Sandra Natalia Florez Garcia
Edgar Santiago Ochoa Quiroga
María Alejandra Rodríguez Ríos ....

Ejercicio 9 Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio vectorial normado. Dado $r > 0$, considere $C = B(0, r) = \{y \in E : \|y\| < r\}$. Determine el funcional de Minkowski de C.

Solución:

Dado que $(E, \|\cdot\|)$ es un espacio vectorial normado, se deduce que el conjunto $C = B(0, r)$ es abierto, convexo y $0 \in C$.

Por consiguiente, el funcional de Minkowski asociado a C se define como,

$$\rho(x) = \text{ínf}\left\{\alpha > 0 : \alpha^{-1}x \in C\right\}, \qquad x \in E.$$

Ahora, sea $x \in B(0, r)$. Entonces, para todo $\alpha > 0$ tal que $\alpha^{-1}x \in C$,

$$\|\alpha^{-1}x\| < r,$$

lo que implica que,

$$\alpha^{-1}\|x\| < r,$$

luego, despejando α,

$$\frac{\|x\|}{r} < \alpha.$$

Supongamos por contradicción que $\rho(x) \neq \frac{\|x\|}{r}$, por lo que se tiene que,

$$\frac{\|x\|}{r} < \rho(x).$$

Tomemos el promedio entre $\frac{\|x\|}{r}$ y $\rho(x)$

$$\beta = \frac{\frac{\|x\|}{r} + \rho(x)}{2},$$

este valor cumple que

$$\frac{\|x\|}{r} < \beta < \rho(x).$$

Pero entonces,

$$\|\beta^{-1}x\| = \beta^{-1}\|x\| < \frac{r}{\|x\|} \cdot \|x\| = r,$$

lo cual implica que $\beta^{-1}x \in B(0, r) = C$. Por tanto, $\beta \in \left\{\alpha > 0 : \alpha^{-1}x \in C\right\}$.

Esto contradice el hecho de que $\rho(x)$ es la ínfimo de ese conjunto, ya que $\beta < \rho(x)$.

Por lo tanto, concluimos que,

$$\rho(x) = \frac{\|x\|}{r}.$$

Ejercicio 12 Sea E un espacio vectorial normado.

(i) Sea $W \subset E$ un subespacio propio de E y $x_0 \in E \setminus W$, tal que $d := \mathtt{dist}(x_0, W) > 0$. Demuestre que existe $f \in E^*$ tal que $f = 0$ restricto a W, $f(x_0) = d$ y $\|f\|_{E^*} = 1$.

Demostración. Definamos el espacio $W' = W + \mathrm{Gen}\{x_0\}$ y tomemos la aplicación

$$T : W' \longrightarrow \mathbb{R} \qquad \text{donde} \qquad w + tx_0 \mapsto T(w + tx_0) = td$$

Veamos que $T \in \mathcal{L}(W', \mathbb{R})$

Para eso debemos ver que T es lineal, por lo cual tomamos $v_1, v_2 \in W'$, por lo que $v_1 = w_1 + t_1 x_0$ y $v_2 = w_2 + t_2 x_0$, con $w_1, w_2 \in W$ y $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$. Tenemos que,

$$T(v_1 + v_2) = T\left((w_1 + t_1x_0) + (w_2 + t_2x_0)\right) = T((w_1 + w_2) + (t_1 + t_2)x_0) = (t_1 + t_2)d$$
$$T(v_1) + T(v_2) = T(w_1 + t_1x_0) + T(w_2 + t_2x_0) = t_1d + t_2d = (t_1 + t_2)d$$

por lo cual, tenemos que T es lineal. Ahora veamos que T es acotada, sea $w \in W$ y $t \in \mathbb{R}$

$$\|w + tx_0\|_E = \|t(t^{-1}w + x_0)\| = |t|\|t^{-1}w + x_0\| = |t|\|x_0 - (-t^{-1}w)\|$$

como W es espacio vectorial, $-t^{-1}w \in W$, así, $\|x_0 - (t^{-1}w)\| \geq \mathrm{dist}(x_0, W) = d$ y $T(x_0) = d$ por lo que

$$\|w + tx_0\|_E \geq |t|d = |td| = |T(w + tx_0)|.$$

Por el corolario de Hahn-Banach, se tiene que al ser $W' \subseteq E$ un subespacio y T es un funcional continuo, entonces existe $f \in E^*$ que extiende a T y

$$\|f\|_{E^*} = \sup_{x \in E, \|x\| \leq 1} |\langle f, x \rangle| = \|T\|_{W'^*}.$$

Además por la definición de f, tenemos que para todo $x \in W$ se cumple que $f|_W = 0$ y que $f(x_0) = d$.

Para calcular $\|T\|_{E^*}$, basta con tomar la sucesión $\left(\frac{1}{d} + \frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ en $\mathbb{R}$, con $\lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{d} + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{d}$. Así,

$$\|T\|_{W'^*} = \sup_{\substack{x \in W^* \\ \|x\| \neq 0}} \frac{|T(x)|}{\|x\|} \geq T\left(\left(\tfrac{1}{d} + \tfrac{1}{n}\right) x_0\right),$$

si tomamos $n \to \infty$, tenemos que,

$$\|T\|_{W'^*} \geq \lim_{n \to \infty} T\left(\left(\tfrac{1}{d} + \tfrac{1}{n}\right) x_0\right) = \tfrac{1}{d} T(x_0) = 1.$$

Ahora, como $\|w + tx_0\| \geq |T(w + tx_0)|$, se tiene que,

$$1 \geq \left| \frac{T(w + tx_0)}{\|w + tx_0\|} \right| \qquad \text{para todo } w \in W', \ \text{donde } t \in \mathbb{R}$$

por lo que,

$$\|T\|_{W'^*} \leq 1 \quad \text{entonces} \quad \|T\|_{W'^*} = 1$$

Por lo que existe $f \in E^*$ tal que $f = 0$ restricto a W, $f(x_0) = d$ y $\|f\|_{E^*} = 1$. $\square$

(ii) Sea $W \subset E$ un subespacio propio cerrado de E y $x_0 \in E \setminus W$. Demuestre que existe $f \in E^*$ tal que $f = 0$ restricto a W y $f(x_0) \neq 0$.

Demostración. Como $W \subset E$ es un subespacio propio cerrado, se tiene que $W = \overline{W}$. Por lo tanto, para todo $x \in W^c$ se cumple que la distancia de x a W es estrictamente mayor que cero, de lo contrario, si $\text{dist}(x, W) = 0$, entonces x sería un punto de acumulación de W, y como W es cerrado, implicaría que $x \in W$, lo cual contradice que $x \in W^c$.
En particular, como $x_0 \in E \setminus W$, se tiene que $\text{dist}(x_0, W) > 0$. Por el numeral (i), existe entonces un funcional lineal continuo $f \in E^*$ tal que

$$f|_W = 0 \quad \text{y} \quad f(x_0) = d \neq 0.$$

$\square$

Ejercicio 13 Sean $(E, \|\cdot\|)$ y $(F, \|\cdot\|)$ espacios de Banach.

(i) Sea $K \subset E$ un subespacio cerrado de E. Definimos la relación sobre E dada por $x \sim_K y$ si y solo si $x - y \in K$.

(a) Muestre que $\sim_K$ es una relación de equivalencia sobre E.

Demostración. Dado $x \in E$, como K es subespacio, $x - x = 0 \in K$, esto implica que $x \sim_K x$, mostrando así la reflexividad.

Dados $x, y \in E$, suponga que tenemos que $x \sim_K y$, luego $x - y \in K$, nuevamente como K es subespacio, es cerrado bajo la multiplicación por escalar, así $-(x-y) \in K$, pero $-(x-y) = y - x$, por definición de la relación tenemos que $y \sim_K x$, mostrando que se cumple la simetría.

Por último sean $x, y, z \in E$, con $x \sim_K y$ y $y \sim_K z$, por definición $x-y \in K$ y $y-z \in K$, como K es subespacio, es cerrado para la suma, así tenemos que $(x-y)+(y-z) \in K$, pero $(x-y)+(y-z) = x-z$, así tenemos que $x \sim_K z$, luego, la relación es transitiva. Con esto podemos concluir que la relación es de equivalencia.

(b) Muestre que el espacio cociente E/K es un espacio de Banach con la norma

$$\|x + K\|_{E/K} = \inf_{k \in K} \|x - k\|, \quad x \in E.$$

Es decir, debe verificar que el espacio cociente es un espacio vectorial, normado, cuya norma lo hace completo.

Demostración. Primero notemos que las operaciones definidas sobre el conjunto E/K son las siguientes

$$(x + K) + (y + K) = (x + y) + K,$$
$$\lambda(x + K) = \lambda x + K.$$

Puesto que E es un espacio vectorial, las propiedades de E se heredan a E/K, solo bastaría verificar que estas operaciones están bien definidas. Si $x_1 + K = x_2 + K$ y $y_1 + K = y_2 + K$, tenemos que $x_1 - x_2 \in K$ y $y_1 - y_2 \in K$, pero como K es subespacio $(x_1 + y_1) - (x_2 + y_2) \in K$, así $(x_1 + y_1) + K = (x_2 + y_2) + K$, luego la suma está bien definida. De manera similar, si $x_1 - x_2 \in K$, tenemos que al multiplicar por un escalar también está en K, esto es $\lambda x_1 - \lambda x_2 \in K$, así $\lambda x_1 + K = \lambda x_2 + K$.

Ahora veamos que la norma definida en el enunciado, efectivamente es norma del espacio E/K. Primero esta norma está bien definida ya que si $x + K = y + K$, eso quiere decir que $x - y \in K$, luego

$$\begin{aligned}
\|x + K\| &= \inf_{k \in K} \|x - k\| \\
&= \inf_{k_1 \in K} \|x - (k_1 + x - y)\| \\
&= \inf_{k_1 \in K} \|y - k_1\| \\
&= \|y + K\|.
\end{aligned}$$

Como $\|x - k\| \geq 0$, para todo $k \in K$, es claro que

$$\|x + K\| = \inf_{k \in K} \|x - k\| \geq 0,$$

ya que estamos tomando el ínfimo de un conjunto que está acotado inferiormente por 0 y $x \in E$ fue tomado arbitrariamente.

Ahora supongamos que $x + K = 0 + W$, luego $x \in W$, así tenemos que

$$0 \leq \|x + K\| = \inf_{k \in K} \|x - k\| \leq \|x - x\| = 0,$$

Mostrando que el neutro tiene norma 0. Ahora si suponemos que $\|x + K\| = 0$, como la norma es un ínfimo tenemos que existe una sucesión de puntos $k_n \in K$ tal que $\|x - k_n\| \to 0$, es decir que la sucesión k_n converge a x, pero K es cerrado por hipótesis, así $x \in K$, por lo cual $x + K = 0 + K$.
Si $\lambda = 0$, es claro que

$$\|\lambda(x + K)\| = \|0 + K\| = 0 = 0 \cdot \|x + K\| = |\lambda|\|x + K\|.$$

Ahora, si $\lambda \neq 0$,

$$\begin{aligned}
\|\lambda(x + K)\| &= \|\lambda x + K\| \\
&= \inf_{k \in K} \|\lambda x - k\| \\
&= \inf_{k \in K} \|\lambda(x - \lambda^{-1} k)\| \\
&= |\lambda| \inf_{k \in K} \|x - \lambda^{-1} k\| \\
&= |\lambda| \inf_{k_1 \in K} \|x - k_1\| \quad (k_1 = \lambda^{-1} k \in K) \\
&= |\lambda|\|x + K\|.
\end{aligned}$$

Esto lo podemos hacer ya que K es un subespacio. Por último veamos la desigualdad triangular,

$$\begin{aligned}
\|(x+K)+(y+K)\| &= \|(x+y)+K\| \\
&= \inf_{k\in K} \|x+y-k\| \\
&= \inf_{k_1,k_2\in K} \|x+y-(k_1+k_2)\| \\
&\leq \inf_{k_1,k_2\in K} \{\|x-k_1\|+\|y-k_2\|\} \\
&= \inf_{k_1\in K} \|x-k_1\| + \inf_{k_2\in K} \|y-k_2\| \\
&= \|x+K\|+\|y+K\|.
\end{aligned}$$

Note que nuevamente usamos el hecho de que K es subespacio, para escribir a $k = k_1 + k_2$. Así concluimos que E/K es normado. Faltaría ver que el espacio es Banach.

Consideremos $\{x_n + K\} \subset E/K$, una sucesión de Cauchy, observe que podemos construir una subsucesión tal que

$$\|(x_{n_k} - x_{n_{k+1}}) + K\|.$$

Esto lo podemos hacer ya que si $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$, como la sucesión es Cauchy

$$\|(x_n - x_m) + K\| < \frac{1}{2},$$

para $n, m \geq n_1 \in \mathbb{Z}^+$. De manera similar para $\varepsilon = \dfrac{1}{4}$, existe $n_2 \in \mathbb{Z}^+$ tal que si $n, m \geq n_2$,

$$\|(x_n - x_m) + K\| < \frac{1}{4},$$

Note que esta cantidad es menor a $\dfrac{1}{2}$, entonces podemos asumir $n_2 > n_1$, por un argumento inductivo, escogemos $n_1 < n_2 < \ldots < n_k$ tal que si $n, m \geq n_k$, tenemos que

$$\|(x_n - x_m) + K\| < \frac{1}{2^k}.$$

En particular para n_k, n_{k+1}

$$\|(x_{n_k} - x_{n_{k+1}}) + K\| < \frac{1}{2^k}.$$

Ahora, a partir de esta subsucesión $\{x_{n_k} + K\}$ podemos construir una sucesión $\{y_k\}$ tal que cada $y_k \in x_{n_k} + K$. Por caracterización del ínfimo para $k = 1$, si tomamos

$\delta = \dfrac{1}{2} - \|(x_{n_1} - x_{n_2}) + K\| > 0$, tenemos que existe $w_2 \in K$ tal que

$$\|x_{n_1} - x_{n_2} - w_2\| < \|(x_{n_1} - x_{n_2}) + K\| + \delta = \frac{1}{2}.$$

Así, tomando $y_1 = x_{n_1}$ y $y_2 = x_{n_2} + w_2$, se cumple que $y_1 \in x_{n_1} + K$ y $y_2 \in x_{n_2} + K$. Luego, para el caso de $k = 2$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2^2} &> \|(x_{n_2} - x_{n_3}) + K\| \\
&= \inf_{w \in K} \|x_{n_2} - x_{n_3} - w\| \\
&= \inf_{w \in K} \|x_{n_2} + w_2 - w_2 - x_{n_3} - w\| \\
&= \inf_{\overline{w} \in K} \|x_{n_2} + w_2 - x_{n_3} - \overline{w}\| \\
&= \inf_{\overline{w} \in K} \|y_2 - x_{n_3} - \overline{w}\|.
\end{aligned}$$

Note que esto lo podemos hacer ya que $w_2 \in K$ y este es un subespacio. De manera análoga podemos concluir la existencia de un $w_3 \in K$ tal que

$$\|y_2 - x_{n_3} - w_3\| < \frac{1}{2^2}.$$

Tomando $y_3 = x_{n_3} + w_3 \in x_{n_3} + K$, nos damos cuenta que podemos tomar la sucesión $\{y_k\}$ deseada.

Como la serie geométrica converge absolutamente, sabemos que dado un $\varepsilon > 0$, existe un N para el cual

$$\sum_{i=N}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \varepsilon.$$

Tomando $n, m \geq N$, asumimos sin pérdida de generalidad que $n > m$, note que

$$\begin{aligned}
\|y_n - y_m\| &\leq \sum_{i=m}^{n-1} \|y_{i+1} - y_i\| \\
&< \sum_{i=m}^{n-1} \frac{1}{2^i} \\
&< \sum_{i=N}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\{y_k\}$ es de Cauchy y como esta es una sucesión de términos en E que es de Banach, sabemos que $y_k \to y$, luego, debido a que la norma es un ínfimo

$$\|x_{n-k} + K - (y + K)\| = \|(x_{n_k} - y) + K\| \leq \|y_k - y\| \to 0.$$

Así, concluimos que la subsucesión es convergente y como la secuencia original era de Cauchy podemos decir que $x_n + K \to y + K$. Mostrando así que E/K es de Banach.

Ʊ‿Ʊ

(ii) Sea $T \in L(E, F)$ tal que existe $c > 0$ para el cual

$$\|Tx\|_F \geq c\|x\|_E,$$

para todo $x \in E$. Si K denota el espacio nulo de T y $R(T)$ el rango de T, muestre que $\overline{T} : E/K \to R(T)$ dada por $\overline{T}(x + K) = T(x)$, $x \in E$, esta bien definida y es un isomorfismo. Esto es $\overline{T} \in L(E/K, R(T))$ y $\overline{T}^{-1} \in L(R(T), E/K)$.

Demostración. Como el dominio de $\overline{T}$ son clases de equivalencia tenemos que mostrar que la aplicación está bien definida. Consideremos $x + K = y + K$, es decir $x, y \in E$ son dos representantes distintos de la misma clase. Por definición $\overline{T}(x + K) = T(x)$ y $\overline{T}(y + K) = T(y)$, luego como T es lineal

$$\begin{aligned}\overline{T}(x + K) - \overline{T}(y + K) &= T(x) - T(y)\\ &= T(x - y).\end{aligned}$$

Como las clases a las que pertenecen x y y son iguales, $x - y \in K$, pero K es el espacio nulo de T, así $T(x - y) = 0$ y

$$\overline{T}(x + K) = \overline{T}(y + K),$$

entonces $\overline{T}$ está bien definida.

La aplicación claramente es sobreyectiva ya que dado $y \in R(T)$, existe $x \in E$ tal que $y = T(x) = \overline{T}(x+K)$, así cada y tiene una preimagen. Para la inyectividad se sigue un argumento análogo a mostrar que está bien definida. Dados $x + K, y + K$, si $\overline{T}(x + K) = \overline{T}(y + K)$, esto quiere decir que $T(x) = T(y)$, por linealidad $T(x - y) = 0$, así $x - y \in K$, concluyendo que $x + K = y + K$. Para ver que es isomorfismo faltaría mostrar que la aplicación y su inversa son lineales y acotadas. Primero veamos que $\overline{T}$ es lineal

$$\begin{aligned}\overline{T}((x + K) + \lambda(y + K)) &= \overline{T}((x + \lambda y) + K)\\ &= T(x + \lambda y)\\ &= T(x) + \lambda T(y)\\ &= \overline{T}(x + K) + \lambda\overline{T}(y + K).\end{aligned}$$

Esto se tiene por la linealidad de T. Además es acotada ya que

$$\begin{aligned}\|\overline{T}(x + K)\| &= \|T(x)\|\\ &\leq M\|x\|\\ &= M\|x - k + k\|\\ &\leq M\|x - k\| + M\|k\|.\end{aligned}$$

Donde $M > 0$, es una constante que depende de x puesto que T es acotada, ahora por la monoticidad del ínfimo, podemos tomarlo sobre los $k \in K$, como el lado izquierdo no depende de k tenemos que

$$\begin{aligned}\|\overline{T}(x+K)\| &\leq \inf_{k\in K}\{M\|x-k\|+M\|k\|\}\\ &= M\inf_{k\in K}\|x-k\|+M\inf_{k\in K}\|k\|\\ &= M\inf_{k\in K}\|x-k\|\\ &= M\|x+K\|.\end{aligned}$$

Así, hemos mostrado que es acotado. Ahora probemos las mismas dos propiedades para la aplicación $\overline{T}^{-1}$. Para la linealidad tenemos que dados $y_1, y_2 \in R(T)$, existen $x_1, x_2 \in E$, tales que $y_i = T(x_i) = \overline{T}(x_i + K)$, para $i = 1, 2$. Luego por la linealidad ya probada tenemos que

$$y_1 + \lambda y_2 = \overline{T}((x_1 + K) + \lambda(x_2 + K)),$$

como es biyectiva, aplicando $\overline{T}^{-1}$ a ambos lados

$$\overline{T}^{-1}(y_1 + \lambda y_2) = (x_1 + K) + \lambda(x_2 + K).$$

Pero, por la manera en que tomamos y_1, y_2, y por la biyectividad sabemos que $\overline{T}^{-1}(y_i) = x_i + K$, para $i = 1, 2$. Así,

$$\overline{T}^{-1}(y_1 + \lambda y_2) = \overline{T}^{-1}(y_1) + \lambda\overline{T}^{-1}(y_2).$$

Para mostrar que es acotada usaremos una idea similar, si $y \in R(T)$, existe un $x \in E$ tal que $y = T(x) = \overline{T}(x + K)$, luego $\overline{T}^{-1}(y) = x + K$, tomando la norma de E/K obtenemos que,

$$\begin{aligned}\|\overline{T}^{-1}(y)\| &= \|x+K\|\\ &= \inf_{k\in K}\|x-k\|\\ &\leq \|x\|.\end{aligned}$$

Por hipótesis existe un $c > 0$, tal que $c\|x\| \leq \|T(x)\|$, es decir $\|x\| \leq \frac{1}{c}\|T(x)\|$ lo que nos indica que

$$\|\overline{T}^{-1}(y)\| \leq \frac{1}{c}\|T(x)\|.$$

Pero, $y = T(x)$, luego,

$$\|\overline{T}^{-1}(y)\| \leq \frac{1}{c}\|y\|,$$

así hemos mostrado que el operador es acotado y por tanto hemos concluido que $\overline{T}$ es un isomorfismo.

ʊ̬ʊ

Ejercicio 15 Considere los espacios $C([0,1])$ y $C^1([0,1])$ ambos equipados con la norma del supremo $\|f\|_{L^\infty} = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$. Definimos el operador derivada $D : C^1([0,1]) \to C([0,1])$ dado por $f \mapsto f'$. Muestre que D es un operador no acotado, pero su grafico $G(D)$ es cerrado.

Demostración.
Supongamos, por contradicción, que D es un operador acotado. Entonces existe una constante $M > 0$ tal que,

$$\|f'\| = \|Df\| \leq M\|f\| \quad \text{para todo } f \in C^1([0,1]).$$

Definimos una sucesión de funciones $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dada por,

$$f_n : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = x^n.$$

Claramente $f_n \in C^1([0,1])$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Además, se cumple que,

$$\begin{aligned} \|f_n\| &= \sup_{x\in[0,1]} |x^n| = 1, \\ \|Df_n\| &= \sup_{x\in[0,1]} |nx^{n-1}| = n. \end{aligned}$$

Entonces,

$$\|Df_n\| = n \leq M\|f_n\| = M.$$

Esto implica que $n \leq M$ para todo n, lo cual es una contradicción, ya que siempre existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > M$. Por lo tanto, el operador D no es acotado.

Ahora veamos que, aunque el operador D no es acotado, su gráfico

$$G(D) = \left\{(f, f') : f \in C^1([0,1]) \text{ y } f' \in C([0,1])\right\}$$

sí es un conjunto cerrado.
Para demostrarlo, tomemos una sucesión $\{(f_n, f_n')\}_{n\in\mathbb{N}} \subset G(D)$ tal que

$$(f_n, f_n') \to (f, g)$$

en la norma del gráfico, es decir, en la norma

$$\|(f_n, f_n') - (f, g)\|_{G(D)} = \|f_n - f\|_{L^\infty} + \|f_n' - g\|_{L^\infty}.$$

Esto significa que, para todo $\varepsilon > 0$, existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n > N$, entonces

$$\|f_n - f\|_{L^\infty} + \|f_n' - g\|_{L^\infty} < \varepsilon.$$

Por lo tanto,

$$f_n \to f \quad \text{uniformemente,} \quad \text{y} \quad f_n' \to g \quad \text{uniformemente.}$$

Ahora, dado que cada f_n es de clase $C^1([0,1])$, y que tanto f_n como f_n' convergen uniformemente, se sigue que $f \in C^1([0,1])$ y que $f' = g$, con $g \in C([0,1])$. Es decir, la función límite f es derivable y su derivada es g, que es continua. Esto implica que $(f, f') \in G(D)$.
Por lo tanto, el gráfico $G(D)$ es un conjunto cerrado.

$\square$