EDP I: Taller 2

Universidad Nacional de Colombia

Edgar Santiago Ochoa Quiroga

Problema 1:

Clasifique las siguientes ecuaciones según su tipo y llévelas a su forma canónica

i) $4u_{xx} + 12u_{xy} + 5u_{yy} = 6u_x - u_y$

Solución:

Notemos que los coeficientes que acompañan a las derivadas de segundo orden son $a = 4, b = 6$ y $c = 5$ de esta forma el discriminante es:

$$\delta(x, y) = 6^2 - 4 \cdot 5 = 16 > 0$$

Así concluimos que la ecuación es de tipo **hiperbólico**. Ahora procedemos a hallar nuestros cambios de variable haciendo uso de las curvas características:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{6 \pm \sqrt{16}}{4}$$

De esta forma tenemos las siguientes ecuaciones:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{5}{2} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}$$

y resolviéndolas obtenemos:

$$y = \frac{5}{2}x + c_1 \qquad y = \frac{1}{2}x + c_2$$

luego si despejamos las constantes:

$$c_1 = y - \frac{5}{2}x \qquad c_2 = y - \frac{1}{2}x$$

De esta forma ya podemos definir nuestro cambio de variable que viene dado de igualar $\xi = c_1$ y $\eta = c_2$, es decir:

$$\xi = y - \frac{5}{2}x \qquad \eta = y - \frac{1}{2}x$$

Ahora procedamos con llevar nuestra EDP a la forma canónica. Si hacemos $V(\xi, \eta) = u(x, y)$ determinemos las derivadas necesarias para luego reemplazar en la

Problema 1 continúa en la siguiente página. . .

EDP:

$$\begin{aligned} u_x &= V_\xi \xi_x + V_\eta \eta_x \\ &= -\frac{5}{2}V_\xi - \frac{1}{2}V_\eta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{xx} &= -\frac{5}{2}(V_{\xi\xi}\xi_x + V_{\xi\eta}\eta_x) - \frac{1}{2}(V_{\eta\eta}\eta_x + V_{\xi\eta}\xi_x) \\ &= -\frac{5}{2}(-\frac{5}{2}V_{\xi\xi} - \frac{1}{2}V_{\xi\eta}) - \frac{1}{2}(-\frac{1}{2}V_{\eta\eta} - \frac{5}{2}V_{\xi\eta}) \\ &= \frac{25}{4}V_{\xi\xi} + \frac{5}{2}V_{\xi\eta} + \frac{1}{4}V_{\eta\eta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{xy} &= -\frac{5}{2}(V_{\xi\xi}\xi_y + V_{\xi\eta}\eta_y) - \frac{1}{2}(V_{\eta\eta}\eta_y + V_{\xi\eta}\xi_y) \\ &= -\frac{5}{2}V_{\xi\xi} - \frac{5}{2}V_{\xi\eta} - \frac{1}{2}V_{\eta\eta} - \frac{1}{2}V_{\xi\eta} \\ &= -\frac{5}{2}V_{\xi\xi} - 3V_{\xi\eta} - \frac{1}{2}V_{\eta\eta} \\ u_y &= V_\xi \xi_y + V_\eta \eta_y \\ &= V_\xi + V_\eta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{yy} &= V_{\xi\xi}\xi_y + V_{\xi\eta}\eta_y + V_{\eta\eta}\eta_y + V_{\xi\eta}\xi_y \\ &= V_{\xi\xi} + 2V_{\xi\eta} + V_{\eta\eta} \end{aligned}$$

Ahora ya con todo esto determinado procedemos reemplazar en las siguientes expresiones

$$\begin{aligned} 4u_{xx} + 12u_{xy} + 5u_{yy} &= 25V_{\xi\xi} + 10V_{\xi\eta} + V_{\eta\eta} - 30V_{\xi\xi} - 36V_{\xi\eta} - 6V_{\eta\eta} \\ &\qquad + 5V_{\xi\xi} + 10V_{\xi\eta} + 5V_{\eta\eta} \\ &= -16V_{\xi\eta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6u_x - u_y &= -15V_\xi - 3V_\eta - V_\xi - V_\eta \\ &= -16V_\xi - 4V_\eta \end{aligned}$$

Finalmente reemplazando estos valores en la EDP obtenemos que:

$$-16V_{\xi\eta} = -16V_\xi - 4V_\eta$$

O en una forma mas simplificada esta seria la EDP en su forma canónica:

$$V_{\xi\eta} = V_\xi + \frac{1}{4}V_\eta$$

ii) $u_{xx} - 4u_{xy} + 4u_{yy} = 4 + 2u_x$

Solución:

Los coeficientes de la EDP son $a = 1, b = -2$ y $c = 4$ luego:

$$\delta(x, y) = 4 - 4 = 0$$

Esto quiere decir que la ecuación es de tipo **parabólico** y por tanto solo tenemos una ecuación característica dada por:

$$\frac{dy}{dx} = -2$$

Si la resolvemos obtenemos que $y = -2x + c$ y despejando la constante tenemos que $c = y + 2x$. Así tenemos que si $\xi = c$ entonces $\xi = y + 2x$. Ahora estudiemos el jacobiano para proponer un η adecuado:

$$\det\begin{pmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ \eta_x & \eta_y \end{pmatrix} = 2\eta_y - \eta_x \neq 0$$

Note que esta condición se cumple si $\eta = y$ así que ese es nuestro cambio de variable adecuado. Ahora si $V(\xi, \eta) = u(x, y)$ procedemos con determinar la derivadas necesarias para reemplazar en la EDP:

$$\begin{aligned} u_x &= V_\xi \xi_x + V_\eta \eta_x \\ &= 2V_\xi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{xx} &= 2(V_{\xi\xi}\xi_x + V_{\xi\eta}\eta_x) \\ &= 4V_{\xi\xi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{xy} &= 2(V_{\xi\xi}\xi_y + V_{\xi\eta}\eta_y) \\ &= 2V_{\xi\xi} + 2V_{\xi\eta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_y &= V_\xi \xi_y + V_\eta \eta_y \\ &= V_\xi + V_\eta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{yy} &= V_{\xi\xi}\xi_y + V_{\xi\eta}\eta_y + V_{\eta\eta}\eta_y + V_{\xi\eta}\xi_y \\ &= V_{\xi\xi} + 2V_{\xi\eta} + V_{\eta\eta} \end{aligned}$$

Ahora procedemos a reemplazar en las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} u_{xx} - 4u_{xy} + 4u_{yy} &= 4V_{\xi\xi} - 8V_{\xi\xi} - 8V_{\xi\eta} + 4V_{\xi\xi} + 8V_{\xi\eta} + 4V_{\eta\eta} \\ &= 4V_{\eta\eta} \\ 4 + 2u_x &= 4 + 4V_\xi \end{aligned}$$

Problema 1 continúa en la siguiente página. . .

Finalmente reemplazando en la EDP obtenemos que:

$$4V_{\eta\eta} = 4 + 4V_{\xi}$$

y simplificando un poco llegamos a que la forma canónica de la EDP es:

$$V_{\eta\eta} = 1 + V_{\xi}$$

iii) $(1+x^2)^2\partial_x^2 u - (1+y^2)^2\partial_y^2 u = 0$

Solución:

De la EDP sabemos que los coeficientes son $a = (1+x^2)^2, b = 0$ y $c = -(1+y^2)^2$. Luego tenemos que:

$$\delta(x,y) = (1+x^2)^2(1+y^2)^2 > 0$$

De este modo la ecuación es de tipo **hiperbólico** Así que podemos proceder hallando las características dadas por:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\pm\sqrt{(1+x^2)^2(1+y^2)^2}}{(1+x^2)^2}$$

Así tenemos las siguientes ecuaciones:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1+y^2}{1+x^2} \qquad\qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{1+y^2}{1+x^2}$$

$$\arctan y = \arctan x + c_1 \qquad\qquad \arctan y = -\arctan x + c_2$$

De esta manera si tomamos $\xi = c_1$ y $\eta = c_2$ tenemos que nuestros cambios de variable son:

$$\xi = \arctan y - \arctan x \qquad\qquad \eta = \arctan y + \arctan x$$

Ahora si consideramos $V(\xi,\eta) = u(x,y)$ realicemos las derivadas respectivas para posteriormente reemplazar:

$$\begin{aligned} u_x &= V_\xi \xi_x + V_\eta \eta_x \\ &= -\frac{1}{1+x^2} V_\xi + \frac{1}{1+x^2} V_\eta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{xx} &= \frac{2x}{(1+x^2)^2} V_\xi - \frac{1}{1+x^2} V_{\xi\xi}\xi_x - \frac{1}{1+x^2} V_{\xi\eta}\eta_x - \frac{2x}{(1+x^2)^2} V_\eta \\ &\qquad + \frac{1}{1+x^2} V_{\eta\eta}\eta_x + \frac{1}{1+x^2} V_{\xi\eta}\xi_x \\ &= \frac{2x}{(1+x^2)^2} V_\xi + \frac{1}{(1+x^2)^2} V_{\xi\xi} - \frac{1}{(1+x^2)^2} V_{\xi\eta} - \frac{2x}{(1+x^2)^2} V_\eta \\ &\qquad + \frac{1}{(1+x^2)^2} V_{\eta\eta} - \frac{1}{(1+x^2)^2} V_{\xi\eta} \\ &= \frac{1}{(1+x^2)^2} (2xV_\xi + V_{\xi\xi} - 2V_{\xi\eta} - 2xV_\eta + V_{\eta\eta}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_y &= V_\xi \xi_y + V_\eta \eta_y \\ &= \frac{1}{1+y^2} V_\xi + \frac{1}{1+y^2} V_\eta \\ &= \frac{1}{1+y^2} (V_\xi + V_\eta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{yy} &= -\frac{2y}{(1+y^2)^2}(V_\xi + V_\eta) + \frac{1}{1+y^2}(V_{\xi\xi}\xi_y + V_{\xi\eta}\eta_y + V_{\xi\eta}\xi_y + V_{\eta\eta}\eta_y) \\ &= \frac{1}{(1+y^2)^2}(-2yV_\xi - 2yV_\eta) + \frac{1}{(1+y^2)^2}(V_{\xi\xi} + 2V_{\xi\eta} + V_{\eta\eta}) \\ &= \frac{1}{(1+y^2)^2}(-2yV_\xi - 2yV_\eta + V_{\xi\xi} + 2V_{\xi\eta} + V_{\eta\eta}) \end{aligned}$$

Y reemplazando en la expresión obtenemos que:

$$\begin{aligned} (1+x^2)^2\partial_x^2 u - (1+y^2)^2\partial_y^2 u &= 2xV_\xi + V_{\xi\xi} - 2V_{\xi\eta} - 2xV_\eta + V_{\eta\eta} \\ &\quad + 2yV_\xi + 2yV_\eta - V_{\xi\xi} - 2V_{\xi\eta} - V_{\eta\eta} \\ &= (2x+2y)V_\xi + (2y-2x)V_\eta - 4V_{\xi\eta} \end{aligned}$$

Así obtenemos que la EDP seria:

$$V_{\xi\eta} = \frac{1}{2}[(y+x)V_\xi + (y-x)V_\eta]$$

Note que aun no hemos terminado ya que debemos quedarnos solo con funciones de ξ y η pero notemos que $y = \tan\left(\dfrac{\xi+\eta}{2}\right)$ y $x = \tan\left(\dfrac{\eta-\xi}{2}\right)$ El despejar esta asegurado aquí ya que el jacobiano siempre es distinto de 0 en este caso:

$$\det\begin{pmatrix}\xi_x & \xi_y\\ \eta_x & \eta_y\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}\dfrac{-1}{x^2+1} & \dfrac{1}{y^2+1}\\ \dfrac{1}{x^2+1} & \dfrac{1}{y^2+1}\end{pmatrix} = \frac{-1}{(x^2+1)(y^2+1)} - \frac{1}{(x^2+1)(y^2+1)}$$
$$= \frac{-2}{(x^2+1)(y^2+1)} \neq 0$$

Así podemos concluir que la forma canónica de la EDP es:

$$V_{\xi\eta} = \frac{1}{2}\left[\left(\tan\left(\frac{\xi+\eta}{2}\right) + \tan\left(\frac{\eta-\xi}{2}\right)\right)V_\xi + \left(\tan\left(\frac{\xi+\eta}{2}\right) - \tan\left(\frac{\eta-\xi}{2}\right)\right)V_\eta\right]$$

Problema 2:

Considere la ecuación

$$u_{xx} + 2u_{xy} + (1 - f(y))u_{yy} = 0,$$

donde

$$f(y) = \begin{cases} -1, & y < -1, \\ 0, & |y| \leq 1, \\ 1, & y > 1. \end{cases}$$

i) Encuentre los dominios donde la ecuación es hiperbólica, parabólica y elíptica.

Solución:

Los coeficientes de la EDP son $a = 1, b = 1$ y $c = 1 - f(y)$ de esta manera tenemos que:

$$\delta(x, y) = 1 - 1 \cdot (1 - f(y)) = f(y)$$

Entonces si consideramos la definición de $f(y)$ cuando $y > 1$ tenemos que $\delta(x, y) = f(y) = 1 > 0$. Luego si $|y| \leq 1$ tenemos que $\delta(x, y) = f(y) = 0$ y por ultimo si $y < -1$ tenemos que $\delta(x, y) = f(y) = -1 < 0$ entonces los dominios son:

- Si $y > 1$ la ecuación es **hiperbólica.**
- Si $-1 \leq y \leq 1$ la ecuación es **parabólica.**
- Si $y < -1$ la ecuación es **elíptica.**

ii) Para cada uno de los tres dominios, encuentre las transformaciones canónicas y su forma canónica.

Solución:

- Caso **Hiperbólico**, es decir cuando $y > 1$: Como en este caso $f(y) = 1$ tenemos que la EDP es:

$$u_{xx} + 2u_{xy} = 0$$

Ahora procedemos a determinar los cambios de variable por medio de las características:

$$\frac{dy}{dx} = 1 \pm 1$$

Luego solucionando y despejando las constantes tenemos que:

$$y = 2x + c_1 \qquad\qquad y = c_2$$
$$c_1 = y - 2x$$

De esta manera nuestro cambio de variable esta dado por $\xi = y - 2x$ y $\eta = y$. Luego si consideramos $V(\xi, \eta) = u(x, y)$ realicemos las derivadas necesarias para reemplazar en la EDP:

$$\begin{aligned} u_x &= V_\xi \xi_x + V_\eta \eta_x \\ &= -2V_\xi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{xx} &= -2(V_{\xi\xi}\xi_x + V_{\xi\eta}\eta_x) \\ &= 4V_{\xi\xi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{xy} &= -2(V_{\xi\xi}\xi_y + V_{\xi\eta}\eta_y) \\ &= -2V_{\xi\xi} - 2V_{\xi\eta} \end{aligned}$$

Luego reemplazando obtenemos que:

$$\begin{aligned} u_{xx} + 2u_{xy} &= 4V_{\xi\xi} - 4V_{\xi\xi} - 4V_{\xi\eta} \\ &= -4V_{\xi\eta} \end{aligned}$$

Así en la EDP queda que:

$$-4V_{\xi\eta} = 0$$

y simplificando la forma canónica de la EDP es:

$$V_{\xi\eta} = 0$$

- Caso **Parabólico**, es decir cuando $-1 \leq y \leq 1$: Como en este caso $f(y) = 0$ tenemos que la EDP es:

  $$u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} = 0$$

  Ahora hallemos nuestro primer cambio de variable por la característica:

  $$\frac{dy}{dx} = 1$$

  Solucionando esta ecuación obtenemos que $y = x + c$ y si hacemos $c = \xi$ tenemos que $\xi = y - x$. El siguiente cambio de variable sera motivado por el jacobiano:

  $$\det \begin{pmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \eta_x & \eta_y \end{pmatrix} = -\eta_y - \eta_x \neq 0$$

  Luego note que si tomamos $\eta = y$ se satisface la condición de ser diferente a 0. Ahora si procedemos a determinar las derivadas necesarias para reemplazar luego en la EDP:

$$\begin{aligned} u_x &= V_\xi \xi_x + V_\eta \eta_x \\ &= -V_\xi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{xx} &= -(V_{\xi\xi}\xi_x + V_{\xi\eta}\eta_x) \\ &= V_{\xi\xi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{xy} &= -(V_{\xi\xi}\xi_y + V_{\xi\eta}\eta_y) \\ &= -V_{\xi\xi} - V_{\xi\eta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_y &= V_\xi \xi_y + V_\eta \eta_y \\ &= V_\xi + V_\eta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{yy} &= V_{\xi\xi}\xi_y + V_{\xi\eta}\eta_y + V_{\eta\xi}\xi_y + V_{\eta\eta}\eta_y \\ &= V_{\xi\xi} + 2V_{\xi\eta} + V_{\eta\eta} \end{aligned}$$

De esta manera si reemplazamos en le expresión tenemos que:

$$\begin{aligned} u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} &= V_{\xi\xi} + 2(-V_{\xi\xi} - V_{\xi\eta}) + V_{\xi\xi} + 2V_{\xi\eta} + V_{\eta\eta} \\ &= V_{\eta\eta} \end{aligned}$$

Así llegamos a que la forma canónica de la EDP es:

$$V_{\eta\eta} = 0$$

- Caso *Eliptico*, es decir cuando $y < -1$: Como en este caso $f(y) = -1$ tenemos que la EDP es:

$$u_{xx} + 2u_{xy} + 2u_{yy} = 0$$

Luego si definimos $\phi = \xi + i\eta$ por medio de la característica positiva tenemos que:

$$\frac{dy}{dx} = 1 + i$$

y si resolvemos obtenemos que $y = x + ix + c$ luego si despejamos la constante y hacemos $\phi = c$ tenemos que $\xi + i\eta = y - x - ix$. Así concluimos que nuestros cambios de variable adecuados son $\xi = y - x$ y $\eta = -x$. Ahora procedemos a hallar la derivadas necesarias para luego reemplazar:

$$\begin{aligned} u_x &= V_\xi \xi_x + V_\eta \eta_x \\ &= -(V_\xi + V_\eta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{xx} &= -(V_{\xi\xi}\xi_x + V_{\xi\eta}\eta_x + V_{\eta\xi}\xi_x + V_{\eta\eta}\eta_x) \\ &= V_{\xi\xi} + 2V_{\xi\eta} + V_{\eta\eta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{xy} &= -(V_{\xi\xi}\xi_y + V_{\xi\eta}\eta_y + V_{\eta\xi}\xi_y + V_{\eta\eta}\eta_y) \\ &= -V_{\xi\xi} - V_{\xi\eta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_y &= V_\xi \xi_y + V_\eta \eta_y \\ &= V_\xi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{yy} &= V_{\xi\xi}\xi_y + V_{\xi\eta}\eta_y \\ &= V_{\xi\xi} \end{aligned}$$

Ahora si reemplazamos en la expresión obtenemos que:

$$\begin{aligned} u_{xx} + 2u_{xy} + 2u_{yy} &= V_{\xi\xi} + 2V_{\xi\eta} + V_{\eta\eta} + 2(-V_{\xi\xi} - V_{\xi\eta}) + 2V_{\xi\xi} \\ &= V_{\xi\xi} + V_{\eta\eta} \end{aligned}$$

Es decir que la EDP en su forma canónica es:

$$V_{\xi\xi} + V_{\eta\eta} = 0$$

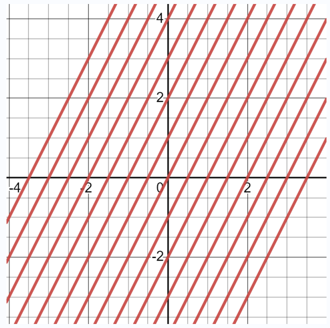
ʘ‿ʘ

iii) Dibuje las características para el caso hiperbólico.

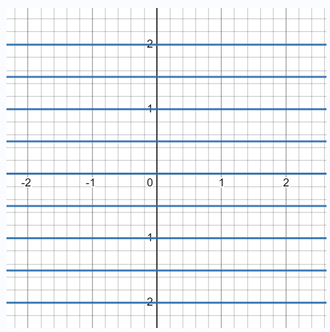
Solución:

Las características para el caso hiperbólico están dadas por $y = 2x + c_1$ y $y = c_2$ luego estos serian sus dibujos:

$$y = 2x + c_1$$



$$y = c_2$$



Problema 3:

Considere la ecuación

$$u_{xx} + 4u_{xy} + u_x = 0$$

i) Lleve la ecuación a la forma canónica.

Solución:

Los coeficientes de la ecuación son $a = 1, b = 2$ y $c = 0$ luego el discriminante es:

$$\delta(x, y) = 2^2 - 1 \cdot 0 = 4 > 0$$

Por lo tanto la ecuación es **hiperbólica** y podemos determinar los cambios de variable gracias a las características:

$$\frac{dy}{dx} = 2 \pm 2$$

Luego solucionando y despejando para constantes tenemos que:

$$\begin{aligned} y &= 4x + c_1 \\ c_1 &= y - 4x \end{aligned} \qquad\qquad y = c_2$$

Luego si tomamos a $\xi = c - 1$ y $\eta = c_2$ tenemos nuestros cambios de variables $\xi = y - 4x$ y $\eta = y$. Determinemos las derivadas necesarias para llevar la EDP a la forma canónica considerando $V(\xi, \eta) = u(x, y)$:

$$\begin{aligned} u_x &= V_\xi \xi_x + V_\eta \eta_x \\ &= -4V_\xi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{xx} &= -4(V_{\xi\xi}\xi_x + V_{\xi\eta}\eta_x) \\ &= 16V_{\xi\xi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{xy} &= -4(V_{\xi\xi}\xi_y + V_{\xi\eta}\eta_y) \\ &= -4V_{\xi\xi} - 4V_{\xi\eta} \end{aligned}$$

y reemplazando obtenemos que:

$$\begin{aligned} u_{xx} + 4u_{xy} + u_x &= 16V_{\xi\xi} + 4(-4V_{\xi\xi} - 4V_{\xi\eta}) - 4V_\xi \\ &= -16V_{\xi\eta} - 4V_\xi \end{aligned}$$

Así tenemos que:

$$-16V_{\xi\eta} = 4V_\xi$$

y simplificando llegamos a que la forma canónica de la EDP es:

$$V_{\xi\eta} = -\frac{1}{4}V_\xi$$

ii) Encuentre la solución especifica $u(x,8x) = 0, u_x(x,8x) = 4e^{-2x}$.

Solución:

Si realizamos la sustitución $w = V_\xi$ en la forma canónica obtenida tenemos que:

$$\frac{\partial w}{\partial \eta} = -\frac{1}{4}w$$

De esta forma la EDP no depende ξ y podemos buscar solución como si fuera una EDO por medio de la separación de variables:

$$\int \frac{\partial w}{w} = -\frac{1}{4}\int \partial\eta$$
$$\log w = -\frac{1}{4}\eta + c(\xi)$$
$$w = g(\xi)e^{-\frac{1}{4}\eta}$$

Ahora devolvamos nuestra sustitución y resolvamos nuevamente simplemente integrando en ambos lados de la ecuación respecto a ξ:

$$V_\xi = w = g(\xi)e^{-\frac{1}{4}\eta}$$
$$\int V_\xi \, d\xi = e^{-\frac{1}{4}\eta}\int g(\xi)\, d\xi$$
$$V = e^{-\frac{1}{4}\eta}G(\xi) + C(\eta)$$

Aquí como $g(\xi)$ es una función de una sola variable suponemos que la integramos normalmente y nos genera otra función de una variable $G(\xi)$ mas una función que depende de η ya que al realizar la derivada parcial respecto a ξ esa se haría 0. Recordemos que $V(\xi,\eta) = u(x,y)$ y que nuestro cambio de variable estaba dado por $\xi = y - 4x$ y $\eta = y$ así que podemos expresar nuestra solución general en términos de x y y y quedaría:

$$u(x,y) = e^{-\frac{1}{4}y}G(y-4x) + C(y)$$

De esta manera podemos usar nuestras condiciones iniciales para hallar la solución especifica:

$$0 = u(x,8x) = e^{-2x}G(4x) + C(8x)$$
$$4e^{-2x} = u_x(x,8x) = e^{-2x}(-4G'(4x))$$

De segunda ecuación despejando para G' obtenemos que:

$$G'(4x) = -1$$

e integrando a ambos lados respecto a x obtenemos que:

$$G(4x) = -4x$$

Ahora reemplazando este valor en la primera ecuación y despejando para C obtenemos que

$$C(8x) = 4xe^{-2x}$$

Ahora recordemos que nosotros queremos hallar quienes son $C(y)$ y $G(y-4x)$ pero notemos que:

$$C(y) = C\left(8\left(\frac{y}{8}\right)\right) = \frac{y}{2}e^{-\frac{1}{4}y}$$

$$G(y-4x) = G\left(4\left(\frac{y}{4}-x\right)\right) = -4\left(\frac{y}{4}-x\right) = -y+4x$$

y reemplazando en nuestra solución general obtenemos que la solución especifica es:

$$u(x,y) = e^{-\frac{1}{4}y}(-y+4x) + \frac{y}{2}e^{-\frac{1}{4}y} = 4xe^{-\frac{1}{4}y} - \frac{y}{2}e^{-\frac{1}{4}y}$$

Aunque solo por seguridad verifiquemos si esta solución satisface la EDP original y cumple las condiciones iniciales:

$$u_x(x,y) = 4e^{-\frac{1}{4}y}$$

$$u_{xx}(x,y) = 0$$

$$u_{xy}(x,y) = -e^{-\frac{1}{4}y}$$

Con esta información reemplacemos y veamos que si da 0:

$$\begin{aligned} u_{xx} + 4u_{xy} + u_x &= 0 + 4(-e^{-\frac{1}{4}y}) + 4e^{-\frac{1}{4}y} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ahora que confirmamos que satisface la EDP veamos que si satisface las condiciones iniciales:

$$\begin{aligned} u(x,8x) &= 4xe^{-\frac{1}{4}(8x)} - \frac{8x}{2}e^{-\frac{1}{4}(8x)} \\ &= 4xe^{-2x} - 4xe^{-2x} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_x(x,8x) &= 4e^{-\frac{1}{4}(8x)} \\ &= 4e^{-2x} \end{aligned}$$

Como cumple la EDP y las condiciones iniciales ahora si con toda seguridad podemos decir que es la solución especifica.

Problema 4:

Sea $U \subset \mathbb{R}^2$ un abierto. Considere la ecuación de segundo orden

$$a(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}u = 0$$

donde $u : U \to \mathbb{R}$ pertenece $C^2(U)$ y los términos a, b, c son funciones $C^1(U)$. Definimos el discriminante de la EDP por

$$\delta(x,y) = b^2(x,y) - a(x,y)c(x,y).$$

Considere el cambio de variable

$$\xi = \xi(x,y), \quad \eta = \eta(x,y)$$

donde las funciones son de clase $C^2(U)$ y el Jacobiano det $\left(\frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)}\right) \neq 0$ en todo punto $(x,y) \in U$.

Muestre que el signo del discriminante $\delta(x,y)$ es invariante por el cambio de variables (ξ,η). Es decir, considere $v(\xi,\eta) = u(x,y)$, usando que u satisface la EDP original, muestre que v satisface la ecuación:

$$A(\xi,\eta)\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + 2B(\xi,\eta)\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} + C(\xi,\eta)\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} = G\left(\xi, \eta, \nu, \frac{\partial v}{\partial \xi}, \frac{\partial v}{\partial \eta}\right),$$

para algunas funciones A, B, C, G. Luego muestre que el signo de $\delta(\xi,\eta) = B^2(\xi,\eta) - A(\xi,\eta)C(\xi,\eta)$ es igual al signo de $\delta(x,y)$.

Solución:

Por simpleza de ahora en adelante escribiremos $a = a(x,y), b = b(x,y)$ y $c = c(x,y)$ entonces nuestra EDP reescrita queda como:

$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} = 0$$

Ahora por el cambio de variable $\xi = \xi(x,y)$ y $\eta = \eta(x,y)$ como estas funciones son $C^2(U)$ por hipótesis podemos derivar sin ningún problema. Si consideramos $V(\xi,\eta) = u(x,y)$ tenemos que:

$$u_x = V_\xi \xi_x + V_\eta \eta_x$$

$$\begin{aligned} u_{xx} &= (V_{\xi\xi}\xi_x + V_{\xi\eta}\eta_x)\xi_x + V_\xi \xi_{xx} + (V_{\eta\eta}\eta_x + V_{\xi\eta}\xi_x)\eta_x + V_\eta \eta_{xx} \\ &= \xi_x^2 V_{\xi\xi} + 2\xi_x \eta_x V_{\xi\eta} + \eta_x^2 V_{\eta\eta} + V_\xi \xi_{xx} + V_\eta \eta_{xx} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{xy} &= (V_{\xi\xi}\xi_y + V_{\xi\eta}\eta_y)\xi_x + V_\xi \xi_{xy} + (V_{\eta\eta}\eta_y + V_{\xi\eta}\xi_y)\eta_x + V_\eta \eta_{xy} \\ &= \xi_x \xi_y V_{\xi\xi} + (\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x) V_{\xi\eta} + \eta_x \eta_y V_{\eta\eta} + V_\xi \xi_{xy} + V_\eta \eta_{xy} \end{aligned}$$

$$u_y = V_\xi \xi_y + V_\eta \eta_y$$

$$\begin{aligned} u_{yy} &= (V_{\xi\xi}\xi_y + V_{\xi\eta}\eta_y)\xi_y + V_\xi \xi_{yy} + (V_{\eta\eta}\eta_y + V_{\xi\eta}\xi_y)\eta_y + V_\eta \eta_{yy} \\ &= \xi_y^2 V_{\xi\xi} + 2\xi_y \eta_y V_{\xi\eta} + \eta_y^2 V_{\eta\eta} + V_\xi \xi_{yy} + V_\eta \eta_{yy} \end{aligned}$$

Con todo esto si reemplazamos en la EDP original ya que $u(x, y)$ la satisface tenemos la siguiente EDP:

$$\begin{aligned} &a\xi_x^2 V_{\xi\xi} + 2a\xi_x \eta_x V_{\xi\eta} + a\eta_x^2 V_{\eta\eta} + aV_\xi \xi_{xx} + aV_\eta \eta_{xx} \\ &\quad + 2b\xi_x \xi_y V_{\xi\xi} + 2b(\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x) V_{\xi\eta} + 2b\eta_x \eta_y V_{\eta\eta} + 2bV_\xi \xi_{xy} + 2bV_\eta \eta_{xy} \\ &\qquad + c\xi_y^2 V_{\xi\xi} + 2c\xi_y \eta_y V_{\xi\eta} + c\eta_y^2 V_{\eta\eta} + cV_\xi \xi_{yy} + cV_\eta \eta_{yy} = 0 \end{aligned}$$

Si juntamos términos semejantes y dejamos los términos de orden menor al lado derecho de la ecuación tenemos que:

$$\begin{aligned} (a\xi_x^2 + 2b\xi_x \xi_y + c\xi_y^2) V_{\xi\xi} + 2(a\xi_x \eta_x + b\xi_x \eta_y + b\xi_y \eta_x + c\xi_y \eta_y) V_{\xi\eta} + (a\eta_x^2 + 2b\eta_x \eta_y + c\eta_y^2) V_{\eta\eta} \\ = -\left[(a\xi_{xx} + 2b\xi_{xy} + c\xi_{yy}) V_\xi + (a\eta_{xx} + 2b\eta_{xy} + c\eta_{yy}) V_\eta\right] \end{aligned}$$

Por hipótesis $J = \det\left(\dfrac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)}\right) = \xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x \neq 0$ en todo $(x, y) \in U$, es decir nuestro cambio de variable es invertible y todas las funciones que dependen de x y y se pueden reescribir en términos de ξ y η, así mismo las derivadas de ξ y η respecto a x y y se pueden reescribir solo en términos de ξ y η. Así podemos concluir que V satisface:

$$A(\xi, \eta) V_{\xi\xi} + 2B(\xi, \eta) V_{\xi\eta} + C(\xi, \eta) V_{\eta\eta} = G(\xi, \eta, V, V_\xi, V_\eta)$$

Donde tenemos que:

$$
\begin{aligned}
A = A(\xi,\eta) &= a\xi_x^2 + 2b\xi_x\xi_y + c\xi_y^2 \\
B = B(\xi,\eta) &= a\xi_x\eta_x + b\xi_x\eta_y + b\xi_y\eta_x + c\xi_y\eta_y \\
C = C(\xi,\eta) &= a\eta_x^2 + 2b\eta_x\eta_y + c\eta_y^2 \\
G = G(\xi,\eta,V,V_\xi,V_\eta) &= -\left[(a\xi_{xx} + 2b\xi_{xy} + c\xi_{yy})V_\xi + (a\eta_{xx} + 2b\eta_{xy} + c\eta_{yy})V_\eta\right]
\end{aligned}
$$

Ya con esto recordemos que el discriminante del original esta dado por:

$$\delta(x,y) = b^2 - ab$$

Ahora tenemos una nueva EDP y su discriminante esta dado por:

$$\delta(\xi,\eta) = B^2 - AC$$

Ahora calculemos estaos valores para determinar si hay alguna relación entre los dos discriminantes:

$$
\begin{aligned}
B^2 = a^2\xi_x^2\eta_x^2 + b^2\xi_x^2\eta_y^2 + b^2\xi_y^2\eta_x^2 + c^2\xi_y^2\eta_y^2 + 2ab\xi_x^2\eta_x\eta_y + 2ab\xi_x\xi_y\eta_x^2 + 2ac\xi_x\xi_y\eta_x\eta_y \\
+ 2b^2\xi_x\xi_y\eta_x\eta_y + 2bc\xi_x\xi_y\eta_y^2 + 2bc\xi_y^2\eta_x\eta_y
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
AC = a^2\xi_x^2\eta_x^2 + 2ab\xi_x^2\eta_x\eta_y + ac\xi_x^2\eta_y^2 + 2ab\xi_x\xi_y\eta_x^2 + 4b^2\xi_x\xi_y\eta_x\eta_y + 2bc\xi_x\xi_y\eta_y^2 \\
+ ac\xi_y^2\eta_x^2 + 2bc\xi_y^2\eta_x\eta_y + c^2\xi_y^2\eta_y^2
\end{aligned}
$$

Así entonces tenemos que:

$$
\begin{aligned}
B^2 - AC &= b^2\xi^2\eta_y^2 + b^2\xi_y^2\eta_x^2 + 2ac\xi_x\xi_y\eta_x\eta_y + 2b^2\xi_x\xi_y\eta_x\eta_y - ac\xi_x^2\eta_y^2 - 4b^2\xi_x\xi_y\eta_x\eta_y - ac\xi_y^2\eta_x^2 \\
&= (b^2 - ac)\xi_x^2\eta_y^2 + (b^2 - ac)\xi_y^2\eta_x^2 - 2(b^2 - ac)\xi_x\xi_y\eta_x\eta_y \\
&= (b^2 - ac)(\xi_x^2\eta_y^2 - 2\xi_x\xi_y\eta_x\eta_y + \xi_y^2\eta_x^2) \\
&= (b^2 - ac)(\xi_x\eta_y - \xi_y\eta_x)^2
\end{aligned}
$$

Ahora del lado izquierdo tenemos el discriminante de nuestra EDP luego del cambio de variable y al lado derecho tenemos el discriminante de la EDP original multiplicada por el jacobiano al cuadrado, es decir podemos reescribir esta expresión como:

$$\delta(\xi,\eta) = \delta(x,y)J^2$$

Ahora como por hipótesis $J \neq 0$ tenemos que $J^2 > 0$ por lo que este no afectara el signo del discriminante nuevo. Siendo mas explícitos esta expresión nos dice que si $\delta(x,y) > 0$ entonces $\delta(\xi,\eta) > 0$, si $\delta(x,y) = 0$ entonces $\delta(\xi,\eta) = 0$ y si $\delta(x,y) < 0$ entonces $\delta(\xi,\eta) < 0$, es decir que independientemente del cambio de variable ya que propusimos uno arbitrario que cumpla las condiciones iniciales tenemos que el discriminaste no cambia su signo, o en otras palabras el discriminante es invariante por el cambio de variables.