Sandra Natalia Florez Garcia
Edgar Santiago Ochoa Quiroga
María Alejandra Rodríguez Ríos

Ejercicio 9 Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio vectorial normado. Dado $r > 0$, considere $C = B(0, r) = \{y \in E : \|y\| < r\}$. Determine el funcional de Minkowski de C.

Solución:

Dado que $(E, \|\cdot\|)$ es un espacio vectorial normado, se deduce que el conjunto $C = B(0, r)$ es abierto, convexo y $0 \in C$.

Por consiguiente, el funcional de Minkowski asociado a C se define como:

$$\rho(x) = \text{ínf}\left\{\alpha > 0 : \alpha^{-1}x \in C\right\}, \qquad x \in E.$$

Ahora, sea $x \in B(0, r)$. Entonces, para todo $\alpha > 0$ tal que $\alpha^{-1}x \in C$, se tiene:

$$\|\alpha^{-1}x\| < r.$$

Esto implica que:

$$\alpha^{-1}\|x\| < r,$$

y despejando α, se obtiene:

$$\frac{\|x\|}{r} < \alpha.$$

En general, si $x \in B(0, r)$, tenemos:

$$\|\alpha^{-1}x\| < r \quad \Rightarrow \quad \alpha^{-1}\|x\| < r \quad \Rightarrow \quad \frac{\|x\|}{r} < \alpha.$$

Supongamos por contradicción que $\rho(x) \neq \frac{\|x\|}{r}$. Entonces debe ocurrir que:

$$\frac{\|x\|}{r} < \rho(x).$$

Tomemos el promedio entre $\frac{\|x\|}{r}$ y $\rho(x)$:

$$\beta = \frac{\frac{\|x\|}{r} + \rho(x)}{2}.$$

Este valor cumple que:

$$\frac{\|x\|}{r} < \beta < \rho(x).$$

Pero entonces:

$$\|\beta^{-1}x\| = \beta^{-1}\|x\| < \frac{r}{\|x\|} \cdot \|x\| = r,$$

lo cual implica que $\beta^{-1}x \in B(0, r)$, es decir, $\beta^{-1}x \in C$. Por tanto, $\beta \in \left\{\alpha > 0 : \alpha^{-1}x \in C\right\}$.

Esto contradice el hecho de que $\rho(x)$ es la ínfimo de ese conjunto, ya que $\beta < \rho(x)$.

Por lo tanto, concluimos que:

$$\rho(x) = \frac{\|x\|}{r}.$$

Ejercicio 12 Sea E un espacio vectorial normado.

(i) Sea $W \subset E$ un subespacio propio de E y $x_0 \in E \setminus W$, tal que $d := \mathtt{dist}(x_0, W) > 0$. Demuestre que existe $f \in E^*$ tal que $f = 0$ restricto a W, $f(x_0) = d$ y $\|f\|_{E^*} = 1$.

(ii) Sea $W \subset E$ un subespacio propio cerrado de E y $x_0 \in E \setminus W$. Demuestre que existe $f \in E^*$ tal que $f = 0$ restricto a W y $f(x_0) \neq 0$.

Ejercicio 13 Sean $(E, \|\cdot\|)$ y $(F, \|\cdot\|)$ espacios de Banach.

(i) Sea $K \subset E$ un subespacio cerrado de E. Definimos la relación sobre E dada por $x \sim_K y$ si y solo si $x - y \in K$.

(a) Muestre que $\sim_K$ es una relacion de equivalencia sobre E.

Demostración. Dado $x \in E$, como K es subespacio, $x - x = 0 \in K$, esto implica que $x \sim_K x$, mostrando así la reflexividad.

Dados $x, y \in E$, suponga que tenemos que $x \sim_K y$, luego $x - y \in K$, nuevamente como K es subespacio, es cerrado por multiplicacion escalar, así $-(x - y) \in K$, pero $-(x - y) = y - x$, así por definición de la relación tenemos que $y \sim_K x$, mostrando así la simetría.

Por ultimo sean $x, y, z \in E$, con $x \sim_K y$ y $y \sim_K z$, por definición $x - y \in K$ y $y - z \in K$, y como K es subespacio es cerrado para la suma, así tenemos que $(x - y) + (y - z) \in K$, pero $(x - y) + (y - z) = x - z$, así tenemos que $x \sim_K z$, así la relación es transitiva. Con esto podemos concluir que la relación es de equivalencia.

ʊ̬ʊ

(b) Muestre que el espacio cociente E/K es un espacio de Banach con la norma

$$\|x + K\|_{E/K} = \inf_{k \in K} \|x - k\|, \quad x \in E.$$

Es decir, debe verificar que el espacio cociente es un espacio vectorial, normado, cuya norma lo hace completo.

Demostración. Primero notemos que las operaciones definidas sobre el conjunto E/K son las siguientes

$$(x + K) + (y + K) = (x + y) + K,$$
$$\lambda(x + K) = \lambda x + K.$$

Las propiedades de espacio vectorial para E/K, se heredan del hecho de que E ya es espacio vectorial, solo bastaría verificar que si están bien definidas estas operaciones. Si $x_1 + K = x_2 + K$ y $y_1 + K = y_2 + K$, tenemos que $x_1 - x_2 \in K$ y $y_1 - y_2 \in K$, pero como es subespacio la suma esta, así $(x_1 + y_1) - (x_2 + y_2) \in K$, así $(x_1 + y_1) + K = (x_2 + y_2) + K$, luego la suma esta bien definida. De manera similar, si $x_1 - x_2 \in K$, tenemos que al multiplicar por un escalar también esta en K, esto es $\lambda x_1 - \lambda x_2 \in K$, así $\lambda x_1 + K = \lambda x_2 + K$.

Ahora veamos que la norma definida en el enunciado, efectivamente es norma del espacio E/K. Primero esta norma esta bien definida ya que si $x + K = y + K$, eso quiere decir que $x - y \in K$, luego

$$\begin{aligned} \|x + K\| &= \inf_{k \in K} \|x - k\| \\ &= \inf_{k_1 \in K} \|x - (k_1 + x - y)\| \\ &= \inf_{k_1 \in K} \|y - k_1\| \\ &= \|y + K\|. \end{aligned}$$

Luego como $\|x - k\| \geq 0$, para todo $k \in K$, es claro que

$$\|x + K\| = \inf_{k \in K} \|x - k\| \geq 0,$$

ya que estamos tomando el ínfimo de un conjunto que esta acotado inferiormente por 0 y $x \in E$ fue tomado arbitrariamente.

Ahora supongamos que $x + K = 0 + W$, luego $x \in W$, así tenemos que

$$0 \leq \|x + K\| = \inf_{k \in K} \|x - k\| \leq \|x - x\| = 0,$$

Mostrando que el neutro tiene norma 0. Ahora si suponemos que $\|x + K\| = 0$, como la norma es un ínfimo tenemos que existe una sucesión de puntos $k_n \in K$ tal que $\|x - k_n\| \to 0$, esto quiere decir que la sucesión k_n converge a x, pero K es cerrado por hipótesis, así $x \in K$, esto quiere decir que $x + K = 0 + K$. Ahora si $\lambda = 0$, es claro que

$$\|\lambda(x + K)\| = \|0 + K\| = 0 = 0 \cdot \|x + K\| = |\lambda|\|x + K\|.$$

Ahora si $\lambda \neq 0.$, tenemos que

$$\begin{aligned} \|\lambda(x + K)\| &= \|\lambda x + K\| \\ &= \inf_{k \in K} \|\lambda x - k\| \\ &= \inf_{k \in K} \|\lambda(x - \lambda^{-1} k)\| \\ &= |\lambda| \inf_{k \in K} \|x - \lambda^{-1} k\| \\ &= |\lambda| \inf_{k_1 \in K} \|x - k_1\| \quad (k_1 = \lambda^{-1} k \in K) \\ &= |\lambda|\|x + K\| \end{aligned}$$

Note que podemos hacer esto ya que K es un subespacio. Por ultimo veamos la desigualdad triangular,

$$\begin{aligned}
\|(x+K)+(y+K)\| &= \|(x+y)+K\| \\
&= \inf_{k\in K} \|x+y-k\| \\
&= \inf_{k_1,k_2\in K} \|x+y-(k_1+k_2)\| \\
&\leq \inf_{k_1,k_2\in K} \{\|x-k_1\| + \|y-k_2\|\} \\
&= \inf_{k_1\in K} \|x-k_1\| + \inf_{k_2\in K} \|y-k_2\| \\
&= \|x+K\| + \|y+K\|.
\end{aligned}$$

Note que nuevamente usamos el hecho de que K es subespacio, para escribir a $k = k_1 + k_2$. Así concluimos que E/K es normado. Faltaría ver que el espacio es Banach.

Consideremos $\{x_n + K\} \subset E/K$, una sucesión de Cauchy, luego observe que nos podemos construir una subsucesión tal que

$$\|(x_{n_k} - x_{n_{k+1}}) + K\|.$$

Esto lo podemos hacer ya que si $\varepsilon = \frac{1}{2}$, como la sucesión es Cauchy

$$\|(x_n - x_m) + K\| < \frac{1}{2},$$

para $n, m \geq n_1 \in \mathbb{Z}^+$. De manera similar para $\varepsilon = \frac{1}{4}$, existe $n_2 \in \mathbb{Z}^+$ tal que si $n, m \geq n_2$,

$$\|(x_n - x_m) + K\| < \frac{1}{4},$$

Note que esta cantidad es menos a $\frac{1}{2}$, entonces podemos asumir $n_2 > n_1$, note que por un argumento inductivo, conseguimos unos $n_1 < n_2 < \ldots < n_k$ tal que si $n, m \geq n_k$, tenemos que

$$\|(x_n - x_m) + K\| < \frac{1}{2^k}.$$

En particular note que para n_k, n_{k+1} tenemos que

$$\|(x_{n_k} - x_{n_{k+1}}) + K\| < \frac{1}{2^k}.$$

Ahora a partir de esta subsucesión $\{x_{n_k} + K\}$ Podemos construir una sucesión $\{y_k\}$ tal que cada $y_k \in x_{n_k} + K$, de la siguiente manera. Por caracterización del ínfimo para $k = 1$, tenemos que si tomamos $\delta = \frac{1}{2} - \|(x_{n_1} - x_{n_2}) + K\| > 0$, tenemos que existe $w_2 \in K$ tal que

$$\|x_{n_1} - x_{n_2} - w_2\| < \|(x_{n_1} - x_{n_2}) + K\| + \delta = \frac{1}{2}.$$

Así si tomamos $y_1 = x_{n_1}$ y $y_2 = x_{n_2} + w_2$, de momento cumplimos que $y_1 \in x_{n_1} + K$ y $y_2 \in x_{n_2} + K$. Luego para el caso de $k = 2$ observe que podemos hacer que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2^2} &> \|(x_{n_2} - x_{n_3}) + K\| \\ &= \inf_{w \in K} \|x_{n_2} - x_{n_3} - w\| \\ &= \inf_{w \in K} \|x_{n_2} + w_2 - w_2 - x_{n_3} - w\| \\ &= \inf_{\overline{w} \in K} \|x_{n_2} + w_2 - x_{n_3} - \overline{w}\| \\ &= \inf_{\overline{w} \in K} \|y_2 - x_{n_3} - \overline{w}\|.\end{aligned}$$

Note que esto lo podemos hacer ya que $w_2 \in K$ y este es un subespacio. Así de manera análoga podemos concluir la existencia de un $w_3 \in K$ tal que

$$\|y_2 - x_{n_3} - w_3\| < \frac{1}{2^2}.$$

Así tomando $y_3 = x_{n_3} + w_3 \in x_{n_3} + K$, nos damos cuenta que de manera inductiva podemos tomar la sucesión $\{y_k\}$ deseada.
Como
Ahora como la serie geométrica converge absolutamente sabemos que dado un $\varepsilon > 0$, existe un N para el cual

$$\sum_{i=N}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \varepsilon.$$

Tomando $n, m \leq N$, si asumimos sin perdida de generalidad que $n > m$ note que

$$\begin{aligned}\|y_n - y_m\| &\leq \sum_{i=m}^{n-1} \|y_{i+1} - y_i\| \\ &< \sum_{i=m}^{n-1} \frac{1}{2^i} \\ &< \sum_{i=N}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \varepsilon.\end{aligned}$$

Así concluimos que $\{y_k\}$ es de cauchy, y como esta es una sucesión de términos en E que es de Banach, sabemos que $y_k \to y$, luego debido a que la norma es un infimo

$$\|x_{n-k} + K - (y + K)\| = \|(x_{n_k} - y) + K\| \leq \|y_k - y\| \to 0.$$

Así concluimos que la subsucesión es convergente y por tanto como la secuencia original era de cauchy podemos concluir que $x_n + K \to y + K$. Mostrando así que E/K es de Banach.

ʊ̬ʊ

(ii) Sea $T \in L(E, F)$ tal que existe $c > 0$ para el cual

$$\|Tx\|_F \geq c\|x\|_E,$$

para todo $x \in E$. Si K denota el espacio nulo de T y $R(T)$ el rango de T, muestre que $\overline{T} : E/K \to R(T)$ dada por $\overline{T}(x+K) = T(x)$, $x \in E$, esta bien definida y es un isomorfismo. Esto es $\overline{T} \in L(E/K, R(T))$ y $\overline{T}^{-1} \in L(R(T), E/K)$.

Demostración. Como el dominio de $\overline{T}$ son clases de equivalencia tenemos que mostrar que la aplicación esta bien definida. Consideremos $x + K = y + K$, es decir $x, y \in E$ son dos representantes distintos de la misma clase. Por definición $\overline{T}(x+K) = T(x)$ y $\overline{T}(y+K) = T(y)$, luego como T es lineal

$$\begin{aligned}\overline{T}(x+K) - \overline{T}(y+K) &= T(x) - T(y)\\ &= T(x-y).\end{aligned}$$

Como supusimos que clases son iguales, eso quiere decir que $x - y \in K$, pero K es el espacio nulo de T, así $T(x-y) = 0$, mostrando así que

$$\overline{T}(x+K) = \overline{T}(y+K),$$

por lo tanto esta bien definida. Ahora la aplicación claramente es sobreyectiva ya que dado $y \in R(T)$, existe $x \in E$ tal que $y = T(x) = \overline{T}(x+K)$, así cada y tiene preimagen. Para la inyectividad se sigue un argumento muy parecido a mostrar que esta bien definida. Dados $x + K, y + K$, si $\overline{T}(x+K) = \overline{T}(y+K)$, esto quiere decir que $T(x) = T(y)$, por linealidad $T(x-y) = 0$, así $x - y \in K$, concluyendo que $x + K = y + K$. Para ver que es isomorfismo faltaría mostrar que la aplicación y su inversa son lineales y acotadas. Primero $\overline{T}$ es lineal ya que

$$\begin{aligned}\overline{T}((x+K) + \lambda(y+K)) &= \overline{T}((x+\lambda y) + K)\\ &= T(x+\lambda y)\\ &= T(x) + \lambda T(y)\\ &= \overline{T}(x+K) + \lambda\overline{T}(y+K).\end{aligned}$$

Note que se tiene por la linealidad de T. Ademas es acotada ya que

$$\begin{aligned}\|\overline{T}(x+K)\| &= \|T(x)\|\\ &\leq M\|x\|\\ &= M\|x-k+k\|\\ &\leq M\|x-k\| + M\|k\|.\end{aligned}$$

Donde $M > 0$, es una constante que depende de x. Esto se tiene ya que T es acotada, ahora por la monoticidad del ínfimo, podemos tomarlo sobre los $k \in K$, como el lado izquierdo no depende de k tenemos que

$$\begin{aligned}\|\overline{T}(x+K)\| &\leq \inf_{k\in K}\{M\|x-k\| + M\|k\|\}\\ &= M \inf_{k\in K} \|x-k\| + M \inf_{k\in K} \|k\|\\ &= M \inf_{k\in K} \|x-k\|\\ &= M\|x+K\|.\end{aligned}$$

Así hemos mostrado que es acotado. Ahora probemos las mismas dos propiedades para la aplicación $\overline{T}^{-1}$. Para la linealidad tenemos que dados $y_1, y_2 \in R(T)$, existen $x_1, x_2 \in E$, tales que $y_i = T(x_i) = \overline{T}(x_i + K)$, para $i = 1, 2$. Luego por la linealidad ya probada tenemos que

$$y_1 + \lambda y_2 = \overline{T}((x_1 + K) + \lambda(x_2 + K)),$$

como es biyectiva, aplicando $\overline{T}^{-1}$ a ambos lados obtenemos

$$\overline{T}^{-1}(y_1 + \lambda y_2) = (x_1 + K) + \lambda(x_2 + K).$$

Pero por la manera en que tomamos y_1, y_2, y por la biyectividad sabemos que $\overline{T}^{-1}(y_i) = x_i + K$, para $i = 1, 2$. Así concluimos que

$$\overline{T}^{-1}(y_1 + \lambda y_2) = \overline{T}^{-1}(y_1) + \lambda \overline{T}^{-1}(y_2).$$

Para mostrar que es acotada usaremos una idea similar, si $y \in R(T)$, existe un $x \in E$ tal que $y = T(x) = \overline{T}(x + K)$, luego $\overline{T}^{-1}(y) = x + K$, asi tomando la norma de E/K obtenemos

$$\begin{aligned} \|\overline{T}^{-1}(y)\| &= \|x + K\| \\ &= \inf_{k \in K} \|x - k\| \\ &\leq \|x\|. \end{aligned}$$

Por hipotesis existe un $c > 0$, tal que $c\|x\| \leq \|T(x)\|$, es decir $\|x\| \leq \frac{1}{c}\|T(x)\|$ así tenemos que

$$\|\overline{T}^{-1}(y)\| \leq \frac{1}{c}\|T(x)\|.$$

Pero $y = T(x)$, luego

$$\|\overline{T}^{-1}(y)\| \leq \frac{1}{c}\|y\|,$$

así hemos mostrado que el operador es acotado y por tanto hemos concluido que $\overline{T}$ es un isomorfismo.

ʊ̬ʊ

Ejercicio 15 Considere los espacios $C([0,1])$ y $C^1([0,1])$ ambos equipados con la norma del supremo $\|f\|_{L^\infty} = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$. Definimos el operador derivada $D : C^1([0,1]) \to C([0,1])$ dado por $f \mapsto f'$. Muestre que D es un operador no acotado, pero su grafico $G(D)$ es cerrado.

Demostración.
Supongamos, por contradicción, que D es un operador acotado. Entonces existe una constante $M > 0$ tal que,

$$\|f'\| = \|Df\| \leq M\|f\| \quad \text{para todo } f \in C^1([0,1]).$$

Definimos una sucesión de funciones $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dada por,

$$f_n : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = x^n.$$

Claramente $f_n \in C^1([0,1])$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Además, se cumple que,

$$\|f_n\| = \sup_{x\in[0,1]} |x^n| = 1,$$
$$\|Df_n\| = \sup_{x\in[0,1]} |nx^{n-1}| = n.$$

Entonces:

$$\|Df_n\| = n \leq M\|f_n\| = M.$$

Esto implica que $n \leq M$ para todo n, lo cual es una contradicción, ya que siempre existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > M$. Por lo tanto, el operador D no es acotado.

Ahora veamos que, aunque el operador D no es acotado, su gráfico

$$G(D) = \left\{(f, f') : f \in C^1([0,1]) \text{ y } f' \in C([0,1])\right\}$$

sí es un conjunto cerrado.
Para demostrarlo, tomemos una sucesión $\{(f_n, f'_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \subset G(D)$ tal que

$$(f_n, f'_n) \to (f, g)$$

en la norma del gráfico, es decir, en la norma

$$\|(f_n, f'_n) - (f, g)\|_{G(D)} = \|f_n - f\|_{L^\infty} + \|f'_n - g\|_{L^\infty}.$$

Esto significa que, para todo $\varepsilon > 0$, existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n > N$, entonces

$$\|f_n - f\|_{L^\infty} + \|f'_n - g\|_{L^\infty} < \varepsilon.$$

Por lo tanto,

$$f_n \to f \quad \text{uniformemente,} \quad \text{y} \quad f'_n \to g \quad \text{uniformemente.}$$

Ahora, dado que cada f_n es de clase $C^1([0,1])$, y que tanto f_n como f'_n convergen uniformemente, se sigue que $f \in C^1([0,1])$ y que $f' = g$, con $g \in C([0,1])$. Es decir, la función límite f es derivable y su derivada es g, que es continua. Esto implica que $(f, f') \in G(D)$.
Por lo tanto, el gráfico $G(D)$ es un conjunto cerrado.

$\square$