

Folgen

Def: 2.2 - Grenzwert einer reellen Folge

- $a \in \mathbb{R}$ Grenzwert von $(a_n) \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : |a_n - a| < \epsilon$
- Existiert $a \in \mathbb{R}$ Grenzwert $\Rightarrow (a_n)$ konvergent, sonst (a_n) divergent

Satz 2.3 - Rechenregeln für Grenzwerte $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ reelle Folgen, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$

- Folge $(a_n + b_n)$ konvergiert gegen $a + b$
- Folge $(a_n \cdot b_n)$ konvergiert gegen $a \cdot b$
- $b \neq 0 \Rightarrow (\frac{a_n}{b_n})_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen $\frac{a}{b}$
- $a_n \leq b_n$ für fast alle $n \in \mathbb{N} \Rightarrow a \leq b$
- Einschließungskriterium** $a = b, c$ reelle Folge und $a_n \leq c_n \leq b_n$ für fast alle $n \in \mathbb{N} \Rightarrow (c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen a

Spezialfall des Einschließungskriteriums:

$(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folge, $x \in \mathbb{R}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Nullfolge, sodass $|x_n - x| \leq y_n$ für fast alle $n \Rightarrow (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen x

Satz 2.4 - Eigenschaften konvergenter Folgen Sei a_n konvergente reelle Folge

- (a_n) beschränkt
- (a_n) besitzt genau einen Grenzwert

Def: 2.5 - Uneigentliche Konvergenz $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert uneigentlich gegen $\infty \Leftrightarrow \forall K > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : a_n > K$
 $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert uneigentlich gegen $-\infty \Leftrightarrow (-a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert uneigentlich gegen ∞

Satz 2.6 - Rechenregeln für uneigentliche Konvergenz $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ reelle Folge, $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n)_{n \in \mathbb{N}} = \infty, (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ reelle Folge, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, a \in \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$

- $a \neq -\infty \Rightarrow (a_n + b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert uneigentlich gegen ∞
- $a \neq 0 \Rightarrow (a_n + b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert uneigentlich
- $a > 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \infty$
- $a < 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = -\infty$
- $a \notin \{\infty, -\infty\} \Rightarrow (\frac{a_n}{b_n})_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen 0

Def 2.7 - Monotone Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ reelle Folge heißt

- monoton wachsend, falls $a_{n+1} \geq a_n \forall n \in \mathbb{N}$
- streng monoton wachsend, falls $a_{n+1} > a_n \forall n \in \mathbb{N}$
- monoton fallend, falls $a_{n+1} \leq a_n \forall n \in \mathbb{N}$
- streng monoton fallend, falls $a_{n+1} < a_n \forall n \in \mathbb{N}$

Satz 2.8 - Monotoniesatz $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ reelle Folge, wachsend und nach oben beschränkt $\Rightarrow (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent und $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n := \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$

Def 2.9 Häufungspunkt $a \in \mathbb{R}$ Häufungspunkt $\Leftrightarrow \exists (a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ Teilfolge von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, die gegen a konvergiert.

Satz von Bolzano-Weierstraß Jede beschränkte reelle Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ besitzt eine konvergente Teilfolge und hat also mindestens einen Häufungspunkt.

Def 2.11 - Limes superior, limes inferior $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nach oben (unten) beschränkt \Rightarrow größter (kleinster) Häufungspunkt: **Limes superior (inferior)**

Komplexe und mehrdimensionale Folgen

Def 3.1 Grenzwert komplexer Folgen z GW von $(z_n) \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : |z_n - z| < \epsilon$
 \exists GW $\Leftarrow z_n$ konvergent

Konvergenz $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} = a_n + ib_n : \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + i \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$

Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = v \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \|v_n - v\|_2 = 0$

Reihen

Def 2.2 - Folgen Grenzwert in \mathbb{R} a Grenzwert von $(a_n) \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall b \geq n_0 : |a_n - a| < \epsilon$

Nullfolge $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) \rightarrow 0$

Rechenregeln Grenzwerte

- $(a_n + b_n) \rightarrow a + b$
- $(a_n \cdot b_n) \rightarrow a \cdot b$
- $b \neq 0 \Rightarrow (\frac{a_n}{b_n}) \rightarrow \frac{a}{b}$
- Einschließungskriterium:** $a = b \wedge a_n \leq c_n \leq b_n$ für fast alle $n \in \mathbb{N} \Rightarrow c_n \rightarrow a$

Eigenschaften konvergenter Folgen (a_n) beschränkt $\Rightarrow \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ beschränkt $\wedge \exists!$ ein GW

Uneigentliche Konvergenz $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ divergent $\Rightarrow (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert uneig. gg. $\infty \Leftrightarrow \forall K > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : a_n > K$

Rechenregeln uneig. Konvergenz

- $a \neq -\infty \Rightarrow (a_n + b_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow \infty$
- $a \neq 0 \Rightarrow (a_n \cdot b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert
- $a \notin \{-\infty, \infty\} \vee (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt $\Rightarrow (\frac{a_n}{b_n})_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow 0$

Monotone Folge (a_n) monoton wachsend, falls $a_{n+1} \geq a_n \forall n \in \mathbb{N}$. (Äquivalent für $>, <, \leq$)

Monotoniesatz $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton wachsend \wedge nach oben beschränkt $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$

Teilfolge, Häufungspunkte $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ reelle Folge:

- $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ streng monoton wachsend in $\mathbb{N} \Rightarrow (a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ Teilfolge von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$
- $a \in \mathbb{R}$ Häufungspunkt von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \Leftrightarrow \exists$ Teilfolge, die gg. a konvergiert

Satz v. Bozano-Weierstraß Jede beschränkte Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ besitzt eine konvergente Teilfolge und hat min. einen Häufungspunkt

Limes superior, Limes inferior $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ reelle Folge: $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nach oben (unten) beschränkt \rightarrow Bez. größter (kleinster) Häufungspunkt: Limes superior (inferior)

Komplexe und mehrdimensionale Folgen

Grenzwert komplexer Folgen z GW von $(z_n) \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : |z_n - z| < \epsilon$. Existiert $z \Leftarrow (z_n)$ konvergent.

Konvergenz komplexer Folgen

- $z_n = a_n + ib_n$ konvergiert $\Leftrightarrow a_n$ und b_n konvergieren
- z_n konvergent $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + i \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$

Grenzwert mehrdimensionaler Folgen $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = v \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \|v_n - v\|_2 = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \|v_n - v\|_\infty = 0$

Reihen

Konvergenz $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent gg. $s \in \mathbb{C} \Leftrightarrow$ Folge der Partialsummen gg. s konvergiert

Majoranten- & Minorantenkriterium $b_n := \sum_{k=0}^{\infty} b_k; (b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ reelle Folge; $a_s := \sum_{k=0}^{\infty} a_k, |(a_n)_{n \in \mathbb{N}}| \leq b_k$ für fast alle $k \in \mathbb{N}$

- b_s konvergiert $\Rightarrow a_s$ konvergiert absolut
- a_s divergiert $\Rightarrow b_s$ divergiert

Quotientenkriterium $\sum_{k=0}^{\infty} a_k, a \neq 0$ für fast alle $k \in \mathbb{N} \wedge$

$\lim_{n \in \mathbb{N}} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| := q$ existiert $\Rightarrow (*)$

Wurzelkriterium $\sum_{k=0}^{\infty} a_k; a_k \in \mathbb{C} : q := \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} \Rightarrow (*)$

(*)

- $q < 1 \Rightarrow$ Reihe konvergiert absolut
- $q > 1 \Rightarrow$ Reihe divergiert

Leibnitz-Kriterium $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ reelle, monoton fallende Nullfolge $\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} |\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k - s_n| \leq a_{n+1}$

Umordnungssatz

- Jede Umordnung einer konvergenten Reihe konvergiert gegen denselben Wert

- Konvergiert eine Reihe aus reellen Summanden, aber nicht absolut $\Rightarrow \forall s \in \mathbb{R} \exists$ bijektive Abbildung $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$: die umgeordnete Reihe konvergiert gegen s

Potenzreihe $P(z) := \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k; c_k \in \mathbb{C}; z \in \mathbb{C}$

$R := \frac{1}{\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|}}$

Cauchy-Produkt

- Seien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k, \sum_{k=0}^{\infty} b_k$ absolut konvergent $\in \mathbb{C} \Rightarrow (\sum_{k=0}^{\infty} a_k)(\sum_{k=0}^{\infty} b_k) = (\sum_{m=0}^{\infty} c_m)$ mit $c_m = \sum_{k=0}^m a_k b_{m-k}$ mit c_k konvergent.

- Seien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k, \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ zwei Potenzreihen mit Konvergenzradien R_a und $R_b \Rightarrow (\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k)(\sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k) = (\sum_{m=0}^{\infty} c_m z^m)$ mit $c_m = \sum_{k=0}^m a_k b_{m-k}$

Natürliche Exponentialfunktion $\exp(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$

Eigenschaften von exp $\forall z, w \in \mathbb{C}, x \in \mathbb{R}$

- $\exp(z + w) = \exp(z) \cdot \exp(w)$
- $\exp(-z) = \frac{1}{\exp(z)}, \exp(z) \neq 0 \wedge \exp(\bar{z}) = \exp(z)$
- $|e^{ix}| = 1$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{z}{n})^n = \exp(z)$
- $|\exp(z) - \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!}| \leq 2 \cdot \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!}$

Trigonometrische Funktionen $\cos(z) := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} =$

$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!}$
 $\sin(z) := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}$

Eigenschaften v. sin & cos $\forall z, w \in \mathbb{C}, x \in \mathbb{R}$

- $\exp(iz) = \cos(z) + i \sin(z)$
- $(\sin(z))^2 + (\cos(z))^2 = 1$
- $\sin(z + w) = \sin(z) \cos(w) + \cos(z) \sin(w)$
- $\cos(z + w) = \cos(z) \sin(w) - \sin(z) \sin(w)$
- $\cos(z) = \operatorname{Re}(e^{ix}) \quad \sin(x) = \operatorname{Im}(e^{ix})$

	0	$\frac{\pi}{6} = 30^\circ$	$\frac{\pi}{4} = 45^\circ$	$\frac{\pi}{3} = 60^\circ$	$\frac{\pi}{2} = 90^\circ$
sin	$\frac{\sqrt{0}}{2} = 0$	$\frac{\sqrt{1}}{2} = \frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2} = 1$
cos	$\frac{\sqrt{4}}{2} = 1$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{1}}{2} = \frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{0}}{2} = 0$