

Reelle Zahlen

$(K, +, \cdot)$ angeordneter Körper, $X \subset K$ nicht leer

- Sup, Inf, Max, Min**
- $s \in K$ **sup(X)** \Leftrightarrow s kleinste obere Schranke
- $s \in K$ **inf(X)** \Leftrightarrow s größte untere Schranke
- $s \in K$ **max(X)** $\Leftrightarrow s = \sup(X) \wedge s \in K$
- $s \in K$ **min(X)** $\Leftrightarrow s = \inf(X) \wedge s \in K$

ε –**Charakterisierung des Supremums**
 $s = \sup(X) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in X : s - \varepsilon < x \leq s$
Entsprechendes gilt für das Infimum

- Rechenregeln für sup** $X, Y \subset \mathbb{R}$ nach oben beschränkt:
 - $\sup(X + Y) = \sup(X) + \sup(Y)$
 - $\lambda > 0 \Rightarrow \sup(\lambda X) = \lambda \sup(X)$
 - $X, Y \subset [0, \infty) \Rightarrow \sup(X) \cdot \sup(Y)$
 - $X \subset Y \Rightarrow \sup(X) \leq \sup(Y)$

- Archimedische Anordnung**
- \mathbb{R} archimedisch angeordnet $\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \ \exists n \in \mathbb{N} : n > x$
- $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} < \varepsilon$
- $\forall a, b \in \mathbb{R} : a < b : \exists q \in \mathbb{Q} : a < q < b$

Folgen

Def: 2.2 - Grenzwert einer reellen Folge

- $a \in \mathbb{R}$ Grenzwert von $(a_n) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0 : |a_n - a| < \varepsilon$
- Existiert $a \in \mathbb{R}$ Grenzwert $\Rightarrow (a_n)$ konvergent, sonst (a_n) divergent

- Nullfolge** $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) \rightarrow 0$

- Satz 2.3 - Rechenregeln für Grenzwerte**
 $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ reelle Folgen, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$
 - Folge $(a_n + b_n)$ konvergiert gegen $a + b$
 - Folge $(a_n \cdot b_n)$ konvergiert gegen $a \cdot b$
 - $b \neq 0 \Rightarrow (\frac{a_n}{b_n})_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen $\frac{a}{b}$
 - $a_n \leq b_n$ für fast alle $n \in \mathbb{N} \rightarrow a \leq b$
 - Einschließungskriterium**
 $a = b \wedge a_n \leq c_n \leq b_n$ für fast alle $n \in \mathbb{N} \Rightarrow c_n \rightarrow a$
Spezialfall des Einschließungskriteriums:
 $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *Folge*, $x \in \mathbb{R}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Nullfolge, sodass $|x_n - x| \leq y_n$ für fast alle $n \Rightarrow (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen x

- Satz 2.4 - Eigenschaften konvergenter Folgen**
Sei a_n konvergente reelle Folge
 $\Rightarrow (a_n)$ beschränkt $\wedge (a_n)$ besitzt genau einen Grenzwert

- Def: 2.5 - Uneigentliche Konvergenz**
- $(a_n)_{a \in \mathbb{N}}$ konvergiert uneigentlich gegen $\infty \Leftrightarrow \forall K > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0 : a_n > K$
- $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert uneigentlich gegen $-\infty \Leftrightarrow (-a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert uneigentlich gegen ∞

- Satz 2.6 - Rechenregeln für uneigentliche Konvergenz**
 $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ reelle Folgen
 $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n)_{n \in \mathbb{N}} = \infty, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, a \in \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$
 - $a \neq -\inf \Rightarrow (a_n + b_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow \infty$
 - $a \neq 0 \Rightarrow (a_n \cdot b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert uneigentlich
 - $a > 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \infty$
 - $a < 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = -\infty$
 - $a \notin \{-\infty, \infty\} \vee (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt $\Rightarrow (\frac{a_n}{b_n})_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow 0$

- Def 2.7 - Monotone Folgen** $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ reelle Folge heißt
 - monoton wachsend, falls $a_{n+1} \geq a_n, \forall n \in \mathbb{N}$
 - streng monoton wachsend, falls $a_{n+1} > a_n, \forall n \in \mathbb{N}$
 - monoton fallend, falls $a_{n+1} \leq a_n, \forall n \in \mathbb{N}$
 - streng monoton fallend, falls $a_{n+1} < a_n, \forall n \in \mathbb{N}$

- Monotoniesatz** $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton wachsend \wedge nach oben beschränkt $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n = \sup \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$

- Def 2.9 Häufungspunkt** $a \in \mathbb{R}$ Häufungspunkt $\Leftrightarrow \exists (a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ Teilfolge von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, die gegen a konvergiert.

- Satz v. Bolzano-Weierstraß**
Jede beschränkte Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ besitzt eine konvergente Teilfolge und hat min. einen Häufungspunkt

- Def 2.11 - Limes superior, limes inferior** $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nach oben (unten) beschränkt \Rightarrow größter (kleinster) Häufungspunkt: *Limes superior (inferior)*

Komplexe und mehrdimensionale Folgen

- Grenzwert komplexer Folgen**
 z GW von $(z_n) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0 : |z_n - z| < \varepsilon$
Existiert $z \Rightarrow (z_n)$ konvergent gegen z .

- Konvergenz komplexer Folgen**
 - $z_n = a_n + ib_n$ konvergiert $\Leftrightarrow a_n$ und b_n konvergieren
 - z_n konvergent $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + i \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$
- z_n konvergent $\Rightarrow |z_n|$ konvergent

- Grenzwert mehrdimensionaler Folgen**
 - z_n konvergent $\Leftrightarrow \forall i \in [0, n] : z_i$ konvergent
 - $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = v \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \|v_n - v\|_2 = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \|v_n - v\|_\infty = 0$
- Reihen**
- Konvergenz** $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent gg. $s \in \mathbb{C} \Leftrightarrow$ Folge der Partialsummen gg. s konvergiert

- Teilfolge, Häufungspunkte** $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ reelle Folge:
 - $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ streng monoton wachsend in $\mathbb{N} \Rightarrow (a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ Teilfolge von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$
 - $a \in \mathbb{R}$ Häufungspunkt von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \Leftrightarrow \exists$ Teilfolge, die gg. a konvergiert

- Majoranten- & Minorantenkriterium**
 $a_n := \sum_{k=0}^\infty a_k; b_n := \sum_{k=0}^\infty b_k; (a_k)_{k \in \mathbb{N}}, (b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ relle Folgen, $|(a_k)| \leq b_k$ für fast alle $k \in \mathbb{N}$
 - b_s konvergiert $\Rightarrow a_s$ konvergiert absolut
 - a_s divergiert $\Rightarrow b_s$ divergiert

- Quotientenkriterium**
 $\sum_{k=0}^\infty a_k, a_k \neq 0$ für fast alle $k \in \mathbb{N}, \lim_{n \rightarrow \infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| := q$ existiert $\Rightarrow \otimes$

- Wurzelkriterium**
 $\sum_{k=0}^\infty a_k, a_k \in \mathbb{C} : q := \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} \Rightarrow \otimes$

- \otimes
- $q < 1 \Rightarrow$ Reihe konvergiert absolut
- $q > 1 \Rightarrow$ Reihe divergiert

- Leibniz-Kriterium** $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ relle, monoton fallende Nullfolge $\Rightarrow \sum_{k=0}^\infty (-1)^k a_k \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} |\sum_{k=0}^\infty (-1)^k a_k - s_n| \leq a_{n+1}$
Anm. $\sum_{k=0}^\infty x_n$ konvergiert $\Rightarrow x_n$ Nullfolge

- Integralvergl.-Kriterium** $f : (a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^+$ monoton fallend: $\sum_{k=0}^\infty f(k)$ konv. $\Leftrightarrow \int_a^\infty f(k)dk < \infty$

- Umordnungssatz**
 - Jede Umordnung einer konv. Reihe konv. gg. denselben Wert
 - Konvergiert eine Reihe aus reellen Summanden, aber nicht absolut $\Rightarrow \forall s \in \mathbb{R} \ \exists$ bijektive Abbildung $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$: die umgeordnete Reihe konvergiert gegen s

- Potenzreihe** $P(z) := \sum_{k=0}^\infty c_k z^k; c_k \in \mathbb{C}; z \in \mathbb{C}$
 $R := \frac{1}{\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|}} = \lim_{k \rightarrow \infty} |\frac{a_k}{a_{k+1}}|$ Konvergenzradius

- $|z| < R \Rightarrow P(z)$ konvergiert
- $|z| > R \Rightarrow P(z)$ divergiert

- Cauchy-Produkt**
 - $\sum_{k=0}^\infty a_k, \sum_{k=0}^\infty b_k$ absolut konvergent $\in \mathbb{C} \Rightarrow (\sum_{k=0}^\infty a_k)(\sum_{k=0}^\infty b_k) = (\sum_{m=0}^\infty c_m)$ mit $c_m = (\sum_{k=0}^m a_k b_{m-k})$ mit c_k absolut konvergent.
 - Seien $\sum_{k=0}^\infty a_k z^k, \sum_{k=0}^\infty b_k z^k$ zwei Potenzreihen mit Konvergenzradien R_a und $R_b \Rightarrow (\sum_{k=0}^\infty a_k z^k)(\sum_{k=0}^\infty b_k z^k) = (\sum_{m=0}^\infty c_b z^m)$ mit $c_m = \sum_{k=0}^m a_k b_{m-k}$ und Konvergenzradius $\min\{R_a, R_b\}$

- Natürliche Exponentialfunktion**
 $exp(z) := \sum_{k=0}^\infty \frac{z^k}{k!}$

- Eigenschaften von exp** $\forall z, w \in \mathbb{C}, x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$
 - $\exp(z + w) = \exp(z) \cdot \exp(w)$
 - $\exp(-z) = \frac{1}{\exp(z)}, \exp(z) \neq 0 \wedge \exp(\overline{z}) = \exp(z)$

- $|\exp(z) - \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!}| \leq 2 \cdot \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!}$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{z}{n})^n = \exp(z)$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0$

- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty$
- $e^{i \frac{\pi}{2}} = i$
- $e^{i \pi} = -1$
- $e^{z+2\pi i} = e^z$
- $e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x)$
- $|e^{ix}| = 1$

- Trigonometrische Funktionen**
 $\sin(z) := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \sum_{k=0}^\infty (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \mathcal{O}(x^7)$
 $\cos(z) := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \sum_{k=0}^\infty (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^6}{720} + \mathcal{O}(x^7)$
 $\tan(x) := \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \arcsin(x) = x + \frac{x^6}{6} + \frac{3x^5}{40} + \mathcal{O}(x^7)$
 $\arccos(x) = \frac{\pi}{2} - x - \frac{x^3}{6} - \frac{3x^5}{40} + \mathcal{O}(x^7)$
 $\arctan(x) := \sum_{k=0}^\infty (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \mathcal{O}(x^7)$
 $\sinh(x) := \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \sum_{k=0}^\infty \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \mathcal{O}(x^7)$
 $\cosh(x) := \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \sum_{k=0}^\infty \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^6}{720} + \mathcal{O}(x^7)$
 $\tanh(x) := \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \mathcal{O}(x^7)$

- Eigenschaften von sin, cos, tan** $\forall z, w \in \mathbb{C}, x \in \mathbb{R}$
 - $\sin(z + w) = \sin(z) \cos(w) + \cos(z) \sin(w)$
 - $\sin(2z) = 2 \sin(z) c \cos(z)$
 - $\cos(z + w) = \cos(z) \cos(w) - \sin(z) \sin(w)$
 - $\cos(x) = Re(e^{ix}), \sin(x) = Im(e^{ix})$
 - $\cos(2z) = \cos^2(z) - \sin^2(z)$
 - $\sin^2(z) + \cos^2(z) = 1$
 - $\arccos(x) + \arcsin(x) = \frac{\pi}{2}$
 - $z = \tan(c) : \arctan'(z) = \frac{1}{\tan'(c)} = \frac{1}{1+(\tan(c))^2} = \frac{1}{1+z^2}$
 - $\cosh^2(x) = \frac{1}{2} \cosh(x) + \frac{1}{2}$
 - $\cosh^2(z) - \sinh^2(z) = 1$

	0	$\frac{\pi}{6} = 30^\circ$	$\frac{\pi}{4} = 45^\circ$	$\frac{\pi}{3} = 60^\circ$	$\frac{\pi}{2} = 90^\circ$
sin	$\frac{\sqrt{0}}{2} = 0$	$\frac{\sqrt{1}}{2} = \frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2} = 1$
cos	$\frac{\sqrt{4}}{2} = 1$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{1}}{2} = \frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{0}}{2} = 0$
sinh	0	\star	\star	\star	\star
cosh	1	\star	\star	\star	\star

Stetigkeit

- Definition**
 $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig in $c \Leftrightarrow \forall (x_n)$ mit $\lim_{x \rightarrow 0} x_n = c$ gilt $\lim_{x \rightarrow 0} f(x_n) = f(c)$

- Rechenregeln** $D \subseteq \mathbb{R}; f, g : D \rightarrow \mathbb{R}; f, g$ stetig in $c \Rightarrow f + g, f \cdot g, \frac{f}{g}, (\frac{f}{g} \neq 0)$ stetig in c

- Komposition** $D, D' \subseteq \mathbb{R}, f : D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig in c
 - $y := f(c) \in D' \wedge g$ stetig in $y \Rightarrow (g \circ f) : D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig in c
 - f, g stetig $\wedge f(D) \subseteq D' \Rightarrow (g \circ f) : D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig

- ε - δ -**Charakterisierung** $D \subseteq \mathbb{R}, f : D \rightarrow \mathbb{R}, c \in D \Rightarrow f$ stetig in $c \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in D : |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \varepsilon$

- Zwischenwertsatz** $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig $\Rightarrow \forall y \in \mathbb{R}$ mit $\min\{f(a), f(b)\} \leq y \leq \max\{f(a), f(b)\} : \exists x \in [a, b] : f(x) = y$

- Satz v. Max. und Min.** $[a, b]$ beschränkt, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig
 - f beschränkt
 - $\exists x_{\max}, x_{\min} \in [a, b] : f(x_{\max}) = \sup\{f(x) : x \in [a, b]\} \wedge f(x_{\min}) = \inf\{f(x) : x \in [a, b]\}$

- Stetigkeit in \mathbb{C} & \mathbb{R}^n** wörtlich übertragbar
 $D \subseteq \mathbb{C}$ bzw. \mathbb{R}^n abgeschlossen: $\forall f$ stetig : $D \rightarrow \mathbb{C}$ bzw. $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ beschränkt und nimmt auf D Maximum und Minimum an

- Stetigkeit von Potenzreihen**
 $f(z) = \sum_{k=0}^\infty c_k z^k \Rightarrow f : \{z : |z| < R\} \rightarrow \mathbb{C}$ stetig
- Differenziation**
- Definition** $I \subseteq \mathbb{R}, f : I \rightarrow \mathbb{R} \quad f'(c) := \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$

- Diff'barkeit \Rightarrow Stetigkeit** f diffbar in $c \Rightarrow f$ in \mathbb{C} stetig

- Monotonie & Umkehrbarkeit**
 - f stetig & injektiv $\Leftrightarrow f$ streng monoton wachsend oder fallend
 - f außerdem surjektiv $\Rightarrow f^{-1}$ stetig \wedge monoton wachsend / fallend

- Differentiation der Umkehrfunktion**
 f bijektiv, $f'(c) \neq 0 \Rightarrow z := f(c)$ diff'bar, $(f^{-1})'(z) = \frac{1}{f'(c)}$
- Logarithmus** $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

- Diff. v. Potenzreihen**
 $f(x) = \sum_{k=0}^\infty c_k x^k \in \mathbb{R} : f'(x) = \sum_{k=1}^\infty k c_k x^{k-1}, D = |R|$

- Höhere Ableitungen** $\mathcal{C}^n(I)$: Vektorraum aller n-mal stetig diff'baren Funktionen $f : I \rightarrow \mathbb{R}$

- Extrema**
 - lokales Maximum** $\Leftrightarrow \varepsilon > 0 : f(c) \geq f(x) \forall x \in (c - \varepsilon, c + \varepsilon) \cap I$
 - lokales Minimum** $\Leftrightarrow \varepsilon > 0 : f(c) \leq f(x) \forall x \in (c - \varepsilon, c + \varepsilon) \cap I$
 - isoliertes lok. Max/Min** $\Leftrightarrow \text{Max/min} \wedge x \neq c$
 - globales Max (Min)** $f(x) \geq (<) f(c)$

- Satz von Rolle** $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, f(a) = f(b) \Rightarrow \exists \xi \in (a, b) : f'(\xi) = 0$

- Hinreichend für Extrema** f diff'bar, $\exists c : f'(c) = 0$
 - f streng monoton wachsend um c \Rightarrow f in c isol. lok. Min.
 - $f \in \mathcal{C}^2, f''(c) > 0 \Rightarrow f$ in c isol. lok. Min.
 - f' um c str. monoton fallend $\Rightarrow f$ in c isol. lok. Max.
 - $f \in \mathcal{C}^2, f''(c) < 0 \Rightarrow f$ in c isol. lok. Max.

- Taylor**
 - $n \in \{\mathbb{N} \cup \infty\} : T_n f(x; c) := \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(c)}{k!} (x - c)^k$
 - $T_n(f \cdot g) = T_n f \cdot T_n g$
 - Potenzreihen: Das n-te Taylorpolynom (im Nullpunkt) von Potenzreihen ist deren n-te Partialsumme

- Lipschitz-Stetigkeit (LS)**
 $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ LS $\Leftrightarrow \exists L : |f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \ \forall x, y \in D$

- Umkehrfunktion** $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

- Integration**
- Riehmann-Integral**
 $\varphi \in \tau[a, b] : \int_a^b \varphi \, dx := \sum_{k=1}^n c_k (x_k - x_{k-1})$

- Stetigkeit & Monotonie \Rightarrow Integrierbarkeit** $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$
 - f stetig \vee f monoton $\Rightarrow f$ integrierbar
 - \exists Unterteilung v. $[a, b]$ stetig oder monoton $\Rightarrow f$ integrierbar

- Mittelwertsatz der Integralrechnung.**
 $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig: $\exists \xi \in [a, b] : \int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b - a)$

- Partielle Integration**
 $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig: $\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$

- Substitution** $\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)dy$

- Majorantenkriterium für Integrale**
 f über $[a, b]$ absolut integrierbar \Leftrightarrow
 - f in jedem Teilintervall $\in [a, b]$ integrierbar
 - $|f(x)| \leq g(x) \forall x \in [a, b)$
 - g über $[a, b)$ uneig. integrierbar

Folgerung z. uneig. Integrierbarkeit

- $f:[a,b]\rightarrow\mathbb{R}$ auf allen Teilintervallen $\in(a,b]$ integrierbar, $f(x)=\mathcal{O}(\frac{1}{|x-a|^s})$ für $x\rightarrow a$ mit $s\in[0,1)\Rightarrow f$ über $[a,b]$ uneig. integrierbar
- $f:[a,\infty)\rightarrow\mathbb{R}, a<b$ integrierbar, $f(x)=\mathcal{O}(\frac{1}{x^s})$ mit $x\rightarrow\infty, s>1\Rightarrow f$ über $[a,\infty]$ uneig. integrierbar

Integralvergl.krit. $f:[1,\infty)\rightarrow\mathbb{R}$ monoton fallend, $\forall x:f(x)>0, f$ über $[1,\infty]$ uneig. integr. $\Rightarrow\sum_{k=1}^{\infty}f(k)$ konvergiert

Potenzreihen

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^k\Rightarrow\int f(x)dx=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k+1}c_kx^{k+1}$$

Kurven

Diff'bare Kurven

- k regulär in $t\Leftrightarrow k'(t)\neq 0$, sonst singulär
- k singulär in t $\Rightarrow \nexists$ Tangentialvektor
- $k'(t)=(k_1'(t),...,)$ Tangentialvektor
- $T_k(t)=\frac{k'(t)}{\|k'(t)\|_2}$ Tangentialeinheitsvektor in t

- $N(t)=\left(-\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)$ Normalenvektor (2D)

Rektifizierbarkeit, Bogenlänge

$$k:[a,b]\rightarrow\mathbb{R}^n \text{ rektifizierbar}\Leftrightarrow \{\sum_{k=1}^N\|\gamma(t_k)-\gamma(t_{k+1})\|_2:a=t_0<t_1<...<t_N=b \text{ Unterteilung v. } [a,b]\}$$

Bogenlänge stetig diff'barer Kurven

$$k:[a,b]\rightarrow\mathbb{R}^n \text{ stückweise stetig diff'bar}\Rightarrow L(k)=\int_a^b\|k'(t)\|_2dt$$

Parametertransformation

- $f:J\rightarrow I$ Parametertransformation \Leftrightarrow bijektiv und stetig
- f, f^{-1} k -mal stetig diff'bar $\Rightarrow \mathcal{C}^k$ Parametertransformation
- \mathcal{C}^1 -Par.transf. f orientierungstreu wenn $f'(t)>0\;\forall t$; orientierungsumkehrend für $<$
- k und \tilde{k} äquivalente Kurven wenn mit Par.transf. $f:k=\tilde{k}\circ f$ äquivalente Kurven \Rightarrow gleiche Bogenlänge

Bogenlänge/Umparametrisierung

- $k:[a,b]\rightarrow\mathbb{R}^n$ stetig diff'bare Kurve; $f:[c,d]\rightarrow[a,b]$ \mathcal{C}^1 -Param.transf.; k und $k\circ f$ gleiche Länge
- k regulär $\Rightarrow \exists$ orientierungserhaltende \mathcal{C}^1 -Param.transformation $f:[a,L(k)]\rightarrow[a,b]$, sodass diese Kurve $k:J\rightarrow\mathbb{R}, k:=k\circ f$ “mit Einheitsgeschwindigkeit läuft“, also $\|k'(t)\|=1\;\forall t\in[0,L(k)]$
- Man erhält f als Umkehrfunktion von $s\rightarrow\int_a^s\|k'(t)\|dt$

Krümmung

- $k:I\rightarrow\mathbb{R}^2$ regulär in $t\in I\Rightarrow\kappa(t)$ **Krümmung** im Punkt t
- $R(t)=\frac{1}{\kappa(t)}$ Krümmungsradius
- $k:I\rightarrow\mathbb{R}^2$ regulär, zweimal stetig diff'bar, k die dazugehörige unparametrisierte Kurve \Rightarrow Krümmung von k in t als \tilde{k} an \tilde{t} : $k(t)=\tilde{k}(\tilde{t})$ $k:I\rightarrow\mathbb{R}^2$ zweimal stetig diff'bar, $t\in I:k$ in t regulär:
- k nach Bogenlänge parametrisiert $\Rightarrow\kappa(t)=\langle k''(t),N(t)\wedge|\kappa(t)|=\|T'(t)\|=\|k''(t)\|$
- $k(t)=\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}\Rightarrow\kappa(t)=\frac{x'(t)y''(t)-y'(t)x''(t)}{\sqrt{(x'(t)^2+y'(t)^2)^3}}$

Mehrdimensionale Differentialrechnung

$$M\subseteq\mathbb{R}^n \text{ offen, } f:M\rightarrow\mathbb{R}, x\in M$$

Richtungsableitung $v\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ Richtungsvektor \Rightarrow Richtungsableitung von f in Richtung $v:\partial_vf(x)=\lim_{t\rightarrow 0}\frac{f(x+tv)-f(x)}{t}$

Totale Differenzierbarkeit f in x (total) diff'bar $\Leftrightarrow \exists$ lineare Abbildung $L:\mathbb{R}^n\rightarrow\mathbb{R}, h\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}:\lim_{h\rightarrow 0}\frac{f(x+h)-f(x)-Lh}{\|h\|}=\lim_{h\rightarrow 0}\frac{f(x+h)-f(x)-\langle w,h\rangle}{\|h\|}=0$

Diff'barkeit im Mehrdimensionalen f (total) diff'bar $\Leftrightarrow \forall x\in M$ alle partiellen Ableitungen existieren und stetig sind

$$w=\begin{pmatrix} \partial_1f(x) \\ \vdots \\ \partial_nf(x) \end{pmatrix}=: \nabla f(x), \; \partial_vf(x)=\langle \nabla f(x),v\rangle$$

Hesse-Matrix

$$\nabla^2f(x)=\begin{pmatrix} \partial_{11}f(x) & \cdots & \partial_{1,n}f(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{n1}f(x) & \cdots & \partial_{nn}f(x) \end{pmatrix}$$

Taylor in höheren Dimensionen

$$T_nf((\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}),(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}))=\sum_{j+k=0}^n\frac{\partial_x^j\partial_y^kf(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix})}{j!k!}(x-a)^j(y-b)^k$$

Extrema/Kritische Punkte

- kritischer Punkt: $\nabla f(c)=0$
- lokales Min. $\Rightarrow \nabla^2f(c)$ pos. semidefinit
- lokales Max. $\Rightarrow \nabla^2f(c)$ neg. semidefinit
- $\nabla f(c)=0$ und $\nabla^2f(c)$ pos. definit \Rightarrow isoliertes lok. Min.
- $\nabla f(c)=0$ und $\nabla^2f(c)$ neg. definit \Rightarrow isoliertes lok. Max.
- $\nabla f(c)=0$ und $\nabla^2f(c)$ pos. und neg. EW \Rightarrow Sattelpunkt

$$\textbf{Jacobi-Matrix} \quad F:\mathbb{R}^n\rightarrow\mathbb{R}^m; F(x)=\begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{pmatrix}$$

- f in c (total) diff'bar wenn lin. Abb. (oder Matrix) L existiert mit:

$$\lim_{\substack{h\rightarrow 0 \\ h\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}}}\frac{F(x+h)-F(x)-Lh}{\|h\|}=0$$

- Alle $\partial_jf_k(x)$ ($j=1\ldots n, k=1\ldots m$) in c stetig $\Rightarrow f$ in c stetig diff'bar und Jacobi-Matrix

$$DF(c):=\begin{pmatrix} \partial_1f_1(c) & \cdots & \partial_nf_1(c) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1f_m(c) & \cdots & \partial_nf_m(c) \end{pmatrix}$$

Mehrdimensionale Kettenregel

$$D(G\circ F)(c)=DG(F(c))\cdot DF(c)$$

Mehrdimensionale Integralrechnung

Transformationssatz $T:M_2\rightarrow M_1; f:M_1\rightarrow\mathbb{R}$ $\int\cdots\int_{M_1}f(x)dx=\int\cdots\int_{M_2}f(T(y))|\det(DT(y))|\;dy$

Differentialgleichungen

Flow

- DGL nicht linear \Rightarrow TDV
- DGL homogen \Rightarrow char. Polynom, Grad 2
- Sonst: Lösung raten

Trennung der Variablen (TDV)

- Schreibe y' als $\frac{dy}{dt}$
- Umstellen nach Termen mit y / ohne y
- Beide Seiten getrennt integrieren
- Konstanten bestimmen <wie Meth. 1>

Rezepte

1	$y'(t)=f(t)\cdot g(y(t))$	Funkt. f,g
2	$y'(t)+a(t)\cdot y(t)=0$	Funkt. a
3	$y'(t)+a(t)\cdot y(t)=f(t)$	Funkt. a,f
4	$y''(t)+ay'(t)+by(t)=0$	Konst. a,b
5	$y''(t)+ay'(t)+by(t)=p(t)$	Konst. a,b ; Polyn. p
6	$y''(t)+ay'(t)+by(t)=e^{\alpha t}(a_1\cos(\beta t)+a_2\sin(\beta t))$	Konst. $\alpha,\beta,a_1,a_2,b\neq 0$

Meth. 1 $F(t)=\int f(t)dt; G(t)=\int\frac{1}{g(t)dt}$
Jede allgemeine Lsg für $y(t)$ erfüllt die Gleichung $G(y(t))=F(t)+c$
Mit Anfangsbedingung erfüllt jede Lsg. $\int_{y_0}^{y(t)}\frac{1}{g(u)}du=\int_{x_0}^t f(u)du$

Meth. 2 $A(t)=\int a(t)dt$; allgemeine Lsg. $y(t)=ce^{-A(t)}$
Für **AWP**: $y(t_0)=y_0:y(t)=y_0e^{A(t_0)-A(t)}$

Meth. 3 $A(t)=\int a(t)dt; B(t)=\int e^{A(t)}\cdot f(t)dt$
Allg. Lsg. $y(t)=e^{-A(t)}\cdot (c+B(t))$
Für **AWP**: $y(t_0)=y_0:y(t)=e^{A(t_0)-A(t)}(y_0+\int_{t_0}^te^{A(s)-A(t_0)}\cdot f(s)ds)$

Meth. 4

- $a^2>4b$: Löse $\lambda_{1,2}=\lambda^2+a\lambda+b=0$ allg. Lsg.: $y(t)=c_1e^{\lambda_1t}+c_2e^{\lambda_2t}$
- $a^2=4b$: $\lambda=-\frac{a}{2}$ allg. Lsg.: $y(t)=(c_1+c_2)e^{\lambda t}$

- $a^2<4b$: $\omega=\sqrt{b-(\frac{a}{2})^2}$
allg. Lsg.: $y(t)=(c_1\cos(\omega t)+c_2\sin(\omega t))e^{-\frac{a}{2}t}$
Für **AWP**: $y(t_0)=y_0,y'(t_1)=y_1$ setze $t=t_1, t=t_2$ in allg. Lösung ein und bestimme c_1,c_2

Meth. 5

- Bestimme allg. Lsg. $y_h(t)$ von $y_h''(t)+ay_h'(t)+by_h(t)=0$
- Stelle Polyn. $q(t)=a_nt^n+\cdots+a_1t+a_0$ mit Grad $n=deg(p)$ und Param. a_0,\ldots,a_n auf $\begin{matrix} q(t) & b\neq 0 \\ tq(t) & a\neq 0, b=0 \\ t^2q(t) & a=0, b=0 \end{matrix}$
- $y_p(t)=\begin{cases} q(t) & b\neq 0 \\ tq(t) & a\neq 0, b=0 \\ t^2q(t) & a=0, b=0 \end{cases}$
in Abhängigkeit von $a_0,\ldots,a_n; y_p''(t)+ay_p'(t)+by_p(t)=p(t)$
- Ermittle a_1,\ldots,a_n durch Koeffizientenvergleich
- Allg. Lsg.: $y(t)=y_h(t)+y_p(t)$
Für **AWP**: $y(t_0)=y_0,y'(t_1)=y_1$ setze $t=t_1, t=t_2$ in allg. Lösung ein und bestimme c_1,c_2

Meth. 6

- Bestimme allg. Lsg. $y_h(t)$ von $y_h''(t)+ay_h'(t)+by_h(t)=0$
- Löse $\lambda^2+a\lambda+b=0$
- In Abhängigkeit von k: $y_p(t)=\begin{cases} ke^{ct} & \lambda_1\neq c\neq \lambda_2 \\ kte^{ct} & \lambda_1=c\neq \lambda_2 \text{ oder } \lambda_1\neq c=\lambda_2 \\ kt^2e^{ct} & \lambda_1=c=\lambda_2 \end{cases}$
- $y_p''(t)+ay_p'(t)+by_p(t)=e^{ct}$ ermittle k
- Allg. Lsg.: $y(t)=y_h(t)+y_p(t)$
Für **AWP**: $y(t_0)=y_0,y'(t_1)=y_1$ setze $t=t_1, t=t_2$ in allg. Lösung ein und bestimme c_1,c_2

Mehrdimensionale DGLs $\{v_1,\ldots,v_n\}\subset\mathbb{R}^n$ Basis von Eigenvektoren von $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ zu EW $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$
Lin. unabh. Lösungen v. DGL der Form $y'=Ay$: $y=e^{\lambda_jt}v_j$

Satz von Picard-Lindelöf f stetig diff'bar bzgl. y, stetig in t \Rightarrow AWP
 $y'=f(t,y), y(t_0)=y_0$ auf $(t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon)$ besitzt genau eine Lösung (für $\varepsilon>0$ klein genug)

Komplexe Zahlen

$$\mathbb{C}=\{z|z=x+iy, x,y\in\mathbb{R}, i^2=-1\}$$

- $z_1+z_2=(x_1\pm x_2)+i(y_1\pm y_2)$
- $z_1\cdot z_2=x_1x_2-y_1y_2+i(x_1y_2+x_2y_1)$
- $\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}=\frac{z_1\overline{z_2}}{|z_2|^2}$
- $|z|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{z\cdot\overline{z}}$
- $\varphi=\arctan(\frac{x}{y}), r=|z|, x=r\cdot\cos(\varphi), y=r\cdot\sin(\varphi)$
- $\overline{z}=x-iy$
- $z=r(\cos(\varphi)+i\sin(\varphi))=r\cdot e^{i\varphi}$

Koordinatentransformation

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\mapsto r\begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix}, \quad dxdy\mapsto r\cdot d\varphi dr$$

3D - Kugelkoordinaten

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\mapsto r\begin{pmatrix} \sin(\theta)\cos(\varphi) \\ \sin(\theta)\sin(\varphi) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix}, \quad dxdydz\mapsto r^2\sin(\theta)drd\theta d\varphi$$

3D - Zylinderkoordinaten

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\mapsto \begin{pmatrix} r\cdot\cos(\varphi) \\ r\cdot\sin(\varphi) \\ z \end{pmatrix}, \quad dxdydz\mapsto r\cdot drd\varphi dz$$

Sonstiges

Bekannte Abl. und Integrale

$\frac{d}{dx}f(x)$	$f(x)$	$\int f(x)dx$
$\frac{1}{\cos^2(x)}$	$\tan(x)$	$-\ln(\cos(x))$
$\cosh(x)$	$\sinh(x)$	$\cosh(x)$
$\frac{1}{\cosh^2(x)}$	$\tanh(x)$	$\ln(\cosh(x))$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x)$	$\sqrt{1-x^2}+x\sin^{-1}(x)$
$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos(x)$	$x\arccos^{-1}(x)-\sqrt{1-x^2}$
$\frac{1}{x^2+1}$	$\arctan(x)$	$x\tan^{-1}(x)-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)$
$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\operatorname{arcsinh}(x)$	$x\sinh^{-1}(x)-\sqrt{x^2+1}$
$\frac{1}{\sqrt{x-1}\sqrt{x+1}}$	$\operatorname{arccosh}(x)$	$x\cosh^{-1}(x)-\sqrt{x-1}\sqrt{x+1}$
$\frac{1}{1-x^2}$	$\operatorname{arctanh}(x)$	$\frac{1}{2}\ln(1-x^2)+x\tanh^{-1}(x)$
$\cos(2x)$	$\sin(x)\cos(x)$	$-\frac{1}{2}\cos^2(x)$
$\sin(2x)$	$\sin^2(x)$	$\frac{1}{2}(x-\sin(x)\cos(x))$
$-2\sin(x)\cos(x)$	$\cos^2(x)$	$\frac{1}{2}(x+\sin(x)\cos(x))$
$\frac{1}{x}$	$\ln(x)$	$x\cdot\ln(x)-x$
$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	$\sqrt{1-x^2}$	$\frac{1}{2}(\sqrt{1-x^2}x+\sin^{-1}(x))$

Landau-Notation

- $f\in\mathcal{O}(g)\Leftrightarrow\lim_{n\rightarrow a}\frac{|f(x)|}{g(x)}<\infty$

- $f\in o(g)\Leftrightarrow\lim_{n\rightarrow a}\frac{|f(x)|}{g(x)}=0$

- $f\in\Omega(g)\Leftrightarrow\lim_{n\rightarrow a}\frac{g(x)}{|f(x)|}<\infty$

- $f\in\omega(g)\Leftrightarrow\lim_{n\rightarrow a}\frac{g(x)}{|f(x)|}=0$

Bekannte Reihen

$$\begin{array}{ll} \text{Harmonische Reihe} & \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^a}=+\infty \\ & \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^a}\text{ div. für }a\leq 1, \text{ konv. sonst} \\ \text{Potenzreihe} & \sum_{k=1}^{\infty}a_0q^k=\frac{a_0}{1-q}\;\forall|q|<1 \\ \text{Logarithmusreihe} & \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k}=\ln(1+x) \\ \text{Arcus-Tangens-Reihe} & \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{2k+1}=\arctan(x)\text{ in }[-1,1] \\ \text{Exponentialreihe} & \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!}=exp(z) \\ & \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}=e \\ \text{Binomialreihe} & \sum_{k=0}^{\infty}\binom{k}{\alpha}x^k=(1+x)^{\alpha} \end{array}$$

Allgemeines

- $\lim_{n\rightarrow\infty}\sqrt[n]{n}=1$
- $\lim_{k\rightarrow\infty}(\frac{k}{k+1})^k=\frac{1}{e}$
- $k!\geq 2^{n+1}$
- $x>0\Rightarrow e^x>\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$
- $||a|-|b||\leq|a-b|\leq|a|+|b|, |a+b|\leq|a|+|b|$
- $\forall n>0:(1+x)^n\geq 1+nx$ (Bernoulli-Ungleichung)