Sandra Natalia Florez Garcia
Edgar Santiago Ochoa Quiroga
María Alejandra Rodríguez Ríos . . . .

Ejercicio 1 Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio vectorial normado. Defina

$$K = \{x \in E : \|x\| = 1\}.$$

Demuestre que E es de Banach si y solamente si K es completo.
Ejercicio 2 Sean $(E, \|\cdot\|_E)$ y $(F, \|\cdot\|_F)$ espacios vectoriales normados. Considere $T : E \to F$ una transformación lineal. Muestre que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) T es continua.

(ii) T es continua en cero.

(iii) T es acotada. Es decir, existe $M > 0$ tal que para todo $x \in E$,

$$\|Tx\|_F \leq M\|x\|_E.$$

(iv) Si $\overline{B(0,1)} = \{x \in E : \|x\|_E \leq 1\}$, entonces la imagen directa $T(B(0,1))$ es un conjunto acotado de F.

Demostración. Para establecer la equivalencia entre estas afirmaciones, probaremos la cadena de implicaciones $(i) \to (ii) \to (iii) \to (iv) \to (i)$.

- $(i) \to (ii)$: Si T es continua en todo punto de E, en particular es continua en el origen.
- $(ii) \to (iii)$: Supongamos que T es continua en el origen. Entonces, por definición de continuidad, dado $\varepsilon = \frac{1}{9}$, existe $\delta > 0$ tal que si $\|x\|_E < \delta$, entonces $\|Tx\|_F < \frac{1}{9}$.

  Sea $x \in E$ con $x \neq 0$, y definamos $y = \dfrac{\delta x}{3\|x\|_E}$. Entonces, $\|y\|_E = \dfrac{\delta}{3} < \delta$, por lo que se cumple que $\|Ty\|_F < \frac{1}{9}$.

  Utilizando la linealidad de T, tenemos

$$\begin{aligned} \left\| T\left(\frac{\delta x}{3\|x\|_E}\right)\right\|_F &< \frac{1}{9}, \\ \frac{\delta}{3\|x\|_E}\|Tx\|_F &< \frac{1}{9}, \\ \|Tx\|_F &< \frac{3}{\delta}\|x\|_E. \end{aligned}$$

  Por lo tanto, si tomamos $M = \dfrac{3}{\delta}$, se tiene que para todo $x \in E$,

$$\|Tx\|_F \leq M\|x\|_E,$$

lo cual demuestra que T es acotada.

- $(iii) \Rightarrow (iv)$: Supongamos que T es acotada. Entonces existe $M > 0$ tal que para todo $x \in E$, se cumple que $\|Tx\|_F \leq M\|x\|_E$. En particular, si $x \in \overline{\mathcal{B}(0,1)}$, es decir, $\|x\|_E \leq 1$, entonces

$$\|Tx\|_F \leq M$$

como lo anterior se tiene para todo punto en $\overline{\mathcal{B}(0,1)}$, se tiene que $T(\overline{\mathcal{B}(0,1)})$ está contenido en la bola cerrada de radio M en F, lo que implica que$T(\overline{\mathcal{B}(0,1)})$ es un conjunto acotado.

- $(iv) \Rightarrow (i)$: Supongamos que $T(\overline{B(0,1)})$ es acotado. Entonces existe una constante $M > 0$ tal que para todo $x \in \overline{B(0,1)}$, se cumple que

$$\|Tx\|_F \leq M.$$

Sea ahora un punto arbitrario $x \in E$ con $x \neq 0$. Tomemos $y = \|x\|_E \cdot \dfrac{x}{\|x\|_E}$, donde $\dfrac{x}{\|x\|_E} \in \overline{B(0,1)}$. Usando la linealidad de la tranformación T y la desigualdad anterior, obtenemos,

$$\|Tx\|_F = \left\|T\left(\|x\|_E \cdot \frac{x}{\|x\|_E}\right)\right\|_F = \|x\|_E \cdot \left\|T\left(\frac{x}{\|x\|_E}\right)\right\|_F \leq \|x\|_E \cdot M.$$

Por lo tanto, T es acotada. Luego, para todo $\varepsilon > 0$ con $x', y' \in E$ tenemos que

$$\|Tx' - Ty'\| = \|T(x' - y')\| = M\|x' - y'\| < \varepsilon.$$

si se toma a $\delta = \dfrac{M}{\varepsilon}$.

Con lo cual se concluye la demostración.

□

Ejercicio 3
Demuestre que si $T \in \mathcal{L}(E, F)$, entonces:

(i) $\|Tx\|_F \leq \|T\| \, \|x\|_E$, para todo $x \in E$.

(ii) $\|T\| = \sup\limits_{\substack{x\in E\\ x\neq 0}} \dfrac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E}$.

(iii) $\|T\| = \sup\limits_{\|x\|_E=1} \|Tx\|_F$.

(iv) $\|T\| = \inf\{M > 0 : \|Tx\|_F \leq M\|x\|_E, \forall x \in E\}$.

Demostración.

(i) Sea $\mathcal{L}(E, F)$ un espacio vectorial con la norma

$$\|T\| = \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\| \leq 1}} \frac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E}.$$

Por definición de supremo, se tiene que $\|Tx\| \leq \|T\|$ para todo $x \in E$ con $\|x\| \leq 1$.

Si $x = 0$, la desigualdad se cumple trivialmente. Tomemos ahora $x \in E$ con $x \neq 0$, y definamos

$$y = \frac{x}{\|x\|}.$$

Entonces, usando la linealidad de T, se tiene:

$$\|Ty\| = \left\| T\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right\| = \frac{1}{\|x\|}\|Tx\|.$$

Por la definición del supremo, como $\|y\| = 1$, se cumple que $\|Ty\| \leq \|T\|$, y por lo tanto:

$$\frac{1}{\|x\|}\|Tx\| \leq \|T\|.$$

Multiplicando ambos lados por $\|x\|$, obtenemos:

$$\|Tx\| \leq \|T\|\|x\|.$$

Así, se concluye que para todo $x \in E$, se cumple $\|Tx\| \leq \|T\|\|x\|$, como queríamos.

(ii-iv) Definamos:

$$\alpha = \sup_{\|x\|_E = 1} \|Tx\|_F,$$

$$\beta = \sup_{\substack{x \in E \\ x \neq 0}} \frac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E},$$

$$\gamma = \operatorname{ínf}\{M > 0 : \|Tx\|_F \leq M\|x\|_E,\ \forall x \in E\}.$$

Veamos que $\|Tx\| \leq \alpha$ para todo $x \in E$ con $\|x\| = 1$. Tomemos $y \in E$ con $y \neq 0$ tal que $x = \frac{y}{\|y\|}$, entonces:

$$\|Tx\| = \left\| T\left(\frac{y}{\|y\|}\right) \right\| = \frac{\|Ty\|}{\|y\|} \leq \alpha.$$

Como esto vale para todo $y \in E$ con $y \neq 0$, se concluye que $\beta \leq \alpha$.

Por otro lado, para todo $x \in E$ con $x \neq 0$, se cumple:

$$\frac{\|Tx\|}{\|x\|} \leq \beta.$$

Entonces, usando la linealidad de T,

$$\left\| T\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right\| \leq \beta.$$

Si definimos $y = \frac{x}{\|x\|}$, entonces $\|y\| = 1$, y se obtiene que $\|Ty\| \leq \beta$ para todo $y \in E$ con $\|y\| = 1$. Por lo tanto, $\alpha \leq \beta$.

En consecuencia, $\alpha = \beta$.

Ahora, si $M > 0$ es cualquier número en el conjunto que define a γ, entonces se cumple que $\|Tx\| \leq M\|x\|$ para todo $x \in E$. Esto implica que

$$\frac{\|Tx\|}{\|x\|} \leq M,$$

y por lo tanto, $\beta \leq M$ para todo M en dicho conjunto. En consecuencia, $\beta \leq \gamma$.

Por otro lado, ya sabemos que $\frac{\|Tx\|}{\|x\|} \leq \beta$ para todo $x \in E$, $x \neq 0$, lo cual equivale a $\|Tx\| \leq \beta\|x\|$. Es decir, β también cumple la propiedad que del conjunto que define γ, así que $\gamma \leq \beta$. Concluimos entonces que:

$$\alpha = \beta = \gamma.$$

Finalmente, notemos que $\|T\| \geq \alpha$, ya que:

$$\{x \in E : \|x\| = 1\} \subseteq \{x \in E : \|x\| \leq 1\}.$$

Por otro lado, si M pertenece al conjunto que define a γ, entonces para todo $x \in E$ con $\|x\| \leq 1$, se tiene $\|Tx\| \leq M$, y como M es una cota superior de $\|Tx\|$ sobre la bola unitaria, se concluye que $\|T\| \leq M$. Por ser esto válido para todo M del conjunto que define a γ, se tiene que $\|T\| \leq \gamma$.

Por lo tanto,

$$\|T\| = \alpha = \beta = \gamma.$$

□

Ejercicio 4 .
Sean $(E, \|\cdot\|_E)$ y $(F, \|\cdot\|_F)$ espacios vectoriales normados. Suponga que F es un espacio de Banach. Muestre que $\mathcal{L}(E, F)$ es un espacio de Banach con la norma usual de $\mathcal{L}(E, F)$. En particular, concluya que $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ y $E^{**} = \mathcal{L}(E^*, \mathbb{R})$ son espacios de Banach.

Demostración.
Sea $(E, \|\cdot\|_E)$ un espacio normado y sea $(F, \|\cdot\|_F)$ un espacio de Banach. Consideremos el conjunto $\mathcal{L}(E, F)$ de todas las aplicaciones lineales y continuas de E en F, provisto de la norma definida por

$$\|T\| := \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|T(x)\|_F.$$

Queremos demostrar que $\mathcal{L}(E, F)$, con esta norma, es un espacio de Banach.
Sea $(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{L}(E, F)$ una sucesión de Cauchy. Por definición, para todo $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$

tal que para todo $n, m \geq N$,
$$\|T_n - T_m\| < \varepsilon.$$
Es decir, para todo $x \in E$ con $\|x\|_E \leq 1$, se tiene
$$\|T_n(x) - T_m(x)\|_F < \varepsilon.$$
Ahora, sea $x \in E$ arbitrario (no necesariamente de norma menor o igual que uno). Para todo $n, m \geq N$, se cumple
$$\|T_n(x) - T_m(x)\|_F = \|(T_n - T_m)(x)\|_F \leq \|T_n - T_m\| \cdot \|x\|_E.$$
Dado $\varepsilon > 0$, si $x \neq 0$, se puede tomar $\delta := \varepsilon/\|x\|_E$, y por ser (T_n) de Cauchy, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n, m \geq N$,
$$\|T_n - T_m\| < \delta = \frac{\varepsilon}{\|x\|_E},$$
lo que implica
$$\|T_n(x) - T_m(x)\|_F < \varepsilon.$$
En el caso $x = 0$, se tiene trivialmente que $T_n(0) = 0$ para todo n, por lo que la sucesión es constante y, en particular, de Cauchy. Así, se concluye que para todo $x \in E$, la sucesión $(T_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \subseteq F$ es de Cauchy.
Como F es un espacio de Banach, existe un elemento $T(x) \in F$ tal que
$$T_n(x) \to T(x) \in F.$$
Esto define una aplicación $T : E \to F$ mediante
$$T(x) := \lim_{n\to\infty} T_n(x).$$
Veamos que T es lineal. Sean $x, y \in E$ y $\lambda \in \mathbb{K}$ (donde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$). Como cada T_n es lineal, se tiene
$$T_n(\lambda x + y) = \lambda T_n(x) + T_n(y),$$
y como los límites existen en F, se concluye que
$$T(\lambda x + y) = \lim_{n\to\infty} T_n(\lambda x + y) = \lim_{n\to\infty} (\lambda T_n(x) + T_n(y)) = \lambda T(x) + T(y),$$
es decir, T es lineal.
Mostremos ahora que T es acotada. Como (T_n) es Cauchy en $\mathcal{L}(E, F)$, existe una constante $M > 0$ tal que $\|T_n\| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces, para todo $x \in E$,
$$\|T_n(x)\|_F \leq \|T_n\| \cdot \|x\|_E \leq M\|x\|_E,$$
y pasando al límite cuando $n \to \infty$,
$$\|T(x)\|_F \leq M\|x\|_E.$$
Esto demuestra que $T \in \mathcal{L}(E, F)$, es decir, T es lineal y continua.

Finalmente, veamos que $T_n \to T$ en $\mathcal{L}(E, F)$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n, m \geq N$,

$$\|T_n - T_m\| < \varepsilon.$$

Fijado $n \geq N$, y tomando el límite cuando $m \to \infty$, se obtiene

$$\|T_n - T\| = \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|T_n(x) - T(x)\|_F \leq \varepsilon.$$

Por tanto, $\|T_n - T\| \to 0$, lo que implica que $T_n \to T$ en $\mathcal{L}(E, F)$.

Concluimos que $\mathcal{L}(E, F)$, con la norma $\|\cdot\|$, es un espacio de Banach. □

Ejercicio 5 Sean E y F espacios vectoriales normados. Suponga que E es de dimensión finita (no se asume que F sea de dimensión finita).

(i) Muestre que todas las normas asignadas a E son equivalentes.

(ii) Muestre que toda transformación lineal $T : E \to F$ es continua.

(iii) Dé un ejemplo donde se verifique que (ii) puede ser falsa si E es de dimensión infinita.

Ejercicio 6
Considere $E = c_0$, donde

$$c_0 = \left\{ u = \{u_n\}_{n \geq 1} : \text{tales que } u_n \in \mathbb{R},\ \lim_{n \to \infty} u_n = 0 \right\}.$$

Es decir, c_0 es el conjunto de las secuencias reales que tienden a cero. Dotamos a este espacio con la norma $\|u\|_{\ell^\infty} = \sup_{n \in \mathbb{Z}^+} |u_n|$. Considere el funcional $f : E \to \mathbb{R}$ dado por

$$f(u) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} u_n.$$

(i) Muestre que $f \in E^*$ y calcule $\|f\|_{E^*}$.

(ii) ¿Es posible encontrar $u \in E$ tal que $\|u\| = 1$ y $f(u) = \|f\|_{E^*}$?