



Sandra Natalia Florez Garcia

Edgar Santiago Ochoa Quiroga

María Alejandra Rodríguez Ríos .....

**Ejercicio 9** Sea  $(E, \|\cdot\|)$  un espacio vectorial normado. Dado  $r > 0$ , considere  $C = B(0, r) = \{y \in E : \|y\| < r\}$ . Determine el funcional de Minkowski de  $C$ .

**Solución:**

Dado que  $(E, \|\cdot\|)$  es un espacio vectorial normado, se deduce que el conjunto  $C = B(0, r)$  es abierto, convexo y  $0 \in C$ .

Por consiguiente, el funcional de Minkowski asociado a  $C$  se define como:

$$\rho(x) = \inf \{ \alpha > 0 : \alpha^{-1}x \in C \}, \quad x \in E.$$

Ahora, sea  $x \in B(0, r)$ . Entonces, para todo  $\alpha > 0$  tal que  $\alpha^{-1}x \in C$ , se tiene:

$$\|\alpha^{-1}x\| < r.$$

Esto implica que:

$$\alpha^{-1}\|x\| < r,$$

y despejando  $\alpha$ , se obtiene:

$$\frac{\|x\|}{r} < \alpha.$$

En general, si  $x \in B(0, r)$ , tenemos:

$$\|\alpha^{-1}x\| < r \Rightarrow \alpha^{-1}\|x\| < r \Rightarrow \frac{\|x\|}{r} < \alpha.$$

Supongamos por contradicción que  $\rho(x) \neq \frac{\|x\|}{r}$ . Entonces debe ocurrir que:

$$\frac{\|x\|}{r} < \rho(x).$$

Tomemos el promedio entre  $\frac{\|x\|}{r}$  y  $\rho(x)$ :

$$\beta = \frac{\frac{\|x\|}{r} + \rho(x)}{2}.$$

Este valor cumple que:

$$\frac{\|x\|}{r} < \beta < \rho(x).$$

Pero entonces:

$$\|\beta^{-1}x\| = \beta^{-1}\|x\| < \frac{r}{\|x\|} \cdot \|x\| = r,$$

lo cual implica que  $\beta^{-1}x \in B(0, r)$ , es decir,  $\beta^{-1}x \in C$ . Por tanto,  $\beta \in \{ \alpha > 0 : \alpha^{-1}x \in C \}$ .

Esto contradice el hecho de que  $\rho(x)$  es la ínfimo de ese conjunto, ya que  $\beta < \rho(x)$ .

Por lo tanto, concluimos que:

$$\rho(x) = \frac{\|x\|}{r}.$$

**Ejercicio 12** Sea  $E$  un espacio vectorial normado.

- (i) Sea  $W \subset E$  un subespacio propio de  $E$  y  $x_0 \in E \setminus W$ , tal que  $d := \text{dist}(x_0, W) > 0$ . Demuestre que existe  $f \in E^*$  tal que  $f = 0$  restringido a  $W$ ,  $f(x_0) = d$  y  $\|f\|_{E^*} = 1$ .
- (ii) Sea  $W \subset E$  un subespacio propio cerrado de  $E$  y  $x_0 \in E \setminus W$ . Demuestre que existe  $f \in E^*$  tal que  $f = 0$  restringido a  $W$  y  $f(x_0) \neq 0$ .

**Ejercicio 13** Sean  $(E, \|\cdot\|)$  y  $(F, \|\cdot\|)$  espacios de Banach.

- (i) Sea  $K \subset E$  un subespacio cerrado de  $E$ . Definimos la relación sobre  $E$  dada por  $x \sim_K y$  si y solo si  $x - y \in K$ .
- (a) Muestre que  $\sim_K$  es una relación de equivalencia sobre  $E$ .

**Demostración.** Dado  $x \in E$ , como  $K$  es subespacio,  $x - x = 0 \in K$ , esto implica que  $x \sim_K x$ , mostrando así la reflexividad.

Dados  $x, y \in E$ , suponga que tenemos que  $x \sim_K y$ , luego  $x - y \in K$ , nuevamente como  $K$  es subespacio, es cerrado por multiplicación escalar, así  $-(x - y) \in K$ , pero  $-(x - y) = y - x$ , así por definición de la relación tenemos que  $y \sim_K x$ , mostrando así la simetría.

Por último sean  $x, y, z \in E$ , con  $x \sim_K y$  y  $y \sim_K z$ , por definición  $x - y \in K$  y  $y - z \in K$ , y como  $K$  es subespacio es cerrado para la suma, así tenemos que  $(x - y) + (y - z) \in K$ , pero  $(x - y) + (y - z) = x - z$ , así tenemos que  $x \sim_K z$ , así la relación es transitiva. Con esto podemos concluir que la relación es de equivalencia.

□□

- (b) Muestre que el espacio cociente  $E/K$  es un espacio de Banach con la norma

$$\|x + K\|_{E/K} = \inf_{k \in K} \|x - k\|, \quad x \in E.$$

Es decir, debe verificar que el espacio cociente es un espacio vectorial, normado, cuya norma lo hace completo.

**Demostración.** Primero notemos que las operaciones definidas sobre el conjunto  $E/K$  son las siguientes

$$\begin{aligned} (x + K) + (y + K) &= (x + y) + K, \\ \lambda(x + K) &= \lambda x + K. \end{aligned}$$

Las propiedades de espacio vectorial para  $E/K$ , se heredan del hecho de que  $E$  ya es espacio vectorial, solo bastaría verificar que si están bien definidas estas operaciones. Si  $x_1 + K = x_2 + K$  y  $y_1 + K = y_2 + K$ , tenemos que  $x_1 - x_2 \in K$  y  $y_1 - y_2 \in K$ , pero como es subespacio la suma está, así  $(x_1 + y_1) - (x_2 + y_2) \in K$ , así  $(x_1 + y_1) + K = (x_2 + y_2) + K$ , luego la suma está bien definida. De manera similar, si  $x_1 - x_2 \in K$ , tenemos que al multiplicar por un escalar también está en  $K$ , esto es  $\lambda x_1 - \lambda x_2 \in K$ , así  $\lambda x_1 + K = \lambda x_2 + K$ .

Ahora veamos que la norma definida en el enunciado, efectivamente es norma del espacio  $E/K$ . Primero esta norma esta bien definida ya que si  $x + K = y + K$ , eso quiere decir que  $x - y \in K$ , luego

$$\begin{aligned}\|x + K\| &= \inf_{k \in K} \|x - k\| \\ &= \inf_{k_1 \in K} \|x - (k_1 + x - y)\| \\ &= \inf_{k_1 \in K} \|y - k_1\| \\ &= \|y + K\|.\end{aligned}$$

Luego como  $\|x - k\| \geq 0$ , para todo  $k \in K$ , es claro que

$$\|x + K\| = \inf_{k \in K} \|x - k\| \geq 0,$$

ya que estamos tomando el ínfimo de un conjunto que esta acotado inferiormente por 0 y  $x \in E$  fue tomado arbitrariamente.

Ahora supongamos que  $x + K = 0 + K$ , luego  $x \in K$ , así tenemos que

$$0 \leq \|x + K\| = \inf_{k \in K} \|x - k\| \leq \|x - x\| = 0,$$

Mostrando que el neutro tiene norma 0. Ahora si suponemos que  $\|x + K\| = 0$ , como la norma es un ínfimo tenemos que existe una sucesión de puntos  $k_n \in K$  tal que  $\|x - k_n\| \rightarrow 0$ , esto quiere decir que la sucesión  $k_n$  converge a  $x$ , pero  $K$  es cerrado por hipótesis, así  $x \in K$ , esto quiere decir que  $x + K = 0 + K$ . Ahora si  $\lambda = 0$ , es claro que

$$\|\lambda(x + K)\| = \|0 + K\| = 0 = 0 \cdot \|x + K\| = |\lambda| \|x + K\|.$$

Ahora si  $\lambda \neq 0$ , tenemos que

$$\begin{aligned}\|\lambda(x + K)\| &= \|\lambda x + K\| \\ &= \inf_{k \in K} \|\lambda x - k\| \\ &= \inf_{k \in K} \|\lambda(x - \lambda^{-1}k)\| \\ &= |\lambda| \inf_{k \in K} \|x - \lambda^{-1}k\| \\ &= |\lambda| \inf_{k_1 \in K} \|x - k_1\| \quad (k_1 = \lambda^{-1}k \in K) \\ &= |\lambda| \|x + K\|\end{aligned}$$

Note que podemos hacer esto ya que  $K$  es un subespacio. Por ultimo veamos la

desigualdad triangular,

$$\begin{aligned}
\|(x + K) + (y + K)\| &= \|(x + y) + K\| \\
&= \inf_{k \in K} \|x + y - k\| \\
&= \inf_{k_1, k_2 \in K} \|x + y - (k_1 + k_2)\| \\
&\leq \inf_{k_1, k_2 \in K} \{\|x - k_1\| + \|y - k_2\|\} \\
&= \inf_{k_1 \in K} \|x - k_1\| + \inf_{k_2 \in K} \|y - k_2\| \\
&= \|x + K\| + \|y + K\|.
\end{aligned}$$

Note que nuevamente usamos el hecho de que  $K$  es subespacio, para escribir a  $k = k_1 + k_2$ . Así concluimos que  $E/K$  es normado. Faltaría ver que el espacio es Banach.

Consideremos  $\{x_n + K\} \subset E/K$ , una sucesión de Cauchy, luego observe que nos podemos construir una subsucesión tal que

$$\|(x_{n_k} - x_{n_{k+1}}) + K\|.$$

Esto lo podemos hacer ya que si  $\varepsilon = \frac{1}{2}$ , como la sucesión es Cauchy

$$\|(x_n - x_m) + K\| < \frac{1}{2},$$

para  $n, m \geq n_1 \in \mathbb{Z}^+$ . De manera similar para  $\varepsilon = \frac{1}{4}$ , existe  $n_2 \in \mathbb{Z}^+$  tal que si  $n, m \geq n_2$ ,

$$\|(x_n - x_m) + K\| < \frac{1}{4},$$

Note que esta cantidad es menos a  $\frac{1}{2}$ , entonces podemos asumir  $n_2 > n_1$ , note que por un argumento inductivo, conseguimos unos  $n_1 < n_2 < \dots < n_k$  tal que si  $n, m \geq n_k$ , tenemos que

$$\|(x_n - x_m) + K\| < \frac{1}{2^k}.$$

En particular note que para  $n_k, n_{k+1}$  tenemos que

$$\|(x_{n_k} - x_{n_{k+1}}) + K\| < \frac{1}{2^k}.$$

Ahora a partir de esta subsucesión  $\{x_{n_k} + K\}$  Podemos construir una sucesión  $\{y_k\}$  tal que cada  $y_k \in x_{n_k} + K$ , de la siguiente manera. Por caracterización del ínfimo para  $k = 1$ , tenemos que si tomamos  $\delta = \frac{1}{2} - \|(x_{n_1} - x_{n_2}) + K\| > 0$ , tenemos que existe  $w_2 \in K$  tal que

$$\|x_{n_1} - x_{n_2} - w_2\| < \|(x_{n_1} - x_{n_2}) + K\| + \delta = \frac{1}{2}.$$

Así si tomamos  $y_1 = x_{n_1}$  y  $y_2 = x_{n_2} + w_2$ , de momento cumplimos que  $y_1 \in x_{n_1} + K$  y  $y_2 \in x_{n_2} + K$ . Luego para el caso de  $k = 2$  observe que podemos hacer que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^2} &> \|(x_{n_2} - x_{n_3}) + K\| \\ &= \inf_{w \in K} \|x_{n_2} - x_{n_3} - w\| \\ &= \inf_{w \in K} \|x_{n_2} + w_2 - w_2 - x_{n_3} - w\| \\ &= \inf_{\bar{w} \in K} \|x_{n_2} + w_2 - x_{n_3} - \bar{w}\| \\ &= \inf_{\bar{w} \in K} \|y_2 - x_{n_3} - \bar{w}\|. \end{aligned}$$

Note que esto lo podemos hacer ya que  $w_2 \in K$  y este es un subespacio. Así de manera análoga podemos concluir la existencia de un  $w_3 \in K$  tal que

$$\|y_2 - x_{n_3} - w_3\| < \frac{1}{2^2}.$$

Así tomando  $y_3 = x_{n_3} + w_3 \in x_{n_3} + K$ , nos damos cuenta que de manera inductiva podemos tomar la sucesión  $\{y_k\}$  deseada.

Como

Ahora como la serie geométrica converge absolutamente sabemos que dado un  $\varepsilon > 0$ , existe un  $N$  para el cual

$$\sum_{i=N}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \varepsilon.$$

Tomando  $n, m \leq N$ , si asumimos sin pérdida de generalidad que  $n > m$  note que

$$\begin{aligned} \|y_n - y_m\| &\leq \sum_{i=m}^{n-1} \|y_{i+1} - y_i\| \\ &< \sum_{i=m}^{n-1} \frac{1}{2^i} \\ &< \sum_{i=N}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Así concluimos que  $\{y_k\}$  es de cauchy, y como esta es una sucesión de términos en  $E$  que es de Banach, sabemos que  $y_k \rightarrow y$ , luego debido a que la norma es un infimo

$$\|x_{n-k} + K - (y + K)\| = \|(x_{n_k} - y) + K\| \leq \|y_k - y\| \rightarrow 0.$$

Así concluimos que la subsucesión es convergente y por tanto como la secuencia original era de cauchy podemos concluir que  $x_n + K \rightarrow y + K$ . Mostrando así que  $E/K$  es de Banach.

□.□

(ii) Sea  $T \in L(E, F)$  tal que existe  $c > 0$  para el cual

$$\|Tx\|_F \geq c\|x\|_E,$$

para todo  $x \in E$ . Si  $K$  denota el espacio nulo de  $T$  y  $R(T)$  el rango de  $T$ , muestre que  $\bar{T} : E/K \rightarrow R(T)$  dada por  $\bar{T}(x + K) = T(x)$ ,  $x \in E$ , esta bien definida y es un isomorfismo. Esto es  $\bar{T} \in L(E/K, R(T))$  y  $\bar{T}^{-1} \in L(R(T), E/K)$ .

**Demostración.** Como el dominio de  $\bar{T}$  son clases de equivalencia tenemos que mostrar que la aplicación esta bien definida. Consideremos  $x + K = y + K$ , es decir  $x, y \in E$  son dos representantes distintos de la misma clase. Por definición  $\bar{T}(x + K) = T(x)$  y  $\bar{T}(y + K) = T(y)$ , luego como  $T$  es lineal

$$\begin{aligned}\bar{T}(x + K) - \bar{T}(y + K) &= T(x) - T(y) \\ &= T(x - y).\end{aligned}$$

Como supusimos que clases son iguales, eso quiere decir que  $x - y \in K$ , pero  $K$  es el espacio nulo de  $T$ , así  $T(x - y) = 0$ , mostrando así que

$$\bar{T}(x + K) = \bar{T}(y + K),$$

por lo tanto esta bien definida. Ahora la aplicación claramente es sobreyectiva ya que dado  $y \in R(T)$ , existe  $x \in E$  tal que  $y = T(x) = \bar{T}(x + K)$ , así cada  $y$  tiene preimagen. Para la inyectividad se sigue un argumento muy parecido a mostrar que esta bien definida. Dados  $x + K, y + K$ , si  $\bar{T}(x + K) = \bar{T}(y + K)$ , esto quiere decir que  $T(x) = T(y)$ , por linealidad  $T(x - y) = 0$ , así  $x - y \in K$ , concluyendo que  $x + K = y + K$ . Para ver que es isomorfismo faltaría mostrar que la aplicación y su inversa son lineales y acotadas. Primero  $\bar{T}$  es lineal ya que

$$\begin{aligned}\bar{T}((x + K) + \lambda(y + K)) &= \bar{T}((x + \lambda y) + K) \\ &= T(x + \lambda y) \\ &= T(x) + \lambda T(y) \\ &= \bar{T}(x + K) + \lambda \bar{T}(y + K).\end{aligned}$$

Note que se tiene por la linealidad de  $T$ . Además es acotada ya que

$$\begin{aligned}\|\bar{T}(x + K)\| &= \|T(x)\| \\ &\leq M\|x\| \\ &= M\|x - k + k\| \\ &\leq M\|x - k\| + M\|k\|.\end{aligned}$$

Donde  $M > 0$ , es una constante que depende de  $x$ . Esto se tiene ya que  $T$  es acotada, ahora por la monotonía del ínfimo, podemos tomarlo sobre los  $k \in K$ , como el lado izquierdo no depende de  $k$  tenemos que

$$\begin{aligned}\|\bar{T}(x + K)\| &\leq \inf_{k \in K} \{M\|x - k\| + M\|k\|\} \\ &= M \inf_{k \in K} \|x - k\| + M \inf_{k \in K} \|k\| \\ &= M \inf_{k \in K} \|x - k\| \\ &= M\|x + K\|.\end{aligned}$$

Así hemos mostrado que es acotado. Ahora probemos las mismas dos propiedades para la aplicación  $\bar{T}^{-1}$ . Para la linealidad tenemos que dados  $y_1, y_2 \in R(T)$ , existen  $x_1, x_2 \in E$ , tales que  $y_i = T(x_i) = \bar{T}(x_i + K)$ , para  $i = 1, 2$ . Luego por la linealidad ya probada tenemos que

$$y_1 + \lambda y_2 = \bar{T}((x_1 + K) + \lambda(x_2 + K)),$$

como es biyectiva, aplicando  $\bar{T}^{-1}$  a ambos lados obtenemos

$$\bar{T}^{-1}(y_1 + \lambda y_2) = (x_1 + K) + \lambda(x_2 + K).$$

Pero por la manera en que tomamos  $y_1, y_2$ , y por la biyectividad sabemos que  $\bar{T}^{-1}(y_i) = x_i + K$ , para  $i = 1, 2$ . Así concluimos que

$$\bar{T}^{-1}(y_1 + \lambda y_2) = \bar{T}^{-1}(y_1) + \lambda \bar{T}^{-1}(y_2).$$

Para mostrar que es acotada usaremos una idea similar, si  $y \in R(T)$ , existe un  $x \in E$  tal que  $y = T(x) = \bar{T}(x + K)$ , luego  $\bar{T}^{-1}(y) = x + K$ , así tomando la norma de  $E/K$  obtenemos

$$\begin{aligned} \|\bar{T}^{-1}(y)\| &= \|x + K\| \\ &= \inf_{k \in K} \|x - k\| \\ &\leq \|x\|. \end{aligned}$$

Por hipótesis existe un  $c > 0$ , tal que  $c\|x\| \leq \|T(x)\|$ , es decir  $\|x\| \leq \frac{1}{c}\|T(x)\|$  así tenemos que

$$\|\bar{T}^{-1}(y)\| \leq \frac{1}{c}\|T(x)\|.$$

Pero  $y = T(x)$ , luego

$$\|\bar{T}^{-1}(y)\| \leq \frac{1}{c}\|y\|,$$

así hemos mostrado que el operador es acotado y por tanto hemos concluido que  $\bar{T}$  es un isomorfismo.

□□

**Ejercicio 15** Considere los espacios  $C([0, 1])$  y  $C^1([0, 1])$  ambos equipados con la norma del supremo  $\|f\|_{L^\infty} = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|$ . Definimos el operador derivada  $D : C^1([0, 1]) \rightarrow C([0, 1])$  dado por  $f \mapsto f'$ .

Muestre que  $D$  es un operador no acotado, pero su gráfico  $G(D)$  es cerrado.

### **Demostración.**

Supongamos, por contradicción, que  $D$  es un operador acotado. Entonces existe una constante  $M > 0$  tal que,

$$\|f'\| = \|Df\| \leq M\|f\| \quad \text{para todo } f \in C^1([0, 1]).$$

Definimos una sucesión de funciones  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  dada por,

$$f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_n(x) = x^n.$$

Claramente  $f_n \in C^1([0, 1])$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Además, se cumple que,

$$\begin{aligned}\|f_n\| &= \sup_{x \in [0,1]} |x^n| = 1, \\ \|Df_n\| &= \sup_{x \in [0,1]} |nx^{n-1}| = n.\end{aligned}$$

Entonces:

$$\|Df_n\| = n \leq M\|f_n\| = M.$$

Esto implica que  $n \leq M$  para todo  $n$ , lo cual es una contradicción, ya que siempre existe un  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $n > M$ . Por lo tanto, el operador  $D$  no es acotado.

Ahora veamos que, aunque el operador  $D$  no es acotado, su gráfico

$$G(D) = \{(f, f') : f \in C^1([0, 1]) \text{ y } f' \in C([0, 1])\}$$

sí es un conjunto cerrado.

Para demostrarlo, tomemos una sucesión  $\{(f_n, f'_n)\}_{n \in \mathbb{N}} \subset G(D)$  tal que

$$(f_n, f'_n) \rightarrow (f, g)$$

en la norma del gráfico, es decir, en la norma

$$\|(f_n, f'_n) - (f, g)\|_{G(D)} = \|f_n - f\|_{L^\infty} + \|f'_n - g\|_{L^\infty}.$$

Esto significa que, para todo  $\varepsilon > 0$ , existe un  $N \in \mathbb{N}$  tal que si  $n > N$ , entonces

$$\|f_n - f\|_{L^\infty} + \|f'_n - g\|_{L^\infty} < \varepsilon.$$

Por lo tanto,

$$f_n \rightarrow f \text{ uniformemente, y } f'_n \rightarrow g \text{ uniformemente.}$$

Ahora, dado que cada  $f_n$  es de clase  $C^1([0, 1])$ , y que tanto  $f_n$  como  $f'_n$  convergen uniformemente, se sigue que  $f \in C^1([0, 1])$  y que  $f' = g$ , con  $g \in C([0, 1])$ . Es decir, la función límite  $f$  es derivable y su derivada es  $g$ , que es continua. Esto implica que  $(f, f') \in G(D)$ .

Por lo tanto, el gráfico  $G(D)$  es un conjunto cerrado.

□