UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
FACULTAD DE CIENCIAS
TEORIA DE CODIFICACIÓN

Edgar Santiago Ochoa Quiroga
María Alejandra Rodríguez Ríos

Ejercicio 1 Considere que una fuente sin memoria emite los símbolos del alfabeto $S = \{a, b, c\}$. Se sabe que la distribución de probabilidad de los símbolos en la salida del canal es

$$P_Y = \{0.6, 0.3, 0.1\}.$$

Los símbolos entran a un canal ruidoso que puede cambiar unos símbolos en otros de acuerdo a la distribución de probabilidad que muestra la siguiente tabla de probabilidades condicionales $p(x|y)$:

entra\sale	a	b	c
a	0.95	0.03	0.02
b	0.03	0.95	0.02
c	0.02	0.02	0.96

Denote por X y Y las variables aleatorias que modelan los símbolos que salen de la fuente y del canal respectivamente. Resuelva las siguientes preguntas:

A . Determine las entropías de la fuente y el canal.

B . Determine la entropía del sistema.

C . Determine e interprete las entropías condicionales $H(X|Y)$ y $H(Y|X)$.

D . Calcule la información común entre la entrada y la salida del sistema.

E . Determine cuánta información se perdió dentro del canal.

F . Determine la pérdida de información por símbolo.

Ejercicio 2
Considere una fuente $\mathcal{F}$ con una distribución de probabilidad $\mathcal{P} = \{0{,}20, 0{,}15, 0{,}15, 0{,}10, 0{,}10, 0{,}30\}$ construya un código con longitud promedio de palabra L, tal que

$$H(\mathcal{F}) \leq L \leq H(\mathcal{F}) + 1.$$

Ejercicio 3

A . Demuestre que para tres variables aleatorias X, Y y Z que toman valores sobre conjuntos finitos siempre se tiene que

$$H(X, Y) + H(X, Z) + H(Y, Z) \geq 2H(X, Y, Z).$$

Demostración. Para poder probar esa propiedad, primero probaremos lo siguiente, puesto que es importante para nuestra prueba

$$H(X, Y, Z) = H(X) + H(Y|X) + H(Z|X, Y). \tag{1}$$

La demostración se sigue de lo siguiente

$$\begin{aligned}
H(X, Y, Z) &= -\sum_{x,y,z} p(x, y, z) \log p(x, y, z), \\
&= -\sum_{x,y,z} p(x, y, z) \log \left(\frac{p(x, y, z)}{p(x)p(x, y)p(y)p(x)} \right), \\
&= -\sum_{x,y,z} p(x, y, z) \log p(x) - \sum_{x,y,z} p(x, y, z) \log p(y|x) - \sum_{x,y,z} p(x, y, z) \log p(z|x, y), \\
&= -\sum_{x} p(x) \log p(x) - \sum_{x,y} p(x, y) \log p(y|x) - \sum_{x,y,z} p(x, y, z) \log p(z|x, y), \\
&= H(X) + H(Y|X) + H(Z|X, Y).
\end{aligned}$$

De manera análoga tenemos que

$$H(X, Y, Z) = H(Y) + H(Y|Z) + H(X|Y, Z). \tag{2}$$

Adicionalmente, tenemos que probar que,

$$H(X, Y) = H(X) + H(Y|X) \tag{3}$$

Esta prueba se tiene a partir de la siguiente cuenta,

$$\begin{aligned}
H(X, Y) &= -\sum_{x,y} p(x, y) \log p(x, y) \\
&= -\sum_{x,y} p(x, y) \log (p(x)p(y|x)) \\
&= -\sum_{x,y} p(x, y) \log p(x) - \sum_{x,y} p(x, y) \log p(y|x) \\
&= -\sum_{x} p(x) \log p(x) - \sum_{x,y} p(x, y) \log p(y|x) \\
&= H(X) + H(Y|X).
\end{aligned}$$

de manera similar, se puede demostrar que

$$H(X, Y) = H(Y) + H(X|Y). \tag{4}$$

por último, debemos probar estas dos propiedades

$$H(X|Y) \leq H(X), \tag{5}$$
$$H(X|Y, Z) \leq H(X|Z). \tag{6}$$

Para probar esas propiedades tenemos que usar la convexidad de la función logaritmo cuando tiene base mayor que 1, es decir, que

$$\log\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right) \geq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \log(x_i), .$$

donde $\alpha_i > 0$ y $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$; así, (5) se sigue de

$$\begin{aligned}
H(X) - H(X|Y) &= -\sum_{x,y} p(x,y) \log p(x) + \sum_{x,y} p(x,y) \log p(x|y) \\
&= -\sum_{x,y} p(x,y) \log \frac{p(x)}{p(x|y)} \\
&\geq -\log \sum_{x,y} p(x,y) \frac{p(x)}{p(x|y)} \\
&\geq -\log \sum_{x,y} p(x)p(y) \\
&= -\log(1) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Por lo cual (5) queda probado.
Ahora bien, para probar (6) seguimos lo siguiente

$$\begin{aligned}
H(X|Z) - H(X|Y,Z) &= H(X,Z) - H(Z) - H(X|Y,Z) \quad \text{por (3)} \\
&= -\sum_{x,y,z} p(x,y,z) \log p(x,z) + \sum_{x,y,z} p(x,y,z) \log p(z) \\
&\quad + \sum_{x,y,z} p(x,y,z) \log p(x|y,z) \\
&= -\sum_{x,y,z} p(x,y,z) \log \frac{p(x,z)}{p(z)p(x|y,z)} \\
&= -\sum_{x,y,z} p(x,y,z) \log \frac{p(x,z)p(y,z)}{p(z)p(x,y,z)} \\
&\geq -\log \sum_{x,y,z} \frac{p(x,y,z)p(x,z)p(y,z)}{p(z)p(x,y,z)} \\
&= -\log \sum_{x,z} \frac{p(x,z)}{p(z)} \sum_{y} p(y,z) \\
&= -\log \sum_{x,z} \frac{p(x,z)}{p(z)} p(z) \\
&= -\log(1) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Así, (6) queda probado, por lo que utilizando las propiedades demostradas anteriormente, podemos decir que

$$\begin{aligned}
2H(X,Y,Z) &= H(X,Y,Z) + H(X,Y,Z) \\
&= H(X) + H(Y|X) + H(Z|X,Y) + H(Y) + H(Y|Z) + H(X|Y,Z) \quad \text{por (1) y (2)} \\
&= H(X,Y) + H(Y,Z) + H(Z|X,Y) + H(X|Y,Z) \quad \text{por (3)} \\
&\leq H(X,Y) + H(Y,Z) + H(Z|Y) + H(X|Z) \quad \text{por (6)} \\
&\leq H(X,Y) + H(Y,Z) + H(Z) + H(X|Z) \quad \text{por (5)} \\
&= H(X,Y) + H(Y,Z) + H(X,Z) \quad \text{por (4).}
\end{aligned}$$

Concluyendo lo que queriamos demostrar.

□

B . Demuestre que para cualquier tripla de variables aleatorias se cumple que

$$I(X;Y|Z) = H(X|Z) + H(Y|Z) - H(X,Y|Z).$$

Demostración. Para poder demostrar esa propiedad, es necesario realizar dos demostraciones preliminares, la primera es probar que para 3 variables aleatorias arbitrarias se cumple que

$$H(X,Y,Z) = H(X) + H(Y,Z|X), \tag{7}$$

esta afirmación se tiene gracias a lo siguiente

$$\begin{aligned}
H(X,Y,Z) &= -\sum_{x,y,z} p(x,y,z) \log p(x,y,z) \\
&= -\sum_{x,y,z} p(x,y,z) \log \left(p(x)p(y,z|x)\right) \\
&= -\sum_{x,y,z} p(x,y,z) \log p(x) - \sum_{x,y,z} p(x,y,z) \log p(y,z|x) \\
&= H(X) + H(Y,Z|X).
\end{aligned}$$

La segunda propiedad que tenemos que probar es

$$I(X;Y|Z) = H(X|Z) - H(X|Y,Z), \tag{8}$$

la prueba de esto se sigue de

$$\begin{aligned}
I(X;Y|Z) &= -\sum_{x,y,z} p(x,y,z) \log p(x,y|z) \\
&= H(X|Z) + \sum_{x,y,z} p(x|z)p(y|z)p(x,y,z) \log p(x|z) + \sum_{x,y,z} p(x,y,z) \log \left(\frac{p(x,y,z)}{p(x,y|z)}\right) \\
&= H(X|Z) - H(X|Y,Z).
\end{aligned}$$

por lo anterior, podemos decir que

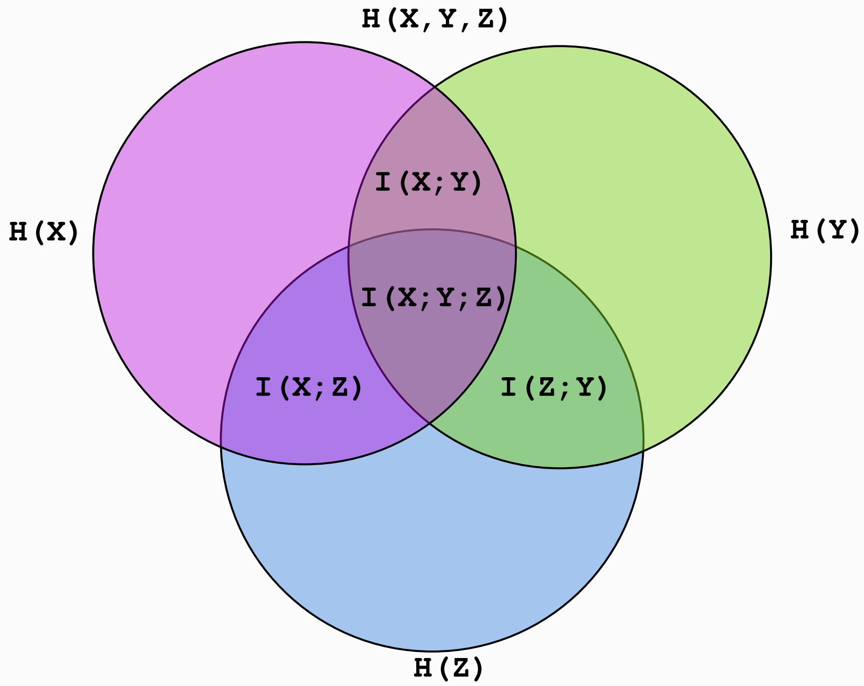
$$\begin{aligned} I(X;Y|Z) &= H(X|Z) - H(X|Y,Z) \quad \text{por (8)} \\ &= H(X|Z) - (H(X,Y,Z) - H(Y,Z)) \quad \text{por el numeral anterior y el (3)} \\ &= H(X|Z) - (H(X,Y|Z) + H(Z)) + H(Y,Z) \quad \text{por (7)} \\ &= H(X|Z) + H(Y|Z) - H(X,Y|Z) \quad \text{por (4).} \end{aligned}$$

□

C . Proponga una definición para la información común de tres variables $I(X;Y;Z)$ y demuestre que

$$I(X;Y;Z) = I(X;Y) - I(X;Y|Z).$$

Demostración. Teniendo en cuenta que $I(X;Y;Z)$ se refiere a la información que hay en común entre las 3 variables aleatorias, podemos aterrizar esto a una noción un poco más conjuntista para dar nuestra definición, de acuerdo con lo visto en clase sabemos que $H(X;Y;Z)$ se refiere a la entropía total del sistema, y $H(X), H(Y), H(Z)$ se refiere a las entropías de cada uno de los símbolos en un momento específico, además $I(X;Y), I(X;Z)$ y $I(Y;Z)$ se refieren a la información común entre variables aleatorias, graficando esto en un diagrama de Venn, podemos definir de manera más intuitiva $I(X;Y;Z)$



de acuerdo con lo anterior tomamos a $I(X;Y;Z)$ como

$$I(X;Y;Z) = H(X,Y,Z) - H(X) - H(Y) - H(Z) + I(X;Y) + I(Y;Z) + I(Z;X).$$

Para probar que

$$I(X;Y;Z) = I(X;Y) - I(X;Y|Z),$$

primero debemos probar algunas propiedades adicionales a las que ya hemos mostrado anteriormente, la primera de ellas es que

$$I(X;Y|Z) = H(X|Z) - H(X|Y,Z) \tag{9}$$

Para esto seguimos los siguientes cálculos

$$\begin{aligned}
I(X;Y|Z) &= -\sum_{x,y,z} p(x,y,z)\log\frac{p(x,y|z)}{p(x|z)p(y|z)} \\
&= -\sum_{x,y,z} p(x,y,z)\log p(x|z) + \sum_{x,y,z} p(x,y,z)\log\frac{p(x,y|z)}{p(y|z)} \\
&= H(X|Z) + \sum_{x,y,z} p(x,y,z)\log\frac{p(x,y,z)}{p(z)}\cdot\frac{p(y,z)}{p(z)} \\
&= H(X|Z) + \sum_{x,y,z} p(x,y,z)\log p(x|y,z) \\
&= H(X|Z) - H(X|Y,Z).
\end{aligned}$$

La segunda propiedad que probaremos es,

$$I(X;Y|Z) = H(X|Z) + H(Y|Z) - H(Z) - H(X,Y,Z), \tag{10}$$

para probar esta propiedad usaremos un ejercicio anterior y algunas de las propiedades probadas anteriormente,

$$\begin{aligned}
I(X;Y|Z) &= H(X|Z) - H(X|Y,Z) \\
&= (H(X,Z) - H(Z)) - (H(X,Y,Z) - H(Y,Z)) \\
&= H(X,Z) + H(Y,Z) - H(Z) - H(X,Y,Z).
\end{aligned}$$

Otra propiedad que tenemos que probar es,

$$I(X;Y) = H(X) + H(Y) - H(X,Y). \tag{11}$$

Utilizando las propiedades probadas anteriormente podemos decir lo siguiente

$$\begin{aligned}
I(X;Y) &= H(X) - H(X|Y) \\
&= H(X) - (H(X,Y) - H(Y)) \\
&= H(X) + H(Y) - H(X,Y).
\end{aligned}$$

Ahora si tenemos todas la herramientas para hacer la prueba, tomamos

$$\begin{aligned} I(X;Y) - I(X;Y|Z) &= H(X) + H(Y) - H(X,Y) - (H(X,Z) + H(Y,Z) - H(Z) - H(X,Y,Z)) \\ &= H(X,Y,Z) - H(X,Y) - H(X,Z) - H(Y,Z) + H(X) + H(Y) + H(Z) \\ &= H(X,Y,Z) + I(X;Y) + I(X;Z) + I(Y,Z) - H(X) - H(Y) - H(Z) \\ &= I(X;Y;Z) \end{aligned}$$

□

Ejercicio 4 Pruebe que para todo $n \geq 2$ se tiene que

$$H(X_1, \ldots, X_n) \leq \sum_{i=1}^{n} H(X_i | X_j, j \neq i).$$

Ejercicio 5

Suponga que una fuente genera la secuencia típica aabbcccaadeeeaabcaadcdabbededededecacaeeddcc-codcdeaabedbb. Determine un par de códigos Tunstall sobre alfabetos binarios y triarios, indique los diccionarios en cada caso. Cuál de los códigos trabajaría más eficiente?