UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
FACULTAD DE CIENCIAS
ANÁLISIS FUNCIONAL

Sandra Natalia Florez Garcia
Edgar Santiago Ochoa Quiroga
María Alejandra Rodríguez Ríos ....

Ejercicio 9 Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio vectorial normado. Dado $r > 0$, considere $C = B(0, r) = \{y \in E : \|y\| < r\}$. Determine el funcional de Minkowski de C.
Ejercicio 12 Sea E un espacio vectorial normado.

(i) Sea $W \subset E$ un subespacio propio de E y $x_0 \in E \setminus W$, tal que $d := \mathtt{dist}(x_0, W) > 0$. Demuestre que existe $f \in E^*$ tal que $f = 0$ restricto a W, $f(x_0) = d$ y $\|f\|_{E^*} = 1$.

(ii) Sea $W \subset E$ un subespacio propio cerrado de E y $x_0 \in E \setminus W$. Demuestre que existe $f \in E^*$ tal que $f = 0$ restricto a W y $f(x_0) \neq 0$.

Ejercicio 13 Sean $(E, \|\cdot\|)$ y $(F, \|\cdot\|)$ espacios de Banach.

(i) Sea $K \subset E$ un subespacio cerrado de E. Definimos la relación sobre E dada por $x \sim_K y$ si y solo si $x - y \in K$.

(a) Muestre que $\sim_K$ es una relacion de equivalencia sobre E.

Demostración. Dado $x \in E$, como K es subespacio, $x - x = 0 \in K$, esto implica que $x \sim_K x$, mostrando así la reflexividad.

Dados $x, y \in E$, suponga que tenemos que $x \sim_K y$, luego $x - y \in K$, nuevamente como K es subespacio, es cerrado por multiplicacion escalar, así $-(x - y) \in K$, pero $-(x - y) = y - x$, así por definición de la relación tenemos que $y \sim_K x$, mostrando así la simetría.

Por ultimo sean $x, y, z \in E$, con $x \sim_K y$ y $y \sim_K z$, por definición $x - y \in K$ y $y - z \in K$, y como K es subespacio es cerrado para la suma, así tenemos que $(x - y) + (y - z) \in K$, pero $(x - y) + (y - z) = x - z$, así tenemos que $x \sim_K z$, así la relación es transitiva. Con esto podemos concluir que la relación es de equivalencia.

ʊ̬ʊ

(b) Muestre que el espacio cociente E/K es un espacio de Banach con la norma

$$\|x + K\|_{E/K} = \inf_{k \in K} \|x - k\|, \quad x \in E.$$

Es decir, debe verificar que el espacio cociente es un espacio vectorial, normado, cuya norma lo hace completo.

Demostración. Primero notemos que las operaciones definidas sobre el conjunto E/K son las siguientes

$$\begin{aligned}(x+K)+(y+K)&=(x+y)+K,\\ \lambda(x+K)&=\lambda x+K.\end{aligned}$$

Las propiedades de espacio vectorial para E/K, se heredan del hecho de que E ya es espacio vectorial, solo bastaría verificar que si están bien definidas estas operaciones. Si $x_1+K=x_2+K$ y $y_1+K=y_2+K$, tenemos que $x_1-x_2\in K$ y $y_1-y_2\in K$, pero como es subespacio la suma esta, así $(x_1+y_1)-(x_2+y_2)\in K$, así $(x_1+y_1)+K=(x_2+y_2)+K$, luego la suma esta bien definida. De manera similar, si $x_1-x_2\in K$, tenemos que al multiplicar por un escalar también esta en K, esto es $\lambda x_1-\lambda x_2\in K$, así $\lambda x_1+K=\lambda x_2+K$.

Ahora veamos que la norma definida en el enunciado, efectivamente es norma del espacio E/K. Primero esta norma esta bien definida ya que si $x+K=y+K$, eso quiere decir que $x-y\in K$, luego

$$\begin{aligned}\|x+K\|&=\inf_{k\in K}\|x-k\|\\ &=\inf_{k_1\in K}\|x-(k_1+x-y)\|\\ &=\inf_{k_1\in K}\|y-k_1\|\\ &=\|y+K\|.\end{aligned}$$

Luego como $\|x-k\|\geq 0$, para todo $k\in K$, es claro que

$$\|x+K\|=\inf_{k\in K}\|x-k\|\geq 0,$$

ya que estamos tomando el ínfimo de un conjunto que esta acotado interiormente por 0 y $x\in E$ fue tomado arbitrariamente.

Ahora supongamos que $x+K=0+W$, luego $x\in W$, así tenemos que

$$0\leq\|x+K\|=\inf_{k\in K}\|x-k\|\leq\|x-x\|=0,$$

Mostrando que el neutro tiene norma 0. Ahora si suponemos que $\|x+K\|=0$, como la norma es un ínfimo tenemos que existe una sucesión de puntos $k_n\in K$ tal que $\|x-k_n\|\to 0$, esto quiere decir que la sucesión k_n converge a x, pero K es cerrado por hipótesis, así $x\in K$, esto quiere decir que $x+K=0+K$. Ahora si $\lambda=0$, es claro que $\|\lambda(x+K)\|=\|0+K\|=0=0\cdot\|x+K\|=|\lambda|\|x+K\|$

ʊ̬ʊ

(ii) Sea $T\in L(E,F)$ tal que existe $c>0$ para el cual

$$\|Tx\|_F\geq c\|x\|_E,$$

para todo $x\in E$. Si K denota el espacio nulo de T y $R(T)$ el rango de T, muestre que

$\overline{T} : E/K \to R(T)$ dada por $\overline{T}(x + K) = T(x)$, $x \in E$, esta bien definida y es un isomorfismo. Esto es $\overline{T} \in L(E/K, R(T))$ y $\overline{T}^{-1} \in L(R(T), E/K)$.

Demostración. Como el dominio de $\overline{T}$ son clases de equivalencia tenemos que mostrar que la aplicación esta bien definida. Consideremos $x + K = y + K$, es decir $x, y \in E$ son dos representantes distintos de la misma clase. Por definición $\overline{T}(x + K) = T(x)$ y $\overline{T}(y + K) = T(y)$, luego como T es lineal

$$\begin{aligned}\overline{T}(x+K) - \overline{T}(y+K) &= T(x) - T(y) \\ &= T(x-y).\end{aligned}$$

Como supusimos que clases son iguales, eso quiere decir que $x - y \in K$, pero K es el espacio nulo de T, así $T(x - y) = 0$, mostrando así que

$$\overline{T}(x+K) = \overline{T}(y+K),$$

por lo tanto esta bien definida. Ahora la aplicación claramente es sobreyectiva ya que dado $y \in R(T)$, existe $x \in E$ tal que $y = T(x) = \overline{T}(x + K)$, así cada y tiene preimagen. Para la inyectividad se sigue un argumento muy parecido a mostrar que esta bien definida. Dados $x + K, y + K$, si $\overline{T}(x + K) = \overline{T}(y + K)$, esto quiere decir que $T(x) = T(y)$, por linealidad $T(x-y) = 0$, así $x-y \in K$, concluyendo que $x+K = y+K$. Para ver que es isomorfismo faltaría mostrar que la aplicación y su inversa son lineales y acotadas. Primero $\overline{T}$ es lineal ya que

$$\begin{aligned}\overline{T}((x+K) + \lambda(y+K)) &= \overline{T}((x+\lambda y) + K) \\ &= T(x + \lambda y) \\ &= T(x) + \lambda T(y) \\ &= \overline{T}(x+K) + \lambda\overline{T}(y+K).\end{aligned}$$

Note que se tiene por la linealidad de T. Ademas es acotada ya que

$$\begin{aligned}\|\overline{T}(x+K)\| &= \|T(x)\| \\ &\leq M\|x\| \\ &= M\|x-k+k\| \\ &\leq M\|x-k\| + M\|k\|.\end{aligned}$$

Donde $M > 0$, es una constante que depende de x. Esto se tiene ya que T es acotada, ahora por la monoticidad del ínfimo, podemos tomarlo sobre los $k \in K$, como el lado izquierdo no depende de k tenemos que

$$\begin{aligned}\|\overline{T}(x+K)\| &\leq \inf_{k\in K}\{M\|x-k\| + M\|k\|\} \\ &= M \inf_{k\in K} \|x-k\| + M \inf_{k\in K} \|k\| \\ &= M \inf_{k\in K} \|x-k\| \\ &= M\|x+K\|.\end{aligned}$$

Así hemos mostrado que es acotado. Ahora probemos las mismas dos propiedades para la aplicación $\overline{T}^{-1}$. Para la linealidad tenemos que dados $y_1, y_2 \in R(T)$, existen $x_1, x_2 \in E$, tales que $y_i = T(x_i) = \overline{T}(x_i + K)$, para $i = 1, 2$. Luego por la linealidad ya probada tenemos que

$$y_1 + \lambda y_2 = \overline{T}((x_1 + K) + \lambda(x_2 + K)),$$

como es biyectiva, aplicando $\overline{T}^{-1}$ a ambos lados obtenemos

$$\overline{T}^{-1}(y_1 + \lambda y_2) = (x_1 + K) + \lambda(x_2 + K).$$

Pero por la manera en que tomamos y_1, y_2, y por la biyectividad sabemos que $\overline{T}^{-1}(y_i) = x_i + K$, para $i = 1, 2$. Así concluimos que

$$\overline{T}^{-1}(y_1 + \lambda y_2) = \overline{T}^{-1}(y_1) + \lambda \overline{T}^{-1}(y_2).$$

Para mostrar que es acotada usaremos una idea similar, si $y \in R(T)$, existe un $x \in E$ tal que $y = T(x) = \overline{T}(x + K)$, luego $\overline{T}^{-1}(y) = x + K$, asi tomando la norma de E/K obtenemos

$$\begin{aligned} \|\overline{T}^{-1}(y)\| &= \|x + K\| \\ &= \inf_{k \in K} \|x - k\| \\ &\leq \|x\|. \end{aligned}$$

Por hipotesis existe un $c > 0$, tal que $c\|x\| \leq \|T(x)\|$, es decir $\|x\| \leq \frac{1}{c}\|T(x)\|$ así tenemos que

$$\|\overline{T}^{-1}(y)\| \leq \frac{1}{c}\|T(x)\|.$$

Pero $y = T(x)$, luego

$$\|\overline{T}^{-1}(y)\| \leq \frac{1}{c}\|y\|,$$

así hemos mostrado que el operador es acotado y por tanto hemos concluido que $\overline{T}$ es un isomorfismo.

ʊ̬ʊ

Ejercicio 15 Considere los espacios $C([0, 1])$ y $C^1([0, 1])$ ambos equipados con la norma del supremo $\|f\|_{L^\infty} = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$. Definimos el operador derivada $D : C^1([0, 1]) \to C([0, 1])$ dado por $f \mapsto f'$. Muestre que D es un operador no acotado, pero su grafico $G(D)$ es cerrado.