Taller Introducción a la Teoría de Conjuntos
El Cardinal del Continuo

Edgar Santiago Ochoa Quiroga

1. Demuestre que el conjunto de todos los conjuntos finitos de reales tiene cardinal de $2^{\aleph_0}$.

   Solución. Denotemos $\mathbf{F}$ el conjunto de todos los conjuntos finitos de reales y definamos el siguiente conjunto:
   $$F_1 = \{\{x\} : x \in \mathbb{R}\}$$
   Es fácil darse cuenta que $F_1 \subset \mathbf{F}$. Luego ya teniendo esto en cuenta note que podemos definir la función $f : F_1 \longrightarrow \mathbf{F}$ tal que $f(\{x\}) = \{x\}$, en pocas palabras la identidad, note que f es inyectiva por lo tanto $|F_1| \leq |\mathbf{F}|$.
   Ahora considere la siguiente función $g : \mathbb{R} \longrightarrow F_1$ tal que $g(x) = \{x\}$, esta función claramente es biyectiva y se puede concluir que $|F_1| = |\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0}$, de esta forma tenemos que:
   $$2^{\aleph_0} \leq |\mathbf{F}|$$
   De forma inmediata consideramos el conjunto $F_2 = \{\{x_0, x_1\} : x_i \in \mathbb{R}\}$, es decir el conjunto de subconjuntos de $\mathbb{R}$ con 2 elementos, note que podemos definir una inyección $h : F_2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $h(\{x_0, x_1\}) = (x_0, x_1)$ por lo tanto $|F_2| \leq |\mathbb{R}^2| = |\mathbb{R}|^2 = (2^{\aleph_0})^2 = 2^{\aleph_0}$, note que podemos generalizar este argumento para un conjunto $F_k = \{\{x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}\} : x_i \in \mathbb{R}\}$ de la misma manera podemos definir una función inyectiva $h_k : F_k \longrightarrow \mathbb{R}^k$ por lo tanto todo conjunto de subconjuntos finitos de reales tiene por mucho el cardinal de los reales es decir $|F_k| \leq 2^{\aleph_0}$ y ahora demostremos que:
   $$\mathbf{F} = \bigcup_{k=0}^{n} F_k$$
   Primero notemos que todo elemento de F_k es un subconjunto finito de reales, luego se tiene que cada $F_k \subseteq \mathbf{F}$ y por tanto $\bigcup\limits_{k=0}^{n} F_k \subseteq \mathbf{F}$. Tomemos $A \in \mathbf{F}$ eso quiere decir que A es un conjunto finito de reales por la definición de $\mathbf{F}$, luego $A \in F_k$ para algún F_k y por tanto $A \in \bigcup\limits_{k=0}^{n} F_k$. Como hemos probado que son iguales entonces se debe de tener que $|\mathbf{F}| = |\bigcup\limits_{k=0}^{n} F_k|$ pero notemos que
   $$|\bigcup_{k=0}^{n} F_k| = \sum_{k=0}^{n} |F_k| = |F_0| + |F_1| + \ldots + |F_n| \leq 2^{\aleph_0} + 2^{\aleph_0} + \ldots + 2^{\aleph_0} \leq \aleph_0 \cdot 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$$
   De esta forma concluimos que $|\mathbf{F}| \leq 2^{\aleph_0}$ y por el teorema de Cantor-Bernstein tenemos que $|\mathbf{F}| = 2^{\aleph_0}$.

2. Muestre que el conjunto de todos los números algebraicos es contable y por tanto el conjunto de todos los números trascendentales tiene cardinal de $2^{\aleph_0}$.

   Solución. Consideremos el conjunto:
   $$\mathcal{P}_n = \{p(x) : p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \text{ con } a_i \in \mathbb{Z}\}$$

Note que para un polinomio de grado n el conjunto $\{a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n\}$ tiene $n+1$ elementos, entonces tenemos que $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n) \in \mathbb{Z}^{n+1}$ por lo tanto definamos una función $f : \mathbb{Z}^{n+1} \longrightarrow \mathcal{P}_n$ tal que $f(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, note que por mera definición de los polinomios de grado n siempre va a existir una $n+1$-tupla con sus coeficientes correspondientes y por tanto es sobreyectiva. Ahora para mostrar que es inyectiva suponga que $f(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n) = f(b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}, b_n)$ luego $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0$ y recordemos que dos polinomios son iguales si los coeficientes de cada potencia son iguales y por tanto se tiene que $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n) = (b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}, b_n)$, de esta forma concluimos que f es biyectiva y por tanto $|\mathcal{P}_n| = |\mathbb{Z}^{n+1}|$ luego como $\mathbb{Z}^{n+1}$ es un producto finito de conjuntos contables ya que $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|$ tenemos que $|\mathbb{Z}^{n+1}| = |\mathbb{N}|$ y como es relación de equivalencia tenemos que $|\mathcal{P}_n| = |\mathbb{N}|$ y por tanto $\mathcal{P}_n$ es contable.
Ahora consideremos para cada $p(x) \in \mathcal{P}_n$ el conjunto $A_n(p(x)) = \{x \in \mathbb{R} : p(x) = 0\}$ note que por definición que todo elemento de $A_n(p(x))$ es un numero algebraico y a su vez recordemos que todo polinomio tiene a lo mas n soluciones por lo tanto $A_n(p(x))$ es finito. y consideremos:

$$A_n = \bigcup_{p(x) \in \mathcal{P}_n} A_n(p(x))$$

Note que esta es una unión contable de conjuntos finitos por lo tanto A_n es contable. Denotemos $\mathbb{A}$ como el conjunto de números algebraicos y demostremos que:

$$\mathbb{A} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

Primero note que que todo elemento de cada A_n es un numero algebraico por lo tanto es bastante evidente que cada $A_n \subseteq \mathbb{A}$ y por lo tanto $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \subseteq \mathbb{A}$. Tomemos $x_1 \in \mathbb{A}$ por definición de número algebraico existe un polinomio de algún grado tal que $p(x) \in \mathcal{P}_n$ y $p(x_1) = 0$ luego por definición del conjunto $x_1 \in A_n(p(x))$ y por tanto $x_1 \in A_n$. Luego como $\mathbb{A}$ es la unión contable de conjuntos contables quiere decir que es contable, es decir $|\mathbb{A}| = |\mathbb{N}|$.
Por ultimo recordemos que $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{R}$ y además $|\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0}$ luego por un teorema mencionado en el libro se tiene que $|\mathbb{R} - \mathbb{A}| = 2^{\aleph_0}$ y note que el conjunto definido por $\mathbb{R} - \mathbb{A}$ es el conjunto de los números trascendentales y de esta forma concluimos la demostración.

3. Si un conjunto ordenado linealmente P tiene un subconjunto denso contable, entonces $|P| \leq 2^{\aleph_0}$.

   Solución. Sea $(P, <)$ y $D \subseteq P$ denso en P y contable, consideremos la función $f : P \longrightarrow \mathcal{P}(D)$ tal que $f(p) = \{d \in D : d < p\}$, primero notemos que para todo $p \in P$ se tiene que $f(p) \subseteq D$ y por lo tanto $f(p) \in \mathcal{P}(D)$ por lo que esta bien definida. Ahora demostremos que f es inyectiva, supongamos $x, y \in P$ y $x \neq y$, como P esta linealmente ordenado $x < y$ ó $y < x$, sin perdida de generalidad trabajemos con el caso $x < y$, como D es denso en P tenemos que existe un $z \in D$ tal que $x < z < y$, luego como $z \in D$ y $z < y$ tenemos que $z \in f(y)$ pero como $x < z$ se tiene que $z \notin f(x)$ y por axioma de extensionalidad $f(x) \neq f(y)$.
   De esta forma hemos demostrado que $|P| \leq |\mathcal{P}(D)|$ pero por aritmética cardinal tenemos que $|\mathcal{P}(D)| = 2^{|D|} = 2^{\aleph_0}$ ya que D es contable y por tanto $|P| \leq 2^{\aleph_0}$.

4. El conjunto de todos los subconjuntos cerrados de reales tiene cardinal de $2^{\aleph_0}$.

   Solución. Sea $\mathcal{C}$ el conjunto de todos los subconjuntos cerrados de $\mathbb{R}$ y $\mathcal{A}$ el de los abiertos, definamos la función $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{A}$ tal que $F(D) = \mathbb{R} - D$, primero note que para todo $D \in \mathcal{C}$ se tiene que $\mathbb{R} - D = F(D) \in \mathbb{A}$ por lo que esta bien definida.
   Consideremos $X, Y \in \mathcal{C}$ y $X \neq Y$, sin perdida de generalidad supongamos que existe al menos un elemento a tal que $a \in X$ y $a \notin Y$ luego note que evidentemente $a \in \mathbb{R}$ ya que X es un subconjunto cerrado de reales, por definición de diferencia entre conjuntos tenemos que $a \notin \mathbb{R} - X$ y $a \in \mathbb{R} - Y$ y por extensionalidad

tenemos que $F(X) = \mathbb{R} - X \neq \mathbb{R} - Y = F(Y)$ mostrando que F es inyectiva.
Ahora sea $Y \in \mathcal{A}$ y consideremos $X = \mathbb{R} - Y$ note que $X \in \mathcal{C}$ por lo que podemos aplicar F teniendo que $F(X) = \mathbb{R} - (\mathbb{R} - Y) = \mathbb{R} \cap Y = Y$, como Y es arbitrario podemos asegurar que todo $Y \in \mathcal{A}$ se tiene que $Y = F(X)$ y por tanto F es sobreyectiva. De esta forma hemos demostrado que F es biyectiva y por lo tanto $|\mathcal{C}| = |\mathcal{A}|$ pero por un teorema del libro tenemos que $|\mathcal{A}| = 2^{\aleph_0}$ luego como la equipotencia es una relación de equivalencia concluimos que $|\mathcal{C}| = 2^{\aleph_0}$.

5. Muestre que para $n > 0$, $n \cdot 2^{2^{\aleph_0}} = \aleph_0 \cdot 2^{2^{\aleph_0}} = 2^{\aleph_0} \cdot 2^{2^{\aleph_0}} = 2^{2^{\aleph_0}} \cdot 2^{2^{\aleph_0}} = (2^{2^{\aleph_0}})^n = (2^{2^{\aleph_0}})^{\aleph_0} = (2^{2^{\aleph_0}})^{2^{\aleph_0}} = 2^{2^{\aleph_0}}$.

   Solución. Note que por las propiedades de la aritmética cardinal y las propiedades de los alephs podemos plantear las siguientes secuencias de desigualdades:

$$2^{2^{\aleph_0}} \leq n \cdot 2^{2^{\aleph_0}} \leq \aleph_0 \cdot 2^{2^{\aleph_0}} \leq 2^{\aleph_0} \cdot 2^{2^{\aleph_0}} \leq 2^{2^{\aleph_0}} \cdot 2^{2^{\aleph_0}} = 2^{2^{\aleph_0} + 2^{\aleph_0}} = 2^{2^{\aleph_0}}$$

$$2^{2^{\aleph_0}} \leq (2^{2^{\aleph_0}})^n \leq (2^{2^{\aleph_0}})^{\aleph_0} \leq (2^{2^{\aleph_0}})^{2^{\aleph_0}} = 2^{2^{\aleph_0} \cdot 2^{\aleph_0}} = 2^{2^{\aleph_0}}$$

   Luego por el teorema de Cantor-Bernstein y el hecho de que la cardinalidad es una relación de equivalencia se obtiene el resultado.

6. El cardinal del conjunto de todas las funciones discontinuas es $2^{2^{\aleph_0}}$.

   Solución. Primero notemos que $|\mathbb{R}^{\mathbb{R}}| = |\mathcal{C}| + |\mathcal{D}|$ siendo $\mathcal{C}$ el conjunto de funciones continuas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ y $\mathcal{D}$ el conjunto de funciones discontinuas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, ahora recordemos que $|\mathbb{R}^{\mathbb{R}}| = 2^{2^{\aleph_0}}$ y que $|\mathcal{C}| = 2^{\aleph_0}$, note que $|\mathcal{D}| \leq |\mathbb{R}^{\mathbb{R}}|$ debido a que podemos definir $F : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ tal que $f \longmapsto f$ es decir la identidad y evidentemente esta función es inyectiva.
   Ahora supongamos que $|\mathcal{D}| < |\mathbb{R}^{\mathbb{R}}|$ luego tenemos que $|\mathcal{C}| + |\mathcal{D}| < |\mathcal{C}| + |\mathbb{R}^{\mathbb{R}}|$ y por la aritmética cardinal y el ejercicio anterior tenemos que:

$$2^{2^{\aleph_0}} < 2^{\aleph_0} + 2^{2^{\aleph_0}} < 2^{2^{\aleph_0}} + 2^{2^{\aleph_0}} = 2 \cdot 2^{2^{\aleph_0}} = 2^{2^{\aleph_0}}$$

   Implicando que $2^{2^{\aleph_0}} < 2^{2^{\aleph_0}}$, una contradicción. De esta forma podemos concluir que $|\mathcal{D}| = |\mathbb{R}^{\mathbb{R}}|$, es decir $|\mathcal{D}| = 2^{2^{\aleph_0}}$.

   Solución usando A.E.. Primero recordemos de nuevo el hecho de que $|\mathbb{R}^{\mathbb{R}}| = |\mathcal{C}| + |\mathcal{D}|$ y como $|\mathcal{C}| = 2^{\aleph_0}$ esto implica que $\mathcal{C}$ es infinito y por lo tanto podemos aplicar el resultado usando axioma de elección tal que $|\mathcal{C}| + |\mathcal{D}| = \max\{|\mathcal{C}|, |\mathcal{D}|\} = |\mathbb{R}^{\mathbb{R}}|$ y como conocemos el tamaño de $\mathcal{C}$ y de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ tenemos que $\max\{2^{\aleph_0}, |\mathcal{D}|\} = 2^{2^{\aleph_0}}$ y como $2^{\aleph_0} < 2^{2^{\aleph_0}}$ se debe de tener que $|\mathcal{D}| = 2^{2^{\aleph_0}}$.

7. Construya una función biyectiva de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.

   Solución. Utilizando la idea proporcionada por el libro con unas cuantas alteraciones ya que es bien conocido que $|\mathbb{R}| = |(0,1)|$ entonces definiremos la función $f : (0,1) \times (0,1) \longrightarrow (0,1)$ de la siguiente manera:
   Primero consideremos la pareja de elementos (a, b) tal que $a, b \in (0,1)$ note que cada elemento de ese intervalo puede ser escrito por su expresión decimal, por ejemplo podemos considerar $\frac{1}{7} = 0.1428571\ldots$ y $\frac{1}{9} = 0.111111\ldots$ luego tomamos la pareja $(0.1428571\ldots, 0.111111\ldots)$ y al evaluar obtenemos:

$$f(0.1428571\ldots, 0.111111\ldots) = 0.11412181517111\ldots$$

   Ahora la pregunta es que exactamente fue lo que definimos como función, básicamente considerando dos números de la forma $a = 0.a_0a_1a_2a_3\ldots$ y $b = 0.b_0b_1b_2b_3\ldots$, definimos $f(a, b)$ tal que:

$$f(0.a_0a_1a_2a_3\ldots, 0.b_0b_1b_2b_3\ldots) = 0.a_0b_0a_1b_1a_2b_2a_3b_3\ldots$$

Pero para hacerlo de esta forma tenemos que definir unas cuantas restricciones.
Primero notemos que $\frac{1}{2} = 0.5\overline{0}$ y además $\frac{1}{2} = 0.4\overline{9}$ esto primero causaría que para un numero tuviera dos imágenes distintas por lo que en todos los casos tomaremos la representación con 9 periódica y ahora el intercalar los términos los haremos por bloques de términos precedidos por ceros, para esto consideremos el siguiente ejemplo:

$$f(0.00340700006\ldots, 0.08999\ldots) = 0.\mathbf{003}08\mathbf{4}9\mathbf{07}9\mathbf{00006}9\ldots$$

Note que lo que hacemos es si hay una tira finita de ceros extendemos el bloque hasta que aparezca el dígito distinto al 0 y si no hay tiras de ceros si hacemos el intercalado usual. Es fácil ver que esta función es sobreyectiva ya que como cada elemento del intervalo $(0,1)$ tiene una expresión decimal que lo representa es decir para todo $z \in (0,1)$ se tiene que:

$$z = 0.00z_0 0z_1 0000z_2 z_3 0z_4 0z_5 \ldots$$

con tiras finitas de ceros arbitrarias y números arbitrarios repartidos pero nunca una tira de ceros infinitas por tanto separando los bloques obtenemos que:

$$\begin{aligned} 0.00z_0 0z_1 0000z_2 z_3 0z_4 0z_5 \cdots &\Rightarrow 0.\mathbf{00z_0}0z_1\mathbf{0000z_2}z_3\mathbf{z_4}0z_5\ldots \\ f(0.00z_0 000z_2 z_4\ldots, 0.0z_1 z_3 0z_5\ldots) &= 0.\mathbf{00z_0}0z_1\mathbf{0000z_2}z_3\mathbf{z_4}0z_5\ldots \end{aligned}$$

Aunque no sea tan claro la inyectividad también se tiene ya que si consideramos las parejas $(a,b) = (c,d)$ note que $a = c$ y $b = d$ por tanto ambas tienen la misma escritura en decimales y por tanto al intercalar los bloques las dos expresiones serán iguales y por tanto $f(a,b) = f(c,d)$, concluyendo finalmente que f si es biyección.