



Sandra Natalia Florez Garcia

Edgar Santiago Ochoa Quiroga

María Alejandra Rodríguez Ríos .....

**Ejercicio 1** Sea  $(E, \|\cdot\|)$  un espacio vectorial normado. Defina

$$K = \{x \in E : \|x\| = 1\}.$$

Demuestre que  $E$  es de Banach si y solamente si  $K$  es completo.

**Ejercicio 2** Sean  $(E, \|\cdot\|_E)$  y  $(F, \|\cdot\|_F)$  espacios vectoriales normados. Considere  $T : E \rightarrow F$  una transformación lineal. Muestre que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (i)  $T$  es continua.
- (ii)  $T$  es continua en cero.
- (iii)  $T$  es acotada. Es decir, existe  $M > 0$  tal que para todo  $x \in E$ ,

$$\|Tx\|_F \leq M\|x\|_E.$$

- (iv) Si  $\overline{B(0, 1)} = \{x \in E : \|x\|_E \leq 1\}$ , entonces la imagen directa  $T(B(0, 1))$  es un conjunto acotado de  $F$ .

**Demostración.** Para establecer la equivalencia entre estas afirmaciones, probaremos la cadena de implicaciones  $(i) \rightarrow (ii) \rightarrow (iii) \rightarrow (iv) \rightarrow (i)$ .

- $(i) \rightarrow (ii)$ : Si  $T$  es continua en todo punto de  $E$ , en particular es continua en el origen.
- $(ii) \rightarrow (iii)$ : Supongamos que  $T$  es continua en el origen. Entonces, por definición de continuidad, dado  $\varepsilon = \frac{1}{9}$ , existe  $\delta > 0$  tal que si  $\|x\|_E < \delta$ , entonces  $\|Tx\|_F < \frac{1}{9}$ .

Sea  $x \in E$  con  $x \neq 0$ , y definamos  $y = \frac{\delta x}{3\|x\|_E}$ . Entonces,  $\|y\|_E = \frac{\delta}{3} < \delta$ , por lo que se cumple que  $\|Ty\|_F < \frac{1}{9}$ .

Utilizando la linealidad de  $T$ , tenemos

$$\begin{aligned} \left\| T \left( \frac{\delta x}{3\|x\|_E} \right) \right\|_F &< \frac{1}{9}, \\ \frac{\delta}{3\|x\|_E} \|Tx\|_F &< \frac{1}{9}, \\ \|Tx\|_F &< \frac{3}{\delta} \|x\|_E. \end{aligned}$$

Por lo tanto, si tomamos  $M = \frac{3}{\delta}$ , se tiene que para todo  $x \in E$ ,

$$\|Tx\|_F \leq M\|x\|_E,$$

lo cual demuestra que  $T$  es acotada.

- (iii)  $\Rightarrow$  (iv): Supongamos que  $T$  es acotada. Entonces existe  $M > 0$  tal que para todo  $x \in E$ , se cumple que  $\|Tx\|_F \leq M\|x\|_E$ . En particular, si  $x \in \overline{B(0, 1)}$ , es decir,  $\|x\|_E \leq 1$ , entonces

$$\|Tx\|_F \leq M$$

como lo anterior se tiene para todo punto en  $\overline{B(0, 1)}$ , se tiene que  $T(\overline{B(0, 1)})$  está contenido en la bola cerrada de radio  $M$  en  $F$ , lo que implica que  $T(\overline{B(0, 1)})$  es un conjunto acotado.

- (iv)  $\Rightarrow$  (i): Supongamos que  $T(\overline{B(0, 1)})$  es acotado. Entonces existe una constante  $M > 0$  tal que para todo  $x \in \overline{B(0, 1)}$ , se cumple que

$$\|Tx\|_F \leq M.$$

Sea  $x \in E$  con  $x \neq 0$ . Tomemos  $y = \|x\|_E \cdot \frac{x}{\|x\|_E}$ , donde  $\frac{x}{\|x\|_E} \in \overline{B(0, 1)}$ . Usando la linealidad de la transformación  $T$  y la desigualdad anterior, obtenemos,

$$\|Tx\|_F = \left\| T \left( \|x\|_E \cdot \frac{x}{\|x\|_E} \right) \right\|_F = \|x\|_E \cdot \left\| T \left( \frac{x}{\|x\|_E} \right) \right\|_F \leq \|x\|_E \cdot M.$$

Por lo tanto,  $T$  es acotada. Luego, para todo  $\varepsilon > 0$  con  $x', y' \in E$  tenemos que

$$\|Tx' - Ty'\| = \|T(x' - y')\| = M\|x' - y'\| < \varepsilon.$$

si se toma a  $\delta = \frac{M}{\varepsilon}$ .

Con lo cual se concluye la demostración.

□

### Ejercicio 3

Demuestre que si  $T \in \mathcal{L}(E, F)$ , entonces:

- (i)  $\|Tx\|_F \leq \|T\| \|x\|_E$ , para todo  $x \in E$ .
- (ii)  $\|T\| = \sup_{\substack{x \in E \\ x \neq 0}} \frac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E}$ .
- (iii)  $\|T\| = \sup_{\|x\|_E=1} \|Tx\|_F$ .
- (iv)  $\|T\| = \inf \{M > 0 : \|Tx\|_F \leq M\|x\|_E, \forall x \in E\}$ .

### Demostración.

(i) Sea  $\mathcal{L}(E, F)$  un espacio vectorial con la norma

$$\|T\| = \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\| \leq 1}} \frac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E}.$$

Por definición de supremo, se tiene que  $\|Tx\| \leq \|T\|$  para todo  $x \in E$  con  $\|x\| \leq 1$ .

Si  $x = 0$ , la desigualdad se cumple trivialmente. Tomemos ahora  $x \in E$  con  $x \neq 0$ , y definamos

$$y = \frac{x}{\|x\|}.$$

Entonces, usando la linealidad de  $T$ , se tiene:

$$\|Ty\| = \left\| T \left( \frac{x}{\|x\|} \right) \right\| = \frac{1}{\|x\|} \|Tx\|.$$

Por la definición del supremo, como  $\|y\| = 1$ , se cumple que  $\|Ty\| \leq \|T\|$ , y por lo tanto:

$$\frac{1}{\|x\|} \|Tx\| \leq \|T\|.$$

Multiplicando ambos lados por  $\|x\|$ , obtenemos:

$$\|Tx\| \leq \|T\| \|x\|.$$

Así, se concluye que para todo  $x \in E$ , se cumple  $\|Tx\| \leq \|T\| \|x\|$ , como queríamos.

(ii-iv) Definamos:

$$\alpha = \sup_{\|x\|_E=1} \|Tx\|_F,$$

$$\beta = \sup_{\substack{x \in E \\ x \neq 0}} \frac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E},$$

$$\gamma = \inf \{M > 0 : \|Tx\|_F \leq M \|x\|_E, \forall x \in E\}.$$

Veamos que  $\|Tx\| \leq \alpha$  para todo  $x \in E$  con  $\|x\| = 1$ . Tomemos  $y \in E$  con  $y \neq 0$  tal que  $x = \frac{y}{\|y\|}$ , entonces:

$$\|Tx\| = \left\| T \left( \frac{y}{\|y\|} \right) \right\| = \frac{\|Ty\|}{\|y\|} \leq \alpha.$$

Como esto vale para todo  $y \in E$  con  $y \neq 0$ , se concluye que  $\beta \leq \alpha$ .

Por otro lado, para todo  $x \in E$  con  $x \neq 0$ , se cumple:

$$\frac{\|Tx\|}{\|x\|} \leq \beta.$$

Entonces, usando la linealidad de  $T$ ,

$$\left\| T \left( \frac{x}{\|x\|} \right) \right\| \leq \beta.$$

Si definimos  $y = \frac{x}{\|x\|}$ , entonces  $\|y\| = 1$ , y se obtiene que  $\|Ty\| \leq \beta$  para todo  $y \in E$  con  $\|y\| = 1$ . Por lo tanto,  $\alpha \leq \beta$ .

En consecuencia,  $\alpha = \beta$ .

Ahora, si  $M > 0$  es cualquier número en el conjunto que define a  $\gamma$ , entonces se cumple que  $\|Tx\| \leq M\|x\|$  para todo  $x \in E$ . Esto implica que

$$\frac{\|Tx\|}{\|x\|} \leq M,$$

y por lo tanto,  $\beta \leq M$  para todo  $M$  en dicho conjunto. En consecuencia,  $\beta \leq \gamma$ .

Por otro lado, ya sabemos que  $\frac{\|Tx\|}{\|x\|} \leq \beta$  para todo  $x \in E$ ,  $x \neq 0$ , lo cual equivale a  $\|Tx\| \leq \beta\|x\|$ . Es decir,  $\beta$  también cumple la propiedad que del conjunto que define  $\gamma$ , así que  $\gamma \leq \beta$ . Concluimos entonces que:

$$\alpha = \beta = \gamma.$$

Finalmente, notemos que  $\|T\| \geq \alpha$ , ya que:

$$\{x \in E : \|x\| = 1\} \subseteq \{x \in E : \|x\| \leq 1\}.$$

Por otro lado, si  $M$  pertenece al conjunto que define a  $\gamma$ , entonces para todo  $x \in E$  con  $\|x\| \leq 1$ , se tiene  $\|Tx\| \leq M$ , y como  $M$  es una cota superior de  $\|Tx\|$  sobre la bola unitaria, se concluye que  $\|T\| \leq M$ . Por ser esto válido para todo  $M$  del conjunto que define a  $\gamma$ , se tiene que  $\|T\| \leq \gamma$ .

Por lo tanto,

$$\|T\| = \alpha = \beta = \gamma.$$

□

#### Ejercicio 4 .

Sean  $(E, \|\cdot\|_E)$  y  $(F, \|\cdot\|_F)$  espacios vectoriales normados. Suponga que  $F$  es un espacio de Banach. Muestre que  $\mathcal{L}(E, F)$  es un espacio de Banach con la norma usual de  $\mathcal{L}(E, F)$ . En particular, concluya que  $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$  y  $E^{**} = \mathcal{L}(E^*, \mathbb{R})$  son espacios de Banach.

#### Demostración.

Sea  $(E, \|\cdot\|_E)$  un espacio normado y sea  $(F, \|\cdot\|_F)$  un espacio de Banach. Consideremos el conjunto  $\mathcal{L}(E, F)$  de todas las aplicaciones lineales y continuas de  $E$  en  $F$ , provisto de la norma definida por

$$\|T\| := \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|T(x)\|_F.$$

Queremos demostrar que  $\mathcal{L}(E, F)$ , con esta norma, es un espacio de Banach.

Sea  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{L}(E, F)$  una sucesión de Cauchy. Por definición, para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $N \in \mathbb{N}$

tal que para todo  $n, m \geq N$ ,

$$\|T_n - T_m\| < \varepsilon.$$

Es decir, para todo  $x \in E$  con  $\|x\|_E \leq 1$ , se tiene

$$\|T_n(x) - T_m(x)\|_F < \varepsilon.$$

Ahora, sea  $x \in E$  arbitrario (no necesariamente de norma menor o igual que uno). Para todo  $n, m \geq N$ , se cumple

$$\|T_n(x) - T_m(x)\|_F = \|(T_n - T_m)(x)\|_F \leq \|T_n - T_m\| \cdot \|x\|_E.$$

Dado  $\varepsilon > 0$ , si  $x \neq 0$ , se puede tomar  $\delta := \varepsilon/\|x\|_E$ , y por ser  $(T_n)$  de Cauchy, existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $n, m \geq N$ ,

$$\|T_n - T_m\| < \delta = \frac{\varepsilon}{\|x\|_E},$$

lo que implica

$$\|T_n(x) - T_m(x)\|_F < \varepsilon.$$

En el caso  $x = 0$ , se tiene trivialmente que  $T_n(0) = 0$  para todo  $n$ , por lo que la sucesión es constante y, en particular, de Cauchy. Así, se concluye que para todo  $x \in E$ , la sucesión  $(T_n(x))_{n \in \mathbb{N}} \subseteq F$  es de Cauchy.

Como  $F$  es un espacio de Banach, existe un elemento  $T(x) \in F$  tal que

$$T_n(x) \rightarrow T(x) \in F.$$

Esto define una aplicación  $T : E \rightarrow F$  mediante

$$T(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x).$$

Veamos que  $T$  es lineal. Sean  $x, y \in E$  y  $\lambda \in \mathbb{K}$  (donde  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$ ). Como cada  $T_n$  es lineal, se tiene

$$T_n(\lambda x + y) = \lambda T_n(x) + T_n(y),$$

y como los límites existen en  $F$ , se concluye que

$$T(\lambda x + y) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(\lambda x + y) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda T_n(x) + T_n(y)) = \lambda T(x) + T(y),$$

es decir,  $T$  es lineal.

Mostremos ahora que  $T$  es acotada. Como  $(T_n)$  es Cauchy en  $\mathcal{L}(E, F)$ , existe una constante  $M > 0$  tal que  $\|T_n\| \leq M$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Entonces, para todo  $x \in E$ ,

$$\|T_n(x)\|_F \leq \|T_n\| \cdot \|x\|_E \leq M\|x\|_E,$$

y pasando al límite cuando  $n \rightarrow \infty$ ,

$$\|T(x)\|_F \leq M\|x\|_E.$$

Esto demuestra que  $T \in \mathcal{L}(E, F)$ , es decir,  $T$  es lineal y continua.

Finalmente, veamos que  $T_n \rightarrow T$  en  $\mathcal{L}(E, F)$ . Dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $n, m \geq N$ ,

$$\|T_n - T_m\| < \varepsilon.$$

Fijado  $n \geq N$ , y tomando el límite cuando  $m \rightarrow \infty$ , se obtiene

$$\|T_n - T\| = \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|T_n(x) - T(x)\|_F \leq \varepsilon.$$

Por tanto,  $\|T_n - T\| \rightarrow 0$ , lo que implica que  $T_n \rightarrow T$  en  $\mathcal{L}(E, F)$ .

Concluimos que  $\mathcal{L}(E, F)$ , con la norma  $\|\cdot\|$ , es un espacio de Banach.  $\square$

**Ejercicio 5** Sean  $E$  y  $F$  espacios vectoriales normados. Suponga que  $E$  es de dimensión finita (no se asume que  $F$  sea de dimensión finita).

(i) Muestre que todas las normas asignadas a  $E$  son equivalentes.

**Demostración.** Sea  $E$  un espacio vectorial normado de dimensión finita  $N$ . Para esta demostración basta probar que  $E$  es isomorfo al espacio  $\ell_1^N$ . Por consiguiente, dadas dos normas en  $E$ , estas serán isomorfas a  $\ell_1^N$  para cada una de estas normas, y de esto deduciremos la equivalencia de las normas.

Sea  $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  la base canónica de  $\ell_1^N$ . Tomemos una base  $\mathcal{B}' = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  para  $E$ . Definamos una aplicación  $T : \ell_1^N \rightarrow E$  tal que  $T(e_i) = v_i$  para todo  $1 \leq i \leq N$ . Por su definición, tenemos que  $T$  es transformación lineal.

Veamos ahora que  $T$  es continua, para ello veremos que es acotada.

Sea  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ , luego  $x = \sum_{i=1}^N x_i e_i$ . Por lo cual,

$$T(x) = \sum_{i=1}^N x_i T(e_i) = \sum_{i=1}^N x_i v_i.$$

Así,

$$\begin{aligned} \|T(x)\|_E &= \left\| \sum_{i=1}^N x_i v_i \right\|_E \\ &\leq \sum_{i=1}^N \|x_i v_i\|_E \\ &= \sum_{i=1}^N |x_i| \cdot \|v_i\|_E \\ &\leq \sum_{i=1}^N |x_i| \cdot \max_{1 \leq i \leq N} \|v_i\|_E \end{aligned}$$

si  $K = \max_{1 \leq i \leq N} \|v_i\|_E$ , entonces  $T$  está acotada y por ende es continua. Adicionalmente,  $T$  es biyectiva por su definición.

Ahora, razonando por reducción al absurdo suponga que  $T^{-1}$  no es una transformación lineal continua, lo cual por las equivalencias mostradas en el ejercicio 2 la no continuidad debe fallar en 0. Esto nos indica que podemos encontrar una sucesión  $\{y_n\}$  en  $V$  y un número real  $\varepsilon > 0$  tal que  $\|T^{-1}(y_n)\|_1 > \varepsilon$  mientras que  $y_n \rightarrow 0$ . Definamos

$$z_n = \frac{y_n}{\|T^{-1}(y_n)\|_1},$$

entonces cuando  $z_n \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \|T^{-1}(z_n)\|_1 &= \left\| T^{-1} \left( \frac{y_n}{\|T^{-1}(y_n)\|_1} \right) \right\|_1 \\ &= \frac{1}{\|T^{-1}(y_n)\|_1} \cdot \|T^{-1}(y_n)\|_1 \\ &= 1. \end{aligned}$$

Ahora bien, mostremos que el siguiente conjunto es compacto, sea

$$B = \{x \in \ell_1^N : \|x\|_1 \leq 1\},$$

note que  $B$  es cerrado y acotado, y al ser la topología en  $\ell_1^N$  es la misma que con la topología usual en  $\mathbb{R}^N$ . tenemos que  $B$  es también secuencialmente compacto, y entonces, por definición, existe una subsucesión  $\{z_{n_k}\}$  tal que  $\{T^{-1}(z_{n_k})\}$  es convergente.

Sea  $T^{-1}(z_{n_k}) \rightarrow x$ , teniendo en cuenta que  $\|T^{-1}(z_{n_k})\|_1 = 1$  y  $T^{-1}(z_{n_k}) \rightarrow x$ , entonces  $\|x\|_1 = 1$ .

Dado que  $T$  es continua,

$$\lim T(T^{-1}(z_{n_k})) = T(x),$$

es decir,

$$z_{n_k} \rightarrow T(x),$$

lo cual implica que  $T(x) = 0$ . Pero  $T$  es una aplicación 1-1 y  $\|x\|_1 = 1$ , por consiguiente  $x \neq 0$ , lo cual prueba que  $T(x) \neq 0$ . Esto nos lleva a una contradicción. Por ende,  $T^{-1}$  debe ser continua.

Por lo cual, para cualquier norma en  $E$ , la aplicación  $T$  es siempre un isomorfismo entre  $\ell_1^N$  y  $E$ , lo cual implica que la aplicación de  $(E, \|\cdot\|_{E_1})$  y  $(E, \|\cdot\|_{E_2})$  también lo será, concluyendo así que las dos normas son equivalentes.

□

(ii) Muestre que toda transformación lineal  $T : E \rightarrow F$  es continua.

**Demostración.** Sea  $T : E \rightarrow F$  una transformación lineal, veamos que  $T$  es continua, para esto de acuerdo con el ejercicio 2 de este taller, sabemos que basta con mostrar que es acotada.

Como  $E$  es un espacio vectorial de dimensión finita, tomemos la base de  $E$  como  $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ , luego si  $x \in E$  tenemos que  $x = \sum_{i=1}^n x_i v_i$ , entonces la transformación lineal  $T$  es de la forma,

$$\begin{aligned} Tx &= T\left(\sum_{i=1}^n x_i v_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^n x_i T(v_i), \\ &= \sum_{i=1}^n x_i v_i \max_{1 \leq i \leq n} \|T(v_i)\|_E, \end{aligned}$$

luego, tenemos que

$$\begin{aligned} \|T\|_E &= \left\| \sum_{i=1}^n x_i T(v_i) \right\|_E \\ &\leq \sum_{i=1}^n \|x_i T(v_i)\|_E \\ &= \sum_{i=1}^n |x_i| \cdot \|T(v_i)\|_E, \end{aligned}$$

por el punto anterior, como  $E$  es un espacio de dimensión finita existen constantes positivas  $C_1$  y  $C_2$ , tal que  $C_1 \|x\|_E \leq \|x\|_1 \leq C_2 \|x\|_E$  y si tomamos a  $M_1 = \max_{1 \leq i \leq n} \|T(v_i)\|_E$ , entonces,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n |x_i| \cdot \|T(v_i)\|_E &= \|x\|_1 \max_{1 \leq i \leq n} \|T(v_i)\|_E, \\ &\leq M_1 C_2 \|x\|_E \\ &= M \|x\|_E, \end{aligned}$$

por lo cual,  $T$  es acotado y continuo. □

(iii) Dé un ejemplo donde se verifique que (ii) puede ser falsa si  $E$  es de dimensión infinita.

**Solución.** Sea  $T : (C^1([0, 1]), \|\cdot\|_\infty) \longrightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|)$  donde por  $f \mapsto f'(0)$ . Note que  $T$  es una transformación lineal.

Como queremos mostrar que la transformación no es continua, demostremos que  $T$  no es acotada.



**Demostración.** Supongamos que  $T \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$  con  $\|\cdot\|_{\mathcal{L}^\infty}$ , por lo cual, existe  $M > 0$  tal que

$$|T(x)| = |f'(0)| \leq M\|f\|_{\mathcal{L}^\infty} \quad \text{para todo } f \in C^1([0, 1]).$$

Sea  $n \geq 2$  y  $f(x) = (1 - x)^n$ , entonces,

$$\|f\|_{\mathcal{L}^\infty} = 1, \quad f'(x) = -n(1 - x)^{n-1}, \quad f'(0) = -n.$$

Reemplazando

$$n = |f'(0)| \leq M\|f\|_\infty = M.$$

Por tanto, cuando  $n \rightarrow \infty$ , se tendría  $n \leq M$  para todo  $n \geq 2$ , lo cual es una contradicción. Entonces  $T$  no es acotada.

□

### Ejercicio 6

Considere  $E = c_0$ , donde

$$c_0 = \left\{ u = \{u_n\}_{n \geq 1} : \text{tales que } u_n \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0 \right\}.$$

Es decir,  $c_0$  es el conjunto de las secuencias reales que tienden a cero. Dotamos a este espacio con la norma  $\|u\|_{\ell^\infty} = \sup_{n \in \mathbb{Z}^+} |u_n|$ . Considere el funcional  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  dado por

$$f(u) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} u_n.$$

- (i) Muestre que  $f \in E^*$  y calcule  $\|f\|_{E^*}$ .
- (ii) ¿Es posible encontrar  $u \in E$  tal que  $\|u\| = 1$  y  $f(u) = \|f\|_{E^*}$ ?