1 Folgen

Def: 2.2 - Grenzwert einer reellen Folge

- $a \in \mathbb{R}$ Grenzwert von $(a_n) \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : |a_n - a| < \epsilon$
- Existiert $a \in \mathbb{R}$ Grenzwert $\Rightarrow (a_n)$ konvergent, sonst (a_n) divergent

Satz 2.3 - Rechenregeln für Grenzwerte $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reelle Folgen, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$

- Folge $(a_n + b_n)$ konvergiert gegen $a + b$
- Folge $(a_n \cdot b_n)$ konvergiert gegen $a \cdot b$
- $b \neq 0 \Rightarrow (\frac{a_n}{b_n})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen $\frac{a}{b}$
- $a_n \leq b_n$ für fast alle $n \in \mathbb{N} \rightarrow a \leq b$
- **Einschließungskriterium** $a = b$, c reelle Folge und $a_n \leq c_n \leq b_n$ für fast alle $n \in \mathbb{N} \Rightarrow (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen a

Spezialfall des Einschließungskriteriums:
$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} Folge, x \in R, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Nullfolge, sodass $|x_n - x| \leq y_n$ für fast alle $n \Rightarrow$ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen x

Satz 2.4 - Eigenschaften konvergenter Folgen Sei a_n konvergente reelle Folge

- (a_n) beschränkt
- (a_n) besitzt genau einen Grenzwert

Def: 2.5 - Uneigentliche Konvergenz $(a_n)_{a\in\mathbb{N}}$ konvergiert uneigentlich gegen $\infty \Leftrightarrow \forall K > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : a_n > K$
$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert uneigentlich gegen $-\infty \Leftrightarrow (-a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert uneigentlich gegen ∞

Satz 2.6 - Rechenregeln für uneigentliche Konvergenz $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reelle Folge, $\lim\limits_{n\to\infty} (b_n)_{n\in\mathbb{N}} = \infty$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reelle Folge, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a, a \in \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$

- $a \neq -\infty \Rightarrow (a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert uneigentlich gegen ∞
- $a \neq 0 \Rightarrow (a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert uneigentlich
- $a > 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = \infty$
- $a < 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = -\infty$
- $a \notin \{\infty, -\infty\} \Rightarrow (\frac{a_n}{b_n})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen 0