

Geometria Algebraica I: Conjuntos algebraicos afines

Universidad Nacional de Colombia

Edgar Santiago Ochoa Quiroga

Problema 1:

Pruebe que los siguientes conjuntos no son algebraicos:

- $\{(z, w) \in A^2(\mathbb{C}) \mid |z|^2 + |w|^2 = 1\}$.

Solución:

Sea $X = \{(z, w) \in A^2(\mathbb{C}) \mid |z|^2 + |w|^2 = 1\}$. Suponga que X es un conjunto algebraico, luego existe $S \subseteq \mathbb{C}[x, y]$, no vacío y de polinomios no constantes tal que $X = V(S)$. Sea $f(x, y) = \sum_{i=0}^m f_i(y)x^i \in S$, donde $f_i(y) \in \mathbb{C}[y]$. Consideremos $w_0 \in \mathbb{C}$ tal que $|w_0| < 1$, luego $|z|^2 = 1 - |w_0|^2$, luego el polinomio $f(x, w_0) = \sum_{i=0}^m f_i(w_0)x^i$ tiene infinitas raíces, ya que hay infinitos puntos en el círculo del plano complejo centrado en 0 y de radio $1 - |w_0|^2$. Pero esto solo es posible si $f_i(w_0) = 0$ para todo $|w_0| < 1$ y cada $i = 0, 1, \dots, m$, luego como hay infinitos w_0 complejos, que cumplen tener norma menor que 1, $f_i = 0$ para todo $i = 0, 1, \dots, m$, así $f = 0$, pero esto es una contradicción, ya que f por hipótesis es no constante. Así concluimos que X no es algebraico.

□□

- $\{(\cos(t), \sin(t), t) \in A^3(\mathbb{R}) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

Solución:

Sea $X = \{(\cos(t), \sin(t), t) \in A^3(\mathbb{R}) \mid t \in \mathbb{R}\}$. Suponga que X es un conjunto algebraico, luego existe $S \subseteq \mathbb{R}[x, y, z]$, no vacío y de polinomios no constantes tal que $X = V(S)$. Sea $f(x, y, z) = \sum_{i=0}^m f_i(x, y)z^i \in S$, donde $f_i(x, y) \in \mathbb{R}[x, y]$. Consideremos $\theta_0 \in [0, 2\pi)$ luego por la periodicidad del coseno y del seno, note que $f(\cos(\theta_0 + 2k\pi), \sin(\theta_0 + 2k\pi), \theta_0 + 2k\pi) = f(\cos(\theta_0), \sin(\theta_0), \theta_0 + 2k\pi) = 0$, para todo $k \in \mathbb{Z}$, ya que este último es un punto de X . Así para θ_0 fijo tenemos que $f(\cos(\theta_0), \sin(\theta_0), z)$ tiene infinitas raíces, luego $f_i(\cos(\theta_0), \sin(\theta_0)) = 0$ para todo $\theta_0 \in [0, 2\pi)$ y cada $i = 0, 1, \dots, m$. Así cada f_i tiene infinitas raíces, entonces $f_i = 0$ para todo $i = 0, 1, \dots, m$, luego $f = 0$, llegando así a una contradicción y concluyendo que X no es algebraico.

□□

Problema 2:

Muestre a través de un ejemplo que la unión infinita de algebraicos no siempre es un conjunto algebraico

Solución:

Consideremos $A^1(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ y tomemos $X = \mathbb{Z} \subseteq A^1(\mathbb{R})$ note que $\mathbb{Z} = \bigcup_{a \in \mathbb{Z}} \{a\}$, sabemos que $\{a\} = V(x - a)$, por lo que \mathbb{Z} es la unión contable de conjuntos algebraicos. Si X fuera algebraico existiría $S \subseteq \mathbb{R}[x]$, no vacío y de polinomios no constantes, tal que $X = V(S)$, luego dado $f \in S$, es un polinomio con infinitas raíces ya que todos los enteros son raíces, así $f = 0$, una contradicción. Mostrando así que una unión infinita de conjuntos algebraicos no es un conjunto algebraico siempre.

□, □

Problema 3:

Sean $V \subseteq A^n(\mathbb{K})$ y $W \subseteq A^m(\mathbb{K})$ conjuntos algebraicos. Demuestre que

$$V \times W = \{(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m) \in A^{n+m}(\mathbb{K}) \mid (a_1, \dots, a_n) \in V, (b_1, \dots, b_m) \in W\}$$

es algebraico.

Solución:

Como V y W son algebraicos, existen $S_1 \subseteq \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ y $S_2 \subseteq \mathbb{K}[y_1, \dots, y_m]$, no vacíos y de polinomios no constantes tales que $V = V(S_1)$ y $W = V(S_2)$. Definamos los conjuntos $\widehat{S}_1, \widehat{S}_2 \subseteq \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m]$, tales que, dada $\widehat{f} \in \widehat{S}_1$, tenemos que $\widehat{f}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = f(x_1, \dots, x_n)$, donde $f \in S_1$, y dada $\widehat{g} \in \widehat{S}_2$, tenemos que $\widehat{g}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = g(y_1, \dots, y_m)$, donde $g \in S_2$. Basta con probar que $V \times W = V(\widehat{S}_1 \cup \widehat{S}_2)$. Sea $p \in V \times W$, luego $p = (a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m)$, donde $(a_1, \dots, a_n) \in V$ y $(b_1, \dots, b_m) \in W$. Note que tomando $h \in \widehat{S}_1 \cup \widehat{S}_2$ tenemos que $h = \widehat{f}$ o $h = \widehat{g}$, para algún $\widehat{f} \in \widehat{S}_1$ o $\widehat{g} \in \widehat{S}_2$.

En el primer caso tenemos que $h(p) = \widehat{f}(p) = f(a_1, \dots, a_n) = 0$, ya que $(a_1, \dots, a_n) \in V(S_1)$. En el otro caso tenemos que $h(p) = \widehat{g}(p) = g(b_1, \dots, b_m) = 0$, ya que $(b_1, \dots, b_m) \in V(S_2)$. Concluyendo así que para todo $h \in \widehat{S}_1 \cup \widehat{S}_2$ tenemos que $h(p) = 0$ y por tanto $p \in V(\widehat{S}_1 \cup \widehat{S}_2)$, mostrando así que $V \times W \subseteq V(\widehat{S}_1 \cup \widehat{S}_2)$. Ahora sea $p \in V(\widehat{S}_1 \cup \widehat{S}_2)$ luego para todo $h \in \widehat{S}_1 \cup \widehat{S}_2$, $h(p) = 0$. Para los $h \in \widehat{S}_1$ tenemos que $h(p) = \widehat{f}(p) = f(p_1, \dots, p_n)$. Como es arbitrario, tenemos que para todo $f \in S_1$, $f(p_1, \dots, p_n) = 0$, es decir, $(p_1, \dots, p_n) \in V(S_1) = V$. De manera similar para los $h \in \widehat{S}_2$, tenemos que $0 = h(p) = \widehat{g}(p) = g(p_{n+1}, \dots, p_{n+m})$, concluyendo análogamente que $(p_{n+1}, \dots, p_{n+m}) \in V(S_2) = W$. Luego por como lo definimos concluimos que $p \in V \times W$, mostrando que $V(\widehat{S}_1 \cup \widehat{S}_2) \subseteq V \times W$. Por la doble continencia, concluimos la igualdad y por tanto que $V \times W$ es algebraico.

□, □