

Reelle Zahlen

$(K, +, \cdot)$ angeordneter Körper, $X \subset K$ nicht leer

- Sup, Inf, Max, Min**
- $s \in K$ **sup(X)** \Leftrightarrow s kleinste obere Schranke
- $s \in K$ **inf(X)** \Leftrightarrow s größte untere Schranke
- $s \in K$ **max(X)** $\Leftrightarrow s = \sup(X) \wedge s \in K$
- $s \in K$ **min(X)** $\Leftrightarrow s = \inf(X) \wedge s \in K$

ε –**Charakterisierung des Supremums**
 $s = \sup(X) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in X : s - \varepsilon < x \leq s$
Entsprechendes gilt für das Infimum

- Rechenregeln für sup** $X, Y \subset \mathbb{R}$ nach oben beschränkt:
- $\sup(X + Y) = \sup(X) + \sup(Y)$
- $\lambda > 0 \Rightarrow \sup(\lambda X) = \lambda \sup(X)$
- $X, Y \subset [0, \infty) \Rightarrow \sup(X) \cdot \sup(Y)$
- $X \subset Y \Rightarrow \sup(X) \leq \sup(Y)$

- Archimedische Anordnung**
- \mathbb{R} archimedisch angeordnet $\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \ \exists n \in \mathbb{N} : n > x$
- $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} < \varepsilon$
- $\forall a, b \in \mathbb{R} : a < b : \exists q \in \mathbb{Q} : a < q < b$

Folgen

Def: 2.2 - Grenzwert einer reellen Folge

- $a \in \mathbb{R}$ Grenzwert von $(a_n) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0 : |a_n - a| < \varepsilon$
- Existiert $a \in \mathbb{R}$ Grenzwert $\Rightarrow (a_n)$ konvergent, sonst (a_n) divergent

Nullfolge $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) \rightarrow 0$

Satz 2.3 - Rechenregeln für Grenzwerte
 $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ reelle Folgen, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \ \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$

- Folge $(a_n + b_n)$ konvergiert gegen $a + b$
- Folge $(a_n \cdot b_n)$ konvergiert gegen $a \cdot b$
- $b \neq 0 \Rightarrow (\frac{a_n}{b_n})_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen $\frac{a}{b}$
- $a_n \leq b_n$ für fast alle $n \in \mathbb{N} \rightarrow a \leq b$
- Einschließungskriterium**
 $a = b \wedge a_n \leq c_n \leq b_n$ für fast alle $n \in \mathbb{N} \Rightarrow c_n \rightarrow a$
Spezialfall des Einschließungskriteriums:
 $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *Folge*, $x \in \mathbb{R}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Nullfolge, sodass $|x_n - x| \leq y_n$ für fast alle $n \Rightarrow (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen x

Satz 2.4 - Eigenschaften konvergenter Folgen
Sei a_n konvergente reelle Folge
 $\Rightarrow (a_n)$ beschränkt $\wedge (a_n)$ besitzt genau einen Grenzwert

Def: 2.5 - Uneigentliche Konvergenz

- $(a_n)_{a \in \mathbb{N}}$ konvergiert uneigentlich gegen $\infty \Leftrightarrow \forall K > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0 : a_n > K$
- $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert uneigentlich gegen $-\infty \Leftrightarrow (-a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert uneigentlich gegen ∞

Satz 2.6 - Rechenregeln für uneigentliche Konvergenz
 $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ reelle Folgen
 $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n)_{n \in \mathbb{N}} = \infty, \ \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, a \in \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$

- $a \neq -\inf \Rightarrow (a_n + b_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow \infty$
- $a \neq 0 \Rightarrow (a_n \cdot b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert uneigentlich
- $a > 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \infty$
- $a < 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = -\infty$
- $a \notin \{-\infty, \infty\} \vee (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt $\Rightarrow (\frac{a_n}{b_n})_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow 0$

Def 2.7 - Monotone Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ reelle Folge heißt

- monoton wachsend, falls $a_{n+1} \geq a_n, \forall n \in \mathbb{N}$
- streng monoton wachsend, falls $a_{n+1} > a_n, \forall n \in \mathbb{N}$
- monoton fallend, falls $a_{n+1} \leq a_n, \forall n \in \mathbb{N}$
- streng monoton fallend, falls $a_{n+1} < a_n, \forall n \in \mathbb{N}$

Monotoniesatz $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton wachsend \wedge nach oben beschränkt
 $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n = \sup \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$

Def 2.9 Häufungspunkt $a \in \mathbb{R}$ Häufungspunkt $\Leftrightarrow \exists (a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ Teilfolge von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, die gegen a konvergiert.

Satz v. Bolzano-Weierstraß
Jede beschränkte Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ besitzt eine konvergente Teilfolge und hat min. einen Häufungspunkt

Def 2.11 - Limes superior, limes inferior $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nach oben (unten) beschränkt \Rightarrow größter (kleinster) Häufungspunkt: *Limes superior (inferior)*

Komplexe und mehrdimensionale Folgen

Grenzwert komplexer Folgen

z GW von $(z_n) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0 : |z_n - z| < \varepsilon$
Existiert $z \Rightarrow (z_n)$ konvergent gegen z .

- Konvergenz komplexer Folgen**
- $z_n = a_n + ib_n$ konvergiert $\Leftrightarrow a_n$ und b_n konvergieren
- z_n konvergent $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + i \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$
- z_n konvergent $\Rightarrow |z_n|$ konvergent

- Grenzwert mehrdimensionaler Folgen**
- z_n konvergent $\Leftrightarrow \forall i \in [0, n] : z_i$ konvergent
- $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = v \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \|v_n - v\|_2 = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \|v_n - v\|_\infty = 0$
- Reihen**
- Konvergenz** $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent gg. $s \in \mathbb{C} \Leftrightarrow$ Folge der Partialsummen gg. s konvergiert

- Teilfolge, Häufungspunkte** $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ reelle Folge:
- $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ streng monoton wachsend in $\mathbb{N} \Rightarrow (a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ Teilfolge von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$
- $a \in \mathbb{R}$ Häufungspunkt von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \Leftrightarrow \exists$ Teilfolge, die gg. a konvergiert

- Majoranten- & Minorantenkriterium**
 $a_n := \sum_{k=0}^\infty a_k; \ b_n := \sum_{k=0}^\infty b_k; \ (a_k)_{k \in \mathbb{N}}, (b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ relle Folgen, $|(a_k)| \leq b_k$ für fast alle $k \in \mathbb{N}$
- b_s konvergiert $\Rightarrow a_s$ konvergiert absolut
- a_s divergiert $\Rightarrow b_s$ divergiert

Quotientenkriterium
 $\sum_{k=0}^\infty a_k, a_k \neq 0$ für fast alle $k \in \mathbb{N}, \ \lim_{n \rightarrow \infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| := q$ existiert $\Rightarrow \otimes$

Wurzelkriterium
 $\sum_{k=0}^\infty a_k, \ a_k \in \mathbb{C} : q := \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} \Rightarrow \otimes$

- \otimes
- $q < 1 \Rightarrow$ Reihe konvergiert absolut
- $q > 1 \Rightarrow$ Reihe divergiert

Leibniz-Kriterium $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ relle, monoton fallende Nullfolge $\Rightarrow \sum_{k=0}^\infty (-1)^k a_k \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \ |\sum_{k=0}^\infty (-1)^k a_k - s_n| \leq a_{n+1}$
Anm. $\sum_{k=0}^\infty x_n$ konvergiert $\Rightarrow x_n$ Nullfolge

Integralvergl.-Kriterium $f : (a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^+$ monoton fallend:
 $\sum_{k=0}^\infty f(k)$ konv. $\Leftrightarrow \int_a^\infty f(k)dk < \infty$

- Umordnungssatz**
- Jede Umordnung einer konv. Reihe konv. gg. denselben Wert
- Konvergiert eine Reihe aus reellen Summanden, aber nicht absolut $\Rightarrow \forall s \in \mathbb{R} \ \exists$ bijektive Abbildung $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$: die umgeordnete Reihe konvergiert gegen s

Potenzreihe $P(z) := \sum_{k=0}^\infty c_k z^k; c_k \in \mathbb{C}; z \in \mathbb{C}$
 $R := \frac{1}{\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|}} = \lim_{k \rightarrow \infty} |\frac{a_k}{a_{k+1}}|$ Konvergenzradius

- $|z| < R \Rightarrow P(z)$ konvergiert
- $|z| > R \Rightarrow P(z)$ divergiert

- Cauchy-Produkt**
- $\sum_{k=0}^\infty a_k, \sum_{k=0}^\infty b_k$ absolut konvergent $\in \mathbb{C} \Rightarrow (\sum_{k=0}^\infty a_k)(\sum_{k=0}^\infty b_k) = (\sum_{m=0}^\infty c_m)$ mit $c_m = (\sum_{k=0}^m a_k b_{m-k})$ mit c_k absolut konvergent.
- Seien $\sum_{k=0}^\infty a_k z^k, \sum_{k=0}^\infty b_k z^k$ zwei Potenzreihen mit Konvergenzradien R_a und $R_b \Rightarrow (\sum_{k=0}^\infty a_k z^k)(\sum_{k=0}^\infty b_k z^k) = (\sum_{m=0}^\infty c_b z^m)$ mit $c_m = \sum_{k=0}^m a_k b_{m-k}$ und Konvergenzradius $\min\{R_a, R_b\}$

Natürliche Exponentialfunktion
 $exp(z) := \sum_{k=0}^\infty \frac{z^k}{k!}$

- Eigenschaften von exp** $\forall z, w \in \mathbb{C}, x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$
- $\exp(z + w) = \exp(z) \cdot \exp(w)$
- $\exp(-z) = \frac{1}{\exp(z)}, \exp(z) \neq 0 \wedge \exp(\bar{z}) = \exp(z)$
- $|\exp(z) - \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!}| \leq 2 \cdot \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!}$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{z}{n})^n = \exp(z)$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^{-n}} = \infty$
- $e^{i \frac{\pi}{2}} = i$
- $e^{i \pi} = -1$
- $e^{z + 2 \pi i} = e^z$
- $e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x)$
- $|e^{ix}| = 1$

Trigonometrische Funktionen
 $\sin(z) := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \sum_{k=0}^\infty (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \mathcal{O}(x^7)$
 $\cos(z) := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \sum_{k=0}^\infty (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^6}{720} + \mathcal{O}(x^7)$
 $\tan(x) := \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$
 $\arcsin(x) = x + \frac{x^6}{6} + \frac{3x^5}{40} + \mathcal{O}(x^7)$
 $\arccos(x) = \frac{\pi}{2} - x - \frac{x^3}{6} - \frac{3x^5}{40} + \mathcal{O}(x^7)$
 $\arctan(x) := \sum_{k=0}^\infty (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \mathcal{O}(x^7)$
 $\sinh(x) := \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \sum_{k=0}^\infty \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \mathcal{O}(x^7)$
 $\cosh(x) := \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \sum_{k=0}^\infty \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^6}{720} + \mathcal{O}(x^7)$
 $\tanh(x) := \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \mathcal{O}(x^7)$

- Eigenschaften trigonometrischer Funktionen** $\forall z, w \in \mathbb{C}, x \in \mathbb{R}$
- $\sin(z + w) = \sin(z) \cos(w) + \cos(z) \sin(w)$
- $\sin(2z) = 2 \sin(z) c \cos(z)$
- $\cos(z + w) = \cos(z) \cos(w) - \sin(z) \sin(w)$
- $\cos(x) = Re(e^{ix}), \ \sin(x) = Im(e^{ix})$
- $\cos(2z) = \cos^2(z) - \sin^2(z)$
- $\sin^2(z) + \cos^2(z) = 1$
- $\arccos(x) + \arcsin(x) = \frac{\pi}{2}$
- $z = \tan(c) : \arctan'(z) = \frac{1}{\tan'(c)} = \frac{1}{1 + (\tan(c))^2} = \frac{1}{1 + z^2}$
- $\cosh^2(x) = \frac{1}{2} \cosh(x) + \frac{1}{2}$
- $\cosh^2(z) - \sinh^2(z) = 1$

	0	$\frac{\pi}{6} = 30^\circ$	$\frac{\pi}{4} = 45^\circ$	$\frac{\pi}{3} = 60^\circ$	$\frac{\pi}{2} = 90^\circ$
sin	$\frac{\sqrt{0}}{2} = 0$	$\frac{\sqrt{1}}{2} = \frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2} = 1$
cos	$\frac{\sqrt{4}}{2} = 1$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{1}}{2} = \frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{0}}{2} = 0$
sinh	0	★	★	★	★
cosh	1	★	★	★	★

Stetigkeit

Definition
 $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig in $c \Leftrightarrow \forall (x_n)$ mit $\lim_{x \rightarrow 0} x_n = c$ gilt $\lim_{x \rightarrow 0} f(x_n) = f(c)$

Rechenregeln $D \subseteq \mathbb{R}; f, g : D \rightarrow \mathbb{R}; f, g$ stetig in $c \Rightarrow f + g, f \cdot g, \frac{f}{g} \ (g \neq 0)$ stetig in c

- Komposition** $D, D' \subseteq \mathbb{R}, f : D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig in c
- $y := f(c) \in D' \wedge g$ stetig in $y \Rightarrow (g \circ f) : D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig in c
- f, g stetig $\wedge f(D) \subseteq D' \Rightarrow (g \circ f) : D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig

ε - δ -**Charakterisierung** $D \subseteq \mathbb{R}, f : D \rightarrow \mathbb{R}, c \in D \Rightarrow f$ stetig in $c \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in D : |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \varepsilon$

Zwischenwertsatz $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig $\Rightarrow \forall y \in \mathbb{R}$ mit $\min\{f(a), f(b)\} \leq y \leq \max\{f(a), f(b)\} : \exists x \in [a, b] : f(x) = y$

- Satz v. Max. und Min.** $[a, b]$ beschränkt, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig
- f beschränkt
- $\exists x_{\max}, x_{\min} \in [a, b] : f(x_{\max}) = \sup\{f(x) : x \in [a, b]\} \wedge f(x_{\min}) = \inf\{f(x) : x \in [a, b]\}$

Stetigkeit in $\mathbb{C} \ \& \ \mathbb{R}^n$ wörtlich übertragbar
 $D \subseteq \mathbb{C}$ bzw. \mathbb{R}^n abgeschlossen: $\forall f$ stetig : $D \rightarrow \mathbb{C}$ bzw. $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ beschränkt und nimmt auf D Maximum und Minimum an

Stetigkeit von Potenzreihen
 $f(z) = \sum_{k=0}^\infty c_k z^k \Rightarrow f : \{z : |z| < R\} \rightarrow \mathbb{C}$ stetig

Differenziation

Definition $I \subseteq \mathbb{R}, f : I \rightarrow \mathbb{R} \quad f'(c) := \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$

Diff'barkeit \Rightarrow Stetigkeit f diffbar in $c \Rightarrow f$ in \mathbb{C} stetig

- Monotonie & Umkehrbarkeit**
- f stetig & injektiv $\Leftrightarrow f$ streng monoton wachsend oder fallend
- f außerdem surjektiv $\Rightarrow f^{-1}$ stetig \wedge monoton wachsend / fallend

Differentiation der Umkehrfunktion
 f bijektiv, $f'(c) \neq 0 \Rightarrow z := f(c)$ diff'bar, $(f^{-1})'(z) = \frac{1}{f'(c)}$

Logarithmus $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

Diff. v. Potenzreihen
 $f(x) = \sum_{k=0}^\infty c_k x^k \in \mathbb{R} : f'(x) = \sum_{k=1}^\infty k c_k x^{k-1}, \ D = |R|$

Höhere Ableitungen $\mathcal{C}^n(I)$: Vektorraum aller n-mal stetig diff'baren Funktionen $f : I \rightarrow \mathbb{R}$

- Extrema**
- lokales Maximum** $\Leftrightarrow \varepsilon > 0 : f(c) \geq f(x) \forall x \in (c - \varepsilon, c + \varepsilon) \cap I$
- lokales Minimum** $\Leftrightarrow \varepsilon > 0 : f(c) \leq f(x) \forall x \in (c - \varepsilon, c + \varepsilon) \cap I$
- isoliertes lok. Max/Min** $\Leftrightarrow \text{Max/min} \wedge x \neq c$
- globales Max (Min)** $f(x) \geq (\leq) f(c)$

Satz von Rolle $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, f(a) = f(b) \Rightarrow \exists \xi \in (a, b) : f'(\xi) = 0$

Hinreichend für Extrema f diff'bar, $\exists c : f'(c) = 0$

- f streng monoton wachsend um $c \Rightarrow$ f in c isol. lok. Min.
- $f \in \mathcal{C}^2, f'''(c) > 0 \Rightarrow f$ in c isol. lok. Min.
- f' um c str. monoton fallend $\Rightarrow f$ in c isol. lok. Max.
- $f \in \mathcal{C}^2, f'''(c) < 0 \Rightarrow f$ in c isol. lok. Max.

- Taylor**
- $n \in \{\mathbb{N} \cup \infty\} : T_n f(x; c) := \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(c)}{k!} (x - c)^k$
- $T_n(f \cdot g) = T_n f \cdot T_n g$
- Potenzreihen: Das n-te Taylorpolynom (im Nullpunkt) von Potenzreihen ist deren n-te Partialsumme

Lipschitz-Stetigkeit (LS)
 $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ LS $\Leftrightarrow \exists L : |f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \ \forall x, y \in D$

Umkehrfunktion $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

Integration
Riemann-Integral
 $\varphi \in \tau[a, b] : \int_a^b \varphi \, dx := \sum_{k=1}^n c_k (x_k - x_{k-1})$

Stetigkeit & Monotonie \Rightarrow Integrierbarkeit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

- f stetig \vee f monoton $\Rightarrow f$ integrierbar
- \exists Unterteilung v. $[a, b]$ stetig oder monoton $\Rightarrow f$ integrierbar

Mittelwertsatz der Integralrechnung.
 $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig: $\exists \xi \in [a, b] : \int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b - a)$

Partielle Integration
 $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig: $\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$

Substitution $\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)dy$

Majorantenkriterium für Integrale

- f über $[a, b]$ absolut integrierbar \Leftrightarrow
- f in jedem Teilintervall $\in [a, b]$ integrierbar
- $|f(x)| \leq g(x) \forall x \in [a, b)$
- g über $[a, b)$ uneig. integrierbar

Folgerung z. uneig. Integrierbarkeit

- $f : (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ auf allen Teilintervallen $\in (a, b]$ integrierbar, $f(x) = \mathcal{O}(\frac{1}{|x-a|^s})$ für $x \rightarrow a$ mit $s \in [0, 1) \Rightarrow f$ über $(a, b]$ uneig. integrierbar
- $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, a < b$ integrierbar, $f(x) = \mathcal{O}(\frac{1}{x^s})$ mit $x \rightarrow \infty, s > 1 \Rightarrow f$ über $[a, \infty]$ uneig. integrierbar

Integralvergl.krit. $f : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ monoton fallend, $\forall x : f(x) > 0, f$ über $[1, \infty]$ uneig. integr. $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ konvergiert

Potenzreihen

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \Rightarrow \int f(x) dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} c_k x^{k+1}$$

Kurven**Diff’bare Kurven**

- k regulär in $t \Leftrightarrow k'(t) \neq 0$, sonst singulär
- k singulär in $t \Rightarrow \nexists$ Tangentialvektor
- $k'(t) = (k_1'(t), ...,)$ Tangentialvektor
- $T_k(t) = \frac{k'(t)}{\|k'(t)\|_2}$ Tangentialeinheitsvektor in t

- $N(t) = \left(\begin{array}{c} -y'(t) \\ x'(t) \end{array} \right)$ Normalenvektor (2D)

Rektifizierbarkeit, Bogenlänge

$$k : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ rektifizierbar} \Leftrightarrow \{ \sum_{k=1}^N \| \gamma(t_k) - \gamma(t_{k+1}) \|_2 : \\ a = t_0 < t_1 < ... < t_N = b \text{ Unterteilung v. } [a, b] \}$$

Bogenlänge stetig diff’barer Kurven

$$k : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ stückweise stetig diff’bar} \Rightarrow L(k) = \int_a^b \|k'(t)\|_2 dt$$

Parametertransformation

- $f : J \rightarrow I$ Parametertransformation \Leftrightarrow bijektiv und stetig
- f, f^{-1} k-mal stetig diff’bar $\Rightarrow \mathcal{C}^k$ Parametertransformation
- \mathcal{C}^1 -Par.transf. f orientierungstreu wenn $f'(t) > 0 \, \forall t$; orientierungsumkehrend für $<$
- k und \tilde{k} äquivalente Kurven wenn mit Par.transf. $f : \tilde{k} = k \circ f$ äquivalente Kurven \Rightarrow gleiche Bogenlänge

Bogenlänge/Umparametrisierung

- $k : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig diff’bare Kurve; $f : [c, d] \rightarrow [a, b]$ \mathcal{C}^1 -Param.transf.; k und $k \circ f$ gleiche Länge
- k regulär $\Rightarrow \exists$ orientierungserhaltende \mathcal{C}^1 -Param.transformation $f : [a, L(k)] \rightarrow [a, b]$, sodass diese Kurve $k : J \rightarrow \mathbb{R}, k := k \circ f$ “mit Einheitsgeschwindigkeit läuft“, also $\|k'(t)\| = 1 \, \forall t \in [0, L(k)]$
- Man erhält f als Umkehrfunktion von $s \rightarrow \int_a^s \|k'(t)\| dt$

Krümmung

- $k : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ regulär in $t \in I \Rightarrow \kappa(t)$ **Krümmung** im Punkt t
- $R(t) = \frac{1}{\kappa(t)}$ Krümmungsradius
- $k : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ regulär, zweimal stetig diff’bar, k die dazugehörige unpa-parametrisierte Kurve \Rightarrow Krümmung von k in t als \tilde{k} an $\tilde{t} : k(t) = \tilde{k}(\tilde{t})$
- $k : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ zweimal stetig diff’bar, $t \in I : k$ in t regulär:
- k nach Bogenlänge parametrisiert $\Rightarrow \kappa(t) = \langle k''(t), N(t) \wedge |\kappa(t)| = \|T'(t)\| = \|k''(t)\|$
- $k(t) = \left(\begin{array}{c} x(t) \\ y(t) \end{array} \right) \Rightarrow \kappa(t) = \frac{x'(t)y''(t)-y'(t)x''(t)}{\sqrt{(x'(t)^2+y'(t)^2)^3}}$

Mehrdimensionale Differentialrechnung

$$M \subseteq \mathbb{R}^n \text{ offen, } f : M \rightarrow \mathbb{R}, x \in M$$

Richtungsableitung $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ Richtungsvektor \Rightarrow

$$\text{Richtungsableitung von } f \text{ in Richtung } v : \partial_v f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x+tv) - f(x)}{t}$$

Totale Differenzierbarkeit f in x (total) diff’bar \Leftrightarrow

\exists lineare Abbildung $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} :$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x) - Lh}{\|h\|} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x) - \langle w, h \rangle}{\|h\|} = 0$$

Diff’barkeit im Mehrdimensionalen f (total) diff’bar \Leftrightarrow

$\forall x \in M$ alle partiellen Ableitungen existieren und stetig sind

$$w = \left(\begin{array}{c} \partial_1 f(x) \\ \vdots \\ \partial_n f(x) \end{array} \right) =: \nabla f(x), \, \partial_v f(x) = \langle \nabla f(x), v \rangle$$

Hesse-Matrix

$$\nabla^2 f(x) = \left(\begin{array}{ccc} \partial_{11} f(x) & \cdots & \partial_{1,n} f(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{n1} f(x) & \cdots & \partial_{nn} f(x) \end{array} \right)$$

Taylor in höheren Dimensionen

$$T_n f(\left(\begin{array}{c} x \\ y \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} a \\ b \end{array} \right)) = \sum_{j+k=0}^n \frac{\partial_x^j \partial_y^k f(\frac{a}{b})}{j! \, k!} (x-a)^j (y-b)^k$$

Extrema/Kritische Punkte

- kritischer Punkt: $\nabla f(c) = 0$
- lokales Min. $\Rightarrow \nabla^2 f(c)$ pos. semidefinit
- lokales Max. $\Rightarrow \nabla^2 f(c)$ neg. semidefinit
- $\nabla f(c) = 0$ und $\nabla^2 f(c)$ pos. definit \Rightarrow isoliertes lok. Min.
- $\nabla f(c) = 0$ und $\nabla^2 f(c)$ neg. definit \Rightarrow isoliertes lok. Max.
- $\nabla f(c) = 0$ und $\nabla^2 f(c)$ pos. und neg. EW \Rightarrow Sattelpunkt

$$\textbf{Jacobi-Matrix} \quad F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m; F(x) = \left(\begin{array}{c} f_1(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{array} \right)$$

- f in c (total) diff’bar wenn lin. Abb. (oder Matrix) L existiert mit:

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}}} \frac{F(x+h) - F(x) - Lh}{\|h\|} = 0$$

- Alle $\partial_j f_k(x)$ ($j = 1 \dots n, k = 1 \dots m$) in c stetig $\Rightarrow f$ in c stetig diff’bar und Jacobi-Matrix

$$DF(c) := \left(\begin{array}{ccc} \partial_1 f_1(c) & \cdots & \partial_n f_1(c) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 f_m(c) & \cdots & \partial_n f_m(c) \end{array} \right)$$

Mehrdimensionale Kettenregel

$$D(G \circ F)(c) = DG(F(c)) \cdot DF(c)$$

Mehrdimensionale Integralrechnung

Transformationssatz $T : M_2 \rightarrow M_1; f : M_1 \rightarrow \mathbb{R}$
 $\int \cdots \int_{M_1} f(x) dx = \int \cdots \int_{M_2} f(T(y)) \, |\det(DT(y))| \, dy$

Differentialgleichungen**Flow**

- DGL nicht linear \Rightarrow TDV
- DGL homogen \Rightarrow char. Polynom, Grad 2
- Sonst: Lösung raten

Trennung der Variablen (TDV)

- Schreibe y' als $\frac{dy}{dt}$
- Umstellen nach Termen mit y / ohne y
- Beide Seiten getrennt integrieren
- Konstanten bestimmen <wie Meth. 1>

Rezepte

1	$y'(t) = f(t) \cdot g(y(t))$	Funkt. f, g
2	$y'(t) + a(t) \cdot y(t) = 0$	Funkt. a
3	$y'(t) + a(t) \cdot y(t) = f(t)$	Funkt. a, f
4	$y''(t) + ay'(t) + by(t) = 0$	Konst. a, b
5	$y''(t) + ay'(t) + by(t) = p(t)$	Konst. a, b ; Polyn. p
6	$y''(t) + ay'(t) + by(t) = e^{\alpha t}(a_1 \cos(\beta t) + a_2 \sin(\beta t))$	Konst. $\alpha, \beta, a_1, a_2, b \neq 0$

$$\textbf{Meth. 1} \quad F(t) = \int f(t) dt; \, G(t) = \int \frac{1}{g(t)} dt$$

Jede allgemeine Lsg für $y(t)$ erfüllt die Gleichung $G(y(t)) = F(t) + c$
Mit Anfangsbedingung erfüllt jede Lsg. $\int_{y_0}^{y(t)} \frac{1}{g(u)} du = \int_{x_0}^t f(u) du$

$$\textbf{Meth. 2} \quad A(t) = \int a(t) dt; \text{ allgemeine Lsg. } y(t) = ce^{-A(t)}$$

$$\text{Für } \textbf{AWP}: y(t_0) = y_0 : y(t) = y_0 e^{A(t_0) - A(t)}$$

$$\textbf{Meth. 3} \quad A(t) = \int a(t) dt; B(t) = \int e^{A(t)} \cdot f(t) dt$$

$$\text{Allg. Lsg. } y(t) = e^{-A(t)} \cdot (c + B(t))$$

$$\text{Für } \textbf{AWP}: y(t_0) = y_0 : y(t) = e^{A(t_0) - A(t)} (y_0 + \int_{t_0}^t e^{A(s) - A(t_0)} \cdot f(s) ds)$$

Meth. 4

- $a^2 > 4b$: Löse $\lambda_{1,2} = \lambda^2 + a\lambda + b = 0$ allg. Lsg.: $y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$
- $a^2 = 4b$: $\lambda = -\frac{a}{2}$ allg. Lsg.: $y(t) = (c_1 + c_2) e^{\lambda t}$
- $a^2 < 4b$: $\omega = \sqrt{b - (\frac{a}{2})^2}$
allg. Lsg.: $y(t) = (c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t)) e^{-\frac{a}{2} t}$
Für **AWP**: $y(t_0) = y_0, y'(t_1) = y_1$ setze $t = t_1, t = t_2$ in allg. Lösung ein und bestimme c_1, c_2

Meth. 5

- Bestimme allg. Lsg. $y_h(t)$ von $y_h''(t) + ay_h'(t) + by_h(t) = 0$
- Stelle Polyn. $q(t) = a_n t^n + \cdots + a_1 t + a_0$ mit Grad $n = \deg(p)$ und Param. a_0, \dots, a_n auf
- $y_p(t) = \begin{cases} q(t) & b \neq 0 \\ tq(t) & a \neq 0, b = 0 \\ t^2 q(t) & a = 0, b = 0 \end{cases}$
in Abhängigkeit von $a_0, \dots, a_n; y_p''(t) + ay_p'(t) + by_p(t) = p(t)$
- Ermittle a_1, \dots, a_n durch Koeffizientenvergleich
- Allg. Lsg.: $y(t) = y_h(t) + y_p(t)$
Für **AWP**: $y(t_0) = y_0, y'(t_1) = y_1$ setze $t = t_1, t = t_2$ in allg. Lösung ein und bestimme c_1, c_2

Meth. 6

- Bestimme allg. Lsg. $y_h(t)$ von $y_h''(t) + ay_h'(t) + by_h(t) = 0$
- Löse $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$
- In Abhängigkeit von k :

$$y_p(t) = \begin{cases} ke^{ct} & \lambda_1 \neq c \neq \lambda_2 \\ kte^{ct} & \lambda_1 = c \neq \lambda_2 \text{ oder } \lambda_1 \neq c = \lambda_2 \\ kt^2 e^{ct} & \lambda_1 = c = \lambda_2 \end{cases}$$

- $y_p''(t) + ay_p'(t) + by_p(t) = e^{ct}$ ermittle k
- Allg. Lsg.: $y(t) = y_h(t) + y_p(t)$
Für **AWP**: $y(t_0) = y_0, y'(t_1) = y_1$ setze $t = t_1, t = t_2$ in allg. Lösung ein und bestimme c_1, c_2

Mehrdimensionale DGLs $\{v_1, \dots, v_n\} \subset \mathbb{R}^n$ Basis von Eigenvektoren von $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ zu EW $\lambda_1, \dots, \lambda_n$
Lin. unabh. Lösungen v. DGL der Form $y' = Ay$: $y = e^{\lambda_j t} v_j$

Satz von Picard-Lindelöf f stetig diff’bar bzgl. y, stetig in t \Rightarrow AWP
 $y' = f(t, y), y(t_0) = y_0$ auf $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ besitzt genau eine Lösung (für $\varepsilon > 0$ klein genug)

Komplexe Zahlen

$$\mathbb{C} = \{z | z = x + iy, x, y \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$$

- $z_1 + z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$
- $z_1 \cdot z_2 = x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$
- $\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{z_1 \overline{z_2}}{|z_2|^2}$
- $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z \cdot \overline{z}}$
- $\varphi = \arctan(\frac{x}{y}), r = |z|, x = r \cdot \cos(\varphi), y = r \cdot \sin(\varphi)$
- $\overline{z} = x - iy$
- $z = r(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)) = r \cdot e^{i\varphi}$

Koordinatentransformation**2D - Kreiskordinaten**

$$\left(\begin{array}{c} x \\ y \end{array} \right) \mapsto r \left(\begin{array}{c} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{array} \right), \quad dxdy \mapsto r \cdot d\varphi dr$$

3D - Kugelkoordinaten

$$\left(\begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array} \right) \mapsto r \left(\begin{array}{c} \sin(\theta) \cos(\varphi) \\ \sin(\theta) \sin(\varphi) \\ \cos(\theta) \end{array} \right), \quad dxdydz \mapsto r^2 \sin(\theta) dr d\theta d\varphi$$

3D - Zylinderkoordinaten

$$\left(\begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array} \right) \mapsto \left(\begin{array}{c} r \cdot \cos(\varphi) \\ r \cdot \sin(\varphi) \\ z \end{array} \right), \quad dxdydz \mapsto r \cdot dr d\varphi dz$$

Sonstiges**Bekannte Abl. und Integrale**

$\frac{d}{dx} f(x)$	$f(x)$	$\int f(x) dx$
$\frac{1}{\cos^2(x)}$	$\tan(x)$	$-\ln(\cos(x))$
$\cosh(x)$	$\sinh(x)$	$\cosh(x)$
$\frac{1}{\cosh^2(x)}$	$\tanh(x)$	$\ln(\cosh(x))$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x)$	$\sqrt{1-x^2} + x \sin^{-1}(x)$
$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos(x)$	$x \arccos^{-1}(x) - \sqrt{1-x^2}$
$\frac{1}{x^2+1}$	$\arctan(x)$	$x \tan^{-1}(x) - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1)$
$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\operatorname{arcsinh}(x)$	$x \sinh^{-1}(x) - \sqrt{x^2 + 1}$
$\frac{1}{\sqrt{x-1}\sqrt{x+1}}$	$\operatorname{arccosh}(x)$	$x \cosh^{-1}(x) - \sqrt{x-1}\sqrt{x+1}$
$\frac{1}{1-x^2}$	$\operatorname{arctanh}(x)$	$\frac{1}{2} \ln(1-x^2) + x \tanh^{-1}(x)$
$\cos(2x)$	$\sin(x) \cos(x)$	$-\frac{1}{2} \cos^2(x)$
$\sin(2x)$	$\sin^2(x)$	$\frac{1}{2} (x - \sin(x) \cos(x))$
$-2 \sin(x) \cos(x)$	$\cos^2(x)$	$\frac{1}{2} (x + \sin(x) \cos(x))$
$\frac{1}{x}$	$\ln(x)$	$x \cdot \ln(x) - x$
$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	$\sqrt{1-x^2}$	$\frac{1}{2} (\sqrt{1-x^2} x + \sin^{-1}(x))$

Landau-Notation

$$\bullet \, f \in \mathcal{O}(g) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{|f(x)|}{g(x)} < \infty$$

$$\bullet \, f \in o(g) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{|f(x)|}{g(x)} = 0$$

$$\bullet \, f \in \Omega(g) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{|f(x)|} < \infty$$

$$\bullet \, f \in \omega(g) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{|f(x)|} = 0$$

Bekannte Reihen

Harmonische Reihe	$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^a} = +\infty$
	$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^a}$ div. für $a \leq 1$, konv. sonst
Potenzreihe	$\sum_{k=1}^{\infty} a_0 q^k = \frac{a_0}{1-q} \, \forall q < 1$
Logarithmusreihe	$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} = \ln(1+x)$
Arcus-Tangens-Reihe	$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} = \arctan(x)$ in $[-1, 1]$
Exponentialreihe	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = \exp(z)$
	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e$
Binomialreihe	$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{1}{\alpha} x^k = (1+x)^\alpha$

Allgemeines

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$
- $\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{k}{k+1} \right)^k = \frac{1}{e}$
- $k! \geq 2^{n+1}$
- $x > 0 \Rightarrow e^x > \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$
- $||a| - |b|| \leq |a - b| \leq |a| + |b|, |a + b| \leq |a| + |b|$
- $\forall n > 0 : (1+x)^n \geq 1 + nx$ (Bernoulli-Ungleichung)