## Reelle Zahlen

$(K,+,\cdot)$ angeordneter Körper, $X \subset K$ nicht leer

**Sup, Inf, Max, Min**
- $s \in K$ **sup(X)** $\Leftrightarrow$ s kleinste obere Schranke
- $s \in K$ **inf(X)** $\Leftrightarrow$ s größte untere Schranke
- $s \in K$ **max(X)** $\Leftrightarrow s = \sup(X) \wedge s \in X$
- $s \in K$ **min(X)** $\Leftrightarrow s = \inf(X) \wedge s \in K$

**$\varepsilon-$Charakterisierung des Supremums**
$s = \sup(X) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists x \in X : s - \varepsilon < x \le s$
*Entsprechendes gilt für das Infimum*

**Rechenregeln für sup** $X, Y \subset \mathbb{R}$ nach oben beschränkt:
- $\sup(X+Y) = \sup(X) + \sup(Y)$
- $\lambda > 0 \Rightarrow \sup(\lambda X) = \lambda \sup(X)$
- $X, Y \subset [0, \infty) \Rightarrow \sup(X) \cdot \sup(Y)$
- $X \subset Y \Rightarrow \sup(X) \le \sup(Y)$

**Archimedische Anordnung**
- $\mathbb{R}$ archimedisch angeordnet $\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}\ \exists n \in \mathbb{N} : n > x$
- $\forall \varepsilon > 0\ \exists n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} < \varepsilon$
- $\forall a, b \in \mathbb{R} : a < b : \exists q \in \mathbb{Q} : a < q < b$

## Folgen

**Def: 2.2 - Grenzwert einer reellen Folge**
- $a \in \mathbb{R}$ Grenzwert von $(a_n) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \ge n_0 : |a_n - a| < \varepsilon$
- Existiert $a \in \mathbb{R}$ Grenzwert $\Rightarrow (a_n)$ konvergent, sonst $(a_n)$ divergent

**Nullfolge** $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n) \to 0$

**Satz 2.3 - Rechenregeln für Grenzwerte**
$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reelle Folgen, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$
- Folge $(a_n + b_n)$ konvergiert gegen $a + b$
- Folge $(a_n \cdot b_n)$ konvergiert gegen $a \cdot b$
- $b \ne 0 \Rightarrow (\frac{a_n}{b_n})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen $\frac{a}{b}$
- $a_n \le b_n$ für fast alle $n \in \mathbb{N} \to a \le b$
- **Einschließungskriterium**
  $a = b \wedge a_n \le c_n \le b_n$ für fast alle $n \in \mathbb{N} \Rightarrow c_n \to a$

*Spezialfall des Einschließungskriteriums:*
$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$*Folge*$, x \in R, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Nullfolge, sodass $|x_n - x| \le y_n$ für fast alle $n \Rightarrow (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen $x$

**Satz 2.4 - Eigenschaften konvergenter Folgen**
Sei $a_n$ konvergente reelle Folge
$\Rightarrow (a_n)$ beschränkt $\wedge$ $(a_n)$ besitzt genau einen Grenzwert

**Def: 2.5 - Uneigentliche Konvergenz**
- $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert uneigentlich gegen $\infty \Leftrightarrow$
  $\forall K > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \ge n_0 : a_n > K$
- $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert uneigentlich gegen $-\infty \Leftrightarrow$
  $(-a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert uneigentlich gegen $\infty$

**Satz 2.6 - Rechenregeln für uneigentliche Konvergenz**
$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reelle Folgen
$\lim\limits_{n\to\infty} (b_n)_{n\in\mathbb{N}} = \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a, a \in \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$
- $a \ne -\inf \Rightarrow (a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}} \to \infty$
- $a \ne 0 \Rightarrow (a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert uneigentlich
- $a > 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = \infty$
- $a < 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = -\infty$
- $a \notin \{-\infty, \infty\} \vee (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt $\Rightarrow (\frac{a_n}{b_n})_{n\in\mathbb{N}} \to 0$

**Def 2.7 - Monotone Folgen** $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reelle Folge heißt
- monoton wachsend, falls $a_{n+1} \ge a_n, \forall n \in \mathbb{N}$
- streng monoton wachsend, falls $a_{n+1} > a_n, \forall n \in \mathbb{N}$
- monoton fallend, falls $a_{n+1} \le a_n, \forall n \in \mathbb{N}$
- streng monoton fallend, falls $a_{n+1} < a_n, \forall n \in \mathbb{N}$

**Monotoniesatz** $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend $\wedge$ nach oben beschränkt
$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n = sup\,\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$

**Def 2.9 Häufungspunkt** $a \in \mathbb{R}$ Häufungspunkt $\Leftrightarrow$
$\exists (a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die gegen a konvergiert.

**Satz v. Bolzano-Weierstraß**
Jede beschränkte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt eine konvergente Teilfolge und hat min. einen Häufungspunkt

**Def 2.11 - Limes superior, limes inferior** $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach oben (unten) beschränkt $\Rightarrow$ größter (kleinster) Häufungspunkt: *Limes superior (inferior)*

## Komplexe und mehrdimensionale Folgen

**Grenzwert komplexer Folgen**
$z$ GW von $(z_n) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \ge n_0 : |z_n - z| < \varepsilon$
Existiert $z \Rightarrow (z_n)$ konvergent gegen $z$.

**Konvergenz komplexer Folgen**
- $z_n = a_n + ib_n$ konvergiert $\Leftrightarrow a_n$ und $b_n$ konvergieren
- $z_n$ konvergent $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} z_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + i \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$
- $z_n$ konvergent $\Rightarrow |z_n|$ konvergent

**Grenzwert mehrdimensionaler Folgen**
- $z_n$ konvergent $\Leftrightarrow \forall i \in [0, n] : z_i$ konvergent
- $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = v \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \|v_n - v\|_2 = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \|v_n - v\|_\infty = 0$

## Reihen

**Konvergenz** $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent gg. $s \in \mathbb{C} \Leftrightarrow$
Folge der Partialsummen gg. $s$ konvergiert

**Teilfolge, Häufungspunkte** $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reelle Folge:
- $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ streng monoton wachsend in $\mathbb{N}$
  $\Rightarrow (a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$
- $a \in \mathbb{R}$ Häufungspunkt von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \Leftrightarrow$
  $\exists$ Teilfolge, die gg. $a$ konvergiert

**Majoranten- & Minorantenkriterium**
$a_n := \sum_{k=0}^\infty a_k$; $b_n := \sum_{k=0}^\infty b_k$; $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}, (b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ relle Folgen,
$|(a_k)| \le b_k$ für fast alle $k \in \mathbb{N}$
- $b_s$konvergiert $\Rightarrow a_s$konvergiert absolut
- $a_s$divergiert $\Rightarrow b_s$ divergiert

**Quotientenkriterum**
$\sum_{k=0}^\infty a_k, a_k \ne 0$ für fast alle $k \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| := q$ existiert $\Rightarrow \otimes$

**Wurzelkriterium**
$\sum_{k=0}^\infty a_k,\ a_k \in \mathbb{C} : q := \limsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} \Rightarrow \otimes$

$\otimes$
- $q < 1 \Rightarrow$ Reihe konvergiert absolut
- $q > 1 \Rightarrow$ Reihe divergiert

**Leibnitz-Kriterium** $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ relle, monoton fallende Nullfolge $\Rightarrow$
$\sum_{k=0}^\infty (-1)^k a_k \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}\ |\sum_{k=0}^\infty (-1)^k a_k - s_n| \le a_{n+1}$
Anm. $\sum_{k=0}^\infty x_n$ konvergiert $\Rightarrow x_n$ Nullfolge

**Umordnungssatz**
- Jede Umordnung einer konv. Reihe konv. gg. denselben Wert
- Konvergiert eine Reihe aus reellen Summanden, aber nicht absolut $\Rightarrow \forall s \in \mathbb{R}\ \exists$ bijektive Abbildung $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$: die umgeordnete Reihe konvergiert gegen s

**Potenzreihe** $P(z) := \sum_{k=0}^\infty c_k z^k; c_k \in \mathbb{C}; z \in \mathbb{C}$
$R := \frac{1}{\limsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|}} = \lim\limits_{k\to\infty} |\frac{a_k}{a_{k+1}}|$ Konvergenzradius
- $|z| < R \Rightarrow P(z)$ konvergiert
- $|z| > R \Rightarrow P(z)$ divergiert

**Cauchy-Produkt**
- $\sum_{k=0}^\infty a_k, \sum_{k=0}^\infty b_k$ absolut konvergent $\in \mathbb{C} \Rightarrow (\sum_{k=0}^\infty a_k)(\sum_{k=0}^\infty b_k) = (\sum_{m=0}^\infty c_m)$ mit $c_m = (\sum_{k=0}^m a_k b_{m-k})$ mit $c_k$ absolut konvergent.
- Seien $\sum_{k=0}^\infty a_k z^k$, $\sum_{k=0}^\infty b_k z^k$ zwei Potenzreihen mit Konvergenzradien $R_a$ und $R_b \Rightarrow (\sum_{k=0}^\infty a_k z^k)(\sum_{k=0}^\infty b_k z^k) = (\sum_{m=0}^\infty c_b z^m)$ mit $c_m = \sum_{k=0}^m a_k b_{m-k}$ und Konvergenzradius $\min\{R_a, R_b\}$

**Natürliche Exponentialfunktion**
$exp(z) := \sum_{k=0}^\infty \frac{z^k}{k!}$

**Eigenschaften von exp** $\forall z, w \in \mathbb{C}, x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$
- $\exp(z+w) = \exp(z) \cdot \exp(w)$
- $\exp(-z) = \frac{1}{\exp(z)}, \exp(z) \ne 0 \wedge \exp(\overline{z}) = \exp(z)$
- $|\exp(z) - \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!}| \le 2 \cdot \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!}$
- $\lim\limits_{n\to\infty} (1 + \frac{z}{n})^n = \exp(z)$
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x\to -\infty} x^n e^x = 0$
- $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^{-n}} = \infty$
- $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$
- $e^{i\pi} = -1$
- $e^{z+2\pi i} = e^z$
- $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$
- $|e^{ix}| = 1$

**Trigonometrische Funktionen**
$\sin(z) := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \sum_{k=0}^\infty (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \mathcal{O}(x^7)$
$\cos(z) := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \sum_{k=0}^\infty (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^6}{720} + \mathcal{O}(x^7)$
$\tan(x) := \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ $\arcsin(x) = x + \frac{x^6}{6} + \frac{3x^5}{40} + \mathcal{O}(x^7)$
$\arccos(x) = \frac{\pi}{2} - x - \frac{x^3}{6} - \frac{3x^5}{40} + \mathcal{O}(x^7)$
$\arctan(x) := \sum_{k=0}^\infty (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \mathcal{O}(x^7)$
$\sinh(x) := \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \sum_{k=0}^\infty \frac{x^{2k+1}}{(2n+1)!} = x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \mathcal{O}(x^7)$
$\cosh(x) := \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \sum_{k=0}^\infty \frac{x^{2k}}{(2n)!} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^6}{720} + \mathcal{O}(x^7)$
$\tanh(x) := \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \mathcal{O}(x^7)$

**Eigenschaften von sin, cos, tan** $\forall z, w \in \mathbb{C}, x \in \mathbb{R}$
- $\sin(z+w) = \sin(z)\cos(w) + \cos(z)\sin(w)$
- $\sin(2z) = 2\sin(z)c\cos(z)$
- $\cos(z+w) = \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w)$
- $\cos(x) = Re(e^{ix}),\ \sin(x) = Im(e^{ix})$
- $\cos(2z) = \cos^2(z) - \sin^2(z)$
- $\sin^2(z) + \cos^2(z) = 1$
- $\arccos(x) + \arcsin(x) = \frac{\pi}{2}$
- $z = \tan(c) : \arctan'(z) = \frac{1}{\tan'(c)} = \frac{1}{1+(\tan(c))^2} = \frac{1}{1+z^2}$
- $\cosh^2(x) = \frac{1}{2}\cosh(x) + \frac{1}{2}$
- $\cosh^2(z) - \sinh^2(z) = 1$

| | $0$ | $\frac{\pi}{6} = 30°$ | $\frac{\pi}{4} = 45°$ | $\frac{\pi}{3} = 60°$ | $\frac{\pi}{2} = 90°$ |
|---|---|---|---|---|---|
| sin | $\frac{\sqrt{0}}{2} = 0$ | $\frac{\sqrt{1}}{2} = \frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{4}}{2} = 1$ |
| cos | $\frac{\sqrt{4}}{2} = 1$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\frac{\sqrt{1}}{2} = \frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{0}}{2} = 0$ |

## Stetigkeit

**Definition**
$f : D \to \mathbb{R}$ stetig in $c \Leftrightarrow \forall (x_n)$ mit $\lim\limits_{x\to 0} x_n = c$ gilt $\lim\limits_{x\to 0} f(x_n) = f(c)$

**Rechenregeln** $D \subseteq \mathbb{R}; f, g : D \to \mathbb{R}; f, g$ stetig in $c$
$\Rightarrow f + g, f \cdot g, \frac{f}{g}$ $(g \ne 0)$ stetig in $c$

**Komposition** $D, D' \subseteq \mathbb{R}, f : D \to \mathbb{R}$ stetig in $c$
- $y := f(c) \in D' \wedge g$ stetig in $y \Rightarrow (g \circ f) : D \to \mathbb{R}$ stetig in $c$
- $f, g$ stetig $\wedge f(D) \subseteq D' \Rightarrow (g \circ f) : D \to \mathbb{R}$ stetig

**$\varepsilon$-$\delta$-Charakterisierung** $D \subseteq \mathbb{R}, f : D \to \mathbb{R}, c \in D \Rightarrow$
$f$stetig in $c \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in D : |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \varepsilon$

**Zwischenwertsatz** $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig $\Rightarrow \forall y \in \mathbb{R}$ mit $\min\{f(a), f(b)\} \le y \le \max\{f(a), f(b)\} : \exists x \in [a,b] : f(x) = y$

**Satz v. Max. und Min.** $[a,b]$ beschränkt, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig
- $f$ beschränkt
- $\exists x_{\max}, x_{\min} \in [a,b] : f(x_{\max}) = \sup\{f(x) : x \in [a,b]\} \wedge f(x_{\min}) = \inf\{f(x) : x \in [a,b]\}$

**Stetigkeit in $\mathbb{C}$ & $\mathbb{R}^n$** wörtlich übertragbar
$D \subseteq \mathbb{C}$ bzw. $\mathbb{R}^n$ abgeschlossen: $\forall f$ stetig $: D \to \mathbb{C}$ bzw. $f : D \to \mathbb{R}^m$ beschränkt und nimmt auf D Maximum und Minimum an

**Stetigkeit von Potenzreihen**
$f(z) = \sum_{k=0}^\infty c_k z^k \Rightarrow f : \{z : |z| < R\} \to \mathbb{C}$ stetig

## Differenziation

**Definition** $I \subseteq \mathbb{R}, f : I \to \mathbb{R}$ $f'(c) := \lim\limits_{x\to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$

**Diff'barkeit $\Rightarrow$ Stetigkeit** $f$ diffbar in c $\Rightarrow f$ in $\mathbb{C}$ stetig

**Monotonie & Umkehrbarkeit**
- $f$ stetig & injektiv $\Leftrightarrow f$ streng monoton wachsend oder fallend
- $f$ außerdem surjektiv $\Rightarrow f^{-1}$ stetig $\wedge$ monoton wachsend / fallend

**Differentiation der Umkehrfunktion**
$f$ bijektiv, $f'(c) \ne 0 \Rightarrow z := f(c)$ diff'bar, $(f^{-1})'(z) = \frac{1}{f'(c)}$

**Logarithmus** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

**Diff. v. Potenzreihen**
$f(x) = \sum_{k=0}^\infty c_k x^k \in \mathbb{R} : f'(x) = \sum_{k=1}^\infty k c_k x^{k-1}$, $D = |R|$

**Höhere Ableitungen** $\mathscr{C}^n(I)$: Vektorraum aller n-mal stetig diff'baren Funktionen $f : I \to \mathbb{R}$

**Extrema**
- **lokales Maximum** $\Leftrightarrow \varepsilon > 0 : f(c) \ge f(x) \forall x \in (c - \varepsilon, c + \varepsilon) \cap I$
- **lokales Minimum** $\Leftrightarrow \varepsilon > 0 : f(c) \le f(x) \forall x \in (c - \varepsilon, c + \varepsilon) \cap I$
- **isoliertes lok. Max/Min** $\Leftrightarrow$ Max/min $\wedge x \ne c$
- **globales Max (Min)** $f(x) \ge (\le) f(c)$

**Satz von Rolle** $f : [a,b] \to \mathbb{R}, f(a) = f(b) \Rightarrow \exists \xi \in (a,b) : f'(\xi) = 0$

**Hinreichend für Extrema** $f$ diff'bar, $\exists c : f'(c) = 0$
- f streng monoton wachsend um c $\Rightarrow$ f in c isol. lok. Min.
- $f \in \mathscr{C}^2, f''(c) = 0 \Rightarrow f$ in c isol. lok. Min.
- f' um c str. monoton fallend $\Rightarrow$ f in c isol. lok. Max.
- $f \in \mathscr{C}^2, f''(c) < 0 \Rightarrow f$ in c isol. lok. Max.

**Taylor**
- $n \in \{\mathbb{N} \cup \infty\} : T_n f(x; c) := \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x - c)^k$
- $T_n(f \cdot g) = T_n f \cdot T_n g$
- Potenzreihen: Das n-te Taylorpolynom (im Nullpunkt) von Potenzreihen ist deren n-te Partialsumme

## Integration

**Riehmann-Integral**
$\varphi \in \tau[a,b] : \int_a^b \varphi\, dx := \sum_{k=1}^n c_k(x_k - x_{k-1})$

**Stetigkeit & Monotonie $\Rightarrow$ Integrierbarkeit** $f : [a,b] \to \mathbb{R}$
- $f$ stetig $\vee$ f monoton $\Rightarrow f$ integrierbar
- $\exists$ Unterteilung v. $[a,b]$ stetig oder monoton $\Rightarrow f$ integrierbar

**Mittelwertsatz der Integralrechnung.**
$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig: $\exists \xi \in [a,b] : \int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b - a)$

**Partielle Integration**
$f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig: $\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$

**Substitution** $\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)dy$

**Majorantenkriterium für Integrale**
$f$ über $[a,b]$ absolut integrierbar $\Leftrightarrow$
- f in jedem Teilintervall $\in [a,b]$ integrierbar
- $|f(x)| \le g(x) \forall x \in [a,b)$
- $g$ über $[a,b)$ uneig. integrierbar

**Folgerung z. uneig. Integrierbarkeit**
- $f : (a,b] \to \mathbb{R}$ auf allen Teilintervallen $\in (a,b]$ integrierbar, $f(x) = \mathcal{O}(\frac{1}{|x-a|^s})$ für $x \to a$ mit $s \in [0,1) \Rightarrow f$ über $(a,b]$ uneig. integrierbar
- $f : [a,\infty) \to \mathbb{R}, a < b$ integrierbar, $f(x) = \mathcal{O}(\frac{1}{x^s})$ mit $x \to \infty$, $s > 1 \Rightarrow f$ über $[a,\infty]$ uneig. integrierbar

**Integralvergl.krit.** $f : [1,\infty] \to \mathbb{R}$ monoton fallend,
$\forall x : f(x) > 0, f$ über $[1,\infty]$ uneig. integr. $\Rightarrow \sum_{k=1}^\infty f(k)$ konvergiert

### Potenzreihen

$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \Rightarrow \int f(x)dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} c_k x^{k+1}$

## Kurven

### Diff'bare Kurven

- k regulär in $t \Leftrightarrow k'(t) \neq 0$, sonst singulär
- k singulär in t $\Rightarrow \nexists$ Tangentialvektor
- $k'(t) = (k_1'(t), ..., )$ Tangentialvektor
- $T_k(t) = \frac{k'(t)}{\|k'(t)\|_2}$ Tangentialeinheitsvektor in t
- $N(t) = \begin{pmatrix} -y'(t) \\ x'(t) \end{pmatrix}$ Normalenvektor (2D)

### Rektifizierbarkeit, Bogenlänge

$k : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ rektifizierbar $\Leftrightarrow \{\sum_{k=1}^{N} \|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k+1})\|_2 :$ $a = t_0 < t_1 < ... < t_N = b$ Unterteilung v. $[a, b]\}$

### Bogenlänge stetig diff'barer Kurven

$k : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ stückweise stetig diff'bar $\Rightarrow L(k) = \int_a^b \|k'(t)\|_2 dt$

### Parametertransformation

- $f : J \to I$ Parametertransformation $\Leftrightarrow$ bijektiv und stetig
- $f, f^{-1}$ $k$-mal stetig diff'bar $\Rightarrow \mathscr{C}^k$ Parametertransformation
- $\mathscr{C}^1$-Par.transf. $f$ orientierungstreu wenn $f'(t) > 0\ \forall t$; orientierungsumkehrend für $<$
- $k$ und $\tilde{k}$ äquivalente Kurven wenn mit Par.transf. $f$ : $\tilde{k} = k \circ f$ äquivalente Kurven $\Rightarrow$ gleiche Bogenlänge

### Bogenlänge/Umparametrisierung

- $k : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ stetig diff'bare Kurve; $f : [c, d] \to [a, b]$ $\mathscr{C}^1$-Param.transf.; $k$ und $k \circ f$ gleiche Länge
- $k$ regulär $\Rightarrow$ $\exists$ orientierungserhaltende $\mathscr{C}^1$-Param.transformation $f : [a, L(k)] \to [a, b]$, sodass diese Kurve $k : J \to \mathbb{R}, k := k \circ f$ "mit Einheitsgeschwindigkeit läuft", also $\|k'(t)\| = 1\ \forall t \in [0, L(k)]$
- Man erhält $f$ als Umkehrfunktion von $s \to \int_a^s \|k'(t)\| dt$

### Krümmung

- $k : I \to \mathbb{R}^2$ regulär in $t \in I \Rightarrow \kappa(t)$ **Krümmung** im Punkt $t$
- $R(t) = \frac{1}{\kappa(t)}$ Krümmungsradius
- $k : I \to \mathbb{R}^2$ regulär, zweimal stetig diff'bar, k die dazugehörige unparametrisierte Kurve $\Rightarrow$ Krümmung von k in t als $\tilde{k}$ an $\tilde{t}$ : $k(t) = \tilde{k}(\tilde{t})$

$k : I \to \mathbb{R}^2$ zweimal stetig diff'bar, $t \in I : k$ in $t$ regulär:

- k nach Bogenlänge parametrisiert $\Rightarrow \kappa(t) = \langle k''(t), N(t) \wedge |\kappa(t)| = \|T'(t)\| = \|k''(t)\|$
- $k(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \Rightarrow \kappa(t) = \frac{x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)}{\sqrt{(x'(t)^2 + y'(t)^2)^3}}$

## Mehrdimensionale Differentialrechnung

$M \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : M \to \mathbb{R}, x \in M$

**Richtungsableitung** $v \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ Richtungsvektor $\Rightarrow$ Richtungsableitung von $f$ in Richtung $v : \partial_v f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x+tv) - f(x)}{t}$

**Totale Differenzierbarkeit** $f$ in $x$ (total) diff'bar $\Leftrightarrow$ $\exists$ lineare Abbildung $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, h \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ : $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - Lh}{\|h\|} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - \langle w, h \rangle}{\|h\|} = 0$

**Diff'barkeit im Mehrdimensionalen** $f$ (total) diff'bar $\Leftrightarrow$ $\forall x \in M$ alle partiellen Ableitungen existieren und stetig sind

$$w = \begin{pmatrix} \partial_1 f(x) \\ \vdots \\ \partial_n f(x) \end{pmatrix} =: \nabla f(x),\ \partial_v f(x) = \langle \nabla f(x), v \rangle$$

### Hesse-Matrix

$$\nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} \partial_{11} f(x) & \cdots & \partial_{1,n} f(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{n1} f(x) & \cdots & \partial_{nn} f(x) \end{pmatrix}$$

### Taylor in höheren Dimensionen

$T_n f(\binom{x}{y}, \binom{a}{b}) = \sum_{j+k=0}^{n} \frac{\partial_x^j \partial_y^k f\binom{a}{b}}{j!\ k!} (x-a)^j (y-b)^k$

### Extrema/Kritische Punkte

- kritischer Punkt: $\nabla f(c) = 0$
- lokales Min. $\Rightarrow \nabla^2 f(c)$ pos. semidefinit
- lokales Max. $\Rightarrow \nabla^2 f(c)$ neg. semidefinit
- $\nabla f(c) = 0$ und $\nabla^2 f(c)$ pos. definit $\Rightarrow$ isoliertes lok. Min.
- $\nabla f(c) = 0$ und $\nabla^2 f(c)$ neg. definit $\Rightarrow$ isoliertes lok. Max.
- $\nabla f(c) = 0$ und $\nabla^2 f(c)$ pos. und neg. EW $\Rightarrow$ Sattelpunkt

**Jacobi-Matrix** $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m; F(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{pmatrix}$

- $f$ in $c$ (total) diff'bar wenn lin. Abb. (oder Matrix) $L$ existiert mit: $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}}} \frac{F(x+h) - F(x) - Lh}{\|h\|} = 0$
- Alle $\partial_j f_k(x)$ $(j = 1 \dots n, k = 1 \dots m)$ in $c$ stetig $\Rightarrow$ $f$ in $c$ stetig diff'bar und Jacobi-Matrix

$$DF(c) := \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(c) & \dots & \partial_n f_1(c) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 f_m(c) & \dots & \partial_n f_m(c) \end{pmatrix}$$

### Mehrdimensionale Kettenregel

$D(G \circ F)(c) = DG(F(c)) \cdot DF(c)$

## Mehrdimensionale Integralrechnung

**Transformationssatz** $T : M_2 \to M_1; f : M_1 \to \mathbb{R}$

$\int \cdots \int_{M_1} f(x) \mathrm{d}x = \int \cdots \int_{M_2} f(T(y))\ |\det(DT(y))|\ \mathrm{d}y$

## Differentialgleichungen

### Flow

1. DGL nicht linear $\Rightarrow$ TDV
2. DGL homogen $\Rightarrow$ char. Polynom, Grad 2
3. Sonst: Lösung raten

### Trennung der Variablen (TDV)

1. Schreibe $y'$ als $\frac{dy}{dt}$
2. Umstellen nach Termen mit y / ohne y
3. Beide Seiten getrennt integrieren
4. Konstanten bestimmen <wie Meth. 1>

### Rezepte

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $y'(t) = f(t) \cdot g(y(t))$ | Funkt. $f, g$ |
| 2 | $y'(t) + a(t) \cdot y(t) = 0$ | Funkt. $a$ |
| 3 | $y'(t) + a(t) \cdot y(t) = f(t)$ | Funkt. $a, f$ |
| 4 | $y''(t) + ay'(t) + by(t) = 0$ | Konst. $a, b$ |
| 5 | $y''(t) + ay'(t) + by(t) = p(t)$ | Konst. $a, b$; Polyn. $p$ |
| 6 | $y''(t) + ay'(t) + by(t) = e^{\alpha t}(a_1 \cos(\beta t) + a_2 \sin(\beta t))$ | Konst. $\alpha, \beta, a_1, a_2, b \neq 0$ |

**Meth. 1** $F(t) = \int f(t)\mathrm{d}t;\ G(t) = \int \frac{1}{g(t)\mathrm{d}t}$

Jede allgemeine Lsg für $y(t)$ erfüllt die Gleichung $G(y(t)) = F(t) + c$

Mit Anfangsbedingung erfüllt jede Lsg. $\int_{y_0}^{y(t)} \frac{1}{g(u)} \mathrm{d}u = \int_{x_0}^{t} f(u) \mathrm{d}u$

**Meth. 2** $A(t) = \int a(t)\mathrm{d}t$; allgemeine Lsg. $y(t) = ce^{-A(t)}$

*Für **AWP**:* $y(t_0) = y_0 : y(t) = y_0 e^{A(t_0) - A(t)}$

**Meth. 3** $A(t) = \int a(t)\mathrm{d}t; B(t) = \int e^{A(t)} \cdot f(t)\mathrm{d}t$

Allg. Lsg. $y(t) = e^{-A(t)} \cdot (c + B(t))$

*Für **AWP**:* $y(t_0) = y_0 : y(t) = e^{A(t_0) - A(t)}(y_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(s) - A(t_0)} \cdot f(s)ds)$

**Meth. 4**

- $a^2 > 4b$: Löse $\lambda_{1,2} = \lambda^2 + a\lambda + b = 0$ allg. Lsg.: $y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$
- $a^2 = 4b$: $\lambda = -\frac{a}{2}$ allg. Lsg.: $y(t) = (c_1 + c_2)e^{\lambda t}$
- $a^2 < 4b$: $\omega = \sqrt{b - (\frac{a}{2})^2}$ allg. Lsg.: $y(t) = (c_1 cos(\omega t) + c_2 sin(\omega t))e^{-\frac{a}{2}t}$

*Für **AWP**:* $y(t_0) = y_0, y'(t_1) = y_1$ setze $t = t_1, t = t_2$ in allg. Lösung ein und bestimme $c_1, c_2$

**Meth. 5**

1. Bestimme allg. Lsg. $y_h(t)$ von $y_h''(t) + ay_h'(t) + by_h(t) = 0$
2. Stelle Polyn. $q(t) = a_n t^n + \cdots + a_1 t + a_0$ mit Grad $n = deg(p)$ und Param. $a_0, \dots, a_n$ auf
3. $y_p(t) = \begin{cases} q(t) & b \neq 0 \\ tq(t) & a \neq 0, b = 0 \\ t^2 q(t) & a = 0, b = 0 \end{cases}$ in Abhängigkeit von $a_0, \dots, a_n$; $y_p''(t) + ay_p'(t) + by_p(t) = p(t)$
4. Ermittle $a_1, \dots, a_n$ durch Koeffizientenvergleich
5. Allg. Lsg.: $y(t) = y_h(t) + y_p(t)$

*Für **AWP**:* $y(t_0) = y_0, y'(t_1) = y_1$ setze $t = t_1, t = t_2$ in allg. Lösung ein und bestimme $c_1, c_2$

**Meth. 6**

1. Bestimme allg. Lsg. $y_h(t)$ von $y_h''(t) + ay_h'(t) + by_h(t) = 0$
2. Löse $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$
3. In Abhängigkeit von $k$: $y_p(t) = \begin{cases} ke^{ct} & \lambda_1 \neq c \neq \lambda_2 \\ kte^{ct} & \lambda_1 = c \neq \lambda_2 \text{ oder } \lambda_1 \neq c = \lambda_2 \\ kt^2 e^{ct} & \lambda_1 = c = \lambda_2 \end{cases}$
4. $y_p''(t) + ay_p'(t) + by_p(t) = e^{ct}$ ermittle $k$
5. Allg. Lsg.: $y(t) = y_h(t) + y_p(t)$

*Für **AWP**:* $y(t_0) = y_0, y'(t_1) = y_1$ setze $t = t_1, t = t_2$ in allg. Lösung ein und bestimme $c_1, c_2$

**Mehrdimensionale DGLs** $\{v_1, \dots, v_n\} \subset \mathbb{R}^n$ Basis von Eigenvektoren von $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ zu EW $\lambda_1, \dots, \lambda_n$

Lin. unabh. Lösungen v. DGL der Form $y' = Ay$: $y = e^{\lambda_j t} v_j$

**Satz von Picard-Lindelöf** $f$ stetig diff'bar bzgl. y, stetig in t $\Rightarrow$ AWP $y' = f(t, y), y(t_0) = y_0$ auf $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ besitzt genau eine Lösung (für $\varepsilon > 0$ klein genug)

## Komplexe Zahlen

$\mathbb{C} = \{z | z = x + iy, x, y \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$

- $z_1 + z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$
- $z_1 \cdot z_2 = x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$
- $\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{z_1 \overline{z_2}}{|z_2|^2}$
- $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z \cdot \overline{z}}$
- $\varphi = \arctan(\frac{x}{y})$, $r = |z|$, $x = r \cdot \cos(\varphi)$, $y = r \cdot \sin(\varphi)$
- $\overline{z} = x - iy$
- $z = r(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)) = r \cdot e^{i\varphi}$

## Koordinatentransformation

### 2D - Kreiskoordinaten

$\binom{x}{y} \mapsto r \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix}, \quad dxdy \mapsto r \cdot drd\varphi$

### 3D - Kugelkoordinaten

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto r \begin{pmatrix} \sin(\theta)\cos(\varphi) \\ \sin(\theta)\sin(\varphi) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix}, \quad dxdydz \mapsto r^2 \sin(\theta) dr d\theta d\varphi$

### 3D - Zylinderkoordinaten

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} r \cdot \cos(\varphi) \\ r \cdot \sin(\varphi) \\ z \end{pmatrix}, \quad dxdydz \mapsto r \cdot drd\varphi dz$

## Sonstiges

### Bekannte Abl. und Integrale

| $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$ | $f(x)$ | $\int f(x)\mathrm{d}x$ |
|---|---|---|
| $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $arcsin(x)$ | $\sqrt{1-x^2} + x \sin^{-1}(x)$ |
| $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $arccos(x)$ | $x\ \arccos^{-1}(x) - \sqrt{1-x^2}$ |
| $\frac{1}{x^2+1}$ | $arctan(x)$ | $x\ \tan^{-1}(x) - \frac{1}{2}\ln(x^2+1)$ |
| $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ | $arsinh(x)$ | $x \sinh^{-1}(x) - \sqrt{x^2+1}$ |
| $\frac{1}{\sqrt{x-1}\sqrt{x+1}}$ | $arcosh(x)$ | $x \cosh^{-1}(x) - \sqrt{x-1}\sqrt{x+1}$ |
| $\frac{1}{1-x^2}$ | $arctanh(x)$ | $\frac{1}{2}\ln(1-x^2) + x \tanh^{-1}(x)$ |
| $\frac{1}{cos^2(x)}$ | $tan(x)$ | $-\ln(\cos(x))$ |
| $\frac{1}{cosh^2(x)}$ | $tanh(x)$ | $\ln(\cosh(x))$ |
| $\cos(2x)$ | $sin(x)cos(x)$ | $-\frac{1}{2}cos^2(x)$ |
| $-2\sin(x)\cos(x)$ | $cos^2(x)$ | $\frac{1}{2}(x + sin(x)cos(x))$ |
| $\sin(2x)$ | $sin^2(x)$ | $\frac{1}{2}(x - sin(x)cos(x))$ |
| $\frac{1}{x}$ | $ln(x)$ | $x \cdot ln(x) - x$ |
| $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ | $\sqrt{1-x^2}$ | $\frac{1}{2}(\sqrt{1-x^2}x + \sin^{-1}(x))$ |

### Landau-Notation

- $f \in \mathcal{O}(g) \leftrightarrow \lim\limits_{n \to a} \frac{|f(x)|}{g(x)} < \infty$
- $f \in o(g) \leftrightarrow \lim\limits_{n \to a} \frac{|f(x)|}{g(x)} = 0$
- $f \in \Omega(g) \leftrightarrow \lim\limits_{n \to a} \frac{g(x)}{|f(x)|} < \infty$
- $f \in \omega(g) \leftrightarrow \lim\limits_{n \to a} \frac{g(x)}{|f(x)|} = 0$

### Bekannte Reihen

| | |
|---|---|
| Harmonische Reihe | $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty$ |
| | $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^a}$ div. für $a \leq 1$ , konv. sonst |
| Potenzreihe | $\sum_{k=1}^{\infty} a_0 q^k = \frac{a_0}{1-q}\ \forall |q| < 1$ |
| Logarithmusreihe | $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} = \ln(1+x)$ |
| Arcus-Tangens-Reihe | $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} = \arctan(x)$ in $[-1, 1]$ |
| Exponentialreihe | $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = exp(z)$ |
| | $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e$ |
| Binomialreihe | $\sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = (1+x)^\alpha$ |

### Allgemeines

- $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{n} = 1$
- $\lim\limits_{k \to \infty} (\frac{k}{k+1})^k = \frac{1}{e}$
- $k! \geq 2^{n+1}$
- $x > 0 \Rightarrow e^x > \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$
- $||a| - |b|| \leq |a - b| \leq |a| + |b|$, $|a + b| \leq |a| + |b|$
- $\forall n > 0 : (1+x)^n \geq 1 + nx$ (Bernoulli-Ungleichung)