Reelle Zahlen

$(K,+,\cdot)$ angeordneter Körper, $X \subset K$ nicht leer

Sup, Inf, Max, Min
- $s \in K$ $\mathbf{sup(X)}$ $\Leftrightarrow$ s kleinste obere Schranke
- $s \in K$ $\mathbf{inf(X)}$ $\Leftrightarrow$ s größte untere Schranke
- $s \in K$ $\mathbf{max(X)}$ $\Leftrightarrow s = \sup(X) \wedge s \in X$
- $s \in K$ $\mathbf{min(X)}$ $\Leftrightarrow s = \inf(X) \wedge s \in K$

$\varepsilon-$Charakterisierung des Supremums
$s = \sup(X) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists x \in X : s - \varepsilon < x \leq s$
Entsprechendes gilt für das Infimum

Rechenregeln für sup $X, Y \subset \mathbb{R}$ nach oben beschränkt:
- $\sup(X+Y) = \sup(X) + \sup(Y)$
- $\lambda > 0 \Rightarrow \sup(\lambda X) = \lambda \sup(X)$
- $X, Y \subset [0, \infty) \Rightarrow \sup(X) \cdot \sup(Y)$
- $X \subset Y \Rightarrow \sup(X) \leq \sup(Y)$

Archimedische Anordnung
- $\mathbb{R}$ archimedisch angeordnet $\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}\ \exists n \in \mathbb{N} : n > x$
- $\forall \varepsilon > 0\ \exists n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} < \varepsilon$
- $\forall a, b \in \mathbb{R} : a < b : \exists q \in \mathbb{Q} : a < q < b$

Folgen

Def: 2.2 - Grenzwert einer reellen Folge
- $a \in \mathbb{R}$ Grenzwert von $(a_n) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : |a_n - a| < \varepsilon$
- Existiert $a \in \mathbb{R}$ Grenzwert $\Rightarrow$ (a_n) konvergent, sonst (a_n) divergent

Nullfolge $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n) \to 0$

Satz 2.3 - Rechenregeln für Grenzwerte
$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reelle Folgen, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$
- Folge $(a_n + b_n)$ konvergiert gegen $a + b$
- Folge $(a_n \cdot b_n)$ konvergiert gegen $a \cdot b$
- $b \neq 0 \Rightarrow (\frac{a_n}{b_n})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen $\frac{a}{b}$
- $a_n \leq b_n$ für fast alle $n \in \mathbb{N} \to a \leq b$
- **Einschließungskriterium**
  $a = b \wedge a_n \leq c_n \leq b_n$ für fast alle $n \in \mathbb{N} \Rightarrow c_n \to a$

Spezialfall des Einschließungskriteriums:
$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} Folge, x \in R, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Nullfolge, sodass $|x_n - x| \leq y_n$ für fast alle $n \Rightarrow (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen x

Satz 2.4 - Eigenschaften konvergenter Folgen
Sei a_n konvergente reelle Folge
- (a_n) beschränkt
- (a_n) besitzt genau einen Grenzwert

Def: 2.5 - Uneigentliche Konvergenz
- $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert uneigentlich gegen $\infty \Leftrightarrow$
  $\forall K > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : a_n > K$
- $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert uneigentlich gegen $-\infty \Leftrightarrow$
  $(-a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert uneigentlich gegen ∞

Satz 2.6 - Rechenregeln für uneigentliche Konvergenz
$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reelle Folgen
$\lim\limits_{n\to\infty} (b_n)_{n\in\mathbb{N}} = \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a, a \in \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$
- $a \neq -\inf \Rightarrow (a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}} \to \infty$
- $a \neq 0 \Rightarrow (a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert
- $a > 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = \infty$
- $a < 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = -\infty$
- $a \notin \{-\infty, \infty\} \vee (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt $\Rightarrow (\frac{a_n}{b_n})_{n\in\mathbb{N}} \to 0$

Def 2.7 - Monotone Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reelle Folge heißt
- monoton wachsend, falls $a_{n+1} \geq a_n, \forall n \in \mathbb{N}$
- streng monoton wachsend, falls $a_{n+1} > a_n, \forall n \in \mathbb{N}$
- monoton fallend, falls $a_{n+1} \leq a_n, \forall n \in \mathbb{N}$
- streng monoton fallend, falls $a_{n+1} < a_n, \forall n \in \mathbb{N}$

Monotoniesatz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend $\wedge$ nach oben beschränkt $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = sup\, a_n = \underset{n\in\mathbb{N}}{sup}\, \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$

Def 2.9 Häufungspunkt $a \in \mathbb{R}$ Häufungspunkt $\Leftrightarrow \exists (a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die gegen a konvergiert.

Satz v. Bolzano-Weierstraß
Jede beschränkte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt eine konvergente Teilfolge und hat min. einen Häufungspunkt

Def 2.11 - Limes superior, limes inferior $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach oben (unten) beschränkt $\Rightarrow$ größter (kleinster) Häufungspunkt: *Limes superior (inferior)*

Komplexe und mehrdimensionale Folgen

Grenzwert komplexer Folgen
z GW von $(z_n) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : |z_n - z| < \varepsilon$.
Existiert $z \Rightarrow (z_n)$ konvergent gegen z.

Konvergenz komplexer Folgen
- $z_n = a_n + ib_n$ konvergiert $\Leftrightarrow a_n$ und b_n konvergieren
- z_n konvergent $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} z_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + i \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$
- z_n konvergent $\Rightarrow |z_n|$ konvergent

Grenzwert mehrdimensionaler Folgen
- z_n konvergent $\Leftrightarrow \forall i \in [0, n] : z_i$ konvergent
- $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = v \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \|v_n - v\|_2 = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \|v_n - v\|_\infty = 0$

Reihen

Konvergenz $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent gg. $s \in \mathbb{C} \Leftrightarrow$
Folge der Partialsummen gg. s konvergiert

Teilfolge, Häufungspunkte $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reelle Folge:
- $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ streng monoton wachsend in $\mathbb{N}$
  $\Rightarrow (a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$
- $a \in \mathbb{R}$ Häufungspunkt von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \Leftrightarrow$
  $\exists$ Teilfolge, die gg. a konvergiert

Majoranten- & Minorantenkriterium
$b_n := \sum_{k=0}^{\infty} b_k; (b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ relle Folge
$a_s := \sum_{k=0}^{\infty} a_k, |(a_n)_{n\in\mathbb{N}}| \leq b_k$für fast alle $k \in \mathbb{N}$
- $b_s$konvergiert $\Rightarrow a_s$konvergiert absolut
- $a_s$divergiert $\Rightarrow b_s$ divergiert

Quotientenkriterium
$\sum_{k=0}^{\infty} a_k, a \neq 0$ für fast alle $k \in \mathbb{N} \wedge \lim\limits_{n\in\mathbb{N}} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| := q$ existiert $\Rightarrow \otimes$

Wurzelkriterium
$\sum_{k=0}^{\infty} a_k;\ a_k \in \mathbb{C} : q := \limsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} \Rightarrow \otimes$

$\otimes$
- $q < 1 \Rightarrow$ Reihe konvergiert absolut
- $q > 1 \Rightarrow$ Reihe divergiert

Leibnitz-Kriterium $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ relle, monoton fallende Nullfolge $\Rightarrow$ $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} |\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k - s_n| \leq a_{n+1}$

Umordnungssatz
- Jede Umordnung einer konvergenten Reihe konvergiert gegen denselben Wert
- Konvergiert eine Reihe aus reellen Summanden, aber nicht absolut $\Rightarrow \forall s \in \mathbb{R} \exists$ bijektive Abbildung $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$: die umgeordnete Reihe konvergiert gegen s

Potenzreihe $P(z) := \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k; c_k \in \mathbb{C}; z \in \mathbb{C}$
$R := \frac{1}{\limsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|}} :=$ Konvergenzradius
- $|z| < R \Rightarrow P(z)$ konvergiert
- $|z| > R \Rightarrow P(z)$ divergiert

Cauchy-Produkt
- Seien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$, $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ absolut konvergent $\in \mathbb{C} \Rightarrow (\sum_{k=0}^{\infty} a_k)(\sum_{k=0}^{\infty} b_k) = (\sum_{m=0}^{\infty} c_m)$ mit $c_m = (\sum_{k=0}^{m} a_k b_{m-k})$ mit c_k absolut konvergent.
- Seien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$, $\sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$ zwei Potenzreihen mit Konvergenzradien R_a und $R_b \Rightarrow (\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k)(\sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k) = (\sum_{m=0}^{\infty} c_b z^m)$ mit $c_m = \sum_{k=0}^{m} a_k b_{m-k}$ und Konvergenzradius $\min\{R_a, R_b\}$

Natürliche Exponentialfunktion
$exp(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = \sum_{K=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k}$

Eigenschaften von exp $\forall z, w \in \mathbb{C}, x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$
- $\exp(z+w) = \exp(z) \cdot \exp(w)$
- $\exp(-z) = \frac{1}{\exp(z)}, \exp(z) \neq 0 \wedge \exp(\overline{z}) = \exp(z)$
- $|e^{ix}| = 1$
- $\lim\limits_{n\to\infty} (1 + \frac{z}{n})^n = \exp(z)$
- $|\exp(z) - \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}| \leq 2 \cdot \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!}$
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x\to\infty} x^{-n} e^x = \infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n e^x = 0$
- $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$
- $e^{i\pi} = -1$
- $e^{z+2\pi i} = e^z$
- $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$

Trigonometrische Funktionen
$\sin(z) := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \mathcal{O}(x^7)$
$\cos(z) := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^6}{720} + \mathcal{O}(x^7)$
$\tan(x) := \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ $\arcsin(x) = x + \frac{x^6}{6} + \frac{3x^5}{40} + \mathcal{O}(x^7)$
$\arccos(x) = \frac{\pi}{2} - x - \frac{x^3}{6} - \frac{3x^5}{40} + \mathcal{O}(x^7)$
$\arctan(x) := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \mathcal{O}(x^7)$
$\sinh(x) := \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2n+1)!} = x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \mathcal{O}(x^7)$
$\cosh(x) := \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2n)!} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^6}{720} + \mathcal{O}(x^7)$
$\tanh(x) := \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \mathcal{O}(x^7)$

Eigenschaften von sin, cos, tan $\forall z, w \in \mathbb{C}, x \in \mathbb{R}$
- $\exp(iz) = \cos(z) + i\sin(w)$
- $(\sin(z))^2 + (\cos(z))^2 = 1$
- $\sin(z+w) = \sin(z)\cos(w) + \cos(z)\sin(w)$
- $sin(2z) = 2sin(z)cos(z)$
- $cos(z+w) = \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w)$
- $\cos(x) = Re(e^{ix}),\ \sin(x) = Im(e^{ix})$
- $cos(2z) = cos^2(z) - sin^2(z)$
- $\arccos(x) + \arcsin(x) = \frac{\pi}{2}$
- $z = \tan(c) : \arctan'(z) = \frac{1}{\tan'(c)} = \frac{1}{1+(\tan(c))^2} = \frac{1}{1+z^2}$
- $\cosh^2(x) = \frac{1}{2}\cosh(x) + \frac{1}{2}$
- $\cosh^2(z) - \sinh^2(z) = 1$

	0	$\frac{\pi}{6} = 30°$	$\frac{\pi}{4} = 45°$	$\frac{\pi}{3} = 60°$	$\frac{\pi}{2} = 90°$
sin	$\frac{\sqrt{0}}{2} = 0$	$\frac{\sqrt{1}}{2} = \frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2} = 1$
cos	$\frac{\sqrt{4}}{2} = 1$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{1}}{2} = \frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{0}}{2} = 0$

Stetigkeit

Definition
$f : D \to \mathbb{R}$stetig inc $\Leftrightarrow \forall (x_n)$ mit $\lim\limits_{x\to 0} x_n = c$ gilt $\lim\limits_{x\to 0} f(x_n) = f(c)$

Rechenregeln $D \subseteq \mathbb{R}; f, g : D \to \mathbb{R}; f, g$ stetig in c
$\Rightarrow f + g, f \cdot g, \frac{f}{g}$ $(g \neq 0)$ stetig in c

Komposition $D, D' \subseteq \mathbb{R}, f : D \to \mathbb{R}$ stetig in c
- $y := f(c) \in D' \wedge g$ stetig in $y \Rightarrow (g \circ f) : D \to \mathbb{R}$ stetig in c
- f, g stetig $\wedge f(D) \subseteq D' \Rightarrow (g \circ f) : D \to \mathbb{R}$ stetig

ε-δ-Charakterisierung $D \subseteq \mathbb{R}, f : D \to \mathbb{R}, c \in D \Rightarrow f$ stetig in $c \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in D : |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \varepsilon$

Zwischenwertsatz $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig $\Rightarrow \forall y \in \mathbb{R}$ mit $\min\{f(a), f(b)\} \leq y \leq \max\{f(a), f(b)\} : \exists x \in [a, b] : f(x) = y$

Satz v. Max. und Min. $[a, b]$ beschränkt, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig
- f beschränkt
- $\exists x_{\max}, x_{\min} \in [a, b] : f(x_{\max}) = \sup\{f(x) : x \in [a, b]\} \wedge f(x_{\min}) = \inf\{f(x) : x \in [a, b]\}$

Stetigkeit in $\mathbb{C}$ & $\mathbb{R}^n$ wörtlich übertragbar
$D \subseteq \mathbb{C}$ oder $D \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschlossen: $\forall f$ stetig : $D \to \mathbb{C}$ bzw. $f : D \to \mathbb{R}^m$ beschränkt und nimmt auf D Maximum und Minimum an

Stetigkeit von Potenzreihen $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ mit Konvergenzradius $R \Rightarrow f : \{z : |z| < R\} \to \mathbb{C}$ stetig

Differenziation

Definition $I \subseteq \mathbb{R}, f : I \to \mathbb{R}$
$f'(c) := \lim\limits_{x\to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$

Diff'barkeit $\Rightarrow$ Stetigkeit f diffbar in c $\Rightarrow f$ in $\mathbb{C}$ stetig

Monotonie & Umkehrbarkeit
- f stetig: f injektiv $\Leftrightarrow f$ streng monoton wachsend oder fallend
- f außerdem surjektiv $\Rightarrow f^{-1}$ stetig $\wedge$ monoton wachsend / fallend

Differentiation v. f^{-1} f bijektiv, $f'(c) \neq 0 \Rightarrow z := f(c)$ diff'bar, $(f^{-1})'(z) = \frac{1}{f'(c)}$

Logarithmus $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

Diff. v. Potenzreihen
$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \in \mathbb{R} : f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^{k-1}$, $D = |R|$

Höhere Ableitungen $\mathscr{C}^n(I)$: Vektorraum aller n-mal stetig diff'baren Funktionen $f : I \to \mathbb{R}$

Extrema
- **lokales Maximum** $\Leftrightarrow \varepsilon > 0 : f(c) \geq f(x) \forall x \in (c - \varepsilon, c + \varepsilon) \cap I$
- **lokales Minimum** $\Leftrightarrow \varepsilon > 0 : f(c) \leq f(x) \forall x \in (c - \varepsilon, c + \varepsilon) \cap I$
- **isoliertes lok. Max/Min** $\Leftrightarrow$ Max/min $\wedge x \neq c$
- **globales Max (Min)** $f(x) \geq (\leq) f(c)$

Satz von Rolle $f : [a, b] \to \mathbb{R}, f(a) = f(b) \Rightarrow \exists \xi \in (a, b) : f'(\xi) = 0$

Hinreichend für Extrema f diff'bar, $\exists c : f'(c) = 0$
- f streng monoton wachsend um c $\Rightarrow$ f in c isol. lok. Min.
- $f \in \mathscr{C}^2, f''(c) = 0 \Rightarrow f$ in c isol. lok. Min.
- f' um c str. monoton fallend $\Rightarrow$ f in c isol. lok. Max.
- $f \in \mathscr{C}^2, f''(c) < 0 \Rightarrow f$ in c isol. lok. Max.

Taylor
- $n \in \{\mathbb{N} \cup \infty\} : T_n f(x; c) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{k!} (x - c)^k$
- $T_n(f \cdot g) = T_n f \cdot T_n g$
- Potenzreihen: Das n-te Taylorpolynom (im Nullpunkt) von Potenzreihen ist deren n-te Partialsumme

Integration

Riehmann-Integral
$\varphi \in \tau[a, b] : \int_a^b \varphi dx := \sum_{k=1}^{n} c_k (x_k - x_{k-1})$

Stetigkeit & Monotonie $\Rightarrow$ *integrierbar* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$
- f stetig $\Rightarrow f$ integrierbar
- f monoton $\Rightarrow f$ integrierbar
- $\exists$ Unterteilung v. $[a, b]$ stetig oder monoton $\Rightarrow f$ integrierbar

Mittelwertsatz d. Int.-R. $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, $\exists \xi \in [a, b]$: $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b - a)$

Partielle Integration $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig: $\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$

Substitution $\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)dy$

Majorantenkriterium f. Int.
f über $[a, b]$ absolut integrierbar $\Leftrightarrow$
- f in jedem Teilintervall $\in [a, b]$ integrierbar
- $|f(x)| \leq g(x) \forall x \in [a, b)$
- g über $[a, b)$ uneig. integrierbar

Folgerung z. uneig. Integrierbarkeit

- $f:(a,b]\to\mathbb{R}$ auf allen Teilintervallen $\in (a,b]$ integrierbar, $f(x)=\mathcal{O}(\frac{1}{|x-a|^s})$ für $x\to a$ mit $s\in[0,1)\Rightarrow$ f über $(a,b]$ uneig. integrierbar
- $f:[a,\infty)\to\mathbb{R}, a<b$ integrierbar, $f(x)=\mathcal{O}(\frac{1}{x^s})$ mit $x\to\infty$, $s>1\Rightarrow f$ über $[a,\infty]$ uneig. integrierbar

Integralvergl.krit. $f:[1,\infty]\to\mathbb{R}$ monoton fallend $,\forall x: f(x)>0, f$ über $[1,\infty]$ uneig. integr. $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ konvergiert

Potenzreihen
$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \Rightarrow \int f(x)dx = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k+1}c_k x^{k+1}$

Kurven

Diff'bare Kurven

- k regulär in $t \Leftrightarrow k'(t)\neq 0$, sonst singulär
- k singulär in t $\Rightarrow \nexists$ Tangentialvektor
- $k'(t)=(k_1'(t),...,)$ Tangentialvektor
- $T_k(t)=\frac{k'(t)}{\|k'(t)\|_2}$ Tangentialeinheitsvektor in t
- $N(t)=\begin{pmatrix}-y'(t)\\x'(t)\end{pmatrix}$ Normalenvektor (2D)

Rektifizierbarkeit, Bogenlänge

$k:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ rektifizierbar $\Leftrightarrow \{\sum_{k=1}^{N}\|\gamma(t_k)-\gamma(t_{k+1})\|_2 :$
$a=t_0<t_1<...<t_N=b$ Unterteilung v. $[a,b]\}$

Bogenlänge stetig diff'barer Kurven

$k:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ stückweise stetig diff'bar $\Rightarrow L(k)=\int_a^b\|k'(t)\|_2 dt$

Parametertransformation

- $f:J\to I$ Parametertransformation $\Leftrightarrow$ bijektiv und stetig
- f, f^{-1} k-mal stetig diff'bar $\Rightarrow \mathscr{C}^k$ Parametertransformation
- $\mathscr{C}^1$-Par.transf.f orientierungstreu wenn $f'(t)>0\ \forall t$; orientierungsumkehrend für $<$
- k und $\tilde{k}$ äquivalente Kurven wenn mit Par.transf. f: $\tilde{k}=k\circ f$ äquivalente Kurven $\Rightarrow$ gleiche Bogenlänge

Bogenlänge/Umparametrisierung

- $k:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ stetig diff'bare Kurve; $f:[c,d]\to[a,b]$ $\mathscr{C}^1$-Par.transf.; k und $k\circ f$ gleiche Länge
- k regulär $\Rightarrow \exists$ orientierungserhaltende $\mathscr{C}^1$-Parametertransformation $f:[a,L(k)]\to[a,b]$, sodass diese Kurve $k: J\to\mathbb{R}, k:=k\circ f$ "mit Einheitsgeschwindigkeit läuft", also $\|k'(t)\|=1\ \forall t\in[0,L(k)]$
- Man erhält dieses f als Umkehrfunktion von $s\to\int_a^s\|k'(t)\|dt$

Krümmung

- $k:I\to\mathbb{R}^2$ regulär in $t\in I\Rightarrow \kappa(t)$ **Krümmung** im Punkt t
- $R(t)=\frac{1}{\kappa(t)}$ Krümmungsradius
- $k:I\to\mathbb{R}^2$ regulär, zweimal stetig diff'bar, k die dazugehörige unparametrisierte Kurve $\Rightarrow$ Krümmung von k in t als $\tilde{k}$ an $\tilde{t}$: $k(t)=\tilde{k}(\tilde{t})$

$k:I\to\mathbb{R}^2$ zweimal stetig diff'bar, $t\in I: k$ in t regulär:
- k nach Bogenlänge parametrisiert $\Rightarrow \kappa(t)=\langle k''(t),N(t)\wedge|\kappa(t)|=\|T'(t)\|=\|k''(t)\|$
- $k(t)=\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix}\Rightarrow\kappa(t)=\frac{x'(t)y''(t)-y'(t)x''(t)}{\sqrt{(x'(t)^2+y'(t)^2)^3}}$

Mehrdimensionale Differentialrechnung

$M\subseteq\mathbb{R}^n$ offen, $f:M\to\mathbb{R}, x\in M$

Richtungsableitung $v\in\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ Richtungsvektor $\Rightarrow$ Richtungsableitung von f in Richtung $v=\partial_v f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x+tv)-f(x)}{t}$

Totale Differenzierbarkeit f in x (total) diff'bar $\Leftrightarrow\exists$ lineare Abbildung $L:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n, h\in\mathbb{R}^n\backslash\{0\}:\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)-Lh}{\|h\|}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)-\langle w,h\rangle}{\|h\|}=0$

Diff'barkeit im Mehrdimensionalen f (total) diff'bar $\Leftrightarrow\forall x\in M$ alle partiellen Ableitungen existieren und stetig sind $\Rightarrow f$ stetig diff'bar,

$$w=\begin{pmatrix}\partial_1 f(x)\\ \vdots\\ \partial_n f(x)\end{pmatrix}=:\nabla f(x),\ \partial_v f(x)=\langle\nabla f(x),v\rangle$$

Hesse-Matrix

$$\nabla^2 f(x)=\begin{pmatrix}\partial_{11}f(x)&\cdots&\partial_{1,n}f(x)\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ \partial_{n1}f(x)&\cdots&\partial_{nn}f(x)\end{pmatrix}$$

Taylor in höheren Dimensionen

$T_n f((\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}),(\begin{smallmatrix}a\\b\end{smallmatrix}))=\sum_{j+k=0}^{n}\frac{\partial_x^j\partial_y^k f(\begin{smallmatrix}a\\b\end{smallmatrix})}{j!\,k!}(x-a)^j(y-b)^k$

Extrema/Kritische Punkte

- kritischer Punkt: $\nabla f(c)=0$
- lokales Min.: $\nabla^2 f(c)$ pos. semidefinit
- lokales Max.: $\nabla^2 f(c)$ neg. semidefinit
- $\nabla f(c)=0$ und $\nabla^2 f(c)$ pos. definit $\Rightarrow$ isoliertes lok. Min.
- $\nabla f(c)=0$ und $\nabla^2 f(c)$ neg. definit $\Rightarrow$ isoliertes lok. Max.
- $\nabla f(c)=0$ und $\nabla^2 f(c)$ pos. und neg. EW $\Rightarrow$ Sattelpunkt

Jacobi-Matrix $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m; F(x)=\begin{pmatrix}f_1(x)\\ \vdots\\ f_m(x)\end{pmatrix}$

f in c (total) diff'bar wenn lin. Abb. (oder Matrix) L existiert mit:

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{R}^n\backslash\{0\}}}\frac{F(x+h)-F(x)-Lh}{\|h\|}=0$$

Alle $\partial_j f_k(x)$ $(j=1\dots n, k=1\dots m)$ in c stetig $\Rightarrow$
f in c stetig diff'bar und Jacobi-Matrix

$$DF(c):=\begin{pmatrix}\partial_1 f_1(c)&\dots&\partial_n f_1(c)\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ \partial_1 f_m(c)&\dots&\partial_n f_m(c)\end{pmatrix}$$

Mehrdimensionale Kettenregel

$D(G\circ F)(c)=DG(F(c))\cdot DF(c)$

Mehrdimensionale Integralrechnung

Transformationssatz $T:M_2\to M_1; f:M_1\to\mathbb{R}$

$$\int\limits_{M_1}\cdots\int f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_{M_2}\cdots\int f(T(y))\ |\det(DT(y))|\ \mathrm{d}y$$

Differentialgleichungen

Rezepte

1	$y'(t)=f(t)\cdot g(y(t))$	Funkt. f,g
2	$y'(t)+a(t)\cdot y(t)=0$	Funkt. a
3	$y'(t)+a(t)\cdot y(t)=f(t)$	Funkt. a, f
4	$y''(t)+ay'(t)+by(t)=0$	Konst. a,b
5	$y''(t)+ay'(t)+by(t)=p(t)$	Konst. a,b; Polyn. p
6	$y''(t)+ay'(t)+by(t)=e^{\alpha t}(a_1\cos(\beta t)+a_2\sin(\beta t))$	Konst. $\alpha,\beta,a_1,a_2,b\neq 0$

Meth. 1 $F(t)=\int f(t)\mathrm{d}t;\ G(t)=\int\frac{1}{g(t)\mathrm{d}t}$
Jede allgemeine Lsg für $y(t)$ erfüllt die Gleichung $G(y(t))=F(t)+c$
Mit Anfangsbedingung erfüllt jede Lsg. $\int_{y_0}^{y(t)}\frac{1}{g(u)}\mathrm{d}u=\int_{x_0}^{t}f(u)\mathrm{d}u$

Meth. 2 $A(t)=\int a(t)\mathrm{d}t$; allgemeine Lsg. $y(t)=ce^{-A(t)}$
*Für **AWP**:* $y(t_0)=y_0: y(t)=y_0e^{A(t_0)-A(t)}$

Meth. 3 $A(t)=\int a(t)\mathrm{d}t; B(t)=\int e^{A(t)}\cdot f(t)\mathrm{d}t$
Allg. Lsg. $y(t)=e^{-A(t)}\cdot(c+B(t))$
*Für **AWP**:* $y(t_0)=y_0: y(t)=e^{A(t_0)-A(t)}(y_0+\int_{t_0}^{t}e^{A(s)-A(t_0)}\cdot f(s)ds)$

Meth. 4
- $a^2>4b$: Löse $\lambda_{1,2}=\lambda^2+a\lambda+b=0$ allg. Lsg.: $y(t)=c_1e^{\lambda_1 t}+c_2e^{\lambda_2 t}$
- $a^2=4b$: $\lambda=-\frac{a}{2}$ allg. Lsg.: $y(t)=(c_1+c_2)e^{\lambda t}$
- $a^2<4b$: $\omega=\sqrt{b-(\frac{a}{2})^2}$
  allg. Lsg.: $y(t)=(c_1cos(\omega t)+c_2sin(\omega t))e^{-\frac{a}{2}t}$

*Für **AWP**:* $y(t_0)=y_0, y'(t_1)=y_1$ setze $t=t_1, t=t_2$ in allg. Lösung ein und bestimme c_1, c_2

Meth. 5
1. Bestimme allg. Lsg. $y_h(t)$ von $y_h''(t)+ay_h'(t)+by_h(t)=0$
2. Stelle Polyn. $q(t)=a_nt^n+\cdots+a_1t+a_0$ mit Grad $n=deg(p)$ und Param. $a_0,\dots,a_n$ auf
3. $y_p(t)=\begin{cases}q(t) & b\neq 0\\ tq(t) & a\neq 0, b=0\\ t^2q(t) & a=0, b=0\end{cases}$
   in Abhängigkeit von $a_0,\dots,a_n$; $y_p''(t)+ay_p'(t)+by_p(t)=p(t)$
4. Ermittle $a_1,\dots,a_n$ durch Koeffizientenvergleich
5. Allg. Lsg.: $y(t)=y_h(t)+y_p(t)$

*Für **AWP**:* $y(t_0)=y_0, y'(t_1)=y_1$ setze $t=t_1, t=t_2$ in allg. Lösung ein und bestimme c_1, c_2

Meth. 6
1. Bestimme allg. Lsg. $y_h(t)$ von $y_h''(t)+ay_h'(t)+by_h(t)=0$
2. Löse $\lambda^2+a\lambda+b=0$
3. In Abhängigkeit von k:
   $y_p(t)=\begin{cases}ke^{ct} & \lambda_1\neq c\neq\lambda_2\\ kte^{ct} & \lambda_1=c\neq\lambda_2 \text{ oder } \lambda_1\neq c=\lambda_2\\ kt^2e^{ct} & \lambda_1=c=\lambda_2\end{cases}$
4. $y_p''(t)+ay_p'(t)+by_p(t)=e^{ct}$ ermittle k
5. Allg. Lsg.: $y(t)=y_h(t)+y_p(t)$

*Für **AWP**:* $y(t_0)=y_0, y'(t_1)=y_1$ setze $t=t_1, t=t_2$ in allg. Lösung ein und bestimme c_1, c_2

Mehrdimensionale DGLs Sei $\{v_1,\dots,v_n\}\subset\mathbb{R}^n$ Basis von Eigenvektoren von $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ zu EW $\lambda_1,\dots,\lambda_n$
Lin. unabh. Lösungen v. DGL der Form $y'=Ay$: $y=e^{\lambda_j t}v_j$

Satz von Picard-Lindelöf f stetig diff'bar bzgl. y, stetig in t $\Rightarrow$ AWP $y'=f(t,y), y(t_0)=y_0$ auf $(t_0-\varepsilon,t_0+\varepsilon)$ genau eine Lösung (für $\varepsilon>0$ klein genug)

Komplexe Zahlen

$\mathbb{C}=\{z|z=x+iy, x,y\in\mathbb{R}, i^2=-1\}$
- $z_1+z_2=(x_1\pm x_2)+i(y_1\pm y_2)$
- $z_1\cdot z_2=x_1x_2-y_1y_2+i(x_1y_2+x_2y_1)$
- $\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}=\frac{z_1\overline{z_2}}{|z_2|^2}$
- $|z|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{z\cdot\overline{z}}$
- $\varphi=\arctan(\frac{x}{y}), r=|z|, x=r\cdot\cos(\varphi), y=r\cdot\sin(\varphi)$
- $\overline{z}=x-iy$
- $z=r(\cos(\varphi)+i\sin(\varphi))=r\cdot e^{i\varphi}$

Koordinatentransformation

2D - Kreiskoordinaten

$(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix})\mapsto r\begin{pmatrix}\cos(\varphi)\\ \sin(\varphi)\end{pmatrix},\quad dxdy\mapsto r\cdot drd\varphi$

3D - Kugelkoordinaten

$(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix})\mapsto r\begin{pmatrix}\sin(\theta)\cos(\varphi)\\ \sin(\theta)\sin(\varphi)\\ \cos(\theta)\end{pmatrix},\quad dxdydz\mapsto r^2\sin(\theta)drd\theta d\varphi$

3D - Zylinderkoordinaten

$(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix})\mapsto\begin{pmatrix}r\cdot\cos(\varphi)\\ r\cdot\sin(\varphi)\\ z\end{pmatrix},\quad dxdydz\mapsto r\cdot drd\varphi dz$

Sonstiges

Bekannte Abl. und Integrale

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f(x))$	$f(x)$	$\int(f(x))\,\mathrm{d}x$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$arcsin(x)$	$\sqrt{1-x^2}+x\sin^{-1}(x)$
$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$arccos(x)$	$x\ \arccos^{-1}(x)-\sqrt{1-x^2}$
$\frac{1}{x^2+1}$	$arctan(x)$	$x\ \tan^{-1}(x)-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)$
$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$arsinh(x)$	$x\sinh^{-1}(x)-\sqrt{x^2+1}$
$\frac{1}{\sqrt{x-1}\sqrt{x+1}}$	$arcosh(x)$	$x\cosh^{-1}(x)-\sqrt{x-1}\sqrt{x+1}$
$\frac{1}{1-x^2}$	$arctanh(x)$	$\frac{1}{2}\ln(1-x^2)+x\tanh^{-1}(x)$
$\frac{1}{cos^2(x)}$	$tan(x)$	$-\ln(\cos(x))$
$\frac{1}{cosh^2(x)}$	$tanh(x)$	$\ln(\cosh(x))$
$\cos(2x)$	$sin(x)cos(x)$	$-\frac{1}{2}cos^2(x)$
$-2\sin(x)\cos(x)$	$cos^2(x)$	$\frac{1}{2}(x+sin(x)cos(x))$
$\sin(2x)$	$sin^2(x)$	$\frac{1}{2}(x-sin(x)cos(x))$
$\frac{1}{x}$	$ln(x)$	$x\cdot ln(x)-x$
$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	$\sqrt{1-x^2}$	$\frac{1}{2}(\sqrt{1-x^2}x+\sin^{-1}(x))$

Landau-Notation

- $f\in\mathcal{O}(g)\leftrightarrow\lim\limits_{n\to a}\frac{|f(x)|}{g(x)}<\infty$
- $f\in o(g)\leftrightarrow\lim\limits_{n\to a}\frac{|f(x)|}{g(x)}=0$
- $f\in\Omega(g)\leftrightarrow\lim\limits_{n\to a}\frac{g(x)}{|f(x)|}<\infty$
- $f\in\omega(g)\leftrightarrow\lim\limits_{n\to a}\frac{g(x)}{|f(x)|}=0$

Bekannte Reihen

Harmonische Reihe	$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}=+\infty$
	$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^a}$ div. f. $a\leq 1$, konv. sonst
Potenzreihe	$\sum_{k=1}^{\infty}a_0q^k=\frac{a_0}{1-q}\ \forall|q|<1$
Logarithmusreihe	$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k}=\ln(1+x)$
Arcus-Tangens-Reihe	$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{2k+1}=\arctan(x)$ in $[-1,1]$
Exponentialreihe	$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!}=exp(z)$
	$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}=e$

Allgemeines

- $k!\geq 2^{n+1}$
- $x>0\Rightarrow e^x>\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$
- $||a|-|b||\leq|a-b|\leq|a|+|b|$, $|a+b|\leq|a|+|b|$
- $\frac{1}{e}=\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{k}{k+1})^k$
- $\forall n>0:(1+x)^n\geq 1+nx$ (Bernoulli-Ungleichung)