Folgen

Def: 2.2 - Grenzwert einer reellen Folge

- $a \in \mathbb{R}$ Grenzwert von $(a_n) \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : |a_n - a| < \epsilon$
- Existiert $a \in \mathbb{R}$ Grenzwert $\Rightarrow (a_n)$ konvergent, sonst (a_n) divergent

Satz 2.3 - Rechenregeln für Grenzwerte $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reelle Folgen, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$

- Folge $(a_n + b_n)$ konvergiert gegen $a + b$
- Folge $(a_n \cdot b_n)$ konvergiert gegen $a \cdot b$
- $b \neq 0 \Rightarrow (\frac{a_n}{b_n})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen $\frac{a}{b}$
- $a_n \leq b_n$ für fast alle $n \in \mathbb{N} \to a \leq b$
- **Einschließungskriterium** $a = b$, c reelle Folge und $a_n \leq c_n \leq b_n$ für fast alle $n \in \mathbb{N} \Rightarrow (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen a

Spezialfall des Einschließungskriteriums:
$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} Folge, x \in R, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Nullfolge, sodass $|x_n - x| \leq y_n$ für fast alle $n \Rightarrow (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen x

Satz 2.4 - Eigenschaften konvergenter Folgen Sei a_n konvergente reelle Folge

- (a_n) beschränkt
- (a_n) besitzt genau einen Grenzwert

Def: 2.5 - Uneigentliche Konvergenz $(a_n)_{a\in\mathbb{N}}$ konvergiert uneigentlich gegen $\infty \Leftrightarrow \forall K > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : a_n > K$
$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert uneigentlich gegen $-\infty \Leftrightarrow (-a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert uneigentlich gegen ∞

Satz 2.6 - Rechenregeln für uneigentliche Konvergenz $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reelle Folge, $\lim\limits_{n\to\infty} (b_n)_{n\in\mathbb{N}} = \infty$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reelle Folge, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a, a \in \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$

- $a \neq -\infty \Rightarrow (a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert uneigentlich gegen ∞
- $a \neq 0 \Rightarrow (a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert uneigentlich
- $a > 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = \infty$
- $a < 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = -\infty$
- $a \notin \{\infty, -\infty\} \Rightarrow (\frac{a_n}{b_n})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen 0

Def 2.7 - Monotone Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reelle Folge heißt

- monoton wachsend, falls $a_{n+1} \geq a_n \forall n \in \mathbb{N}$
- streng monoton wachsend, falls $a_{n+1} > a_n \forall n \in \mathbb{N}$
- monoton fallend, falls $a_{n+1} \leq a_n \forall n \in \mathbb{N}$
- streng monoton fallend, falls $a_{n+1} < a_n \forall n \in \mathbb{N}$

Satz 2.8 - Monotoniesatz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reelle Folge, wachsend und nach oben beschränkt $\Rightarrow (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent und $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = sup_{n\in\mathbb{N}} a_n := sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$

Def 2.9 Häufungspunkt a $\in \mathbb{R}$ Häufungspunkt $\Leftrightarrow \exists (a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die gegen a konvergiert.

Satz von Bolzano-Weierstraß Jede beschränkte reelle Folge $(an)_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt eine konvergente Teilfolge und hat also mindestens einen Häufungspunkt.

Def 2.11 - Limes superior, limes inferior $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach oben (unten) beschänkt $\Rightarrow$ größter (kleinster) Häufungspunkt: *Limes superior (inferior)*

Komplexe und mehrdimensionale Folgen

Def 3.1 Grenzwert komplexer Folgen z GW von $(z_n) \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : |z_n - z| < \epsilon$
$\exists GW \Leftarrow z_n$ konvergent

Konvergenz $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} = a_n + ib_n : \lim\limits_{n\to\infty} z_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + i \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = v \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} ||v_n - v||_2 = 0$

Reihen

Def 2.2 - Folgen Grenzwert in $\mathbb{R}$ a Grenzwert von $(a_n) \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall b \geq n_0 : |a_n - a| < \epsilon$

Nullfolge $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n) \to 0$

Rechenregeln Grenzwerte

- $(a_n + b_n) \to a + b$
- $(a_n \cdot b_n) \to a \cdot b$
- $b \neq 0 \Rightarrow (\frac{a_n}{b_n}) \to \frac{a}{b}$
- **Einschließungskriterium:** $a = b \wedge a_n \leq c_n \leq b_n$ für fast alle $n \in \mathbb{N} \Rightarrow c_n \to a$

Eigenschaften konvergenter Folgen (a_n) beschränkt $\Rightarrow \{a_n : n \in \mathbb{N}\} beschrnkt \wedge \exists!$ ein GW

Uneigentliche Konvergenz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent $\Rightarrow (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert uneig. gg. $\infty \Leftrightarrow \forall K > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : a_n > K$

Rechenregeln uneig. Konvergenz

- $a \neq -\inf \Rightarrow (a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}} \to \infty$
- $a \neq 0 \Rightarrow (a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert
- $a \notin \{-\infty, \infty\} \vee (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt $\Rightarrow (\frac{a_n}{b_n})_{n\in\mathbb{N}} \to 0$

Monotone Folge (a_n) monoton wachsend, falls $a_{n+1} \geq a_n \forall n \in \mathbb{N}$. (Äquivalent für $>, <, \leq$)

Monotoniesatz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend $\wedge$ nach oben beschränkt $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n = sup\ \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$

Teilfolge, Häufungspunkte $(a_n)_{a\in\mathbb{N}}$ reelle Folge:

- $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ streng monoton wachsend in $\mathbb{N} \Rightarrow (a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$
- $a \in \mathbb{R}$ Häufungspunkt von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \Leftrightarrow \exists$ Teilfolge, die gg. a konvergiert

Satz v. Bozano-Weierstraß Jede beschränkte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt eine konvergente Teilfolge und hat min. einen Häufungspunkt

Limes superior, Limes inferior $(a_n)_{a\in\mathbb{N}}$ reelle Folge: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach oben (unten) beschränkt $\to$ Bez. größter (kleinster) Häufungspunkt: Limes superior (inferior)

Komplexe und mehrdimensionale Folgen

Grenzwert komplexer Folgen z GW von $(z_n) \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : |z_n - z| < \epsilon$. Existiert $z \Leftarrow (z_n)$ konvergent.

Konvergenz komplexer Folgen

- $z_n = a_n + ib_n$ konvergiert $\Leftrightarrow a_n$ und b_n konvergieren
- z_n konvergent $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} z_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + i \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

Grenzwert mehrdimensionaler Folgen $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = v \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \|v_n - v\|_2 = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \|v_n - v\|_\infty = 0$

Reihen

Konvergenz $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent gg. $s \in \mathbb{C} \Leftrightarrow$ Folge der Partialsummen gg. s konvergiert

Majoranten- & Minorantenkriterium $b_n := \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k; (b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ relle Folge; $a_s := \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k, |(a_n)_{n\in\mathbb{N}}| \leq b_k$ für fast alle $k \in \mathbb{N}$

- b_s konvergiert $\Rightarrow a_s$ konvergiert absolut
- a_s divergiert $\Rightarrow b_s$ divergiert

Quotientenkriterium $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k, a \neq 0$ für fast alle $k \in \mathbb{N} \wedge \lim\limits_{n\in\mathbb{N}} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| := q$ existiert $\Rightarrow$ (*)

Wurzelkriterium $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k;\ a_k \in \mathbb{C} : q := \limsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} \Rightarrow$ (*)

(*)

- $q < 1 \Rightarrow$ Reihe konvergiert absolut
- $q > 1 \Rightarrow$ Reihe divergiert

Leibnitz-Kriterium $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ relle, monoton fallende Nullfolge $\Rightarrow \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} |\sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k - s_n| \leq a_{n+1}$

Umordnungssatz

- Jede Umordnung einer konvergenten Reihe konvergiert gegen denselben Wert
- Konvergiert eine Reihe aus reellen Summanden, aber nicht absolut $\Rightarrow \forall s \in \mathbb{R} \exists$ bijektive Abbildung $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$: die umgeordnete Reihe konvergiert gegen s

Potenzreihe $P(z) := \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k; c_k \in \mathbb{C}; z \in \mathbb{C}$

$R := \dfrac{1}{\limsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|}}$

Cauchy-Produkt

- Seien $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$, $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k$ absolut konvergent $\in \mathbb{C} \Rightarrow (\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k)(\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k) = (\sum\limits_{m=0}^{\infty} c_m)$ mit $c_m = (\sum\limits_{k=0}^{m} a_k b_{m-k})$ mit c_k konvergent.
- Seien $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k z^k$, $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ zwei Potenzreihen mit Konvergenzradien R_a und $R_b \Rightarrow (\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k z^k)(\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k z^k) = (\sum\limits_{m=0}^{\infty} c_m z^m)$ mit $c_m = \sum\limits_{k=0}^{m} a_k m_{m-k}$

Natürliche Exponentialfunktion $exp(z) := \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{z^k}{k!}$

Eigenschaften von exp $\forall z, w \in \mathbb{C}, x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$

- $\exp(z + w) = \exp(z) \cdot \exp(w)$
- $\exp(-z) = \frac{1}{\exp(z)}, \exp(z) \neq 0 \wedge \exp(\overline{z}) = \exp(z)$
- $|e^{ix}| = 1$
- $\lim\limits_{n\to\infty} (1 + \frac{z}{n})^n = \exp(z)$
- $|\exp(z) - \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{z^k}{k!}| \leq 2 \cdot \dfrac{|z|^{n+1}}{(n+1)!}$
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x\to\infty} x^{-n} e^x = \infty$
- $\lim\limits_{x\to\infty} x^n e^x = 0$

Trigonometrische Funktionen $\cos(z) := \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \dfrac{z^{2k}}{(2k)!}$
$\sin(z) := \dfrac{e^{iz} - e{-iz}}{2i} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}$

Eigenschaften v. sin, cos, tan $\forall z, w \in \mathbb{C}, x \in \mathbb{R}$

- $\exp(iz) = \cos(z) + i \sin(w)$
- $(\sin(z))^2 + (\cos(z))^2 = 1$
- $\sin(z + w) = \sin(z)\cos(w) + \cos(z)\sin(w)$
- $cos(z + w) = \cos(z)\sin(w) - \sin(z)\sin(w)$
- $\cos(x) = Re(e^{ix})\ \sin(x) = Im(e^{ix})$
- $z = \tan(c) : \arctan'(z) = \frac{1}{\tan'(c)} = \frac{1}{1+(\tan(c))^2} = \frac{1}{1+z^2}$

	0	$\frac{\pi}{6} = 30°$	$\frac{\pi}{4} = 45°$	$\frac{\pi}{3} = 60°$	$\frac{\pi}{2} = 90°$
sin	$\frac{\sqrt{0}}{2} = 0$	$\frac{\sqrt{1}}{2} = \frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2} = 1$
cos	$\frac{\sqrt{4}}{2} = 1$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{1}}{2} = \frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{0}}{2} = 0$

Stetigkeit

Rechenregeln $D \subseteq \mathbb{R}; f, g : D \to \mathbb{R}; f, g$ stetig in $c \Rightarrow f + g, f \cdot g, \frac{f}{g}$ $(g \neq 0)$ stetig in c

Komposition $D, D' \subseteq \mathbb{R}, f : D \to \mathbb{R}$ stetig in c

- $y := f(c) \in D' \wedge g$ stetig in $y \Rightarrow (g \circ f) : D \to \mathbb{R}$ stetig in c
- f, g stetig $\wedge f(D) \subseteq D' \Rightarrow (g \circ f) : D \to \mathbb{R}$ stetig

ϵ-δ-Charakterisierung $D \subseteq \mathbb{R}, f \to \mathbb{R}, c \in D \Rightarrow f$ stetig in $c \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in D : |x - c| < \delta : |f(x) - f(c)| < \epsilon$

Zwischenwertsatz $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig $\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}$ mit $\min\{f(a), f(b)\} \leq y \leq \max\{f(a), f(b)\} : \exists x \in [a, b] : f(x) = y$

Satz v. Max. und Min. $[a, b]$ beschränkt, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig

- f beschränkt
- $\exists x_{\max}, x_{\min} \in [a, b] : f(x_{\max}) = \sup\{f(x) : x \in [a, b]\} \wedge f(x_{\min} = \inf\{f(x) : x \in [a, b]\}$

Stetigkeit in $\mathbb{C}$ & $\mathbb{R}^n$ wörtlich übertragbar
$D \subseteq \mathbb{C}$ oder $D \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschlossen: $\forall f : D \to \mathbb{C}$ bzw. $f : D \to \mathbb{R}^m$ beschränkt und nimmt auf D Maximum und Minimum an

Stetigkeit von Potenzreihen $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ mit Konvergenzradius $R \Rightarrow f : \{z : |z| < R\} \to \mathbb{C}$ stetig

Differenziation

Definition $I \subseteq \mathbb{R}, f : I \to \mathbb{R}$

- $f'(c) := \lim\limits_{x\to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$
- f stetig diff'bar $\Leftrightarrow f'$ stetig

Diff'barkeit $\Rightarrow$ Stetigkeit f diffbar in c $\Rightarrow f$ in c stetig

Monotonie & Umkehrbarkeit

- f stetig: f injektiv $\Leftrightarrow f$ streng monoton wachsend oder fallend
- f außerdem surjektiv $\Rightarrow f^{-1}$ stetig $\wedge$ monoton wachsend / fallend

Differentiation v. f^{-1} f bijektiv, $f'(c) \neq 0 \Rightarrow z := f(c)$ diff'bar, $(f^{-1})'(z) = \frac{1}{f'(c)}$

Logarithmus $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

Diff. v. Potenzreihen $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \in \mathbb{R} : f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^{k-1}$

Höhere Ableitungen $\mathscr{C}^n(I)$: Vektorraum aller n-mal stetig diff'baren Funktionen $f : I \to \mathbb{R}$

Extrema

- **lokales Maximum** $\Leftrightarrow \epsilon > 0 : f(c) \geq f(x) \forall x \in (c-\epsilon, c+\epsilon) \cap I$
- **lokales Minimum** $\Leftrightarrow \epsilon > 0 : f(c) \leq f(x) \forall x \in (c-\epsilon, c+\epsilon) \cap I$
- **isoliertes lok. Max/Min** $\Leftrightarrow$ Max/min $\wedge x \neq c$
- **globales Max (Min)** $f(x) \geq (\leq) f(c)$