UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
FACULTAD DE CIENCIAS
ANÁLISIS FUNCIONAL

Sandra Natalia Florez Garcia
Edgar Santiago Ochoa Quiroga
María Alejandra Rodríguez Ríos ....

Ejercicio 1

(I) Sea $\mathbb{R}$ con la σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

(a) Dado $x_0 \in \mathbb{R}$, considere δ_{x_0} la medida de Dirac centrada en x_0 dada por: $\delta_{x_0}(A) = 1$ si $x_0 \in A$, y $\delta_{x_0}(A) = 0$ si $x_0 \notin A$, para cada $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Muestre que δ_{x_0} es una medida.

Demostración. Es claro que $\delta_{x_0} : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0, \infty]$ ya que las únicas imágenes de la función son 0 y 1. Ahora comprobemos las dos condiciones.

Si $A = \varnothing$, claramente $x_0 \notin A$, luego por la definición $\delta_{x_0}(A) = 0$, como queríamos. Ahora, si $x_0 \in \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, entonces $x_0 \in A_j$ para algún j único, puesto que los conjuntos son disjuntos. Luego,

$$\delta_{\chi_0}(A_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

así,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \delta_{\chi_0}(A_i) = 1 = \delta_{\chi_0}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right).$$

por lo que δ es una medida.

(b) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función medible. Muestre que

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) d\delta_{x_0} = f(x_0)$$

Demostración. Para probar esto primero veamos que esto se tiene para funciones simples positivas, sea $f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}(x)$, donde

$$\chi_{A_i}(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in A_i, \text{ con } a_i \geq 0, A_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \\ 0, & \text{si } x \notin A_i \end{cases}$$

para todo $i = 1, \ldots, n$ y $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$.
Por definición,

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\, d\delta_x = \int_{\mathbb{R}} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}(x)\right) d\delta_x = \sum_{i=1}^{n} a_i \delta_x(A_i).$$

Como $A_i \cap A_j = \emptyset$ para $j \neq i$, entonces para algún j, $\delta_x(A_j) = 1$ y en el resto es 0, por lo tanto,

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\, d\delta_x = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}(x) = a_j = f(x).$$

Por lo que la proposición es cierta para funciones simples positivas, ahora veamos que se cumple para funciones medibles no negativas. Tomemos $f : \mathbb{R} \longrightarrow [0, \infty]$ una función medible no negativa. Entonces, por un teorema visto en clase, existe $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones simples tales que

$$0 \leq f_n(x) \leq f_{n+1} \leq f(x) \text{ y } \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

para cada $x \in \mathbb{R}$. Luego, por el teorema de la convergencia monótona,

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\, d\delta_x = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\, d\delta_x = \lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = f(x_0),$$

por lo que se tiene para funciones medibles no negativas.

Por último, veamos el caso general. Para $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función medible, recordamos que $f = f^+ - f^-$, donde f^+, f^- son funciones medibles no negativas. Luego,

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\, d\delta_x = \int_{\mathbb{R}} f^+(x)\, d\delta_x - \int_{\mathbb{R}} f^-(x)\, d\delta_x.$$

Por lo anteriormente probado, como la parte negativa y la parte positiva son funciones medibles no negativas,

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\, d\delta_x = f^+(x_0) - f^-(x_0) = f(x_0).$$

$\square$

(c) De un ejemplo de una función que sea integrable con la medida δ_{x_0} para algún x_0, pero que no sea integrable con la medida de Lebesgue.

Solución. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Entonces

$$\int_{\mathbb{R}} 1\, d\lambda(x) = \lambda(\mathbb{R})$$

mientras que

$$\int_{\mathbb{R}} 1\, d\delta_0(x) = 1 < \infty$$

por lo cual, f es integrable respecto a la medida de Dirac centrada en 0, pero no lo es respecto a la medida de Lebesgue.

(II) Sea $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ con la σ-álgebra $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

(a) Considere la medida contadora μ dada por: $\mu(A) = \text{cardinal}(A)$ si A es finito y $\mu(A) = \infty$ caso contrario, para cada $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Muestre que μ es una medida.

Demostración. Para ver que es medida, primero veamos que la medida del vacío es nula, claramente $\mu(\emptyset) = \text{card}(\emptyset) = 0$. Sean $A_i \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ con $A_i \cap A_j = \emptyset$ para $i \neq j$, si algún A_i es infinito, entonces $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ es infinito y así,

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \infty = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i),$$

ya que $\mu(A_i) = \infty$ para algún i. Si todos los A_i son finitos, entonces $\mu(A_i) = \text{card}(A_i)$, y como son disjuntos

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \text{card}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \text{card}(A_i).$$

Para algún $N \in \mathbb{Z}^+$, si $n \geq N$ entonces $A_n = \emptyset$, por lo que

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

□

(b) Dada $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ una función medible, es decir, f es una secuencia, $f = \{a_j\}_{j\in\mathbb{N}}$, para algunos $a_j \in \mathbb{R}, j \in \mathbb{N}$. Muestre que si f es integrable (es decir, $\int_{\mathbb{N}} |f| d\mu < \infty$), entonces

$$\int_{\mathbb{N}} f dx = \sum_{j=1}^{\infty} a_j$$

Demostración. Teniendo en cuenta que $N = \bigcup_{i=1}^{\infty}\{n\}$, donde para cada $n \in \mathbb{N}, \{n\}$ es un conjunto medible. Por lo que, podemos definir las funciones simples $\chi_{\{i\}}$ para todo $j \in \mathbb{N}$, como toda función medible se puede escribir como $f = \{a_j\}_{j\in\mathbb{N}}$, si tomamos f no negativa entonces

$$f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \chi_{i_j}(x), \quad \text{con } a_j \geq 0, \text{ para todo } j \in \mathbb{N},$$

así,

$$\int_N f(x)\, d\mu = \int_N \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_j \chi_{i_j}(x)\right) d\mu = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \mu(i_j) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j.$$

Ahora, si tomamos f una función medible e integrable, podemos escribirla como

$f = f^+ - f^-$, donde f^+ y f^- son medibles, integrables y no negativas. Por lo que,

$$\int_N f(x)\, d\mu = \int_N f^+(x)\, d\mu - \int_N f^-(x)\, d\mu = \sum_{j=1}^{\infty} a_j - \sum_{j=1}^{\infty} b_j = \sum_{j=1}^{\infty} c_j.$$

donde $c_j \in \mathbb{R}$, por lo que f es integrable.

$\square$

Ejercicio 3 Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto. Sea $1 \leq p \leq \infty$. Entonces $L^p(\Omega)$ es un espacio de Banach.

Demostración. Distinguimos los casos $p = \infty$ y $1 \leq p < \infty$.

Caso 1: $p = \infty$

Sea (f_n) una sucesión de Cauchy en L^∞. Dado un entero $k \geq 1$, existe un entero N_k tal que

$$\operatorname*{ess\,sup}_{x \in \Omega} |f_n(x) - f_m(x)| = \|f_m - f_n\|_{L^\infty} \leq \frac{1}{k} \quad \text{para todo } m, n \geq N_k,$$

entonces, por la definición del supremo esencial, para cada k existe un conjunto de medida nula E_k tal que,

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{k} \quad \text{para todo } x \in \Omega \setminus E_k, \text{ para todo } m, n \geq N_k.$$

como cada conjunto E_k tiene medida nula y la medida de Lebesgue es subaditiva para uniones numerables, se tiene que

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k) = 0,$$

y por ser no negativa, concluimos que

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) = 0.$$

Sea entonces $E := \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$, un conjunto de medida nula. Como $\Omega \setminus E \subseteq \Omega \setminus E_k$ para todo k, se tiene que para todo $x \in \Omega \setminus E$,

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \frac{1}{k} \quad \text{para todo } m, n \geq N_k.$$

Esto muestra que $(f_n(x))$ es de Cauchy en $\mathbb{R}$, espacio completo, por lo que converge a un límite que denotamos por $f(x)$. Pasando al límite cuando $m \to \infty$, se obtiene

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{k} \quad \text{para todo } x \in \Omega \setminus E, \text{ para todo } n \geq N_k.$$

Entonces,

$$\operatorname*{ess\,sup}_{x \in \Omega} |f(x) - f_n(x)| = \sup_{x \in \Omega \setminus E} |f(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{k},$$

y por lo tanto,

$$\|f - f_n\|_{L^\infty} \leq \frac{1}{k} \quad \text{para todo } n \geq N_k.$$

Para ver que $f \in L^\infty$, notamos que para todo $x \in \Omega \setminus E$,

$$|f(x)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x)| \leq \frac{1}{k} + \|f_n\|_{L^\infty},$$

de modo que f es esencialmente acotada, es decir, $f \in L^\infty$.
En consecuencia, $f_n \to f$ en L^∞.

Caso 2: $1 \leq p < \infty$

Sea (f_n) una sucesión de Cauchy en L^p. Como L^p es un espacio métrico, basta demostrar que existe una subsucesión que converge en L^p.
Extraemos una subsucesión (f_{n_k}) tal que

$$\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p \leq \frac{1}{2^k} \quad \text{para todo } k \geq 1.$$

Esto se construye eligiendo inductivamente $n_1, n_2, \ldots$ con $n_{k+1} \geq n_k$ tales que $\|f_m - f_n\|_p \leq \frac{1}{2^{k+1}}$ para todo $m, n \geq n_{k+1}$, lo cual es posible por ser (f_n) Cauchy.
Definimos $f_k := f_{n_k}$, y consideramos:

$$g_n(x) := \sum_{k=1}^{n} |f_{k+1}(x) - f_k(x)|.$$

Cada g_n es medible, no decreciente y cumple

$$\|g_n\|_p \leq \sum_{k=1}^{n} \|f_{k+1} - f_k\|_p \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1.$$

Por el Teorema de Convergencia Monótona, existe una función medible $g \in L^p$, finita casi en todas partes, tal que

$$g_n(x) \to g(x) \quad \text{casi en todas partes.}$$

Por otro lado, para $m \geq n \geq 2$, se tiene:

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq \sum_{k=n}^{m-1} |f_{k+1}(x) - f_k(x)| = g_m(x) - g_{n-1}(x) \leq g(x) - g_{n-1}(x).$$

Entonces, $(f_n(x))$ es de Cauchy en $\mathbb{R}$ casi en todas partes, y por ser $\mathbb{R}$ completo, converge a una función $f(x)$, finita casi en todas partes.
Además, para $n \geq 2$,

$$|f(x) - f_n(x)| \leq g(x) - g_{n-1}(x) \leq g(x) \quad \text{casi en todas partes.}$$

Elevando a la potencia p,

$$|f(x) - f_n(x)|^p \leq g(x)^p, \quad \text{con } g^p \in L^1.$$

Como $|f_n(x) - f(x)|^p \to 0$ c.t.p., por el Teorema de Convergencia Dominada se concluye que

$$\|f_n - f\|_p^p = \int_\Omega |f_n(x) - f(x)|^p \, dx \to 0.$$

Es decir,

$$\|f_n - f\|_p \to 0,$$

Como consecuencia, la función f pertenece a L^p por ser el límite en norma de funciones de L^p, es decir,

$$f \in L^p.$$

Esto demuestra que $f_n \to f$ en L^p, y que L^p es completo.

□

Ejercicio 5 Considere el espacio $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$. Sean

$$f_0(x) = \begin{cases} |x|^{-\alpha}, & \text{si } |x| \leq 1, \\ 0, & \text{si } |x| > 1. \end{cases} \qquad f_1(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } |x| \leq 1, \\ |x|^{\alpha}, & \text{si } |x| > 1. \end{cases}$$

(I) ¿Para qué valores de $\alpha \in \mathbb{R}$, $f_0 \in L^p(\mathbb{R}^n)$?

Solución. Sea,

$$\|f_c\|_{L^p} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f_c|^p \, d\overline{x}\right)^{1/p} = \left(\int_{\frac{1}{2}\times 1+1} |x_1^{-p}|^q \, d\overline{x}\right)^{1/p}$$

Usando coordenadas polares $x = r\theta$, $\theta \in S^{n-1}$ donde $r = |x| \in [0, \infty)$

$$\begin{aligned}
\|f_c\|_{L^p} &= \left(\int_{\frac{1}{2}\times 1+1} |x_1^{-p}|^q \, dx\right)^{1/p} \\
&= \left(\int_0^1 \int_{S^{n-1}} r^{-p\alpha} \, dr \, d\nu(\theta) \, dt\right)^{1/p} \\
&= \left(\int_{S^{n-1}} d\nu(\theta) \int_0^1 r^{n-1-p\alpha} \, dr\right)^{1/p}.
\end{aligned}$$

Sabemos que

$$\int_\varepsilon^1 r^a \, dr = \lim_{\varepsilon \to 0} \left.\frac{r^{a+1}}{a+1}\right|_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\frac{1}{a+1} - \frac{\varepsilon^{a+1}}{a+1}\right)$$

si $a + 1 > 0$ converge, por lo que cuando $a + 1 < 0$ diverge. Luego, para que

$$\int_0^1 r^{n-1-p\alpha}\, dr$$

converja se tiene que cumplir que $n - 1 - p\alpha > -1$ es decir, $n - p\alpha > 0$ por lo que, para $\alpha < \frac{n}{p}$ la integral es finita, es decir, $f_c \in L^p(\mathbb{R}^n)$.

(II) ¿Para qué valores de $\alpha \in \mathbb{R}$, $f_1 \in L^p(\mathbb{R}^n)$?

Solución. Sea,

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^p\, dx\right)^{1/p} = \left(\int_{|x|>1} |x|^{\alpha p}\, dx\right)^{1/p}$$

haciendo el cambio a coordenadas polares $x = r\theta$ con $r = |x| \in [1, \infty)$ y $\theta \in S^{n-1}$

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_1^\infty \int_{S^{n-1}} r^{\alpha p} r^{n-1}\, d\nu(\theta)\, dr\right)^{1/p} = \left(\int_{S^{n-1}} d\nu(\theta) \int_1^\infty r^{\alpha p+n-1}\, dr\right)^{1/p}$$

La integral $\int_1^\infty r^{\alpha p+n-1}\, dr$ converge si y sólo si,

$$\alpha p + n - 1 < -1 \quad \text{por lo que} \quad \alpha p + n < 0 \quad \text{así} \quad \alpha < -\frac{n}{p}$$

Por lo tanto, para $\alpha < -\dfrac{n}{p}$ la integral es finita, es decir, $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$.

(III) ¿Para qué valores de $\alpha \in \mathbb{R}$, $\frac{1}{1+|x|^\alpha} \in L^p(\mathbb{R}^n)$?

Solución. Tenemos que

$$\begin{aligned}
\|f\|_{L^p}^p &= \int_{\mathbb{R}^n} \left|\frac{1}{1+|x|^\alpha}\right|^p dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+|x|^\alpha)^p}\, dx \\
&= \int_{\|x\|\leq 1} \frac{1}{(1+|x|^\alpha)^p}\, dx + \int_{\|x\|\geq 1} \frac{1}{(1+|x|^\alpha)^p}\, dx
\end{aligned}$$

Sabemos que cuando $\|x\| \leq 1$ la integral converge entonces debemos preocuparnos por la condición cuando $\|x\| \geq 1$.

Tenemos que

$$\int_{\|x\|\geq 1} \frac{1}{(1+|x|^\alpha)^p}\, dx \leq \int_{\|x\|\geq 1} \frac{1}{(|x|^\alpha)^p}\, dx$$

luego, tenemos que cambiando a coordenadas polares la última integral,

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{r^\alpha}\right)^p r^{n-1}\,dr = \int_0^\infty \frac{r^{n-1}}{(r^\alpha)^p}\,dr$$

por lo que se tiene la convergencia con las siguientes condiciones

$$n-1 < \alpha p$$

$$n \leq \alpha p$$
$$\frac{n}{p} \leq \alpha.$$

Por lo que tenemos una aproximación de la cota que deseamos para α, ahora acotemos inferiormente la integral

$$\int_{\|x\|\geq 1} \frac{1}{(1+|x|^\alpha)^p}\,dx,$$

luego como $\|x\| \geq 1$ entonces

$$\int_{\|x\|\geq 1} \frac{1}{(1+|x|^\alpha)^p}\,dx \geq \int_{\|x\|\geq 1} \frac{1}{(2|x|^\alpha)^p}\,dx$$

cambiando a coordenadas polares,

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{2r^\alpha}\right)^p r^{n-1}\,dr = \int_0^\infty \frac{r^{n-1}}{(2r^\alpha)^p}\,dr$$

como p es fijo entonces solo debemos poner condiciones sobre αp, así,

$$n-1 < \alpha p$$

$$n \leq \alpha p$$
$$\frac{n}{p} \leq \alpha.$$

por lo tanto, para $\alpha \geq \dfrac{n}{p}$ la integral es finita, es decir, $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$.

Ejercicio 8

(I) Sea $1 < p < \infty$. Considere las secuencias $x_n = \left\{x_n^j\right\}_{j=1}^\infty$, para cada $n \in \mathbb{N}$ y $x = \left\{x^j\right\}_{j=1}^\infty$. Asuma que $x_n, x \in l^p$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Muestre que $x_n \rightharpoonup x$ en l^p si y solo si $\{x_n\}$ es acotada (en l^p) y $x_n^j \to x^j$ para cada entero positivo j.

(II) Considere la secuencia $x_n = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, 0, 0, 0, \ldots\right)$. En cuales espacios $l^p, 1 \leq p \leq \infty$, esta secuencia converge débilmente?