



Sandra Natalia Florez Garcia

Edgar Santiago Ochoa Quiroga

María Alejandra Rodríguez Ríos .....

**Ejercicio 2** Sea  $E$  un espacio vectorial,  $g, f_1, f_2, \dots, f_k, (k+1)$  funcionales lineales sobre  $E$  tales que

$$\langle f_i, x \rangle = 0 \quad \forall i = 1, \dots, k \implies \langle g, x \rangle = 0$$

Muestre que existen constante  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$  tales que  $g = \sum_{i=1}^k \lambda_i f_i$ . Es decir,  $g$  es combinación lineal de los  $f_i$ .

**Demostración.** Consideremos la función

$$\begin{aligned} H : E &\rightarrow \mathbb{R}^{k+1} \\ x &\mapsto (g(x), f_1(x), \dots, f_k(x)). \end{aligned}$$

Si  $R(H)$  es el rango de la función  $H$ , sabemos que es un subespacio de  $\mathbb{R}^{k+1}$ , además como este es de dimensión finita y normado,  $R(H)$  es cerrado, es decir  $\overline{R(H)} = R(H)$ . Luego observe que  $x_0 = (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{k+1} \setminus R(H)$ , ya que en caso contrario  $(1, 0, \dots, 0) = (g(x), f_1(x), \dots, f_k(x))$  para algún  $x \in E$ , pero esto implica que  $f_i(x) = 0$  para cada  $i = 1, \dots, k$  y  $g(x) = 1$ , pero por la hipótesis  $g(x) = 0$ , una contradicción. Así si consideramos los conjuntos  $R(H)$  y  $\{x_0\}$ , como ambos son no vacíos, convexos, disjuntos, el primero es cerrado y el segundo compacto, por la segunda forma geométrica de Hahn-Banach existe  $f \in (\mathbb{R}^{k+1})^*$  tal que  $f(x_0) \neq 0$  y  $f(y) = 0$  para todo  $y \in R(H)$ .

Como los funcionales de  $\mathbb{R}^{k+1}$  se identifican con el producto interno usual por un vector, sabemos que existe  $\beta = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k) \in \mathbb{R}^{k+1}$  tal que  $f(y) = \langle \beta, y \rangle$ . donde  $y \in \mathbb{R}^{k+1}$ . Note que si  $y = x_0$  tenemos que  $\langle \beta, x_0 \rangle \neq 0$ , por ser el producto interno usual esto implica que  $\beta_0 \neq 0$ . Ahora si  $y \in R(H)$ , es de la forma  $y = (g(x), f_1(x), \dots, f_k(x))$ , para algún  $x \in E$ . Luego  $\langle \beta, y \rangle = 0$ , pero por definición de producto interno esto es

$$\beta_0 g(x) + \sum_{i=1}^k \beta_i f_i(x) = 0,$$

como  $\beta_0 \neq 0$  podemos despejar  $g(x)$ , tal que

$$g(x) = \sum_{i=1}^k \left( -\frac{\beta_i}{\beta_0} \right) f_i(x).$$

Así como para cada  $x \in E$ , hay un  $y$  como el anterior, si tomamos  $\lambda_i = -\frac{\beta_i}{\beta_0} \in \mathbb{R}$ , obtenemos

que

$$g = \sum_{i=1}^k \lambda_i f_i.$$

□□

**Ejercicio 9** Sea  $E$  un espacio de Banach de dimensión infinita. Muestre que cada vecindad débil  $\star$  del origen de  $E^\star$  no es acotada.

**Demostración.** Sea  $V$  una vecindad débil $\star$  de  $0$  en  $E^\star$ . Por definición de la topología  $\sigma(E^\star, E)$ , podemos expresar  $V$  como

$$V = \{f \in E^\star : |\langle f, x_j \rangle| < \varepsilon_j \text{ para } j = 1, \dots, n\},$$

donde  $x_1, \dots, x_n \in E$  y  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n > 0$ . Tomemos a  $F = \text{span}\{x_1, \dots, x_n\}$  el cual es un subespacio de  $E$ . Como  $F$  es de dimensión finita, es cerrado en  $E$ , es decir,  $F = \bar{F}$ . Dado que  $E$  es de dimensión infinita y  $F$  es de dimensión finita, existe  $x_0 \in E \setminus F$ . Aplicando el Teorema de Hahn-Banach en su forma geométrica, existe un funcional lineal no nulo  $f \in E^\star$  tal que

$$f(x_j) = 0 \quad \text{para todo } j = 1, \dots, n,$$

pero  $f(x_0) \neq 0$ . Para cualquier  $\lambda \in \mathbb{R}$ , el funcional  $\lambda f$  satisface que,

$$(\lambda f)(x_j) = \lambda f(x_j) = 0 \quad \text{para todo } j = 1, \dots, n.$$

Como  $|\langle \lambda f, x_j \rangle| = 0 < \varepsilon_j$  para todo  $j$ , se cumple que  $\lambda f \in V$  para todo  $\lambda \in \mathbb{R}$ , por lo que  $\{\lambda f : \lambda \in \mathbb{R}\} \subset V$ . La norma de  $\lambda f$  cumple que,

$$\|\lambda f\| = |\lambda| \cdot \|f\|.$$

Como  $f$  es no nula, entonces  $\|f\| > 0$  y cuando  $|\lambda| \rightarrow \infty$ , se tiene  $\|\lambda f\| \rightarrow \infty$ . Por lo tanto,  $V$  contiene elementos de norma arbitrariamente grandes y, por lo cual, no es acotada.  $\square$

**Ejercicio 11** Sea  $K$  un espacio métrico compacto que no es finito. Demuestre que  $C(K)$  (con la norma del supremo  $\|\cdot\|_{L^\infty}$ ) no es reflexivo.

**Demostración.** Supongamos que  $C(K)$  es reflexivo. Dado que  $K$  es compacto e infinito, necesariamente contiene un punto de acumulación. Sea  $a \in K$  uno de ellos, y sea  $(a_n)$  una sucesión de puntos distintos en  $K$  tal que

$$\begin{aligned} a_n &\rightarrow a, \\ a_n &\neq a \quad \text{para todo } n. \end{aligned}$$

Tal sucesión puede construirse eligiendo, para cada  $n$ , un punto  $a_n \in K$  distinto de  $a$  tal que

$$d(a_n, a) < \frac{1}{n},$$

lo cual es posible ya que todo entorno de  $a$  contiene infinitos puntos de  $K$  distintos de  $a$ .

A partir de esta sucesión, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , construiremos una función  $g_n \in C(K)$  tal que  $g_n(a_m) = 1$  si  $1 \leq m \leq n$ ,  $g_n(a_m) = 0$  si  $m > n$ , y  $g_n(a) = 0$ . Esto se puede lograr utilizando el teorema de Tietze–Urysohn–Brouwer, ya que  $K$  es métrico (y por tanto normal), y los conjuntos finitos  $\{a_1, \dots, a_n\}$  y  $\{a_{n+1}, a_{n+2}, \dots\} \cup \{a\}$  son disyuntos y cerrados. Así, existe una función continua  $g_n : K \rightarrow [0, 1]$  tal que,

$$\begin{aligned} g_n(a_m) &= 1 & \text{si } 1 \leq m \leq n, \\ g_n(a_m) &= 0 & \text{si } m > n, \\ g_n(a) &= 0. \end{aligned}$$

Además,  $\|g_n\|_\infty = 1$  para todo  $n$ .

Como  $C(K)$  es un espacio de Banach y la sucesión  $(g_n)$  esta acotada, tiene una subsucesión débilmente convergente  $(g_{n_k})$ , es decir, existe  $g \in C(K)$  tal que  $g_{n_k} \rightharpoonup g$  débilmente. Entonces, para todo funcional lineal continuo  $\phi \in C(K)^*$  se cumple que

$$\phi(g_{n_k}) \rightarrow \phi(g).$$

En particular, esto se aplica a los funcionales de evaluación  $\pi_x(f) := f(x)$  para cada  $x \in K$ , los cuales pertenecen a  $C(K)^*$ . Por tanto, para cada  $x \in K$ ,

$$g_{n_k}(x) \rightarrow g(x).$$

Para cada  $m \in \mathbb{N}$  fijo, existe  $k_0$  tal que  $n_k \geq m$  para todo  $k \geq k_0$ . Entonces, por la definición de  $g_{n_k}$ ,

$$g_{n_k}(a_m) = 1 \quad \text{para todo } k \geq k_0,$$

lo que implica que

$$g(a_m) = \lim_{k \rightarrow \infty} g_{n_k}(a_m) = 1.$$

Como  $a_n \rightarrow a$  y  $g$  es continua, se sigue que

$$g(a) = \lim_{m \rightarrow \infty} g(a_m) = 1.$$

Sin embargo, por construcción  $g_{n_k}(a) = 0$  para todo  $k$ , y por tanto,

$$g(a) = \lim_{k \rightarrow \infty} g_{n_k}(a) = 0,$$

lo cual es una contradicción. Esto prueba que la sucesión  $(g_n)$  no tiene ninguna subsucesión débilmente convergente.

En consecuencia, como encontramos una sucesión acotada en  $C(K)$  que no posee ninguna subsucesión débilmente convergente,  $C(K)$  no es reflexivo. □

**Ejercicio 15** Sea  $E$  un espacio de Banach reflexivo. Sea  $\alpha : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$  una forma bilineal que es continua, es decir, existe  $M > 0$  tal que  $|\alpha(x, y)| \leq M\|x\|\|y\|$ , para todo  $x, y \in E$ . Asuma que  $\alpha$  es coerciva, esto es, existe  $\alpha > 0$  tal que para todo  $x \in E$

$$\alpha(x, x) \geq \alpha\|x\|^2$$

- (a) Dado  $x \in E$ , defina  $A_x(y) = a(x, y)$ , para todo  $y \in E$ . Muestre que  $A_x \in E^*$ , para cada  $x \in E$ . Además, concluya que la función  $x \mapsto A(x) = A_x$  satisface  $A \in \mathcal{L}(E, E^*)$ .

**Demostración.** Para ver que  $A_x \in E^*$  tenemos que ver que sea lineal y acotada. Sean  $y_1, y_2 \in E$  y  $\lambda \in \mathbb{R}$ , tenemos que

$$\begin{aligned} A_x(y_1 + \lambda y_2) &= a(x, y_1 + \lambda y_2) \\ &= a(x, y_1) + \lambda a(x, y_2) \\ &= A_x(y_1) + \lambda A_x(y_2). \end{aligned}$$

Note que esto se sigue del hecho de que  $a$  es bilineal, por lo que es lineal en la segunda componente. Ahora note que por la continuidad de  $a$  tenemos que

$$\begin{aligned} |A_x(y)| &= |a(x, y)| \\ &\leq M \|x\| \|y\| \\ &= M_1 \|y\|. \end{aligned}$$

Como para cada  $x \in E$  se define el  $A_x$ , en cada operador  $\|x\|$  es un numero, por lo que es correcto tomar  $M_1 = M \|x\| > 0$  para cada  $A_x$ . Así tenemos que  $A_x \in E^*$ .

Ahora queremos ver que la función

$$\begin{aligned} A : E &\rightarrow E^* \\ x &\mapsto A(x) = A_x \end{aligned}$$

Pertenece a  $\mathcal{L}(E, E^*)$ . Claramente esta función esta bien definida ya que  $A_x \in E^*$ . Luego nuevamente tenemos que ver que es lineal y acotada. Para la linealidad, sean  $x_1, x_2 \in E$  y  $\lambda \in \mathbb{R}$ , luego para  $y \in E$

$$\begin{aligned} A_{x_1 + \lambda x_2}(y) &= a(x_1 + \lambda x_2, y) \\ &= a(x_1, y) + \lambda a(x_2, y) \\ &= A_{x_1}(y) + \lambda A_{x_2}(y). \end{aligned}$$

Nuevamente esto se tiene del hecho de que  $a$  es bilineal. Observe que para cualquier  $y \in E$ ,  $A_{x_1 + \lambda x_2}(y) = a(x_1 + \lambda x_2, y) = A_{x_1}(y) + \lambda A_{x_2}(y)$ , eso quiere decir que  $A_{x_1 + \lambda x_2} = A_{x_1} + \lambda A_{x_2}$  pero esto es  $A(x_1 + \lambda x_2) = A(x_1) + \lambda A(x_2)$ , por lo que  $A$  es lineal. Ahora

para ver si esta acotada observe que

$$\begin{aligned}
\|A(x)\| &= \|A_x\| \\
&= \sup_{\substack{y \in E \\ \|y\| \leq 1}} |A_x(y)| \\
&= \sup_{\substack{y \in E \\ \|y\| \leq 1}} |\alpha(x, y)| \\
&\leq \sup_{\substack{y \in E \\ \|y\| \leq 1}} M\|x\|\|y\| \\
&= M\|x\| \sup_{\substack{y \in E \\ \|y\| \leq 1}} \|y\| \\
&= M\|x\|.
\end{aligned}$$

Esto es gracias a la continuidad de  $\alpha$ . Así concluimos que  $A \in \mathcal{L}(E, E^*)$ .

□□

(b) Muestre que  $A$  como en (a) es una función sobreyectiva.

**Demostración.** Primero veamos que la desigualdad  $\|A_x\| \geq \alpha\|x\|$  se tiene para todo  $x \in E$ , es claro que cuando  $x = 0$  la desigualdad es cierta ya que  $\|x\| = 0$ . Ahora si  $x \neq 0$  tenemos que

$$\begin{aligned}
\|A_x\| &= \sup_{\substack{y \in E \\ y \neq 0}} \frac{|A_x(y)|}{\|y\|} \\
&\geq \frac{|A_x(x)|}{\|x\|} \\
&= \frac{|\alpha(x, x)|}{\|x\|} \\
&\geq \frac{\alpha\|x\|^2}{\|x\|} \\
&= \alpha\|x\|.
\end{aligned}$$

Ahora con ayuda de esta desigualdad probemos que  $R(A)$  es cerrado. Sea  $f \in \overline{R(A)}$ , luego existe una sucesión  $\{A_{x_n}\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq R(A)$  tales que  $A_{x_n} \rightarrow f$ , note que tomamos la sucesión de esa forma ya que son elementos del rango de la aplicación  $A$ . Como esta aplicación es lineal y por la desigualdad anterior tenemos que

$$\begin{aligned}
\|A_{x_n} - A_{x_m}\| &= \|A_{x_n - x_m}\| \\
&\geq \alpha\|x_n - x_m\|.
\end{aligned}$$

Así tenemos que  $\|x_n - x_m\| \leq \frac{1}{\alpha}\|A_{x_n} - A_{x_m}\|$ , como  $\{A_{x_n}\}$  es convergente y estamos en un espacio normado, esta secuencia es Cauchy, así para  $\epsilon > 0$  existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que si

$n, m \geq M$ ,  $\|A_{x_n} - A_{x_m}\| < \varepsilon$ , esto implica que  $\|x_n - x_m\| < \frac{\varepsilon}{\alpha}$ . Así la sucesión  $\{x_n\}$  es Cauchy en  $E$ , pero este espacio es Banach, por lo que  $x_n \rightarrow x \in E$ . Luego podemos considerar la función  $A(x) = A_x$ . Note que

$$\begin{aligned}\|A_x - f\| &= \|A_x - A_{x_n} + A_{x_n} - f\| \\ &\leq \|A_x - A_{x_n}\| + \|A_{x_n} - f\| \\ &= \|A_{x-x_n}\| + \|A_{x_n} - f\| \\ &\leq \|A\|\|x - x_n\| + \|A_{x_n} - f\|,\end{aligned}$$

por lo que cuando  $n \rightarrow \infty$  tenemos por la convergencia que  $\|x - x_n\| \rightarrow 0$  y  $\|A_{x_n} - f\| \rightarrow 0$ . Concluyendo así que  $A_x = f$ , por lo que  $f \in R(A)$ , mostrando así que el rango de la aplicación  $A$  es cerrado.

Ahora veamos por contradicción que la función es sobreyectiva. Como  $R(A) = \overline{R(A)}$ , si no es sobreyectiva,  $\overline{R(A)} \neq E^*$ , luego por Hahn-Banach existe  $f \in E^{**}$  tal que  $f \neq 0$  y  $f|_{R(A)} = 0$ . Esto quiere decir que para cualquier  $A_x \in R(A)$ , con  $x \in E$ , tenemos que

$$\langle f, A_x \rangle = 0.$$

Pero como  $E$  es reflexivo sabemos que la aplicación canónica  $J : E \rightarrow E^{**}$  es sobreyectiva, como  $f \in E^{**}$ , existe un  $x_0 \in E$ , tal que  $f = J_{x_0}$ . Luego

$$\begin{aligned}0 &= \langle f, A_x \rangle \\ &= \langle J_{x_0}, A_x \rangle \\ &= \langle A_x, x_0 \rangle \\ &= a(x, x_0).\end{aligned}$$

Por lo que si tomamos  $A_{x_0}$ , como es coerciva tenemos que  $0 = a(x_0, x_0) \geq \alpha\|x_0\|^2$ . de eso concluimos que  $x_0 = 0$ , pero esto implicaría que  $f = J_{x_0} = J_0 = 0$ , una contradicción ya que  $f$  era no nulo. Así concluimos que  $R(A) = \overline{R(A)} = E^*$  mostrando que  $A$  es sobreyectiva.

□□

- (c) Deduzca que para cada  $f \in E^*$ , existe un único  $x \in E$  tal que  $a(x, y) = \langle f, y \rangle$ ,  $\forall y \in E$ . Esto es, la forma bilineal coerciva  $a$  representa todo funcional lineal continuo.

**Demostración.** Tomemos  $f \in E^*$ , por (b), como  $A$  es sobreyectiva, existe  $x_1 \in E$  tal que  $A(x_1) = A_{x_1} = f$ , es decir que para todo  $y \in E$ ,  $a(x_1, y) = A_{x_1}(y) = f(y)$ . Si no existe otro además de  $x_1$  hemos acabado. En caso contrario, suponga que existe un  $x_2 \in E$  tal que  $a(x_2, y) = f(y)$  para todo  $y$ , luego como  $a$  es bilineal

$$\begin{aligned}0 &= f(y) - f(y) \\ &= a(x_1, y) - a(x_2, y) \\ &= a(x_1 - x_2, y).\end{aligned}$$

Como es para todo  $y \in E$ , si tomamos  $y = x_1 - x_2$ , tenemos que  $a(x_1 - x_2, x_1 - x_2) = 0$ ,

pero como  $a$  es coerciva, existe  $\alpha > 0$  tal que

$$0 = a(x_1 - x_2, x_1 - x_2) \geq \alpha \|x_1 - x_2\|^2.$$

Así tenemos que  $\|x_1 - x_2\|^2 = 0$ . Por lo que  $x_1 - x_2 = 0$ , así  $x_1 = x_2$ , concluyendo así la unicidad.  $\square$

### Ejercicio 18 Sea $E$ un espacio de Banach

- (a) Demuestre que existe un espacio topológico compacto  $K$  y una isometría de  $E$  en  $(C(K), \|\cdot\|_\infty)$ .

**Demostración.** Considere el conjunto  $K = B_{E^*} = \{f \in E^* : \|f\|_{E^*} \leq 1\}$ . Luego  $K$  es un espacio topológico compacto en la topología débil\*. Definamos la función

$$T: (E, \|\cdot\|_E) \rightarrow (C(K), \|\cdot\|_\infty)$$

donde  $x \mapsto T_x: B_{E^*} \rightarrow \mathbb{R}$  y  $f \mapsto (Tx)(f) = f(x) = J_x$ , por definición de las funciones  $J_x$  sabemos que  $T_x$  es continua en la topología débil\*, ahora veamos que  $T$  es lineal, sean  $x, y \in E$  y  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , entonces,

$$T(\alpha x + \beta y)(f) = \langle f, \alpha x + \beta y \rangle = \alpha \langle f, x \rangle + \beta \langle f, y \rangle = \alpha(Tx)(f) + \beta(Ty)(f).$$

Por último, veamos que  $T$  es una isometría.

$$\|Tx\|_\infty = \sup_{f \in K} |Tx(f)| = \sup_{\substack{f \in E^* \\ \|f\|_{E^*} \leq 1}} |\langle f, x \rangle| \leq \|x\|,$$

como  $T$  es lineal, acotada tenemos que  $T$  es continua. Además, por un corolario de la forma analítica de Hahn-Banach, tenemos que para cada  $x \in E$  existe  $f \in E^*$  tal que

$$\langle f, x \rangle = \|x\|, \quad \text{con } \|f\| = 1,$$

por lo que tenemos  $\|Tx\|_\infty = \|x\|$ , así  $T$  es isometría.  $\square$

- (b) Asuma que  $E$  es separable. Entonces muestre que existe una isometría de  $E$  en  $\ell^\infty$  (vea el Ejercicio 14 para la definición del espacio).

**Demostración.** Como  $E$  es separable, la bola unidad cerrada  $K = B_{E^*}$  del dual  $E^*$  es compacta y metrizable en la topología débil\* por el Teorema de Banach-Alaoglu y la separabilidad de  $E$ . Además, sabemos que todo espacio métrico compacto es segundo-countable y, por tanto, separable. Así, existe un subconjunto denso numerable  $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subseteq K$ .

Definamos

$$T: E \rightarrow \ell^\infty, \quad x \mapsto T(x) := \{f_n(x)\}_{n=1}^\infty.$$

Veamos que  $T$  está bien definido, como  $\|f_n\| \leq 1$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , tomando un  $x$  fijo,

tenemos que

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} |f_n(x)| \leq \|x\| \sup_{n \in \mathbb{N}} \|f_n\| \leq M\|x\| \quad \text{donde } M \in \mathbb{R}, M \geq 1.$$

Ahora veamos que  $T$  es lineal. Sean  $x, y \in E$ , y  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$T(\alpha x + \beta y) = \{f_n(\alpha x + \beta y)\} = \alpha\{f_n(x)\} + \beta\{f_n(y)\},$$

luego  $T$  es lineal. Por lo que  $T$  es continua ya que es lineal y acotada. Por lo que sólo nos falta ver que  $T$  es una isometría. Por el corolario de Hahn-Banach en forma analítica, existe  $f \in K \subseteq E^*$  tal que  $|f(x)| = \|x\|$ , al ser  $f_n$  denso en  $K$ , existe una subsucesión  $\{f_{n_k}\}$  tal que  $f_{n_k} \rightarrow f$  en  $\sigma(E^*, E)$ , y en particular  $f_{n_k}(x) \rightarrow f(x)$ , y por lo tanto

$$|f(x)| = \lim_{k \rightarrow \infty} \sup |f_{n_k}(x)| \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} |f_n(x)| = \|T(x)\|_\infty \leq \|x\|.$$

Por lo cual

$$\|T(x)\|_\infty = \|x\|,$$

y  $T(x)$  es una isometría.

□