UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
FACULTAD DE CIENCIAS
TEORIA DE CODIFICACIÓN

Edgar Santiago Ochoa Quiroga
María Alejandra Rodríguez Ríos

Ejercicio 1 Considere que una fuente sin memoria emite los símbolos del alfabeto $S = \{a, b, c\}$. Se sabe que la distribución de probabilidad de los símbolos en la salida del canal es

$$P_Y = \{0.6, 0.3, 0.1\}.$$

Los símbolos entran a un canal ruidoso que puede cambiar unos símbolos en otros de acuerdo a la distribución de probabilidad que muestra la siguiente tabla de probabilidades condicionales $p(x|y)$:

entra\sale	a	b	c
a	0.95	0.03	0.02
b	0.03	0.95	0.02
c	0.02	0.02	0.96

Denote por X y Y las variables aleatorias que modelan los símbolos que salen de la fuente y del canal respectivamente. Resuelva las siguientes preguntas:

A . Determine las entropías de la fuente y el canal.

Solución. Para determinar las entropías que salen del canal y de la fuente necesitamos P_X y P_Y respectivamente, como el ejercicio nos da explicitamente P_Y vamos a comenzar calculando la entropía de los símbolos que salen del canal, entonces

$$H(Y) = -0{,}6 log_2 0{,}6 - 0{,}3 log_2 0{,}3 - 0{,}1 log_2 0{,}1 \approx 1{,}29546\text{bits}.$$

La entropía de los símbolos que salen la fuente no la obtenemos directamente puesto que no contamos con la distribución de manera explícita , por lo cual debemos calcular P_X

$$\begin{aligned} p(a, a) &= p(a|a)P_Y(a) & p(a, b) &= p(a|b)P_Y(b) & p(a, c) &= p(a|c)P_Y(c) \\ &= 0{,}95 \cdot 0{,}6 & &= 0{,}03 \cdot 0{,}3 & &= 0{,}02 \cdot 0{,}1 \\ &= 0{,}57 & &= 0{,}009 & &= 0{,}002 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p(b, a) &= p(b|a)P_Y(a) & p(b, b) &= p(b|b)P_Y(b) & p(b, c) &= p(b|c)P_Y(c) \\ &= 0{,}03 \cdot 0{,}6 & &= 0{,}95 \cdot 0{,}3 & &= 0{,}02 \cdot 0{,}1 \\ &= 0{,}018 & &= 0{,}285 & &= 0{,}002 \end{aligned}.$$

$$\begin{aligned} p(c, a) &= p(c|a)P_Y(a) & p(c, b) &= p(c|b)P_Y(b) & p(c, c) &= p(c|c)P_Y(c) \\ &= 0{,}02 \cdot 0{,}6 & &= 0{,}02 \cdot 0{,}3 & &= 0{,}96 \cdot 0{,}1 \\ &= 0{,}012 & &= 0{,}006 & &= 0{,}096 \end{aligned}$$

Por lo cual tenemos que

$$P_X = \{0{,}581, 0{,}305, 0{,}0114\},$$

para a,b y c respectivamente. Por lo cual la entropía de la fuente es

$$H(X) = -(0{,}581)\log(0{,}581) - (0{,}305)\log(0{,}305) - (0{,}114)\log(0{,}114) = 1{,}3348 \text{ bits}.$$

Nota: Como $H(Y|X)$ se puede tomar como entropía del canal, específicamente del ruido, también se podría calcular en este numeral sin embargo la calcularemos en el item C puesto que es ahí donde se pide de manera explícita.

B . Determine la entropía del sistema.

Solución. Utilizando las probabilidades que calculamos en el numeral anterior, podemos calcular la entropía del sistema por definición

$$\begin{aligned}
H(X,Y) &= -\sum_{x,y} p(x,y)\log_2 p(x,y) \\
&= -0{,}570\log_2(0{,}570) - 0{,}009\log_2(0{,}009) - 2(0{,}002\log_2(0{,}002)) - 0{,}018\log_2(0{,}018) \\
&\quad - 0{,}285\log_2(0{,}285) - 0{,}012\log_2(0{,}012) - 0{,}006\log_2(0{,}006) + 0{,}096\log_2(0{,}096) \\
&= 1{,}62517 \text{ bits}.
\end{aligned}$$

C . Determine e interprete las entropías condicionales $H(X|Y)$ y $H(Y|X)$.

Solución. Para resolver este numeral vamos a utilizar dos propiedades .ªnálogas"que se tienen para cualesquiera dos variables aleatorias X, Y, esta dice que

$$\begin{aligned}
H(X,Y) &= H(X) + H(Y|X) \\
H(X,Y) &= H(Y) + H(X|Y).
\end{aligned}$$

Por lo cual $H(Y|X)$ es igual a

$$\begin{aligned}
H(Y|X) &= 1{,}62517 - 1{,}3348 \\
&= 0{,}29037 \text{ bits}.
\end{aligned}$$

de manera similar tenemos que $H(X|Y)$ por esa propiedad se tiene que

$$\begin{aligned}
H(X|Y) &= 1{,}62517 - 1{,}29546 \\
&= 0{,}32971 \text{ bits}.
\end{aligned}$$

Podemos decir que la probabilidad condicional $H(Y|X)$ calcula el ruido que se puede encontrar en el canal de información puesto que calcula las probabilidades de entrada dado que ya se tiene una salida. Mientras que la probabilidad condicional $H(X|Y)$ se refiere a la información que se pierde en el canal, esta va orientada a dado que un símbolo entra al canal como podemos suponer que va a salir del mismo.

D . Calcule la información común entre la entrada y la salida del sistema.

Solución. Por definición tenemos que la información común entre la entrada y la salida del sistema, está dada por

$$I(X;Y) = \sum_{x,y} p(x,y) \log_2 \left(\frac{p(x,y)}{p(x)p(y)} \right).$$

Sin embargo, podemos utilizar el numeral A y C y la siguiente propiedad para dos variables aleatorias

$$I(X;Y) = H(X) - H(X|Y).$$

Luego reemplazando valores tenemos que

$$\begin{aligned} I(X;Y) &= 1{,}3348 - 0{,}32971 \\ &= 1{,}00509 \text{ bits}. \end{aligned}$$

E . Determine cuánta información se perdió dentro del canal.

Solución. La información que se perdió en el canal de información está dada por la probabilidad condicional $H(X|Y)$, la cual en el numeral C nos dió $0, 32971$ bits

F . Determine la pérdida de información por símbolo.

Solución. Para este punto vamos a utilizar $H(X|Y)$, sin embargo, como nos piden que la calculemos por símbolo lo haremos para cuando Y toma los valores a, b y c, de la siguiente manera.
Para el caso en el que $Y = a$, entonces, calcularemos $H(X|a)$

$$\begin{aligned} H(X|a) &= -\sum_{x} p(x|a) \log_2 p(x|a) \\ &= -(0{,}95) \log_2(0{,}95) - (0{,}03) \log_2(0{,}03) - (0{,}02) \log_2(0{,}02) \\ &= 0{,}33494 \text{ bits} \end{aligned}$$

En el caso donde $Y = b$ tenemos que calcular $H(X|b)$ la cual nos da

$$\begin{aligned} H(X|b) &= -\sum_{x} p(x|b) \log_2 p(x|b) \\ &= -(0{,}03) \log_2(0{,}03) - (0{,}95) \log_2(0{,}95) - (0{,}02) \log_2(0{,}02) \\ &= 0{,}33494 \text{ bits} \end{aligned}$$

Por último tenemos que cuando $Y = c$, se tiene que calcular $H(X|c)$, por lo tanto

$$
\begin{aligned}
H(X|c) &= -\sum_x p(x|c) \log_2 p(x|c) \\
&= -(0{,}02) \log_2(0{,}02) - (0{,}02) \log_2(0{,}02) - (0{,}96) \log_2(0{,}96) \\
&= 0{,}28229 \text{ bits}
\end{aligned}
$$

Ejercicio 2
Considere una fuente $\mathcal{F}$ con una distribución de probabilidad $\mathcal{P} = \{0{,}20, 0{,}15, 0{,}15, 0{,}10, 0{,}10, 0{,}30\}$ construya un código con longitud promedio de palabra L, tal que

$$H(\mathcal{F}) \leq L \leq H(\mathcal{F}) + 1.$$

Solución. Primero la entropía que calcularemos es en base 2, por lo que codificaremos en un alfabeto binario. Por la distribución de probabilidad sabemos que la entropía viene dada por

$$
\begin{aligned}
H(\mathcal{F}) &= 0{,}20 \log_2(0{,}20) + 0{,}15 \log_2(0{,}15) + 0{,}15 \log_2(0{,}15) + 0{,}10 \log_2(0{,}10) \\
&\quad + 0{,}10 \log_2(0{,}10) + 0{,}30 \log_2(0{,}30) \\
&\approx 2{,}47095.
\end{aligned}
$$

Por lo que estamos buscando un código con longitud promedio de palabra L tal que

$$2{,}47095 \leq L \leq 3{,}47095.$$

Sabemos por una proposición vista que siempre existe un código unívocamente decodificable con una longitud promedio L que cumpla la desigualdad previa. Tenemos múltiples formas de hacerlo por lo que se presentaran dos códigos que cumplen.

Primero en la demostración de la proposición se toman longitudes de palabra

$$l_i = \left\lceil \log_2 \frac{1}{p_i} \right\rceil$$

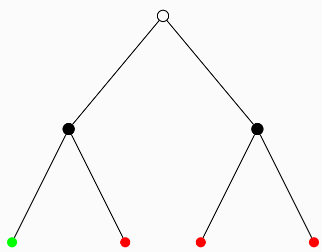
De esta manera nuestras longitudes de palabra son

$$
\begin{aligned}
l_1 &= \left\lceil \log_2 \frac{1}{0{,}20} \right\rceil = 3,\\
l_2 &= \left\lceil \log_2 \frac{1}{0{,}15} \right\rceil = 3,\\
l_3 &= \left\lceil \log_2 \frac{1}{0{,}15} \right\rceil = 3,\\
l_4 &= \left\lceil \log_2 \frac{1}{0{,}10} \right\rceil = 4,\\
l_5 &= \left\lceil \log_2 \frac{1}{0{,}10} \right\rceil = 4,\\
l_6 &= \left\lceil \log_2 \frac{1}{0{,}30} \right\rceil = 2.
\end{aligned}
$$

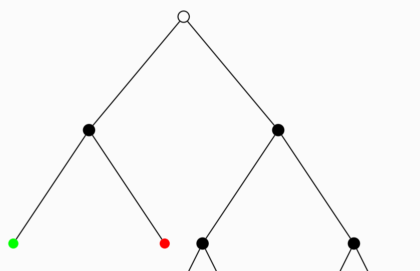
Note que la longitud promedio de palabra para un código con esas longitudes seria

$$
\begin{aligned}
L &= (0{,}20 + 0{,}15 + 0{,}15)3 + (0{,}10 + 0{,}10)4 + 0{,}30 \cdot 2\\
&= 2{,}9
\end{aligned}
$$

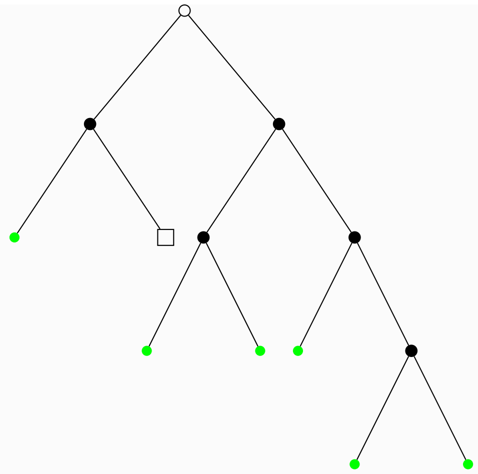
que cumple la desigualdad. Primero realizamos un árbol de altura 2



Luego el de altura 3



Por ultimo el de altura 4



Si asignamos ceros a las ramas de la izquierda y unos a las de la derecha obtenemos el siguiente código

0,20	0,15	0,15	0,10	0,10	0,30
100	101	110	1110	1111	00

Donde a cada probabilidad de la d.p. le asignamos un respectivo código de la longitud establecida.

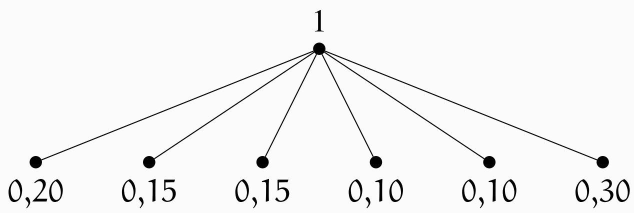
La otra posibilidad para un código que cumpla la desigualdad, es encontrar un código de longitud promedio de palabra constante. Ya que note que si hacemos $L = 3$, también cumplimos la desigualdad, sigamos el algoritmo de Tunstall. Consideramos $D_z = 2$ y $D_u = 6$. Seguiremos por pasos el algoritmo:
Paso 1:

a) Queremos un n, tal que $2^n \geq 6$, por lo que escogeremos $n = 3$, ya que es el primer natural que lo cumple, esta sera nuestra longitud de palabra.

b) Tenemos que $k = \left\lfloor \frac{2^3 - 1}{6 - 1} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{7}{5} \right\rfloor = 1$. Dado que este es el numero de nodos internos, podemos inferir en este paso que solo tendremos a la raíz como nodo interno.

c) Por lo anterior tenemos que $M = 1 + 1(6 - 1) = 6$. Es decir que el numero de mensajes a codificar es el mismo que el de símbolos de la fuente.

Paso 2: Note que en este paso del algoritmo como resaltamos antes solo asignamos hijos a la raíz, cuando hacemos $j = 1$, ya que $k = 1$. Por lo que el árbol construido es el siguiente:



De esta manera el código de longitud promedio constante 3 es

0,20	0,15	0,15	0,10	0,10	0,30
000	001	010	011	100	101

Ejercicio 3

A . Demuestre que para tres variables aleatorias X, Y y Z que toman valores sobre conjuntos finitos siempre se tiene que

$$H(X,Y) + H(X,Z) + H(Y,Z) \geq 2H(X,Y,Z).$$

Demostración. Para poder probar esa propiedad, primero probaremos lo siguiente, puesto que es importante para nuestra prueba

$$H(X,Y,Z) = H(X) + H(Y|X) + H(Z|X,Y). \tag{1}$$

La demostración se sigue de lo siguiente

$$\begin{aligned} H(X,Y,Z) &= -\sum_{x,y,z} p(x,y,z) \log p(x,y,z), \\ &= -\sum_{x,y,z} p(x,y,z) \log \left(\frac{p(x,y,z)}{p(x)p(x,y)p(y)p(x)} \right), \\ &= -\sum_{x,y,z} p(x,y,z) \log p(x) - \sum_{x,y,z} p(x,y,z) \log p(y|x) - \sum_{x,y,z} p(x,y,z) \log p(z|x,y), \\ &= -\sum_{x} p(x) \log p(x) - \sum_{x,y} p(x,y) \log p(y|x) - \sum_{x,y,z} p(x,y,z) \log p(z|x,y), \\ &= H(X) + H(Y|X) + H(Z|X,Y). \end{aligned}$$

De manera análoga tenemos que

$$H(X,Y,Z) = H(Y) + H(Y|Z) + H(X|Y,Z). \tag{2}$$

Adicionalmente, tenemos que probar que,

$$H(X,Y) = H(X) + H(Y|X) \tag{3}$$

Esta prueba se tiene a partir de la siguiente cuenta,

$$\begin{aligned}
H(X,Y) &= -\sum_{x,y} p(x,y)\log p(x,y) \\
&= -\sum_{x,y} p(x,y)\log\left(p(x)p(y|x)\right) \\
&= -\sum_{x,y} p(x,y)\log p(x) - \sum_{x,y} p(x,y)\log p(y|x) \\
&= -\sum_{x} p(x)\log p(x) - \sum_{x,y} p(x,y)\log p(y|x) \\
&= H(X) + H(Y|X).
\end{aligned}$$

de manera similar, se puede demostrar que

$$H(X,Y) = H(Y) + H(X|Y). \tag{4}$$

por último, debemos probar estas dos propiedades

$$H(X|Y) \leq H(X), \tag{5}$$
$$H(X|Y,Z) \leq H(X|Z). \tag{6}$$

Para probar esas propiedades tenemos que usar la convexidad de la función logaritmo cuando tiene base mayor que 1, es decir, que

$$\log\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i\right) \geq \sum_{i=1}^{n}\alpha_i \log(x_i), .$$

donde $\alpha_i > 0$ y $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i = 1$; así, (5) se sigue de

$$\begin{aligned}
H(X) - H(X|Y) &= -\sum_{x,y} p(x,y)\log p(x) + \sum_{x,y} p(x,y)\log p(x|y) \\
&= -\sum_{x,y} p(x,y)\log\frac{p(x)}{p(x|y)} \\
&\geq -\log\sum_{x,y} p(x,y)\frac{p(x)}{p(x|y)} \\
&\geq -\log\sum_{x,y} p(x)p(y) \\
&= -\log(1) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Por lo cual (5) queda probado.

Ahora bien, para probar (6) seguimos lo siguiente

$$\begin{aligned}
H(X|Z) - H(X|Y,Z) &= H(X,Z) - H(Z) - H(X|Y,Z) \quad \text{por (3)} \\
&= -\sum_{x,y,z} p(x,y,z)\log p(x,z) + \sum_{x,y,z} p(x,y,z)\log p(z) \\
&\quad + \sum_{x,y,z} p(x,y,z)\log p(x|y,z) \\
&= -\sum_{x,y,z} p(x,y,z)\log \frac{p(x,z)}{p(z)p(x|y,z)} \\
&= -\sum_{x,y,z} p(x,y,z)\log \frac{p(x,z)p(y,z)}{p(z)p(x,y,z)} \\
&\geq -\log \sum_{x,y,z} \frac{p(x,y,z)p(x,z)p(y,z)}{p(z)p(x,y,z)} \\
&= -\log \sum_{x,z} \frac{p(x,z)}{p(z)} \sum_{y} p(y,z) \\
&= -\log \sum_{x,z} \frac{p(x,z)}{p(z)} p(z) \\
&= -\log(1) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Así, (6) queda probado, por lo que utilizando las propiedades demostradas anteriormente, podemos decir que

$$\begin{aligned}
2H(X,Y,Z) &= H(X,Y,Z) + H(X,Y,Z) \\
&= H(X) + H(Y|X) + H(Z|X,Y) + H(Y) + H(Y|Z) + H(X|Y,Z) \quad \text{por (1) y (2)} \\
&= H(X,Y) + H(Y,Z) + H(Z|X,Y) + H(X|Y,Z) \quad \text{por (3)} \\
&\leq H(X,Y) + H(Y,Z) + H(Z|Y) + H(X|Z) \quad \text{por (6)} \\
&\leq H(X,Y) + H(Y,Z) + H(Z) + H(X|Z) \quad \text{por (5)} \\
&= H(X,Y) + H(Y,Z) + H(X,Z) \quad \text{por (4).}
\end{aligned}$$

Concluyendo lo que queriamos demostrar.

□

B . Demuestre que para cualquier tripla de variables aleatorias se cumple que

$$I(X;Y|Z) = H(X|Z) + H(Y|Z) - H(X,Y|Z).$$

Demostración. Para poder demostrar esa propiedad, es necesario realizar dos demostraciones preliminares, la primera es probar que para 3 variables aleatorias arbitrarias se cumple que

$$H(X,Y,Z) = H(X) + H(Y,Z|X), \tag{7}$$

esta afirmación se tiene gracias a lo siguiente

$$\begin{aligned}
H(X,Y,Z) &= -\sum_{x,y,z} p(x,y,z)\log p(x,y,z) \\
&= -\sum_{x,y,z} p(x,y,z)\log\left(p(x)p(y,z|x)\right) \\
&= -\sum_{x,y,z} p(x,y,z)\log p(x) - \sum_{x,y,z} p(x,y,z)\log p(y,z|x) \\
&= H(X) + H(Y,Z|X).
\end{aligned}$$

La segunda propiedad que tenemos que probar es

$$I(X;Y|Z) = H(X|Z) - H(X|Y,Z), \tag{8}$$

la prueba de esto se sigue de

$$\begin{aligned}
I(X;Y|Z) &= -\sum_{x,y,z} p(x,y,z)\log p(x,y|z) \\
&= H(X|Z) + \sum_{x,y,z} p(x|z)p(y|z)p(x,y,z)\log p(x|z) + \sum_{x,y,z} p(x,y,z)\log\left(\frac{p(x,y,z)}{p(x,y|z)}\right) \\
&= H(X|Z) - H(X|Y,Z).
\end{aligned}$$

por lo anterior, podemos decir que

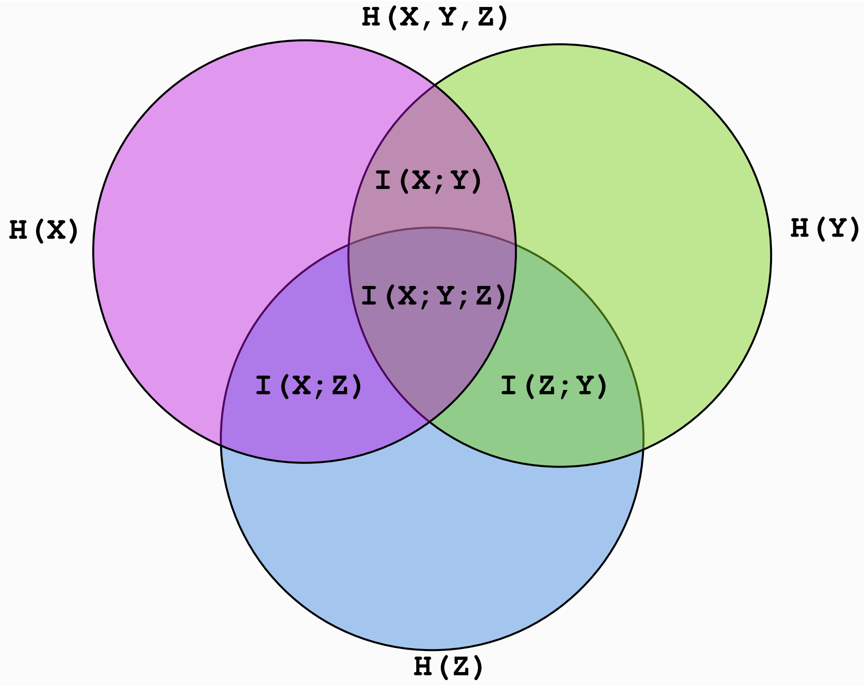
$$\begin{aligned}
I(X;Y|Z) &= H(X|Z) - H(X|Y,Z) \quad \text{por (8)} \\
&= H(X|Z) - (H(X,Y,Z) - H(Y,Z)) \quad \text{por el numeral anterior y el (3)} \\
&= H(X|Z) - (H(X,Y|Z) + H(Z)) + H(Y,Z) \quad \text{por (7)} \\
&= H(X|Z) + H(Y|Z) - H(X,Y|Z) \quad \text{por (4).}
\end{aligned}$$

□

C . Proponga una definición para la información común de tres variables $I(X;Y;Z)$ y demuestre que

$$I(X;Y;Z) = I(X;Y) - I(X;Y|Z).$$

Demostración. Teniendo en cuenta que $I(X;Y;Z)$ se refiere a la información que hay en común entre las 3 variables aleatorias, podemos aterrizar esto a una noción un poco más conjuntista para dar nuestra definición, de acuerdo con lo visto en clase sabemos que $H(X;Y;Z)$ se refiere a la entropía total del sistema, y $H(X), H(Y), H(Z)$ se refiere a las entropías de cada uno de los símbolos en un momento específico, además $I(X;Y), I(X;Z)$ y $I(Y;Z)$ se refieren a la información común entre variables aleatorias, graficando esto en un diagrama de Venn, podemos definir de manera más intuitiva $I(X;Y;Z)$



de acuerdo con lo anterior tomamos a $I(X;Y;Z)$ como

$$I(X;Y;Z) = H(X,Y,Z) - H(X) - H(Y) - H(Z) + I(X;Y) + I(Y;Z) + I(Z;X).$$

Para probar que

$$I(X;Y;Z) = I(X;Y) - I(X;Y|Z),$$

primero debemos probar algunas propiedades adicionales a las que ya hemos mostrado anteriormente, la primera de ellas es que

$$I(X;Y|Z) = H(X|Z) - H(X|Y,Z) \tag{9}$$

Para esto seguimos los siguientes cálculos

$$\begin{aligned}
I(X;Y|Z) &= -\sum_{x,y,z} p(x,y,z) \log \frac{p(x,y|z)}{p(x|z)p(y|z)} \\
&= -\sum_{x,y,z} p(x,y,z) \log p(x|z) + \sum_{x,y,z} p(x,y,z) \log \frac{p(x,y|z)}{p(y|z)} \\
&= H(X|Z) + \sum_{x,y,z} p(x,y,z) \log \frac{p(x,y,z)}{p(z)} \cdot \frac{p(y,z)}{p(z)} \\
&= H(X|Z) + \sum_{x,y,z} p(x,y,z) \log p(x|y,z) \\
&= H(X|Z) - H(X|Y,Z).
\end{aligned}$$

La segunda propiedad que probaremos es,

$$I(X;Y|Z) = H(X|Z) + H(Y|Z) - H(Z) - H(X,Y,Z), \tag{10}$$

para probar esta propiedad usaremos un ejercicio anterior y algunas de las propiedades probadas anteriormente,

$$\begin{aligned} I(X;Y|Z) &= H(X|Z) - H(X|Y,Z) \\ &= (H(X,Z) - H(Z)) - (H(X,Y,Z) - H(Y,Z)) \\ &= H(X,Z) + H(Y,Z) - H(Z) - H(X,Y,Z). \end{aligned}$$

Otra propiedad que tenemos que probar es,

$$I(X;Y) = H(X) + H(Y) - H(X,Y). \tag{11}$$

Utilizando las propiedades probadas anteriormente podemos decir lo siguiente

$$\begin{aligned} I(X;Y) &= H(X) - H(X|Y) \\ &= H(X) - (H(X,Y) - H(Y)) \\ &= H(X) + H(Y) - H(X,Y). \end{aligned}$$

Ahora si tenemos todas la herramientas para hacer la prueba, tomamos

$$\begin{aligned} I(X;Y) - I(X;Y|Z) &= H(X) + H(Y) - H(X,Y) - (H(X,Z) + H(Y,Z) - H(Z) - H(X,Y,Z)) \\ &= H(X,Y,Z) - H(X,Y) - H(X,Z) - H(Y,Z) + H(X) + H(Y) + H(Z) \\ &= H(X,Y,Z) + I(X;Y) + I(X;Z) + I(Y,Z) - H(X) - H(Y) - H(Z) \\ &= I(X;Y;Z) \end{aligned}$$

□

Ejercicio 4 Pruebe que para todo $n \geq 2$ se tiene que

$$H(X_1, \dots, X_n) \leq \sum_{i=1}^{n} H(X_i | X_j, j \neq i).$$

Ejercicio 5
Suponga que una fuente genera la secuencia típica aabbcccaadeeeaabcaadcdabbedededecacaeeddcc-codcdeaabedbb. Determine un par de códigos Tunstall sobre alfabetos binarios y triarios, indique los diccionarios en cada caso. Cuál de los códigos trabajaría más eficiente?

Solución. Como nos dan una secuencia típica, realicemos la tabla de frecuencias para determinar la probabilidad de cada símbolo:

Simbolo	Frecuencia	Probabilidad
a	13	13/55
b	8	8/55
c	12	12/55
d	11	11/55
e	11	11/55

Con esta información podemos proceder con cada código de Tunstall.

Sobre un alfabeto Binario:

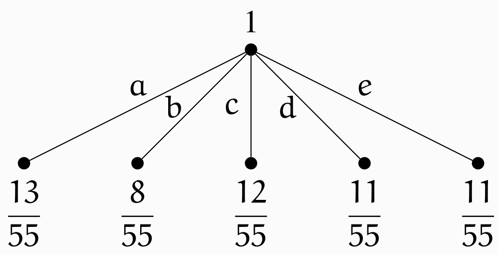
Consideramos $D_z = 2$ y $D_u = 5$. Seguiremos por pasos el algoritmo:
Paso 1:

a) Queremos un n, tal que $2^n \geq 5$, por lo que escogeremos $n = 3$, ya que es el primer natural que lo cumple, esta sera nuestra longitud de palabra.

b) Tenemos que $k = \left\lfloor \frac{2^3 - 1}{5 - 1} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{7}{4} \right\rfloor = 1$. Dado que este es el numero de nodos internos, podemos inferir en este paso que solo tendremos a la raíz como nodo interno.

c) Por lo anterior tenemos que $M = 1 + 1(5 - 1) = 5$. Es decir que el numero de mensajes a codificar es el mismo que el de símbolos de la fuente.

Paso 2: Note que en este paso del algoritmo como resaltamos antes solo asignamos hijos a la raíz, cuando hacemos $j = 1$, ya que $k = 1$. Por lo que el árbol construido es el siguiente:



De esta manera un diccionario de codificación para el caso binario es el siguiente

a	b	c	d	e
000	001	010	011	100

Ahora para calcular la eficiencia sabemos que $\overline{L}_z = 3$, ya que el código tiene esa longitud constante. La entropía de nuestra fuente esta dada por

$$\begin{aligned} H_2(F) &= -\frac{13}{55}\log_2\frac{13}{55} - \frac{8}{55}\log_2\frac{8}{55} - \frac{12}{55}\log_2\frac{12}{55} - \frac{11}{55}\log_2\frac{11}{55} - \frac{11}{55}\log_2\frac{11}{55} \\ &\approx 2{,}3044. \end{aligned}$$

Por ultimo hallamos la longitud promedio de mensaje emitido

$$\begin{aligned}\overline{L}_u &= \frac{13}{55}\cdot 1 + \frac{8}{55}\cdot 1 + \frac{12}{55}\cdot 1 + \frac{11}{55}\cdot 1 + \frac{11}{55}\cdot 1\\ &= 1.\end{aligned}$$

Note que esto tiene sentido ya que los mensajes son todos de longitud 1. Luego tenemos que la eficiencia para este código es

$$\eta_2 = \frac{H_2(F)\overline{L}_u}{\overline{L}_z} \approx \frac{2{,}3044}{3} \approx 0{,}76813 \approx 76\,\%.$$

Sobre un alfabeto Triario:

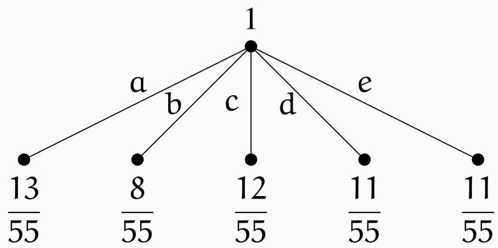
Consideramos $D_z = 3$ y $D_u = 5$. Nuevamente seguiremos el algoritmos:
Paso 1:

a) Queremos un n, tal que $3^n \geq 5$, por lo que escogeremos $n = 2$, ya que es el primer natural que lo cumple, esta sera nuestra longitud de palabra.

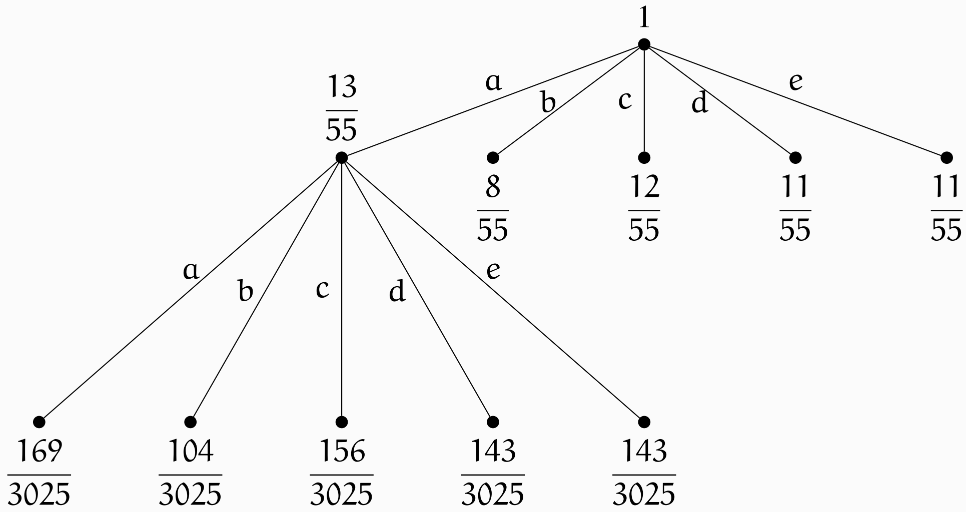
b) Tenemos que $k = \left\lfloor \frac{3^2 - 1}{5 - 1} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{8}{4} \right\rfloor = 2$. Este sera el numero de nodos internos.

c) Por lo anterior tenemos que $M = 1 + 2(5 - 1) = 9$. Este sera el numero de mensajes a codificar.

Paso 2: Al igual que en el caso anterior para el paso $j = 1$, tenemos el siguiente árbol



Para el paso $j = 2$, como $k = 2$, por el algoritmo esta es la ultima iteración. Como tenemos que tomar el nodo de mayor probabilidad, tomamos el de la rama de a, por lo que el árbol que nos da la codificación es el siguiente



Con esto en mente el diccionario de codificación para el caso triario es el siguiente

aa	ab	ac	ad	ae	b	c	d	e
00	01	02	10	11	12	20	21	22

Para la eficiencia en este caso tenemos que $\overline{L}_z = 2$, mientras que la entropía para este caso como estamos en un código triario es de la forma

$$H_3(F) = \frac{H_2(F)}{\log_2(3)} \approx 1{,}45391.$$

Luego falta con calcular la longitud promedio de mensaje, que esta dada por

$$\begin{aligned}\overline{L}_u &= 2 \cdot \left(\frac{169}{3025} + \frac{104}{3025} + \frac{156}{3025} + \frac{143}{3025} + \frac{143}{3025}\right) + \frac{8}{55} \cdot 1 + \frac{12}{55} \cdot 1 + \frac{11}{55} \cdot 1 + \frac{11}{55} \cdot 1 \\ &= \frac{26}{55} \cdot 1 + \frac{8}{55} \cdot 1 + \frac{12}{55} \cdot 1 + \frac{11}{55} \cdot 1 + \frac{11}{55} \cdot 1 \\ &= \frac{68}{55}.\end{aligned}$$

Luego tenemos que la eficiencia en el caso triario esta dado por

$$\eta_3 = \frac{H_3(F)\overline{L}_u}{\overline{L}_z} \approx \frac{(1{,}45391)\left(\frac{68}{55}\right)}{2} \approx 0{,}89778 \approx 89\,\%$$

De esta manera como $\eta_2 < \eta_3$, concluimos que es mas eficiente el código triario. esto era esperable ya que en el caso binario estábamos codificando símbolo a símbolo de la fuente. ʘ‿ʘ