EDP I: Taller 3

Universidad Nacional de Colombia

Edgar Santiago Ochoa Quiroga

Problema 1:

Sea U un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$ tal que su borde $\partial U = \overline{U} \setminus U$ es de clase C^1. Muestre:

i) **Formula de integración por partes:** Sean $i = 1, \ldots, n$ fijo, $u, v \in C^1(\overline{U})$. Entonces

$$\int_U (\partial_{x_i} u) v \, dx = \int_{\partial U} (uv)\eta_i \, dS - \int_U u(\partial_{x_i} v) \, dx,$$

donde η_i es la $i-$ésima componente del vector normal a ∂U.

Solución:

Sea $F \in C^1(\overline{U}; \mathbb{R}^n)$ un campo vectorial tal que $F = (F_1, \ldots, F_n)$, donde $F_i = uv$ para $i = 1, \ldots, n$ fijo y $F_j = 0$ para $j \neq i$, como F cumple las condiciones podemos aplicar el teorema de la divergencia que nos dice que:

$$\int_U div(F) \, dx = \int_{\partial U} F \cdot \eta \, dS.$$

Como tenemos que $F = (0, \ldots, uv, \ldots, 0)$ y $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_i, \ldots, \eta_n)$, luego

$$\begin{aligned} F \cdot \eta &= (uv)\eta_i, \\ div(F) &= \partial_{x_i}(uv) = (\partial_{x_i} u)v + u(\partial_{x_i} v). \end{aligned}$$

Así reemplazando en la formula que nos da el teorema de la divergencia, tenemos que:

$$\int_U (\partial_{x_i} u)v + u(\partial_{x_i} v) \, dx = \int_{\partial U} (uv)\eta_i \, dS.$$

Luego, por la linealidad de la integral podemos separar y despejar, obteniendo así la formula de integración por partes

$$\int_U (\partial_{x_i} u) v \, dx = \int_{\partial U} (uv)\eta_i \, dS - \int_U u(\partial_{x_i} v) \, dx.$$

ii) **Formula de Green I:** $\int_U \Delta u \, dx = \int_{\partial U} \nabla u \cdot \eta \, dS$, donde η es el vector normal a la superficie ∂U.

Solución:

Por definición del Laplaciano tenemos que:

$$\begin{aligned} \int_U \Delta u \, dx &= \int_U \left(\sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i}^2 u \right) dx \\ &= \sum_{i=1}^{n} \int_U \partial_{x_i}^2 u \, dx. \end{aligned}$$

Esto lo podemos hacer por la linealidad de la integral, ya que es una suma finita. Ahora note que a $\int_U \partial_{x_i}^2 u \, dx$ podemos aplicar la formula de integración por partes obtenida en i). Consideremos la siguiente reescritura de la integral para verla de forma más clara:

$$\int_U (\partial_{x_i}(\partial_{x_i} u)) \cdot 1 \, dx.$$

Es decir, nuestro $v = 1$ y la otra función es $\partial_{x_i} u$. Por la formula de integración por partes:

$$\int_U \partial_{x_i}^2 u \, dx = \int_{\partial U} (\partial_{x_i} u \cdot 1)\eta_i \, dS - \int_U \partial_{x_i} u(\partial_{x_i} 1) \, dx.$$

Pero como $\partial_{x_i} 1 = 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$, obtenemos que

$$\int_U \partial_{x_i}^2 u \, dx = \int_{\partial U} (\partial_{x_i} u)\eta_i \, dS.$$

Reemplazando este resultado y nuevamente por linealidad, de lo cual tenemos

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n \int_U \partial_{x_i}^2 u \, dx &= \sum_{i=1}^n \int_{\partial U} (\partial_{x_i} u)\eta_i \, dS \\ &= \int_{\partial U} \left(\sum_{i=1}^n (\partial_{x_i} u)\eta_i \right) \, dS.\end{aligned}$$

Note que,

$$\sum_{i=1}^n (\partial_{x_i} u)\eta_i = (\partial_{x_1} u, \ldots, \partial_{x_n} u) \cdot (\eta_1, \ldots, \eta_n) = \nabla u \cdot \eta.$$

Y si reemplazamos, da como resultado:

$$\int_{\partial U} \left(\sum_{i=1}^n (\partial_{x_i} u)\eta_i \right) \, dS = \int_{\partial U} \nabla u \cdot \eta \, dS$$

De esta forma hemos mostrado que:

$$\int_U \Delta u \, dx = \int_{\partial U} \nabla u \cdot \eta \, dS.$$

ʊ‿ʊ

iii) **Formula de Green II:** $\int_U \nabla u \cdot \nabla v \, dx = -\int_U u \Delta v \, dx + \int_{\partial U} u(\nabla v \cdot \eta) \, dS$.

Solución:

Note que

$$\nabla u \cdot \nabla v = (\partial_{x_1} u, \ldots, \partial_{x_n} u) \cdot (\partial_{x_1} v, \ldots, \partial_{x_n} v) = \sum_{i=1}^n (\partial_{x_i} u)(\partial_{x_i} v).$$

Reemplazando y por la linealidad, obtenemos

$$\begin{aligned}\int_U \nabla u \cdot \nabla v \, dx &= \int_U \sum_{i=1}^n (\partial_{x_i} u)(\partial_{x_i} v) \, dx \\ &= \sum_{i=1}^n \int_U (\partial_{x_i} u)(\partial_{x_i} v) \, dx.\end{aligned}$$

Ahora, apliquemos la formula de integración por partes a la integral dentro de la sumatoria

$$\int_U (\partial_{x_i} u)(\partial_{x_i} v) \, dx = \int_{\partial U} (u \partial_{x_i} v)\eta_i \, dS - \int_U u(\partial_{x_i}^2 v) \, dx.$$

Reemplazando en la sumatoria, reordenando los términos y usando nuevamente la linealidad, tenemos:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\int_U(\partial_{x_i}u)(\partial_{x_i}v)\,dx &= \sum_{i=1}^{n}\left(\int_{\partial U}(u\partial_{x_i}v)\eta_i\,dS-\int_U u(\partial_{x_i}^2 v)\,dx\right)\\ &= \sum_{i=1}^{n}\left(-\int_U u(\partial_{x_i}^2 v)\,dx\right)+\sum_{i=1}^{n}\left(\int_{\partial U}(u\partial_{x_i}v)\eta_i\,dS\right)\\ &= -\int_U\left(\sum_{i=1}^{n}u(\partial_{x_i}^2 v)\right)\,dx+\int_{\partial U}\left(\sum_{i=1}^{n}(u\partial_{x_i}v)\eta_i\right)\,dS.\end{aligned}$$

Note que cada sumatoria la podemos reescribir como:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}u(\partial_{x_i}^2 v)&=u\sum_{i=1}^{n}(\partial_{x_i}^2 v)=u\Delta v,\\ \sum_{i=1}^{n}(u\partial_{x_i}v)\eta_i&=u\sum_{i=1}^{n}(\partial_{x_i}v)\eta_i=u(\nabla v\cdot\eta).\end{aligned}$$

Luego, reemplazando en la expresión obtenida:

$$-\int_U\left(\sum_{i=1}^{n}u(\partial_{x_i}^2 v)\right)\,dx+\int_{\partial U}\left(\sum_{i=1}^{n}(u\partial_{x_i}v)\eta_i\right)\,dS=-\int_U u\Delta v\,dx+\int_{\partial U}u(\nabla v\cdot\eta)\,dS.$$

Así hemos mostrado que:

$$\int_U\nabla u\cdot\nabla v\,dx=-\int_U u\Delta v\,dx+\int_{\partial U}u(\nabla v\cdot\eta)\,dS.$$

iv) **Formula de Green III:** $\int_U(u\Delta v-v\Delta u)\,dx=\int_{\partial U}\left(u(\nabla v\cdot\eta)-v(\nabla u\cdot\eta)\right)\,dS.$

Solución:

Por la formula de Green II tenemos que:

$$\int_U\nabla u\cdot\nabla v\,dx=-\int_U u\Delta v\,dx+\int_{\partial U}u(\nabla v\cdot\eta)\,dS.$$

Si consideramos $\int_U\nabla v\cdot\nabla u\,dx$, podemos aplicar nuevamente la formula de Green II

$$\int_U\nabla v\cdot\nabla u\,dx=-\int_U v\Delta u\,dx+\int_{\partial U}v(\nabla u\cdot\eta)\,dS.$$

Si a la primera expresión le restamos la segunda obtenemos:

$$\begin{aligned}\int_U\nabla u\cdot\nabla v\,dx-\int_U\nabla v\cdot\nabla u\,dx=-\int_U u\Delta v\,dx+\int_{\partial U}u(\nabla v\cdot\eta)\,dS&\\ +\int_U v\Delta u\,dx-\int_{\partial U}v(\nabla u\cdot\eta)\,dS&\end{aligned}$$

Luego por linealidad

$$\int_U(\nabla u\cdot\nabla v-\nabla v\cdot\nabla u)\,dx=-\int_U(u\Delta v-v\Delta u)\,dx+\int_{\partial U}\left(u(\nabla v\cdot\eta)-v(\nabla u\cdot\eta)\right)\,dS.$$

Recordemos que el producto punto es conmutativo, por lo tanto $\nabla u \cdot \nabla v - \nabla v \cdot \nabla u = 0$. Es decir, que la expresión anterior es en realidad la siguiente:

$$0 = -\int_U (u\Delta v - v\Delta u)\, dx + \int_{\partial U} (u(\nabla v \cdot \eta) - v(\nabla u \cdot \eta))\ dS.$$

De esta manera, simplemente despejando hemos demostrado

$$\int_U (u\Delta v - v\Delta u)\, dx = \int_{\partial U} (u(\nabla v \cdot \eta) - v(\nabla u \cdot \eta))\ dS.$$

ʘ‿ʘ

Problema 3:

Muestre que la ecuación de Laplace $\Delta u = 0$ es invariante por rotaciones. Mas precisamente, muestre que si O es una matriz ortogonal de tamaño $n \times n$ y definimos $v(x) = u(Ox)$, entonces $\Delta v = 0$.

Solución:

Para no tener confusiones con la notación definimos $v(x) = u(y)$ donde $y = Ox$. Mas explícitamente si $O = (o_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ y $x = (x_1, \ldots, x_n)$, tenemos que si $y = (y_1, \ldots, y_n)$ entonces $y_l = \sum_{m=1}^n o_{lm} x_m$, con $1 \leq l \leq n$.

Note que cada uno de los y_l depende de todos los x_i, luego la primera derivada de v respecto a x_i por regla de la cadena es:

$$\partial_{x_i} v = \sum_{l=1}^n (\partial_{y_l} u)(\partial_{x_i} y_l) = \sum_{l=1}^n o_{li} \partial_{y_l} u.$$

Para la segunda derivada, por la regla de la cadena tenemos

$$\partial_{x_i}^2 v = \sum_{l=1}^n o_{li} \sum_{k=1}^n (\partial_{y_k} \partial_{y_l} u)(\partial_{x_i} y_k) = \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^n o_{li} o_{ki} (\partial_{y_k} \partial_{y_l} u).$$

Luego por la definición del Laplaciano

$$\Delta v = \sum_{i=1}^n \partial_{x_i}^2 v = \sum_{i=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^n o_{li} o_{ki} (\partial_{y_k} \partial_{y_l} u).$$

Antes de continuar con esta sumatoria, recordemos que por hipótesis nuestra matriz O es ortogonal, eso quiere decir que $O \cdot O^T = I$. Tengamos en cuenta que la entrada de la fila i y columna j de la matriz $O \cdot O^T$ esta dada por:

$$(O \cdot O^T)_{ij} = \sum_{k=1}^n o_{ik} o_{jk}.$$

Pero como la matriz $O \cdot O^T$ es igual a la matriz identidad de tamaño $n \times n$ tenemos que:

$$\sum_{k=1}^n o_{ik} o_{jk} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Volviendo a la sumatoria encontrada previamente, por ser sumas finitas podemos reorganizarla a conveniencia, en particular estudiémosla en el siguiente orden

$$\Delta v = \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n o_{li} o_{ki} (\partial_{y_k} \partial_{y_l} u).$$

Note que la sumatoria interior es particularmente la entrada (l, k) de la matriz $O \cdot O^T$ multiplicada por las derivadas parciales. Luego las otras dos sumatorias van sobre todas las filas l y columnas k de esta matriz. Pero, nosotros sabemos que esta matriz es la identidad, por lo que solo quedan los términos de la diagonal. Es decir, cuando $l = k$ es cuando no se harán 0, y por hipótesis $\Delta u = 0$, así:

$$\begin{aligned}
\Delta v &= \sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} o_{li}o_{ki}(\partial_{y_k}\partial_{y_l}u) \\
&= \sum_{i=1}^{n} o_{1i}o_{1i}(\partial_{y_1}\partial_{y_1}u) + \cdots + \sum_{i=1}^{n} o_{ni}o_{ni}(\partial_{y_n}\partial_{y_n}u) \\
&= \partial_{y_1}^2 u + \cdots + \partial_{y_n}^2 u \\
&= \Delta u \\
&= 0.
\end{aligned}$$

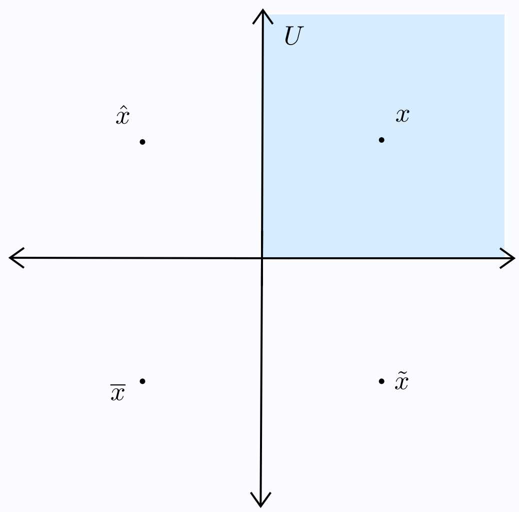
De esta manera, hemos concluido que $\Delta v = 0$. Es decir que la ecuación de Laplace es invariante por rotaciones.

Problema 6:

En $\mathbb{R}^2$, encuentre la función de Green para el primer cuadrante $U = \{(x,y) : x > 0, y > 0\}$. Verifique su respuesta.

Solución:

Seguiremos una idea similar a la del semiespacio $\mathbb{R}^n_+$. Sea $x = (x_1, x_2) \in U$, consideremos las siguientes "reflexiones" del punto x:



Donde $\tilde{x} = (x_1, -x_2)$, $\hat{x} = (-x_1, x_2)$ y $\bar{x} = (-x_1, -x_2)$, entonces nuestro candidato a función correctora será:

$$\phi^x(y) = \Phi(y - \tilde{x}) + \Phi(y - \hat{x}) - \Phi(y - \bar{x})$$

Verifiquemos si satisface las dos condiciones, la primera que debe de satisfacer es: $\Delta\phi^x = 0$ en U, entonces sea $y \in U$,

$$\Delta\phi^x(y) = \Delta\Phi(y - \tilde{x}) + \Delta\Phi(y - \hat{x}) - \Delta\Phi(y - \bar{x}).$$

Luego, como $\tilde{x}, \hat{x}, \bar{x} \notin U$ tenemos que no hay singularidades. Por tanto Φ es la solución fundamental, lo cual implica $\Delta\Phi(y - \tilde{x}) = \Delta\Phi(y - \hat{x}) = \Delta\Phi(y - \bar{x}) = 0$, concluimos que:

$$\Delta\phi^x(y) = 0.$$

La segunda condición nos dice: $\phi^x(y) = \Phi(y - x)$ en ∂U. Notemos primero que
$\partial U = \{(x,y) : x = 0, y > 0\} \cup \{(x,y) : x > 0, y = 0\} \cup \{(0,0)\}$.
Para mostrar esta condición consideremos los tres casos posibles:

- **Caso 1:** Sea $y = (0, y_2)$ con $y_2 > 0$, tenemos que:

$$\begin{aligned}
\phi^x(y) &= \phi^x((0, y_2)) \\
&= \Phi((0, y_2) - (x_1, -x_2)) + \Phi((0, y_2) - (-x_1, x_2)) - \Phi((0, y_2) - (-x_1, -x_2)) \\
&= \Phi((-x_1, y_2 + x_2)) + \Phi((x_1, y_2 - x_2)) - \Phi((x_1, y_2 + x_2)).
\end{aligned}$$

Note que $|(-x_1, y_2 + x_2)| = |(x_1, y_2 + x_2)|$ y $|(x_1, y_2 - x_2)| = |(-x_1, y_2 - x_2)|$. Luego como Φ es radial obtenemos que $\Phi((-x_1, y_2 + x_2)) = \Phi((x_1, y_2 + x_2))$ y $\Phi((x_1, y_2 - x_2)) = \Phi((-x_1, y_2 - x_2))$, así podemos concluir:

$$\begin{aligned}\phi^x(y) &= \Phi((-x_1, y_2 + x_2)) + \Phi((x_1, y_2 - x_2)) - \Phi((x_1, y_2 + x_2)) \\ &= \Phi((-x_1, y_2 - x_2)) \\ &= \Phi((0, y_2) - (x_1, x_2)) \\ &= \Phi(y - x)\end{aligned}$$

- **Caso 2:** Sea $y = (y_1, 0)$ con $y_1 > 0$, tenemos que:

$$\begin{aligned}\phi^x(y) &= \phi^x((y_1, 0)) \\ &= \Phi((y_1, 0) - (x_1, -x_2)) + \Phi((y_1, 0) - (-x_1, x_2)) - \Phi((y_1, 0) - (-x_1, -x_2)) \\ &= \Phi((y_1 - x_1, x_2)) + \Phi((y_1 + x_1, -x_2)) - \Phi((y_1 + x_1, x_2)).\end{aligned}$$

Note que $|(y_1 + x_1, -x_2)| = |(y_1 + x_1, x_2)|$ y $|(y_1 - x_1, x_2)| = |(y_1 - x_1, -x_2)|$. Luego como Φ es radial obtenemos que $\Phi((y_1 + x_1, -x_2)) = \Phi((y_1 + x_1, x_2))$ y $\Phi((y_1 - x_1, x_2)) = \Phi((y_1 - x_1, -x_2))$, así podemos concluir:

$$\begin{aligned}\phi^x(y) &= \Phi((y_1 - x_1, x_2)) + \Phi((y_1 + x_1, -x_2)) - \Phi((y_1 + x_1, x_2)) \\ &= \Phi((y_1 - x_1, -x_2)) \\ &= \Phi((y_1, 0) - (x_1, x_2)) \\ &= \Phi(y - x)\end{aligned}$$

- **Caso 3:** Sea $y = (0, 0)$, tenemos que:

$$\begin{aligned}\phi^x(y) &= \phi^x((0, 0)) \\ &= \Phi((0, 0) - (x_1, -x_2)) + \Phi((0, 0) - (-x_1, x_2)) - \Phi((0, 0) - (-x_1, -x_2)) \\ &= \Phi((-x_1, x_2)) + \Phi((x_1, -x_2)) - \Phi((x_1, x_2)).\end{aligned}$$

Note que $|(-x_1, x_2)| = |(x_1, -x_2)| = |(x_1, x_2)| = |(-x_1, -x_2)|$, luego como Φ es radial obtenemos que $\Phi((-x_1, -x_2)) = \Phi((x_1, -x_2)) = \Phi((-x_1, x_2)) = \Phi((x_1, x_2))$, así podemos concluir:

$$\begin{aligned}\phi^x(y) &= \Phi((-x_1, x_2)) + \Phi((x_1, -x_2)) - \Phi((x_1, x_2)) \\ &= \Phi((-x_1, -x_2)) + \Phi((-x_1, -x_2)) - \Phi((-x_1, -x_2)) \\ &= \Phi((-x_1, -x_2)) \\ &= \Phi((0, 0) - (x_1, x_2)) \\ &= \Phi(y - x).\end{aligned}$$

De esta forma, concluimos que dado $y \in \partial U$, $\phi^x(y) = \Phi(y - x)$. Como nuestra propuesta de función correctora satisface las dos condiciones, podemos decir que la función de Green para el primer cuadrante es:

$$G(x, y) := \Phi(y - x) - \phi^x(y) = \Phi(y - x) - \Phi(y - \tilde{x}) - \Phi(y - \hat{x}) + \Phi(y - \bar{x}).$$

ʊ̬ʊ

Problema 8:

Sean U un abierto acotado con borde suave y $u \in C^2(\overline{U})$ la solución del problema:

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{en } U, \\ \quad u = g & \text{en } \partial U, \end{cases}$$

donde f y g son funciones continuas. Definimos el conjunto $\mathcal{A} = \{w \in C^2(\overline{U}) : w = g \text{ en } \partial U\}$ y el funcional de energía

$$E[w] = \int_U \left(\frac{1}{2}|\nabla w|^2 - wf \right) dx.$$

Muestre que

$$E[u] = \min_{w \in \mathcal{A}} E[w].$$

Es decir, soluciones de la EDP minimizan el funcional de energía $E[\cdot]$.

Solución:

Sea $w \in \mathcal{A}$, como u es solución de la EDP, tenemos que $-\Delta u = f$, por tanto $\Delta u + f = 0$ así,

$$\int_U (\Delta u + f)(u - w)\, dx = 0.$$

Estudiemos la integral del lado izquierdo. Si realizamos el producto y aplicamos la linealidad, obtenemos que

$$\int_U (u-w)(\Delta u + f)\, dx = \int_U u\Delta u\, dx + \int_U uf\, dx - \int_U w\Delta u - \int_U wf\, dx.$$

Si consideramos la **Formula de Green II** usando las funciones u y w tenemos que:

$$\int_U \nabla u \cdot \nabla u\, dx = -\int_U u\Delta u\, dx + \int_{\partial U} u(\nabla u \cdot \eta)\, dS,$$
$$\int_U \nabla w \cdot \nabla u\, dx = -\int_U w\Delta u\, dx + \int_{\partial U} w(\nabla u \cdot \eta)\, dS.$$

Note que en estas aparecen dos términos de la integral que estamos estudiando. Si los despejamos nos da que:

$$\int_U u\Delta u\, dx = \int_{\partial U} u(\nabla u \cdot \eta)\, dS - \int_U \nabla u \cdot \nabla u\, dx,$$
$$-\int_U w\Delta u\, dx = \int_U \nabla w \cdot \nabla u\, dx - \int_{\partial U} w(\nabla u \cdot \eta)\, dS.$$

Como $u = g$ en ∂U, ya que u es solución de la EDP y $w = g$ en ∂U dado que $w \in \mathcal{A}$. Además, $\nabla u \cdot \nabla u = |\nabla u|^2$, reemplazando obtenemos

$$\int_U u\Delta u\, dx = \int_{\partial U} g(\nabla u \cdot \eta)\, dS - \int_U |\nabla u|^2\, dx,$$
$$-\int_U w\Delta u\, dx = \int_U \nabla w \cdot \nabla u\, dx - \int_{\partial U} g(\nabla u \cdot \eta)\, dS,$$

y sumando ambas expresiones tenemos

$$\int_U u\Delta u\, dx - \int_U w\Delta u\, dx = \int_U \nabla w \cdot \nabla u\, dx - \int_U |\nabla u|^2\, dx.$$

Podemos reemplazar lo obtenido en nuestra expresión original:

$$\int_U u\Delta u\,dx + \int_U uf\,dx - \int_U w\Delta u - \int_U wf\,dx = \int_U \nabla w\cdot\nabla u\,dx - \int_U |\nabla u|^2\,dx + \int_U uf\,dx - \int_U wf\,dx$$

Ahora por las desigualdades de Cauchy-Schwarz y Young respectivamente,

$$\begin{aligned}
\int_U \nabla w\cdot\nabla u\,dx &\leq \int_U |\nabla w\cdot\nabla u|\,dx \\
&\leq \int_U |\nabla w|\cdot|\nabla u|\,dx \\
&\leq \int_U \frac{1}{2}|\nabla w|^2 + \frac{1}{2}|\nabla u|^2\,dx \\
&= \int_U \frac{1}{2}|\nabla w|^2\,dx + \int_U \frac{1}{2}|\nabla u|^2\,dx.
\end{aligned}$$

Usando esta desigualdad y recordando que nuestra integral original es igual a 0,

$$0 \leq \int_U \frac{1}{2}|\nabla w|^2\,dx + \int_U \frac{1}{2}|\nabla u|^2\,dx - \int_U |\nabla u|^2\,dx + \int_U uf\,dx - \int_U wf\,dx.$$

Reorganizando la expresión,

$$\int_U \left(\frac{1}{2}|\nabla u|^2 - uf\right)\,dx \leq \int_U \left(\frac{1}{2}|\nabla w|^2 - wf\right)\,dx.$$

Note que esta es la definición del funcional de energía, por lo que es equivalente escribir:

$$E[u] \leq E[w].$$

Por otro lado, $u\in\mathcal{A}$ por lo que $E[u]\in\{E[w] : w\in\mathcal{A}\}\neq\varnothing$ y como $E[u]\leq E[w]$ para todo $w\in\mathcal{A}$, ya que lo consideramos arbitrario al principio, podemos concluir:

$$E[u] = \min_{w\in\mathcal{A}} E[w].$$

ʊ̥ʊ