Sandra Natalia Florez Garcia
Edgar Santiago Ochoa Quiroga
María Alejandra Rodríguez Ríos ....

Ejercicio 9 Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio vectorial normado. Dado $r > 0$, considere $C = B(0, r) = \{y \in E : \|y\| < r\}$. Determine el funcional de Minkowski de C.
Solución:
Dado que $(E, \|\cdot\|)$ es un espacio vectorial normado, se deduce que el conjunto $C = B(0, 1)$ es abierto, convexo y $0 \in C$.
Por consiguiente, el funcional de Minkowski asociado a C se define como:

$$\rho(x) = \text{ínf}\left\{\alpha > 0 : \alpha^{-1}x \in C\right\}, \qquad x \in E.$$

Ahora, sea $x \in B(0, r)$. Entonces, para todo $\alpha > 0$ tal que $\alpha^{-1}x \in C$, se tiene:

$$\|\alpha^{-1}x\| < 1.$$

Esto implica que:

$$\alpha^{-1}\|x\| < 1,$$

y despejando α, se obtiene:

$$\frac{\|x\|}{1} < \alpha.$$

En general, si $x \in B(0, r)$, tenemos:

$$\|\alpha^{-1}x\| < r \quad \Rightarrow \quad \alpha^{-1}\|x\| < r \quad \Rightarrow \quad \frac{\|x\|}{r} < \alpha.$$

Supongamos por contradicción que $\rho(x) \neq \frac{\|x\|}{r}$. Entonces debe ocurrir que:

$$\frac{\|x\|}{r} < \rho(x).$$

Tomemos el promedio entre $\frac{\|x\|}{r}$ y $\rho(x)$:

$$\beta = \frac{\frac{\|x\|}{r} + \rho(x)}{2}.$$

Este valor cumple que:

$$\frac{\|x\|}{r} < \beta < \rho(x).$$

Pero entonces:

$$\|\beta^{-1}x\| = \beta^{-1}\|x\| < \frac{r}{\|x\|} \cdot \|x\| = r,$$

lo cual implica que $\beta^{-1}x \in B(0, r)$, es decir, $\beta^{-1}x \in C$. Por tanto, $\beta \in \left\{\alpha > 0 : \alpha^{-1}x \in C\right\}$.
Esto contradice el hecho de que $\rho(x)$ es la ínfima de ese conjunto, ya que $\beta < \rho(x)$.
Por lo tanto, concluimos que:

$$\rho(x) = \frac{\|x\|}{r}.$$

Ejercicio 12 Sea E un espacio vectorial normado.

(i) Sea $W \subset E$ un subespacio propio de E y $x_0 \in E \setminus W$, tal que $d := \mathtt{dist}(x_0, W) > 0$. Demuestre que existe $f \in E^*$ tal que $f = 0$ restricto a W, $f(x_0) = d$ y $\|f\|_{E^*} = 1$.

(ii) Sea $W \subset E$ un subespacio propio cerrado de E y $x_0 \in E \setminus W$. Demuestre que existe $f \in E^*$ tal que $f = 0$ restricto a W y $f(x_0) \neq 0$.

Ejercicio 13 Sean $(E, \|\cdot\|)$ y $(F, \|\cdot\|)$ espacios de Banach.

(i) Sea $K \subset E$ un subespacio cerrado de E. Definimos la relacion sobre E dada por $x \sim_K y$ si y solo si $x - y \in K$.

  (a) Muestre que $\sim_K$ es una relacion de equicalencia sobre E.

  (b) Muestre que el espacio cociente E/K es un espacio de Banach con la norma

$$\|x + K\|_{E/K} = \text{ínf} \|x - k\|, \quad x \in E.$$

  Es decir, debe verificar que el espacio cociente es un espacio vectorial, normado, cuya norma lo hace completo.

(ii) Sea $T \in L(E, F)$ tal que existe $c > 0$ para el cual

$$\|Tx\|_F \geq c\|x\|_E,$$

para todo $x \in E$. Si K denota el espacio nulo de T y $R(T)$ el rango de T, muestre que $\overline{T} : E/K \to R(T)$ dada por $\overline{T}(x + K) = T(x)$, $x \in E$, esta bien definida y es un isomorfismo. Esto es $\overline{T} \in L(E/K, R(T))$ y $\overline{T}^{-1} \in L(R(T), E/K)$.

Ejercicio 15 Considere los espacios $C([0, 1])$ y $C^1([0, 1])$ ambos equipados con la norma del supremo $\|f\|_{L^\infty} = \sup\limits_{x \in [0,1]} |f(x)|$. Definimos el operador derivada $D : C^1([0, 1]) \to C([0, 1])$ dado por $f \mapsto f'$. Muestre que D es un operador no acotado, pero su grafico $G(D)$ es cerrado.