Sandra Natalia Florez Garcia
Edgar Santiago Ochoa Quiroga
María Alejandra Rodríguez Ríos

Ejercicio 1 Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio vectorial normado. Defina

$$K = \{x \in E : \|x\| = 1\}.$$

Demuestre que E es de Banach si y solamente si K es completo.

Ejercicio 2 Sean $(E, \|\cdot\|_E)$ y $(F, \|\cdot\|_F)$ espacios vectoriales normados. Considere $T : E \to F$ una transformación lineal. Muestre que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) T es continua.

(ii) T es continua en cero.

(iii) T es acotada. Es decir, existe $M > 0$ tal que para todo $x \in E$,

$$\|Tx\|_F \leq M\|x\|_E.$$

(iv) Si $\overline{B(0,1)} = \{x \in E : \|x\|_E \leq 1\}$, entonces la imagen directa $T(B(0,1))$ es un conjunto acotado de F.

Ejercicio 3 Demuestre que si $T \in \mathcal{L}(E, F)$, entonces:

(i) $\|Tx\|_F \leq \|T\|\,\|x\|_E$, para todo $x \in E$.

(ii) $\|T\| = \sup_{\substack{x \in E \\ x \neq 0}} \frac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E}$.

(iii) $\|T\| = \sup_{\|x\|_E = 1} \|Tx\|_F$.

(iv) $\|T\| = \text{ínf}\{M > 0 : \|Tx\|_F \leq M\|x\|_E, \forall x \in E\}$.

Ejercicio 4

Ejercicio 5 Sean E y F espacios vectoriales normados. Suponga que E es de dimensión finita (no se asume que F sea de dimensión finita).

(i) Muestre que todas las normas asignadas a E son equivalentes.

(ii) Muestre que toda transformación lineal $T : E \to F$ es continua.

(iii) Dé un ejemplo donde se verifique que (ii) puede ser falsa si E es de dimensión infinita.

Ejercicio 6

Considere $E = c_0$, donde

$$c_0 = \left\{ u = \{u_n\}_{n\geq 1} : \text{tales que } u_n \in \mathbb{R},\ \lim_{n\to\infty} u_n = 0 \right\}.$$

Es decir, c_0 es el conjunto de las secuencias reales que tienden a cero. Dotamos a este espacio con la norma $\|u\|_{\ell^\infty} = \sup_{n\in\mathbb{Z}^+} |u_n|$. Considere el funcional $f : E \to \mathbb{R}$ dado por

$$f(u) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} u_n.$$

(i) Muestre que $f \in E^*$ y calcule $\|f\|_{E^*}$.

(ii) ¿Es posible encontrar $u \in E$ tal que $\|u\| = 1$ y $f(u) = \|f\|_{E^*}$?

Sean $(E, \|\cdot\|_E)$ y $(F, \|\cdot\|_F)$ espacios vectoriales normados. Suponga que F es un espacio de Banach.

- Muestre que $\mathcal{L}(E, F)$ es un espacio de Banach con la norma usual de $\mathcal{L}(E, F)$.
- En particular, concluya que $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ y $E^{**} = \mathcal{L}(E^*, \mathbb{R})$ son espacios de Banach.