Folgen

Def: 2.2 - Grenzwert einer reellen Folge

- $a \in \mathbb{R}$ Grenzwert von $(a_n) \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : |a_n - a| < \epsilon$
- Existiert $a \in \mathbb{R}$ Grenzwert $\Rightarrow (a_n)$ konvergent, sonst (a_n) divergent

Satz 2.3 - Rechenregeln fr Grenzwerte $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reelle Folgen, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$

- Folge $(a_n + b_n)$ konvergiert gegen $a + b$
- Folge $(a_n \cdot b_n)$ konvergiert gegen $a \cdot b$
- $b \neq 0 \Rightarrow (\frac{a_n}{b_n})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen $\frac{a}{b}$
- $a_n \leq b_n$ fr fast alle $n \in \mathbb{N} \to a \leq b$
- **Einschlieungskriterium** $a = b$, c reelle Folge und $a_n \leq c_n \leq b_n$ fr fast alle $n \in \mathbb{N} \Rightarrow (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen a

Spezialfall des Einschlieungskriteriums: $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} Folge, x \in R, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Nullfolge, sodass $|x_n - x| \leq y_n$ fr fast alle $n \Rightarrow (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen x

Satz 2.4 - Eigenschaften konvergenter Folgen Sei a_n konvergente reelle Folge

- (a_n) beschrnkt
- (a_n) besitzt genau einen Grenzwert

Def: 2.5 - Uneigentliche Konvergenz $(a_n)_{a\in\mathbb{N}}$ konvergiert uneigentlich gegen $\infty \Leftrightarrow \forall K > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : a_n > K$
$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert uneigentlich gegen $-\infty \Leftrightarrow (-a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert uneigentlich gegen ∞

Satz 2.6 - Rechenregeln fr uneigentliche Konvergenz $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reelle Folge, $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n)_{n\in\mathbb{N}} = \infty$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reelle Folge, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a, a \in \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$

- $a \neq -\infty \Rightarrow (a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert uneigentlich gegen ∞
- $a \neq 0 \Rightarrow (a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert uneigentlich
- $a > 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = \infty$
- $a < 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = -\infty$
- $a \notin \{\infty, -\infty\} \Rightarrow (\frac{a_n}{b_n})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen 0

Def 2.7 - Monotone Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reelle Folge heit

- monoton wachsend, falls $a_{n+1} \geq a_n \forall n \in \mathbb{N}$
- streng monoton wachsend, falls $a_{n+1} > a_n \forall n \in \mathbb{N}$
- monoton fallend, falls $a_{n+1} \leq a_n \forall n \in \mathbb{N}$
- streng monoton fallend, falls $a_{n+1} < a_n \forall n \in \mathbb{N}$

Satz 2.8 - Monotoniesatz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reelle Folge, wachsend und nach oben beschrnkt $\Rightarrow (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent und $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = sup_{n\in\mathbb{N}} a_n := sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$

Def 2.9 Hufungspunkt a $\in \mathbb{R}$ Hufungspunkt $\Leftrightarrow \exists (a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die gegen a konvergiert.

Satz von Bolzano-Weierstra Jede beschrnkte reelle Folge $(an)_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt eine konvergente Teilfolge und hat also mindestens einen Hufungspunkt.

Def 2.11 - Limes superior, limes inferior $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach oben (unten) beschnkt $\Rightarrow$ grter (kleinster) Hufungspunkt: **Limes superior (inferior)**

Komplexe und mehrdimensionale Folgen

Def 3.1 Grenzwert komplexer Folgen z GW von $(z_n) \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : |z_n - z| < \epsilon$
$\exists GW \Leftarrow z_n$ konvergent

Konvergenz $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} = a_n + ib_n : \lim\limits_{n\to\infty} z_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + i \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = v \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} ||v_n - v||_2 = 0$

Reihen