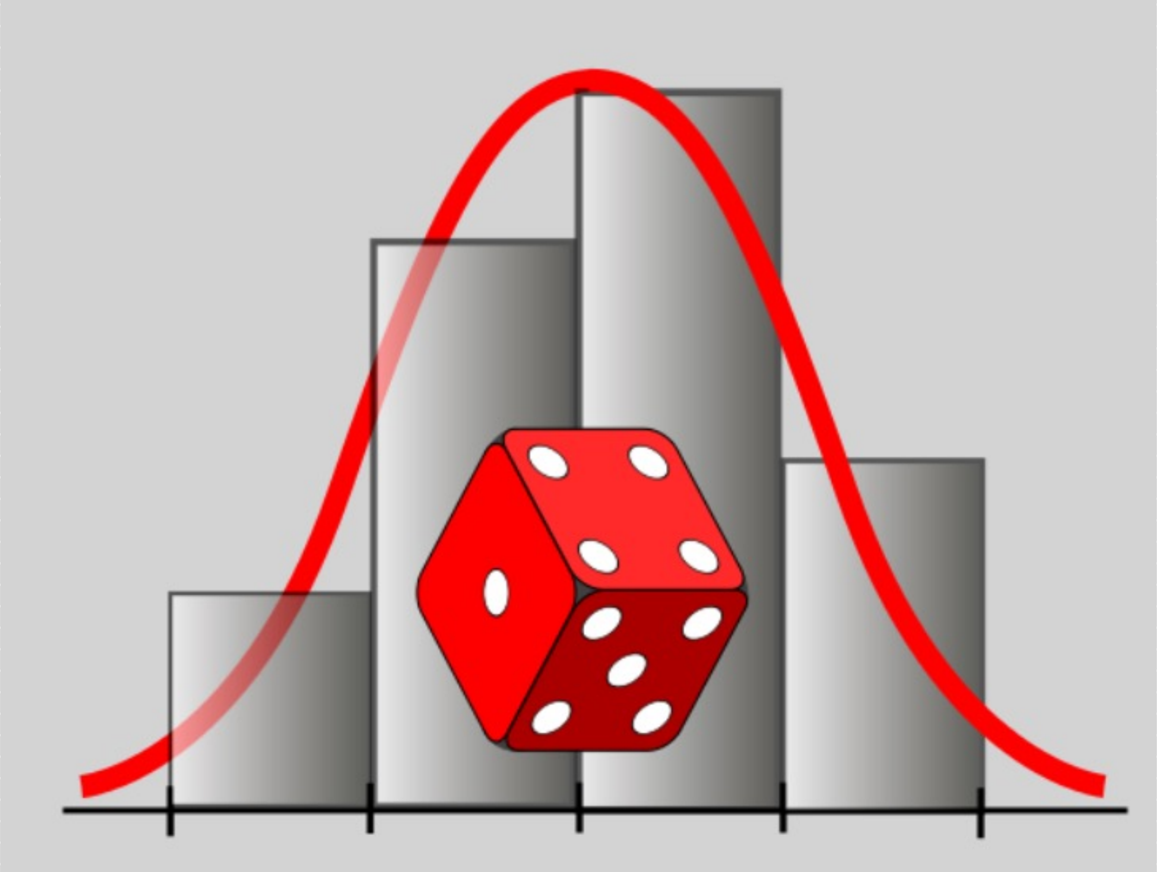
Основы статистики и проверки гипотез

Артём Глазунов

Часть 1. Статистика



В этой части нас ждёт:

В этой части нас ждёт:

- Случайная величина и её реализации
- Гистограммы и распределения
- Основные статистики
- Примеры распределений
- Генеральная совокупность и выборки
- Точечные и интервальные оценки
- Метод максимального правдоподобия в статистике

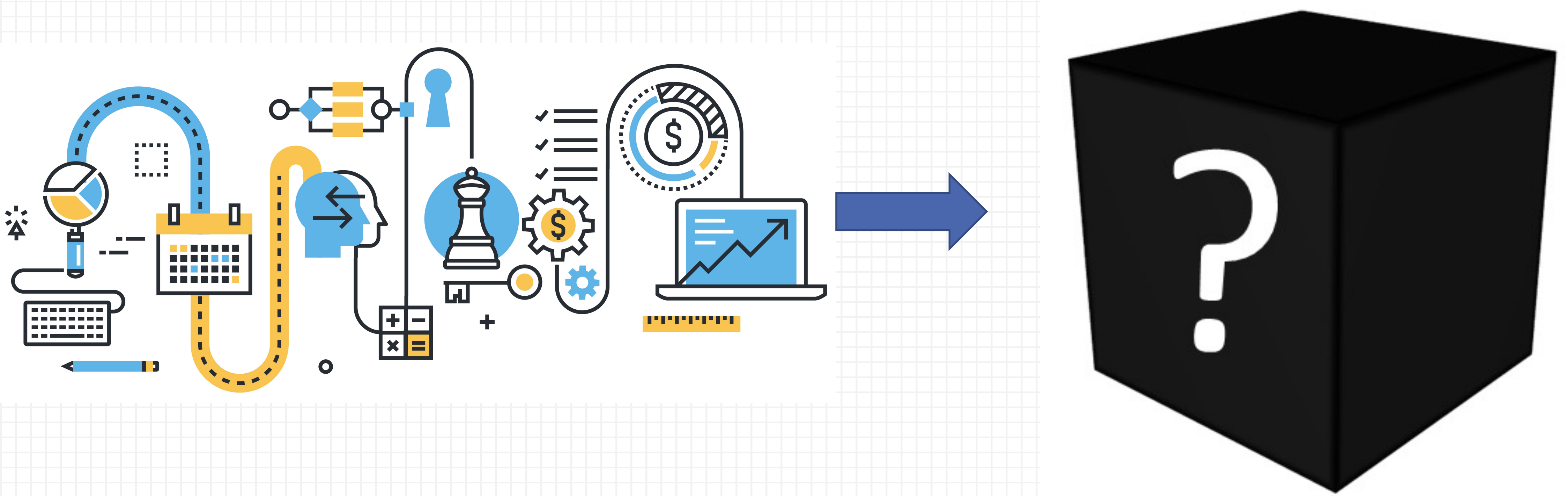
Случайная величина и её реализации

Случайная величина и её реализации

- **Большинство явлений окружающего мира довольно <u>сложны</u>, чтобы их описать <u>детерминированными</u> законами**

Случайная величина и её реализации

- Большинство явлений окружающего мира довольно <u>сложны</u>, чтобы их описать <u>детерминированными</u> законами
- **<u>Для простоты</u> исход какого-то процесса можно рассматривать как нечто неопределенное, <u>случайное</u>, а сам процесс тут будет для нас «черным ящиком». Что внутри, нам не интересно, но нам интересно, как будет вести себя исход такого процесса «в среднем».**



Случайная величина и её реализации

- Большинство явлений окружающего мира довольно сложны, чтобы их описать <u>детерминированными</u> законами
- <u>Для простоты</u> исход какого-то процесса можно рассматривать как нечто неопределенное, <u>случайное</u>, сам процесс тут будет для нас «черным ящиком». Что внутри, нам не интересно, но нам интересно, как будет вести себя исход такого процесса «в среднем».
- **В таком подходе <u>число на выходе</u> такого «черного ящика» называется <u>случайной величиной</u>, которая может принимать <u>множество значений</u> - <u>реализаций</u>.**

Пример случайной величины: результат подбрасывания монетки

Пример случайной величины: результат подбрасывания монетки

Особенности процесса:

Имеем много факторов, влияющих на исход:
- Внутренние факторы (к примеру, неидеальность формы монеты)
- Внешние факторы (рука бросающего дрогнула, ветер и пр.)

Пример случайной величины: результат подбрасывания монетки

Особенности процесса:

Имеем много факторов, влияющих на исход:
- Внутренние факторы (к примеру, неидеальность формы монеты)
- Внешние факторы (рука бросающего дрогнула, ветер и пр.)

Так что трудно аналитически описать и вычислить исход.

Пример случайной величины: результат подбрасывания монетки

Особенности процесса:

Имеем много факторов, влияющих на исход:
- Внутренние факторы (к примеру, неидеальност
формы монеты)
- Внешние факторы (рука бросающего дрогнула,
ветер и пр.)

Так что трудно аналитически описать и вычислить исход.

При этом, всего 2 практически реализуемых исхода:
- Орёл
- Решка

Пример случайной величины: результат подбрасывания монетки

Особенности процесса:

Имеем много факторов, влияющих на исход:
- Внутренние факторы (к примеру, неидеальност
формы монеты)
- Внешние факторы (рука бросающего дрогнула,
ветер и пр.)

Так что трудно аналитически описать и вычислить исход.

При этом, всего 2 практически реализуемых исхода:
- Орёл
- Решка

Возможен и третий – монета на ребре (очень редко), не будем его учитывать.

Пример случайной величины: результат подбрасывания монетки

Что удобнее?

Пример случайной величины: результат подбрасывания монетки

Что удобнее?

- *Использовать физическую модель подбрасывания и полёта монеты?*

- *Или моделировать такой процесс, как случайный?*

Пример случайной величины: результат подбрасывания монетки

Что удобнее?

- *Использовать физическую модель подбрасывания и полёта монеты?*

- *Или моделировать такой процесс, как случайный?*

Мы ведь догадываемся, что «в среднем» при многократном подбрасывании монеты мы будем иметь равное количество Орлов и Решек.

Пример случайной величины: результат подбрасывания монетки

Что удобнее?

- *Использовать физическую модель подбрасывания и полёта монеты?*
- *Или моделировать такой процесс, как случайный?*

Мы ведь догадываемся, что «в среднем» при многократном подбрасывании монеты мы будем иметь равное количество Орлов и Решек.

Проведём же множество экспериментов и будем знать всё, что нам нужно о процессе. Главное - понять, как анализировать такие эксперименты.

Пример случайной величины: результат подбрасывания монетки

Что удобнее?

- *Использовать физическую модель подбрасывания и полёта монеты?*

- *Или моделировать такой процесс, как случайный?*

Мы ведь догадываемся, что «в среднем» при многократном подбрасывании монеты мы будем иметь равное количество Орлов и Решек.

Проведём же множество экспериментов и будем знать всё, что нам нужно о процессе. Главное - понять, как анализировать такие эксперименты.

Так и в других кейсах:
Зная результаты из прошлого, с помощью аппарата работы со случайными величинами мы можем получить формализованные выводы для себя, наша уверенность в завтрашнем дне растёт.

Гистограммы и распределения

Гистограммы и распределения

Как мы поняли, можно исследовать случайную величину через её многократные реализации.

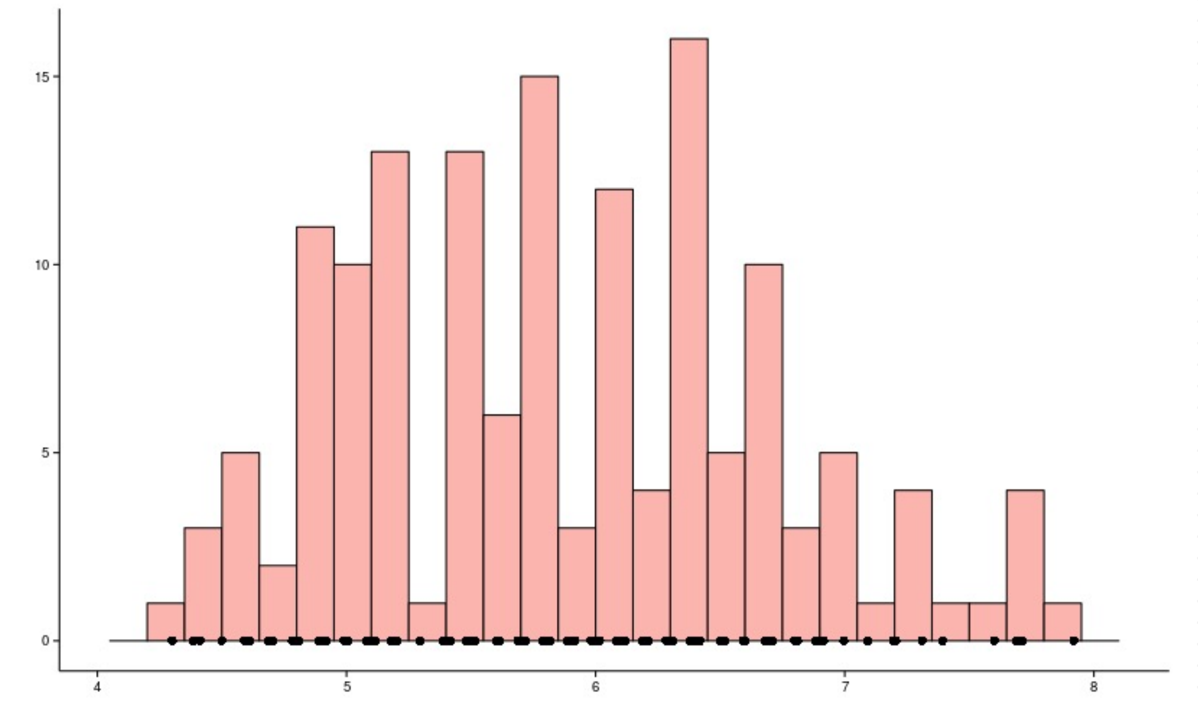
Гистограммы и распределения

Как мы поняли, можно исследовать случайную величину через её многократные реализации.

Но как на это всё смотреть, ведь не таблицы же изучать?

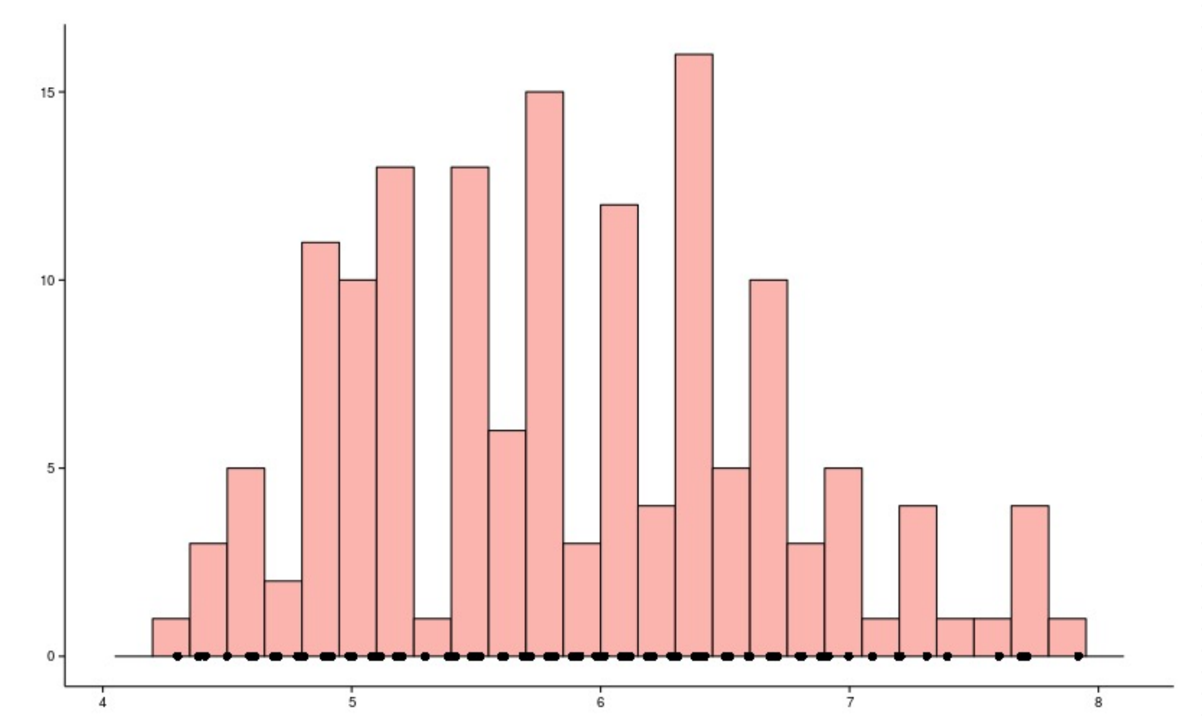
Гистограммы и распределения

Как мы поняли, можно исследовать случайную величину через её многократные реализации.
Но как на это всё смотреть, ведь не таблицы же изучать?
Для удобства графического представления результатов множества экспериментов используют прекрасный инструмент – <u>гистограммы</u>.



Гистограммы и распределения

Как мы поняли, можно исследовать случайную величину через её многократные реализации.
Но как на это всё смотреть, ведь не таблицы же изучать?
Для удобства графического представления результатов множества экспериментов используют прекрасный инструмент – гистограммы.



Ну рисунке по горизонтальной оси отложены значения, которые может принимать случайная величина, а по вертикальной – сколько раз значения из эксперимента попали в каждый из интервалов (бинов).

Гистограммы и распределения

Оказывается, что если:

Гистограммы и распределения

Оказывается, что если:

- эксперименты проводить достаточно долго

Гистограммы и распределения

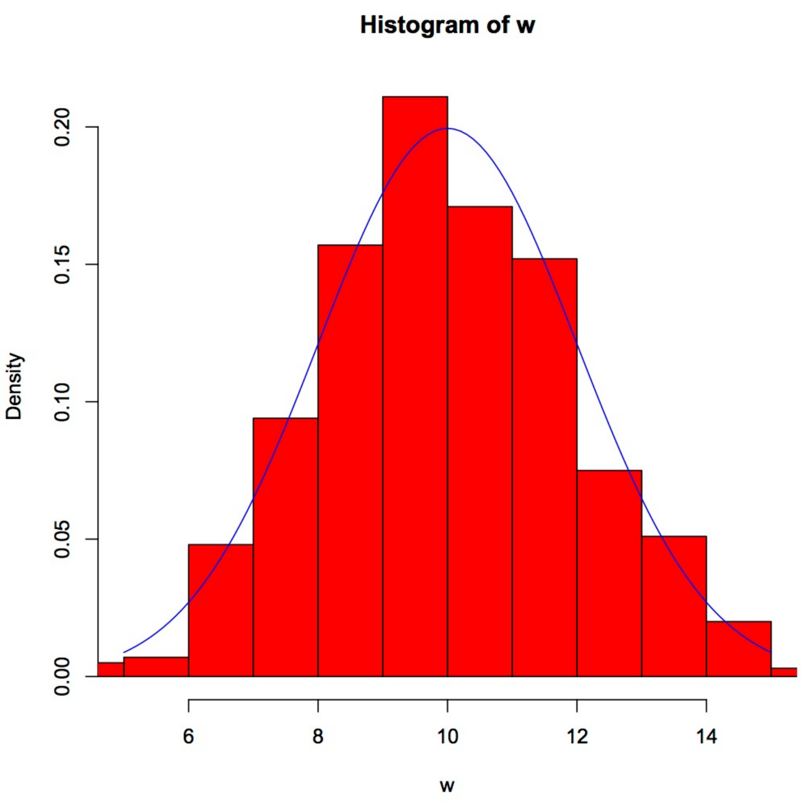
Оказывается, что если:
- эксперименты проводить достаточно долго,
- брать много бинов

Гистограммы и распределения

Оказывается, что если:
- эксперименты проводить достаточно долго,
- брать много бинов,
- немного «поколдовать» над масштабом (площадь -> 1)

Гистограммы и распределения

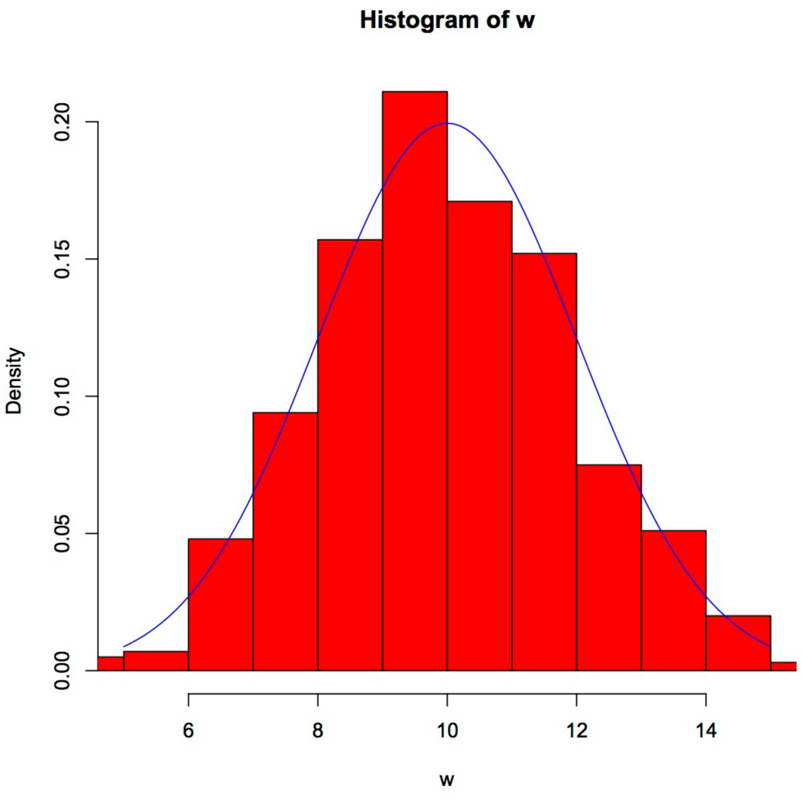
Оказывается, что если:
- эксперименты проводить достаточно долго,
- брать много бинов,
- немного «поколдовать» над масштабом (площадь -> 1)



Получим распределение вероятностей для реализаций данной случайной величины.

Гистограммы и распределения

Оказывается, что если:
- эксперименты проводить достаточно долго,
- брать много бинов,
- немного «поколдовать» над масштабом (площадь -> 1)

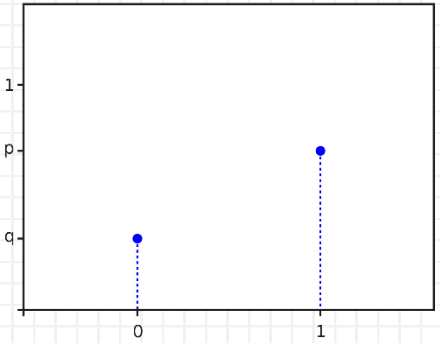


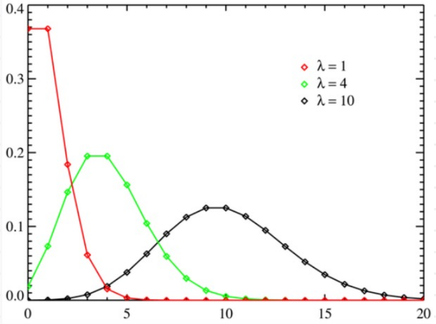
Получим распределение вероятностей для реализаций данной случайной величины.

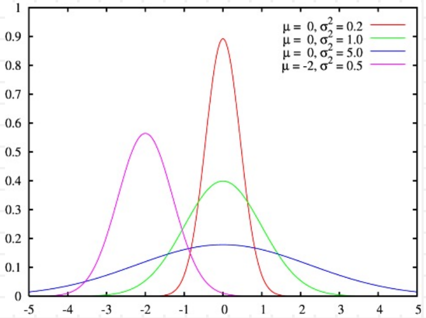
По распределению мы можем оценить, какие диапазоны значений для случайной величины более вероятны, а какие менее.

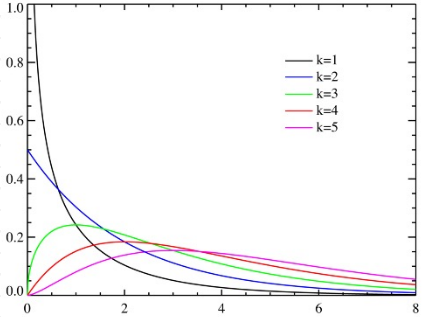
Гистограммы и распределения

Полученное опытным путём распределение можно <u>приблизить</u> каким-то из известных распределений, для которых у нас есть формулы.



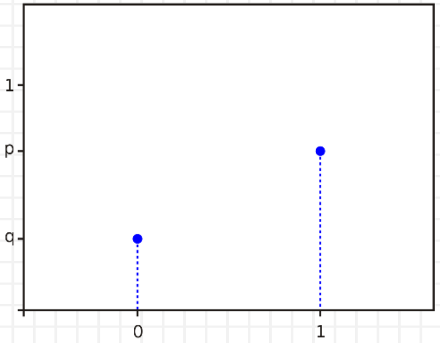


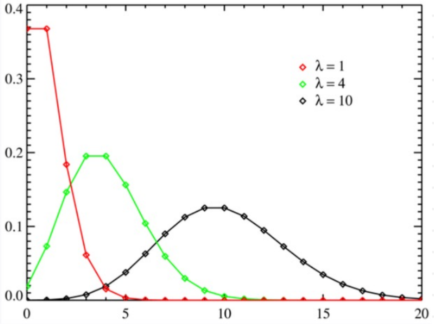


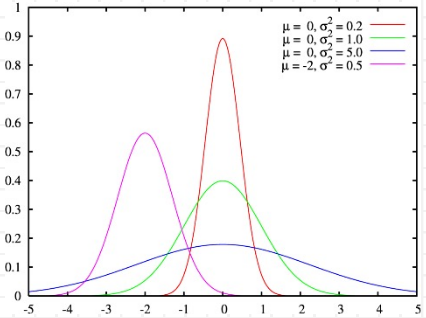


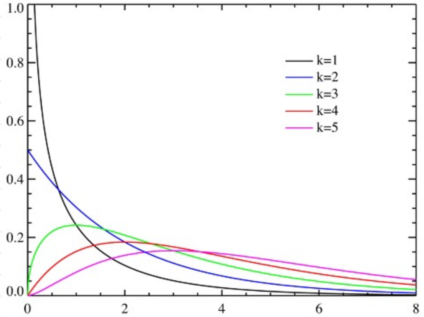
Гистограммы и распределения

Полученное опытным путём распределение можно <u>приблизить</u> каким-то из известных распределений, для которых у нас есть формулы.

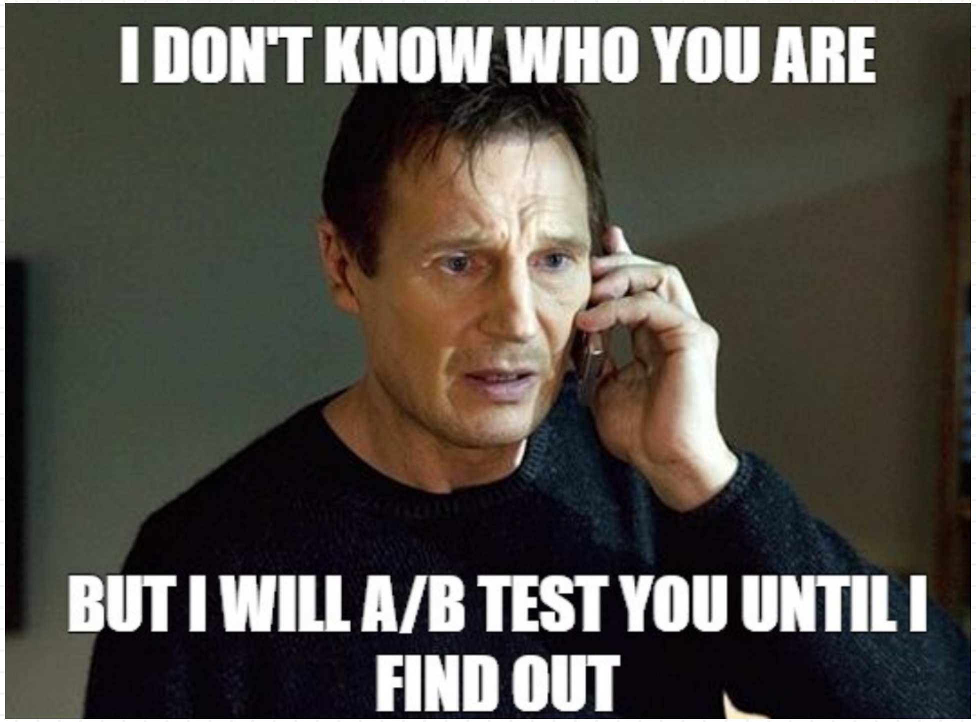








Это <u>ключевая</u> вещь для нас в будущем, если мы хотим заниматься А/Б тестированием.



Основные статистики

Основные параметры распределений

Основные статистики

Основные параметры распределений

Средние значения:

Мода – наиболее вероятное значение нашей случайной величины.

Медиана – такое значение, которое превосходит половину всех реализаций нашей случайной величины.

Математическое ожидание *M[X]* – по сути, среднее арифметическое всех значений случайной величины.

Основные статистики

Основные параметры распределений

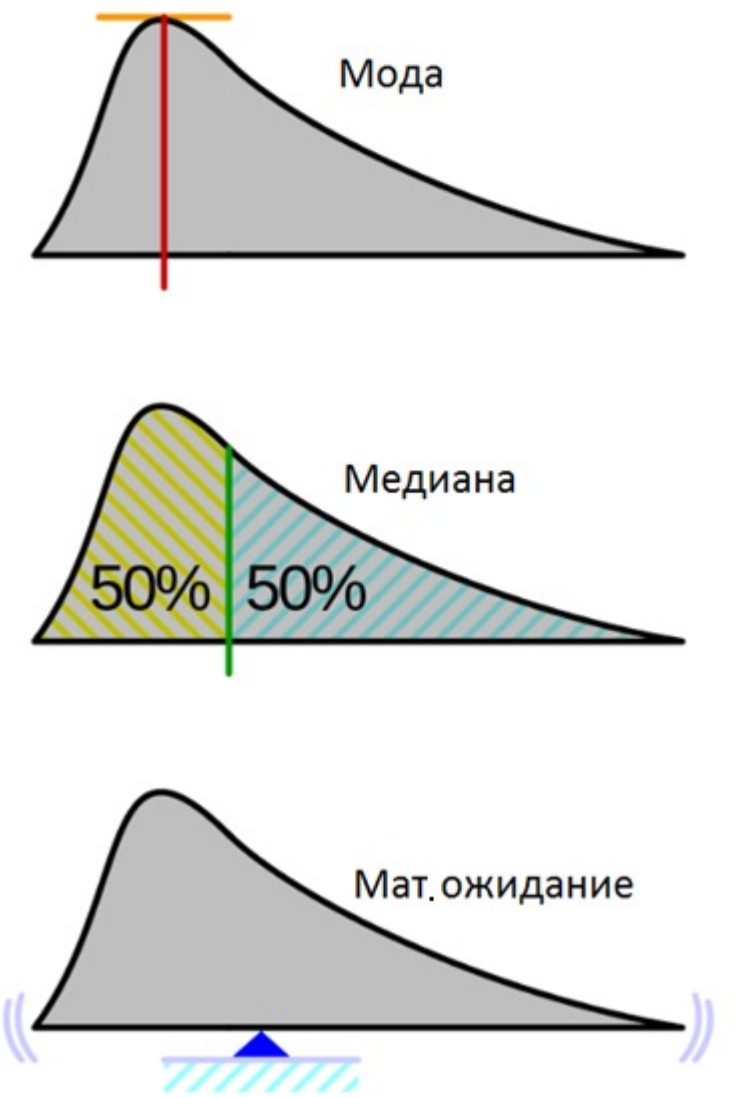
Средние значения:

Мода – наиболее вероятное значение нашей случайной величины.

Медиана – такое значение, которое превосходит половину всех реализаций нашей случайной величины.

Математическое ожидание *M[X]* – по сути, среднее арифметическое всех значений случайной величины.

- Можно заметить, что мат. ожидание сильно зависит от «хвоста» распределения, то есть настраивается на выбросы.



Основные статистики

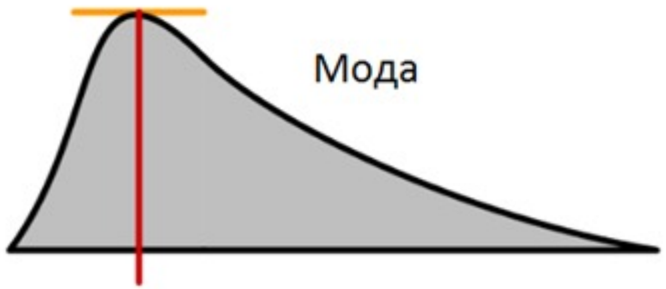
<u>Основные параметры распределений</u>

Средние значения:

Мода – наиболее вероятное значение нашей случайной величины.

Медиана – такое значение, которое превосходит половину всех реализаций нашей случайной величины.

Математическое ожидание *M[X]* – по сути, среднее арифметическое всех значений случайной величины.



- Можно заметить, что <u>мат. ожидание</u> сильно зависит от «хвоста» распределения, то есть <u>настраивается на выбросы.</u>

- <u>Медиана</u> <u>менее подвержена влиянию выбросов</u>, то есть аномально большие значения не сдвигают её, она зависит только от номеров позиций (рангов).

Основные статистики

Пример: Публикации о средних зарплатах населения.

Основные статистики

Пример: Публикации о средних зарплатах населения.

- **Мы знаем, что высоких зарплат достаточно мало, но они бывают уж очень высокими.**

Основные статистики

Пример: Публикации о средних зарплатах населения.

- Мы знаем, что высоких зарплат достаточно мало, но они бывают уж очень высокими.
- **Если мы хотим показать высокую среднюю зарплату у населения, то возьмем математическое ожидание.**

Основные статистики

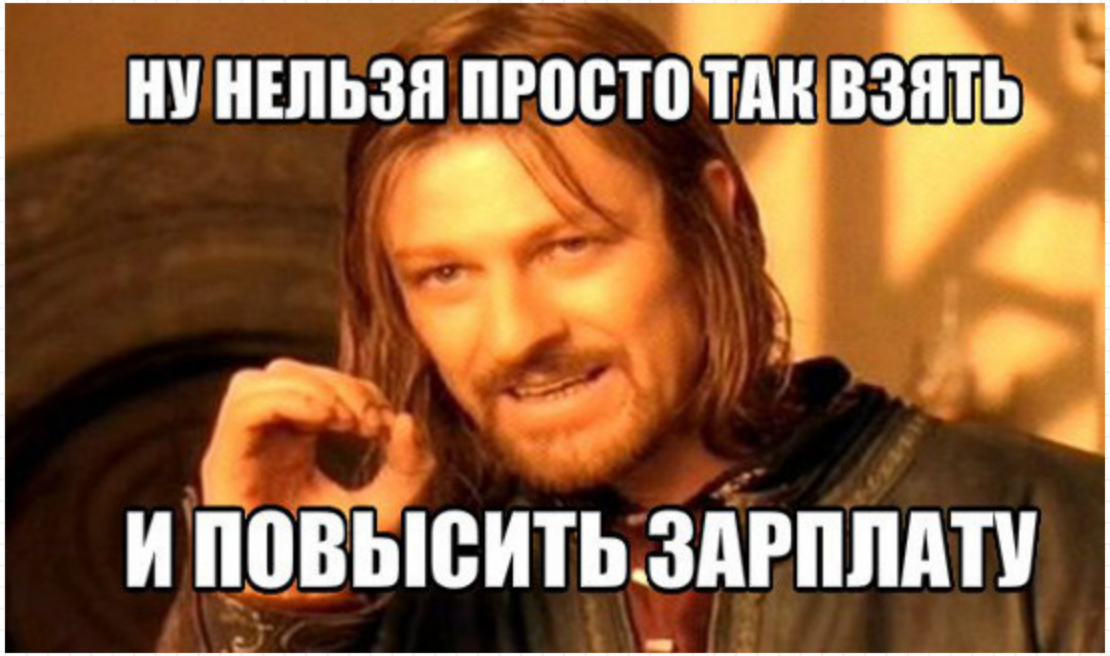
Пример: Публикации о средних зарплатах населения.

- Мы знаем, что высоких зарплат достаточно мало, но они бывают уж очень высокими.
- Если мы хотим показать высокую среднюю зарплату у населения, то возьмем математическое ожидание.
- **Оно настроится на выбросы и будет достойно выглядеть.**

Основные статистики

Пример: Публикации о средних зарплатах населения.

- Мы знаем, что высоких зарплат достаточно мало, но они бывают уж очень высокими.
- Если мы хотим показать высокую среднюю зарплату у населения, то возьмем математическое ожидание.
- Оно настроится на выбросы и будет достойно выглядеть.
- **При этом, наверно, честнее было бы показать медиану или моду.**



Основные статистики

Основные параметры распределений

Дисперсия - по сути, мера разброса значений случайной величины.

$$D[X] = M\left[\left(X - M[X]\right)^2\right]$$

Основные статистики

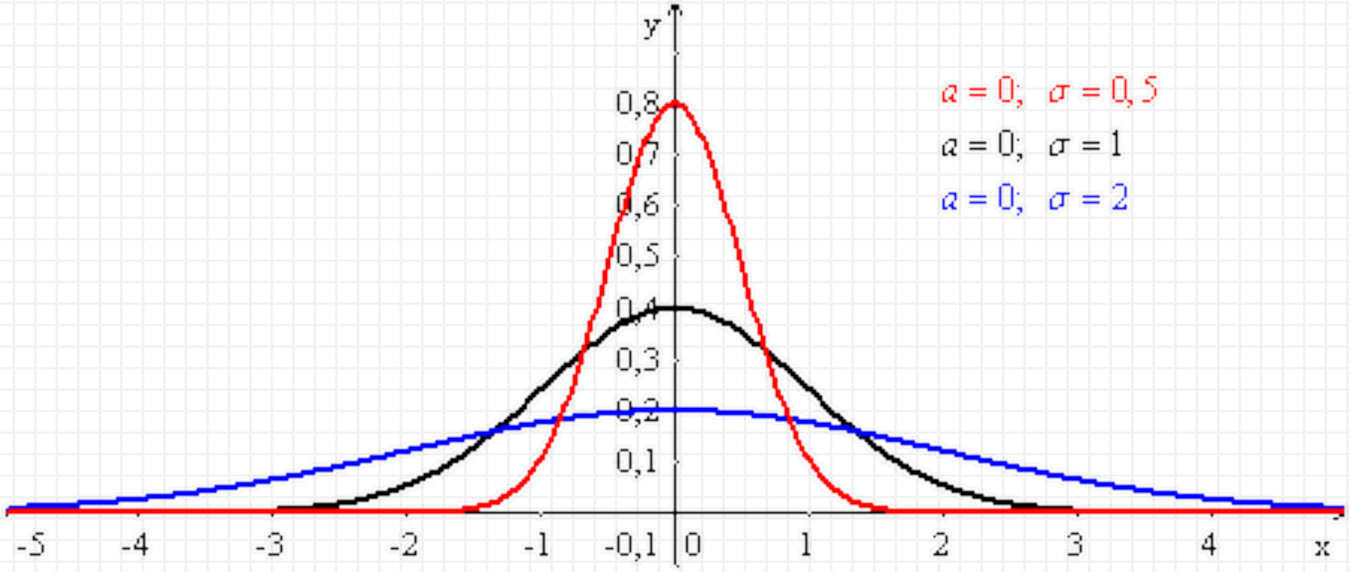
<u>Основные параметры распределений</u>

Дисперсия - по сути, мера разброса значений случайной величины.

$$D[X] = M\left[\left(X - M[X]\right)^2\right]$$

Стандартное отклонение – это квадратный корень из дисперсии.

$$\sigma = \sqrt{D[X]}.$$



Примечание: «а» на графике – математическое ожидание

Основные статистики

Основные параметры распределений

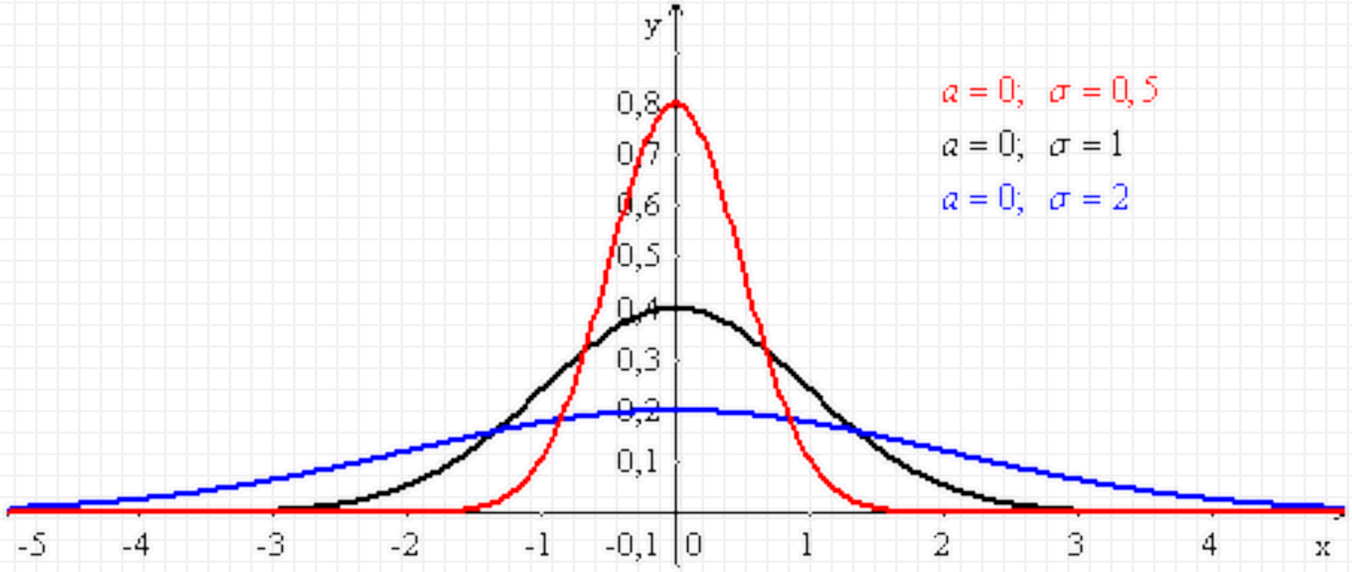
Дисперсия - по сути, мера разброса значений случайной величины.

$$D[X] = M\left[\left(X - M[X]\right)^2\right]$$

Стандартное отклонение – это квадратный корень из дисперсии.

$$\sigma = \sqrt{D[X]}.$$

Оно будет дальше почти во всех формулах.



Примечание: «а» на графике – математическое ожидание

Основные статистики

<u>Основные параметры распределений</u>

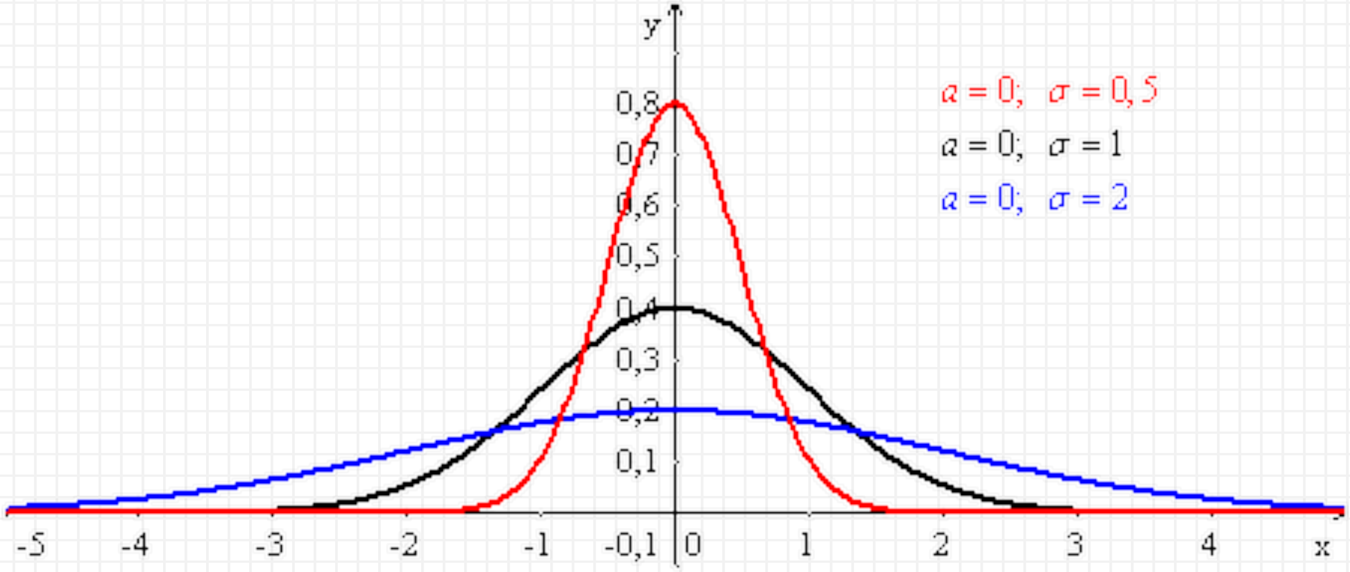
Дисперсия - по сути, мера разброса значений случайной величины.

$$D[X] = M\left[(X - M[X])^2\right]$$

Стандартное отклонение – это квадратный корень из дисперсии.

$$\sigma = \sqrt{D[X]}.$$

Оно будет дальше почти во всех формулах.



Примечание: «а» на графике – математическое ожидание

Основные статистики – это оценки по выборке каждого из рассмотренных параметров распределений

Примеры распределений

Примеры распределений

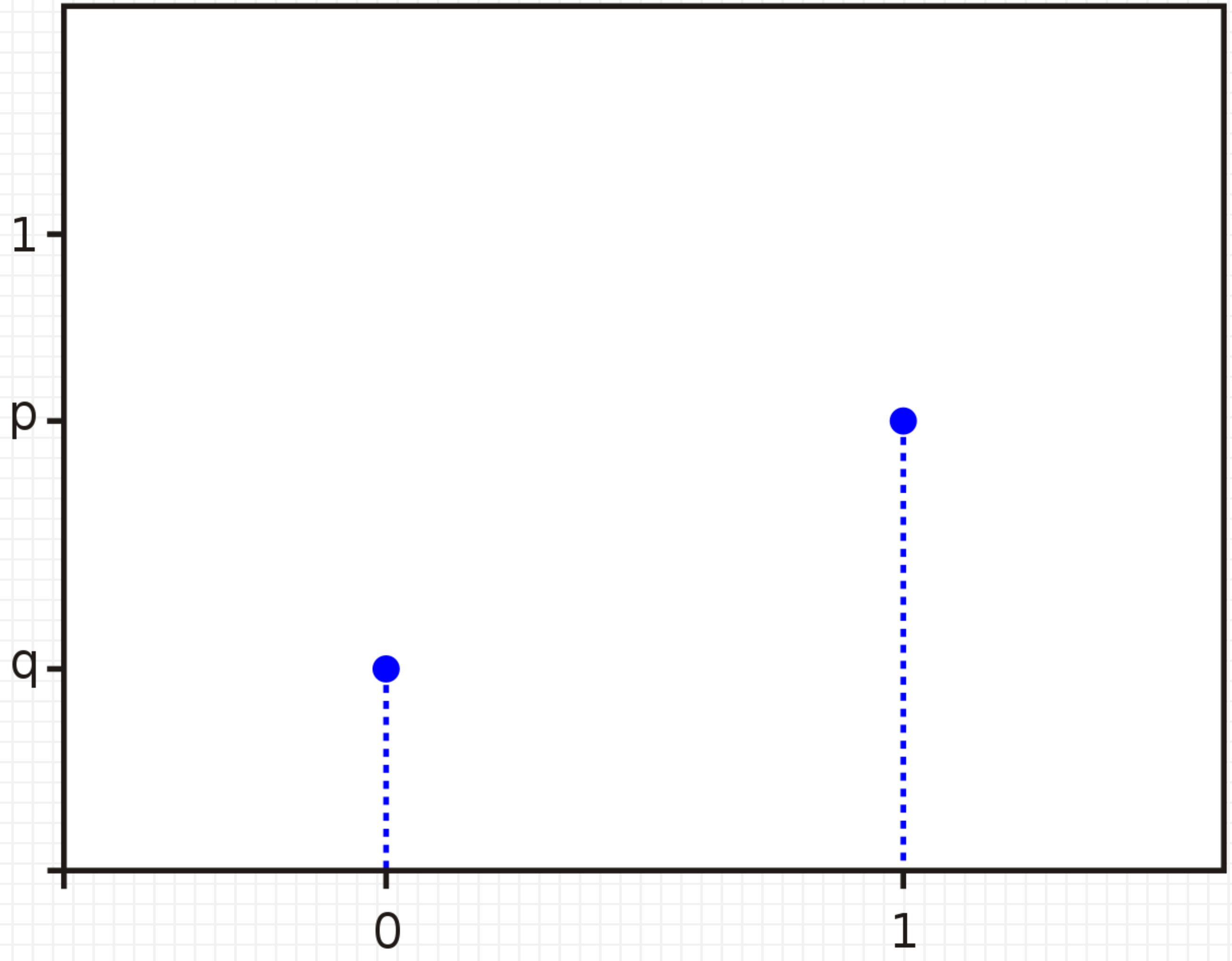
Распределение Бернулли

Примеры распределений

Распределение Бернулли

Распределение вероятностей

$$\mathbb{P}(X=1)=p,$$
$$\mathbb{P}(X=0)=q.$$



Примеры распределений

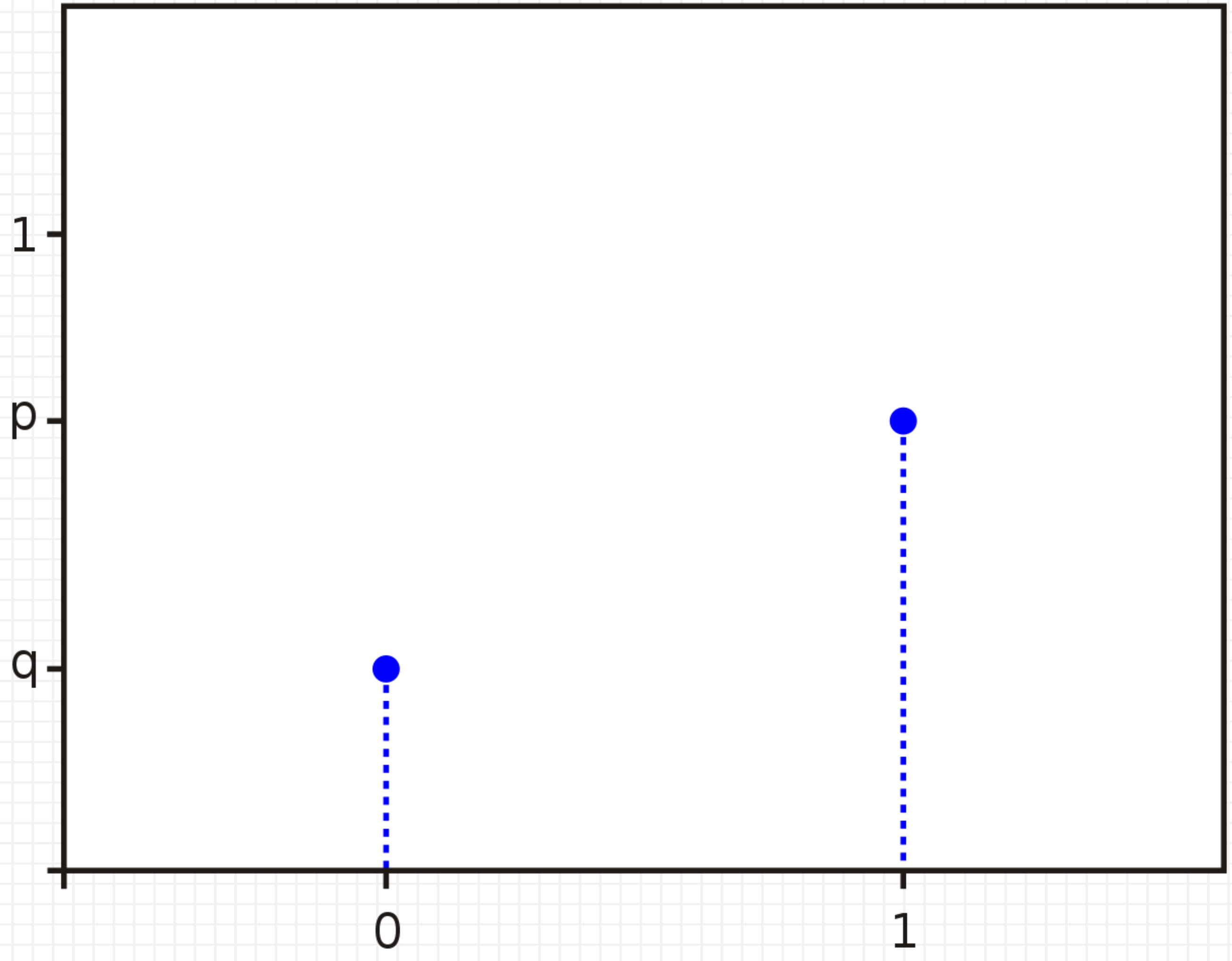
Распределение Бернулли

Распределение вероятностей

$$\mathbb{P}(X = 1) = p,$$
$$\mathbb{P}(X = 0) = q.$$

Параметры

$$M[X] = p,$$
$$D[X] = p(1 - p)$$



Примеры распределений

Распределение Бернулли

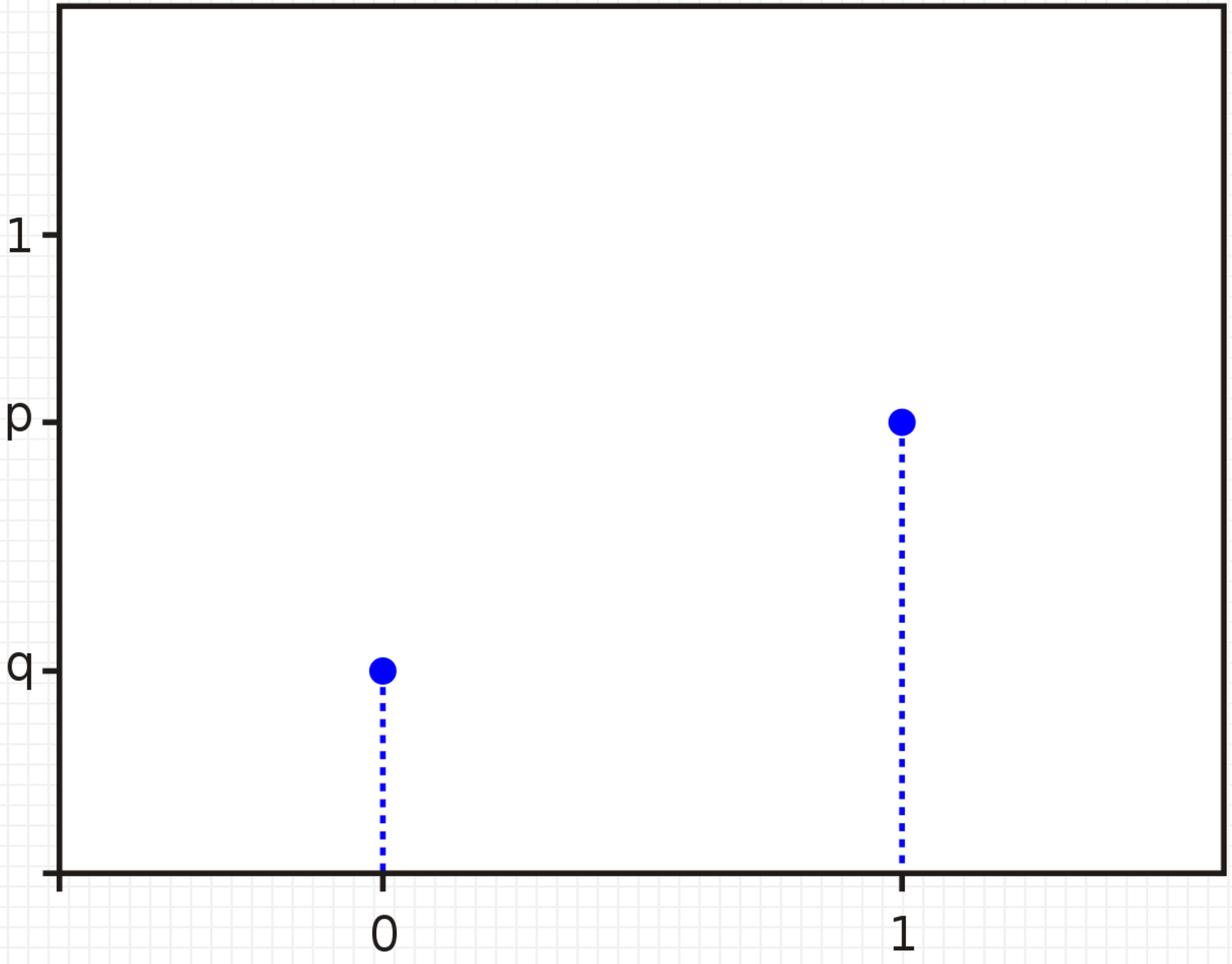
Распределение вероятностей

$$\mathbb{P}(X = 1) = p,$$
$$\mathbb{P}(X = 0) = q.$$

Параметры

$$M[X] = p,$$
$$D[X] = p(1 - p)$$

Пример – эксперимент с монеткой.



Примеры распределений

Нормальное распределение (распределение Гаусса)

Примеры распределений

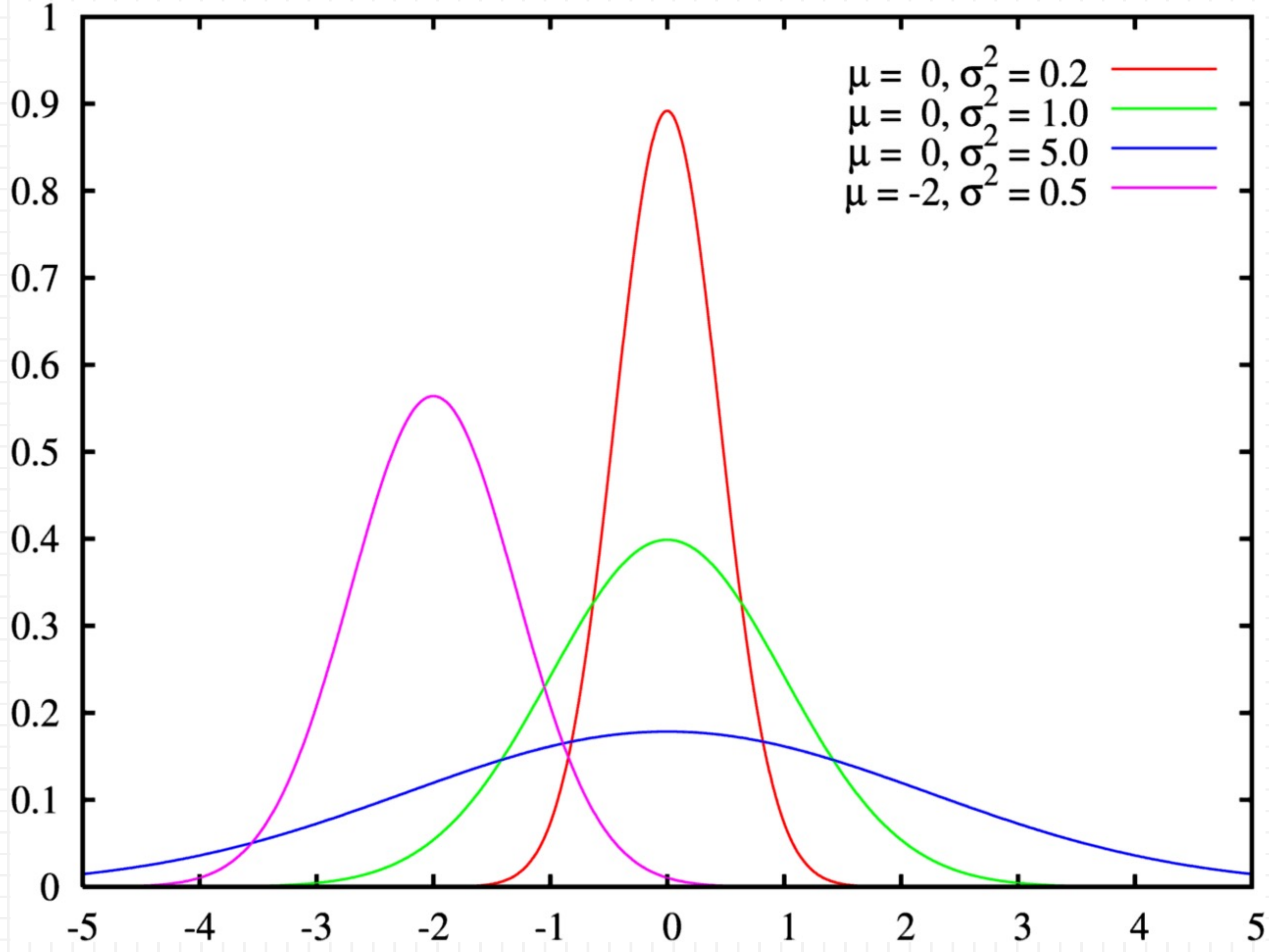
Нормальное распределение (распределение Гаусса)

Обозначение:

$$X \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$$

μ - мат. ожидание

σ - ст. отклонение



Примеры распределений

Нормальное распределение (распределение Гаусса)

Обозначение:

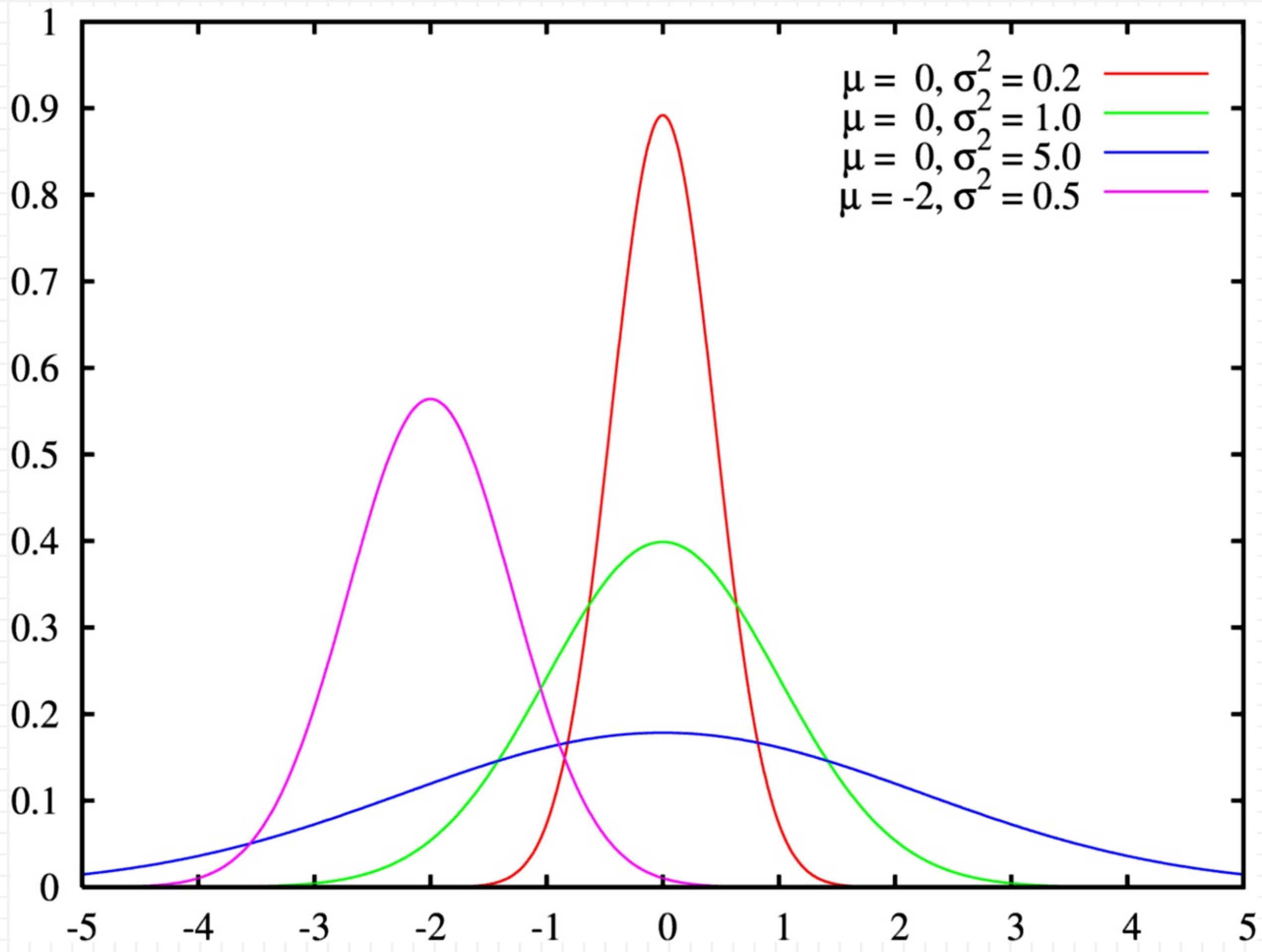
$$X \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$$

μ - мат. ожидание

σ - ст. отклонение

Функция плотности вероятности

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$



Примеры распределений

Нормальное распределение (распределение Гаусса)

Обозначение:

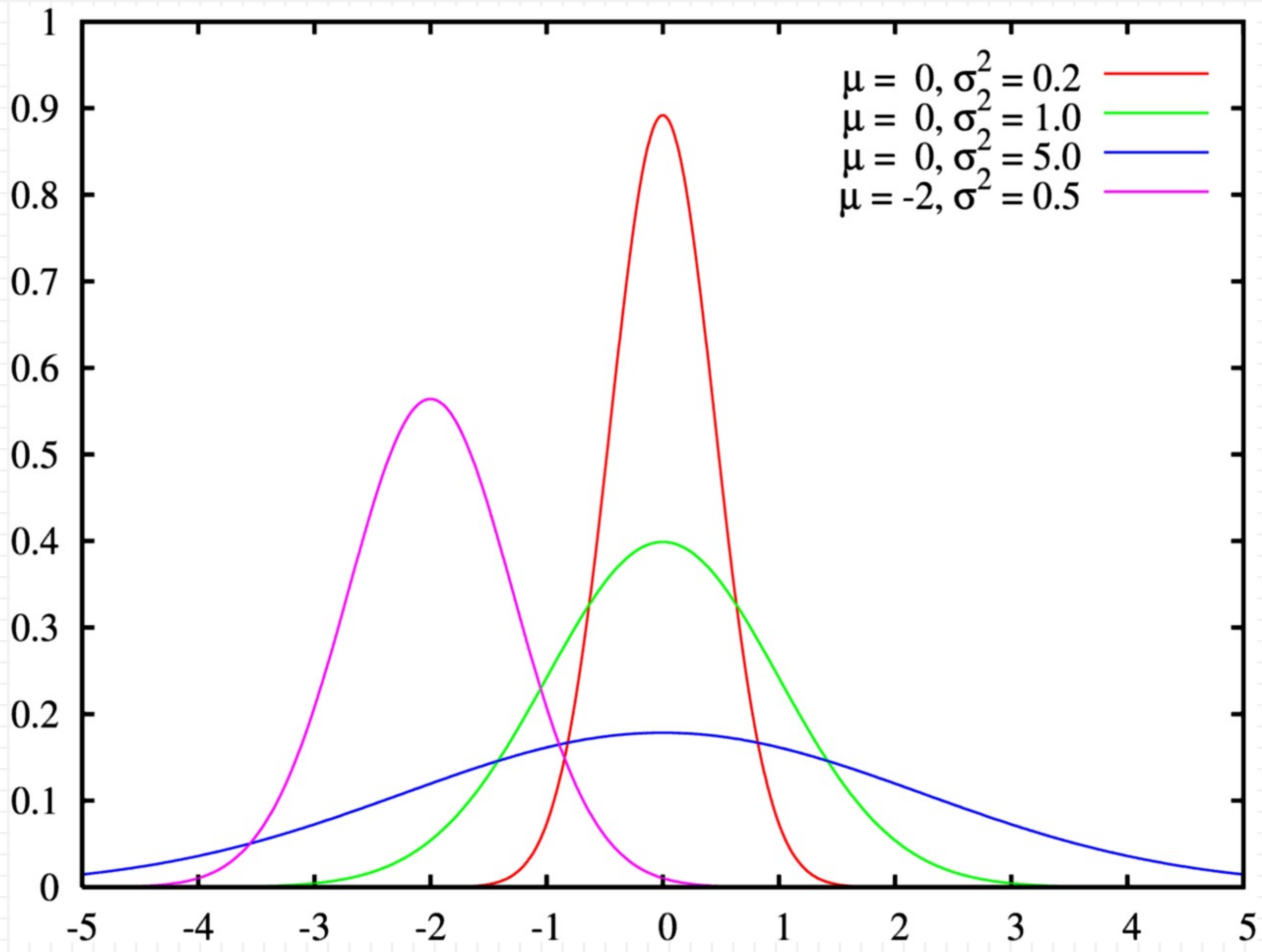
$$X \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$$

μ - мат. ожидание

σ - ст. отклонение

Функция плотности вероятности

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$



Примеры случайных величин:
- Рост человека
- Погрешности измерения приборами
- Отклонения при стрельбе

Генеральная совокупность и выборки

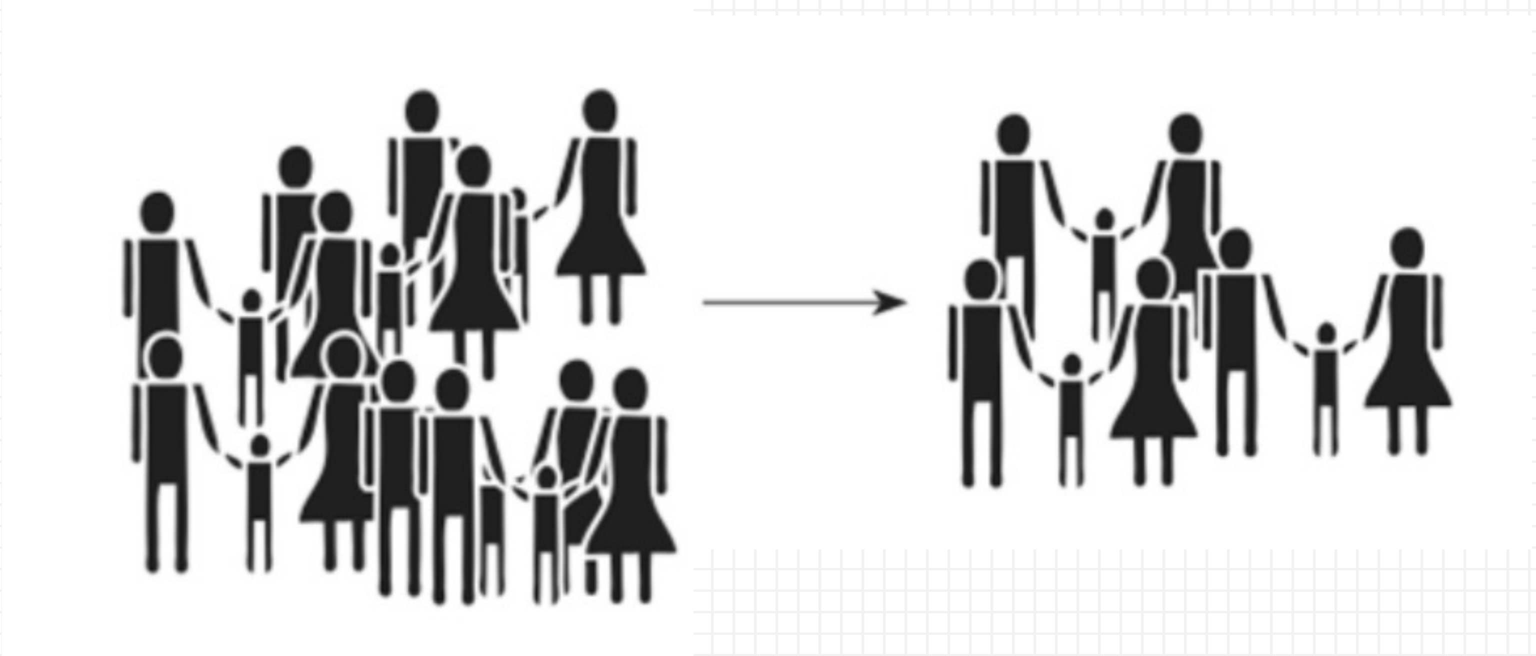
Генеральная совокупность и выборки

Генеральная совокупность – вся интересующая нас совокупность объектов.
К примеру, все абоненты МегаФона.

Генеральная совокупность и выборки

Генеральная совокупность – вся интересующая нас совокупность объектов.
К примеру, все абоненты МегаФона.

Выборка – какая-то часть объектов генеральной совокупности, по которым исследователь намерен делать выводы.
К примеру, контрольная и тестовая группы для А/Б теста.



Точечные и интервальные оценки

Точечные и интервальные оценки

Пусть случайная величина представляет собой факт подключения абонентом какой-то услуги, предложенной ему и увиденной им в личном кабинете.

Точечные и интервальные оценки

Пусть случайная величина представляет собой факт подключения абонентом какой-то услуги, предложенной ему и увиденной им в личном кабинете.

Тогда ее реализации – **1** (подключил), **0** – не подключил.
По сути, это тот же эксперимент с монеткой, но вероятности исходов могут быть разными.

Точечные и интервальные оценки

Пусть случайная величина представляет собой факт подключения абонентом какой-то услуги, предложенной ему и увиденной им в личном кабинете.

Тогда ее реализации – **1** (подключил), **0** – не подключил.
По сути, это тот же эксперимент с монеткой, но вероятности исходов могут быть разными.

Что тут за распределение?

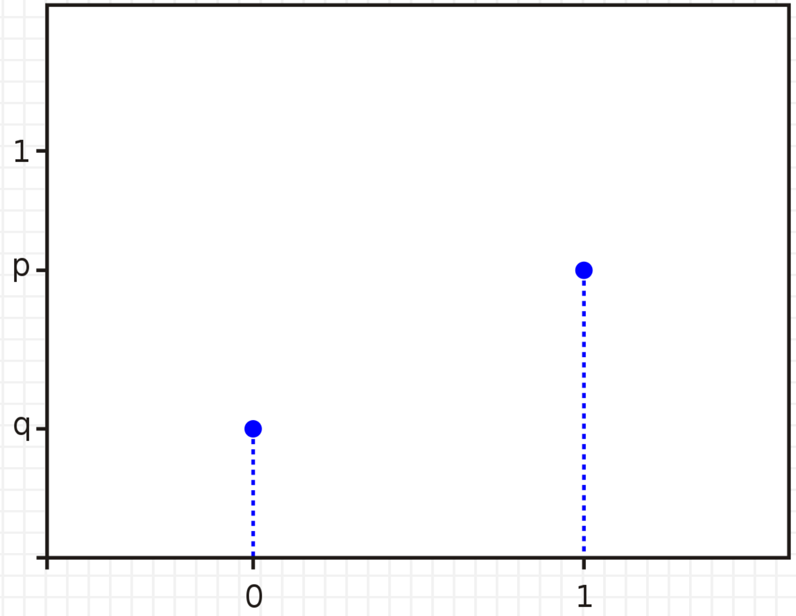
Точечные и интервальные оценки

Пусть случайная величина представляет собой факт подключения абонентом какой-то услуги, предложенной ему и увиденной им в личном кабинете.

Тогда ее реализации – **1** (подключил), **0** – не подключил.
По сути, это тот же эксперимент с монеткой, но вероятности исходов могут быть разными.

Что тут за распределение?

Конечно, распределение Бернулли



Точечные и интервальные оценки

Наша цель:

Как-то оценить, насколько высоки показатели подключения данной услуги, нравится ли она нашим абонентам.

Точечные и интервальные оценки

Наша цель:

Как-то оценить, насколько высоки показатели подключения данной услуги, нравится ли она нашим абонентам.

Как же это проще всего сделать?

Точечные и интервальные оценки

Наша цель:

Как-то оценить, насколько высоки показатели подключения данной услуги, нравится ли она нашим абонентам.

Как же это проще всего сделать?

Посмотрим на выборку и вычислим среднее арифметическое значений нашей случайной величины по всем объектам.

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{n}(x_1 + \cdots + x_n).$$

Точечные и интервальные оценки

Наша цель:

Как-то оценить, насколько высоки показатели подключения данной услуги, нравится ли она нашим абонентам.

Как же это проще всего сделать?

Посмотрим на выборку и вычислим среднее арифметическое значений нашей случайной величины по всем объектам.

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{n}(x_1 + \cdots + x_n).$$

Так мы сделаем точечную оценку математического ожидания отклика, которое тут является вероятностью отклика. Это будет оценка конверсии.

Точечные и интервальные оценки

Но будет ли эта оценка хороша?

Мы ведь хотим сделать общие выводы, то есть обобщить всё на генеральную совокупность…

Точечные и интервальные оценки

Но будет ли эта оценка хороша?

Мы ведь хотим сделать общие выводы, то есть обобщить всё на генеральную совокупность…

К счастью, есть закон больших чисел, который гласит (грубо):
«Чем больше выборка, тем лучше оценка»

Точечные и интервальные оценки

Но будет ли эта оценка хороша?

Мы ведь хотим сделать общие выводы, то есть обобщить всё на генеральную совокупность…

К счастью, есть закон больших чисел, который гласит (грубо):
«Чем больше выборка, тем лучше оценка»

Тогда возьмем выборку побольше, а для наглядности - посмотрим на пример с монеткой.

Точечные и интервальные оценки

Но будет ли эта оценка хороша?

Мы ведь хотим сделать общие выводы, то есть обобщить всё на генеральную совокупность…

К счастью, есть закон больших чисел, который гласит (грубо):
«Чем больше выборка, тем лучше оценка»

Тогда возьмем выборку побольше, а для наглядности - посмотрим на пример с монеткой.

Но чего-то не хватает в нашей точечной оценке…

Точечные и интервальные оценки

Но будет ли эта оценка хороша?

Мы ведь хотим сделать общие выводы, то есть обобщить всё на генеральную совокупность…

К счастью, есть закон больших чисел, который гласит (грубо):

«Чем больше выборка, тем лучше оценка»

Тогда возьмем выборку побольше, а для наглядности - посмотрим на пример с монеткой.

Но чего-то не хватает в нашей точечной оценке…

Мы же никак не учитываем разброс оценок при переходе от выборки к выборке!

Точечные и интервальные оценки

Что же, кроме точечной оценки, можно вычислить по выборке?

Точечные и интервальные оценки

Что же, кроме точечной оценки, можно вычислить по выборке?

Ну, например, <u>в каких пределах лежит истинное значение</u>, (в данном случае конверсия)!

Точечные и интервальные оценки

Что же, кроме точечной оценки, можно вычислить по выборке?

Ну, например, в каких пределах лежит истинное значение, (в данном случае конверсия)!

Для этого есть прекрасный помощник – интервальная оценка, которая заключается в построении доверительных интервалов.

Точечные и интервальные оценки

Что же, кроме точечной оценки, можно вычислить по выборке?

Ну, например, в каких пределах лежит истинное значение, (в данном случае конверсия)!

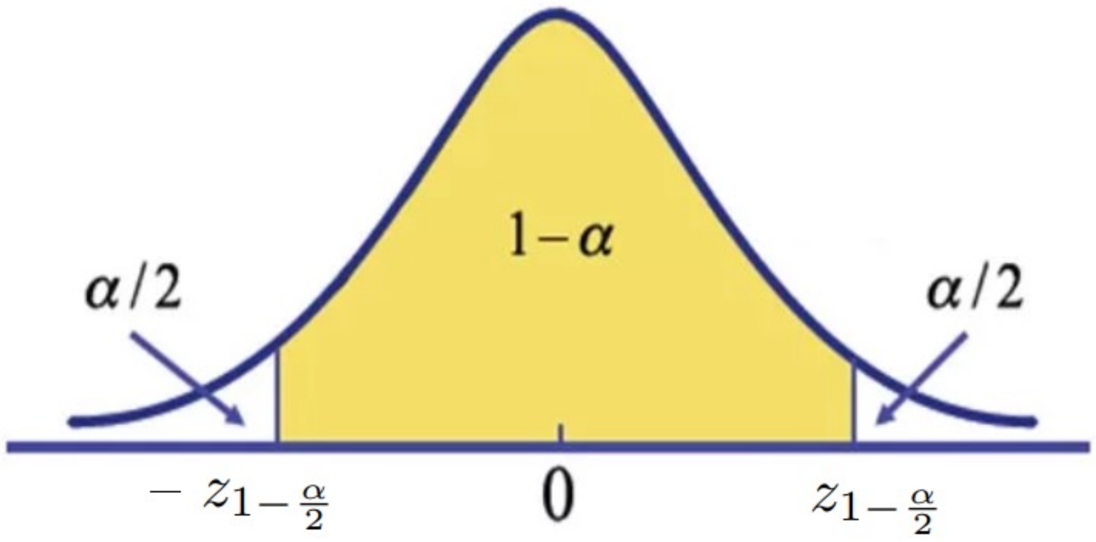
Для этого есть прекрасный помощник – интервальная оценка, которая заключается в построении доверительных интервалов.

Определение (немного упрощённо):

Доверительным называется интервал, в котором с определенной вероятностью находится истинное значение измеряемого по выборке параметра генеральной совокупности.

Точечные и интервальные оценки

Очень удобно работать с нормальным распределением.



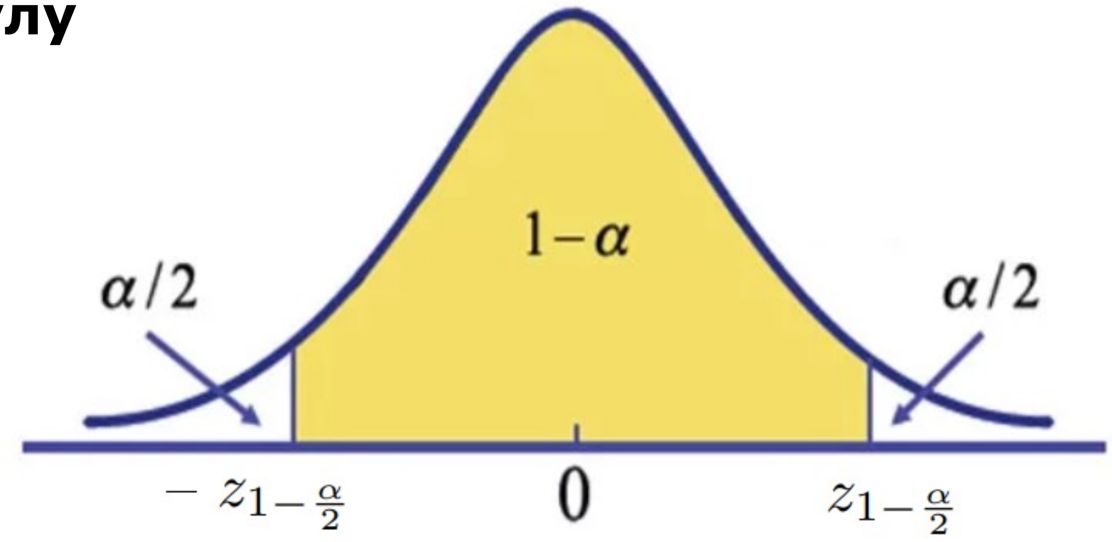
Точечные и интервальные оценки

Очень удобно работать с нормальным распределением.

Для него имеем следующую формулу доверительного интервала для мат. ожидания:

$$\bar{X}_n \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

значения z есть в справочниках.



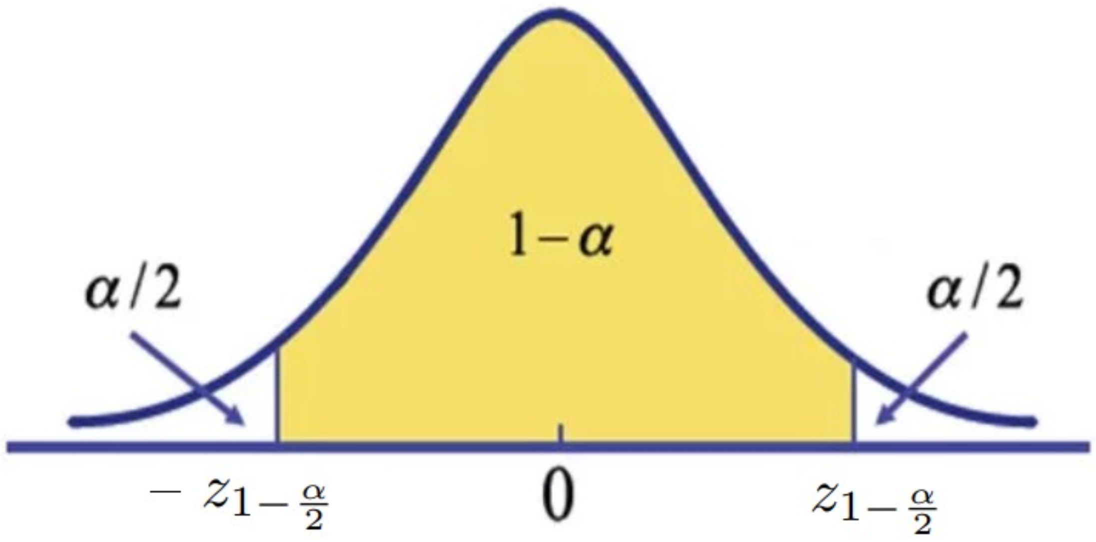
Точечные и интервальные оценки

Очень удобно работать с нормальным распределением.

Для него имеем следующую формулу доверительного интервала для мат. ожидания:

$$\bar{X}_n \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

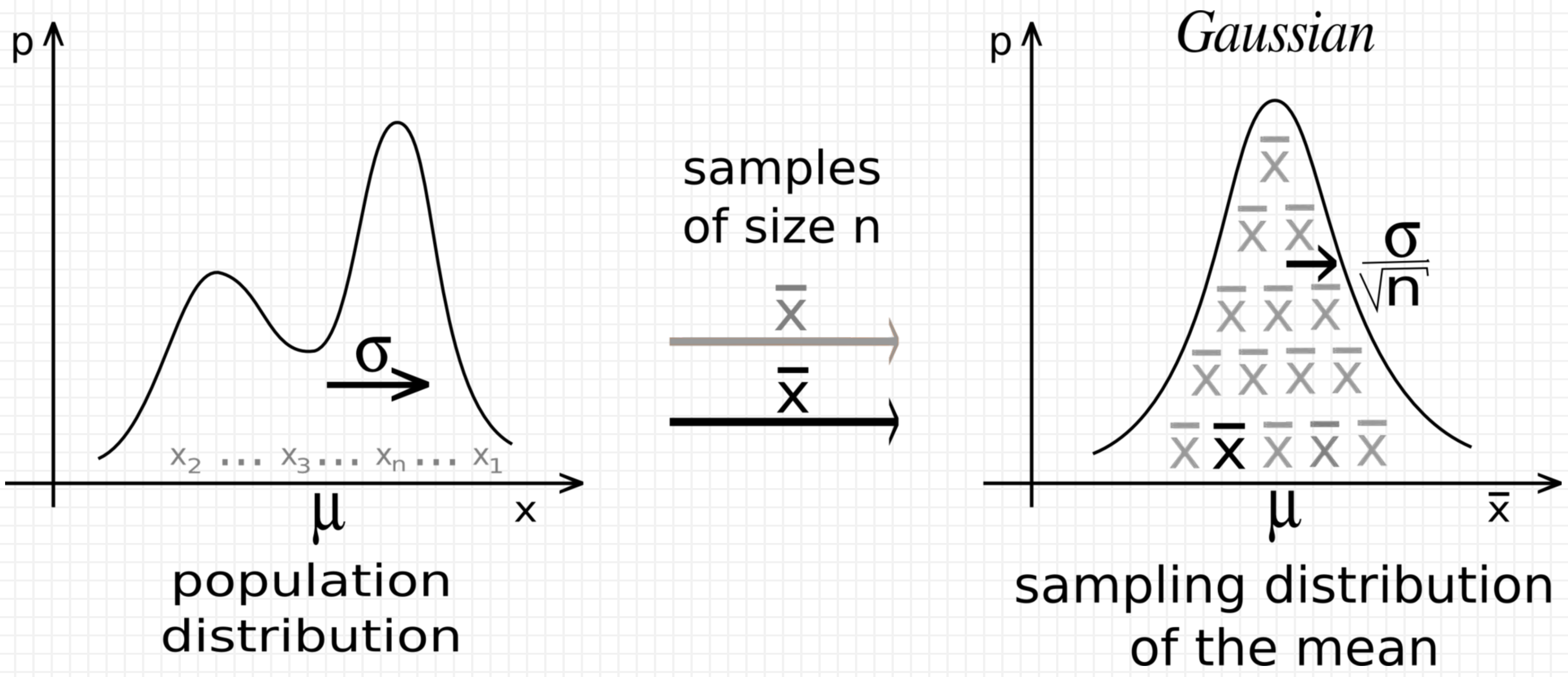
значения z есть в справочниках.



Но разве в нашем случае с конверсией эта формула подходит? У нас же отклики имеют распределение Бернулли…

Точечные и интервальные оценки

Тут на помощь приходит Центральная предельная теорема.



Точечные и интервальные оценки

Центральная предельная теорема:

$$\sqrt{n}\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma} \to N(0,1) \text{ при } n \to \infty.$$

Эта формула говорит нам:

Если распределение не имеет сильного скоса, и выборка достаточно большая, то среднее выборочное значение имеет нормальное распределение.

Точечные и интервальные оценки

Центральная предельная теорема:

$$\sqrt{n}\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma} \to N(0,1) \text{ при } n \to \infty.$$

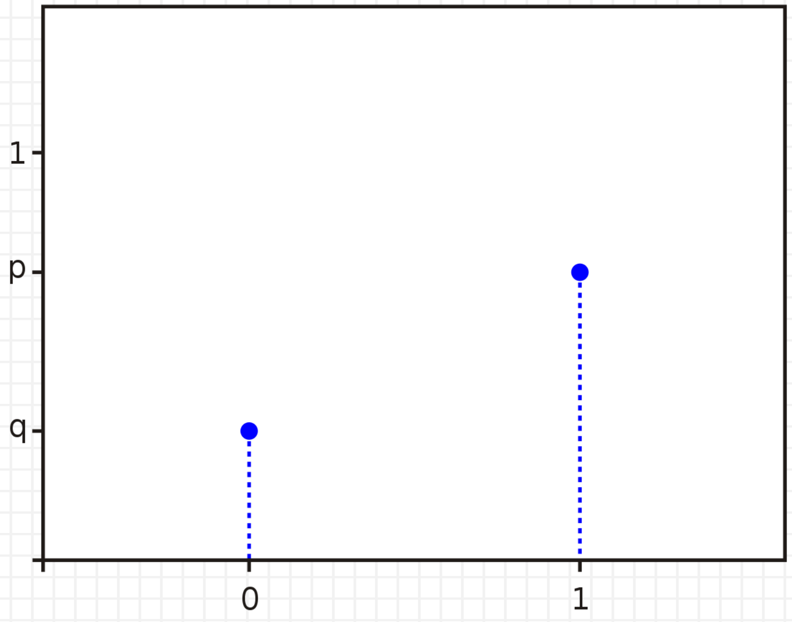
Эта формула говорит нам:

Если распределение не имеет сильного скоса, и выборка достаточно большая, то среднее выборочное значение имеет нормальное распределение.

То есть наша конверсия, подсчитанная на разных выборках, имеет тоже нормальное распределение!

Точечные и интервальные оценки

Так, для **конверсии** получим формулу **доверительного интервала**, подставив необходимые значения из распределения Бернулли:



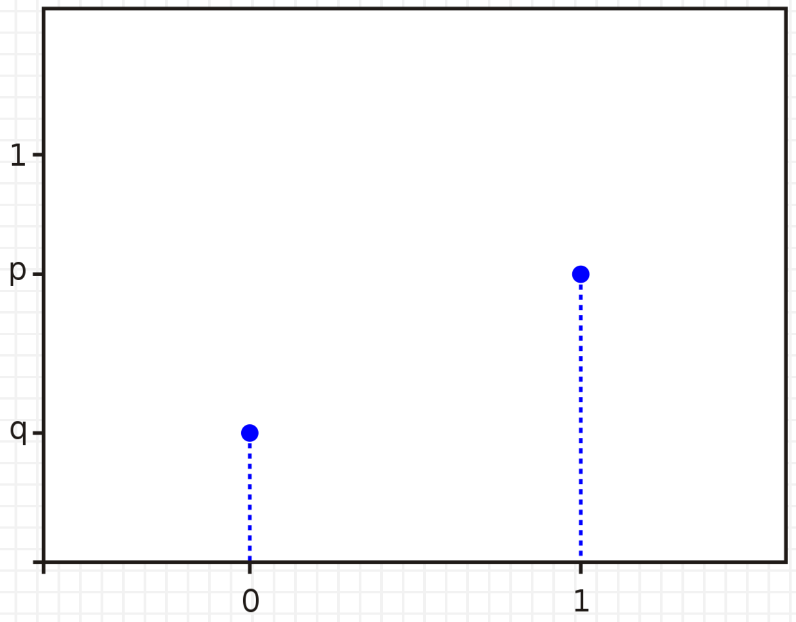
Точечные и интервальные оценки

Так, для **конверсии** получим формулу **доверительного интервала**, подставив необходимые значения из распределения Бернулли:

$$\hat{p} \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p}\,(1-\hat{p})}{n}}.$$

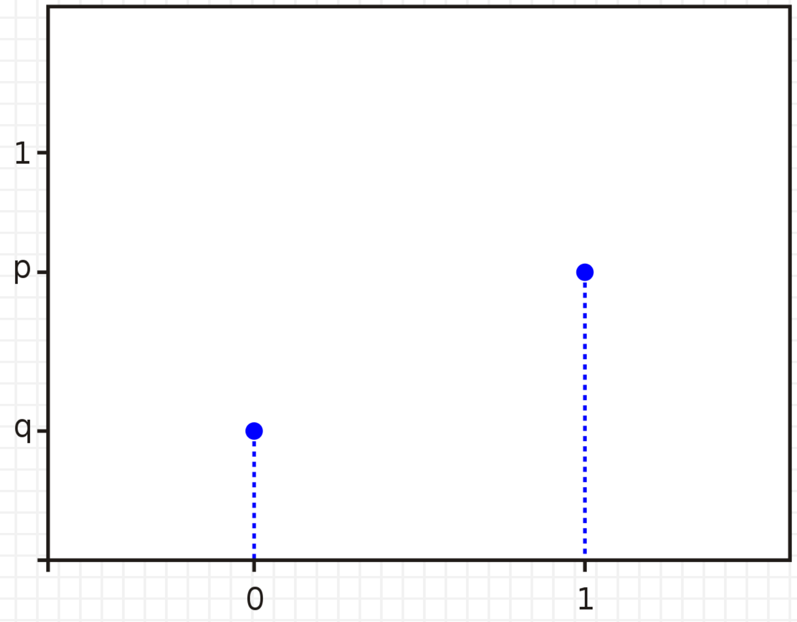
$\hat{p}$ - доля подключений в выборке

n – количество объектов в нашей выборке.



Точечные и интервальные оценки

Так, для **конверсии** получим формулу **доверительного интервала**, подставив необходимые значения из распределения Бернулли:



$$\hat{p} \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p}\,(1-\hat{p})}{n}}.$$

$\hat{p}$ - доля подключений в выборке

n – количество объектов в нашей выборке.

Можно заметить, что с увеличением размера выборки, интервал сужается, наша уверенность растет.

Примеры вычисления оценок

Кейс № 1:

Пусть выборка состоит из 1000 человек, получивших оффер, из них 100 человек подключило услугу. Оценим конверсию точечно и интервально.

Примеры вычисления оценок

Кейс № 1:

Пусть выборка состоит из 1000 человек, получивших оффер, из них 100 человек подключило услугу. Оценим конверсию точечно и интервально.

Итак:

1) Выборочная конверсия:

$$\widehat{conv} = \frac{100}{1000} = 0.1 = 10\ \%$$

Примеры вычисления оценок

Кейс № 1:

Пусть выборка состоит из 1000 человек, получивших оффер, из них 100 человек подключило услугу. Оценим конверсию точечно и интервально.

Итак:

1) Выборочная конверсия:

$$\widehat{conv} = \frac{100}{1000} = 0.1 = 10\ \%$$

2) Найдем доверительный интервал для истинной конверсии.
Пусть мы хотим быть уверены на 95 %, что она в него попадёт.

$$\widehat{conv} \pm z_{0.975} \sqrt{\frac{\widehat{conv} \cdot (1 - \widehat{conv})}{n}} = 0.1 \pm 1.96 \sqrt{\frac{0.1 \cdot (1 - 0.1)}{1000}} \simeq 10\ \% \pm 2\%$$

Примеры вычисления оценок

Кейс № 2:

Пусть выборки ***A*** и ***B*** состоят каждая из 1000 человек, получивших оффер подключить услугу. Услуги в группах разные. При этом в ***A*** - 100 человек подключило услугу, а в ***B*** - 110 человек. Где услуга лучше?

Примеры вычисления оценок

Кейс № 2:

Пусть выборки ***A*** и ***B*** состоят каждая из 1000 человек, получивших оффер подключить услугу. Услуги в группах разные. При этом в ***A*** - 100 человек подключило услугу, а в ***B*** - 110 человек. Где услуга лучше?

Итак:

1) Выборочные конверсии:

$$\widehat{conv}_A = \frac{100}{1000} = 0.1 = 10\ \% \qquad \widehat{conv}_B = \frac{110}{1000} = 0.11 = 11\ \%$$

Пока услуга в группе ***B*** лидирует.

Примеры вычисления оценок

Кейс № 2:

Пусть выборки ***A*** и ***B*** состоят каждая из 1000 человек, получивших оффер подключить услугу. Услуги в группах разные. При этом в ***A*** - 100 человек подключило услугу, а в ***B*** - 110 человек. Где услуга лучше?

Итак:

1) Выборочные конверсии:

$$\widehat{conv}_A = \frac{100}{1000} = 0.1 = 10\ \% \qquad \widehat{conv}_B = \frac{110}{1000} = 0.11 = 11\ \%$$

Пока услуга в группе ***B*** лидирует.

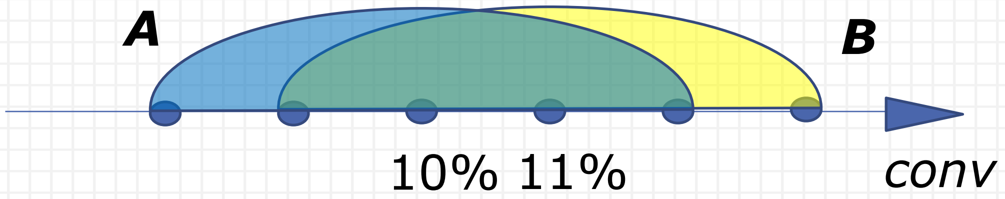
2) Найдем 95-ти процентные доверительные интервалы для истинных конверсий.

$$\widehat{conv}_A \pm z_{0.975}\sqrt{\frac{\widehat{conv}_A \cdot (1 - \widehat{conv}_A)}{n}} = 0.1 \pm 1.96\sqrt{\frac{0.1 \cdot (1 - 0.1)}{1000}} \simeq 10\ \% \pm 2\%$$

$$\widehat{conv}_B \pm z_{0.975}\sqrt{\frac{\widehat{conv}_B \cdot (1 - \widehat{conv}_B)}{n}} = 0.11 \pm 1.96\sqrt{\frac{0.11 \cdot (1 - 0.11)}{1000}} \simeq 11\ \% \pm 2\%$$

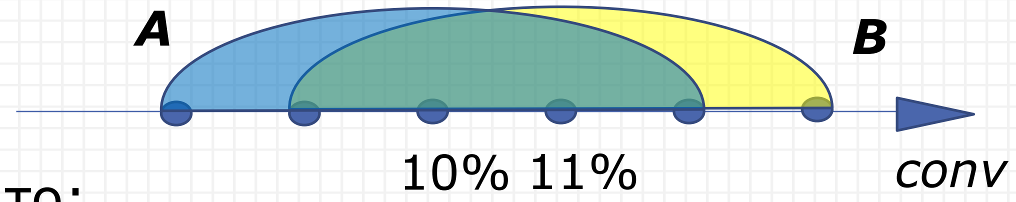
Примеры вычисления оценок

Мы видим, что доверительные интервалы пересекаются.



Примеры вычисления оценок

Мы видим, что доверительные интервалы пересекаются.

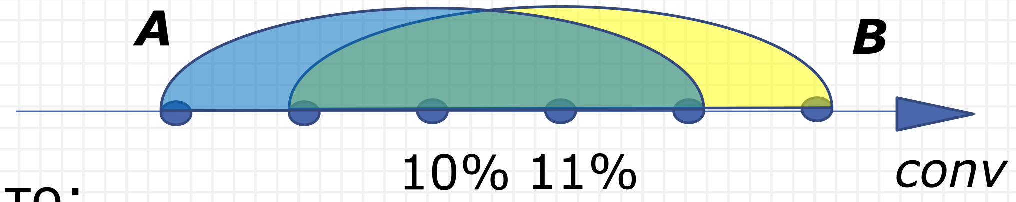


Это означает, что:

- **отличие в точечных оценках, по-видимому, случайны**

Примеры вычисления оценок

Мы видим, что доверительные интервалы пересекаются.

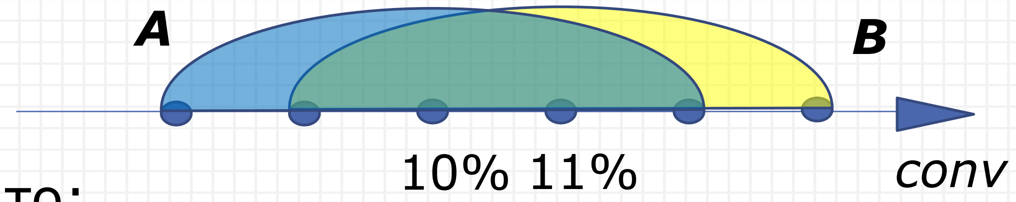


Это означает, что:

- отличие в точечных оценках, по-видимому, случайны
- **по данной выборке мы не можем сказать, какая из услуг лучше.**

Примеры вычисления оценок

Мы видим, что доверительные интервалы пересекаются.



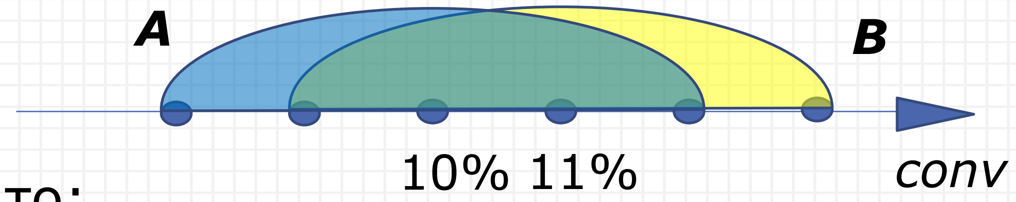
Это означает, что:

- отличие в точечных оценках, по-видимому, случайны
- по данной выборке мы не можем сказать, какая из услуг лучше.

Для более точного анализа можно набрать больше данных -> доверительные интервалы сузятся -> если не будет пересечения -> сможем сделать вывод об отличиях.

Примеры вычисления оценок

Мы видим, что доверительные интервалы пересекаются.



Это означает, что:

- отличие в точечных оценках, по-видимому, случайны
- по данной выборке мы не можем сказать, какая из услуг лучше.

Для более точного анализа можно набрать больше данных **->** доверительные интервалы сузятся **->** если не будет пересечения **->** сможем сделать вывод об отличиях.

Таким образом, используя аппарат статистики, мы можем оценить качество наших услуг по сравнительно небольшой выборке как точечно, так и интервально, но не всегда удается сделать выводы, потому что данных бывает мало.

Метод максимального правдоподобия в статистике

Метод максимального правдоподобия в статистике

Рассмотрим серьезную задачу для любителей изюма в булочках:

Метод максимального правдоподобия в статистике

Рассмотрим серьезную задачу для любителей изюма в булочках:

- **Мы изучаем распределение количества изюминок в булочках с изюмом.**

Метод максимального правдоподобия в статистике

Рассмотрим серьезную задачу для любителей изюма в булочках:

- Мы изучаем распределение количества изюминок в булочках с изюмом.

- **Мы считаем, что данное распределение – это распределение Пуассона.**

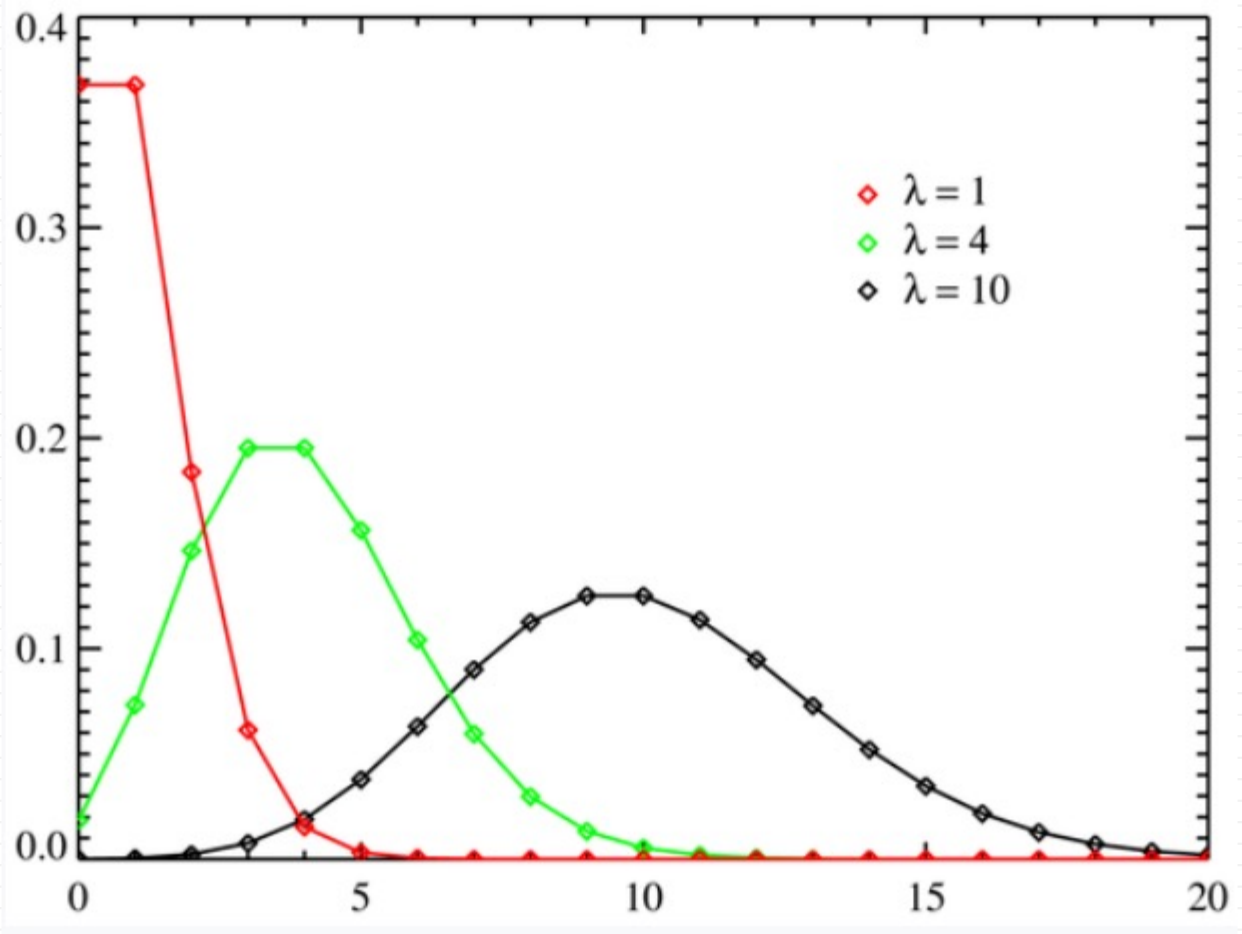
Метод максимального правдоподобия в статистике

Рассмотрим серьезную задачу для любителей изюма в булочках:

- Мы изучаем распределение количества изюминок в булочках с изюмом.
- Мы считаем, что данное распределение – это распределение Пуассона.
- **Хотим конкретики по параметрам распределения.**

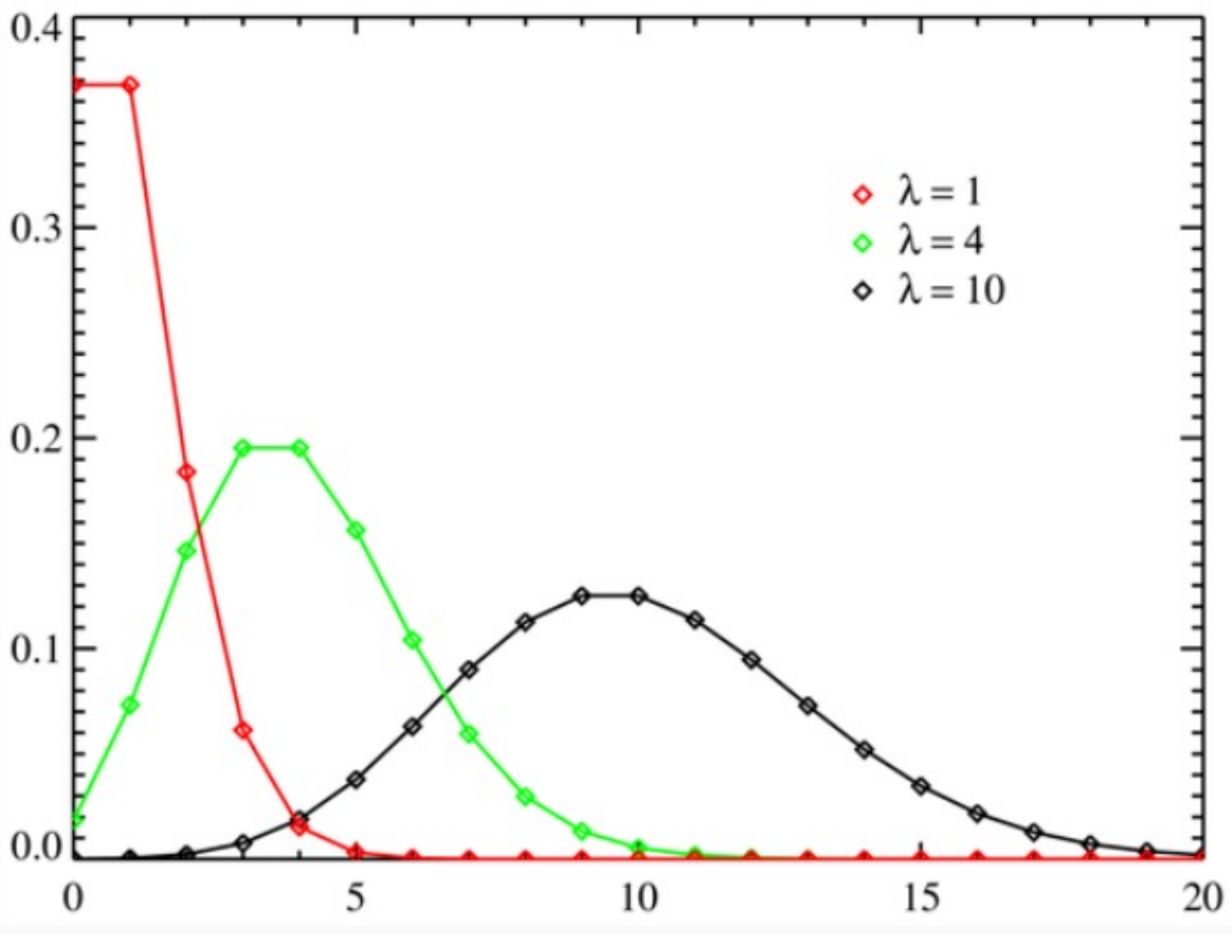
Метод максимального правдоподобия в статистике

Распределение Пуассона



Метод максимального правдоподобия в статистике

Распределение Пуассона



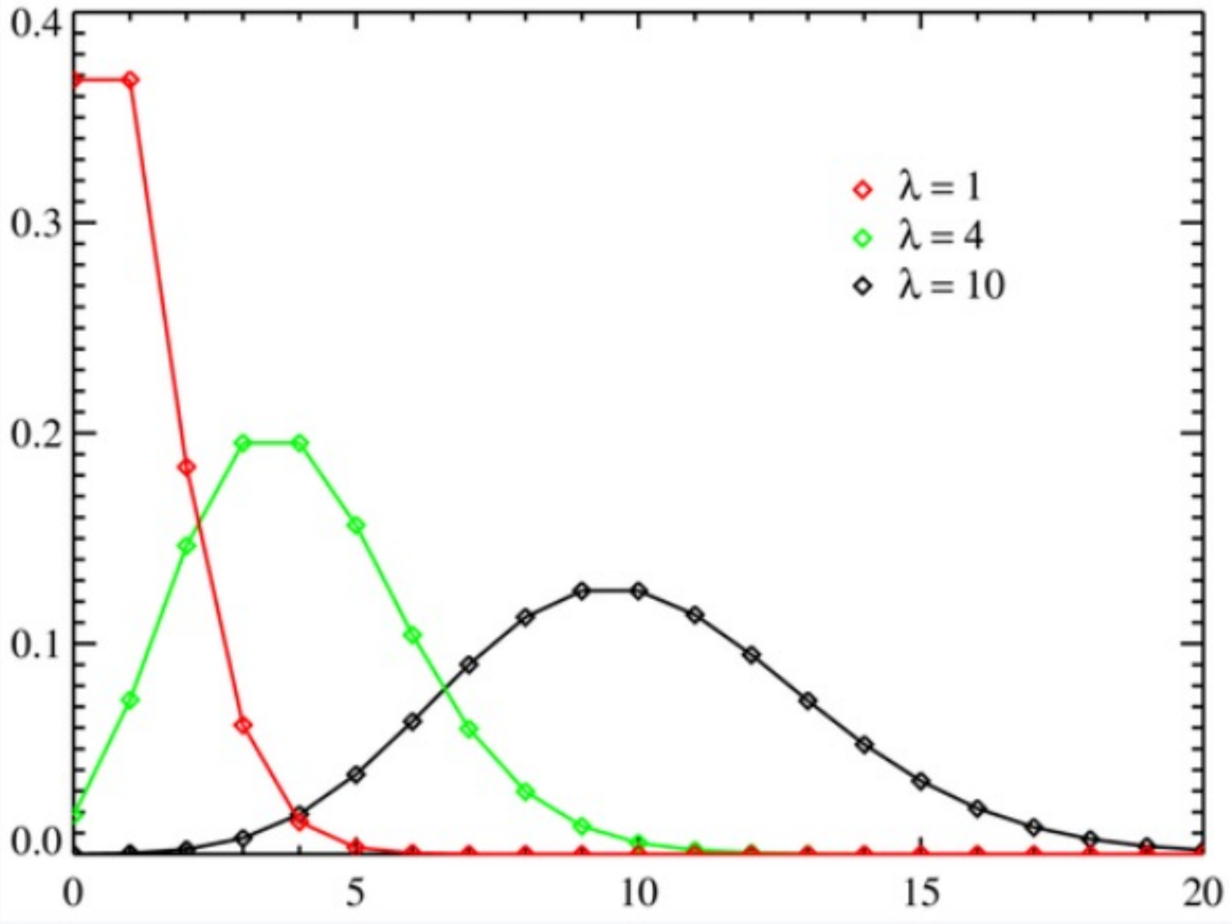
Распределение вероятностей

$$\mathbb{P}(Y = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda},$$

где у нас есть неизвестный параметр λ

Метод максимального правдоподобия в статистике

Распределение Пуассона



Распределение вероятностей

$$\mathbb{P}(Y = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda},$$

где у нас есть
неизвестный параметр λ

Как же его оценить?

Метод максимального правдоподобия в статистике

- Соберем выборку (скупив всю в округе продукцию от разных производителей).

Метод максимального правдоподобия в статистике

- Соберем выборку (скупив всю в округе продукцию от разных производителей).
- **Подсчитаем количество изюма в каждой булочке.**

Метод максимального правдоподобия в статистике

- Соберем выборку (скупив всю в округе продукцию от разных производителей).
- Подсчитаем количество изюма в каждой булочке.
- **Будем округлять число изюминок для простоты до десятков.**

Метод максимального правдоподобия в статистике

- Соберем выборку (скупив всю в округе продукцию от разных производителей).
- Подсчитаем количество изюма в каждой булочке.
- Будем округлять число изюминок для простоты до десятков.
- **Запишем результаты в таблицу**

Количество изюминок	**0**	**10**	**20**	**30**	**40**
Количество булочек	0	4	11	5	1

Метод максимального правдоподобия в статистике

- Соберем выборку (скупив всю в округе продукцию от разных производителей).
- Подсчитаем количество изюма в каждой булочке.
- Будем округлять число изюминок для простоты до десятков.
- Запишем результаты в таблицу

Количество изюминок	**0**	**10**	**20**	**30**	**40**
Количество булочек	0	4	11	5	1

Будем считать, что мы выбирали булочки случайным образом и каждый раз независимо от других.

Метод максимального правдоподобия в статистике

Тогда мы можем найти вероятность такой выборки с помощью нашей модели

Метод максимального правдоподобия в статистике

Количество изюминок	0	10	20	30	40
Количество булочек	0	4	11	5	1

$$\mathbb{P}(Y = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda},$$

Тогда мы можем найти вероятность такой выборки с помощью нашей модели

$$\left(\frac{\hat{\lambda}^0}{0!} e^{-\hat{\lambda}}\right)^0 \cdot \left(\frac{\hat{\lambda}^{10}}{10!} e^{-\hat{\lambda}}\right)^4 \cdot \left(\frac{\hat{\lambda}^{20}}{20!} e^{-\hat{\lambda}}\right)^{11} \cdot \left(\frac{\hat{\lambda}^{30}}{30!} e^{-\hat{\lambda}}\right)^5 \cdot \left(\frac{\hat{\lambda}^{40}}{40!} e^{-\hat{\lambda}}\right)^1$$

Метод максимального правдоподобия в статистике

Количество изюминок	0	10	20	30	40
Количество булочек	0	4	11	5	1

$$\mathbb{P}(Y = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda},$$

Тогда мы можем найти вероятность такой выборки с помощью нашей модели

$$\left(\frac{\hat{\lambda}^0}{0!} e^{-\hat{\lambda}}\right)^0 \cdot \left(\frac{\hat{\lambda}^{10}}{10!} e^{-\hat{\lambda}}\right)^4 \cdot \left(\frac{\hat{\lambda}^{20}}{20!} e^{-\hat{\lambda}}\right)^{11} \cdot \left(\frac{\hat{\lambda}^{30}}{30!} e^{-\hat{\lambda}}\right)^5 \cdot \left(\frac{\hat{\lambda}^{40}}{40!} e^{-\hat{\lambda}}\right)^1$$

Это произведение вероятностей носит название **правдоподобия выборки**

Метод максимального правдоподобия в статистике

Количество изюминок	0	10	20	30	40
Количество булочек	0	4	11	5	1

$$\mathbb{P}(Y = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda},$$

Тогда мы можем найти вероятность такой выборки с помощью нашей модели

$$\left(\frac{\hat{\lambda}^0}{0!} e^{-\hat{\lambda}}\right)^0 \cdot \left(\frac{\hat{\lambda}^{10}}{10!} e^{-\hat{\lambda}}\right)^4 \cdot \left(\frac{\hat{\lambda}^{20}}{20!} e^{-\hat{\lambda}}\right)^{11} \cdot \left(\frac{\hat{\lambda}^{30}}{30!} e^{-\hat{\lambda}}\right)^5 \cdot \left(\frac{\hat{\lambda}^{40}}{40!} e^{-\hat{\lambda}}\right)^1$$

Это произведение вероятностей носит название **правдоподобия выборки**

Идея:
Найдем такой параметр, при котором эта вероятность максимальна!

Метод максимального правдоподобия в статистике

Можно решить задачу нахождения неизвестной оценки параметра через логарифмирование и производную. Обычно делают именно так.

Метод максимального правдоподобия в статистике

Можно решить задачу нахождения неизвестной оценки параметра через логарифмирование и производную. Обычно делают именно так.

Но тут всё проще: для распределения Пуассона данный параметр является просто мат. ожиданием, найдем его оценку, как выборочное среднее:

$$\hat{\lambda} = \frac{4 \cdot 10 + 11 \cdot 20 + 5 \cdot 30 + 40}{4 + 11 + 5 + 1} = \frac{450}{21} = 21{,}4$$

Метод максимального правдоподобия в статистике

Можно решить задачу нахождения неизвестной оценки параметра через логарифмирование и производную. Обычно делают именно так.

Но тут всё проще: для распределения Пуассона данный параметр является просто мат. ожиданием, найдем его оценку, как выборочное среднее:

$$\hat{\lambda} = \frac{4 \cdot 10 + 11 \cdot 20 + 5 \cdot 30 + 40}{4 + 11 + 5 + 1} = \frac{450}{21} = 21{,}4$$

Аналогично, мы можем оценить параметры для других распределений. Метод также популярен для решения задач машинного обучения, к примеру – в логистической регрессии.

Метод максимального правдоподобия в статистике

Можно решить задачу нахождения неизвестной оценки параметра через логарифмирование и производную. Обычно делают именно так.

Но тут всё проще: для распределения Пуассона данный параметр является просто мат. ожиданием, найдем его оценку, как выборочное среднее:

$$\hat{\lambda} = \frac{4 \cdot 10 + 11 \cdot 20 + 5 \cdot 30 + 40}{4 + 11 + 5 + 1} = \frac{450}{21} = 21{,}4$$

Аналогично, мы можем оценить параметры для других распределений. Метод также популярен для решения задач машинного обучения, к примеру – в логистической регрессии.

Оценки методом максимального правдоподобия обладают хорошими статистическими свойствами

Метод максимального правдоподобия в статистике

Можно решить задачу нахождения неизвестной оценки параметра через логарифмирование и производную. Обычно делают именно так.

Но тут всё проще: для распределения Пуассона данный параметр является просто мат. ожиданием, найдем его оценку, как выборочное среднее:

$$\hat{\lambda} = \frac{4 \cdot 10 + 11 \cdot 20 + 5 \cdot 30 + 40}{4 + 11 + 5 + 1} = \frac{450}{21} = 21{,}4$$

Аналогично, мы можем оценить параметры для других распределений. Метод также популярен для решения задач машинного обучения, к примеру – в логистической регрессии.

Оценки методом максимального правдоподобия обладают хорошими статистическими свойствами

В частности, при увеличении размера выборки они стремятся к истинным значениям (сходятся по вероятности, если быть корректными)

Метод максимального правдоподобия в статистике (БОНУС)

Ответы на вопросы:

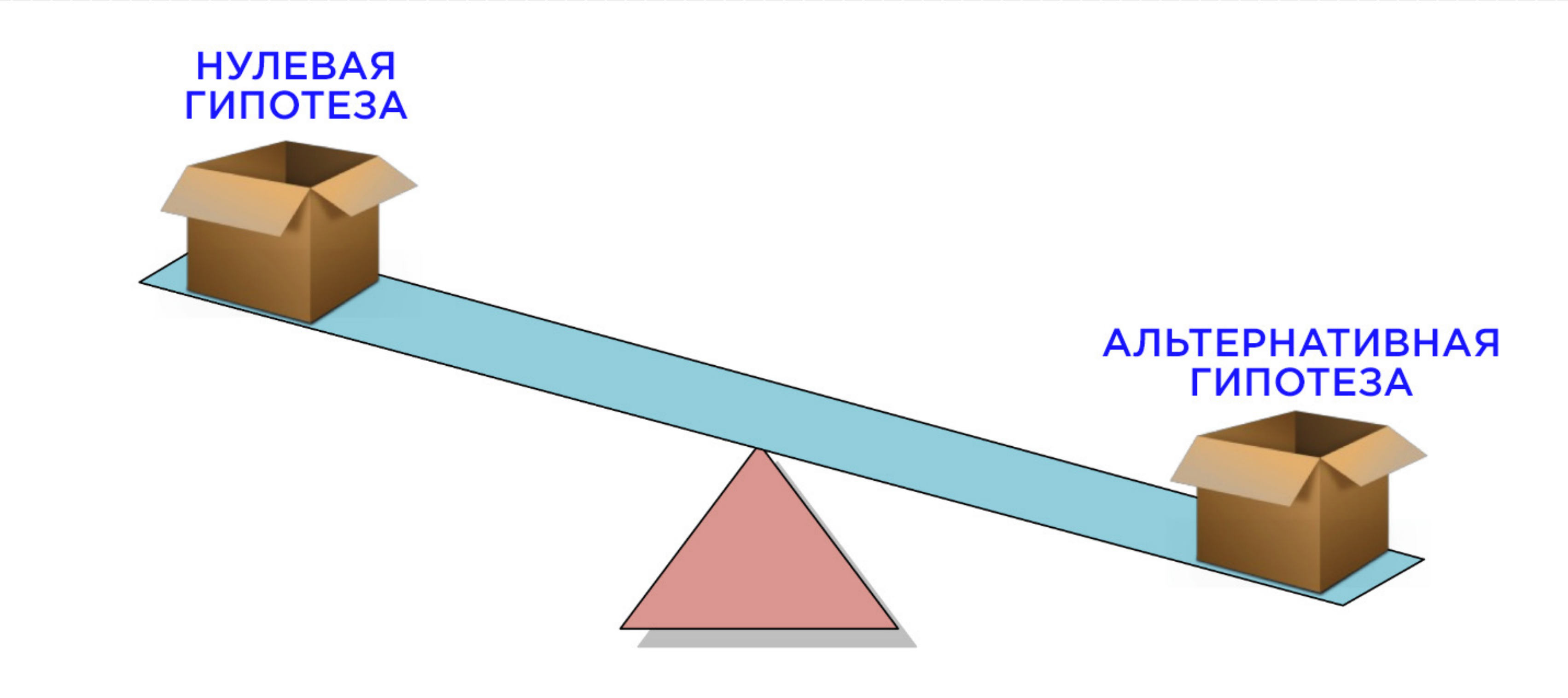
А как мы сразу сказали, что изюм в булочках распределён по Пуассону?

- Мы изначально знали, из опыта, что случайные величины–счетчики хорошо моделируются Пуассоном.

А как проверить, что данное распределение действительно можно считать распределением Пуассона?

- Мы только что определили параметр распределения, поэтому мы теперь знаем некое теоретическое распределение. Теперь мы можем применить стат. критерий (к примеру тест хи-квадрат). Грубо говоря, возьмем нашу табличку значений эксперимента и параметр, который мы оценили, подадим в критерий на вход. В результате на выходе получим вывод критерия в формате ДА/НЕТ. В ответе ДА(действительно Пуассон) мы сможем быть уверены (к примеру, на 95 %). Но надо быть осторожным, ответ НЕТ необязательно такой, может не хватать данных («не набрали мощность»).

Часть 2. Проверка гипотез



В этой части нас ждет:

- Проверка гипотезы на примере, z-тест
- Ошибки 1-го и 2-го рода, мощность
- Множественная проверка гипотез
- Ещё примеры распределений…
- Ещё примеры статистических критериев…
- Выводы

Проверка гипотезы на примере z-теста

Проверка гипотезы на примере z-теста

Рассмотрим снова пример с конверсией

Пусть выборка состоит из 1000 человек, которым была предложена услуга, из них 100 человек подключило услугу.
Но тут у нас есть какой-то порог по конверсии, к примеру, 8%. Если конверсия ниже порога - услуга не интересна для бизнеса.

Проверка гипотезы на примере z-теста

Рассмотрим снова пример с конверсией

Пусть выборка состоит из 1000 человек, которым была предложена услуга, из них 100 человек подключило услугу.
Но тут у нас есть какой-то порог по конверсии, к примеру, 8%. Если конверсия ниже порога - услуга не интересна для бизнеса.

Задача: оценить конверсию и проверить, значимо ли она отличается от порога.

Проверка гипотезы на примере z-теста

Рассмотрим снова пример с конверсией

Пусть выборка состоит из 1000 человек, которым была предложена услуга, из них 100 человек подключило услугу.
Но тут у нас есть какой-то порог по конверсии, к примеру, 8%. Если конверсия ниже порога - услуга не интересна для бизнеса.

Задача: оценить конверсию и проверить, значимо ли она отличается от порога.

Итак:

Точечная оценка

$$\widehat{conv} = \frac{100}{1000} = 0.1 = 10\% > 8\%$$

Проверка гипотезы на примере z-теста

Рассмотрим снова пример с конверсией

Пусть выборка состоит из 1000 человек, которым была предложена услуга, из них 100 человек подключило услугу.
Но тут у нас есть какой-то порог по конверсии, к примеру, 8%. Если конверсия ниже порога - услуга не интересна для бизнеса.

Задача: оценить конверсию и проверить, значимо ли она отличается от порога.

Итак:

Точечная оценка

$$\widehat{conv} = \frac{100}{1000} = 0.1 = 10\% > 8\%$$

Вопрос: Значимо ли (статистически) истинная конверсия отличается от 8 %, можно ли верить выборке, или это просто случайность?

Проверка гипотезы на примере z-теста

Введём 2 гипотезы:

Проверка гипотезы на примере z-теста

Введём 2 гипотезы:

- **Истинная конверсия равна 8% (нулевая гипотеза)**

Проверка гипотезы на примере z-теста

Введём 2 гипотезы:

- Истинная конверсия равна 8% (нулевая гипотеза)
- **Истинная конверсия отличается от 8% (альтернативная гипотеза)**

Проверка гипотезы на примере z-теста

Введём 2 гипотезы:
- Истинная конверсия равна 8% (нулевая гипотеза)
- Истинная конверсия отличается от 8% (альтернативная гипотеза)

- **Нулевая гипотеза, как правило, получается из предположения, что отличий нет**

Проверка гипотезы на примере z-теста

Введём 2 гипотезы:
- Истинная конверсия равна 8% (нулевая гипотеза)
- Истинная конверсия отличается от 8% (альтернативная гипотеза)

- Нулевая гипотеза, как правило, получается из предположения, что отличий нет

- **Её мы и хотим отвергнуть и, тем самым, показать, что отличия есть**

Проверка гипотезы на примере z-теста

Идея:

Проверка гипотезы на примере z-теста

Идея:

- **Предположим, что нулевая гипотеза верна. То есть будто бы истинная конверсия равна 8 %**

Проверка гипотезы на примере z-теста

Идея:

- Предположим, что нулевая гипотеза верна. То есть будто бы истинная конверсия равна 8 %

- **Возьмем тестовую статистику, которая при справедливости нулевой гипотезы распределена по известному распределению (к примеру, нормальному распределению).**

Проверка гипотезы на примере z-теста

Идея:

- Предположим, что нулевая гипотеза верна. То есть будто бы истинная конверсия равна 8 %
- Возьмем тестовую статистику, которая при справедливости нулевой гипотезы распределена по известному распределению (к примеру, нормальному распределению).

Такое распределение тестовой статистики называется нулевым распределением.

Проверка гипотезы на примере z-теста

Идея:

- Предположим, что нулевая гипотеза верна. То есть будто бы истинная конверсия равна 8 %

- Возьмем тестовую статистику, которая <u>при справедливости нулевой гипотезы</u> распределена по известному распределению (к примеру, нормальному распределению).

Такое распределение тестовой статистики называется <u>нулевым распределением.</u>

- **В нашем случае, <u>получим z-статистику</u> из Центральной предельной теоремы (очень напоминает формулу для дов. интервала).**

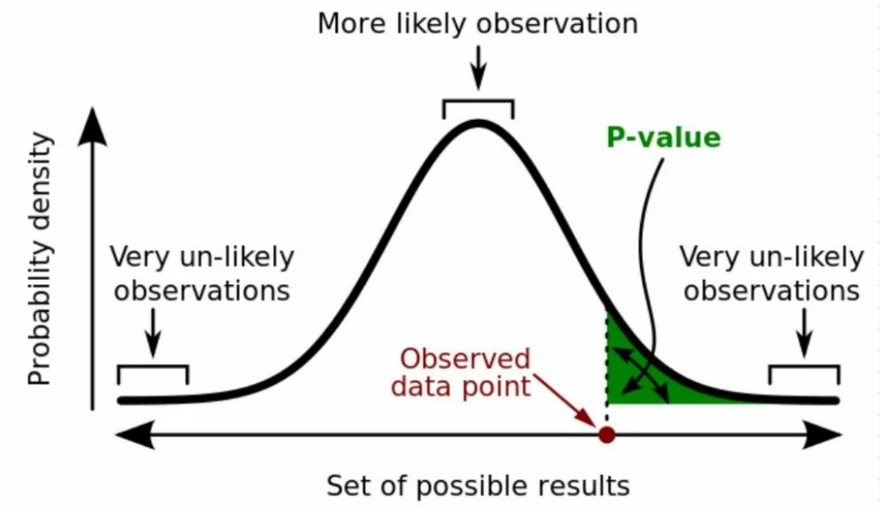
$$z = \sqrt{n}\frac{\widehat{conv} - 0.08}{\sqrt{\widehat{conv} \cdot (1 - \widehat{conv})}} \sim N(0,1)$$

Проверка гипотезы на примере z-теста

- Подсчитаем, какое значение статистики реализуется в нашем случае.

Проверка гипотезы на примере z-теста

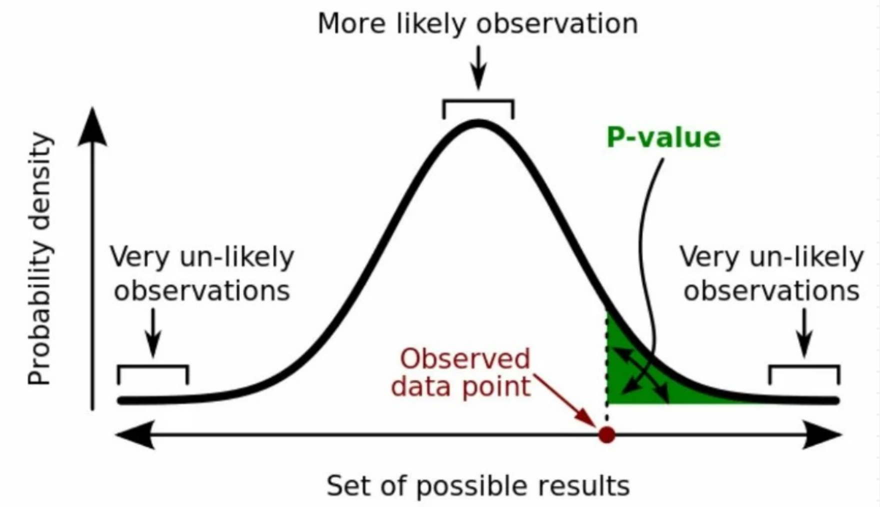
- Подсчитаем, <u>какое значение статистики реализуется</u> в нашем случае.



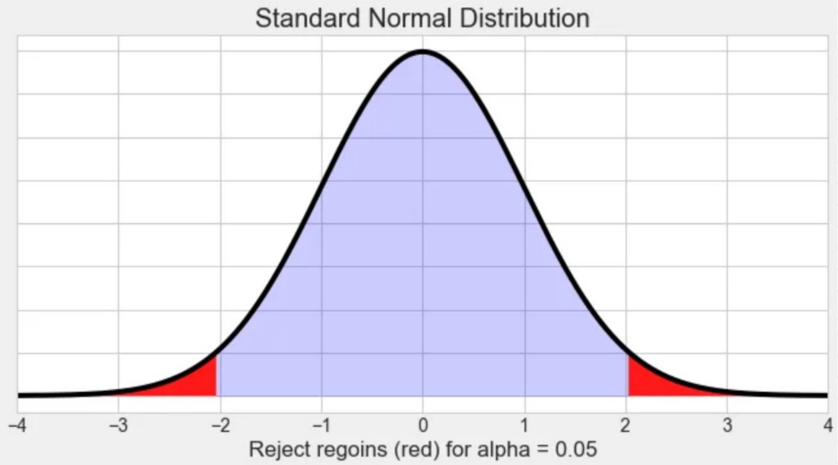
- Найдём <u>по нулевому распределению вероятность</u> получить значение, <u>такое же</u> по модулю, как наше значение из эксперимента (<u>или большее</u>).
*Эта вероятность называется **p-value**.*

Проверка гипотезы на примере z-теста

- Подсчитаем, какое значение статистики реализуется в нашем случае.



- Найдём по нулевому распределению вероятность получить значение, такое же по модулю, как наше значение из эксперимента (или большее).
*Эта вероятность называется **p-value**.*

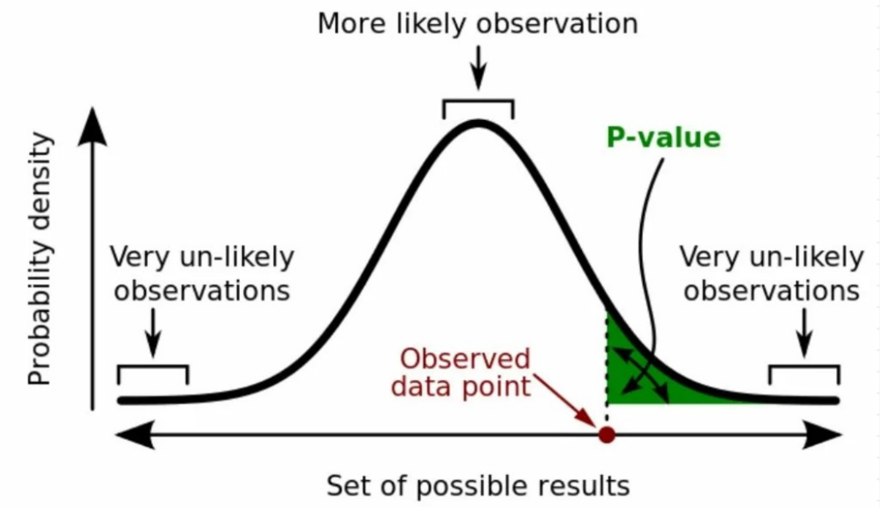


- Если такая вероятность будет меньше какого-то порога, часто берут 0.05 (соответствует доверительной вероятности 95%), то отвергаем нулевую гипотезу и говорим, что отличия в конверсиях есть.

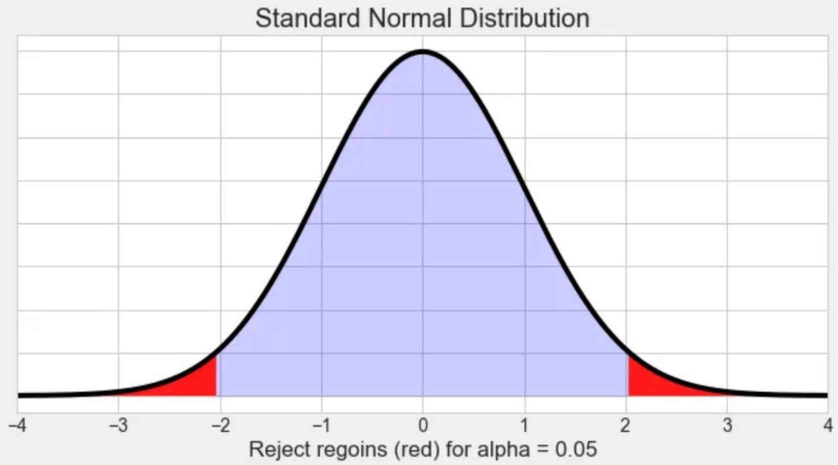
Проверка гипотезы на примере z-теста

- Подсчитаем, какое значение статистики реализуется в нашем случае.

- Найдём по нулевому распределению вероятность получить значение, такое же по модулю, как наше значение из эксперимента (или большее).
*Эта вероятность называется **p-value**.*



- Если такая вероятность будет меньше какого-то порога, часто берут 0.05 (соответствует доверительной вероятности 95%), то отвергаем нулевую гипотезу и говорим, что отличия в конверсиях есть.



Вот и весь процесс проверки гипотез на примере z-теста.

Проверка гипотезы на примере z-теста

Вернёмся к кейсу с конверсией.

Проверка гипотезы на примере z-теста

Вернёмся к кейсу с конверсией.

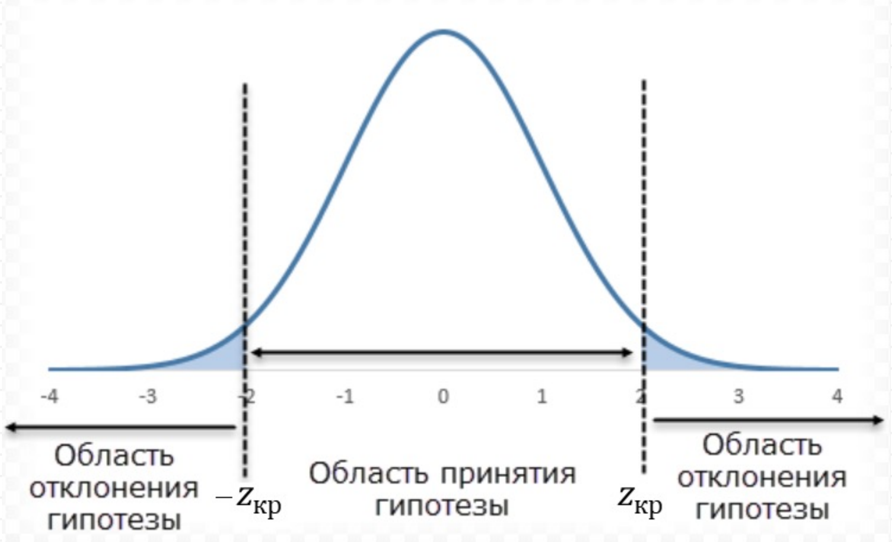
1) Перейдем от вероятностей к критическим значениям. К примеру, для 95% вероятности $z_{\text{кр}} = 1.96$.

Проверка гипотезы на примере z-теста

Вернёмся к кейсу с конверсией.

1) Перейдем от вероятностей к критическим значениям. К примеру, для 95% вероятности $z_{\text{кр}} = 1.96.$

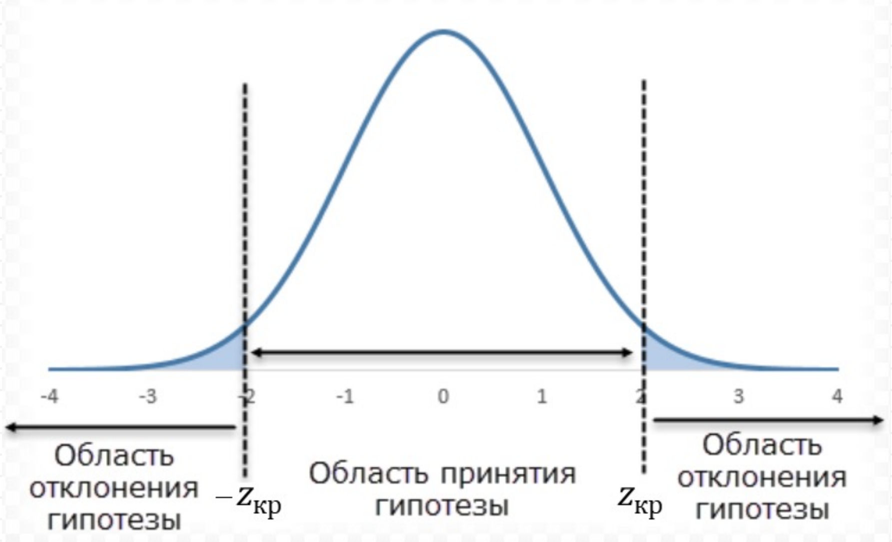
Условие:
Если наше экспериментальное значение по модулю больше критического, то мы отвергаем нашу нулевую гипотезу.



Проверка гипотезы на примере z-теста

Вернёмся к кейсу с конверсией.

1) Перейдем от вероятностей к критическим значениям. К примеру, для 95% вероятности $z_{кр} = 1.96.$



Условие:
Если наше экспериментальное значение по модулю больше критического, то мы отвергаем нашу нулевую гипотезу.

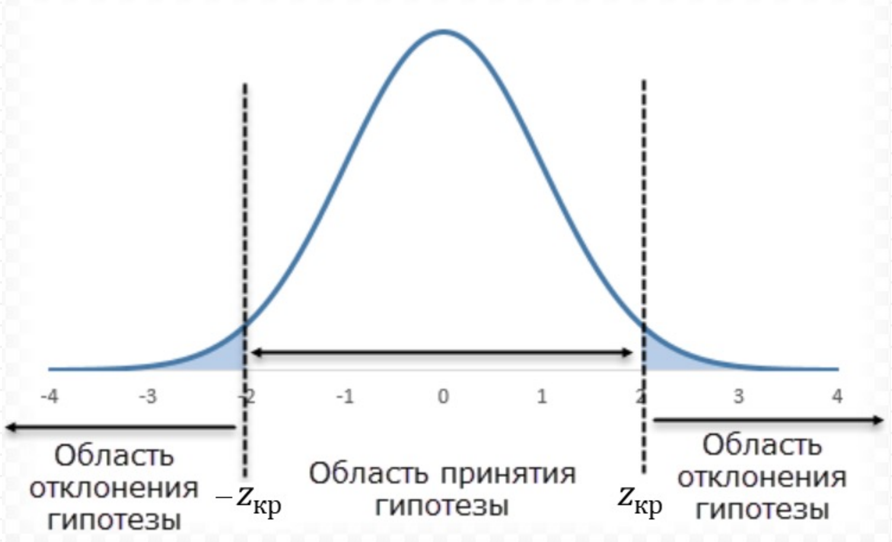
2) Теперь подсчитаем, что у нас есть в итоге:

$$z = \sqrt{n}\frac{\widehat{conv} - 0.08}{\sqrt{\widehat{conv} \cdot (1 - \widehat{conv})}} = \sqrt{1000}\frac{0.1 - 0.08}{\sqrt{0.1 \cdot (1 - 0.1)}} = 2.11 > z_{кр} = 1.96$$

Проверка гипотезы на примере z-теста

Вернёмся к кейсу с конверсией.

1) Перейдем от вероятностей к критическим значениям. К примеру, для 95% вероятности $z_{кр} = 1.96$.



Условие:
Если наше экспериментальное значение по модулю больше критического, то мы отвергаем нашу нулевую гипотезу.

2) Теперь подсчитаем, что у нас есть в итоге:

$$z = \sqrt{n}\frac{\widehat{conv} - 0.08}{\sqrt{\widehat{conv}\cdot(1 - \widehat{conv})}} = \sqrt{1000}\frac{0.1 - 0.08}{\sqrt{0.1\cdot(1 - 0.1)}} = 2.11 > z_{кр} = 1.96$$

Вывод: мы отвергаем нулевую гипотезу в пользу альтернативы и говорим о значимости услуги для бизнеса.

Проверка гипотезы на примере z-теста (БОНУС)

Ответы на вопросы:

Почему мы проверяем такие гипотезы, ведь нам интересно, чтобы конверсия была строго больше 8 %?

- Дело в том, что:

1) Нулевая гипотеза должна быть такой, чтобы нулевое распределение было «удобным» для нас, достаточно простым, в данном случае имеем стандартное нормальное распределение.
2) При проверке гипотезы мы не должны удалять из внимания случаи, когда конверсия меньше 8 %, поэтому мы используем двусторонний тест, то есть двустороннюю альтернативу

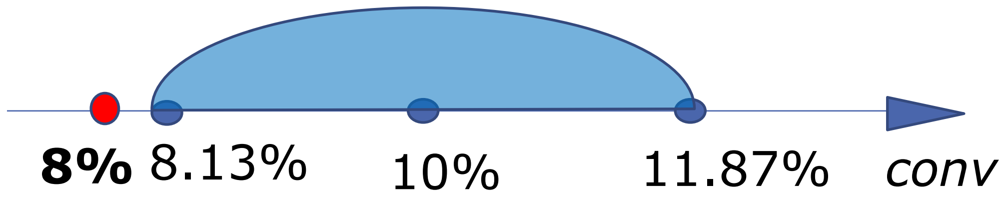
А как мы по такому выводу теста сделали заключение, что конверсия > 8 %, ведь мы доказали, что она не равна 8 %?

- Мы использовали знание точечной оценки (10 %), она была больше 8 %, поэтому с 95 % вероятностью мы говорим именно, что наша конверсия > 8%

<u>Эти выводы эквивалентны использованию доверительного интервала (можно это доказать).</u> В нашем случае, если он будет весь строго больше 8 %, то и наше истинное значение (на генеральной совокупности) с 95 % вероятностью будет больше 8 %.

$$\widehat{conv} \pm z_{0.975}\sqrt{\frac{\widehat{conv}\cdot(1-\widehat{conv})}{n}} = 0.1 \pm 1.96\sqrt{\frac{0.1\cdot(1-0.1)}{1000}} = 10\ \% \pm 1.87\%$$

Видно, что так и есть



Если попытаться брать другие гипотезы, то эквивалентности уже, скорее всего, не будет.

z-тест более строго

выборка:	$X^n = (X_1, \ldots, X_n)$,
	$X \sim N(\mu, \sigma^2)$, σ известна;
нулевая гипотеза:	$H_0: \mu = \mu_0$;
альтернатива:	$H_1: \mu <\neq> \mu_0$;
статистика:	$Z(X^n) = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$;
нулевое распределение:	$Z(X^n) \sim N(0, 1)$.

z-тест более строго

выборка:	$X^n = (X_1, \ldots, X_n)$,
	$X \sim N(\mu, \sigma^2)$, σ известна;
нулевая гипотеза:	$H_0: \mu = \mu_0$;
альтернатива:	$H_1: \mu <\neq> \mu_0$;
статистика:	$Z(X^n) = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$;
нулевое распределение:	$Z(X^n) \sim N(0,1)$.

Только для нормально распределенной случайной величины?!

z-тест более строго

выборка:	$X^n = (X_1, \dots, X_n)$, $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, σ известна;
нулевая гипотеза:	$H_0: \mu = \mu_0$;
альтернатива:	$H_1: \mu <\neq> \mu_0$;
статистика:	$Z(X^n) = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$;
нулевое распределение:	$Z(X^n) \sim N(0, 1)$.

~~*Только для нормально распределенной случайной величины?!*~~

В реальной жизни:

z-тест более строго

выборка:	$X^n = (X_1, \ldots, X_n)$,
	$X \sim N(\mu, \sigma^2)$, σ известна;
нулевая гипотеза:	$H_0: \mu = \mu_0$;
альтернатива:	$H_1: \mu <\neq> \mu_0$;
статистика:	$Z(X^n) = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$;
нулевое распределение:	$Z(X^n) \sim N(0, 1)$.

~~Только для нормально распределенной случайной величины?!~~

В реальной жизни:

- **Применяют <u>не только для нормального распределения </u>(мы уже это делали)**

z-тест более строго

выборка:	$X^n = (X_1, \ldots, X_n)$,
	$X \sim N(\mu, \sigma^2)$, σ известна;
нулевая гипотеза:	$H_0: \mu = \mu_0$;
альтернатива:	$H_1: \mu <\neq> \mu_0$;
статистика:	$Z(X^n) = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$;
нулевое распределение:	$Z(X^n) \sim N(0, 1)$.

~~*Только для нормально распределенной случайной величины?!*~~

В реальной жизни:

- Применяют не только для нормального распределения (мы уже это делали)
- **Не только, когда известна истинное стандартное отклонение (**мы уже это делали**)**

z-тест более строго

выборка:	$X^n = (X_1, \ldots, X_n)$, $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, σ известна;
нулевая гипотеза:	$H_0 : \mu = \mu_0$;
альтернатива:	$H_1 : \mu <\neq> \mu_0$;
статистика:	$Z(X^n) = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$;
нулевое распределение:	$Z(X^n) \sim N(0, 1)$.

~~*Только для нормально распределенной случайной величины?!*~~

В реальной жизни:

- Применяют не только для нормального распределения (мы уже это делали)
- Не только, когда известна истинное стандартное отклонение (мы уже это делали)
- **Если, конечно, выполняются предпосылки Центральной предельной теоремы**

Ошибки 1-го и 2-го рода, мощность

Ошибки 1-го и 2-го рода, мощность

	H_0 верна	H_0 неверна
H_0 принимается	H_0 верно принята	Ошибка II рода
H_0 отвергается	Ошибка I рода	H_0 верно отвергнута

Ошибки 1-го и 2-го рода, мощность

	H_0 верна	H_0 неверна
H_0 принимается	H_0 верно принята	Ошибка II рода
H_0 отвергается	Ошибка I рода	H_0 верно отвергнута

Вероятность ошибки 1-го рода:

$$\mathbf{P}(H_0 \text{ отвергнута} \mid H_0 \text{ верна}) = \mathbf{P}(p \leq \alpha \mid H_0) \leq \alpha.$$

Ошибки 1-го и 2-го рода, мощность

	H_0 верна	H_0 неверна
H_0 принимается	H_0 верно принята	Ошибка II рода
H_0 отвергается	Ошибка I рода	H_0 верно отвергнута

Вероятность ошибки 1-го рода:

$$\mathbf{P}(H_0 \text{ отвергнута} \mid H_0 \text{ верна}) = \mathbf{P}(p \leq \alpha \mid H_0) \leq \alpha.$$

В нашем примере мы сразу ограничили вероятность неверного открытия величиной в 5 %, то есть с 95 % вероятностью наши открытия будут истинными

Ошибки 1-го и 2-го рода, мощность

	H_0 верна	H_0 неверна
H_0 принимается	H_0 верно принята	Ошибка II рода
H_0 отвергается	Ошибка I рода	H_0 верно отвергнута

Вероятность ошибки 1-го рода:

$$\mathbf{P}(H_0 \text{ отвергнута} \mid H_0 \text{ верна}) = \mathbf{P}(p \le \alpha \mid H_0) \le \alpha.$$

В нашем примере мы сразу ограничили вероятность неверного открытия величиной в 5 %, то есть с 95 % вероятностью наши открытия будут истинными

$$\text{pow} = \mathbf{P}(\text{отвергаем } H_0 | H_1) = 1 - \mathbf{P}(\text{принимаем } H_0 | H_1) .$$

Вероятность ошибки 2-го рода

Ошибки 1-го и 2-го рода, мощность

	H_0 верна	H_0 неверна
H_0 принимается	H_0 верно принята	Ошибка II рода
H_0 отвергается	Ошибка I рода	H_0 верно отвергнута

Вероятность ошибки 1-го рода:

$$\mathbf{P}(H_0 \text{ отвергнута} \mid H_0 \text{ верна}) = \mathbf{P}(p \leq \alpha \mid H_0) \leq \alpha.$$

В нашем примере мы сразу ограничили вероятность неверного открытия величиной в 5 %, то есть с 95 % вероятностью наши открытия будут истинными

$$\text{pow} = \mathbf{P}(\text{отвергаем } H_0 | H_1) = 1 - \mathbf{P}(\text{принимаем } H_0 | H_1).$$

Вероятность ошибки 2-го рода

Мощность, как правило, выбирают равной 80 %, что соответствует 20 % вероятности принять неверную нулевую гипотезу, «потерять» открытие

Ошибки 1-го и 2-го рода, мощность

Как же можно определиться с необходимым количеством данных (временем эксперимента)?

Ошибки 1-го и 2-го рода, мощность

Как же можно определиться с необходимым количеством данных (временем эксперимента)?

- Определяются с этими вероятностями:

$$\mathbf{P}(H_0 \text{ отвергнута} \mid H_0 \text{ верна}) = \mathbf{P}(p \le \alpha \mid H_0) \le \alpha.$$

$$\mathrm{pow} = \mathbf{P}(\text{отвергаем } H_0 | \, H_1) = 1 - \mathbf{P}(\text{принимаем } H_0 \, | H_1) \, .$$

Ошибки 1-го и 2-го рода, мощность

Как же можно определиться с необходимым количеством данных (временем эксперимента)?

- Определяются с этими вероятностями:

$$\mathbf{P}(H_0 \text{ отвергнута} \mid H_0 \text{ верна}) = \mathbf{P}(p \leq \alpha \mid H_0) \leq \alpha.$$

$$\text{pow} = \mathbf{P}(\text{отвергаем } H_0 \mid H_1) = 1 - \mathbf{P}(\text{принимаем } H_0 \mid H_1)\,.$$

- Также нужна желаемая разница (эффект) между метриками в группах.

Ошибки 1-го и 2-го рода, мощность

Как же можно определиться с необходимым количеством данных (временем эксперимента)?

- Определяются с этими вероятностями:

$$\mathbf{P}(H_0 \text{ отвергнута} \mid H_0 \text{ верна}) = \mathbf{P}(p \leq \alpha \mid H_0) \leq \alpha.$$

$$\text{pow} = \mathbf{P}(\text{отвергаем } H_0 \mid H_1) = 1 - \mathbf{P}(\text{принимаем } H_0 \mid H_1).$$

- Также нужна желаемая разница (эффект) между метриками в группах.

Считают необходимое количество данных для выбранного критерия.

Ошибки 1-го и 2-го рода, мощность

Как же можно определиться с необходимым количеством данных (временем эксперимента)?

- Определяются с этими вероятностями:

$$\mathbf{P}(H_0 \text{ отвергнута} \mid H_0 \text{ верна}) = \mathbf{P}(p \leq \alpha \mid H_0) \leq \alpha.$$

$$\text{pow} = \mathbf{P}(\text{отвергаем } H_0 | \, H_1) = 1 - \mathbf{P}(\text{принимаем } H_0 \, | H_1)\,.$$

- Также нужна желаемая разница (эффект) между метриками в группах.

Считают необходимое количество данных для выбранного критерия.

Чем больше мы хотим уверенности и чем меньший эффект хотим заметить, тем дольше длится эксперимент.

Множественная проверка гипотез

Множественная проверка гипотез

Пусть мы проводим не один, а 100 независимых экспериментов, в каждом из них вероятность сделать ложное открытие 5 %.

Множественная проверка гипотез

Пусть мы проводим не один, а 100 независимых экспериментов, в каждом из них вероятность сделать ложное открытие 5 %.

К примеру, проверяем одновременно 100 услуг на предмет достаточно высокой конверсии.

Множественная проверка гипотез

Пусть мы проводим не один, а 100 независимых экспериментов, в каждом из них вероятность сделать ложное открытие 5 %.

К примеру, проверяем одновременно 100 услуг на предмет достаточно высокой конверсии.

Вопрос: Какова же вероятность сделать хотя бы одну ошибку в наших выводах?

Множественная проверка гипотез

Пусть мы проводим не один, а 100 независимых экспериментов, в каждом из них вероятность сделать ложное открытие 5 %.

К примеру, проверяем одновременно 100 услуг на предмет достаточно высокой конверсии.

Вопрос: Какова же вероятность сделать хотя бы одну ошибку в наших выводах?

$$P = 1 - 0.95^{100} \approx 100\%$$

Множественная проверка гипотез

Пусть мы проводим не один, а 100 независимых экспериментов, в каждом из них вероятность сделать ложное открытие 5 %.

К примеру, проверяем одновременно 100 услуг на предмет достаточно высокой конверсии.

Вопрос: Какова же вероятность сделать хотя бы одну ошибку в наших выводах?

$$P = 1 - 0.95^{100} \approx 100\%$$

То есть где-то мы обязательно ошибёмся!

Множественная проверка гипотез

Пусть мы проводим не один, а 100 независимых экспериментов, в каждом из них вероятность сделать ложное открытие 5 %.

К примеру, проверяем одновременно 100 услуг на предмет достаточно высокой конверсии.

Вопрос: Какова же вероятность сделать хотя бы одну ошибку в наших выводах?

$$P = 1 - 0.95^{100} \approx 100\%$$

То есть где-то мы обязательно ошибёмся!

А если мы проверяем пакет услуг, а потом делаем какой-то общий вывод о продукте в целом?
К примеру, если хоть одна услуга хороша, то и продукт можно развивать.

Множественная проверка гипотез

Пусть мы проводим не один, а 100 независимых экспериментов, в каждом из них вероятность сделать ложное открытие 5 %.

К примеру, проверяем одновременно 100 услуг на предмет достаточно высокой конверсии.

Вопрос: Какова же вероятность сделать хотя бы одну ошибку в наших выводах?

$$P = 1 - 0.95^{100} \approx 100\%$$

То есть где-то мы обязательно ошибёмся!

А если мы проверяем пакет услуг, а потом делаем какой-то общий вывод о продукте в целом?
К примеру, если хоть одна услуга хороша, то и продукт можно развивать.

Что же делать?

Множественная проверка гипотез

Поправка Бонферрони

Множественная проверка гипотез

Поправка Бонферрони

Идея: Просто «закрутим гайки» и уменьшим вероятность ошибки в каждом эксперименте!

$$\alpha_1 = \ldots = \alpha_m = \frac{\alpha}{m}.$$

m – число одновременных тестов

Множественная проверка гипотез

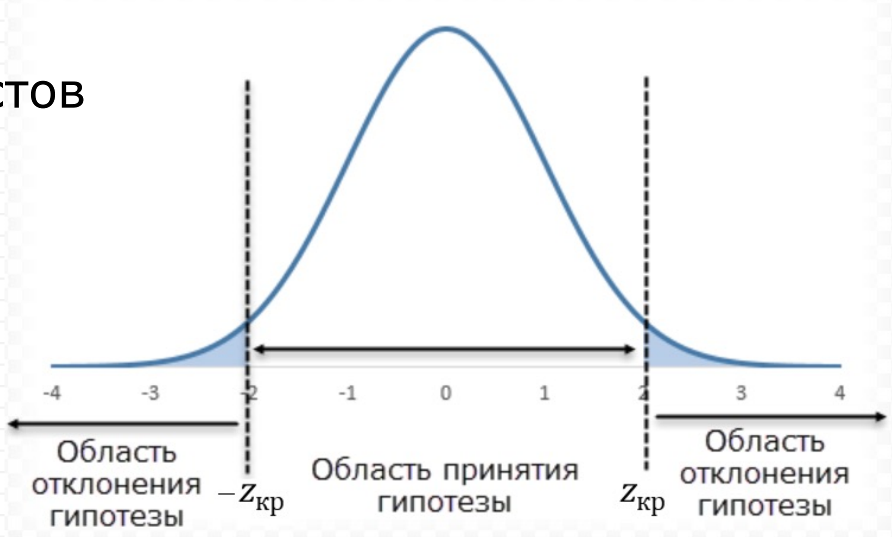
Поправка Бонферрони

Идея: Просто «закрутим гайки» и уменьшим вероятность ошибки в каждом эксперименте!

$$\alpha_1 = \ldots = \alpha_m = \frac{\alpha}{m}.$$

m – число одновременных тестов

Все критические значения z теперь станут больше по модулю, и теперь мы будем более уверенными в наших открытиях.



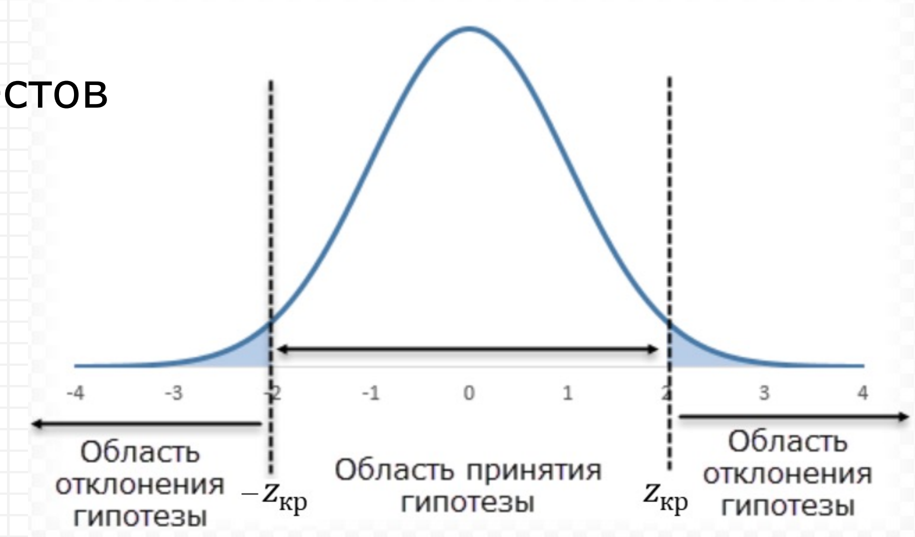
Множественная проверка гипотез

Поправка Бонферрони

Идея: Просто «закрутим гайки» и уменьшим вероятность ошибки в каждом эксперименте!

$$\alpha_1 = \ldots = \alpha_m = \frac{\alpha}{m}.$$

m – число одновременных тестов



Все критические значения z теперь станут больше по модулю, и теперь мы будем более уверенными в наших открытиях.

Но есть проблемы:

- Данная поправка слишком консервативна, мы теряем много открытий, остаются только редкие «избранные» случаи

Множественная проверка гипотез

Более «мягкие» поправки:

- Метод Холма
- Метод Бенджамини-Хохберга

Множественная проверка гипотез

Более «мягкие» поправки:

- Метод Холма
- Метод Бенджамини-Хохберга

Они «разрешают» больше ошибаться, но при этом сохраняют больше открытий

Множественная проверка гипотез

Более «мягкие» поправки:

- Метод Холма
- Метод Бенджамини-Хохберга

Они «разрешают» больше ошибаться, но при этом сохраняют больше открытий

Где еще используется множественная проверка:

- Нейронаука
- Медицина
- Биоинформатика

Ещё примеры распределений

Ещё примеры распределений

Аппарат проверки гипотез гораздо обширнее и интереснее, ознакомимся и с другими критериями.

Ещё примеры распределений

Аппарат проверки гипотез гораздо обширнее и интереснее, ознакомимся и с другими критериями.

Но для начала посмотрим ещё на несколько распределений, производных от нормального.

Ещё примеры распределений

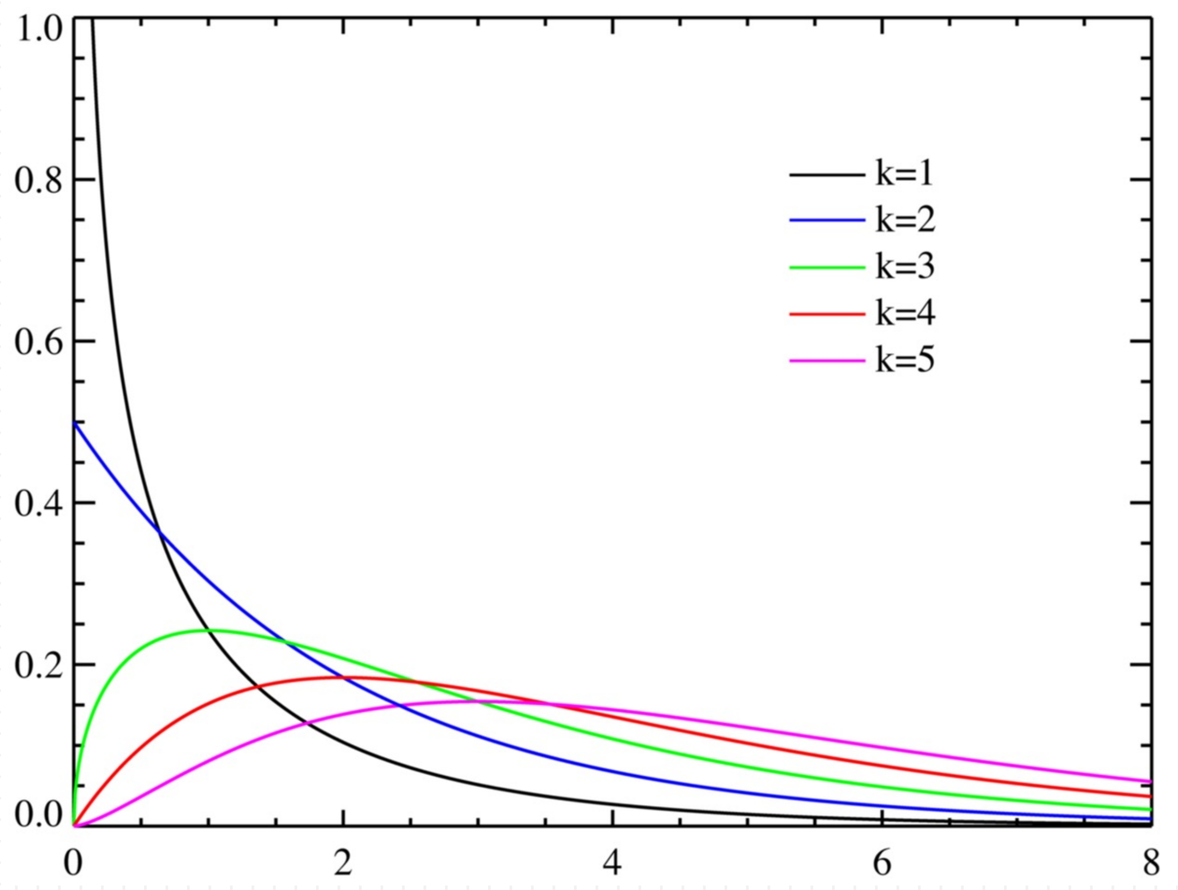
Аппарат проверки гипотез гораздо обширнее и интереснее, ознакомимся и с другими критериями.

Но для начала посмотрим ещё на несколько распределений, производных от нормального.

Они будут использоваться в критериях в качестве нулевых распределений.

Ещё примеры распределений

Распределение χ^2

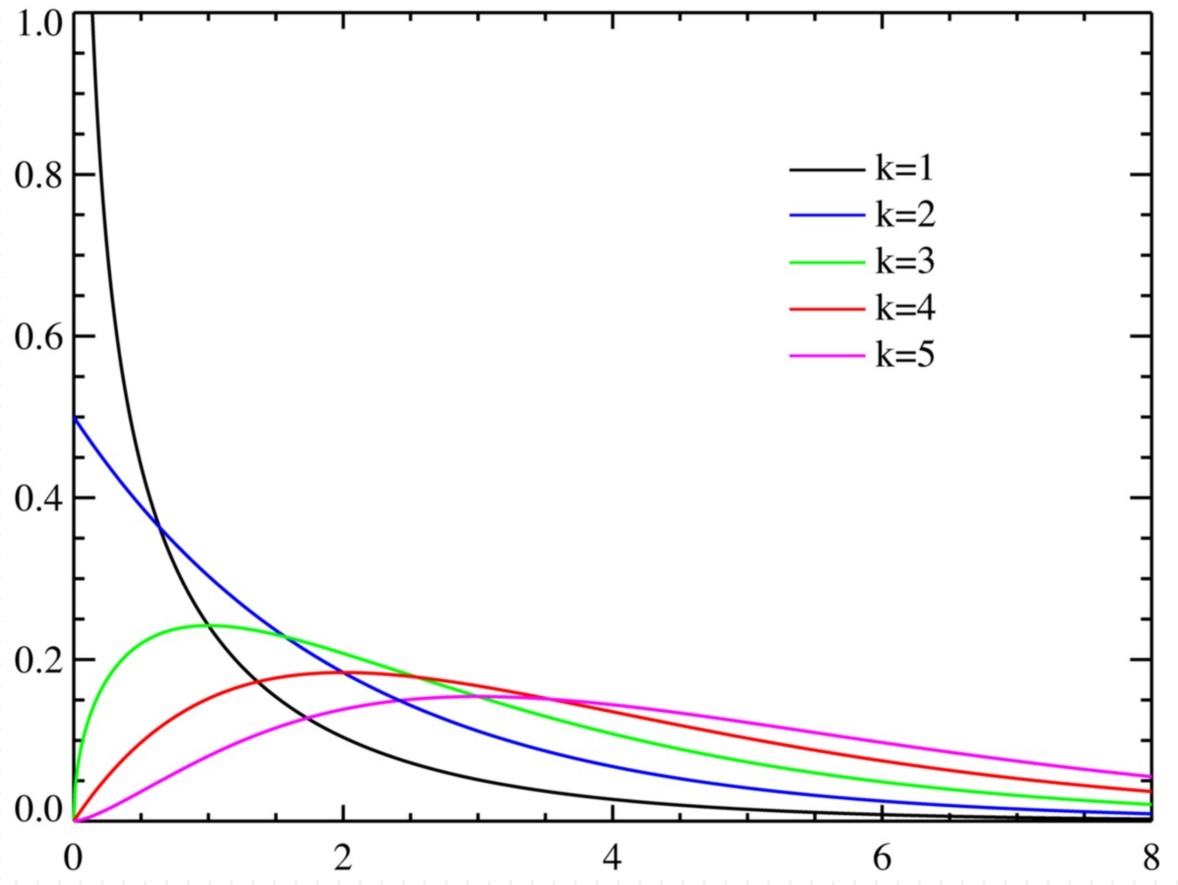


Ещё примеры распределений

Распределение χ^2

$$X_1, X_2, \ldots, X_k \sim N(0,1)$$

$$X = \sum_{i=1}^{k} X_i^2 \sim \chi_k^2.$$



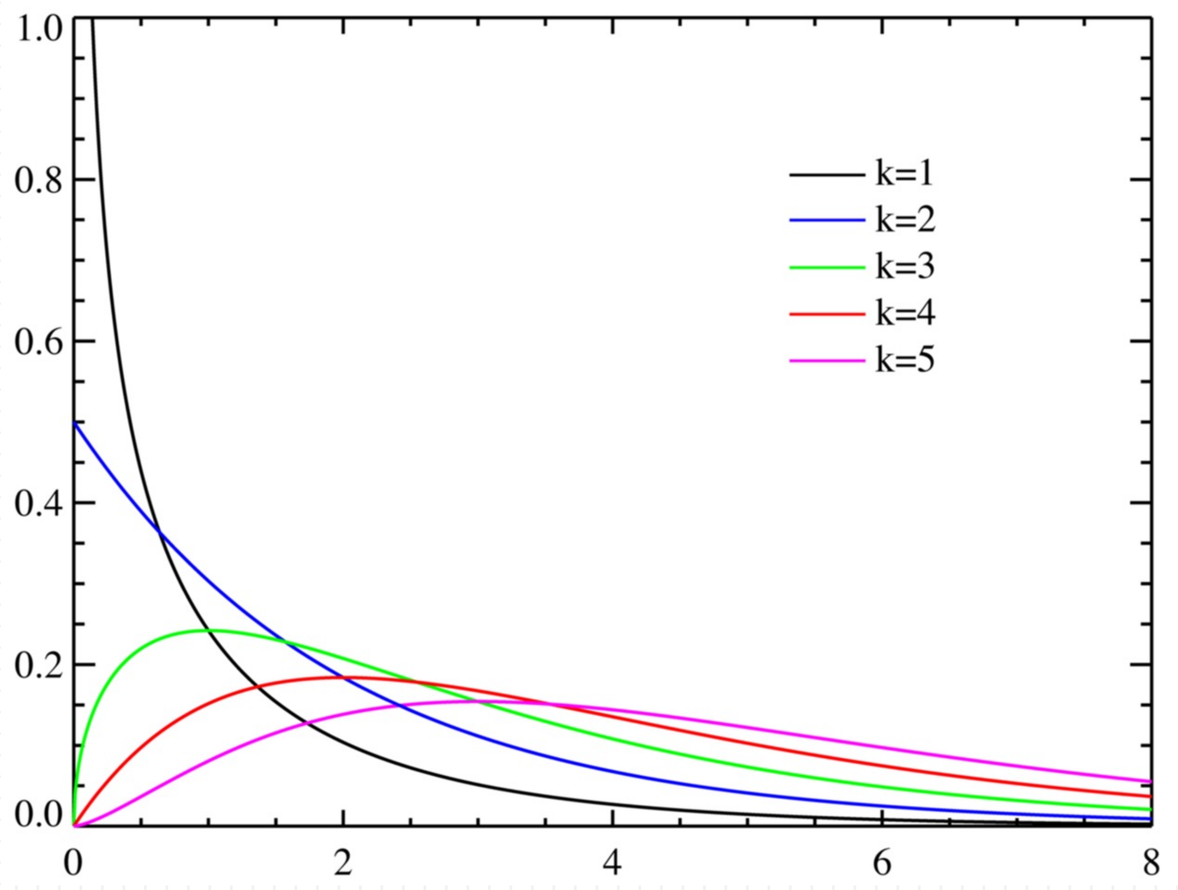
Ещё примеры распределений

Распределение χ^2

$$X_1, X_2, \ldots, X_k \sim N(0, 1)$$

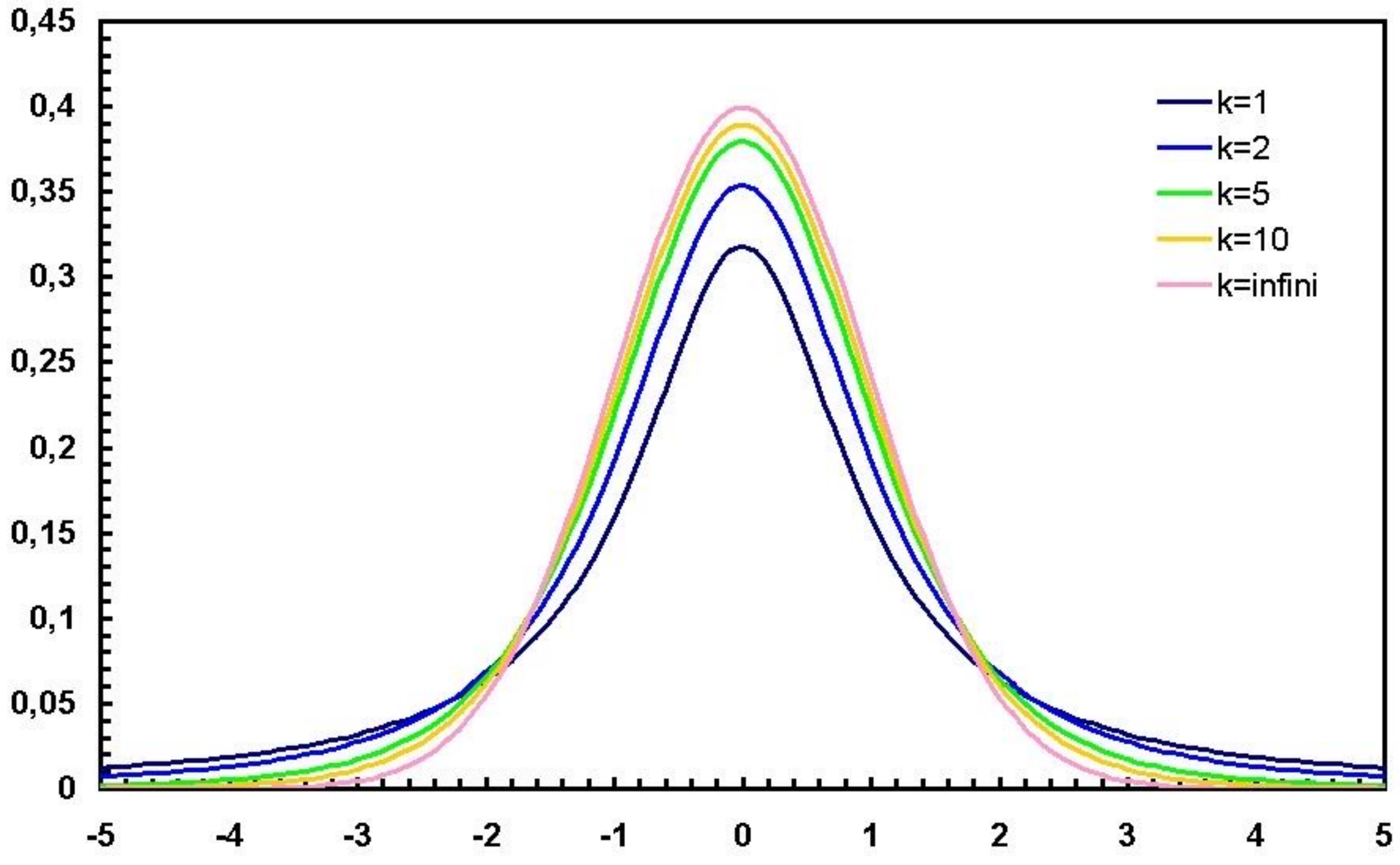
$$X = \sum_{i=1}^{k} X_i^2 \sim \chi_k^2.$$

По этому закону распределена <u>выборочная дисперсия</u> для выборок из <u>нормального распределения</u>



Ещё примеры распределений

Распределение Стьюдента

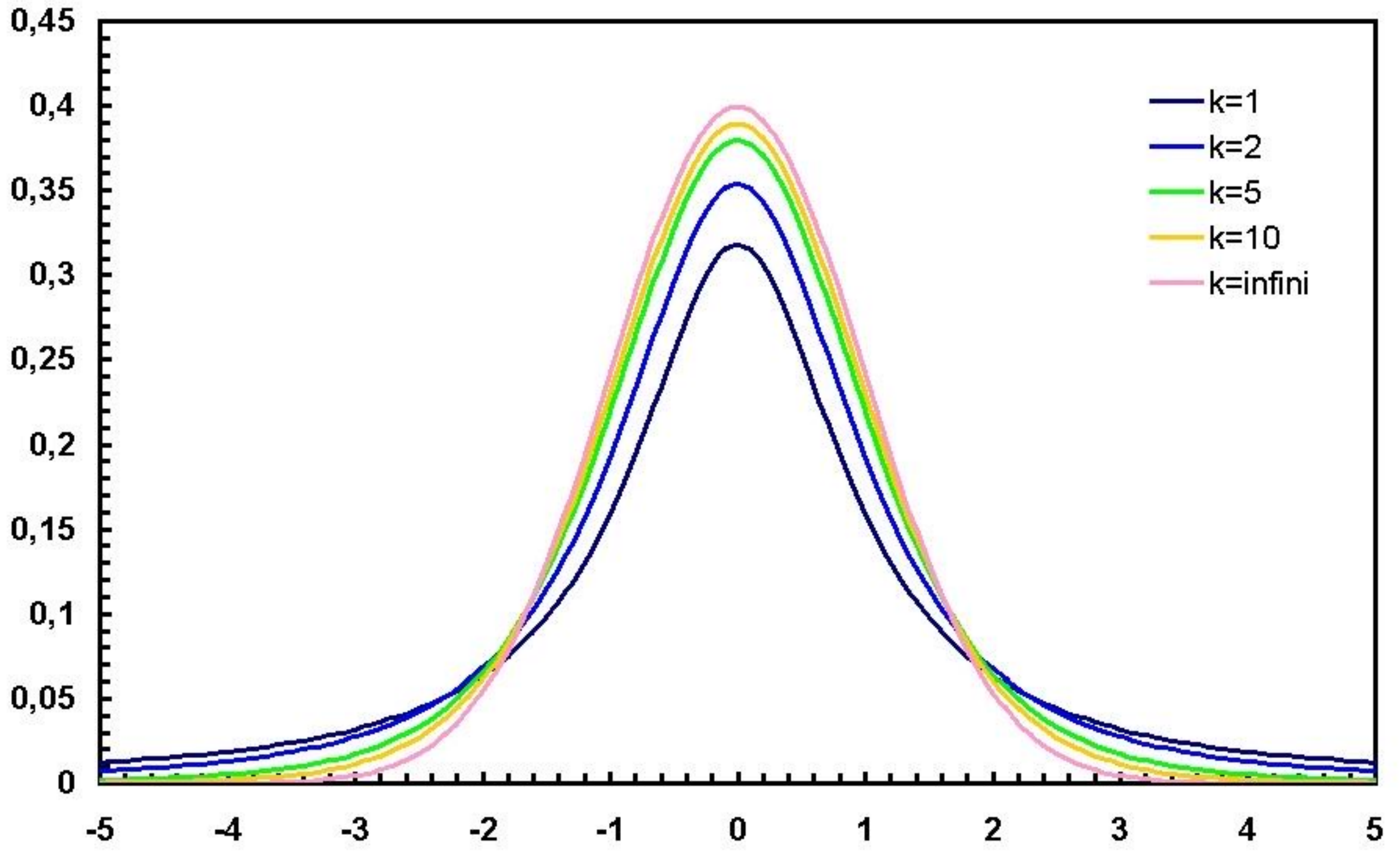


Ещё примеры распределений

Распределение Стьюдента

$$X_1 \sim N(0,1), \quad X_2 \sim \chi^2_{k}.$$

$$X = \frac{X_1}{\sqrt{X_2/_{k}}} \sim St(k)$$

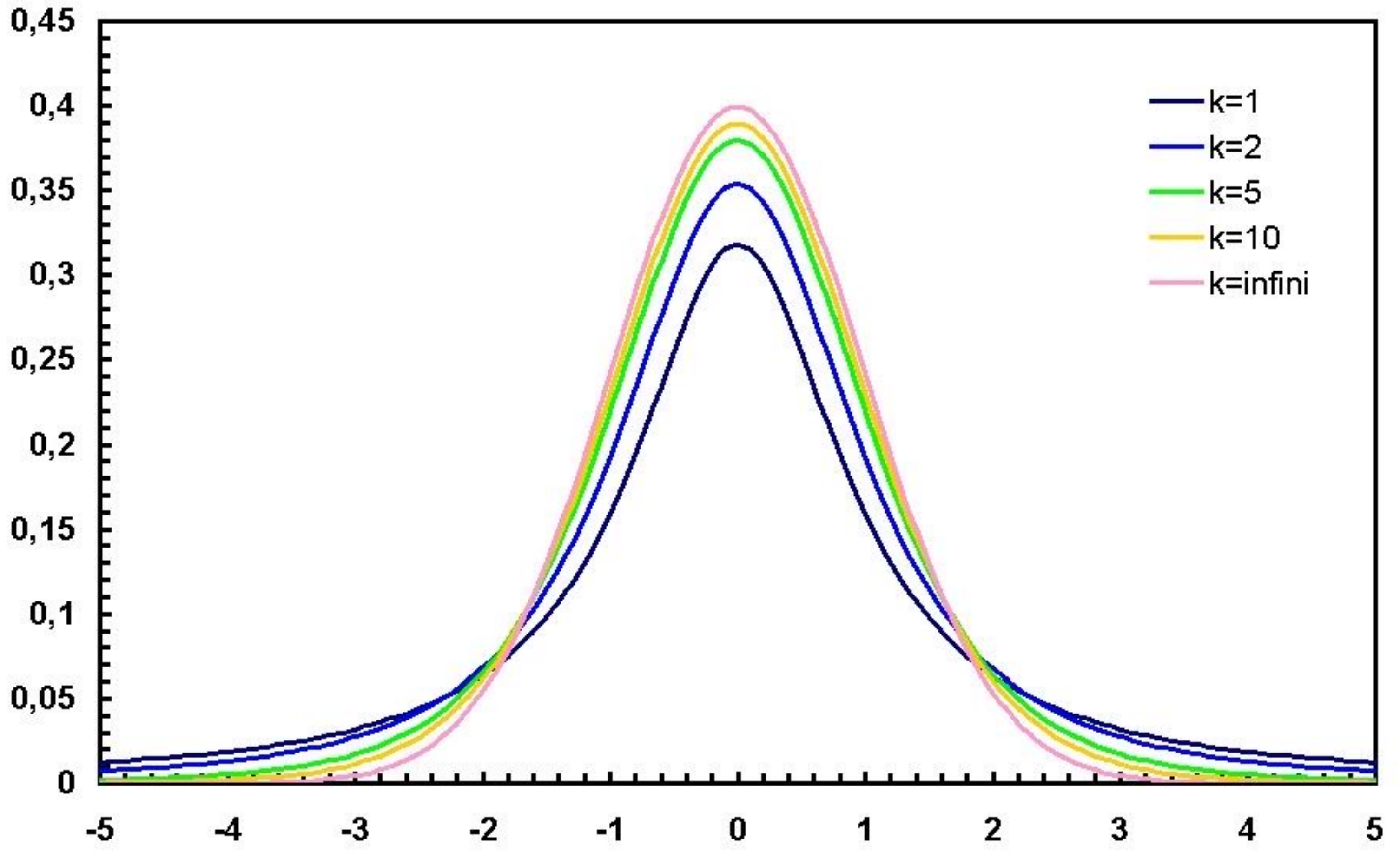


Ещё примеры распределений

Распределение Стьюдента

$$X_1 \sim N(0,1), \quad X_2 \sim \chi^2_k.$$

$$X = \frac{X_1}{\sqrt{X_2/k}} \sim St(k)$$



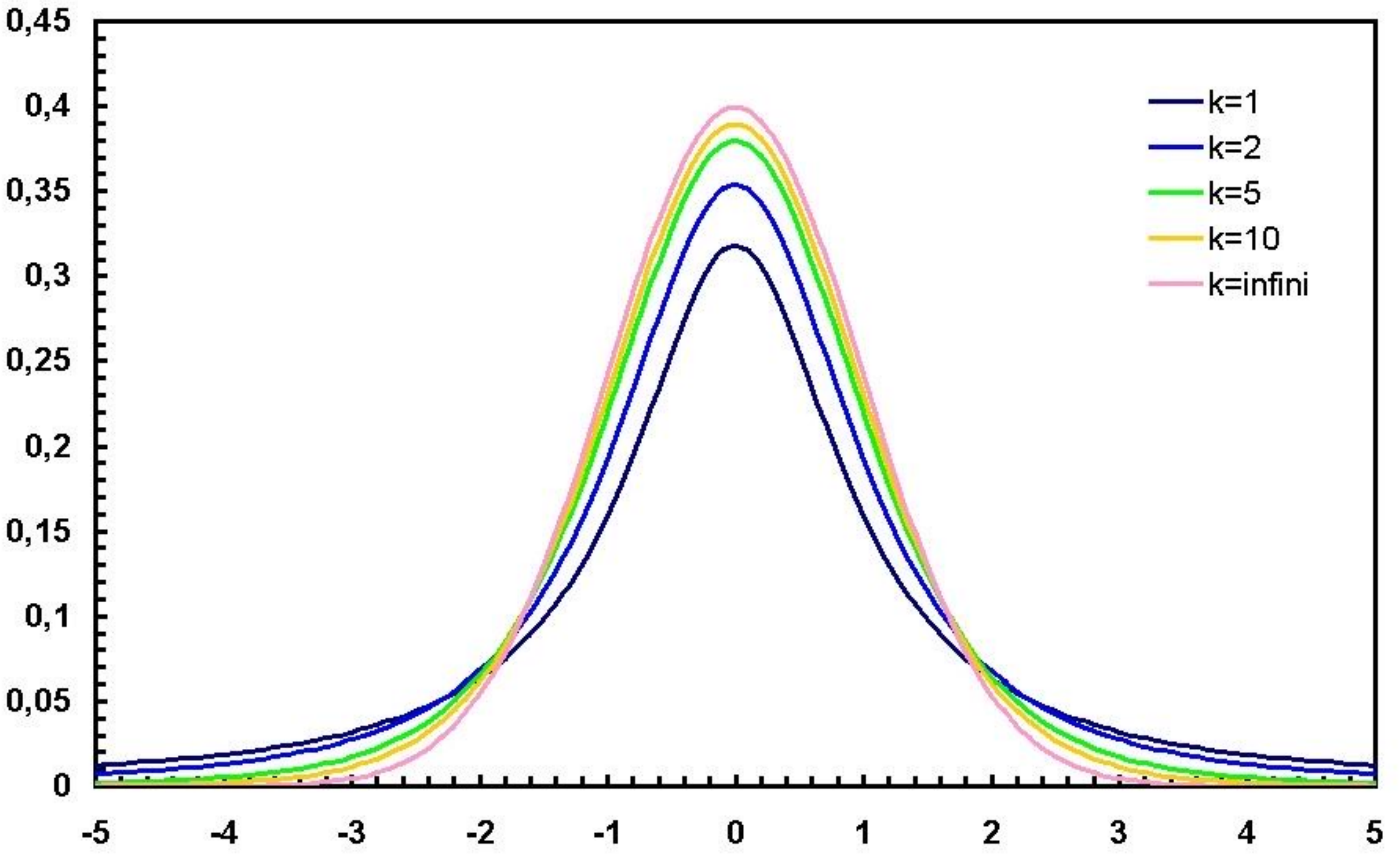
Еще одно название –
t – распределение

Ещё примеры распределений

Распределение Стьюдента

$$X_1 \sim N(0,1), \quad X_2 \sim \chi^2_k.$$

$$X = \frac{X_1}{\sqrt{X_2/k}} \sim St(k)$$



Еще одно название –
<u>t – распределение</u>

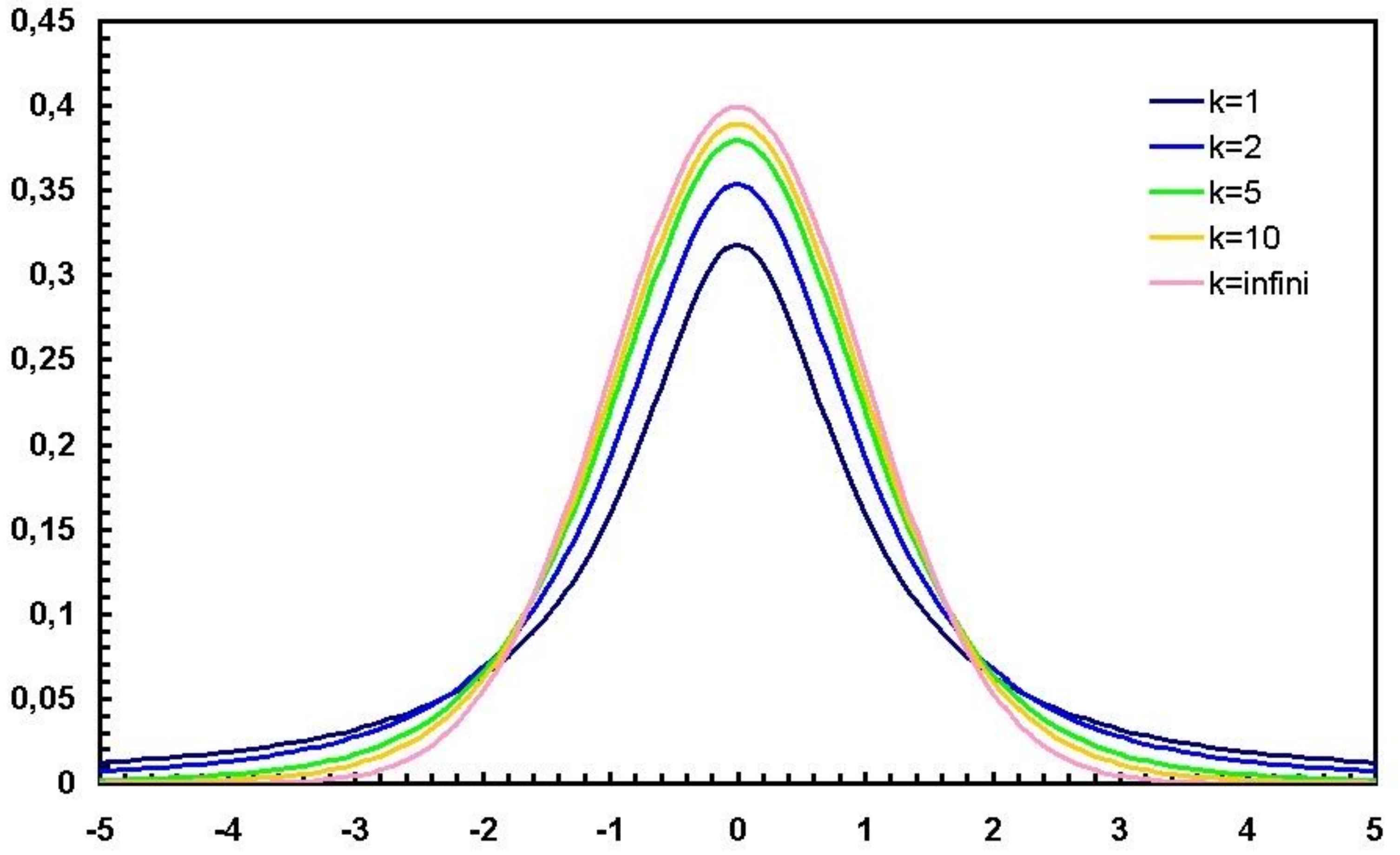
- **При больших значениях k его края становятся менее «толстыми»**

Ещё примеры распределений

Распределение Стьюдента

$$X_1 \sim N(0,1), \quad X_2 \sim \chi^2_{k}.$$

$$X = \frac{X_1}{\sqrt{X_2/_{k}}} \sim St(k)$$



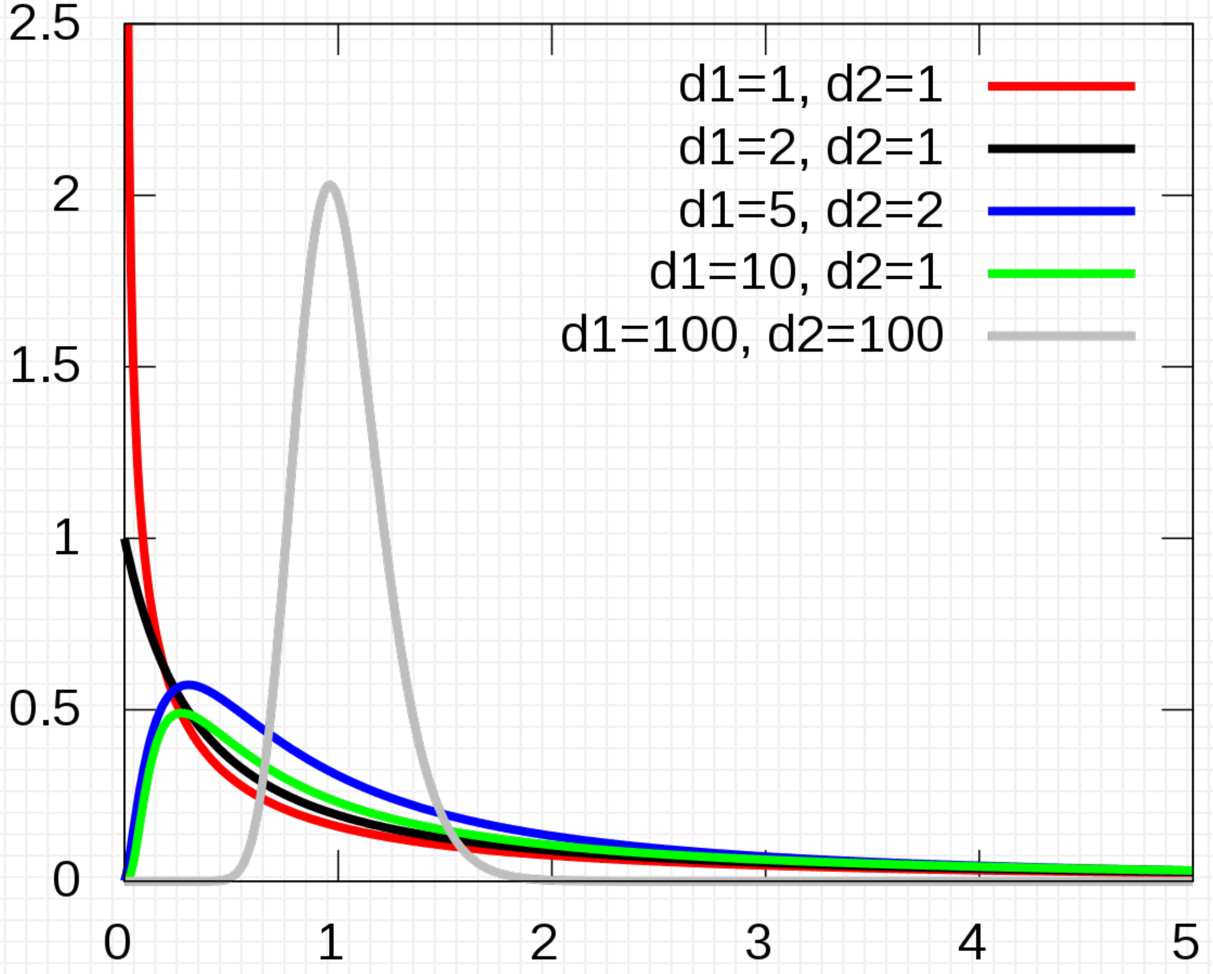
Еще одно название –
<u>t – распределение</u>

- При больших значениях k его края становятся менее «толстыми»

- **<u>Распределение стремится к нормальному</u>**

Ещё примеры распределений

Распределение Фишера



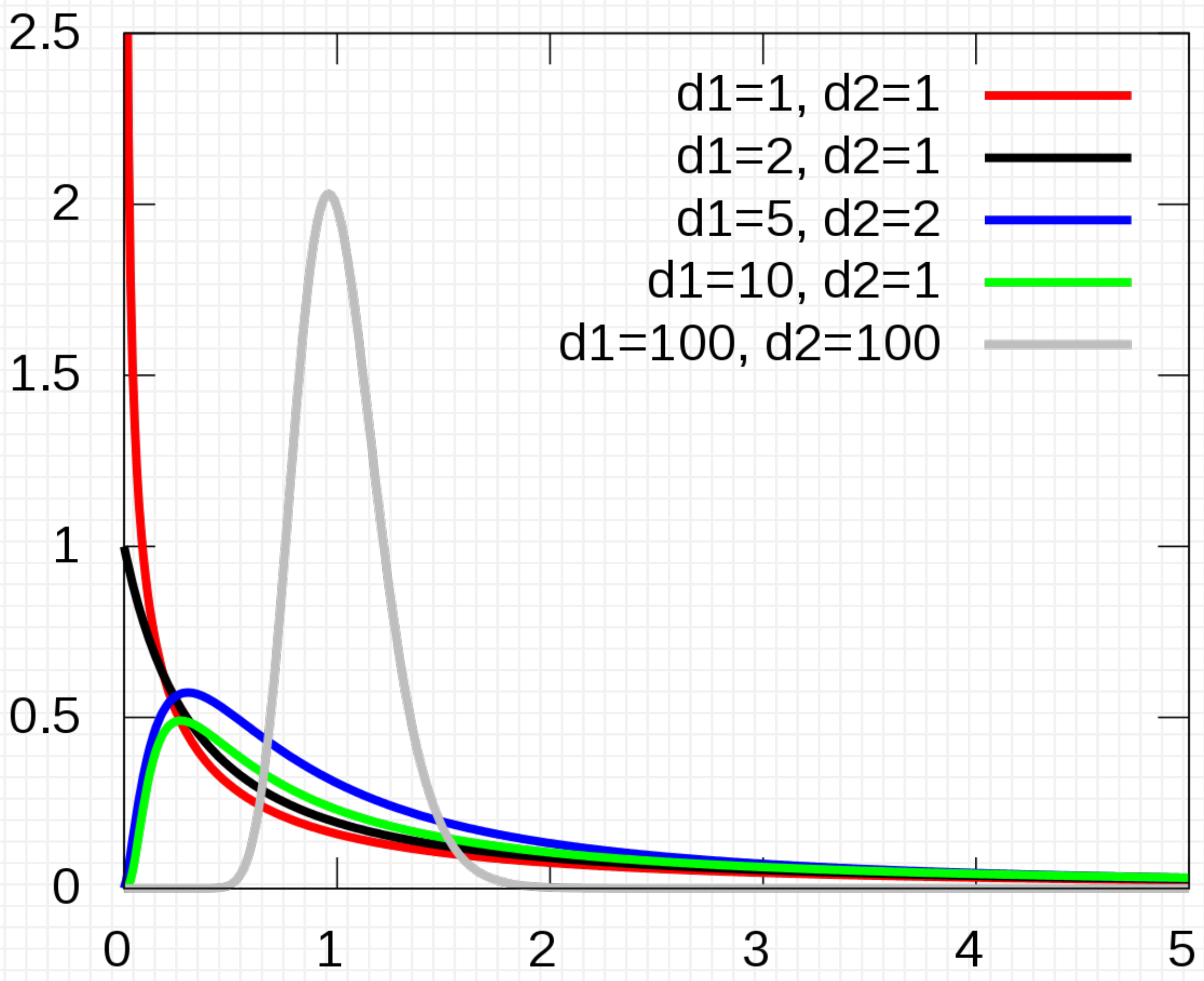
Ещё примеры распределений

Распределение Фишера

$$X_1 \sim \chi^2_{d_1}, \quad X_2 \sim \chi^2_{d_2}.$$

$$X = \frac{X_1/d_1}{X_2/d_2} \sim F(d_1, d_2)$$

Распределение используется в дисперсионном анализе



Ещё примеры критериев

Ещё примеры критериев

t – тест (критерий Стьюдента)

выборка:	$X^n = (X_1, \ldots, X_n)$,
	$X \sim N(\mu, \sigma^2)$, σ неизвестна;
нулевая гипотеза:	$H_0\colon \mu = \mu_0$;
альтернатива:	$H_1\colon \mu <\neq> \mu_0$;
статистика:	$T(X^n) = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$;
нулевое распределение:	$T(X^n) \sim St(n-1)$.

Ещё примеры критериев

t – тест (критерий Стьюдента)

выборка:	$X^n = (X_1, \ldots, X_n)$,
	$X \sim N(\mu, \sigma^2)$, σ неизвестна;
нулевая гипотеза:	$H_0\colon \mu = \mu_0$;
альтернатива:	$H_1\colon \mu <\neq> \mu_0$;
статистика:	$T(X^n) = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$;
нулевое распределение:	$T(X^n) \sim St(n-1)$.

- **Данный критерий применяется, когда <u>исходная величина</u> распределена <u>«примерно» по нормальному закону</u>**

Ещё примеры критериев

t – тест (критерий Стьюдента)

выборка:	$X^n = (X_1, \ldots, X_n)$, $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, σ неизвестна;
нулевая гипотеза:	$H_0 : \mu = \mu_0$;
альтернатива:	$H_1 : \mu <\neq> \mu_0$;
статистика:	$T(X^n) = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$;
нулевое распределение:	$T(X^n) \sim St(n-1)$.

- Данный критерий применяется, когда исходная величина распределена «примерно» по нормальному закону
- **Тогда наше нулевое распределение представляет собой распределение Стьюдента (t – распределение).**

Ещё примеры критериев

t – тест (критерий Стьюдента)

выборка:	$X^n = (X_1, \ldots, X_n)$, $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, σ неизвестна;
нулевая гипотеза:	$H_0: \mu = \mu_0$;
альтернатива:	$H_1: \mu <\neq> \mu_0$;
статистика:	$T(X^n) = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$;
нулевое распределение:	$T(X^n) \sim St(n-1)$.

- Данный критерий применяется, когда исходная величина распределена «примерно» по нормальному закону
- Тогда наше нулевое распределение представляет собой распределение Стьюдента (t – распределение).

А что, если величина распределена совсем не по нормальному закону?

Ещё примеры критериев

t – тест (критерий Стьюдента)

выборка:	$X^n = (X_1, \dots, X_n)$, $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, σ неизвестна;
нулевая гипотеза:	$H_0\colon \mu = \mu_0$;
альтернатива:	$H_1\colon \mu <\neq> \mu_0$;
статистика:	$T(X^n) = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$;
нулевое распределение:	$T(X^n) \sim St(n-1)$.

- Данный критерий применяется, когда исходная величина распределена «примерно» по нормальному закону
- Тогда наше нулевое распределение представляет собой распределение Стьюдента (t – распределение).

А что, если величина распределена совсем не по нормальному закону?

Если данных достаточно много, то можно попробовать применить z-критерий, как мы уже делали для конверсии.

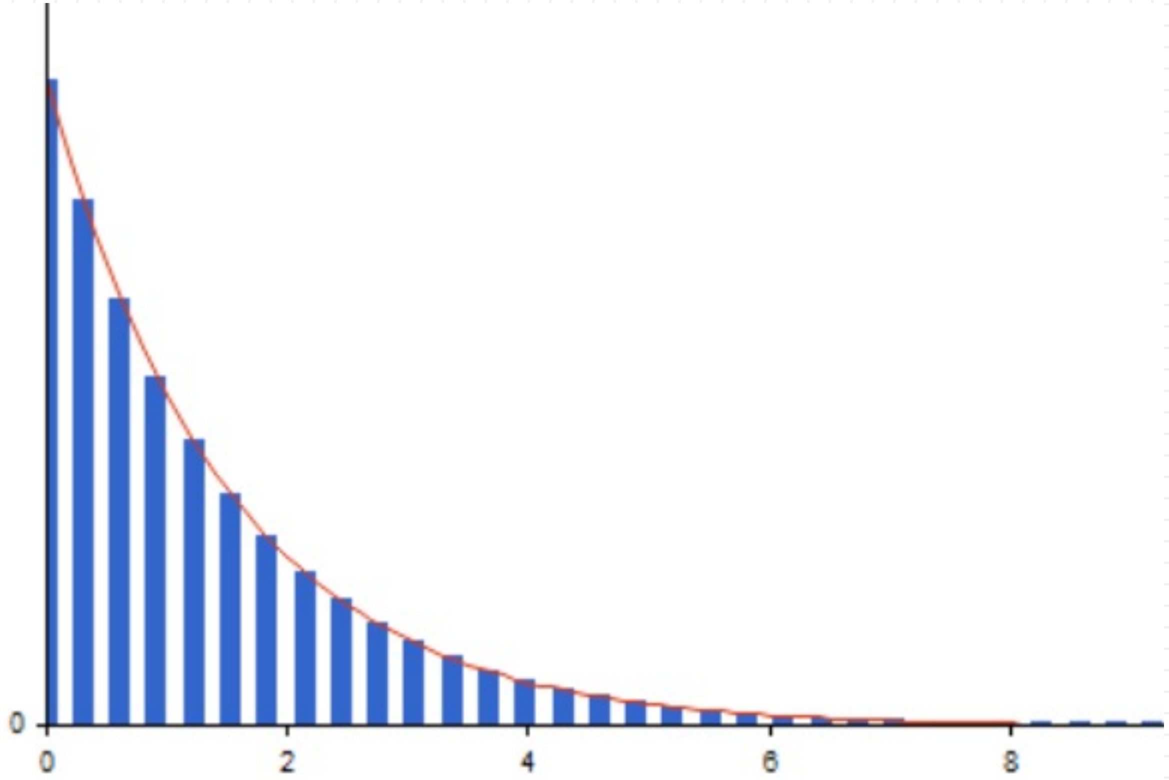
Ещё примеры критериев

А что если данных у нас мало, а распределение очень скошенное?

Ещё примеры критериев

А что если данных у нас мало, а распределение очень скошенное?

К примеру, мы исследуем средний чек, тут его распределение можно смоделировать экспоненциальным законом, так как имеется «тяжелый хвост».

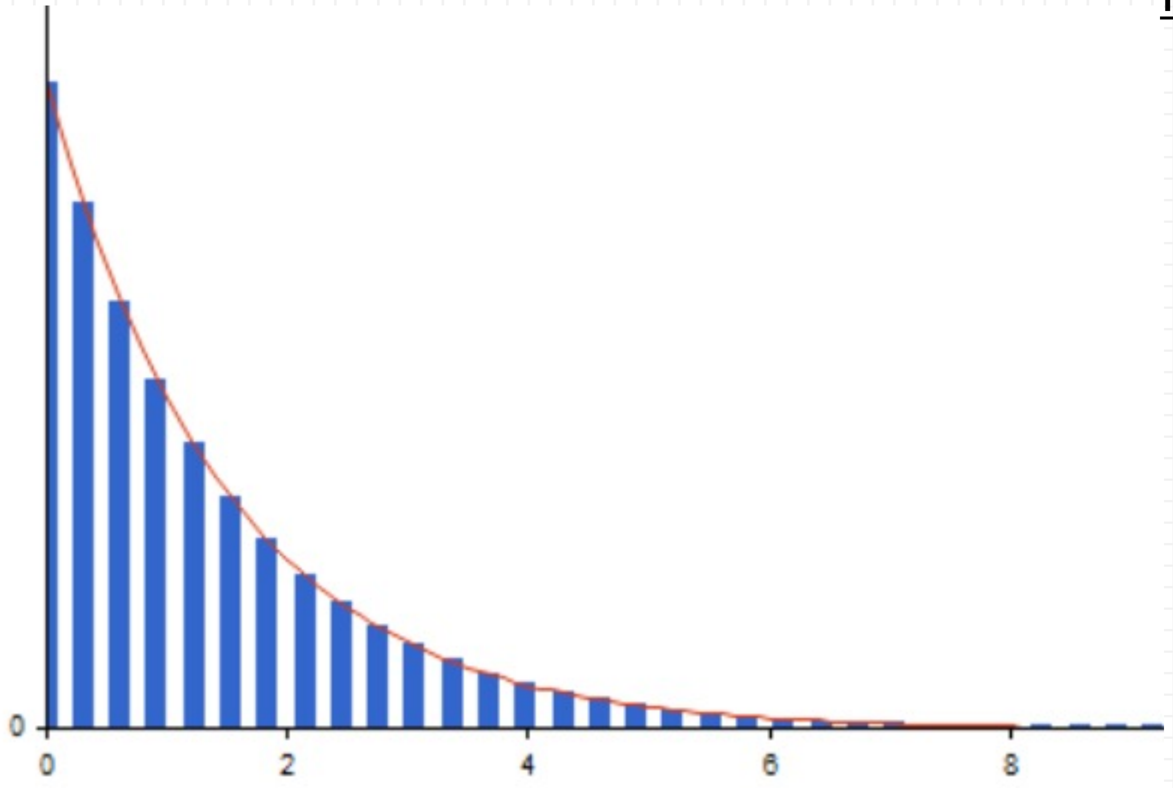


Ещё примеры критериев

А что если данных у нас мало, а распределение очень скошенное?

К примеру, мы исследуем средний чек, тут его распределение можно смоделировать экспоненциальным законом, так как имеется «тяжелый хвост».

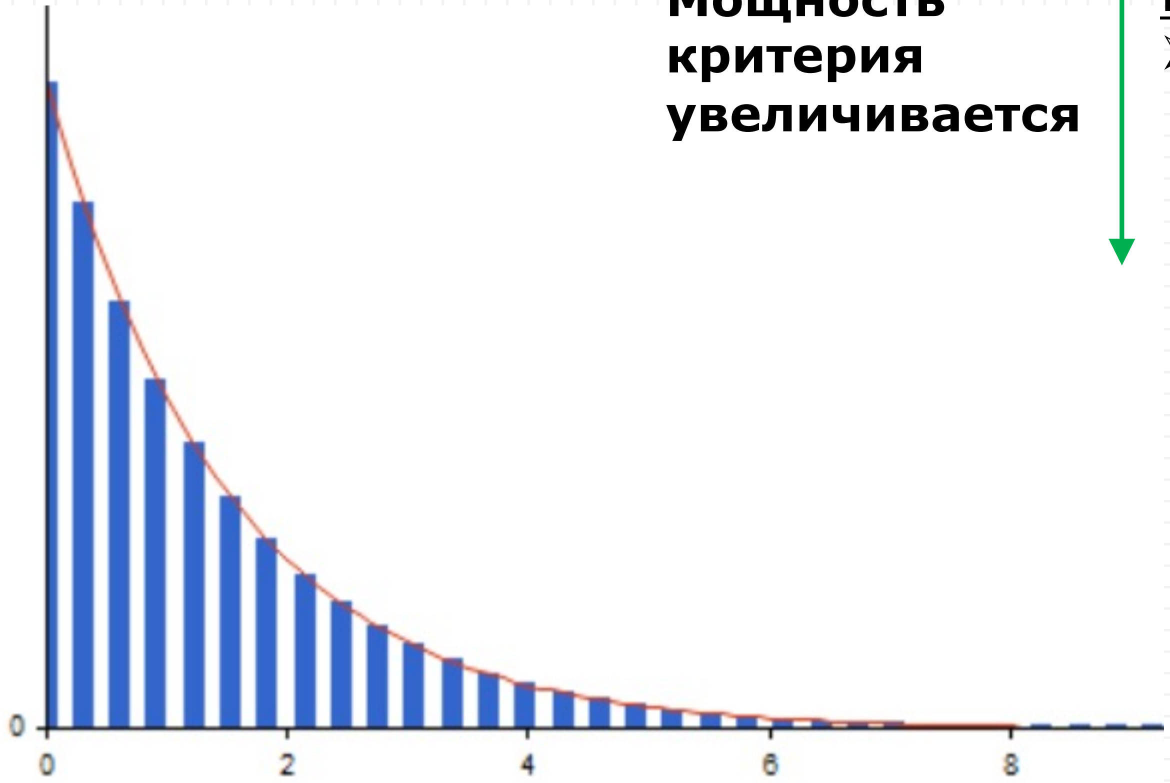
Тут на помощь придут непараметрические критерии, к примеру:



Ещё примеры критериев

А что если данных у нас мало, а распределение очень скошенное?

К примеру, мы исследуем средний чек, тут его распределение можно смоделировать экспоненциальным законом, так как имеется «тяжелый хвост».



Мощность критерия увеличивается

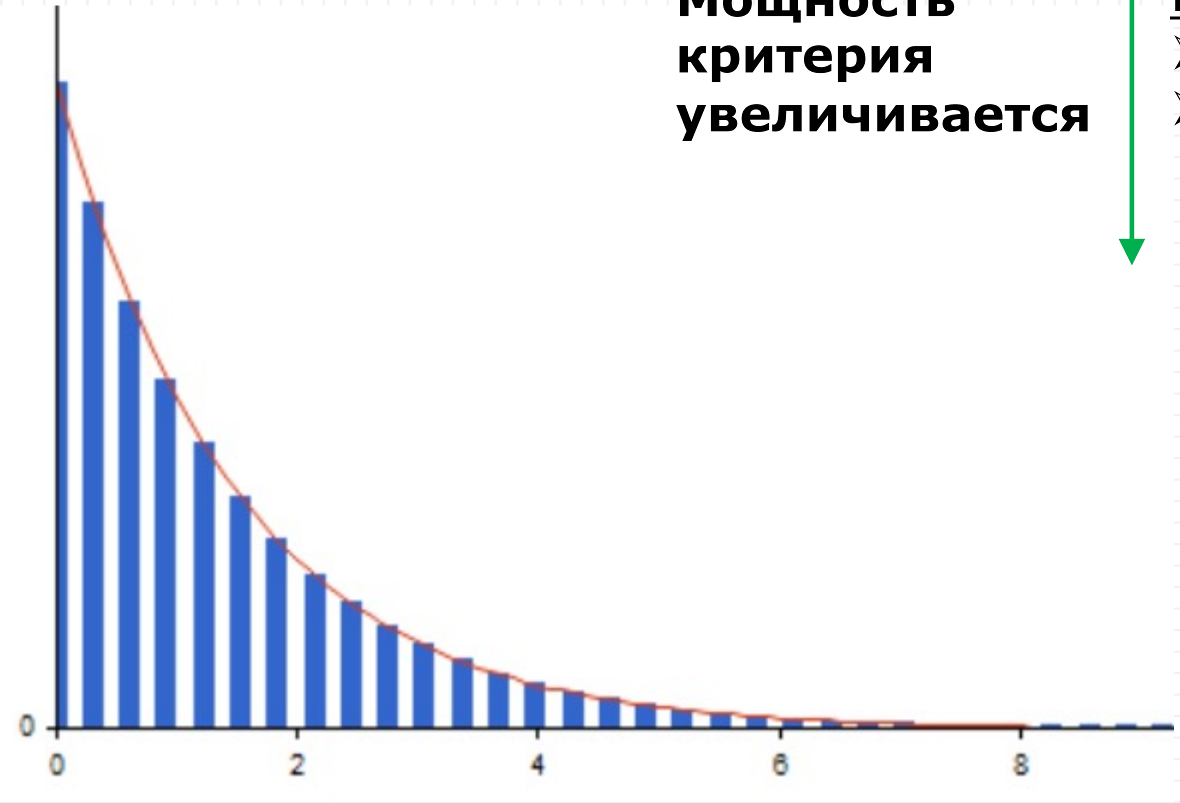
Тут на помощь придут непараметрические критерии, к примеру:

- **Критерии знаков**

Ещё примеры критериев

А что если данных у нас мало, а распределение очень скошенное?

К примеру, мы исследуем средний чек, тут его распределение можно смоделировать <u>экспоненциальным законом</u>, так как имеется «тяжелый хвост».



Мощность критерия увеличивается

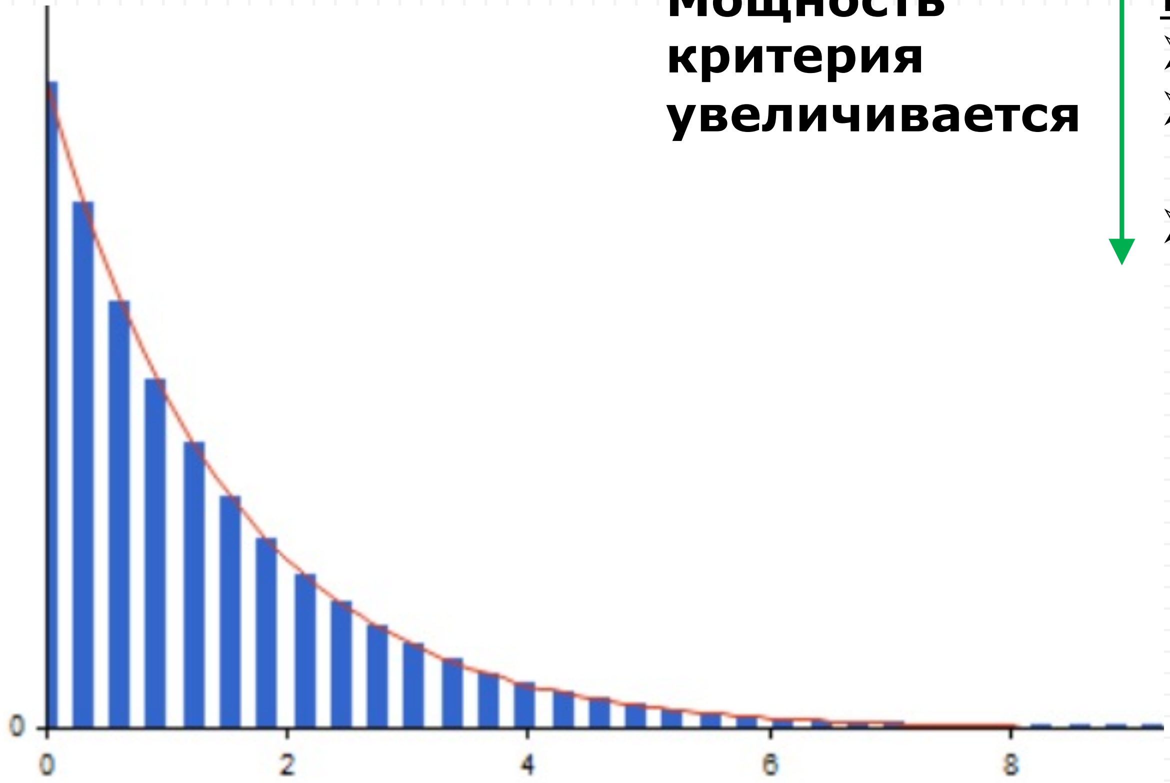
Тут на помощь придут <u>непараметрические критерии</u>, к примеру:

- Критерии знаков
- **Ранговые критерии (в том числе, известный критерий Манна-Уитни)**

Ещё примеры критериев

А что если данных у нас мало, а распределение очень скошенное?

К примеру, мы исследуем средний чек, тут его распределение можно смоделировать экспоненциальным законом, так как имеется «тяжелый хвост».



Мощность критерия увеличивается

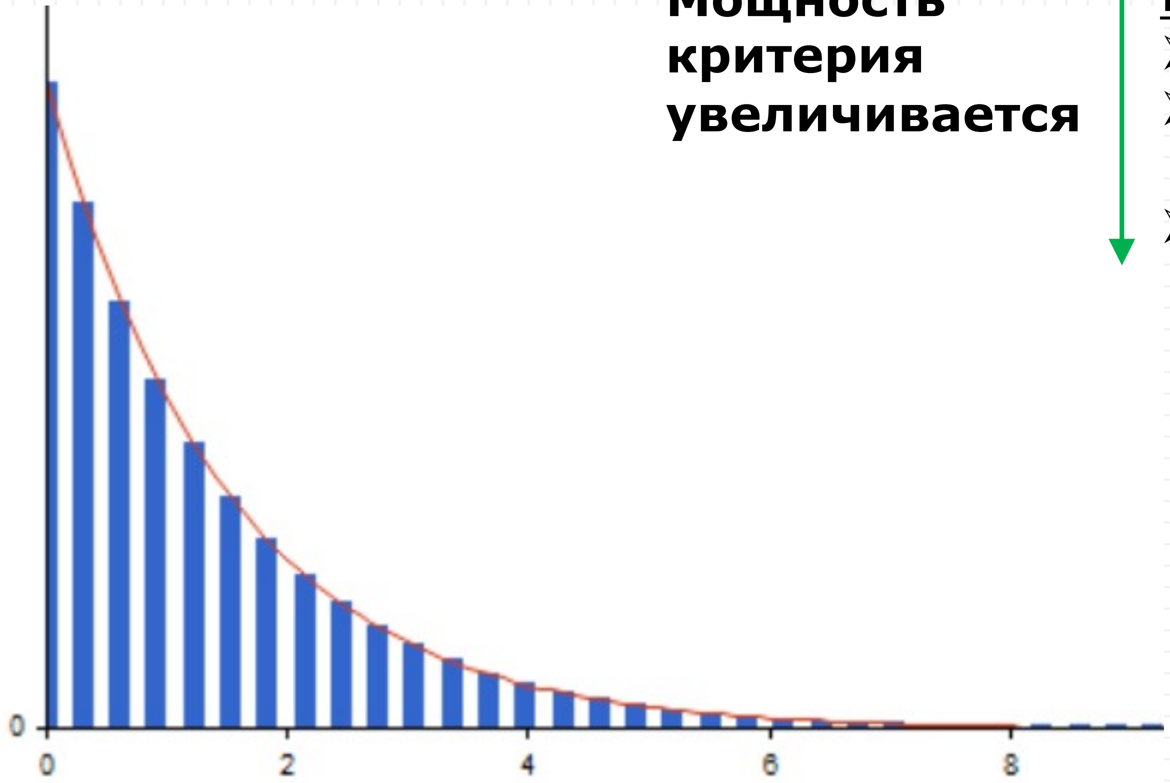
Тут на помощь придут непараметрические критерии, к примеру:

- Критерии знаков
- Ранговые критерии (в том числе, известный критерий Манна-Уитни)
- **Перестановочные критерии**

Ещё примеры критериев

А что если данных у нас мало, а распределение очень скошенное?

К примеру, мы исследуем средний чек, тут его распределение можно смоделировать экспоненциальным законом, так как имеется «тяжелый хвост».



Тут на помощь придут непараметрические критерии, к примеру:

- Критерии знаков
- Ранговые критерии (в том числе, известный критерий Манна-Уитни)
- Перестановочные критерии

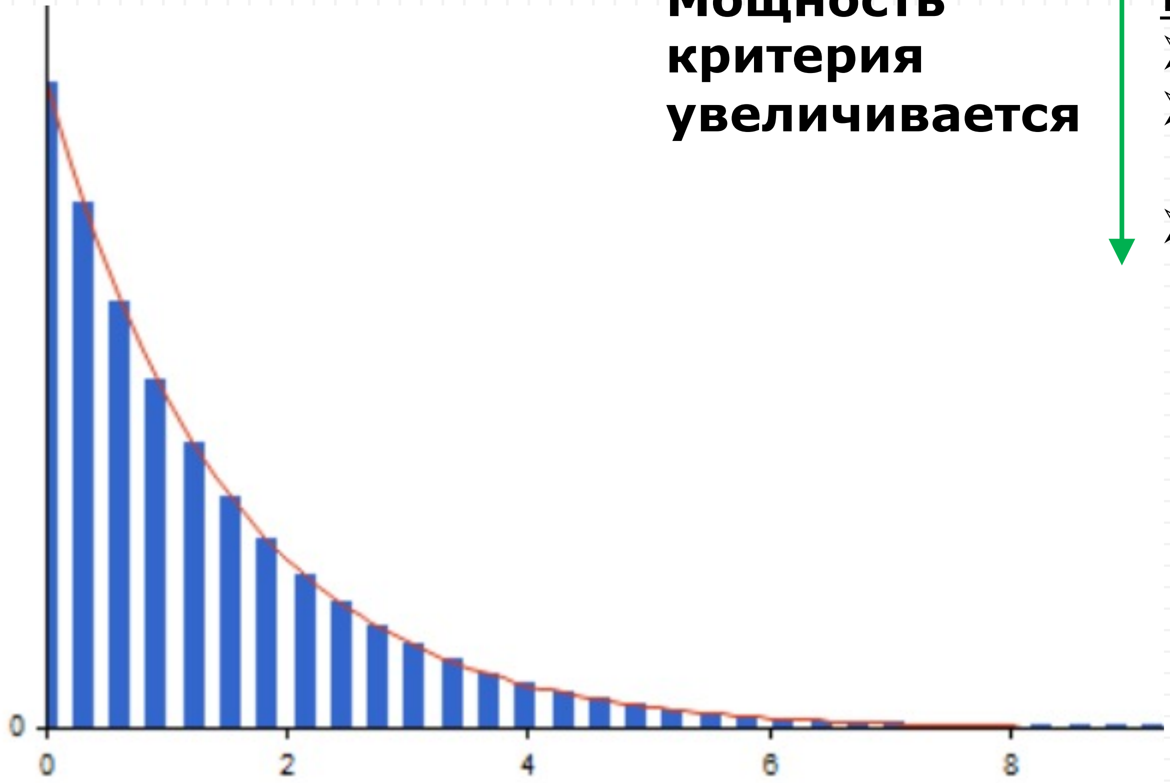
Мощность критерия увеличивается

Особенности:

Ещё примеры критериев

А что если данных у нас мало, а распределение очень скошенное?

К примеру, мы исследуем средний чек, тут его распределение можно смоделировать экспоненциальным законом, так как имеется «тяжелый хвост».



Мощность критерия увеличивается

Тут на помощь придут непараметрические критерии, к примеру:

- Критерии знаков
- Ранговые критерии (в том числе, известный критерий Манна-Уитни)
- Перестановочные критерии

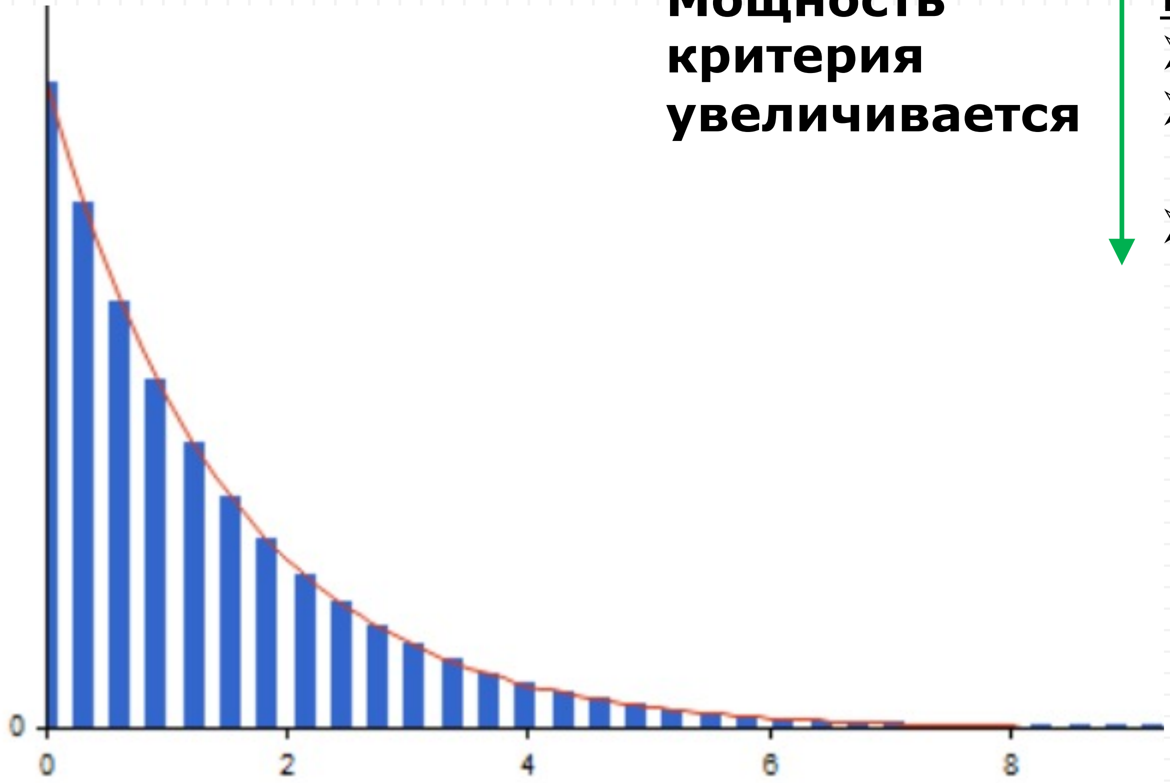
Особенности:

- У них уже нулевые распределения тестовых статистик более сложные, табличные

Ещё примеры критериев

А что если данных у нас мало, а распределение очень скошенное?

К примеру, мы исследуем средний чек, тут его распределение можно смоделировать экспоненциальным законом, так как имеется «тяжелый хвост».



Мощность критерия увеличивается

Тут на помощь придут непараметрические критерии, к примеру:

- Критерии знаков
- Ранговые критерии (в том числе, известный критерий Манна-Уитни)
- Перестановочные критерии

Особенности:

- У них уже нулевые распределения тестовых статистик более сложные, табличные,

- **Но все они либо уже «зашиты» в программные пакеты, либо создаются с помощью генератора случайных чисел довольно легко.**

Ещё примеры критериев

Дисперсионный анализ (ANOVA)

Ещё примеры критериев

Дисперсионный анализ (ANOVA)

Простейшим случаем дисперсионного анализа является одномерный однофакторный анализ для двух или нескольких независимых групп.

Ещё примеры критериев

Дисперсионный анализ (ANOVA)

Простейшим случаем дисперсионного анализа является одномерный однофакторный анализ для двух или нескольких независимых групп.

В ходе анализа проверяется нулевая гипотеза о равенстве средних значений в группах.

$$H_0: \quad \mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_j.$$

Ещё примеры критериев

Дисперсионный анализ (ANOVA)

Простейшим случаем дисперсионного анализа является одномерный однофакторный анализ для двух или нескольких независимых групп.

В ходе анализа проверяется нулевая гипотеза о равенстве средних значений в группах.

$$H_0: \quad \mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_j.$$

Соотношение межгрупповой и внутригрупповой дисперсий имеет F-распределение при справедливости нулевой гипотезы, а сам критерий для проверки равенства средних носит название критерия Фишера.

$$F = \frac{\text{Межгрупповая дисперсия}}{\text{Внутригрупповая дисперсия}}$$

Ещё примеры критериев

Дисперсионный анализ (ANOVA)

$$F = \frac{Межгрупповая\ дисперсия}{Внутригрупповая\ дисперсия}$$

Если межгрупповая дисперсия достаточно большая

Ещё примеры критериев

Дисперсионный анализ (ANOVA)

$$F = \frac{\textit{Межгрупповая дисперсия}}{\textit{Внутригрупповая дисперсия}}$$

Если межгрупповая дисперсия достаточно большая

↓

F-статистика будет больше какого-то критического значения

Ещё примеры критериев

Дисперсионный анализ (ANOVA)

$$F = \frac{\textit{Межгрупповая дисперсия}}{\textit{Внутригрупповая дисперсия}}$$

Если межгрупповая дисперсия достаточно большая

⬇

F-статистика будет больше какого-то критического значения

⬇

В группах есть хотя бы одно отличие в средних значениях.

Ещё примеры критериев

Дисперсионный анализ (ANOVA)

$$F = \frac{Межгрупповая\ дисперсия}{Внутригрупповая\ дисперсия}$$

Если межгрупповая дисперсия достаточно большая

↓

F-статистика будет больше какого-то критического значения

↓

В группах есть хотя бы одно отличие в средних значениях.

Требования:
- нормальное распределение значений изучаемого признака;
- равенство дисперсий в группах;
- случайный и независимый характер выборки.

Выводы

Сегодня мы:

Выводы

Сегодня мы:

✓ **Вспомнили основы математической статистики**

Выводы

Сегодня мы:

- ✓ Вспомнили основы математической статистики
- ✓ **Посмотрели на примеры точечных и интервальных оценок характеристик распределений случайных величин**

Выводы

Сегодня мы:

- ✓ Вспомнили основы математической статистики
- ✓ Посмотрели на примеры точечных и интервальных оценок характеристик распределений случайных величин
- ✓ **Рассмотрели базовые элементы проверки гипотез**

Выводы

Сегодня мы:

- ✓ Вспомнили основы математической статистики
- ✓ Посмотрели на примеры точечных и интервальных оценок характеристик распределений случайных величин
- ✓ Рассмотрели базовые элементы проверки гипотез
- ✓ **Посмотрели на несколько примеров статистических критериев**

Выводы

Сегодня мы:

- ✓ Вспомнили основы математической статистики
- ✓ Посмотрели на примеры точечных и интервальных оценок характеристик распределений случайных величин
- ✓ Рассмотрели базовые элементы проверки гипотез
- ✓ Посмотрели на несколько примеров статистических критериев
- ✓ **Интересно провели время (надеюсь ☺)**

Спасибо за внимание!

Буду рад вопросам☺