Sandra Natalia Florez Garcia
Edgar Santiago Ochoa Quiroga
María Alejandra Rodríguez Ríos

Ejercicio 9 Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio vectorial normado. Dado $r > 0$, considere $C = B(0, r) = \{y \in E : \|y\| < r\}$. Determine el funcional de Minkowski de C.
Solución:
Dado que $(E, \|\cdot\|)$ es un espacio vectorial normado, se deduce que el conjunto $C = B(0, r)$ es abierto, convexo y $0 \in C$.
Por consiguiente, el funcional de Minkowski asociado a C se define como:

$$\rho(x) = \inf \left\{ \alpha > 0 : \alpha^{-1}x \in C \right\}, \qquad x \in E.$$

Ahora, sea $x \in B(0, r)$. Entonces, para todo $\alpha > 0$ tal que $\alpha^{-1}x \in C$, se tiene:

$$\|\alpha^{-1}x\| < r.$$

Esto implica que:

$$\alpha^{-1}\|x\| < r,$$

y despejando α, se obtiene:

$$\frac{\|x\|}{r} < \alpha.$$

En general, si $x \in B(0, r)$, tenemos:

$$\|\alpha^{-1}x\| < r \quad \Rightarrow \quad \alpha^{-1}\|x\| < r \quad \Rightarrow \quad \frac{\|x\|}{r} < \alpha.$$

Supongamos por contradicción que $\rho(x) \neq \frac{\|x\|}{r}$. Entonces debe ocurrir que:

$$\frac{\|x\|}{r} < \rho(x).$$

Tomemos el promedio entre $\frac{\|x\|}{r}$ y $\rho(x)$:

$$\beta = \frac{\frac{\|x\|}{r} + \rho(x)}{2}.$$

Este valor cumple que:

$$\frac{\|x\|}{r} < \beta < \rho(x).$$

Pero entonces:

$$\|\beta^{-1}x\| = \beta^{-1}\|x\| < \frac{r}{\|x\|} \cdot \|x\| = r,$$

lo cual implica que $\beta^{-1}x \in B(0, r)$, es decir, $\beta^{-1}x \in C$. Por tanto, $\beta \in \left\{ \alpha > 0 : \alpha^{-1}x \in C \right\}$.
Esto contradice el hecho de que $\rho(x)$ es la ínfimo de ese conjunto, ya que $\beta < \rho(x)$.
Por lo tanto, concluimos que:

$$\rho(x) = \frac{\|x\|}{r}.$$

Ejercicio 12 Sea E un espacio vectorial normado.

(i) Sea $W \subset E$ un subespacio propio de E y $x_0 \in E \setminus W$, tal que $d := \mathtt{dist}(x_0, W) > 0$. Demuestre que existe $f \in E^*$ tal que $f = 0$ restricto a W, $f(x_0) = d$ y $\|f\|_{E^*} = 1$.

(ii) Sea $W \subset E$ un subespacio propio cerrado de E y $x_0 \in E \setminus W$. Demuestre que existe $f \in E^*$ tal que $f = 0$ restricto a W y $f(x_0) \neq 0$.

Ejercicio 13 Sean $(E, \|\cdot\|)$ y $(F, \|\cdot\|)$ espacios de Banach.

(i) Sea $K \subset E$ un subespacio cerrado de E. Definimos la relacion sobre E dada por $x \sim_K y$ si y solo si $x - y \in K$.

   (a) Muestre que $\sim_K$ es una relacion de equicalencia sobre E.

   (b) Muestre que el espacio cociente E/K es un espacio de Banach con la norma

$$\|x + K\|_{E/K} = \text{ínf}\, \|x - k\|, \quad x \in E.$$

   Es decir, debe verificar que el espacio cociente es un espacio vectorial, normado, cuya norma lo hace completo.

(ii) Sea $T \in L(E, F)$ tal que existe $c > 0$ para el cual

$$\|Tx\|_F \geq c\|x\|_E,$$

para todo $x \in E$. Si K denota el espacio nulo de T y $R(T)$ el rango de T, muestre que $\overline{T} : E/K \to R(T)$ dada por $\overline{T}(x + K) = T(x)$, $x \in E$, esta bien definida y es un isomorfismo. Esto es $\overline{T} \in L(E/K, R(T))$ y $\overline{T}^{-1} \in L(R(T), E/K)$.

Ejercicio 15 Considere los espacios $C([0, 1])$ y $C^1([0, 1])$ ambos equipados con la norma del supremo $\|f\|_{L^\infty} = \sup\limits_{x \in [0,1]} |f(x)|$. Definimos el operador derivada $D : C^1([0, 1]) \to C([0, 1])$ dado por $f \mapsto f'$. Muestre que D es un operador no acotado, pero su grafico $G(D)$ es cerrado.

Demostración.
Supongamos, por contradicción, que D es un operador acotado. Entonces existe una constante $M > 0$ tal que,

$$\|f'\| = \|Df\| \leq M\|f\| \quad \text{para todo } f \in C^1([0, 1]).$$

Definimos una sucesión de funciones $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dada por,

$$f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = x^n.$$

Claramente $f_n \in C^1([0, 1])$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Además, se cumple que,

$$\|f_n\| = \sup_{x \in [0,1]} |x^n| = 1,$$
$$\|Df_n\| = \sup_{x \in [0,1]} |nx^{n-1}| = n.$$

Entonces:

$$\|Df_n\| = n \leq M\|f_n\| = M.$$

Esto implica que $n \leq M$ para todo n, lo cual es una contradicción, ya que siempre existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > M$. Por lo tanto, el operador D no es acotado.

Ahora veamos que, aunque el operador D no es acotado, su gráfico

$$G(D) = \left\{(f, f') : f \in C^1([0,1]) \text{ y } f' \in C([0,1])\right\}$$

sí es un conjunto cerrado.
Para demostrarlo, tomemos una sucesión $\{(f_n, f'_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \subset G(D)$ tal que

$$(f_n, f'_n) \to (f, g)$$

en la norma del gráfico, es decir, en la norma

$$\|(f_n, f'_n) - (f, g)\|_{G(D)} = \|f_n - f\|_{L^\infty} + \|f'_n - g\|_{L^\infty}.$$

Esto significa que, para todo $\varepsilon > 0$, existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n > N$, entonces

$$\|f_n - f\|_{L^\infty} + \|f'_n - g\|_{L^\infty} < \varepsilon.$$

Por lo tanto,

$$f_n \to f \quad \text{uniformemente,} \quad \text{y} \quad f'_n \to g \quad \text{uniformemente.}$$

Ahora, dado que cada f_n es de clase $C^1([0,1])$, y que tanto f_n como f'_n convergen uniformemente, se sigue que $f \in C^1([0,1])$ y que $f' = g$, con $g \in C([0,1])$. Es decir, la función límite f es derivable y su derivada es g, que es continua. Esto implica que $(f, f') \in G(D)$.
Por lo tanto, el gráfico $G(D)$ es un conjunto cerrado.

$\square$