

Reelle Zahlen

$(K, +, \cdot)$ angeordneter Körper, $X \subset K$ nicht leer

- \sup , \inf , **Max**, **Min**
- $s \in K$ **$\sup(\mathbf{X})$** \Leftrightarrow s kleinste obere Schranke
- $s \in K$ **$\inf(\mathbf{X})$** \Leftrightarrow s größte untere Schranke
- $s \in K$ **$\max(\mathbf{X})$** $\Leftrightarrow s = \sup(\mathbf{X}) \wedge s \in K$
- $s \in K$ **$\min(\mathbf{X})$** $\Leftrightarrow s = \inf(\mathbf{X}) \wedge s \in K$

ε –**Charakterisierung des Supremums**
 $s = \sup(X) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in X : s - \varepsilon < x \leq s$
Entsprechendes gilt für das Infimum

- Rechenregeln für sup** $X, Y \subset \mathbb{R}$ nach oben beschränkt:
- $\sup(X + Y) = \sup(X) + \sup(Y)$
- $\lambda > 0 \Rightarrow \sup(\lambda X) = \lambda \sup(X)$
- $X, Y \subset [0, \infty) \Rightarrow \sup(X) \cdot \sup(Y)$
- $X \subset Y \Rightarrow \sup(X) \leq \sup(Y)$

- Archimedische Anordnung**
- \mathbb{R} archimedisch angeordnet $\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \ \exists n \in \mathbb{N} : n > x$
- $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} < \varepsilon$
- $\forall a, b \in \mathbb{R} : a < b : \exists q \in \mathbb{Q} : a < q < b$

Folgen

Def: 2.2 - Grenzwert einer reellen Folge

- $a \in \mathbb{R}$ Grenzwert von $(a_n) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0 : |a_n - a| < \varepsilon$
- Existiert $a \in \mathbb{R}$ Grenzwert $\Rightarrow (a_n)$ konvergent, sonst (a_n) divergent

- Nullfolge** $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) \rightarrow 0$
- Cauchy-Kriterium** $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n, m \geq n_0 : |a_n - a_m| < \varepsilon$

- Satz 2.3 - Rechenregeln für Grenzwerte**
 $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ reelle Folgen, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \ \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$
- Folge $(a_n + b_n)$ konvergiert gegen $a + b$
- Folge $(a_n \cdot b_n)$ konvergiert gegen $a \cdot b$
- $b \neq 0 \Rightarrow (\frac{a_n}{b_n})_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen $\frac{a}{b}$
- $a_n \leq b_n$ für fast alle $n \in \mathbb{N} \rightarrow a \leq b$
- Einschließungskriterium**
 $a = b \wedge a_n \leq c_n \leq b_n$ für fast alle $n \in \mathbb{N} \Rightarrow c_n \rightarrow a$
Spezialfall des Einschließungskriteriums:
 $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *Folge*, $x \in \mathbb{R}$, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Nullfolge, sodass $|x_n - x| \leq y_n$ für fast alle $n \Rightarrow (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen x

- Satz 2.4 - Eigenschaften konvergenter Folgen**
Sei a_n konvergente reelle Folge
- (a_n) beschränkt
- (a_n) besitzt genau einen Grenzwert

- Def: 2.5 - Uneigentliche Konvergenz**
- $(a_n)_{a \in \mathbb{N}}$ konvergiert uneigentlich gegen $\infty \Leftrightarrow \forall K > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0 : a_n > K$
- $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert uneigentlich gegen $-\infty \Leftrightarrow (-a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert uneigentlich gegen ∞

- Satz 2.6 - Rechenregeln für uneigentliche Konvergenz**
 $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ reelle Folge, $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n)_{n \in \mathbb{N}} = \infty, (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ reelle Folge, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, a \in \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$
- $a \neq -\inf \Rightarrow (a_n + b_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow \infty$
- $a \neq 0 \Rightarrow (a_n \cdot b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert
- $a > 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \infty$
- $a < 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = -\infty$
- $a \notin \{-\infty, \infty\} \vee (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt $\Rightarrow (\frac{a_n}{b_n})_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow 0$

- Def 2.7 - Monotone Folgen** $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ reelle Folge heißt
- monoton wachsend, falls $a_{n+1} \geq a_n, \forall n \in \mathbb{N}$
- streng monoton wachsend, falls $a_{n+1} > a_n, \forall n \in \mathbb{N}$
- monoton fallend, falls $a_{n+1} \leq a_n, \forall n \in \mathbb{N}$
- streng monoton fallend, falls $a_{n+1} < a_n, \forall n \in \mathbb{N}$

- Monotoniesatz** $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton wachsend \wedge nach oben beschränkt $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n = \sup \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$

- Def 2.9 Häufungspunkt** $a \in \mathbb{R}$ Häufungspunkt $\Leftrightarrow \exists (a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ Teilfolge von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, die gegen a konvergiert.

- Satz v. Bozano-Weierstraß**
Jede beschränkte Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ besitzt eine konvergente Teilfolge und hat min. einen Häufungspunkt

- Def 2.11 - Limes superior, limes inferior** $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nach oben (unten) beschränkt \Rightarrow größter (kleinster) Häufungspunkt: *Limes superior (inferior)*

Komplexe und mehrdimensionale Folgen

- Grenzwert komplexer Folgen**
 z GW von $(z_n) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0 : |z_n - z| < \varepsilon$.
Existiert $z \Rightarrow (z_n)$ konvergent gegen z .

- Konvergenz komplexer Folgen**
- $z_n = a_n + ib_n$ konvergiert $\Leftrightarrow a_n$ und b_n konvergieren
- z_n konvergent $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + i \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$

- Grenzwert mehrdimensionaler Folgen**
 $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = v \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \|v_n - v\|_2 = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \|v_n - v\|_\infty = 0$
- Reihen**
- Konvergenz** $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent gg. $s \in \mathbb{C} \Leftrightarrow$ Folge der Partialsummen gg. s konvergiert

- Teilfolge, Häufungspunkte** $(a_n)_{a \in \mathbb{N}}$ reelle Folge:
- $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ streng monoton wachsend in $\mathbb{N} \Rightarrow (a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ Teilfolge von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$
- $a \in \mathbb{R}$ Häufungspunkt von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \Leftrightarrow \exists$ Teilfolge, die gg. a konvergiert

- Majoranten- & Minorantenkriterium**
 $b_n := \sum_{k=0}^\infty b_k; (b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ relle Folge
 $a_s := \sum_{k=0}^\infty a_k, |(a_n)_{n \in \mathbb{N}}| \leq b_k$ für fast alle $k \in \mathbb{N}$
- b_s konvergiert $\Rightarrow a_s$ konvergiert absolut
- a_s divergiert $\Rightarrow b_s$ divergiert

- Quotientenkriterium**
 $\sum_{k=0}^\infty a_k, a \neq 0$ für fast alle $k \in \mathbb{N} \wedge \lim_{n \in \mathbb{N}} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| := q$ existiert $\Rightarrow \otimes$

- Wurzelkriterium**
 $\sum_{k=0}^\infty a_k; a_k \in \mathbb{C} : q := \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} \Rightarrow \otimes$
- \otimes
- $q < 1 \Rightarrow$ Reihe konvergiert absolut
- $q > 1 \Rightarrow$ Reihe divergiert

- Leibnitz-Kriterium** $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ relle, monoton fallende Nullfolge $\Rightarrow \sum_{k=0}^\infty (-1)^k a_k \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} |\sum_{k=0}^\infty (-1)^k a_k - s_n| \leq a_{n+1}$

- Umordnungssatz**
- Jede Umordnung einer konvergenten Reihe konvergiert gegen denselben Wert
- Konvergiert eine Reihe aus reellen Summanden, aber nicht absolut $\Rightarrow \forall s \in \mathbb{R} \exists$ bijektive Abbildung $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$: die umgeordnete Reihe konvergiert gegen s

- Potenzreihe** $P(z) := \sum_{k=0}^\infty c_k z^k; c_k \in \mathbb{C}; z \in \mathbb{C}$
 $R := \frac{1}{\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|}} :=$ Konvergenzradius

- Cauchy-Produkt**
- Seien $\sum_{k=0}^\infty a_k, \sum_{k=0}^\infty b_k$ absolut konvergent $\in \mathbb{C} \Rightarrow (\sum_{k=0}^\infty a_k)(\sum_{k=0}^\infty b_k) = (\sum_{m=0}^\infty c_m)$ mit $c_m = (\sum_{k=0}^m a_k b_{m-k})$ mit c_k absolut konvergent.
- Seien $\sum_{k=0}^\infty a_k z^k, \sum_{k=0}^\infty b_k z^k$ zwei Potenzreihen mit Konvergenzradien R_a und $R_b \Rightarrow (\sum_{k=0}^\infty a_k z^k)(\sum_{k=0}^\infty b_k z^k) = (\sum_{m=0}^\infty c_b z^m)$ mit $c_m = \sum_{k=0}^m a_k b_{m-k}$ und Konvergenzradius $\min\{R_a, R_b\}$

- Natürliche Exponentialfunktion**
 $exp(z) := \sum_{k=0}^\infty \frac{z^k}{k!} = \sum_{K=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{n^k}$

- Eigenschaften von exp** $\forall z, w \in \mathbb{C}, x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$
- $\exp(z + w) = \exp(z) \cdot \exp(w)$
- $\exp(-z) = \frac{1}{\exp(z)}, \exp(z) \neq 0 \wedge \exp(\bar{z}) = \exp(z)$
- $|e^{iz}| = 1$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{z}{n})^n = \exp(z)$
- $|\exp(z) - \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!}| \leq 2 \cdot \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{-n} e^x = \infty$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0$
- $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$
- $e^{i\pi} = -1$
- $e^{z+2\pi i} = e^z$
- $e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x)$

- Trigonometrische Funktionen**
- $\sin(z) := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \sum_{k=0}^\infty (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}$
- $\cos(z) := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \sum_{k=0}^\infty (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!}$
- $\arctan(x) := \sum_{k=0}^\infty (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$
- $\sinh(x) := \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \sum_{k=0}^\infty \frac{x^{2k+1}}{(2n+1)!}$
- $\cosh(x) := \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \sum_{k=0}^\infty \frac{x^{2k}}{(2n)!}$
- $\tanh(x) := \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)}$

- Eigenschaften von sin, cos, tan** $\forall z, w \in \mathbb{C}, x \in \mathbb{R}$
- $\exp(iz) = \cos(z) + i \sin(w)$
- $(\sin(z))^2 + (\cos(z))^2 = 1$
- $\sin(z + w) = \sin(z) \cos(w) + \cos(z) \sin(w)$
- $\sin(2z) = 2\sin(z)\cos(z)$
- $\cos(z + w) = \cos(z) \sin(w) - \sin(z) \sin(w)$
- $\cos(x) = Re(e^{ix}) \ \sin(x) = Im(e^{ix})$
- $\cos(2z) = \cos^2(z) - \sin^2(z)$
- $\arccos(x) + \arcsin(x) = \frac{\pi}{2}$
- $z = \tan(c) : \arctan'(z) = \frac{1}{\tan'(c)} = \frac{1}{1+(\tan(c))^2} = \frac{1}{1+z^2}$
- $\cosh^2(x) = \frac{1}{2} \cosh(x) + \frac{1}{2}$
- $\cosh^2(z) - \sinh^2(z) = 1$
- | | | | | | |
|-----|--------------------------|------------------------------------|---|------------------------------------|----------------------------|
| | 0 | $\frac{\pi}{6} = 30^\circ$ | $\frac{\pi}{4} = 45^\circ$ | $\frac{\pi}{3} = 60^\circ$ | $\frac{\pi}{2} = 90^\circ$ |
| sin | $\frac{\sqrt{0}}{2} = 0$ | $\frac{\sqrt{1}}{2} = \frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{4}}{2} = 1$ |
| cos | $\frac{\sqrt{4}}{2} = 1$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\frac{\sqrt{1}}{2} = \frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{0}}{2} = 0$ |

Stetigkeit

- Definition**
stetig in $c \Leftrightarrow \forall (x_n)$ mit $\lim_{x \rightarrow 0} x_n = c$ gilt $\lim_{x \rightarrow 0} f(x_n) = f(c)$

- Rechenregeln** $D \subseteq \mathbb{R}; f, g : D \rightarrow \mathbb{R}; f, g$ stetig in $c \Rightarrow f + g, f \cdot g, \frac{f}{g} \ (g \neq 0)$ stetig in c

- Komposition** $D, D' \subseteq \mathbb{R}, f : D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig in c
- $y := f(c) \in D' \wedge g$ stetig in $y \Rightarrow (g \circ f) : D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig in c
- f, g stetig $\wedge f(D) \subseteq D' \Rightarrow (g \circ f) : D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig

- ε - δ -Charakterisierung** $D \subseteq \mathbb{R}, f : D \rightarrow \mathbb{R}, c \in D \Rightarrow f$ stetig in $c \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in D : |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \varepsilon$

- Zwischenwertsatz** $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig $\Rightarrow \forall y \in \mathbb{R}$ mit $\min\{f(a), f(b)\} \leq y \leq \max\{f(a), f(b)\} : \exists x \in [a, b] : f(x) = y$

- Satz v. Max. und Min.** $[a, b]$ beschränkt, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig
- f beschränkt
- $\exists x_{\max}, x_{\min} \in [a, b] : f(x_{\max}) = \sup\{f(x) : x \in [a, b]\} \wedge f(x_{\min}) = \inf\{f(x) : x \in [a, b]\}$

- Stetigkeit in $\mathbb{C} \ \& \ \mathbb{R}^n$** wörtlich übertragbar
 $D \subseteq \mathbb{C}$ oder $D \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschlossen: $\forall f$ stetig : $D \rightarrow \mathbb{C}$ bzw. $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ beschränkt und nimmt auf D Maximum und Minimum an

- Stetigkeit von Potenzreihen** $f(z) = \sum_{k=0}^\infty c_k z^k$ mit Konvergenzradius $R \Rightarrow f : \{z : |z| < R\} \rightarrow \mathbb{C}$ stetig

Differenziation

- Definition** $I \subseteq \mathbb{R}, f : I \rightarrow \mathbb{R}$
 $f'(c) := \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$

- Diff'barkeit \Rightarrow Stetigkeit** f diffbar in c $\Rightarrow f$ in \mathbb{C} stetig

- Monotonie & Umkehrbarkeit**
- f stetig: f injektiv $\Leftrightarrow f$ streng monoton wachsend oder fallend
- f außerdem surjektiv $\Rightarrow f^{-1}$ stetig \wedge monoton wachsend / fallend

- Differentiation v.** f^{-1} f bijektiv, $f'(c) \neq 0 \Rightarrow z := f(c)$ diff'bar, $(f^{-1})'(z) = \frac{1}{f'(c)}$

- Logarithmus** $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

- Diff. v. Potenzreihen**
 $f(x) = \sum_{k=0}^\infty c_k x^k \in \mathbb{R} : f'(x) = \sum_{k=1}^\infty k c_k x^{k-1}, D = |R|$

- Höhere Ableitungen** $\mathcal{C}^n(I)$: Vektorraum aller n-mal stetig diff'baren Funktionen $f : I \rightarrow \mathbb{R}$

- Extrema**
- lokales Maximum** $\Leftrightarrow \varepsilon > 0 : f(c) \geq f(x) \forall x \in (c - \varepsilon, c + \varepsilon) \cap I$
- lokales Minimum** $\Leftrightarrow \varepsilon > 0 : f(c) \leq f(x) \forall x \in (c - \varepsilon, c + \varepsilon) \cap I$
- isoliertes lok. Max/Min** $\Leftrightarrow \text{Max/min} \wedge x \neq c$
- globales Max (Min)** $f(x) \geq (<) f(c)$

- Satz von Rolle** $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, f(a) = f(b) \Rightarrow \exists \xi \in (a, b) : f'(\xi) = 0$

- Hinreichend für Extrema** f diff'bar, $\exists c : f'(c) = 0$
- f streng monoton wachsend um c \Rightarrow f in c isol. lok. Min.
- $f \in \mathcal{C}^2, f''(c) = 0 \Rightarrow f$ in c isol. lok. Min.
- f um c str. monoton fallend $\Rightarrow f$ in c isol. lok. Max.
- $f \in \mathcal{C}^2, f''(c) < 0 \Rightarrow f$ in c isol. lok. Max.

- Taylor**
- $n \in \{\mathbb{N} \cup \infty\} : T_n f(x; c) := \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(c)}{k!} (x - c)^k$
- Potenzreihen: Das n-te Taylorpolynom (im Nullpunkt) von Potenzreihen ist deren n-te Partialsumme

Integration

- Riehmann-Integral**
 $\varphi \in \tau[a, b] : \int_a^b \varphi dx := \sum_{k=1}^n c_k (x_k - x_{k-1})$

- Stetigkeit & Monotonie \Rightarrow integrierbar** $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$
- f stetig $\Rightarrow f$ integrierbar
- f monoton $\Rightarrow f$ integrierbar
- \exists Unterteilung v. $[a, b]$ stetig oder monoton $\Rightarrow f$ integrierbar

- Mittelwertsatz d. Int.-R.** $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, $\exists \xi \in [a, b] : \int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b - a)$

- Partielle Integration** $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig: $\int_a^b f(x) g'(x) dx = [f(x) g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x) g(x) dx$

- Substitution** $\int_a^b f(g(x)) g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y) dy$

- Majorantenkriterium f. Int.**
 f über $[a, b]$ absolut integrierbar \Leftrightarrow
- f in jedem Teilintervall $\in [a, b]$ integrierbar
- $|f(x)| \leq g(x) \forall x \in [a, b]$
- g über $[a, b]$ uneig. integrierbar

- Folgerung z. uneig. Integrierbarkeit**
- $f : (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ auf allen Teilintervallen $\in (a, b]$ integrierbar, $f(x) = \mathcal{O}(\frac{1}{|x-a|^s})$ für $x \rightarrow a$ mit $s \in [0, 1) \Rightarrow f$ über $(a, b]$ uneig. integrierbar
- $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, a < b$ integrierbar, $f(x) = \mathcal{O}(\frac{1}{x^s})$ mit $x \rightarrow \infty, s > 1 \Rightarrow f$ über $[a, \infty]$ uneig. integrierbar

- Integralvergl.krit.** $f : [1, \infty] \rightarrow \mathbb{R}$ monoton fallend, $\forall x : f(x) > 0, f$ über $[1, \infty]$ uneig. integr. $\Rightarrow \sum_{k=1}^\infty f(k)$ konvergiert

- Potenzreihen**
 $f(x) = \sum_{k=0}^\infty c_k x^k \Rightarrow \int f(x) dx = \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{k+1} c_k x^{k+1}$

Kurven

Diff'bare Kurven

- k regulär in $t \Leftrightarrow k'(t) \neq 0$, sonst singulär
- k singulär in $t \Rightarrow \nexists$ Tangentialvektor
- $k'(t) = (k_1'(t), \dots,)$ Tangentialvektor
- $T_k(t) = \frac{k'(t)}{\|k'(t)\|_2}$ Tangentialeinheitsvektor in t

- $N(t) = \begin{pmatrix} -y'(t) \\ x'(t) \end{pmatrix}$ Normalenvektor (2D)

Rektifizierbarkeit, Bogenlänge

$k:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ rektifizierbar $\Leftrightarrow \{\sum_{k=1}^N \|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k+1})\|_2 : a=t_0 < t_1 < \dots < t_N = b$ Unterteilung v. $[a,b]$

Bogenlänge stetig diff'barer Kurven

$k:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ stückweise stetig diff'bar $\Rightarrow L(k) = \int_a^b \|k'(t)\|_2 dt$

Parametertransformation

- $f:J \rightarrow I$ Parametertransformation \Leftrightarrow bijektiv und stetig
- f, f^{-1} k-mal stetig diff'bar $\Leftrightarrow \mathcal{C}^k$ Parametertransformation
- \mathcal{C}^1 -Par.transf. f orientierungstreu wenn $f'(t) > 0 \ \forall t$; orientierungsumkehrend für $<$
- k und $\tilde k$ äquivalente Kurven wenn mit Par.transf. $f: \tilde k = k \circ f$ äquivalente Kurven \Rightarrow gleiche Bogenlänge

Bogenlänge/Umparametrisierung

- $k:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig diff'bare Kurve; $f:[c,d] \rightarrow [a,b]$ \mathcal{C}^1 -Par.transf.; k und $k \circ f$ gleiche Länge
- k regulär $\Rightarrow \exists$ orientierungserhaltende \mathcal{C}^1 -Parametertransformation $f:[a,L(k)] \rightarrow [a,b]$, sodass diese Kurve $k:J \rightarrow \mathbb{R}, k := k \circ f$ “mit Einheitsgeschwindigkeit läuft“, also $\|k'(t)\| = 1 \ \forall t \in [0,L(k)]$
- Man erhält dieses f als Umkehrfunktion von $s \rightarrow \int_a^s \|k'(t)\| dt$

Krümmung

- $k:I \rightarrow \mathbb{R}^2$ regulär in $t \in I \Rightarrow \kappa(t)$ **Krümmung** im Punkt t
- $R(t) = \frac{1}{\kappa(t)}$ Krümmungsradius
- $k:I \rightarrow \mathbb{R}^2$ regulär, zweimal stetig diff'bar, k die dazugehörige unparametrisierte Kurve \Rightarrow Krümmung von k in t als $\tilde k$ an $\tilde t: k(t) = \tilde k(\tilde t)$ $k:I \rightarrow \mathbb{R}^2$ zweimal stetig diff'bar, $t \in I: k$ in t regulär:
- k nach Bogenlänge parametrisiert $\Rightarrow \kappa(t) = \langle k''(t), N(t) \wedge | \kappa(t)| = \|T'(t)\| = \|k''(t)\|$
- $k(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \Rightarrow \kappa(t) = \frac{x'(t)y''(t)-y'(t)x''(t)}{\sqrt{(x'(t)^2+y'(t)^2)^3}}$

Mehrdimensionale Differentialrechnung

$M \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f:M \rightarrow \mathbb{R}, x \in M$

Richtungsableitung

$v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ Richtungsvektor \Rightarrow Richtungsableitung von f in Richtung $v = \partial_v f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x+tv)-f(x)}{t}$

Totale Differenzierbarkeit f in x (total) diff'bar $\Leftrightarrow \exists$ lineare Abbildung $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}: \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)-\langle w,h \rangle}{\|h\|} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)-\langle w,h \rangle}{\|h\|} = 0$

Diff'barkeit im Mehrdimensionalen f (total) diff'bar $\Leftrightarrow \forall x \in M$ alle partiellen Ableitungen existieren und stetig sind $\Rightarrow f$ stetig diff'bar,

$$w = \begin{pmatrix} \partial_1 f(x) \\ \vdots \\ \partial_n f(x) \end{pmatrix} =: \nabla f(x), \ \partial_v f(x) = \langle \nabla f(x), v \rangle$$

Hesse-Matrix

$$\nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} \partial_{11} f(x) & \cdots & \partial_{1,n} f(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{n1} f(x) & \cdots & \partial_{nn} f(x) \end{pmatrix}$$

Taylor in höheren Dimensionen $T_2 f((x,y);(0,0)) = f(0,0) + \langle f(0,0), (\frac{x}{y}) \rangle + \frac{1}{2} (x \ y) (\nabla^2 f(x \ y)) (x \ y)$

Extrema/Kritische Punkte

- kritischer Punkt: $\nabla f(c) = 0$
- lokales Min.: $\nabla^2 f(c)$ pos. semidefinit
- lokales Max.: $\nabla^2 f(c)$ neg. semidefinit
- $\nabla f(c) = 0$ und $\nabla^2 f(c)$ pos. definit \Rightarrow isoliertes lok. Min.
- $\nabla f(c) = 0$ und $\nabla^2 f(c)$ neg. definit \Rightarrow isoliertes lok. Max.
- $\nabla f(c) = 0$ und $\nabla^2 f(c)$ pos. und neg. EW \Rightarrow Sattelpunkt

Jacobi-Matrix

$F:\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m; F(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{pmatrix}$

f in c (total) diff'bar wenn lin. Abb. (oder Matrix) L existiert mit:

$$\lim_{h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{F(x+h)-F(x)-Lh}{\|h\|} = 0$$

Alle $\partial_j f_k(x) \ (j = 1 \dots n, k = 1 \dots m)$ in c stetig \Rightarrow

f in c stetig diff'bar und Jacobi-Matrix

$$DF(c) := \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(c) & \cdots & \partial_n f_1(c) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 f_m(c) & \cdots & \partial_n f_m(c) \end{pmatrix}$$

Mehrdimensionale Kettenregel

$D(G \circ F)(c) = DG(F(c)) \cdot DF(c)$

Mehrdimensionale Integralrechnung

Transformationssatz $T:M_2 \rightarrow M_1; f:M_1 \rightarrow \mathbb{R}$

$$\int_{M_1} \cdots \int f(x) dx = \int_{M_2} \cdots \int f(T(y)) |\det(DT(y))| \, dy$$

Differentialgleichungen

Rezepte

1	$y'(t) = f(t) \cdot g(y(t))$	Funkt. f, g
2	$y'(t) + a(t) \cdot y(t) = 0$	Funkt. a
3	$y'(t) + a(t) \cdot y(t) = f(t)$	Funkt. a, f
4	$y''(t) + ay'(t) + by(t) = 0$	Konst. a, b
5	$y''(t) + ay'(t) + by(t) = p(t)$	Konst. a, b ; Polyn. p
6	$y''(t) + ay'(t) + by(t) = e^{\alpha t}(a_1 \cos(\beta t) + a_2 \sin(\beta t))$	Konst. $\alpha, \beta, a_1, a_2, b \neq 0$

Meth. 1 $F(t) = \int f(t) dt; \ G(t) = \int \frac{1}{g(t)} dt$

Jede allgemeine Lsg für $y(t)$ erfüllt die Gleichung $G(y(t)) = F(t) + c$
Mit Anfangsbedingung erfüllt jede Lsg. $\int_{y_0}^{y(t)} \frac{1}{g(u)} du = \int_{x_0}^t f(u) du$

Meth. 2 $A(t) = \int a(t) dt$; allgemeine Lsg. $y(t) = ce^{-A(t)}$

Für **AWP**: $y(t_0) = y_0: y(t) = y_0 e^{A(t_0) - A(t)}$

Meth. 3 $A(t) = \int a(t) dt; B(t) = \int e^{A(t)} \cdot f(t) dt$

Allg. Lsg. $y(t) = e^{-A(t)} \cdot (c + B(t))$

Für **AWP**: $y(t_0) = y_0: y(t) = e^{A(t_0) - A(t)} (y_0 + \int_{t_0}^t e^{A(s) - A(t_0)} \cdot f(s) ds)$

Meth. 4

- $a^2 > 4b$: Löse $\lambda_{1,2} = \lambda^2 + a\lambda + b = 0$ allg. Lsg.: $y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$
- $a^2 = 4b$: $\lambda = -\frac{a}{2}$ allg. Lsg.: $y(t) = (c_1 + c_2) e^{\lambda t}$
- $a^2 < 4b$: $\omega = \sqrt{b - (\frac{a}{2})^2}$ allg. Lsg.: $y(t) = (c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t)) e^{-\frac{a}{2} t}$ Für **AWP**: $y(t_0) = y_0, y'(t_1) = y_1$ setze $t = t_1, t = t_2$ in allg. Lösung ein und bestimme c_1, c_2

Meth. 5

- Bestimme allg. Lsg. $y_h(t)$ von $y_h''(t) + ay_h'(t) + by_h(t) = 0$
- Stelle Polyn. $q(t) = a_n t^n + \cdots + a_1 t + a_0$ mit Grad $n = \deg(p)$ und Param. a_0, \dots, a_n auf
- $y_p(t) = \begin{cases} q(t) & b \neq 0 \\ tq(t) & a \neq 0, b = 0 \\ t^2 q(t) & a = 0, b = 0 \end{cases}$ in Abhängigkeit von $a_0, \dots, a_n; y_p''(t) + ay_p'(t) + by_p(t) = p(t)$
- Ermittle a_1, \dots, a_n durch Koeffizientenvergleich
- Allg. Lsg.: $y(t) = y_h(t) + y_p(t)$ Für **AWP**: $y(t_0) = y_0, y'(t_1) = y_1$ setze $t = t_1, t = t_2$ in allg. Lösung ein und bestimme c_1, c_2

Meth. 6

- Bestimme allg. Lsg. $y_h(t)$ von $y_h''(t) + ay_h'(t) + by_h(t) = 0$
- Löse $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$
- In Abhängigkeit von k :

$$y_p(t) = \begin{cases} ke^{ct} & \lambda_1 \neq c \neq \lambda_2 \\ kte^{ct} & \lambda_1 = c \neq \lambda_2 \text{ oder } \lambda_1 \neq c = \lambda_2 \\ kt^2 e^{ct} & \lambda_1 = c = \lambda_2 \end{cases}$$

- $y_p''(t) + ay_p'(t) + by_p(t) = e^{ct}$ ermittle k

- Allg. Lsg.: $y(t) = y_h(t) + y_p(t)$

Für **AWP**: $y(t_0) = y_0, y'(t_1) = y_1$ setze $t = t_1, t = t_2$ in allg. Lösung ein und bestimme c_1, c_2

Mehrdimensionale DGLs Sei $\{v_1, \dots, v_n\} \subset \mathbb{R}^n$ Basis von Eigenvektoren von $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ zu EW $\lambda_1, \dots, \lambda_n$
Lin. unabh. Lösungen v. DGL der Form $y' = Ay$: $y = e^{\lambda_j t} v_j$

Satz von Picard-Lindelöf f stetig diff'bar bzgl. y, stetig in t \Rightarrow AWP
 $y' = f(t, y), y(t_0) = y_0$ auf $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ genau eine Lösung (für $\varepsilon > 0$ klein genug)

Komplexe Zahlen

$\mathbb{C} = \{z|z = x + iy, x, y \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$

- $z_1 + z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$
- $z_1 \cdot z_2 = x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$
- $\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{|z_2|^2}$
- $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$
- $\bar{z} = x - iy$

Koordinatentransformation

2D - Kreiskoordinaten

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto r \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix}, \quad dxdy \mapsto r \cdot drd\varphi$$

3D - Kugelkoordinaten

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto r \begin{pmatrix} \sin(\theta) \cos(\varphi) \\ \sin(\theta) \sin(\varphi) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix}, \quad dxdydz \mapsto r^2 \sin(\theta) drd\theta d\varphi$$

3D - Zylinderkoordinaten

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} r \cdot \cos(\varphi) \\ r \cdot \sin(\varphi) \\ z \end{pmatrix}, \quad dxdydz \mapsto r \cdot drd\varphi dz$$

Sonstiges

Bekannte Abl. und Integrale

$\frac{d}{dx} (f(x))$	$f(x)$	$\int (f(x)) \, dx$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	<i>arcsin</i> (x)	$\sqrt{1-x^2} + x \sin^{-1}(x)$
$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	<i>arccos</i> (x)	$x \arccos^{-1}(x) - \sqrt{1-x^2}$
$\frac{1}{x^2+1}$	<i>arctan</i> (x)	$x \tan^{-1}(x) - \frac{1}{2} \ln(x^2+1)$
$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	<i>arsinh</i> (x)	$x \sinh^{-1}(x) - \sqrt{x^2+1}$
$\frac{1}{\sqrt{x-1}\sqrt{x+1}}$	<i>arcosh</i> (x)	$x \cosh^{-1}(x) - \sqrt{x-1}\sqrt{x+1}$
$\frac{1}{1-x^2}$	<i>artanh</i> (x)	$\frac{1}{2} \ln(1-x^2) + x \tanh^{-1}(x)$
$\frac{1}{\cos^2(x)}$	<i>tan</i> (x)	$-\ln(\cos(x))$
$\frac{1}{\cosh^2(x)}$	<i>tanh</i> (x)	$\ln(\cosh(x))$
$\cos(2x)$	<i>sin</i> (x) <i>cos</i> (x)	$-\frac{1}{2} \cos^2(x)$
$-2 \sin(x) \cos(x)$	<i>cos</i> ² (x)	$\frac{1}{2} (x + \sin(x) \cos(x))$
$\sin(2x)$	<i>sin</i> ² (x)	$\frac{1}{2} (x - \sin(x) \cos(x))$
$\frac{1}{x}$	<i>ln</i> (x)	$x \cdot \ln(x) - x$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\sqrt{1-x^2}$	$\frac{1}{2} (\sqrt{1-x^2} x + \sin^{-1}(x))$

Landau-Notation

- $f \in \mathcal{O}(g) \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|f(x)|}{g(x)} < \infty$
- $f \in o(g) \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|f(x)|}{g(x)} = 0$
- $f \in \Omega(g) \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{|f(x)|} < \infty$
- $f \in \omega(g) \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{|f(x)|} = 0$

Bekannte Reihen

- Harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty; \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^a}$ divergiert f. $a \leq 1$, konv
- Potenzreihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_0 q^k = \frac{a_0}{1-q} \ \forall |q| < 1$
- Logarithmusreihe $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} = \ln(1+x)$
- Arcus-Tangens-Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} = \arctan(x)$ in $[-1,1]$
- Exponentialreihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = exp(z)$
 $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e$

Allgemeines

- $k! \geq 2^{n+1}$
- $x > 0 \Rightarrow e^x > \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$
- $||a| - |b|| \leq |a - b| \leq |a| + |b|, |a + b| \leq |a| + |b|$
- $\frac{1}{e} = \lim_{x \rightarrow \infty} (\frac{k}{k+1})^k$
- $\forall n > 0: (1+x)^n \geq 1 + nx$ (Bernoulli-Ungleichung)