UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
FACULTAD DE CIENCIAS
ANÁLISIS FUNCIONAL

Sandra Natalia Florez Garcia
Edgar Santiago Ochoa Quiroga
María Alejandra Rodríguez Ríos

Ejercicio 2 Sea E un espacio vectorial, $g, f_1, f_2, \dots, f_k$, $(k+1)$ funcionales lineales sobre E tales que

$$\langle f_i, x\rangle = 0 \quad \forall i = 1, \dots, k \Longrightarrow \langle g, x\rangle = 0$$

Muestre que existen constante $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tales que $g = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f_i$. Es decir, g es combinación lineal de los f_i.

Demostración. Consideremos la función

$$\begin{aligned} H :& E \to \mathbb{R}^{k+1} \\ & x \mapsto (g(x), f_1(x), \dots, f_k(x)). \end{aligned}$$

Si $R(H)$ es el rango de la función H, sabemos que es un subespacio de $\mathbb{R}^{k+1}$, ademas como este es de dimensión finita y normado, $R(H)$ es cerrado, es decir $\overline{R(H)} = R(H)$. Luego observe que $x_0 = (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{k+1} \setminus R(H)$, ya que en caso contrario $(1, 0, \dots, 0) = (g(x), f_1(x), \dots, f_k(x))$ para algún $x \in E$, pero esto implica que $f_i(x) = 0$ para cada $i = 1, \dots, k$ y $g(x) = 1$, pero por la hipótesis $g(x) = 0$, una contradicción. Así si consideramos los conjuntos $R(H)$ y $\{x_0\}$, como ambos son no vacíos, convexos, disjuntos, el primero es cerrado y el segundo compacto, por la segunda forma geométrica de Hahn-Banach existe $f \in (\mathbb{R}^{k+1})^*$ tal que $f(x_0) \neq 0$ y $f(y) = 0$ para todo $y \in R(H)$.

Como los funcionales de $\mathbb{R}^{k+1}$ se identifican con el producto interno usual por un vector, sabemos que existe $\beta = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k) \in \mathbb{R}^{k+1}$ tal que $f(y) = \langle \beta, y\rangle$. donde $y \in \mathbb{R}^{k+1}$. Note que si $y = x_0$ tenemos que $\langle \beta, x_0\rangle \neq 0$, por ser el producto interno usual esto implica que $\beta_0 \neq 0$. Ahora si $y \in R(H)$, es de la forma $y = (g(x), f_1(x), \dots, f_k(x))$, para algún $x \in E$. Luego $\langle \beta, y\rangle = 0$, pero por definición de producto interno esto es

$$\beta_0 g(x) + \sum_{i=1}^{k} \beta_i f_i(x) = 0,$$

como $\beta_0 \neq 0$ podemos despejar $g(x)$, tal que

$$g(x) = \sum_{i=1}^{k} \left(-\frac{\beta_i}{\beta_0}\right) f_i(x).$$

Así como para cada $x \in E$, hay un y como el anterior, si tomamos $\lambda_i = -\dfrac{\beta_i}{\beta_0} \in \mathbb{R}$., obtenemos que

$$g = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f_i.$$

$\smile$

Ejercicio 9 Sea E un espacio de Banach de dimensión infinita. Muestre que cada vecindad débil $\star$ del origen de $E^\star$ no es acotada.

Ejercicio 11 Sea K un espacio métrico compacto que no es finito. Demuestre que $C(K)$ (con la norma del supremo $\|\cdot\|_{L^\infty}$) no es reflexivo.

Ejercicio 15 Sea E un espacio de Banach reflexivo. Sea $a : E \times E \to \mathbb{R}$ una forma bilineal que es continua, es decir, existe $M > 0$ tal que $|a(x, y)| \leq M\|x\|\|y\|$, para todo $x, y \in E$. Asuma que a es coerciva, esto es, existe $\alpha > 0$ tal que para todo $x \in E$

$$a(x, x) \geq \alpha\|x\|^2$$

(a) Dado $x \in E$, defina $A_x(y) = a(x, y)$, para todo $y \in E$. Muestre que $A_x \in E^\star$, para cada $x \in E$. Además, concluya que la función $x \mapsto A(x) = A_x$ satisface $A \in \mathcal{L}(E, E^\star)$.

(b) Muestre que A como en (a) es una función sobreyectiva.

(c) Deduzca que para cada $f \in E^\star$, existe un único $x \in E$ tal que $a(x, y) = \langle f, y\rangle$, $\forall y \in E$. Esto es, la forma bilineal coerciva a representa todo funcional lineal continuo.

Ejercicio 18 Sea E un espacio de Banach

(a) Demuestre que existe un espacio topológico compacto K y una isometría de E en $(C(K), \|\cdot\|_\infty)$.

(b) Asuma que E es separable. Entonces muestre que existe una isometría de E en l^∞ (vea el Ejercicio 1/4 para la definición del espacio).