Corrección Parcial 1 Grupos y Anillos

June 4, 2024

1. En el intervalo $G = (-1, 1)$ de la recta real se define la operación:

$$x \square y = \frac{x+y}{1+x\cdot y}$$

para $x, y \in G$. Aquí $+$ y $\cdot$ son la suma y multiplicación usual de los números reales. Suponga que la operación $\square$ es cerrada en G, demuestre que $(G, \square)$ es un grupo.

Demostración: Para mostrar que $(G, \square)$ es un grupo, como ya tenemos que $\square$ es cerrada falta comprobar que se cumplan las siguientes condiciones:

- La operación $\square$ es asociativa. Para mostrar esto consideremos $x, y, z \in G$, luego observe que:

$$\begin{aligned}
x\square(y\square z) = x\square\left(\frac{y+z}{1+yz}\right) &= \frac{x+\frac{y+z}{1+yz}}{1+x\left(\frac{y+z}{1+yz}\right)} \\
&= \frac{\frac{x+xyz+y+z}{1+yz}}{\frac{1+yz+xy+xz}{1+yz}} \\
&= \frac{x+y+z+xyz}{1+xy+xz+yz} \\
&= \frac{\frac{x+y+z+xyz}{1+xy}}{\frac{1+xy+xz+yz}{1+xy}} \\
&= \frac{\frac{x+y}{1+xy}+\frac{z(1+xy)}{1+xy}}{\frac{1+xy}{1+xy}+\frac{(x+y)z}{1+xy}} \\
&= \frac{\frac{x+y}{1+xy}+z}{1+\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)z} \\
&= \left(\frac{x+y}{1+xy}\right)\square z \\
&= (x\square y)\square z
\end{aligned}$$

  Como mostramos que $x\square(y\square z) = (x\square y)\square z$ podemos asegurar que la operación $\square$ es asociativa.

- Existe un elemento $e \in G$ que actúa como neutro. Primero encontremos aquel elemento, este debe cumplir que para $x \in G$ se tiene que $x \square e = x$ luego:
$$\begin{aligned} \frac{x+e}{1+xe} &= x \\ x+e &= x(1+xe) \\ x+e &= x+x^2e \\ 0 &= x^2e-e \\ 0 &= e(x^2-1) \end{aligned}$$
Como $x \in (-1,1)$, $x \neq -1$ y $x \neq 1$ entonces $x^2-1 \neq 0$. De esta forma $e = 0 \in (-1,1) = G$. Ahora note que:
$$e \square x = 0 \square x = \frac{0+x}{1+0x} = \frac{x}{1} = x$$
Así concluimos que si existe un elemento que actúa como neutro ya que para todo $x \in G$ se tiene que:
$$x \square 0 = x = 0 \square x$$
- Todo elemento de G tiene inverso. Para hallar ese inverso haremos un análisis similar al que hicimos para hallar el neutro. Tal inverso que llamaremos x' debe cumplir que $x \square x' = 0$. Luego:
$$\begin{aligned} \frac{x+x'}{1+xx'} &= 0 \\ x+x' &= 0 \\ x' &= -x \end{aligned}$$
Claramente $x' = -x \in G$ luego note que:
$$-x \square x = \frac{-x+x}{1+(-x)(x)} = \frac{0}{1-x^2} = 0$$
De esta manera concluimos que para todo $x \in G$ existe un inverso tal que:
$$x \square -x = 0 = -x \square x$$

De esta forma como hemos mostrado que se cumplen las tres condiciones podemos concluir que $(G, \square)$ es un grupo. ʊ̬ʊ

2. (**V o F**) Sea G un grupo y $a \in G$. Si a es el único elemento de orden 2, entonces a pertenece al centro de G.

Verdadero. Demostración: Sea a el único elemento de orden 2 en G es decir:
$$a^2 = e$$
Donde e es la identidad en G. Considere $x \in G$, es evidente que $xax^{-1} \in G$. Observe que:
$$\begin{aligned} (xax^{-1})^2 &= (xax^{-1})(xax^{-1}) \\ &= xa(x^{-1}x)ax^{-1} \\ &= xa(e)ax^{-1} \\ &= xa^2x^{-1} \\ &= xex^{-1} \\ &= xx^{-1} = e \end{aligned}$$

Note que como x es arbitrario, se tiene que para todo $x \in G$ el elemento xax^{-1} es de orden 2 pero por hipótesis a es el único elemento de orden 2, entonces se debe tener que $xax^{-1} = a$, es decir que para todo $x \in G$, $xa = ax$. De esta forma podemos concluir que a es un elemento del centro de G. ℧‿℧

3. (**V o F**) Sea G un grupo y $\varphi : G \to G$ definido por $\varphi(g) = g^{-1}$ para todo $g \in G$. Entonces φ es un automorfismo de G.

   Falso. Contraejemplo: Considere $G = S_3$. Luego $\varphi : S_3 \to S_3$. Consideremos los elementos $\mu_1, \mu_2, \rho_1, \rho_2$ de S_3, Primero note que $\rho_1 \circ \rho_2 = \rho_0$ y que $\mu_1 \circ \mu_2 = \rho_1$, entonces:

   $$\rho_2 = (\rho_1)^{-1} = \varphi(\rho_1) = \varphi(\mu_1 \circ \mu_2)$$

   Ahora observe que $\mu_1 \circ \mu_1 = \rho_0$ y $\mu_2 \circ \mu_2 = \rho_0$, entonces:

   $$\rho_1 = \mu_1 \circ \mu_2 = (\mu_1)^{-1} \circ (\mu_2)^{-1} = \varphi(\mu_1) \circ \varphi(\mu_2)$$

   Ahora sabemos que $\rho_2 \neq \rho_1$, es decir:

   $$\varphi(\mu_1 \circ \mu_2) \neq \varphi(\mu_1) \circ \varphi(\mu_2)$$

   Mostrando de esta forma que φ no es un homomorfismo y por tanto no es un automorfismo. ℧‿℧

4. (**V o F**) Sea G un grupo. Si $H \triangle G$ y G/H es cíclico, entonces G es abeliano.

   Falso. Contraejemplo: Considere $G = D_4$ y tomemos $H = \{\rho_0, \rho_1, \rho_2, \rho_3\}$, Note que:

   $$[D_4 : H] = \frac{|D_4|}{|H|} = \frac{8}{4} = 2$$

   Entonces $H \triangle D_4$. Ahora observe que:

   $$|D_4/H| = [D_4 : H] = 2$$

   Luego como solo hay un grupo de orden 2, $D_4/H \cong \mathbb{Z}_2$ y por tanto es cíclico. Pero D_4 no es abeliano, ya que:

   $$\rho_1 \circ \mu_1 = \delta_1 \neq \delta_2 = \mu_1 \circ \rho_1$$

   ℧‿℧

5. ¿Cuántos homomorfismos sobreyectivos existen de S_3 en $\mathbb{Z}_5$?

   Cero. Justificación: Sea ϕ un homomorfismo tal que $\phi : S_3 \to \mathbb{Z}_5$. Por el primer teorema fundamental del isomorfismo se tiene que $S_3/\text{ker}\phi \cong \text{Im}\phi$, luego si existiera ϕ sobreyectivo se tendría que $\text{Im}\phi = \mathbb{Z}_5$, es decir $S_3/\text{ker}\phi \cong \mathbb{Z}_5$, luego:

   $$|S_3/\text{ker}\phi| = |\mathbb{Z}_5|$$
   $$\frac{|S_3|}{|\text{ker}\phi|} = |\mathbb{Z}_5|$$
   $$\frac{6}{|\text{ker}\phi|} = 5$$

   Para que eso se cumpliera se debería de tener que $|\text{ker}\phi| = \frac{6}{5}$ pero esto es absurdo, entonces no puede existir ϕ homomorfismo sobreyectivo. ℧‿℧

6. Considere el homomorfismo $\phi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_{10}$ definido por $\phi(1) = 6$. Encuentre kerϕ. Explique.

Solución: Por definición:
$$\ker\phi = \{n \in \mathbb{Z} : \phi(n) = 0\}$$
Donde ese 0 representa la clase del cero en $\mathbb{Z}_{10}$. Ahora consideremos los siguientes dos casos:

- $n \geq 0$
Observe que tenemos lo siguiente:
$$\phi(n) = \phi(\underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n \text{ veces}}) = \underbrace{\phi(1) + \phi(1) + \cdots + \phi(1)}_{n \text{ veces}} = \underbrace{6 + 6 + \cdots + 6}_{n \text{ veces}} = 6n$$
Ahora note que la única forma de que $6n = 0$ en $\mathbb{Z}_{10}$ es que $n = 5k$ con $k \in \mathbb{Z}^+$ ya que $6n = 6(5k) = 30k = 10(3k) = 0$.
- $n < 0$
Observe que $n = -k$ con $k \in \mathbb{Z}^+$, luego:
$$\phi(n) = \phi(-k) = -\phi(k) = -(6k)$$
Por el anterior ítem, k tiene que ser múltiplo de 5 para que sea 0 y por tanto $n = -5m$ con $m \in \mathbb{Z}^+$.

De esto podemos concluir que todos los elementos del kernel son de la forma $5k$ con $k \in \mathbb{Z}$. Concluyendo así que:
$$\ker\phi = 5\mathbb{Z}$$

ʊ‿ʊ

7. Determine todas las imágenes homomorfas de D_4. Explique.

Solución: D_4 tiene tantas imágenes homomorfas como subgrupos normales, entonces miremos cuales son estos subgrupos. Por el teorema de lagrange sabemos que si $H \leq D_4$ entonces $|H|$ divide a $|D_4| = 8$, es decir el orden de H es $1, 2, 4$ o 8. Luego:

- **Orden 1:** $H_1 = \{\rho_0\}$
Es evidente que H_1 es un subgrupo normal de D_4. Luego nuestra primer imagen homomorfa es:
$$\phi_1 : D_4 \to D_4/H_1$$
- **Orden 2:** Note que hay 5 elementos de D_4 que son de orden dos, luego hay 5 subgrupos de este orden, veamos cuales de estos son normales:
  - $H_2 = \{\rho_0, \rho_2\} = \langle \rho_2 \rangle$
  Basta con probar que las clases laterales son iguales para aquellos elementos que no están en H_2.
$$\begin{aligned}
\rho_1 H_2 &= \{\rho_1 \circ \rho_0, \rho_1 \circ \rho_2\} = \{\rho_1, \rho_3\} = \{\rho_0 \circ \rho_1, \rho_2 \circ \rho_1\} = H_2\rho_1 \\
\rho_3 H_2 &= \{\rho_3 \circ \rho_0, \rho_3 \circ \rho_2\} = \{\rho_3, \rho_1\} = \{\rho_0 \circ \rho_3, \rho_2 \circ \rho_3\} = H_2\rho_3 \\
\mu_1 H_2 &= \{\mu_1 \circ \rho_0, \mu_1 \circ \rho_2\} = \{\mu_1, \mu_2\} = \{\rho_0 \circ \mu_1, \rho_2 \circ \mu_1\} = H_2\mu_1 \\
\mu_2 H_2 &= \{\mu_2 \circ \rho_0, \mu_2 \circ \rho_2\} = \{\mu_2, \mu_1\} = \{\rho_0 \circ \mu_2, \rho_2 \circ \mu_2\} = H_2\mu_2 \\
\delta_1 H_2 &= \{\delta_1 \circ \rho_0, \delta_1 \circ \rho_2\} = \{\delta_1, \delta_2\} = \{\rho_0 \circ \delta_1, \rho_2 \circ \delta_1\} = H_2\delta_1 \\
\delta_2 H_2 &= \{\delta_2 \circ \rho_0, \delta_2 \circ \rho_2\} = \{\delta_2, \delta_1\} = \{\rho_0 \circ \delta_2, \rho_2 \circ \delta_2\} = H_2\delta_2
\end{aligned}$$

De esta forma concluimos que $H_2 \triangle D_4$ y por tanto nuestra segunda imagen homomorfa es:

$$\phi_2 : D_4 \to D_4/H_2$$

- $H_3 = \{\rho_0, \mu_1\} = \langle \mu_1 \rangle$
  Observe que:

$$\rho_1 H_3 = \{\rho_1 \circ \rho_0, \rho_1 \circ \mu_1\} = \{\rho_1, \delta_1\} \neq \{\rho_1, \delta_2\} = \{\rho_0 \circ \rho_1, \mu_1 \circ \rho_1\} = H_3 \rho_1$$

  Por lo que H_3 no es normal.
- $H_4 = \{\rho_0, \mu_2\} = \langle \mu_2 \rangle$
  Observe que:

$$\rho_1 H_4 = \{\rho_1 \circ \rho_0, \rho_1 \circ \mu_2\} = \{\rho_1, \delta_2\} \neq \{\rho_1, \delta_1\} = \{\rho_0 \circ \rho_1, \mu_2 \circ \rho_1\} = H_3 \rho_1$$

  Por lo que H_4 no es normal.
- $H_5 = \{\rho_0, \delta_1\} = \langle \delta_1 \rangle$
  Observe que:

$$\rho_1 H_5 = \{\rho_1 \circ \rho_0, \rho_1 \circ \delta_1\} = \{\rho_1, \mu_2\} \neq \{\rho_1, \mu_1\} = \{\rho_0 \circ \rho_1, \delta_1 \circ \rho_1\} = H_5 \rho_1$$

  Por lo que H_5 no es normal.
- $H_6 = \{\rho_0, \delta_2\} = \langle \delta_2 \rangle$
  Observe que:

$$\rho_1 H_6 = \{\rho_1 \circ \rho_0, \rho_1 \circ \delta_2\} = \{\rho_1, \mu_1\} \neq \{\rho_1, \mu_2\} = \{\rho_0 \circ \rho_1, \delta_2 \circ \rho_1\} = H_6 \rho_1$$

  Por lo que H_6 no es normal.

De esta forma terminamos los subgrupos de orden 2.

- **Orden 4:** Primero notemos que todo subgrupo de orden 4 es normal, ya que:

$$[D_4 : H] = \frac{|D_4|}{|H|} = \frac{8}{4} = 2$$

y por la propiedad del índice ese H es normal, luego existen tres subgrupos de orden 4, que son:

  - $H_7 = \{\rho_0, \rho_1, \rho_2, \rho_3\} = \langle \rho_1 \rangle = \langle \rho_3 \rangle$
  - $H_8 = \{\rho_0, \rho_2, \mu_1, \mu_2\} = \langle \{\rho_2, \mu_1\} \rangle = \langle \{\rho_2, \mu_2\} \rangle$
  - $H_9 = \{\rho_0, \rho_2, \delta_1, \delta_2\} = \langle \{\rho_2, \delta_1\} \rangle = \langle \{\rho_2, \delta_2\} \rangle$

Por lo tanto tenemos tres imagenes homomorfas mas, que son:

$$\phi_3 : D_4 \to D_4/H_7$$
$$\phi_4 : D_4 \to D_4/H_8$$
$$\phi_5 : D_4 \to D_4/H_9$$

- **Orden 8:** Por ultimo tenemos el otro subgrupo trivial que es $H_{10} = D_4$ que es también evidente que es normal en si mismo, luego nuestra sexta y ultima imagen homomorfa es:

$$\phi_6 : D_4 \to D_4/D_4$$

ʊˇʊ

8. Sea G un grupo con centro $Z := Z(G) = \{x \in G | xa = ax \forall a \in G\}$. Pruebe que si el grupo cociente G/Z es cíclico entonces G es abeliano.

Demostración: Como G/Z es cíclico, quiere decir que $G/Z = \langle kZ \rangle$ con $k \in G$. Ahora consideremos $x, y \in G$, luego podemos construir las clases laterales $xZ, yZ \in G/Z = \langle kZ \rangle$ es decir que $xZ = (kZ)^n$ y $yZ = (kZ)^m$ para algunos $n, m \in \mathbb{Z}$. Note que por definición de normalidad $(kZ)^n = k^n Z$ y $(kZ)^m = k^m Z$. Ahora consideremos $e \in G$ como la identidad, es evidente que $e \in Z$ por definición de el elemento identidad, luego note que:

$$\begin{aligned} x &= xe \in xZ = k^n Z \\ y &= ye \in yZ = k^m Z \end{aligned}$$

Eso quiere decir que $x = k^n z_1$ y $y = k^m z_2$ para algunos $z_1, z_2 \in Z$. Entonces:

$$\begin{aligned} xy &= (k^n z_1)(k^m z_2) \\ &= k^n (z_1 k^m) z_2 \\ &= k^n (k^m z_1) z_2 \\ &= (k^n k^m)(z_1 z_2) \\ &= k^{n+m}(z_2 z_1) \\ &= k^{m+n}(z_2 z_1) \\ &= (k^m k^n)(z_2 z_1) \\ &= k^m (k^n z_2) z_1 \\ &= k^m (z_2 k^n) z_1 \\ &= (k^m z_2)(k^n z_1) = yx \end{aligned}$$

Note que todas estas manipulaciones son posibles ya que $z_1, z_2 \in Z$, es decir que conmutan con todos los elementos de G, en particular con k^n y k^m. De esta forma como para $x, y \in G$ arbitrarios, mostramos que $xy = yx$ podemos concluir que G es abeliano.

ʊˇʊ