graphe biparti tel que les sommets d'un ensemble X sont reliés aux sommets de l'ensemble Y, ces deux ensembles sont alors des stables. La cardinalité du plus grand stable d'un graphe G est appelée le nombre de stabilité de G (et on le note $\alpha(G)$). Le nombre de stabilité du graphe de la figure 1.11 est de 3.

1.2.9 Autres opérations sur les graphes

Plusieurs autres opérations peuvent définies en plus de celles définies précédemment. Chacune a un intérêt particulier dans la théorie des graphes.

Graphe complémentaire

Soit $G = (X, E)$ un graphe simple. Le graphe complémentaire de G est un graphe dont les sommets sont X tel qu'une arête relie le sommet x et y s'ils n'étaient pas reliés dans le graphe G. Intuitivement, si les arêtes représentent une relation entre les sommets, alors le graphe complémentaire représente la négation de cette relation. La figure 1.12 donne le graphe complémentaire de la figure 1.10.

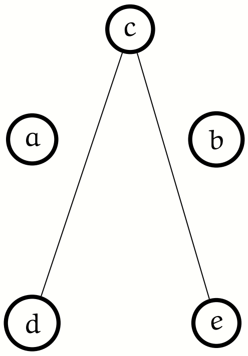


Figure 1.12 : le graphe complémentaire du graphe de la figure 1.10

Graphe dual

Le graphe dual est construit à partir d'un graphe planaire. En effet, lorsqu'on construit les faces d'un graphe planaire, on considère chaque face comme un sommet du graphe dual, et chaque arête frontière comme étant une arête du graphe dual. La figure 1.13 donne un graphe et son dual (tracé en rouge). Si on applique la transformation encore une fois au dernier, on obtient le premier graphe. La forme duale permet par exemple de passer de la notion d'un cycle dans un graphe à la notion de cocycle en graphe dual.

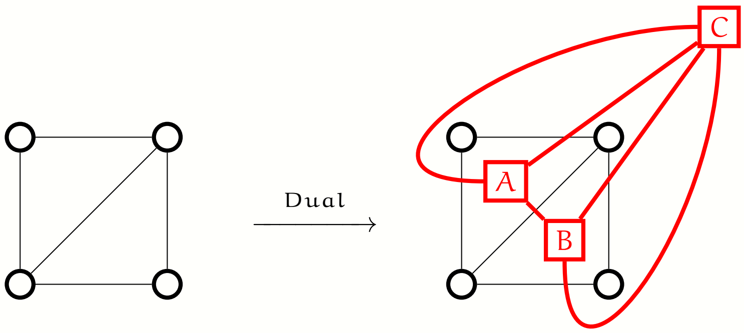


Figure 1.13 : exemple d'un graphe dual

Graphe adjoint

Le graphe adjoint s'obtient à partir de n'importe quel graphe en transformant les arêtes en sommets et les sommets en arêtes. Lorsque deux arêtes partagent un sommet dans le premier graphe, alors les deux arrêtes seront reliés par une arête dans le graphe adjoint. La figure 1.14 donne le graphe adjoint du graphe 1.2.

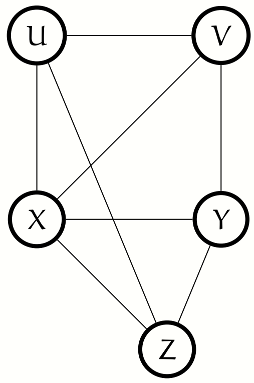


Figure 1.14 : exemple d'un graphe adjoint du grapje de la figure 1.2

1.2.10 Représentation non graphique d'un graphe

Un graphe peut être représenté par d'autres moyens que la représentation schématique. En particulier, les représentations matricielles sont souvent utilisées pour définir un graphe ou même le stocker sur un support informatique.

Pour tout graphe, on peut définir deux matrices : *matrice d'adjacence* et *matrice d'incidence*. La matrice d'adjacence, celle qui est la plus utilisée, représente le voisinage des sommets, c'est une matrice carrée. Pour un graphe d'ordre n, elle comporte alors n lignes et n colonnes. Soient i l'indice du sommet x et j l'indice du sommet y. L'élément de la matrice d'adjacence à la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne représentent le nombre d'arêtes reliant x à y. Une boucle est comptée deux fois.

La matrice d'adjacence d'un graphe non-orienté est, par conséquent, symétrique (ce qui pose un problème de redondance de données en la stockant). Comme exemple, la matrice adjacence du graphe de la figure 1.1 (en adoptant l'ordre des sommets : a, b, c, d, e) est :

$$\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\
\begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}
\end{array}$$

Les matrices d'adjacence peuvent avoir des formes particulières pour certains graphes. Par exemple, pour un graphe complet, la matrice d'adjacence ne contient que des 1. Pour un graphe biparti, la matrice d'adjacence peut avoir une forme particulière lorsqu'on réarrange ses sommets (comment ?).

La matrice d'incidence permet de représenter à la fois les sommets et les arêtes. Les lignes correspondent aux sommets et les colonnes aux arêtes. Si une arête est incidente à un sommet alors on met 1 à la case correspondante. Dans le cas d'une boucle, on met 2. De manière générale, ce n'est pas une matrice carrée. Pour la matrice précédente, la matrice d'incidence est :

$$\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} A & B & C & E & F & G & H \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Une autre représentation non-matricielle est également utilisée et est appelée les listes des adjacences (reposant sur la notion de pointeurs). Elles consistent à donner pour chaque sommet la liste de sommets adjacents. Pour les matrices précédentes, elles sont (notons que l'on a répété d et c deux fois car il s'agit d'un multi-graphe) :

Sommet	**Liste d'adjacence**
a	b, c
b	a, b, b, d
c	a, d, d
d	b, c, c, e
e	d

1.2.11 Coloration d'un graphe

La coloration des sommets d'un graphe simple consiste à donner une couleur (abstraite) à chaque sommet d'un graphe de sorte que deux sommets adjacents ne puissent pas avoir la même couleur. Une coloration d'un graphe en k couleurs est une partition des sommets en k stables.

Le terme coloration provient classiquement de la coloration d'une carte géographique. En effet, si on considère une carte de plusieurs pays, le problème consiste à colorier chaque pays de sorte que deux pays voisins ne puissent pas avoir la même couleur.

Ce problème a beaucoup d'applications en pratique. En effet, le terme couleur ici est abstrait, c'est-à-dire qu'il désigne plutôt une information différente des autres. Par exemple, on peut utiliser la coloration dans les problèmes d'élaboration des emplois de temps en affectant aux cours des salles selon l'incompatibilité entre eux.

On appelle *nombre chromatique* d'un graphe G (noté $\delta(G)$) le nombre minimal de couleurs nécessaires à le colorier. De manière générale, il est très difficile de calculer ce nombre pour un graphe quelconque. Mais on peut encadrer ce nombre dans certains cas. Commençons d'abord par un théorème très intéressant caractérisant les graphes planaires.

Théorème 7

(dit des quatre couleurs) Tout graphe planaire peut être coloré avec au plus quatre couleurs (attention, un graphe colorable avec moins de cinq couleur n'est pas forcément planaire).

Pour un graphe quelconque G, on peut aussi trouver les encadrements suivants :

— Si G n'est pas complet, alors $\delta(G) \leqslant r$ tel que r est le plus grand des degrés de G ($r = max_x d(x)$). Si G est complet (K_n), alors son nombre chromatique est égal à son degré + 1 (soit n). Pour le graphe de la figure 1.11, la borne supérieure est alors de 4 (le graphe est d'ailleurs planaire).

— $\delta(G) \leqslant n + 1 - \alpha(G)$ tel que n est l'ordre du graphe, et $\alpha(G)$ est son nombre de stabilité. Dans le cas de l'exemple considéré, nous avons la borne supérieure de 7+1-3=5. On prends la valeur minimale des deux bornes supérieures ce qui donne 4.

— Le nombre chromatique de G est supérieur ou égal à celui de chacun de ses sous-graphes. Ceci peut être utile si le nombre de sous-graphes n'est pas important.

— Le nombre chromatique est supérieur ou égal à l'ordre de sa clique maximale.
Dans notre exemple, l'ordre de la clique maximale est de 4. Le nombre chromatique est alors égal à 4.

Comme souligné plus haut, le calcul du nombre chromatique d'un graphe quelconque est un problème très difficile. Il existe néanmoins des algorithmes d'approximation permettant de donner un bon nombre de couleurs (pas forcément minimal) en un temps très réduit (on appelle un tel algorithme une heuristique). L'algorithme de Welsh et Powell permet de réaliser cela, mais peut parfois donner de mauvais résultats.

Algorithme de Welsh et Powell

trier les sommets du graphe dans l'ordre décroissant de leurs degrés
tant que *il reste des sommets non colorés dans le graphe* **faire**
    En parcourant la liste dans l'ordre, attribuer une couleur non encore utilisée au premier sommet non encore coloré, et attribuer cette même couleur à chaque sommet non encore coloré et non-adjacent à un sommet de cette couleur

Si on applique cela au graphe de la figure 1.11 (selon les noms dans la figure 1.15 et les couleurs rouge, jaune, vert, bleu), on trie d'abord les sommets et on applique l'algorithme (NA signifie non affecté). On voit ici que l'algorithme a bien calculé le nombre chromatique du graphe (voir aussi la figure 1.15).

Sommet	b	c	e	f	d	a	g
Degré	4	4	4	4	2	1	1
Initialisation	NA	NA	NA	NA	NA	NA	NA
Itération 1	Rouge	NA	NA	NA	NA	Rouge	Rouge
Itération 2	Rouge	Jaune	NA	NA	Jaune	Rouge	Rouge
Itération 3	Rouge	Jaune	Vert	NA	Jaune	Rouge	Rouge
Itération 4	Rouge	Jaune	Vert	Bleu	Jaune	Rouge	Rouge

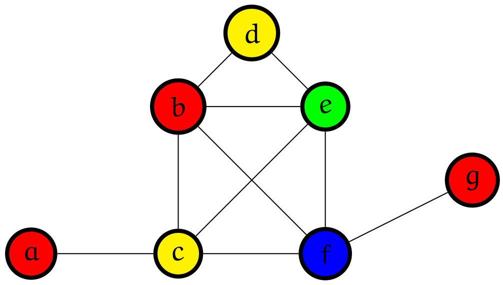


Figure 1.15 : exemple de coloriage d'un graphe

La coloration permet également de caractériser les graphes bipartis. En effet, un graphe a un nombre chromatique de 2 si et seulement s'il est un graphe biparti. Les arêtes d'un graphe biparti relient les sommets d'un ensemble X aux sommets d'un ensemble Y. Il suffit alors d'affecter à ces deux ensembles des couleurs différentes comme le montre la figure 1.16.

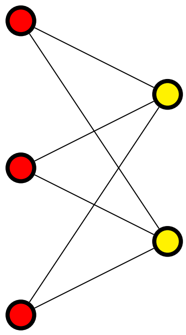


Figure 1.16 : coloriage d'un graphe biparti

Remarque : un problème similaire existe, il s'agit de la coloration des arêtes. En effet, on se propose de colorer les arêtes d'un graphe de façon que deux arêtes ayant un sommet en commun n'aient pas la même couleur. Pour résoudre ce problème, on peut construire le graphe adjoint et appliquer ensuite l'algorithme de coloriage.

1.3 Les graphes orientés

Les graphes orientés traduisent des relations asymétriques. Comme les graphes non-orientés, ils se définissent sur un ensemble de sommets, mais les liens entre les sommets sont associés à une direction.

Formellement, un graphe orienté ou encore un digraphe est une paire (X, E) où X est un ensemble de sommets et E est un sous-ensemble du produit cartésiens $X \times X$. Pour deux sommets adjacents x et y, le lien (x, y) est appelé un arc de x vers y. Pour l'arc (x, y), x s'appelle l'extrémité initiale de l'arc et y son extrémité finale.

Toutes les notions définies pour les graphes non-orientés peuvent être transposées aux graphes orientés à quelques différences près. Par exemple, un graphe orienté peut également être valué.

De manière générale, les graphes orientés sont dits des p-graphes, où p est le nombre maximal d'arcs pouvant reliant deux sommets (ils ressemblent donc aux graphes multiples non-orientés). Dans ce cours, on s'intéressera aux 1-graphes, c'est-à-dire ceux dans lesquels un seul arc au plus relie deux sommets. Ceci exclut bien sûr les boucles. Pour faire simple, on utilisera l'expression "graphe orienté" pour désigner un 1-graphe.

Exemple 6 : un graphe orienté

Dans un tournoi, les joueurs s'affrontent deux à deux. On a obtenu les résultats suivants :

— Le joueur A a battu B et D ;
— Le joueur B a battu C et D ;
— Le joueur C a battu A ;
— Le joueur D a battu C.

On peut représenter les résultats par le graphe de la figure 1.17.

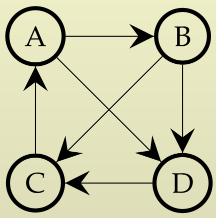


Figure 1.17 : le graphe correspondant aux résultats du jeu

1.3.1 Les prédécesseurs, les successeurs et les voisins

Pour un graphe orienté $G = (X, E)$, les prédécesseurs d'un sommet x est l'ensemble de sommets tels qu'il existe des arcs qui les relient à x. On les note par $\Gamma^-(x)$ et sont formellement définis par $\{y \in X | (y, x) \in E\}$. Pour le graphe de la figure 1.17, on a : $\Gamma^-(C) = \{B, D\}$ (ils représentent les joueurs ayant battu C).

Les successeurs d'un sommet x sont l'ensemble de sommets $\Gamma^+(x)$ tels qu'il existe des arêtes reliant x à chacun des sommets dans $\Gamma^+(x)$ (on a alors : $\Gamma^+(x) = \{y \in X | (x, y) \in E\}$). Pour le graphe considéré, on a : $\Gamma^+(C) = \{A\}$.

Les voisins d'un sommet x sont l'union de ses prédécesseurs et ses successeurs : $\Gamma(x) = \Gamma^+(x) \cup \Gamma^-(x)$. Ainsi, on a : $\Gamma(C) = \{A, B, D\}$.

1.3.2 Les degrés dans un graphe orienté

Évidemment, un graphe orienté peut être caractérisé déjà par son ordre et sa taille. Chaque sommet peut également être caractérisé par son degré mais nous avons besoin de différencier entre les arcs entrants et les arcs sortants.

Pour un sommet x, on appelle son demi-degré extérieur la cardinalité de $\Gamma^+(x)$, et on le note par : $d^+(x)$. Le demi-degré intérieur d'un sommet x est la cardinalité de $\Gamma^-(x)$, et on le note par $d^-(x)$. Le degré de x (noté $d_G(x)$) est donné par la somme de son demi-degré extérieur et son demi-degré intérieur.

Pour le graphe de la figure 1.17, les différents degrés sont donnés par la table suivante :

Sommet	**A**	**B**	**C**	**D**	**Total**
$\mathbf{d^+(x)}$	2	2	1	1	6
$\mathbf{d^-(x)}$	1	1	2	2	6
$\mathbf{d_G(x)}$	3	3	3	3	12

Les graphes orientés possèdent une propriété reliant les demi-degrés :

Théorème 8

Soit $G = (X, E)$ un graphe orienté, nous avons alors :

$$\sum_{x \in X} d_G^+(x) = \sum_{x \in X} d_G^-(x)$$

Ce qui fait que la somme des degrés d'un graphe orienté est toujours paire.

1.3.3 Les chemins et circuits

Étant donné qu'un arc possède une direction, on ne peut pas utiliser les notions de chaînes et de cycles directement dans un graphe orienté.

Dans un graphe $G = (X, E)$, un *chemin* entre deux sommets x et y (on n'utilise pas le terme chaîne) est une suite de sommets x_0, x_1,..., x_k tels que $x_0 = x$, $x_k = y$ et $(x_{i-1}, x_i) \in E$ pour tout i. La notion de la direction est importante ici car si x_0, x_1,..., x_k est un chemin, alors $x_k, x_{k-1}, ..., x_0$ n'est pas forcément un chemin. La longueur du chemin ici est k. Dans la figure 1.17, le chemin A, B, C est de longueur 2. Le chemin A a une longueur de 0.

Lorsque le début d'un chemin se coïncide avec sa fin ($x_0 = x_k$), on dit que le chemin est un *circuit*. Dans le graphe considéré ici, A, B, C, A est un circuit.

La notion de cocycle pour les graphes non-orientés correspond à la notion de *cocircuit* pour les graphes orientés. Soit A un ensemble de sommets d'un graphe $G = (X, E)$. On note par $w^+(A)$ l'ensemble d'arcs ayant leurs extrémités initiales dans A et leurs extrémités finales dans $X - A$. On note aussi par $w^-(A)$ l'ensemble d'arcs ayant leurs extrémités initiales dans $X - A$ et leurs extrémités finales dans A. Le cocircuit de A (noté $w(A)$) est donné par : $w(A) = w^+(A) \cup w^-(A)$. Ainsi, pour le graphe considéré, si $Z = \{A, B\}$ alors le cocircuit de Z est $\{(A, D), (B, C), (B, D), (C, A)\}$.

1.3.4 Représentation non graphique d'un graphe orienté

Un graphe orienté peut aussi être représenté par une matrice d'adjacence. Cette matrice carrée a n lignes et n colonnes, tel que n est l'ordre du graphe ; les lignes et colonnes correspondent aux sommets. S'il y a un arc entre le sommet x et le sommet y, alors on met 1 dans la case correspondante, sinon 0. La matrice d'adjacence du graphe de la figure 1.17 est :

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

On peut donc voir que la matrice d'adjacence n'est pas, en général, symétrique. La matrice d'incidence nécessite un peu de modifications lorsqu'on la construit car on a besoin de différencier entre les arcs entrants et les arcs sortants. Pour un graphe donné, les lignes de la matrice d'incidence correspondent aux sommets et les colonnes aux arcs. Pour un arc entrant à un sommet, on met 1, si l'arc est sortant, on met -1.

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Les listes d'adjacences peuvent également être utilisées pour représenter un graphe orienté. On fera, cependant, attention ici au fait que les listes d'adjacence font figurer les successeurs des sommets uniquement, et non tout le voisinage étant donné que cela créera une redondance de données (en d'autres termes, on ne représente pas les prédécesseurs).

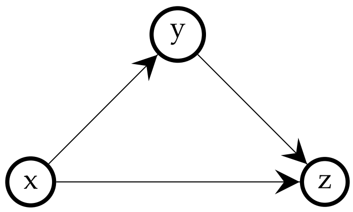
La matrice d'adjacence possède un avantage de taille par rapport aux autres représentations. En effet, soit M la matrice d'adjacence d'un graphe, notons avant tout que cette matrice donne les arcs entre les sommets. On peut donc considérer qu'elle représente les chemins de longueur 1. La matrice M est carrée, on peut alors calculer le produit matriciel $M^2 = M.M$. L'élément $a_{i,j}$ de M^2 est calculé par : $a_{i,j} = \sum_k M_{i,k} M_{k,j}$, ce qui signifie que l'on considère un chemin du sommet i vers le sommet j passant par le sommet k. Étant donné que l'on fait la somme, on considère alors le nombre des chemins de longueur 2 entre i et j. En généralisant, on obtient $M^n = M.M^{n-1}$ la matrice donnant le nombre de chemins de longueur n d'un sommet à un autre.

Puissance de M	**Résultat**	**Puissance de M**	**Résultat**
M	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	M^3	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
M^2	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	M^4	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

1.3.5 Graphe transitif et fermeture transitive d'un graphe

Un graphe orienté modélise une relation binaire sur un ensemble de sommets. On peut alors définir certaines propriétés des relations pour les graphes. Parmi ces propriétés, on nomme la transitivité qui signifie que si un élément x est en relation avec y et que celui-ci est relation avec z, alors x est en relation avec z.

Un graphe transitif est un graphe ayant la propriété suivante : s'il y a un arc de x vers y, et un arc entre y et z alors, il y a un arc entre x et z, comme on peut le voir ici :



Pour tout graphe non-transitif G, on peut construire un graphe transitif G^* appelé *fermeture transitive* du graphe. L'idée est de rendre le graphe transitif : s'il y a un arc entre x et y, un arc entre y et z et s'il n'y a pas d'arc entre x et z, alors rajouter cet arc.

La figure 1.18 donne un exemple d'un graphe non-transitif auquel on a rajouté les arcs en rouge pour qu'il devienne transitif. Le graphe obtenu est donc appelé la fermeture transitive du premier graphe (celui dont les arcs sont en noir).

Dans la fermeture transitive G^* d'un graphe G, il y a une transition entre un sommet x et y si et seulement s'il existe un chemin entre x et y dans le graphe G. La fermeture transitive permet alors de rechercher des chemins entre des sommets d'un graphe (ce problème s'appelle problème d'accessibilité et possède beaucoup d'applications).

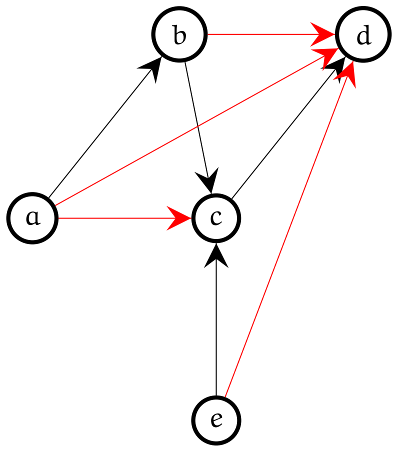


Figure 1.18 : la fermeture transitive d'un graphe (les arcs rouges représentent la fermeture transitive calculée)

Il existe plusieurs algorithmes pour la construction de la fermeture transitive. L'un d'eux est basée sur la matrice adjacence. Soit M la matrice d'adjacence d'un graphe, on a déjà vu que cette matrice représente le nombre de chemins de longueur 1 entre les sommets du graphe. En calculant les différentes puissances M^i de la matrice, on calcule alors le nombre de chemins de longueur i

entre les sommets du graphe. Si le graphe est d'ordre n, alors les circuits peuvent avoir une longueur maximale de $n-1$. L'algorithme de construction est alors le suivant :

Algorithme de construction de la fermeture transitive d'un graphe G

$n = \mathtt{ordre}(G)$

M=matrice d'adjacence de G

calculer $M^* = M \oplus M^2 \oplus ... \oplus M^{n-1}$ (il s'agit d'une somme booléenne, c'est-à-dire que $u \oplus v = 1$ si $u \neq 0$ ou $v \neq 0$, sinon c'est 0)

Si on applique cet algorithme au graphe de la figure 1.18 (uniquement la partie en noir), on obtient :

M	M^2	M^3	M^4
$\begin{pmatrix} 0&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$

La matrice M^* est donc :

$$\begin{pmatrix} 0&1&1&1&0\\ 0&0&1&1&0\\ 0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&1&1&0 \end{pmatrix}$$

Cet algorithme n'est pas efficace car il nécessite n^4 itérations. Un autre algorithme plus efficace s'appelle algorithme de Warshall et nécessite n^3 itérations seulement.

Algorithme de Warshall pour la construction de la fermeture transitive d'un graphe G

```
n = ordre(G)
M=matrice d'adjacence de G
R^(0) = M
pour k = 1..n faire
    pour i = 1..n faire
        pour j = 1..n faire
            R^k_(i,j) = R^(k-1)_(i,j) ou (R^(k-1)_(i,k) et R^(k-1)_(k,j))
M* = R^(n)
```

L'application au graphe précédent donne le déroulement suivant :

$R^{(0)}$	$R^{(1)}$	$R^{(2)}$	$R^{(3)}$
$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$R^{(4)}$	$R^{(5)}$
$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1.3.6 Graphe fortement connexe et composantes fortement connexes

La notion de connexité s'applique aussi aux graphes orientés. La seule différence est que la définition se repose sur la notion de chemins.

Un graphe est dit *fortement connexe* (attention, on ne dit pas connexe seulement) si pour toute paire de sommets (x, y) il existe au moins chemin entre x et y. Depuis n'importe quel sommet, on peut alors atteindre n'importe quel autre chemin.

Une *composante fortement connexe* est un sous-graphe qui est fortement connexe. Un graphe fortement connexe contient une seule composante connexe égale à lui-même.

Si un graphe n'est pas fortement connexe, alors on peut être intéressé par trouver ses composantes connexes. Ceci se fait par un algorithme dit de marquage.

Algorithme de marquage pour trouver les composantes connexes d'un graphe G

1. $k = 0$
2. choisir un sommet x et le marquer par (+) et (-), $k = k + 1$
3. marquer tous les successeurs directs et indirects de x par (+)
4. marquer tous les prédécesseurs directs et indirects par (-)
5. les sommets marqués avec (+) et (-) forment la composante connexe C_k
6. retirer tous les sommets de C_k, effacer toutes les marques et recommencer 2 tant qu'il reste des sommets dans le graphe

On applique cet algorithme au graphe de la figure 1.19.

	1	2	3	4	5	6	
Marquage	+-	+	+	+	+	+	$C_1 = \{1\}$
Marquage		+-	+-	+	+	+	$C_2 = \{2, 3\}$
Marquage				+-	+-	+-	$C_3 = \{4, 5, 6\}$

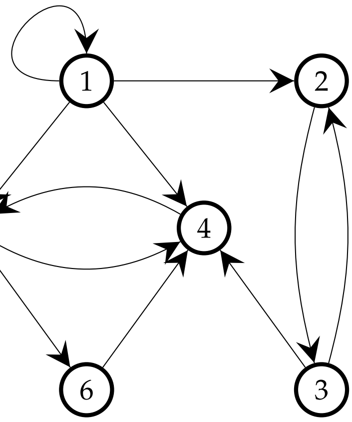


Figure 1.19 : le graphe pour calculer les composantes connexes

Lorsqu'on termine de déterminer les composantes connexes, on peut construire ce qu'on appelle le *graphe réduit* : c'est un graphe dont les sommets sont les composantes connexes, lorsqu'il y a un arc entre $x \in C_i$ et $y \in C_j$ $(i \neq j)$ alors on trace un arc entre C_i et C_j. Pour le dernier exemple, le graphe réduit est donné par la figure 1.20.

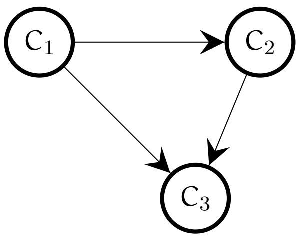


Figure 1.20 : le graphe réduit du graphe de la figure 1.19

1.3.7 Ordonnancement d'un graphe

Dans un graphe orienté connexe et sans circuit, l'ordonnancement des sommets consiste à organiser les sommets en niveaux tels que les arcs vont seulement d'un niveau inférieur à un niveau supérieur (pas forcément successifs). En d'autres termes, l'ordonnancement d'un graphe $G = (X, E)$ ici consiste à définir une fonction $f : X \to \mathbb{N}$ donnant le niveau ou ce que l'on appelle le rang de chaque sommet. Ceci permet de tracer un graphe où tous les arcs partent dans le même sens.

L'ordonnancement utilise les prédécesseurs des sommets car les sommets de rang 1 n'ont pas de prédécesseurs.

Algorithme de classement des sommets en rangs d'un graphe G

1 $\underline{rang} = 1$
2 déterminer les sommets non classés dont l'ensemble des prédécesseurs est vide
3 leur affecter le niveau $\underline{rang}$
4 $\underline{rang} = \underline{rang} + 1$
5 s'il existe encore des sommets non classés dans G, aller à 2

On applique cet algorithme au graphe de la figure 1.21.

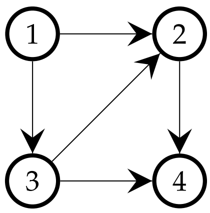


Figure 1.21 : graphe pour calculer les rangs

x	Γ^-	**Action**	x	Γ^-	**Action**	x	Γ^-	**Action**	x	Γ^-	**Action**
1	$\emptyset$	$niv(1) = 1$	1	-		1	-		1	-	
2	1,3		2	3		2	$\emptyset$	$niv(2) = 3$	2	-	
3	1		3	$\emptyset$	$niv(3) = 2$	3	-		3	-	
4	2,3		4	2,3		4	2		4	$\emptyset$	$niv(4) = 4$

La figure 1.22 donne le classement des sommets en niveaux (de 1 à 4).

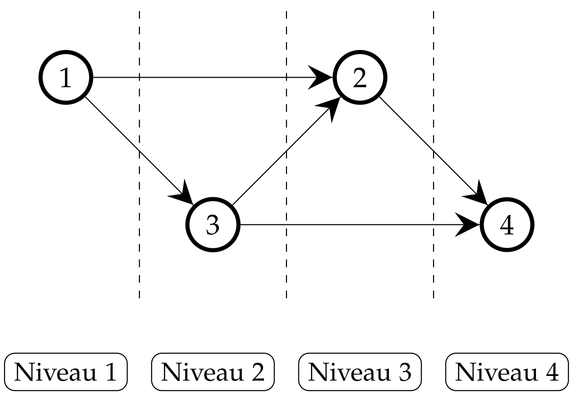


Figure 1.22 : classement des sommets du graphe en niveaux

1.3.8 Recherche de circuits dans un graphe

La recherche de circuits dans un graphe orienté possède plusieurs applications. Par exemple, si le graphe représente des processus qui attendent d'autres processus, alors l'existence d'un circuit indique la présence d'un interblocage.

La recherche de circuits peut se faire en utilisant l'algorithme de la fermeture transitive notamment avec l'algorithme de Warshall (ou même la première méthode). Dans l'algorithme, si, à une itération donnée, on trouve un k et i tel que $R^{(k)}_{(i,i)} = 1$ alors le graphe contient un circuit. Mais cette procédure ne permet pas de construire le circuit.

Dans l'algorithme de classement des sommets, si un graphe contient un circuit alors on trouvera forcément une itération dans laquelle tous les sommets possèdent des prédécesseurs (rappelons que le graphe est fortement connexe). Ceci bloque l'algorithme de classement, mais indique la présence d'un circuit que l'on peut construire comme suit :

Algorithme de détection et de construction d'un circuit dans un graphe G

1. appliquer l'algorithme de classement jusqu'au blocage (une itération dans laquelle tous les sommets ont des prédécesseurs). Si une telle itération existe alors le graphe possède un circuit
2. choisir un sommet pas encore classé et le marquer (soit le sommet x_0), et marquer l'un de ses prédécesseurs
3. choisir un des prédécesseurs du dernier sommet marqué (il ne doit pas être marqué) et le marquer
4. répéter 3 jusqu'à revenir à x_0
5. le circuit consiste à écrire le chemin à partir de x_0 mais dans l'ordre inverse

On applique maintenant au graphe de la figure 1.23.

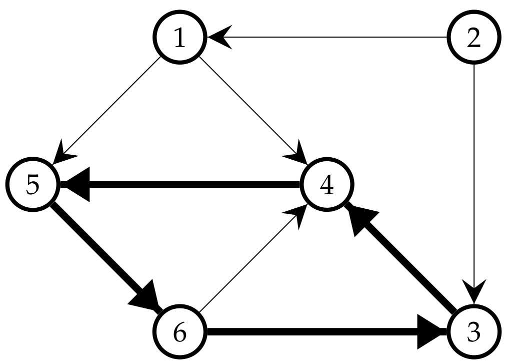


Figure 1.23 : exemple de graphe avec circuit

x	Γ^-	**Action**	x	Γ^-	**Action**	x	Γ^-	**Action**
1	2		1	$\emptyset$	$niv(1) = 2$	1	-	il y a un circuit
2	$\emptyset$	$niv(2) = 1$	2	-		2	-	
3	2,6		3	6		3	6	
4	1,3,6		4	1,3,6		4	3,6	
5	1,4		5	1,4		5	4	
6	5		6	5		6	5	

On choisit ainsi la chaîne : 3, 6, 5, 4 ,3 (le choix de 3 au début est arbitraire). Le circuit est alors : 3, 4, 5, 6, 3.

1.4 Série de TD n°1- graphes non-orientés

Exercice 1

Étant donné un groupe de 10 personnes, le tableau suivant indique les paires de personnes qui ont une relation d'amitié.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3,6,7	6,8	1,6,7	5,10	4,10	1,2,3,7	1,3,6	2	-	4,5

1. Représentez cette situation par un graphe G.
2. Donnez un sommet pendant et un sommet isolé de G.
3. Vérifiez qu'il existe au moins deux personnes ayant le même nombre d'amis.

Exercice 2

Une suite décroissante (au sens large) d'entiers est dite *graphique* s'il existe un graphe dont les degrés des sommets correspondent à cette suite.
Les suites suivantes $(3, 3, 2, 1, 0)$ et $(3, 3, 2, 2, 0)$ sont-elles graphiques ? Justifiez. Si oui, tracez les graphes correspondants (graphes simples).

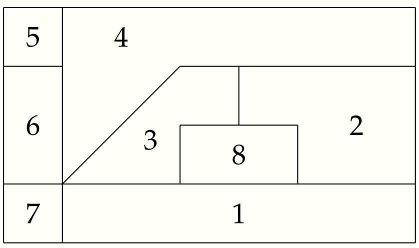
Exercice 3

Trois pays envoient, chacun, 2 espions à une conférence. Chaque espion doit espionner tous les espions des autres pays (mais pas son propre collègue).

1. Représentez cette situation par un graphe.
2. Quel est le degré de chaque sommet ? Déduisez le nombre d'arêtes.

Exercice 4

Huit pays sont représentés avec leurs frontières communes selon la figure suivante :



Deux pays sont considérés voisins s'ils ont une frontière commune. Représentez cette situation par un graphe simple.

Exercice 5

Dans une administration, on voudrait programmer 4 conférences auxquelles participent 7 responsables de service. Chaque responsable peut participer à plusieurs conférences comme l'indique le tableau suivant :

Participant	**Les conférences**	**Participant**	**Les conférences**
R1	C1,C2,C3	R5	C1,C3
R2	C2,C4	R6	C1,C3
R3	C2,C4	R7	C2,C4
R4	C1,C2		

Donnez le graphe G des conférences qui ne peuvent avoir lieu au même moment ainsi que le graphe des conférences qui peuvent avoir lieu au même moment.

Exercice 6

Un tournoi d'échecs oppose 6 personnes. Chaque joueur doit affronter tous les autres.

1. Construisez un graphe représentant toutes les parties possibles.
2. Quel type de graphe obtenez-vous ?

Exercice 7

Dans un atelier, 5 ouvriers peuvent effectuer de 1 à 4 tâches selon le tableau suivant :

Ouvrier	**Tâches**
1	1,2
2	2,4
3	2,3
4	2,3
5	3,4

1. Représentez les possibilités d'affectation des ouvriers aux différentes tâches par un graphe biparti.
2. Donnez le graphe permettant à chaque ouvrier d'effectuer toutes les tâches.

Exercice 8

On s'intéresse aux graphes dont tous les sommets sont de degré 3 appelés graphe 3-réguliers (graphe simple).

1. Construisez de tels graphes ayant 4 sommets, 5 sommets, 6 sommets et 7 sommets.
2. Qu'en déduisez-vous ?
3. Calculez le nombre d'arêtes d'un graphe 3-régulier à n sommets.

Exercice 9

Dans un archipel, les îles sont reliées les unes aux autres par des ponts. Sur chaque île, il y a nombre pair de ponts. De plus, on peut aller depuis n'importe quelle île à n'importe quelle autre île. Un jour, il y a eu des travaux sur un des ponts, mais on a constaté que la circulation entre les îles est toujours possibles.
Modélisez cette situation avec la théorie des graphes et expliquez le dernier constat.

Exercice 10

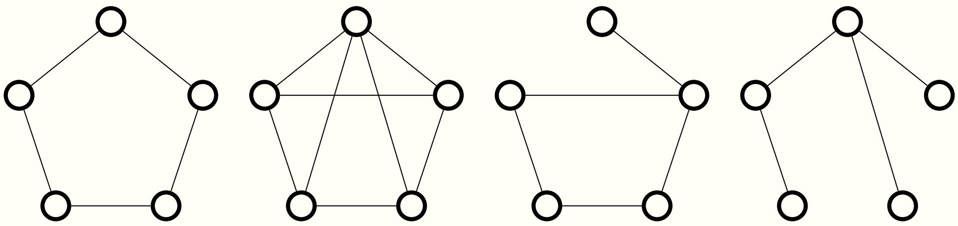
Donner le graphe planaire des graphes K_4 et $K_{2,3}$. Vérifiez pour chacun d'eux la formule de planarité.
Vérifiez aussi la planarité du graphe de l'exercice 4 puis construisez son graphe dual.

Exercice 11

Soient 3 villas V1, V2 et V3 que l'on veut relier par des conduites à une usine de production d'eau (D) à une usine de production de gaz (G) et à une usine de production d'électricité (E). Est-il possible de relier ces connexions sans que deux conduites ne se croisent en dehors de leur extrémité ?

Exercice 12

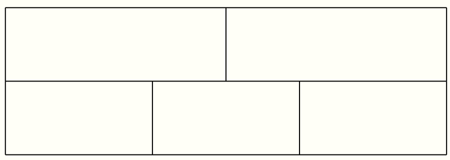
Parmi les graphes suivants dites quels sont ceux qui sont hamiltoniens, eulériens.



G1 G2 G3 G4

Exercice 13

Soit le schéma suivant :



Est-il possible de tracer une courbe, sans lever le crayon, qui passe une seule fois par chacun des 16 segments du schéma ?

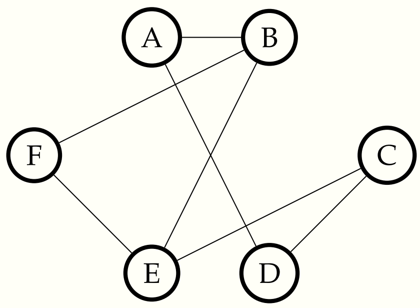
Exercice 14

On appelle codage de Gray un codage binaire des entiers dans lequel tout entier ne diffère que d'un bit de son successeur. Il n'y a pas alors de correspondance directe entre un entier et sa représentation.

1. Construisez un graphe où les sommets représentent les codages possibles et les arêtes relient les sommets se différenciant d'un seul bit. On considère ici trois bits.
2. Si un cycle hamiltonien existe dans ce graphe, quelle est sa signification ?
3. Quelle est la nature du graphe obtenu ?

Exercice 15

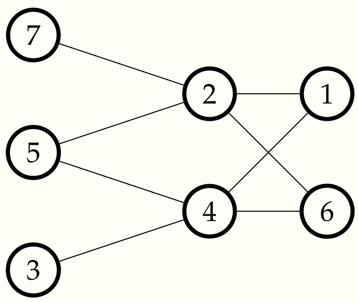
Six personnes se retrouvent pour un repas de mariage. Le graphe ci-dessous précise les incompatibilités d'humeur entre ces personnes (une arête reliant deux personnes indique qu'elles ne se supportent pas).



Proposez un plan de table (la table est ronde) en évitant de placer côte à côte deux personnes incompatibles.

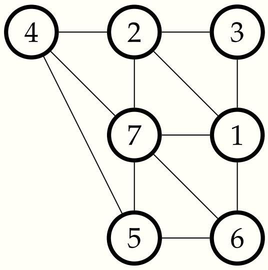
Exercice 16

Décrivez le graphe suivant par sa matrice d'adjacence puis par sa matrice d'incidence.



Exercice 17

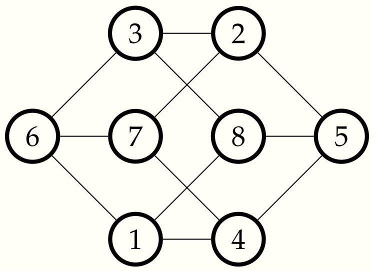
Soit le graphe suivant :



1. Donnez un encadrement du nombre chromatique du graphe.
2. Appliquez l'algorithme de Welsh et Powell pour colorier ce graphe.
3. Est-ce que le résultat est compatible avec la nature de ce graphe ?

Exercice 18

Soit le graphe suivant :



1. Donnez un encadrement du nombre chromatique.
2. Montez que le graphe est biparti. Déduisez alors son nombre chromatique.
3. Étant donné que tous les sommets ont le même degré, on applique l'algorithme de Welsh et Powell en utilisant un ordre correspondant au numéro des sommets (indiqué sur la figure). Quel résultat obtenez-vous ? Commentez.

Exercice 19

On dispose de 6 types de poissons. Malheureusement, certains poissons ne peuvent pas être mis dans le même aquarium, soit parce qu'ils s'attaqueraient soit parce qu'ils ont besoin de conditions spéciales (température, ...). Le tableau suivant résume les incompatibilités entre eux :

Le poisson	A	B	C	D	E	F
Ne peut être avec	B, C	A, C, E	A, B, D, E	C, F	B, C, F	D, E

1. Représentez cette situation par un graphe.
2. Quel est le nombre minimal d'aquarium pour faire vivre tous ces poissons ?

Exercice 20

Soit $T = \{t_1, t_2, t_3, t_4, t_5\}$ un ensemble de 5 travaux et $M = \{m_1, m_2, m_3, m_4, m_5\}$ un ensemble de 5 machines. Chaque travail nécessite un certain nombre de machines comme suit :

t_1	t_2	t_3	t_4	t_5
m_1, m_3, m_5	m_1, m_2, m_4	m_2, m_3, m_5	m_2, m_4	m_5

Le temps nécessaire à l'exécution de chaque travail est le même, mais deux travaux différents ne peuvent être exécutés simultanément que s'ils utilisent des machines différentes.

1. Modélisez le problème sous forme d'un graphe.
2. Donnez la liste des travaux pouvant être exécutés simultanément.
3. Donnez le temps minimum nécessaire pour réaliser l'ensemble des travaux.

1.5 Série de TD n°2 - graphes orientés

Exercice 1

Dans une partie de jeu d'échecs, le joueur a effectué les déplacements suivants pour son cavalier :

$$B1 \rightarrow A3 \rightarrow B5 \rightarrow C3 \rightarrow A4 \rightarrow C3 \rightarrow D5$$

Représentez les déplacements du cavalier par un graphe orienté.

Exercice 2

On définit une relation R sur l'ensemble des 10 premiers entiers naturels :

$$X \; R \; Y \Leftrightarrow X \text{ est diviseur de } Y$$

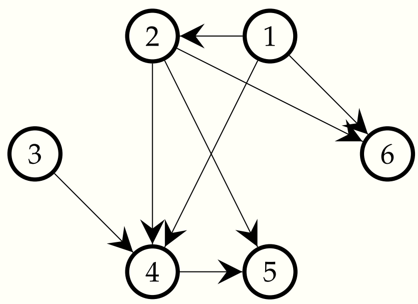
1. Représentez cette relation par un graphe orienté.
2. Déterminez à partir du graphe l'ensemble des nombres pairs et l'ensemble des nombres premiers.

Exercice 3

On dispose de deux seaux non gradués ayant respectivement les capacités de 4 et 3 litres. On voudrait mettre exactement 2 litres d'eau dans le premier seau.
A l'aide d'un graphe, modélisez la résolution de ce problème.

Exercice 4

Soit le graphe suivant :



1. Trouvez les degrés extérieurs et intérieurs ainsi que le degré de chacun des sommets.
2. Quel est le degré de ce graphe ?
3. Donnez sa matrice d'adjacence ainsi que les listes d'adjacence.