Sandra Natalia Florez Garcia
Edgar Santiago Ochoa Quiroga
María Alejandra Rodríguez Ríos

Ejercicio 2 Sea E un espacio vectorial, $g, f_1, f_2, \ldots, f_k$, $(k+1)$ funcionales lineales sobre E tales que

$$\langle f_i, x\rangle = 0 \quad \forall i = 1, \ldots, k \Longrightarrow \langle g, x\rangle = 0$$

Muestre que existen constante $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tales que $g = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f_i$. Es decir, g es combinación lineal de los f_i.

Demostración. Consideremos la función

$$\begin{aligned} H : & E \to \mathbb{R}^{k+1} \\ & x \mapsto (g(x), f_1(x), \ldots, f_k(x)). \end{aligned}$$

Si $R(H)$ es el rango de la función H, sabemos que es un subespacio de $\mathbb{R}^{k+1}$, ademas como este es de dimensión finita y normado, $R(H)$ es cerrado, es decir $\overline{R(H)} = R(H)$. Luego observe que $x_0 = (1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^{k+1} \setminus R(H)$, ya que en caso contrario $(1, 0, \ldots, 0) = (g(x), f_1(x), \ldots, f_k(x))$ para algún $x \in E$, pero esto implica que $f_i(x) = 0$ para cada $i = 1, \ldots, k$ y $g(x) = 1$, pero por la hipótesis $g(x) = 0$, una contradicción. Así si consideramos los conjuntos $R(H)$ y $\{x_0\}$, como ambos son no vacíos, convexos, disjuntos, el primero es cerrado y el segundo compacto, por la segunda forma geométrica de Hahn-Banach existe $f \in (\mathbb{R}^{k+1})^*$ tal que $f(x_0) \neq 0$ y $f(y) = 0$ para todo $y \in R(H)$.

Como los funcionales de $\mathbb{R}^{k+1}$ se identifican con el producto interno usual por un vector, sabemos que existe $\beta = (\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_k) \in \mathbb{R}^{k+1}$ tal que $f(y) = \langle \beta, y\rangle$. donde $y \in \mathbb{R}^{k+1}$. Note que si $y = x_0$ tenemos que $\langle \beta, x_0\rangle \neq 0$, por ser el producto interno usual esto implica que $\beta_0 \neq 0$. Ahora si $y \in R(H)$, es de la forma $y = (g(x), f_1(x), \ldots, f_k(x))$, para algún $x \in E$. Luego $\langle \beta, y\rangle = 0$, pero por definición de producto interno esto es

$$\beta_0 g(x) + \sum_{i=1}^{k} \beta_i f_i(x) = 0,$$

como $\beta_0 \neq 0$ podemos despejar $g(x)$, tal que

$$g(x) = \sum_{i=1}^{k} \left(-\frac{\beta_i}{\beta_0}\right) f_i(x).$$

Así como para cada $x \in E$, hay un y como el anterior, si tomamos $\lambda_i = -\dfrac{\beta_i}{\beta_0} \in \mathbb{R}.$, obtenemos que

$$g = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f_i.$$

ʊ̬ʊ

Ejercicio 9 Sea E un espacio de Banach de dimensión infinita. Muestre que cada vecindad débil $\star$ del origen de $E^\star$ no es acotada.

Demostración. Sea V una vecindad débil$\star$ de 0 en $E^\star$. Por definición de la topología $\sigma(E^\star, E)$, podemos expresar V como

$$V = \{f \in E^\star : |\langle f, x_j \rangle| < \varepsilon_j \text{ para } j = 1, \dots, n\},$$

donde $x_1, \dots, x_n \in E$ y $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n > 0$.Tomemos a $F = \text{span}\{x_1, \dots, x_n\}$ el cual es un subespacio de E. Como F es de dimensión finita, es cerrado en E, es decir, $F = \overline{F}$. Dado que E es de dimensión infinita y F es de dimensión finita, existe $x_0 \in E \setminus F$. Aplicando el Teorema de Hahn-Banach en su forma geométrica, existe un funcional lineal no nulo $f \in E^\star$ tal que

$$f(x_j) = 0 \quad \text{para todo } j = 1, \dots, n,$$

pero $f(x_0) \neq 0$. Para cualquier $\lambda \in \mathbb{R}$, el funcional λf satisface que,

$$(\lambda f)(x_j) = \lambda f(x_j) = 0 \quad \text{para todo } j = 1, \dots, n.$$

Como $|\langle \lambda f, x_j \rangle| = 0 < \varepsilon_j$ para todo j, se cumple que $\lambda f \in V$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, por lo que $\{\lambda f : \lambda \in \mathbb{R}\} \subset V$. La norma de λf cumple que,

$$\|\lambda f\| = |\lambda| \cdot \|f\|.$$

Como f es no nula, entonces $\|f\| > 0$ y cuando $|\lambda| \to \infty$, se tiene $\|\lambda f\| \to \infty$. Por lo tanto, V contiene elementos de norma arbitrariamente grandes y, por lo cual, no es acotada. □

Ejercicio 11 Sea K un espacio métrico compacto que no es finito. Demuestre que $C(K)$ (con la norma del supremo $\|\cdot\|_{L^\infty}$) no es reflexivo.

Demostración. Supongamos que $C(K)$ es reflexivo. Dado que K es compacto e infinito, necesariamente contiene un punto de acumulación. Sea $a \in K$ uno de ellos, y sea (a_n) una sucesión de puntos distintos en K tal que

$$\begin{aligned} &a_n \to a, \\ &a_n \neq a \quad \text{para todo } n. \end{aligned}$$

Tal sucesión puede construirse eligiendo, para cada n, un punto $a_n \in K$ distinto de a tal que

$$d(a_n, a) < \frac{1}{n},$$

lo cual es posible ya que todo entorno de a contiene infinitos puntos de K distintos de a.

A partir de esta sucesión, para cada $n \in \mathbb{N}$, construiremos una función $g_n \in C(K)$ tal que $g_n(a_m) = 1$ si $1 \le m \le n$, $g_n(a_m) = 0$ si $m > n$, y $g_n(a) = 0$. Esto se puede lograr utilizando el el teorema de Tietze–Urysohn–Brouwer, ya que K es métrico (y por tanto normal), y los conjuntos finitos $\{a_1, \dots, a_n\}$ y $\{a_{n+1}, a_{n+2}, \dots\} \cup \{a\}$ son disyuntos y cerrados. Así, existe una función continua $g_n : K \to [0, 1]$ tal que,

$$\begin{aligned} g_n(a_m) &= 1 \quad \text{si } 1 \le m \le n, \\ g_n(a_m) &= 0 \quad \text{si } m > n, \\ g_n(a) &= 0. \end{aligned}$$

Además, $\|g_n\|_\infty = 1$ para todo n.
Como $C(K)$ es un espacio de Banach y la sucesión (g_n) esta acotada, tiene una subsucesión débilmente convergente (g_{n_k}), es decir, existe $g \in C(K)$ tal que $g_{n_k} \rightharpoonup g$ débilmente. Entonces, para todo funcional lineal continuo $\phi \in C(K)^*$ se cumple que

$$\phi(g_{n_k}) \to \phi(g).$$

En particular, esto se aplica a los funcionales de evaluación $\pi_x(f) := f(x)$ para cada $x \in K$, los cuales pertenecen a $C(K)^*$. Por tanto, para cada $x \in K$,

$$g_{n_k}(x) \to g(x).$$

Para cada $m \in \mathbb{N}$ fijo, existe k_0 tal que $n_k \ge m$ para todo $k \ge k_0$. Entonces, por la definición de g_{n_k},

$$g_{n_k}(a_m) = 1 \quad \text{para todo } k \ge k_0,$$

lo que implica que

$$g(a_m) = \lim_{k \to \infty} g_{n_k}(a_m) = 1.$$

Como $a_n \to a$ y g es continua, se sigue que

$$g(a) = \lim_{m \to \infty} g(a_m) = 1.$$

Sin embargo, por construcción $g_{n_k}(a) = 0$ para todo k, y por tanto,

$$g(a) = \lim_{k \to \infty} g_{n_k}(a) = 0,$$

lo cual es una contradicción. Esto prueba que la sucesión (g_n) no tiene ninguna subsucesión débilmente convergente.
En consecuencia, como encontramos una sucesión acotada en $C(K)$ que no posee ninguna subsucesión débilmente convergente, $C(K)$ no es reflexivo.

□

Ejercicio 15 Sea E un espacio de Banach reflexivo. Sea $a : E \times E \to \mathbb{R}$ una forma bilineal que es continua, es decir, existe $M > 0$ tal que $|a(x, y)| \le M\|x\|\|y\|$, para todo $x, y \in E$. Asuma que a es coerciva, esto es, existe $\alpha > 0$ tal que para todo $x \in E$

$$a(x, x) \ge \alpha\|x\|^2$$

(a) Dado $x \in E$, defina $A_x(y) = a(x, y)$, para todo $y \in E$. Muestre que $A_x \in E^\star$, para cada $x \in E$. Además, concluya que la función $x \mapsto A(x) = A_x$ satisface $A \in \mathcal{L}(E, E^\star)$.

(b) Muestre que A como en (a) es una función sobreyectiva.

(c) Deduzca que para cada $f \in E^\star$, existe un único $x \in E$ tal que $a(x, y) = \langle f, y\rangle$, $\forall y \in E$. Esto es, la forma bilineal coerciva a representa todo funcional lineal continuo.

Ejercicio 18 Sea E un espacio de Banach

(a) Demuestre que existe un espacio topológico compacto K y una isometría de E en $(C(K), \|\cdot\|_\infty)$.

Demostración. Considere el conjunto $K = \mathcal{B}_{E^\star} = \{f \in E^\star : \|f\|_{E^\star} \leq 1\}$. Luego K es un espacio topológico compacto en la topología débil*. Definamos la función

$$T\colon (E, \|\cdot\|_E) \to (C(K), \|\cdot\|_\infty)$$

donde $x \mapsto Tx\colon \mathcal{B}_{E^\star} \to \mathbb{R}$ y $f \mapsto (Tx)(f) = f(x) = J_x$, por definición de las funciones J_x sabemos que Tx es continua en la topología débil $\star$, ahora veamos que T es lineal, sean $x, y \in E$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, entonces,

$$T(\alpha x + \beta y)(f) = \langle f, \alpha x + \beta y\rangle = \alpha\langle f, x\rangle + \beta\langle f, y\rangle = \alpha(T(x)(f)) + \beta(T(y)(f)).$$

Por último, veamos que T es una isometría.

$$\|T(x)\|_\infty = \sup_{f\in K} |T(x)(f)| = \sup_{\substack{f\in E^\star\\ \|f\|_{E^\star}\leq 1}} |\langle f, x\rangle| \leq \|x\|,$$

como T es lineal, acotada tenemos que T es continua. Además, por un corolario de la forma analítica de Hahn-Banach, tenemos que para cada $x \in E$ existe $f \in E^\star$ tal que

$$\langle f, x\rangle = \|x\|, \quad \text{con } \|f\| = 1,$$

por lo que tenemos $\|T(x)\|_\infty = \|x\|$, así T es isometría.

$\square$

(b) Asuma que E es separable. Entonces muestre que existe una isometría de E en l^∞ (vea el Ejercicio 14 para la definición del espacio).

Demostración. $\square$

(b) Como K es metrizable y compacto en la topología débil*, existe un subconjunto denso contable $\{f_n\} \subseteq K$.

¿Por qué K tiene denso contable? Es contable.

Definamos

$$T : E \to \ell^\infty, \quad x \mapsto T(x) := \{f_n(x)\}_{n=1}^\infty.$$

Veamos que T está bien definido. Como $\|f_n\| \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, tomando un x fijo, tenemos que

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |f_n(x)| \leq \|x\| \sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\| \leq M\|x\| \quad \text{donde } M \in \mathbb{R}, M \geq 1.$$

Ahora veamos que T es lineal. Sean $x, y \in E$, y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$T(\alpha x + \beta y) = \{f_n(\alpha x + \beta y)\} = \alpha\{f_n(x)\} + \beta\{f_n(y)\},$$

luego T es lineal.

T es continua porque es lineal y acotada.

Nos falta ver que T es una isometría.

Por el corolario de Hahn-Banach en forma analítica, existe $f \in K \subseteq E^\star$ tal que $|f(x)| = \|x\|$.

Como f_n es denso en $K = B^0_{E^\star}$, existe una subsucesión $\{f_{n_k}\}$ tal que $f_{n_k} \to f$ en $\sigma(E^\star, E)$, y en particular $f_{n_k}(x) \to f(x)$, y por tanto:

$$|f(x)| = \lim_{k\to\infty} \sup |f_{n_k}(x)| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} |f_n(x)| = \|T(x)\|_\infty \leq \|x\|.$$

Por lo cual:

$$\|T(x)\|_\infty = \|x\|,$$

y $T(x)$ es una isometría.

$$\exists f \in E^\star \quad \text{tal que } \langle f, x\rangle = \|x\|, \quad \|f\| = 1$$

$$\{f_n\} \text{ son densos en } K = B^0_{E^\star}, \quad f_{n_k} \to f$$