Sandra Natalia Florez Garcia
Edgar Santiago Ochoa Quiroga
María Alejandra Rodríguez Ríos

Ejercicio 1 Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio vectorial normado. Defina

$$K = \{x \in E : \|x\| = 1\}.$$

Demuestre que E es de Banach si y solamente si K es completo.

Demostración. $(\Rightarrow)$ Supongamos que E es de Banach, considere $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de cauchy en $K \subset E$, como E es completo $x_n \to x$, faltaría ver que $\|x\| = 1$. Por la convergencia tenemos que dado $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{Z}^+$ tal que si $n \geq N$, entonces

$$\|x_n - x\| < \varepsilon.$$

Ahora recordemos que cada x_n es de norma 1 ya que es una sucesión de Cauchy en K, luego por la desigualdad triangular tenemos que

$$\|x\| \leq \|x - x_n\| + \|x_n\| < \varepsilon + 1,$$

y ademas

$$1 = \|x_n\| \leq \|x_n - x\| + \|x\| < \varepsilon + \|x\|.$$

Si juntamos las dos desigualdades tenemos que

$$1 - \varepsilon < \|x\| < 1 + \varepsilon.$$

Asi tomando $\varepsilon \to 0$ tenemos que $\|x\| = 1$, mostrando así que K es completo.

$(\Leftarrow)$ Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en E. Luego la sucesión $(\|x_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en $\mathbb{R}$ y por tanto como este es completo $\|x_n\| \to a$. Ahora en nuestro primer caso si $a = 0$, por la definición de convergencia, dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{Z}^+$ tal que si $n \geq N$ tenemos que $\|\|x_n\| - 0\| < \varepsilon$, pero esta expresión es igual a $\|x_n\| < \varepsilon$, así concluimos que $x_n \to 0$ y hemos acabado en este caso.

Si $a \neq 0$, sin perdida de generalidad podemos asumir que $x_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, ya que en caso contrario serian una cantidad finita de ceros que no afectarían a la convergencia o serian infinitos, pero como la sucesión es de Cauchy eso implicaría que converge a 0 ya que existiría una subsucesión convergente a 0, y ese caso fue el anterior. Así definimos $y_n = \dfrac{x_n}{\|x_n\|}$, luego como las sucesiones de Cauchy en $\mathbb{R}$ son acotadas, existen constantes tales que $0 < M_1 \leq \|x_n\| \leq M_2$

a partir de un $n \geq N$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\|y_n - y_m\| &= \left\| \frac{x_n}{\|x_n\|} - \frac{x_m}{\|x_m\|} \right\| \\
&= \left\| \frac{x_n\|x_m\| - x_m\|x_n\|}{\|x_n\|\|x_m\|} \right\| \\
&\leq \frac{1}{M_1^2}\|x_n\|x_m\| - x_m\|x_n\|\| \\
&= \frac{1}{M_1^2}\|x_n\|x_m\| - x_m\|x_m\| + x_m\|x_m\| - x_m\|x_n\|\| \\
&= \frac{1}{M_1^2}\|(x_n - x_m)\|x_m\| + x_m(\|x_m\| - \|x_n\|)\| \\
&\leq \frac{1}{M_1^2}(\|(x_n - x_m)\|x_m\|\| + \|x_m(\|x_m\| - \|x_n\|)\|) \\
&\leq \frac{M_2}{M_1^2}(\|x_n - x_m\| + \|\|x_m\| - \|x_n\|\|)
\end{aligned}$$

.

Luego como (x_n) y $(\|x_n\|)$ son de Cauchy para n y m suficientemente grandes $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$ y $\|\|x_m\| - \|x_n\|\| < \varepsilon$. Así hemos concluido que (y_n) es de Cauchy, pero claramente $y_n \in K$, como este es completo por hipótesis tenemos que $y_n \to y$. Podemos notar que $x_n = \|x_n\|y_n$, así tenemos que

$$\begin{aligned}
\|x_n - ay\| &= \|\|x_n\|y_n - ay_n + ay_n - ay\| \\
&= \|y_n(\|x_n\| - a) + a(y_n - y)\| \\
&\leq \|\|x_n\| - a\| + \|a\|\|(y_n - y)\|.
\end{aligned}$$

Como $\|x_n\| \to a$ y $y_n \to y$, por la desigualdad concluimos que $x_n \to ay$, mostrando así que (x_n) converge en E y por tanto es Banach.

ʘ‿ʘ

Ejercicio 2 Sean $(E, \|\cdot\|_E)$ y $(F, \|\cdot\|_F)$ espacios vectoriales normados. Considere $T : E \to F$ una transformación lineal. Muestre que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) T es continua.

(ii) T es continua en cero.

(iii) T es acotada. Es decir, existe $M > 0$ tal que para todo $x \in E$,

$$\|Tx\|_F \leq M\|x\|_E.$$

(iv) Si $\overline{B(0,1)} = \{x \in E : \|x\|_E \leq 1\}$, entonces la imagen directa $T(B(0,1))$ es un conjunto acotado de F.

Demostración. □

Ejercicio 3
Demuestre que si $T \in \mathcal{L}(E, F)$, entonces:

(i) $\|Tx\|_F \leq \|T\| \, \|x\|_E$, para todo $x \in E$.

(ii) $\|T\| = \sup\limits_{\substack{x \in E \\ x \neq 0}} \dfrac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E}$.

(iii) $\|T\| = \sup\limits_{\|x\|_E = 1} \|Tx\|_F$.

(iv) $\|T\| = \text{ínf}\{M > 0 : \|Tx\|_F \leq M\|x\|_E, \forall x \in E\}$.

Demostración.

(i) Sea $\mathcal{L}(E, F)$ un espacio vectorial con la norma

$$\|T\| = \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\| \leq 1}} \frac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E}.$$

Por definición de supremo, se tiene que $\|Tx\| \leq \|T\|$ para todo $x \in E$ con $\|x\| \leq 1$.

Si $x = 0$, la desigualdad se cumple trivialmente. Tomemos ahora $x \in E$ con $x \neq 0$, y definamos

$$y = \frac{x}{\|x\|}.$$

Entonces, usando la linealidad de T, se tiene:

$$\|Ty\| = \left\| T\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right\| = \frac{1}{\|x\|}\|Tx\|.$$

Por la definición del supremo, como $\|y\| = 1$, se cumple que $\|Ty\| \leq \|T\|$, y por lo tanto:

$$\frac{1}{\|x\|}\|Tx\| \leq \|T\|.$$

Multiplicando ambos lados por $\|x\|$, obtenemos:

$$\|Tx\| \leq \|T\|\|x\|.$$

Así, se concluye que para todo $x \in E$, se cumple $\|Tx\| \leq \|T\|\|x\|$, como queríamos.

(ii-iv) Definamos:

$$\alpha = \sup_{\|x\|_E = 1} \|Tx\|_F,$$
$$\beta = \sup_{\substack{x \in E \\ x \neq 0}} \frac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E},$$
$$\gamma = \text{ínf}\{M > 0 : \|Tx\|_F \leq M\|x\|_E, \forall x \in E\}.$$

Veamos que $\|Tx\| \leq \alpha$ para todo $x \in E$ con $\|x\| = 1$. Tomemos $y \in E$ con $y \neq 0$ tal que $x = \frac{y}{\|y\|}$, entonces:

$$\|Tx\| = \left\| T\left(\frac{y}{\|y\|}\right) \right\| = \frac{\|Ty\|}{\|y\|} \leq \alpha.$$

Como esto vale para todo $y \in E$ con $y \neq 0$, se concluye que $\beta \leq \alpha$.

Por otro lado, para todo $x \in E$ con $x \neq 0$, se cumple:

$$\frac{\|Tx\|}{\|x\|} \leq \beta.$$

Entonces, usando la linealidad de T,

$$\left\| T\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right\| \leq \beta.$$

Si definimos $y = \frac{x}{\|x\|}$, entonces $\|y\| = 1$, y se obtiene que $\|Ty\| \leq \beta$ para todo $y \in E$ con $\|y\| = 1$. Por lo tanto, $\alpha \leq \beta$.

En consecuencia, $\alpha = \beta$.

Ahora, si $M > 0$ es cualquier número en el conjunto que define a γ, entonces se cumple que $\|Tx\| \leq M\|x\|$ para todo $x \in E$. Esto implica que

$$\frac{\|Tx\|}{\|x\|} \leq M,$$

y por lo tanto, $\beta \leq M$ para todo M en dicho conjunto. En consecuencia, $\beta \leq \gamma$.

Por otro lado, ya sabemos que $\frac{\|Tx\|}{\|x\|} \leq \beta$ para todo $x \in E$, $x \neq 0$, lo cual equivale a $\|Tx\| \leq \beta\|x\|$. Es decir, β también cumple la propiedad que del conjunto que define γ, así que $\gamma \leq \beta$. Concluimos entonces que:

$$\alpha = \beta = \gamma.$$

Finalmente, notemos que $\|T\| \geq \alpha$, ya que:

$$\{x \in E : \|x\| = 1\} \subseteq \{x \in E : \|x\| \leq 1\}.$$

Por otro lado, si M pertenece al conjunto que define a γ, entonces para todo $x \in E$ con $\|x\| \leq 1$, se tiene $\|Tx\| \leq M$, y como M es una cota superior de $\|Tx\|$ sobre la bola unitaria, se concluye que $\|T\| \leq M$. Por ser esto válido para todo M del conjunto que define a γ, se tiene que $\|T\| \leq \gamma$.

Por lo tanto,

$$\|T\| = \alpha = \beta = \gamma.$$

□

Ejercicio 4 .
Sean $(E, \|\cdot\|_E)$ y $(F, \|\cdot\|_F)$ espacios vectoriales normados. Suponga que F es un espacio de Banach.

Muestre que $\mathcal{L}(E, F)$ es un espacio de Banach con la norma usual de $\mathcal{L}(E, F)$. En particular, concluya que $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ y $E^{**} = \mathcal{L}(E^*, \mathbb{R})$ son espacios de Banach.

Demostración.
Sea $(E, \|\cdot\|_E)$ un espacio normado y sea $(F, \|\cdot\|_F)$ un espacio de Banach. Consideremos el conjunto $\mathcal{L}(E, F)$ de todas las aplicaciones lineales y continuas de E en F, provisto de la norma definida por

$$\|T\| := \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|T(x)\|_F.$$

Queremos demostrar que $\mathcal{L}(E, F)$, con esta norma, es un espacio de Banach.
Sea $(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{L}(E, F)$ una sucesión de Cauchy. Por definición, para todo $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n, m \geq N$,

$$\|T_n - T_m\| < \varepsilon.$$

Es decir, para todo $x \in E$ con $\|x\|_E \leq 1$, se tiene

$$\|T_n(x) - T_m(x)\|_F < \varepsilon.$$

Ahora, sea $x \in E$ arbitrario (no necesariamente de norma menor o igual que uno). Para todo $n, m \geq N$, se cumple

$$\|T_n(x) - T_m(x)\|_F = \|(T_n - T_m)(x)\|_F \leq \|T_n - T_m\| \cdot \|x\|_E.$$

Dado $\varepsilon > 0$, si $x \neq 0$, se puede tomar $\delta := \varepsilon/\|x\|_E$, y por ser (T_n) de Cauchy, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n, m \geq N$,

$$\|T_n - T_m\| < \delta = \frac{\varepsilon}{\|x\|_E},$$

lo que implica

$$\|T_n(x) - T_m(x)\|_F < \varepsilon.$$

En el caso $x = 0$, se tiene trivialmente que $T_n(0) = 0$ para todo n, por lo que la sucesión es constante y, en particular, de Cauchy. Así, se concluye que para todo $x \in E$, la sucesión $(T_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \subseteq F$ es de Cauchy.
Como F es un espacio de Banach, existe un elemento $T(x) \in F$ tal que

$$T_n(x) \to T(x) \in F.$$

Esto define una aplicación $T : E \to F$ mediante

$$T(x) := \lim_{n\to\infty} T_n(x).$$

Veamos que T es lineal. Sean $x, y \in E$ y $\lambda \in \mathbb{K}$ (donde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$). Como cada T_n es lineal, se tiene

$$T_n(\lambda x + y) = \lambda T_n(x) + T_n(y),$$

y como los límites existen en F, se concluye que

$$T(\lambda x + y) = \lim_{n\to\infty} T_n(\lambda x + y) = \lim_{n\to\infty} (\lambda T_n(x) + T_n(y)) = \lambda T(x) + T(y),$$

es decir, T es lineal.

Mostremos ahora que T es acotada. Como (T_n) es Cauchy en $\mathcal{L}(E,F)$, existe una constante $M > 0$ tal que $\|T_n\| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces, para todo $x \in E$,

$$\|T_n(x)\|_F \leq \|T_n\| \cdot \|x\|_E \leq M\|x\|_E,$$

y pasando al límite cuando $n \to \infty$,

$$\|T(x)\|_F \leq M\|x\|_E.$$

Esto demuestra que $T \in \mathcal{L}(E,F)$, es decir, T es lineal y continua.
Finalmente, veamos que $T_n \to T$ en $\mathcal{L}(E,F)$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n, m \geq N$,

$$\|T_n - T_m\| < \varepsilon.$$

Fijado $n \geq N$, y tomando el límite cuando $m \to \infty$, se obtiene

$$\|T_n - T\| = \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|T_n(x) - T(x)\|_F \leq \varepsilon.$$

Por tanto, $\|T_n - T\| \to 0$, lo que implica que $T_n \to T$ en $\mathcal{L}(E,F)$.

Concluimos que $\mathcal{L}(E,F)$, con la norma $\|\cdot\|$, es un espacio de Banach. □

Ejercicio 5 Sean E y F espacios vectoriales normados. Suponga que E es de dimensión finita (no se asume que F sea de dimensión finita).

(i) Muestre que todas las normas asignadas a E son equivalentes.

(ii) Muestre que toda transformación lineal $T : E \to F$ es continua.

(iii) Dé un ejemplo donde se verifique que (ii) puede ser falsa si E es de dimensión infinita.

Ejercicio 6
Considere $E = c_0$, donde

$$c_0 = \left\{ u = \{u_n\}_{n\geq 1} : \text{tales que } u_n \in \mathbb{R},\ \lim_{n\to\infty} u_n = 0 \right\}.$$

Es decir, c_0 es el conjunto de las secuencias reales que tienden a cero. Dotamos a este espacio con la norma $\|u\|_{\ell^\infty} = \sup_{n\in\mathbb{Z}^+} |u_n|$. Considere el funcional $f : E \to \mathbb{R}$ dado por

$$f(u) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} u_n.$$

(i) Muestre que $f \in E^*$ y calcule $\|f\|_{E^*}$.

Solución. Observemos primero que evidentemente esta bien definido el funcional ya que como las sucesiones convergentes son acotadas, el supremo existe y como

$$\left| \frac{1}{2^n} u_n \right| \leq \|u\|_{\ell^\infty} \frac{1}{2^n},$$

Por el criterio de comparacion converge absolutamente, ya que el lado derecho es una geometrica. Luego dadas $u, v \in E$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, tenemos claramente que $u + \lambda v \in E$, donde

$u + \lambda v = \{u_n + \lambda v_n\}_{n\geq 1}$. Asi por la convergencia absoluta tenemos que f es lineal, ya que

$$\begin{aligned} f(u+\lambda v) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}(u_n + \lambda v_n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n}u_n + \frac{1}{2^n}\lambda v_n\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}u_n + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}v_n \\ &= f(u) + \lambda f(v). \end{aligned}$$

Mostremos ahora que esta acotada. Observe que para una suma parcial se tiene que

$$\begin{aligned} \left|\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{2^n}u_n\right| &\leq \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{2^n}|u_n| \\ &\leq \sup_{n\in\mathbb{Z}^+} |u_n| \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{2^n} \\ &= \|u\|_{\ell^\infty} \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{2^n}. \end{aligned}$$

Note que si hacemos $m \to \infty$ al lado derecho tenemos una serie geometrica que converge a 1, asi tenemos que

$$|f(u)| \leq \|u\|_{\ell^\infty}.$$

Mostrando asi que f es acotada.
Faltaria simplemente calcular $\|f\|_{E^*}$. Por la cota hallada previamente si tomamos el supremo a ambos lados tenemos que

$$\|f(u)\|_{E^*} \sup_{\|u\|_{\ell^\infty}\leq 1} |f(u)| \leq \sup_{\|u\|_{\ell^\infty}\leq 1} \|u\|_{\ell^\infty} \leq 1.$$

Ahora considere la sucesion u^N, donde $N \in \mathbb{Z}^+$ y esta definida de la siguiente manera

$$u_n = \begin{cases} 1 & \text{Si } n \leq N, \\ 0 & \text{Si } n > N. \end{cases}$$

Claramente $\|u^N\|_{\ell^\infty} = 1$, luego por la desigualdad mostrada en el ejercicio 3 numeral (i) tenemos

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2^n} &= |f(u^N)| \\ &\leq \|f\|_{E^*}\|u^N\|_{\ell^\infty} \\ =&\leq \|f\|_{E^*}. \end{aligned}$$

Asi como el lado derecho no depende de N, si tomamos $N \to \infty$ tenemos que

$$1 \leq \|f\|_{E^*}.$$

Asi concluimos que $\|f\|_{E^*} = 1$.

ʊ̯ʊ

(ii) ¿Es posible encontrar $u \in E$ tal que $\|u\| = 1$ y $f(u) = \|f\|_{E^*}$?

Solución. Como vimos en el numeral anterior que $\|f\|_{E^*} = 1$, queremos ver si existe una sucesion $u \in E$ de norma 1 tal que $f(u) = 1$. Supongamos que existe tal sucesion y veamos como esto nos lleva a una contradiccion. Por hipotesis

$$u_n \leq |u_n| \leq \|u\|_{\ell^\infty} = 1,$$

luego $u_n - 1 \leq 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}^+$. Asi podemos notar que

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{2^n}(u_n - 1) \right| &\leq \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{2^n}|u_n - 1| \\
&= \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{2^n}(1 - u_n) \\
&= \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{2^n} - \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{2^n}u_n,
\end{aligned}$$

Luego si $m \to \infty$ tenemos que

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}(u_n - 1) \right| \leq 1 - f(u) = 0.$$

Por lo tanto

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}(u_n - 1) = 0.$$

Ahora note que si existe algun $u_n < 1$ la suma de arriba seria negativa, no igual a 0. Por lo que $u_n = 1$ para todo $n \in \mathbb{Z}^+$, pero esto implicaria que $u \notin E$, ya que esa sucesion no converge a 0. Luego no puede existir una sucesion u que cumpla lo mencionado.

ʊ̯ʊ