Reelle Zahlen

$(K,+,\cdot)$ angeordneter Körper, $X \subset K$ nicht leer

Sup, Inf, Max, Min
- $s \in K$ **sup(X)** $\Leftrightarrow$ s kleinste obere Schranke
- $s \in K$ **inf(X)** $\Leftrightarrow$ s größte untere Schranke
- $s \in K$ **max(X)** $\Leftrightarrow s = \sup(X) \wedge s \in K$
- $s \in K$ **min(X)** $\Leftrightarrow s = \inf(X) \wedge s \in K$

$\varepsilon-$Charakterisierung des Supremums
$s = \sup(X) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists x \in X : s - \varepsilon < x \leq s$
Entsprechendes gilt für das Infimum

Rechenregeln für sup $X, Y \subset \mathbb{R}$ nach oben beschränkt:
- $\sup(X+Y) = \sup(X) + \sup(Y)$
- $\lambda > 0 \Rightarrow \sup(\lambda X) = \lambda \sup(X)$
- $X, Y \subset [0, \infty) \Rightarrow \sup(X) \cdot \sup(Y)$
- $X \subset Y \Rightarrow \sup(X) \leq \sup(Y)$

Archimedische Anordnung
- $\mathbb{R}$ archimedisch angeordnet $\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}\ \exists n \in \mathbb{N} : n > x$
- $\forall \varepsilon > 0\ \exists n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} < \varepsilon$
- $\forall a, b \in \mathbb{R} : a < b : \exists q \in \mathbb{Q} : a < q < b$

Folgen

Def: 2.2 - Grenzwert einer reellen Folge
- $a \in \mathbb{R}$ Grenzwert von $(a_n) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : |a_n - a| < \varepsilon$
- Existiert $a \in \mathbb{R}$ Grenzwert $\Rightarrow (a_n)$ konvergent, sonst (a_n) divergent

Nullfolge $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n) \to 0$

Satz 2.3 - Rechenregeln für Grenzwerte
$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reelle Folgen, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$
- Folge $(a_n + b_n)$ konvergiert gegen $a + b$
- Folge $(a_n \cdot b_n)$ konvergiert gegen $a \cdot b$
- $b \neq 0 \Rightarrow (\frac{a_n}{b_n})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen $\frac{a}{b}$
- $a_n \leq b_n$ für fast alle $n \in \mathbb{N} \to a \leq b$
- **Einschließungskriterium**
  $a = b \wedge a_n \leq c_n \leq b_n$ für fast alle $n \in \mathbb{N} \Rightarrow c_n \to a$

Spezialfall des Einschließungskriteriums:
$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} Folge, x \in R, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Nullfolge, sodass $|x_n - x| \leq y_n$ für fast alle $n \Rightarrow (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen x

Satz 2.4 - Eigenschaften konvergenter Folgen
Sei a_n konvergente reelle Folge
$\Rightarrow (a_n)$ beschränkt $\wedge$ (a_n) besitzt genau einen Grenzwert

Def: 2.5 - Uneigentliche Konvergenz
- $(a_n)_{a\in\mathbb{N}}$ konvergiert uneigentlich gegen $\infty \Leftrightarrow$
  $\forall K > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : a_n > K$
- $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert uneigentlich gegen $-\infty \Leftrightarrow$
  $(-a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert uneigentlich gegen ∞

Satz 2.6 - Rechenregeln für uneigentliche Konvergenz
$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reelle Folgen
$\lim\limits_{n\to\infty}(b_n)_{n\in\mathbb{N}} = \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a, a \in \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$
- $a \neq -\inf \Rightarrow (a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}} \to \infty$
- $a \neq 0 \Rightarrow (a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert uneigentlich
- $a > 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = \infty$
- $a < 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = -\infty$
- $a \notin \{-\infty, \infty\} \vee (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt $\Rightarrow (\frac{a_n}{b_n})_{n\in\mathbb{N}} \to 0$

Def 2.7 - Monotone Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reelle Folge heißt
- monoton wachsend, falls $a_{n+1} \geq a_n, \forall n \in \mathbb{N}$
- streng monoton wachsend, falls $a_{n+1} > a_n, \forall n \in \mathbb{N}$
- monoton fallend, falls $a_{n+1} \leq a_n, \forall n \in \mathbb{N}$
- streng monoton fallend, falls $a_{n+1} < a_n, \forall n \in \mathbb{N}$

Monotoniesatz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend $\wedge$ nach oben beschränkt
$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \underset{n\in\mathbb{N}}{sup}\, a_n = sup\,\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$

Def 2.9 Häufungspunkt $a \in \mathbb{R}$ Häufungspunkt $\Leftrightarrow$
$\exists (a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die gegen a konvergiert.

Satz v. Bolzano-Weierstraß
Jede beschränkte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt eine konvergente Teilfolge und hat min. einen Häufungspunkt

Def 2.11 - Limes superior, limes inferior $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach oben (unten) beschränkt $\Rightarrow$ größter (kleinster) Häufungspunkt: *Limes superior (inferior)*

Komplexe und mehrdimensionale Folgen

Grenzwert komplexer Folgen
z GW von $(z_n) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : |z_n - z| < \varepsilon$
Existiert $z \Rightarrow (z_n)$ konvergent gegen z.

Konvergenz komplexer Folgen
- $z_n = a_n + ib_n$ konvergiert $\Leftrightarrow a_n$ und b_n konvergieren
- z_n konvergent $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} z_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + i \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$
- z_n konvergent $\Rightarrow |z_n|$ konvergent

Grenzwert mehrdimensionaler Folgen
- z_n konvergent $\Leftrightarrow \forall i \in [0, n] : z_i$ konvergent
- $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = v \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \|v_n - v\|_2 = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \|v_n - v\|_\infty = 0$

Reihen

Konvergenz $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent gg. $s \in \mathbb{C} \Leftrightarrow$
Folge der Partialsummen gg. s konvergiert

Teilfolge, Häufungspunkte $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reelle Folge:
- $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ streng monoton wachsend in $\mathbb{N}$
  $\Rightarrow (a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$
- $a \in \mathbb{R}$ Häufungspunkt von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \Leftrightarrow$
  $\exists$ Teilfolge, die gg. a konvergiert

Majoranten- & Minorantenkriterium
$a_n := \sum_{k=0}^\infty a_k$; $b_n := \sum_{k=0}^\infty b_k$; $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}, (b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ relle Folgen,
$|(a_k)| \leq b_k$ für fast alle $k \in \mathbb{N}$
- $b_s$konvergiert $\Rightarrow a_s$konvergiert absolut
- $a_s$divergiert $\Rightarrow b_s$ divergiert

Quotientenkriterum
$\sum_{k=0}^\infty a_k, a_k \neq 0$ für fast alle $k \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| := q$ existiert $\Rightarrow \bigotimes$

Wurzelkriterium
$\sum_{k=0}^\infty a_k,\ a_k \in \mathbb{C} : q := \limsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} \Rightarrow \bigotimes$

$\bigotimes$
- $q < 1 \Rightarrow$ Reihe konvergiert absolut
- $q > 1 \Rightarrow$ Reihe divergiert

Leibniz-Kriterium $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ relle, monoton fallende Nullfolge $\Rightarrow$ $\sum_{k=0}^\infty (-1)^k a_k \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}\ |\sum_{k=0}^\infty (-1)^k a_k - s_n| \leq a_{n+1}$
Anm. $\sum_{k=0}^\infty x_n$ konvergiert $\Rightarrow x_n$ Nullfolge

Integralvergl.-Kriterium $f : (a, \infty) \to \mathbb{R}^+$ monoton fallend:
$\sum_{k=0}^\infty f(k)$ konv. $\Leftrightarrow \int_a^\infty f(k)dk < \infty$

Umordnungssatz
- Jede Umordnung einer konv. Reihe konv. gg. denselben Wert
- Konvergiert eine Reihe aus reellen Summanden, aber nicht absolut $\Rightarrow \forall s \in \mathbb{R}\ \exists$ bijektive Abbildung $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$: die umgeordnete Reihe konvergiert gegen s

Potenzreihe $P(z) := \sum_{k=0}^\infty c_k z^k; c_k \in \mathbb{C}; z \in \mathbb{C}$
$R := \frac{1}{\limsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|}} = \lim\limits_{k\to\infty} |\frac{a_k}{a_{k+1}}|$ Konvergenzradius
- $|z| < R \Rightarrow P(z)$ konvergiert
- $|z| > R \Rightarrow P(z)$ divergiert

Cauchy-Produkt
- $\sum_{k=0}^\infty a_k, \sum_{k=0}^\infty b_k$ absolut konvergent $\in \mathbb{C} \Rightarrow (\sum_{k=0}^\infty a_k)(\sum_{k=0}^\infty b_k) = (\sum_{m=0}^\infty c_m)$ mit $c_m = (\sum_{k=0}^m a_k b_{m-k})$ mit c_k absolut konvergent.
- Seien $\sum_{k=0}^\infty a_k z^k$, $\sum_{k=0}^\infty b_k z^k$ zwei Potenzreihen mit Konvergenzradien R_a und $R_b \Rightarrow (\sum_{k=0}^\infty a_k z^k)(\sum_{k=0}^\infty b_k z^k) = (\sum_{m=0}^\infty c_b z^m)$ mit $c_m = \sum_{k=0}^m a_k b_{m-k}$ und Konvergenzradius $\min\{R_a, R_b\}$

Natürliche Exponentialfunktion
$exp(z) := \sum_{k=0}^\infty \frac{z^k}{k!}$

Eigenschaften von exp $\forall z, w \in \mathbb{C}, x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$
- $\exp(z + w) = \exp(z) \cdot \exp(w)$
- $\exp(-z) = \frac{1}{\exp(z)}, \exp(z) \neq 0 \wedge \exp(\overline{z}) = \exp(z)$
- $|\exp(z) - \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!}| \leq 2 \cdot \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!}$
- $\lim\limits_{n\to\infty}(1 + \frac{z}{n})^n = \exp(z)$
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x\to -\infty} x^n e^x = 0$
- $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^{-n}} = \infty$
- $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$
- $e^{i\pi} = -1$
- $e^{z+2\pi i} = e^z$
- $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$
- $|e^{ix}| = 1$

Trigonometrische Funktionen
$\sin(z) := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \sum_{k=0}^\infty (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \mathcal{O}(x^7)$
$\cos(z) := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \sum_{k=0}^\infty (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^6}{720} + \mathcal{O}(x^7)$
$\tan(x) := \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ $\arcsin(x) = x + \frac{x^6}{6} + \frac{3x^5}{40} + \mathcal{O}(x^7)$
$\arccos(x) = \frac{\pi}{2} - x - \frac{x^3}{6} - \frac{3x^5}{40} + \mathcal{O}(x^7)$
$\arctan(x) := \sum_{k=0}^\infty (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \mathcal{O}(x^7)$
$\sinh(x) := \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \sum_{k=0}^\infty \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \mathcal{O}(x^7)$
$\cosh(x) := \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \sum_{k=0}^\infty \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^6}{720} + \mathcal{O}(x^7)$
$\tanh(x) := \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \mathcal{O}(x^7)$

Eigenschaften trigonometrischer Funktionen $\forall z, w \in \mathbb{C}, x \in \mathbb{R}$
- $\sin(z + w) = \sin(z)\cos(w) + \cos(z)\sin(w)$
- $\sin(2z) = 2\sin(z)c\cos(z)$
- $\cos(z + w) = \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w)$
- $\cos(x) = Re(e^{ix})$, $\sin(x) = Im(e^{ix})$
- $\cos(2z) = \cos^2(z) - \sin^2(z)$
- $\sin^2(z) + \cos^2(z) = 1$
- $\arccos(x) + \arcsin(x) = \frac{\pi}{2}$
- $z = \tan(c) : \arctan'(z) = \frac{1}{\tan'(c)} = \frac{1}{1+(\tan(c))^2} = \frac{1}{1+z^2}$
- $\cosh^2(x) = \frac{1}{2}\cosh(x) + \frac{1}{2}$
- $\cosh^2(z) - \sinh^2(z) = 1$

	0	$\frac{\pi}{6} = 30°$	$\frac{\pi}{4} = 45°$	$\frac{\pi}{3} = 60°$	$\frac{\pi}{2} = 90°$
sin	$\frac{\sqrt{0}}{2} = 0$	$\frac{\sqrt{1}}{2} = \frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2} = 1$
cos	$\frac{\sqrt{4}}{2} = 1$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{1}}{2} = \frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{0}}{2} = 0$
sinh	0	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$
cosh	1	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$

Stetigkeit

Definition
$f : D \to \mathbb{R}$ stetig in $c \Leftrightarrow \forall (x_n)$ mit $\lim\limits_{x\to 0} x_n = c$ gilt $\lim\limits_{x\to 0} f(x_n) = f(c)$

Rechenregeln $D \subseteq \mathbb{R}; f, g : D \to \mathbb{R}; f, g$ stetig in c
$\Rightarrow f + g, f \cdot g, \frac{f}{g}$ $(g \neq 0)$ stetig in c

Komposition $D, D' \subseteq \mathbb{R}, f : D \to \mathbb{R}$ stetig in c
- $y := f(c) \in D' \wedge g$ stetig in $y \Rightarrow (g \circ f) : D \to \mathbb{R}$ stetig in c
- f, g stetig $\wedge f(D) \subseteq D' \Rightarrow (g \circ f) : D \to \mathbb{R}$ stetig

ε-δ-Charakterisierung $D \subseteq \mathbb{R}, f : D \to \mathbb{R}, c \in D \Rightarrow$
$f$stetig in $c \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in D : |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \varepsilon$

Zwischenwertsatz $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig $\Rightarrow \forall y \in \mathbb{R}$ mit $\min\{f(a), f(b)\} \leq y \leq \max\{f(a), f(b)\} : \exists x \in [a, b] : f(x) = y$

Satz v. Max. und Min. $[a, b]$ beschränkt, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig
- f beschränkt
- $\exists x_{\max}, x_{\min} \in [a, b] : f(x_{\max}) = \sup\{f(x) : x \in [a, b]\} \wedge f(x_{\min}) = \inf\{f(x) : x \in [a, b]\}$

Stetigkeit in $\mathbb{C}$ & $\mathbb{R}^n$ wörtlich übertragbar
$D \subseteq \mathbb{C}$ bzw. $\mathbb{R}^n$ abgeschlossen: $\forall f$ stetig : $D \to \mathbb{C}$ bzw. $f : D \to \mathbb{R}^m$ beschränkt und nimmt auf D Maximum und Minimum an

Stetigkeit von Potenzreihen
$f(z) = \sum_{k=0}^\infty c_k z^k \Rightarrow f : \{z : |z| < R\} \to \mathbb{C}$ stetig

Differenziation

Definition $I \subseteq \mathbb{R}, f : I \to \mathbb{R}$ $f'(c) := \lim\limits_{x\to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$

Diff'barkeit $\Rightarrow$ Stetigkeit f diffbar in c $\Rightarrow f$ in $\mathbb{C}$ stetig

Monotonie & Umkehrbarkeit
- f stetig & injektiv $\Leftrightarrow f$ streng monoton wachsend oder fallend
- f außerdem surjektiv $\Rightarrow f^{-1}$ stetig $\wedge$ monoton wachsend / fallend

Differentiation der Umkehrfunktion
f bijektiv, $f'(c) \neq 0 \Rightarrow z := f(c)$ diff'bar, $(f^{-1})'(z) = \frac{1}{f'(c)}$

Logarithmus $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

Diff. v. Potenzreihen
$f(x) = \sum_{k=0}^\infty c_k x^k \in \mathbb{R} : f'(x) = \sum_{k=1}^\infty k c_k x^{k-1}$, $D = |R|$

Höhere Ableitungen $\mathscr{C}^n(I)$: Vektorraum aller n-mal stetig diff'baren Funktionen $f : I \to \mathbb{R}$

Extrema
- **lokales Maximum** $\Leftrightarrow \varepsilon > 0 : f(c) \geq f(x) \forall x \in (c - \varepsilon, c + \varepsilon) \cap I$
- **lokales Minimum** $\Leftrightarrow \varepsilon > 0 : f(c) \leq f(x) \forall x \in (c - \varepsilon, c + \varepsilon) \cap I$
- **isoliertes lok. Max/Min** $\Leftrightarrow$ Max/min $\wedge x \neq c$
- **globales Max (Min)** $f(x) \geq (\leq) f(c)$

Satz von Rolle $f : [a, b] \to \mathbb{R}, f(a) = f(b) \Rightarrow \exists \xi \in (a, b) : f'(\xi) = 0$

Hinreichend für Extrema f diff'bar, $\exists c : f'(c) = 0$
- f streng monoton wachsend um c $\Rightarrow$ f in c isol. lok. Min.
- $f \in \mathscr{C}^2, f''(c) > 0 \Rightarrow f$ in c isol. lok. Min.
- f' um c str. monoton fallend $\Rightarrow f$ in c isol. lok. Max.
- $f \in \mathscr{C}^2, f''(c) < 0 \Rightarrow f$ in c isol. lok. Max.

Taylor
- $n \in \{\mathbb{N} \cup \infty\} : T_n f(x; c) := \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x - c)^k$
- $T_n(f \cdot g) = T_n f \cdot T_n g$
- Potenzreihen: Das n-te Taylorpolynom (im Nullpunkt) von Potenzreihen ist deren n-te Partialsumme

Lipschitz-Stetigkeit (LS)
$f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ LS $\Leftrightarrow \exists L : |f(x) - f(y)| \leq L|x - y|\ \forall x, y \in D$

Umkehrfunktion $(f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

Integration

Riehmann-Integral
$\varphi \in \tau[a, b] : \int_a^b \varphi\, dx := \sum_{k=1}^n c_k(x_k - x_{k-1})$

Stetigkeit & Monotonie $\Rightarrow$ Integrierbarkeit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$
- f stetig $\vee$ f monoton $\Rightarrow f$ integrierbar
- $\exists$ Unterteilung v. $[a, b]$ stetig oder monoton $\Rightarrow f$ integrierbar

Mittelwertsatz der Integralrechnung.
$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig: $\exists \xi \in [a, b] : \int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b - a)$

Partielle Integration
$f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig: $\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$

Substitution $\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)dy$

Majorantenkriterium für Integrale
f über $[a, b]$ absolut integrierbar $\Leftrightarrow$
- f in jedem Teilintervall $\in [a, b]$ integrierbar
- $|f(x)| \leq g(x) \forall x \in [a, b)$
- g über $[a, b)$ uneig. integrierbar

Folgerung z. uneig. Integrierbarkeit

- $f : (a,b] \to \mathbb{R}$ auf allen Teilintervallen $\in (a,b]$ integrierbar, $f(x) = \mathcal{O}(\frac{1}{|x-a|^s})$ für $x \to a$ mit $s \in [0,1) \Rightarrow$ f über $(a,b]$ uneig. integrierbar
- $f : [a,\infty) \to \mathbb{R}, a < b$ integrierbar, $f(x) = \mathcal{O}(\frac{1}{x^s})$ mit $x \to \infty$, $s > 1 \Rightarrow f$ über $[a,\infty]$ uneig. integrierbar

Integralvergl.krit. $f : [1,\infty] \to \mathbb{R}$ monoton fallend, $\forall x : f(x) > 0, f$ über $[1,\infty]$ uneig. integr. $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ konvergiert

Potenzreihen

$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \Rightarrow \int f(x)dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} c_k x^{k+1}$

Kurven

Diff'bare Kurven

- k regulär in $t \Leftrightarrow k'(t) \neq 0$, sonst singulär
- k singulär in t $\Rightarrow \nexists$ Tangentialvektor
- $k'(t) = (k_1'(t), ...,)$ Tangentialvektor
- $T_k(t) = \frac{k'(t)}{\|k'(t)\|_2}$ Tangentialeinheitsvektor in t
- $N(t) = \begin{pmatrix} -y'(t) \\ x'(t) \end{pmatrix}$ Normalenvektor (2D)

Rektifizierbarkeit, Bogenlänge

$k : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ rektifizierbar $\Leftrightarrow \{\sum_{k=1}^{N} \|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k+1})\|_2 :$ $a = t_0 < t_1 < ... < t_N = b$ Unterteilung v. $[a,b]\}$

Bogenlänge stetig diff'barer Kurven

$k : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ stückweise stetig diff'bar $\Rightarrow L(k) = \int_a^b \|k'(t)\|_2 dt$

Parametertransformation

- $f : J \to I$ Parametertransformation $\Leftrightarrow$ bijektiv und stetig
- $f, f^{-1} k$-mal stetig diff'bar $\Rightarrow \mathscr{C}^k$ Parametertransformation
- $\mathscr{C}^1$-Par.transf.f orientierungstreu wenn $f'(t) > 0\ \forall t$; orientierungsumkehrend für $<$
- k und $\tilde{k}$ äquivalente Kurven wenn mit Par.transf. f : $\tilde{k} = k \circ f$ äquivalente Kurven $\Rightarrow$ gleiche Bogenlänge

Bogenlänge/Umparametrisierung

- $k : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ stetig diff'bare Kurve; $f : [c,d] \to [a,b]$ $\mathscr{C}^1$-Param.transf.; k und $k \circ f$ gleiche Länge
- k regulär $\Rightarrow$ $\exists$ orientierungserhaltende $\mathscr{C}^1$-Param.transformation $f : [a, L(k)] \to [a,b]$, sodass diese Kurve $k : J \to \mathbb{R}, k := k \circ f$ "mit Einheitsgeschwindigkeit läuft", also $\|k'(t)\| = 1\ \forall t \in [0, L(k)]$
- Man erhält f als Umkehrfunktion von $s \to \int_a^s \|k'(t)\| dt$

Krümmung

- $k : I \to \mathbb{R}^2$ regulär in $t \in I \Rightarrow \kappa(t)$ **Krümmung** im Punkt t
- $R(t) = \frac{1}{\kappa(t)}$ Krümmungsradius
- $k : I \to \mathbb{R}^2$ regulär, zweimal stetig diff'bar, k die dazugehörige unparametrisierte Kurve $\Rightarrow$ Krümmung von k in t als $\tilde{k}$ an $\tilde{t}$: $k(t) = \tilde{k}(\tilde{t})$

$k : I \to \mathbb{R}^2$ zweimal stetig diff'bar, $t \in I : k$ in t regulär:

- k nach Bogenlänge parametrisiert $\Rightarrow \kappa(t) = \langle k''(t), N(t) \wedge |\kappa(t)| = \|T'(t)\| = \|k''(t)\|$
- $k(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \Rightarrow \kappa(t) = \frac{x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)}{\sqrt{(x'(t)^2 + y'(t)^2)^3}}$

Mehrdimensionale Differentialrechnung

$M \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : M \to \mathbb{R}, x \in M$

Richtungsableitung $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ Richtungsvektor $\Rightarrow$ Richtungsableitung von f in Richtung $v : \partial_v f(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x+tv) - f(x)}{t}$

Totale Differenzierbarkeit f in x (total) diff'bar $\Leftrightarrow$ $\exists$ lineare Abbildung $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$: $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - Lh}{\|h\|} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - \langle w,h \rangle}{\|h\|} = 0$

Diff'barkeit im Mehrdimensionalen f (total) diff'bar $\Leftrightarrow$ $\forall x \in M$ alle partiellen Ableitungen existieren und stetig sind

$$w = \begin{pmatrix} \partial_1 f(x) \\ \vdots \\ \partial_n f(x) \end{pmatrix} =: \nabla f(x),\ \partial_v f(x) = \langle \nabla f(x), v \rangle$$

Hesse-Matrix

$$\nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} \partial_{11} f(x) & \cdots & \partial_{1,n} f(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{n1} f(x) & \cdots & \partial_{nn} f(x) \end{pmatrix}$$

Taylor in höheren Dimensionen

$T_n f((\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}), (\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix})) = \sum_{j+k=0}^{n} \frac{\partial_x^j \partial_y^k f(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix})}{j!\ k!} (x-a)^j (y-b)^k$

Extrema/Kritische Punkte

- kritischer Punkt: $\nabla f(c) = 0$
- lokales Min. $\Rightarrow \nabla^2 f(c)$ pos. semidefinit
- lokales Max. $\Rightarrow \nabla^2 f(c)$ neg. semidefinit
- $\nabla f(c) = 0$ und $\nabla^2 f(c)$ pos. definit $\Rightarrow$ isoliertes lok. Min.
- $\nabla f(c) = 0$ und $\nabla^2 f(c)$ neg. definit $\Rightarrow$ isoliertes lok. Max.
- $\nabla f(c) = 0$ und $\nabla^2 f(c)$ pos. und neg. EW $\Rightarrow$ Sattelpunkt

Jacobi-Matrix $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m; F(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{pmatrix}$

- f in c (total) diff'bar wenn lin. Abb. (oder Matrix) L existiert mit: $$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}}} \frac{F(x+h) - F(x) - Lh}{\|h\|} = 0$$
- Alle $\partial_j f_k(x)$ $(j = 1 \ldots n, k = 1 \ldots m)$ in c stetig $\Rightarrow$ f in c stetig diff'bar und Jacobi-Matrix $$DF(c) := \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(c) & \ldots & \partial_n f_1(c) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 f_m(c) & \ldots & \partial_n f_m(c) \end{pmatrix}$$

Mehrdimensionale Kettenregel

$D(G \circ F)(c) = DG(F(c)) \cdot DF(c)$

Mehrdimensionale Integralrechnung

Transformationssatz $T : M_2 \to M_1; f : M_1 \to \mathbb{R}$

$\underset{M_1}{\int \cdots \int} f(x) \mathrm{d}x = \underset{M_2}{\int \cdots \int} f(T(y))\ |\det(DT(y))|\ \mathrm{d}y$

Differentialgleichungen

Flow

1. DGL nicht linear $\Rightarrow$ TDV
2. DGL homogen $\Rightarrow$ char. Polynom, Grad 2
3. Sonst: Lösung raten

Trennung der Variablen (TDV)

1. Schreibe y' als $\frac{dy}{dt}$
2. Umstellen nach Termen mit y / ohne y
3. Beide Seiten getrennt integrieren
4. Konstanten bestimmen <wie Meth. 1>

Rezepte

1	$y'(t) = f(t) \cdot g(y(t))$	Funkt. f, g
2	$y'(t) + a(t) \cdot y(t) = 0$	Funkt. a
3	$y'(t) + a(t) \cdot y(t) = f(t)$	Funkt. a, f
4	$y''(t) + ay'(t) + by(t) = 0$	Konst. a, b
5	$y''(t) + ay'(t) + by(t) = p(t)$	Konst. a, b; Polyn. p
6	$y''(t) + ay'(t) + by(t) = e^{\alpha t}(a_1 \cos(\beta t) + a_2 \sin(\beta t))$	Konst. $\alpha, \beta, a_1, a_2, b \neq 0$

Meth. 1 $F(t) = \int f(t)\mathrm{d}t;\ G(t) = \int \frac{1}{g(t)\mathrm{d}t}$

Jede allgemeine Lsg für $y(t)$ erfüllt die Gleichung $G(y(t)) = F(t) + c$

Mit Anfangsbedingung erfüllt jede Lsg. $\int_{y_0}^{y(t)} \frac{1}{g(u)} \mathrm{d}u = \int_{x_0}^{t} f(u)\mathrm{d}u$

Meth. 2 $A(t) = \int a(t)\mathrm{d}t$; allgemeine Lsg. $y(t) = ce^{-A(t)}$

*Für **AWP**:* $y(t_0) = y_0 : y(t) = y_0 e^{A(t_0) - A(t)}$

Meth. 3 $A(t) = \int a(t)\mathrm{d}t; B(t) = \int e^{A(t)} \cdot f(t)\mathrm{d}t$

Allg. Lsg. $y(t) = e^{-A(t)} \cdot (c + B(t))$

*Für **AWP**:* $y(t_0) = y_0 : y(t) = e^{A(t_0) - A(t)}(y_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(s) - A(t_0)} \cdot f(s)ds)$

Meth. 4

- $a^2 > 4b$: Löse $\lambda_{1,2} = \lambda^2 + a\lambda + b = 0$ allg. Lsg.: $y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$
- $a^2 = 4b$: $\lambda = -\frac{a}{2}$ allg. Lsg.: $y(t) = (c_1 + c_2)e^{\lambda t}$
- $a^2 < 4b$: $\omega = \sqrt{b - (\frac{a}{2})^2}$ allg. Lsg.: $y(t) = (c_1 cos(\omega t) + c_2 sin(\omega t))e^{-\frac{a}{2}t}$

*Für **AWP**:* $y(t_0) = y_0, y'(t_1) = y_1$ setze $t = t_1, t = t_2$ in allg. Lösung ein und bestimme c_1, c_2

Meth. 5

1. Bestimme allg. Lsg. $y_h(t)$ von $y_h''(t) + ay_h'(t) + by_h(t) = 0$
2. Stelle Polyn. $q(t) = a_n t^n + \cdots + a_1 t + a_0$ mit Grad $n = deg(p)$ und Param. $a_0, \ldots, a_n$ auf
3. $y_p(t) = \begin{cases} q(t) & b \neq 0 \\ tq(t) & a \neq 0, b = 0 \\ t^2 q(t) & a = 0, b = 0 \end{cases}$ in Abhängigkeit von $a_0, \ldots, a_n$; $y_p''(t) + ay_p'(t) + by_p(t) = p(t)$
4. Ermittle $a_1, \ldots, a_n$ durch Koeffizientenvergleich
5. Allg. Lsg.: $y(t) = y_h(t) + y_p(t)$

*Für **AWP**:* $y(t_0) = y_0, y'(t_1) = y_1$ setze $t = t_1, t = t_2$ in allg. Lösung ein und bestimme c_1, c_2

Meth. 6

1. Bestimme allg. Lsg. $y_h(t)$ von $y_h''(t) + ay_h'(t) + by_h(t) = 0$
2. Löse $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$
3. In Abhängigkeit von k: $$y_p(t) = \begin{cases} ke^{ct} & \lambda_1 \neq c \neq \lambda_2 \\ kte^{ct} & \lambda_1 = c \neq \lambda_2 \text{ oder } \lambda_1 \neq c = \lambda_2 \\ kt^2 e^{ct} & \lambda_1 = c = \lambda_2 \end{cases}$$
4. $y_p''(t) + ay_p'(t) + by_p(t) = e^{ct}$ ermittle k
5. Allg. Lsg.: $y(t) = y_h(t) + y_p(t)$

*Für **AWP**:* $y(t_0) = y_0, y'(t_1) = y_1$ setze $t = t_1, t = t_2$ in allg. Lösung ein und bestimme c_1, c_2

Mehrdimensionale DGLs $\{v_1, \ldots, v_n\} \subset \mathbb{R}^n$ Basis von Eigenvektoren von $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ zu EW $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$

Lin. unabh. Lösungen v. DGL der Form $y' = Ay$: $y = e^{\lambda_j t} v_j$

Satz von Picard-Lindelöf f stetig diff'bar bzgl. y, stetig in t $\Rightarrow$ AWP $y' = f(t,y), y(t_0) = y_0$ auf $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ besitzt genau eine Lösung (für $\varepsilon > 0$ klein genug)

Komplexe Zahlen

$\mathbb{C} = \{z | z = x + iy, x, y \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$

- $z_1 + z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$
- $z_1 \cdot z_2 = x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$
- $\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{z_1 \overline{z_2}}{|z_2|^2}$
- $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z \cdot \overline{z}}$
- $\varphi = \arctan(\frac{x}{y})$, $r = |z|$, $x = r \cdot \cos(\varphi)$, $y = r \cdot \sin(\varphi)$
- $\overline{z} = x - iy$
- $z = r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)) = r \cdot e^{i\varphi}$

Koordinatentransformation

2D - Kreiskoordinaten

$(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}) \mapsto r \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix}, \quad dxdy \mapsto r \cdot d\varphi dr$

3D - Kugelkoordinaten

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto r \begin{pmatrix} \sin(\theta)\cos(\varphi) \\ \sin(\theta)\sin(\varphi) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix}, \quad dxdydz \mapsto r^2 \sin(\theta) dr d\theta d\varphi$

3D - Zylinderkoordinaten

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} r \cdot \cos(\varphi) \\ r \cdot \sin(\varphi) \\ z \end{pmatrix}, \quad dxdydz \mapsto r \cdot dr d\varphi dz$

Sonstiges

Bekannte Abl. und Integrale

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$f(x)$	$\int f(x)\mathrm{d}x$
$\frac{1}{\cos^2(x)}$	$\tan(x)$	$-\ln(\cos(x))$
$\cosh(x)$	$\sinh(x)$	$\cosh(x)$
$\frac{1}{\cosh^2(x)}$	$\tanh(x)$	$\ln(\cosh(x))$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x)$	$\sqrt{1-x^2} + x\sin^{-1}(x)$
$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos(x)$	$x\ \arccos^{-1}(x) - \sqrt{1-x^2}$
$\frac{1}{x^2+1}$	$\arctan(x)$	$x\ \tan^{-1}(x) - \frac{1}{2}\ln(x^2+1)$
$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$arcsinh(x)$	$x\sinh^{-1}(x) - \sqrt{x^2+1}$
$\frac{1}{\sqrt{x-1}\sqrt{x+1}}$	$arccosh(x)$	$x\cosh^{-1}(x) - \sqrt{x-1}\sqrt{x+1}$
$\frac{1}{1-x^2}$	$arctanh(x)$	$\frac{1}{2}\ln(1-x^2) + x\tanh^{-1}(x)$
$\cos(2x)$	$\sin(x)\cos(x)$	$-\frac{1}{2}\cos^2(x)$
$\sin(2x)$	$\sin^2(x)$	$\frac{1}{2}(x - \sin(x)\cos(x))$
$-2\sin(x)\cos(x)$	$\cos^2(x)$	$\frac{1}{2}(x + \sin(x)\cos(x))$
$\frac{1}{x}$	$\ln(x)$	$x \cdot \ln(x) - x$
$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	$\sqrt{1-x^2}$	$\frac{1}{2}(\sqrt{1-x^2}x + \sin^{-1}(x))$

Landau-Notation

- $f \in \mathcal{O}(g) \leftrightarrow \lim_{n \to a} \frac{|f(x)|}{g(x)} < \infty$
- $f \in o(g) \leftrightarrow \lim_{n \to a} \frac{|f(x)|}{g(x)} = 0$
- $f \in \Omega(g) \leftrightarrow \lim_{n \to a} \frac{g(x)}{|f(x)|} < \infty$
- $f \in \omega(g) \leftrightarrow \lim_{n \to a} \frac{g(x)}{|f(x)|} = 0$

Bekannte Reihen

Harmonische Reihe	$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty$
	$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^a}$ div. für $a \leq 1$, konv. sonst
Potenzreihe	$\sum_{k=1}^{\infty} a_0 q^k = \frac{a_0}{1-q}\ \forall |q| < 1$
Logarithmusreihe	$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} = \ln(1+x)$
Arcus-Tangens-Reihe	$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} = \arctan(x)$ in $[-1,1]$
Exponentialreihe	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = exp(z)$
	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e$
Binomialreihe	$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = (1+x)^{\alpha}$

Allgemeines

- $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{n} = 1$
- $\lim_{k \to \infty} (\frac{k}{k+1})^k = \frac{1}{e}$
- $k! \geq 2^{n+1}$
- $x > 0 \Rightarrow e^x > \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$
- $||a| - |b|| \leq |a - b| \leq |a| + |b|$, $|a + b| \leq |a| + |b|$
- $\forall n > 0 : (1+x)^n \geq 1 + nx$ (Bernoulli-Ungleichung)