Sandra Natalia Florez Garcia
Edgar Santiago Ochoa Quiroga
María Alejandra Rodríguez Ríos

Ejercicio 1 Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio vectorial normado. Defina

$$K = \{x \in E : \|x\| = 1\}.$$

Demuestre que E es de Banach si y solamente si K es completo.

Demostración. $(\Rightarrow)$ Supongamos que E es un espacio de Banach y considere $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $K \subset E$, como E es completo, existe $x \in E$ tal que $x_n \to x$. Por lo que faltaría ver que $x \in K$, es decir, que $\|x\| = 1$. Por la convergencia de la sucesión, tenemos que dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{Z}^+$ tal que si $n \geq N$, entonces

$$\|x_n - x\| < \varepsilon.$$

Ahora, tenemos que cada x_n es de norma 1 ya que x_n es una sucesión de Cauchy en K, luego por la desigualdad triangular tenemos que

$$\|x\| \leq \|x - x_n\| + \|x_n\| < \varepsilon + 1,$$

y además

$$1 = \|x_n\| \leq \|x_n - x\| + \|x\| < \varepsilon + \|x\|.$$

Si juntamos las dos desigualdades, obtenemos que

$$1 - \varepsilon < \|x\| < 1 + \varepsilon.$$

Así tomando $\varepsilon \to 0$ tenemos que $\|x\| = 1$, mostrando así que K es completo.

$(\Leftarrow)$ Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en E. Por lo cual, la sucesión $(\|x_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en $\mathbb{R}$ y como este espacio es completo, se sigue que $\|x_n\| \to a$. Consideremos dos casos, si $a = 0$, por la definición de convergencia, dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{Z}^+$ tal que si $n \geq N$ tenemos que $\|\|x_n\| - 0\| < \varepsilon$, esto es igual a $\|x_n\| < \varepsilon$, así, concluimos que $x_n \to 0$ por lo cual hemos acabado en este caso.

Si $a \neq 0$, sin pérdida de generalidad podemos asumir que $x_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, ya que en caso contrario la cantidad de ceros sería finita, lo cual no afectarían a la convergencia porque al suponer que la cantidad de ceros es infinita, al ser x_n una sucesión de Cauchy eso implicaría que x_n converge a 0 ya que existiría una subsucesión convergente a 0, y ese caso fue el anterior. Así, definimos $y_n = \dfrac{x_n}{\|x_n\|}$, luego como las sucesiones de Cauchy en $\mathbb{R}$ son acotadas, existen constantes tales que $0 < M_1 \leq \|x_n\| \leq M_2$, a partir de un $n \geq N$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\|y_n - y_m\| &= \left\| \frac{x_n}{\|x_n\|} - \frac{x_m}{\|x_m\|} \right\| \\
&= \left\| \frac{x_n\|x_m\| - x_m\|x_n\|}{\|x_n\|\|x_m\|} \right\| \\
&\leq \frac{1}{M_1^2} \|x_n\|x_m\| - x_m\|x_n\|\| \\
&= \frac{1}{M_1^2} \|x_n\|x_m\| - x_m\|x_m\| + x_m\|x_m\| - x_m\|x_n\|\| \\
&= \frac{1}{M_1^2} \|(x_n - x_m)\|x_m\| + x_m(\|x_m\| - \|x_n\|)\| \\
&\leq \frac{1}{M_1^2} (\|(x_n - x_m)\|x_m\|\| + \|x_m(\|x_m\| - \|x_n\|)\|) \\
&\leq \frac{M_2}{M_1^2} (\|x_n - x_m\| + \|\|x_m\| - \|x_n\|\|).
\end{aligned}$$

Luego, como (x_n) y $(\|x_n\|)$ son de Cauchy para n y m suficientemente grandes $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$ y $\|\|x_m\| - \|x_n\|\| < \varepsilon$. Así hemos concluido que (y_n) es de Cauchy, pero claramente $y_n \in K$, como este es completo por hipótesis tenemos que $y_n \to y$. Podemos notar que $x_n = \|x_n\| y_n$, así tenemos que

$$\begin{aligned}
\|x_n - ay\| &= \|\|x_n\|y_n - ay_n + ay_n - ay\| \\
&= \|y_n(\|x_n\| - a) + a(y_n - y)\| \\
&\leq \|\|x_n\| - a\| + \|a\|\|(y_n - y)\|.
\end{aligned}$$

Como $\|x_n\| \to a$ y $y_n \to y$, por la desigualdad concluimos que $x_n \to ay$, mostrando así que (x_n) converge en E y por tanto es Banach.

ʊ̬ʊ

Ejercicio 2 Sean $(E, \|\cdot\|_E)$ y $(F, \|\cdot\|_F)$ espacios vectoriales normados. Considere $T : E \to F$ una transformación lineal. Muestre que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) T es continua.

(ii) T es continua en cero.

(iii) T es acotada. Es decir, existe $M > 0$ tal que para todo $x \in E$,

$$\|Tx\|_F \leq M\|x\|_E.$$

(iv) Si $\overline{B(0,1)} = \{x \in E : \|x\|_E \leq 1\}$, entonces la imagen directa $T(B(0,1))$ es un conjunto acotado de F.

Demostración. Para establecer la equivalencia entre estas afirmaciones, probaremos la cadena de implicaciones $(i) \to (ii) \to (iii) \to (iv) \to (i)$.

- $(i) \to (ii)$: Si T es continua en todo punto de E, en particular es continua en el origen.

- $(ii) \to (iii)$: Supongamos que T es continua en el origen. Entonces, por definición de continuidad, dado $\varepsilon = \frac{1}{9}$, existe $\delta > 0$ tal que si $\|x\|_E < \delta$, entonces $\|Tx\|_F < \frac{1}{9}$.

  Sea $x \in E$ con $x \neq 0$, y definamos $y = \dfrac{\delta x}{3\|x\|_E}$. Entonces, $\|y\|_E = \dfrac{\delta}{3} < \delta$, por lo que se cumple que $\|Ty\|_F < \frac{1}{9}$.

  Utilizando la linealidad de T, tenemos

$$\begin{aligned}\left\|T\left(\frac{\delta x}{3\|x\|_E}\right)\right\|_F &< \frac{1}{9},\\ \frac{\delta}{3\|x\|_E}\|Tx\|_F &< \frac{1}{9},\\ \|Tx\|_F &< \frac{3}{\delta}\|x\|_E.\end{aligned}$$

  Por lo tanto, si tomamos $M = \dfrac{3}{\delta}$, se tiene que para todo $x \in E$,

$$\|Tx\|_F \leq M\|x\|_E,$$

  lo cual demuestra que T es acotada.

- $(iii) \Rightarrow (iv)$: Supongamos que T es acotada. Entonces existe $M > 0$ tal que para todo $x \in E$, se cumple que $\|Tx\|_F \leq M\|x\|_E$. En particular, si $x \in \overline{\mathcal{B}(0,1)}$, es decir, $\|x\|_E \leq 1$, entonces

$$\|Tx\|_F \leq M$$

  como lo anterior se tiene para todo punto en $\overline{\mathcal{B}(0,1)}$, se tiene que $T(\overline{\mathcal{B}(0,1)})$ está contenido en la bola cerrada de radio M en F, lo que implica que$T(\overline{\mathcal{B}(0,1)})$ es un conjunto acotado.

- $(iv) \Rightarrow (i)$: Supongamos que $T(\overline{B(0,1)})$ es acotado. Entonces existe una constante $M > 0$ tal que para todo $x \in \overline{B(0,1)}$, se cumple que

$$\|Tx\|_F \leq M.$$

  Sea $x \in E$ con $x \neq 0$. Tomemos $y = \|x\|_E \cdot \dfrac{x}{\|x\|_E}$, donde $\dfrac{x}{\|x\|_E} \in \overline{B(0,1)}$. Usando la linealidad de la tranformación T y la desigualdad anterior, obtenemos,

$$\|Tx\|_F = \left\|T\left(\|x\|_E \cdot \frac{x}{\|x\|_E}\right)\right\|_F = \|x\|_E \cdot \left\|T\left(\frac{x}{\|x\|_E}\right)\right\|_F \leq \|x\|_E \cdot M.$$

  Por lo tanto, T es acotada. Luego, para todo $\varepsilon > 0$ con $x', y' \in E$ tenemos que si $\|x' - y'\| < \delta$

$$\|Tx' - Ty'\| = \|T(x' - y')\| = M\|x' - y'\| < M\delta = M\frac{\varepsilon}{M}.$$

luego, $\delta = \dfrac{\varepsilon}{M}$.

Con lo cual se concluye la demostración.

$\square$

Ejercicio 3 Demuestre que si $T \in \mathcal{L}(E, F)$, entonces:

(i) $\|Tx\|_F \leq \|T\| \, \|x\|_E$, para todo $x \in E$.

(ii) $\|T\| = \sup\limits_{\substack{x \in E \\ x \neq 0}} \dfrac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E}$.

(iii) $\|T\| = \sup\limits_{\substack{x \in E \\ \|x\|_E = 1}} \|Tx\|_F$.

(iv) $\|T\| = \text{ínf} \{M > 0 : \|Tx\|_F \leq M\|x\|_E, \, \forall x \in E\}$.

Demostración.

(i) prueba más sencilla Por hipótesis tenemos que $T \in \mathcal{L}(E, F)$, entonces como T es una aplicación lineal continua en particular, $\|Tx\|_F \leq \|T\|\|x\|_E$ para todo $x \in E$.

(i) Sea $\mathcal{L}(E, F)$ un espacio vectorial con la norma

$$\|T\| = \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\| \leq 1}} \|Tx\|_F.$$

Por definición de supremo, se tiene que $\|Tx\| \leq \|T\|$ para todo $x \in E$ con $\|x\| \leq 1$, si $x = 0$, la desigualdad se cumple trivialmente.

Ahora, tomemos $x \in E$ con $x \neq 0$ y $\|x\| > 1$, definamos

$$y = \frac{x}{\|x\|},$$

usando la linealidad de T, se tiene que

$$\|Ty\| = \left\| T\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right\| = \frac{1}{\|x\|}\|Tx\|.$$

Por la definición del supremo, como $\|y\| = 1$, se cumple que $\|Ty\| \leq \|T\|$, y por lo tanto,

$$\frac{1}{\|x\|}\|Tx\| \leq \|T\|,$$

multiplicando ambos lados por $\|x\|$,

$$\|Tx\| \leq \|T\|\|x\|.$$

Así, se concluye que para todo $x \in E$, se cumple $\|Tx\| \leq \|T\|\|x\|$, como queríamos.

(ii-iv) Definamos:

$$\alpha = \sup_{\substack{x\in E\\ \|x\|_E=1}} \|Tx\|_F,$$
$$\beta = \sup_{\substack{x\in E\\ x\neq 0}} \frac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E},$$
$$\gamma = \inf\{M>0 : \|Tx\|_F \leq M\|x\|_E,\ \forall x\in E\}.$$

Veamos que $\|Tx\| \leq \alpha$ para todo $x \in E$ con $\|x\| = 1$. Tomemos $y \in E$ con $y \neq 0$ tal que $x = \frac{y}{\|y\|}$, por lo que

$$\|Tx\| = \left\|T\left(\frac{y}{\|y\|}\right)\right\| = \frac{\|Ty\|}{\|y\|} \leq \alpha,$$

como esto es válido para todo $y \in E$ con $y \neq 0$, se concluye que $\beta \leq \alpha$.

Por otro lado, para todo $x \in E$ con $x \neq 0$, se cumple que,

$$\frac{\|Tx\|}{\|x\|} \leq \beta,$$

entonces, usando la linealidad de T,

$$\left\|T\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| \leq \beta,$$

si definimos $y = \frac{x}{\|x\|}$, entonces $\|y\| = 1$, y se obtiene que $\|Ty\| \leq \beta$ para todo $y \in E$ con $\|y\| = 1$. Por lo tanto, $\alpha \leq \beta$.

En consecuencia, $\alpha = \beta$.

Ahora, si $M > 0$ es un número en el conjunto que define a γ, entonces se cumple que $\|Tx\| \leq M\|x\|$ para todo $x \in E$. Esto implica que

$$\frac{\|Tx\|}{\|x\|} \leq M, \text{ donde } \|x\| \neq 0$$

y por lo tanto, $\beta \leq M$ para todo M en dicho conjunto. En consecuencia, $\beta \leq \gamma$.

Por otro lado, ya sabemos que $\dfrac{\|Tx\|}{\|x\|} \leq \beta$ para todo $x \in E$, $x \neq 0$, lo cual equivale a $\|Tx\| \leq \beta\|x\|$. Es decir, β también cumple la propiedad del conjunto que define γ, así que $\gamma \leq \beta$. Entonces, podemos concluir que,

$$\alpha = \beta = \gamma.$$

Finalmente, notemos que $\|T\| \geq \alpha$, ya que,

$$\{x \in E : \|x\| = 1\} \subseteq \{x \in E : \|x\| \leq 1\}.$$

Si M pertenece al conjunto que define a γ, entonces para todo $x \in E$ con $\|x\| \leq 1$, se tiene $\|Tx\| \leq M$, y como M es una cota superior de $\|Tx\|$ sobre la bola unitaria, se concluye que $\|T\| \leq M$. Esto válido para todo M del conjunto que define a γ, por lo que se tiene que $\|T\| \leq \gamma$.

Por lo tanto,

$$\|T\| = \alpha = \beta = \gamma.$$

Con lo cual, concluimos la demostración.

$\square$

Ejercicio 4 Sean $(E, \|\cdot\|_E)$ y $(F, \|\cdot\|_F)$ espacios vectoriales normados. Suponga que F es un espacio de Banach. Muestre que $\mathcal{L}(E, F)$ es un espacio de Banach con la norma usual de $\mathcal{L}(E, F)$. En particular, concluya que $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ y $E^{**} = \mathcal{L}(E^*, \mathbb{R})$ son espacios de Banach.

Demostración.
Sea $(E, \|\cdot\|_E)$ un espacio normado y sea $(F, \|\cdot\|_F)$ un espacio de Banach. Consideremos el conjunto $\mathcal{L}(E, F)$ de todas las aplicaciones lineales y continuas de E en F, provisto de la norma definida por

$$\|T\| := \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|T(x)\|_F.$$

Queremos demostrar que $\mathcal{L}(E, F)$, con esta norma, es un espacio de Banach.
Sea $(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{L}(E, F)$ una sucesión de Cauchy. Por definición, para todo $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n, m \geq N$,

$$\|T_n - T_m\| < \varepsilon,$$

es decir, para todo $x \in E$ con $\|x\|_E \leq 1$, se tiene que,

$$\|T_n(x) - T_m(x)\|_F < \varepsilon.$$

Ahora, sea $x \in E$ arbitrario (no necesariamente de norma menor o igual que uno), tenemos que para todo $n, m \geq N$, se cumple que,

$$\|T_n(x) - T_m(x)\|_F = \|(T_n - T_m)(x)\|_F \leq \|T_n - T_m\| \cdot \|x\|_E.$$

Dado $\varepsilon > 0$, si $x \neq 0$, se puede tomar $\delta := \dfrac{\varepsilon}{\|x\|_E}$, y por ser (T_n) de Cauchy, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n, m \geq N$,

$$\|T_n - T_m\| < \delta = \frac{\varepsilon}{\|x\|_E},$$

lo que implica

$$\|T_n(x) - T_m(x)\|_F < \varepsilon.$$

En el caso $x = 0$, se tiene trivialmente que $T_n(0) = 0$ para todo n, por lo que la sucesión es constante y, en particular, de Cauchy. Así, se concluye que para todo $x \in E$, la sucesión $(T_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \subseteq F$ es de Cauchy.
Como F es un espacio de Banach, existe un elemento $T(x) \in F$ tal que

$$T_n(x) \to T(x) \in F,$$

esto define una aplicación $T : E \to F$ mediante

$$T(x) := \lim_{n\to\infty} T_n(x).$$

Veamos que T es lineal. Sean $x, y \in E$ y $\lambda \in \mathbb{K}$ (donde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$). Como cada T_n es lineal, se tiene

$$T_n(\lambda x + y) = \lambda T_n(x) + T_n(y),$$

y como los límites existen en F, se concluye que

$$T(\lambda x + y) = \lim_{n\to\infty} T_n(\lambda x + y) = \lim_{n\to\infty} (\lambda T_n(x) + T_n(y)) = \lambda T(x) + T(y),$$

es decir, T es lineal.
Mostremos ahora que T es acotada. Como (T_n) es Cauchy en $\mathcal{L}(E, F)$, existe una constante $M > 0$ tal que $\|T_n\| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces, para todo $x \in E$,

$$\|T_n(x)\|_F \leq \|T_n\| \cdot \|x\|_E \leq M\|x\|_E,$$

y pasando al límite cuando $n \to \infty$,

$$\|T(x)\|_F \leq M\|x\|_E.$$

Esto demuestra que $T \in \mathcal{L}(E, F)$, es decir, T es lineal y continua.
Finalmente, veamos que $T_n \to T$ en $\mathcal{L}(E, F)$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n, m \geq N$,

$$\|T_n - T_m\| < \varepsilon.$$

Fijado $n \geq N$, y tomando el límite cuando $m \to \infty$, se obtiene

$$\|T_n - T\| = \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|T_n(x) - T(x)\|_F \leq \varepsilon.$$

Por tanto, $\|T_n - T\| \to 0$, lo que implica que $T_n \to T$ en $\mathcal{L}(E, F)$.

Concluimos que $\mathcal{L}(E, F)$, con la norma $\| \cdot \|$, es un espacio de Banach. Además, al ser $\mathbb{R}$ un espacio normado y de Banach con la norma usual, entonces $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ y $\mathcal{L}(E^*, \mathbb{R})$ son espacios de Banach. $\square$

Ejercicio 5 Sean E y F espacios vectoriales normados. Suponga que E es de dimensión finita (no se asume que F sea de dimensión finita).

(i) Muestre que todas las normas asignadas a E son equivalentes.

Demostración. Sea E un espacio vectorial normado de dimensión finita N. Para esta demostación basta probar que E es isomorfo al espacio ℓ_1^N. Por consiguiente, dadas dos normas en E, estas serán isomorfas a ℓ_1^N para cada una de estas normas, y de esto deduciremos la equivalencia de las normas.

Sea $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ la base canónica de ℓ_1^N. Tomemos una base $\mathcal{B}' = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ para E. Definamos una aplicación $T : \ell_1^N \to E$ tal que $T(e_i) = v_i$ para todo $1 \leq i \leq N$. Por su definición, tenemos que T es transformación lineal.

Veamos ahora que T es continua, para ello veremos que es acotada.

Sea $x = (x_1, x_2, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$, luego $x = \sum_{i=1}^{N} x_i e_i$. Por lo cual,

$$T(x) = \sum_{i=1}^{N} x_i T(e_i) = \sum_{i=1}^{N} x_i v_i.$$

Así,

$$\begin{aligned}
\|T(x)\|_E &= \left\| \sum_{i=1}^{N} x_i v_i \right\|_E \\
&\leq \sum_{i=1}^{N} \|x_i v_i\|_E \\
&= \sum_{i=1}^{N} |x_i| \cdot \|v_i\|_E \\
&\leq \sum_{i=1}^{N} |x_i| \cdot \max_{1 \leq i \leq N} \|v_i\|_E
\end{aligned}$$

si $K = \max_{1 \leq i \leq N} \|v_i\|_E$, entonces T está acotada y por lo tanto es continua. Adicionalmente, T es biyectiva por su definición.

Ahora, razonando por reducción al absurdo suponga que T^{-1} no es una transformación lineal continua, lo cual por las equivalencias mostradas en el ejercicio 2 la no continuidad debe fallar en 0. Esto nos indica que podemos encontrar una sucesión $\{y_n\}$ en V y un número real $\varepsilon > 0$ tal que $\|T^{-1}(y_n)\|_1 > \varepsilon$ mientras que $y_n \to 0$. Definamos

$$z_n = \frac{y_n}{\|T^{-1}(y_n)\|_1},$$

entonces cuando $z_n \to 0$

$$\begin{aligned} \|T^{-1}(z_n)\|_1 &= \left\| T^{-1}\left(\frac{y_n}{\|T^{-1}(y_n)\|_1}\right)\right\|_1 \\ &= \frac{1}{\|T^{-1}(y_n)\|_1} \cdot \|T^{-1}(y_n)\|_1 \\ &= 1. \end{aligned}$$

Ahora bien, mostremos que el siguiente conjunto es compacto, sea

$$B = \left\{x \in \ell_1^N : \|x\|_1 \leq 1\right\},$$

note que B es cerrado y acotado, y al ser la topología en ℓ_1^N es la misma que con la topología usual en $\mathbb{R}^N$. tenemos que B es también secuencialmente compacto, y entonces, por definición, existe una subsucesión $\{z_{n_k}\}$ tal que $\{T^{-1}(z_{n_k})\}$ es convergente.

Sea $T^{-1}(z_{n_k}) \to x$, teniendo en cuenta que $\|T^{-1}(z_{n_k})\|_1 = 1$ y $T^{-1}(z_{n_k}) \to x$, entonces $\|x\|_1 = 1$.

Dado que T es continua,

$$\lim T(T^{-1}(z_{n_k})) = T(x),$$

es decir,

$$z_{n_k} \to T(x),$$

lo cual implica que $T(x) = 0$. Pero T es una aplicación 1-1 y $\|x\|_1 = 1$, por consiguiente $x \neq 0$, lo cual prueba que $T(x) \neq 0$.Esto nos lleva a una contradicción. Por ende, T^{-1} debe ser continua.

Por lo cual, para cualquier norma en E, la aplicación T es siempre un isomorfismo entre ℓ_1^N y E, lo cual implica que la aplicación de $(E, \|\cdot\|_{E_1})$ y $(E, \|\cdot\|_{E_2})$ también lo será, concluyendo así que las dos normas son equivalentes.

Ahora veamos cuáles son las constantes positivas con las que podemos establecer que las normas son equivalentes, de acuerdo con la definición dada en el taller.

Puesto que $(E, \|\cdot\|_1)$ es isomorfo a $(E, \|\cdot\|_2)$ existe una aplicación lineal, la cual tomaremos de la siguiente manera

$$I : (E, \|\cdot\|_1) \longrightarrow (E, \|\cdot\|_2), \quad x \mapsto I(x) = x.$$

luego, tenemos que I es acotada, es decir, existe $C_2 > 0$ tal que

$$\|x\|_2 \leq C_2\|x\|_1.$$

Ahora consideremos la aplicación lineal inversa a I

$$I^{-1} : (E, \|\cdot\|_1) \longrightarrow (E, \|\cdot\|_2),$$

de igual forma, tenemos que la aplicación inversa es acotada, por lo cual, existe $C_1^{-1} > 0$, tal que

$$\|x\|_1 \leq C_1^{-1}\|x\|_2,$$

así, tenemos que

$$C_1\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C_2\|x\|_1 \quad \text{para todo } x \in E,$$

lo cual demuestra que las normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ son equivalentes.

$\square$

(ii) Muestre que toda transformación lineal $T : E \to F$ es continua.

Demostración. Sea $T : E \to F$ una transformación lineal, veamos que T es continua, para esto de acuerdo con el ejercicio 2 de este taller, sabemos que basta con mostrar que es acotada.

Como por hipótesis E es un espacio vectorial de dimensión finita, tomemos la base de E como $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, luego si $x \in E$ tenemos que $x = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i$, entonces la transformación lineal T es de la forma,

$$\begin{aligned} Tx &= T\left(\sum_{i=1}^{n} x_i v_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i T(v_i), \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} x_i v_i \max_{1\leq i\leq n} T(v_i), \end{aligned}$$

así, tenemos que

$$\begin{aligned} \|T\|_E &= \left\|\sum_{i=1}^{n} x_i T(v_i)\right\|_E \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} \|x_i T(v_i)\|_E \\ &= \sum_{i=1}^{n} |x_i| \cdot \|T(v_i)\|_E, \end{aligned}$$

por el punto anterior, como E es un espacio de dimensión finita existen constantes positivas C_1 y C_2, tal que $C_1\|x\|_E \leq \|x\|_1 \leq C_2\|x\|_E$ y si tomamos a $M_1 = \max_{1\leq i\leq n} \|T(v_i)\|_E$, entonces,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} |x_i| \cdot \|T(v_i)\|_E \|x\|_1 &\leq \max_{1\leq i\leq n} \|T(v_i)\|_E, \\ &\leq M_1 C_2 \|x\|_E \\ &= M\|x\|_E,\end{aligned}$$

por lo cual, T es acotado y continuo. □

(iii) Dé un ejemplo donde se verifique que (ii) puede ser falsa si E es de dimensión infinita.

Solución. Sea $T : (C^1([0,1]), \|\cdot\|_\infty) \longrightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|)$ donde por $f \mapsto f'(0)$. Note que T es una transformación lineal.

Queremos mostrar por la linealidad de la derivada que la transformación no es continua, por lo tanto, demostremos que T no es acotada.

Demostración. Supongamos que $T \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ con $\|\cdot\|_{\mathcal{L}^\infty}$, por lo cual, existe $M > 0$ tal que

$$|T(x)| = |f'(0)| \leq M\|f\|_{\mathcal{L}^\infty} \quad \text{para todo } f \in C^1([0,1]).$$

Sea $n \geq 2$ y $f(x) = (1-x)^n$, entonces, por la forma en la que está definida f tenemos que su máximo es 1 y se alcanza cuando f se evalúa en 0, luego $\|f\|_{\mathcal{L}^\infty} = 1$, tomando la derivada de f tenemos que

$$f'(x) = -n(1-x)^{n-1}, \quad f'(0) = -n.$$

Reemplazando

$$n = |f'(0)| \leq M\|f\|_\infty = M.$$

Por tanto, cuando $n \to \infty$, se tendría $n \leq M$ para todo $n \geq 2$, lo cual es una contradicción. Entonces T no es acotada.

□

Ejercicio 6
Considere $E = c_0$, donde

$$c_0 = \left\{ u = \{u_n\}_{n\geq 1} : \text{tales que } u_n \in \mathbb{R},\ \lim_{n\to\infty} u_n = 0 \right\}.$$

Es decir, c_0 es el conjunto de las secuencias reales que tienden a cero. Dotamos a este espacio con la norma $\|u\|_{\ell^\infty} = \sup_{n\in\mathbb{Z}^+} |u_n|$. Considere el funcional $f : E \to \mathbb{R}$ dado por

$$f(u) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} u_n.$$

(i) Muestre que $f \in E^*$ y calcule $\|f\|_{E^*}$.

Solución. Primero, observemos que el funcional está bien definido, esto ya que las sucesiones convergentes son acotadas, el supremo existe y como

$$\left| \frac{1}{2^n} u_n \right| \leq \|u\|_{\ell^\infty} \frac{1}{2^n},$$

por el criterio de comparación converge absolutamente, ya que el lado derecho de la desigualdad es una serie geométrica. Luego, dadas $u, v \in E$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, tenemos que $u + \lambda v \in E$, donde $u + \lambda v = \{u_n + \lambda v_n\}_{n\geq 1}$. Así, por la convergencia absoluta tenemos que f es lineal, ya que

$$\begin{aligned} f(u + \lambda v) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}(u_n + \lambda v_n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} u_n + \frac{1}{2^n} \lambda v_n \right), \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} u_n + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} v_n \\ &= f(u) + \lambda f(v). \end{aligned}$$

Ahora, mostremos que f es acotado. Observe que para una suma parcial se tiene que

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{2^n} u_n \right| &\leq \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{2^n} |u_n| \\ &\leq \sup_{n\in\mathbb{Z}^+} |u_n| \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{2^n} \\ &= \|u\|_{\ell^\infty} \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{2^n}. \end{aligned}$$

Note que, si hacemos $m \to \infty$ al lado derecho tenemos una serie geométrica que converge a 1, por lo cual, tenemos que

$$|f(u)| \leq \|u\|_{\ell^\infty}.$$

Mostrando así que f es acotada.
Faltaría simplemente calcular $\|f\|_{E^*}$. Por la cota hallada previamente si tomamos el supremo a ambos lados tenemos que

$$\|f(u)\|_{E^*} = \sup_{\|u\|_{\ell^\infty} \leq 1} |f(u)| \leq \sup_{\|u\|_{\ell^\infty} \leq 1} \|u\|_{\ell^\infty} = 1.$$

Ahora considere la sucesión u^N, donde $N \in \mathbb{Z}^+$ y está definida de la siguiente manera

$$u_n = \begin{cases} 1 & \text{Si } n \leq N, \\ 0 & \text{Si } n > N. \end{cases}$$

Claramente $\|u^N\|_{\ell^\infty} = 1$, luego por la desigualdad mostrada en el ejercicio 3 numeral (i) tenemos

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2^n} &= |f(u^N)| \\ &\leq \|f\|_{E^*} \|u^N\|_{\ell^\infty} \\ &=\leq \|f\|_{E^*}. \end{aligned}$$

Así como el lado derecho de la desigualdad no depende de N, si tomamos $N \to \infty$ tenemos que

$$1 \leq \|f\|_{E^*}.$$

Por lo que concluimos que $\|f\|_{E^*} = 1$.

(ii) ¿Es posible encontrar $u \in E$ tal que $\|u\| = 1$ y $f(u) = \|f\|_{E^*}$?

Solución. En el numeral anterior vimos que $\|f\|_{E^*} = 1$, ahora queremos ver si existe una sucesión $u \in E$ de norma 1 tal que $f(u) = 1$. Supongamos que existe tal sucesión y veamos como esto nos lleva a una contradicción. Por hipótesis

$$u_n \leq |u_n| \leq \|u\|_{\ell^\infty} = 1,$$

luego $u_n - 1 \leq 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}^+$. Así podemos notar que

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{2^n}(u_n - 1) \right| &\leq \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{2^n}|u_n - 1| \\ &= \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{2^n}(1 - u_n) \\ &= \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{2^n} - \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{2^n} u_n. \end{aligned}$$

Luego si $m \to \infty$ tenemos que

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}(u_n - 1) \right| \leq 1 - f(u) = 0,$$

por lo tanto

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}(u_n - 1) = 0.$$

Ahora, note que si existe algún $u_n < 1$ la suma de arriba sería negativa, no igual a 0. Por lo que $u_n = 1$ para todo $n \in \mathbb{Z}^+$, pero esto implicaria que $u \notin E$, ya que esa sucesión no converge a 0. Luego no puede existir una sucesión u que cumpla lo mencionado.