Sandra Natalia Florez Garcia
Edgar Santiago Ochoa Quiroga
María Alejandra Rodríguez Ríos

Ejercicio 1 Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio vectorial normado. Defina

$$K = \{x \in E : \|x\| = 1\}.$$

Demuestre que E es de Banach si y solamente si K es completo.

Demostración. $(\Rightarrow)$ Supongamos que E es un espacio de Banach y considere $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $K \subset E$, como E es completo, existe $x \in E$ tal que $x_n \to x$. Por lo que faltaría ver que $x \in K$, es decir, que $\|x\| = 1$. Por la convergencia de la sucesión, tenemos que dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{Z}^+$ tal que si $n \geq N$, entonces

$$\|x_n - x\| < \varepsilon.$$

Ahora, tenemos que cada x_n es de norma 1 ya que x_n es una sucesión de Cauchy en K, luego por la desigualdad triangular tenemos que

$$\|x\| \leq \|x - x_n\| + \|x_n\| < \varepsilon + 1,$$

y además

$$1 = \|x_n\| \leq \|x_n - x\| + \|x\| < \varepsilon + \|x\|.$$

Si juntamos las dos desigualdades, obtenemos que

$$1 - \varepsilon < \|x\| < 1 + \varepsilon.$$

Así tomando $\varepsilon \to 0$ tenemos que $\|x\| = 1$, mostrando así que K es completo.

$(\Leftarrow)$ Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en E. Por lo cual, la sucesión $(\|x_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en $\mathbb{R}$ y como este espacio es completo, se sigue que $\|x_n\| \to a$. Consideremos dos casos, si $a = 0$, por la definición de convergencia, dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{Z}^+$ tal que si $n \geq N$ tenemos que $\|\|x_n\| - 0\| < \varepsilon$, esto es igual a $\|x_n\| < \varepsilon$, así, concluimos que $x_n \to 0$ por lo cual hemos acabado en este caso.

Si $a \neq 0$, sin pérdida de generalidad podemos asumir que $x_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, ya que en caso contrario la cantidad de ceros sería finita, lo cual no afectarían a la convergencia porque al suponer que la cantidad de ceros es infinita, al ser x_n una sucesión de Cauchy eso implicaría que x_n converge a 0 ya que existiría una subsucesión convergente a 0, y ese caso fue el anterior. Así, definimos $y_n = \dfrac{x_n}{\|x_n\|}$, luego como las sucesiones de Cauchy en $\mathbb{R}$ son acotadas, existen constantes tales que $0 < M_1 \leq \|x_n\| \leq M_2$, a partir de un $n \geq N$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\|y_n - y_m\| &= \left\| \frac{x_n}{\|x_n\|} - \frac{x_m}{\|x_m\|} \right\| \\
&= \left\| \frac{x_n\|x_m\| - x_m\|x_n\|}{\|x_n\|\|x_m\|} \right\| \\
&\leq \frac{1}{M_1^2} \|x_n\|x_m\| - x_m\|x_n\|\| \\
&= \frac{1}{M_1^2} \|x_n\|x_m\| - x_m\|x_m\| + x_m\|x_m\| - x_m\|x_n\|\| \\
&= \frac{1}{M_1^2} \|(x_n - x_m)\|x_m\| + x_m(\|x_m\| - \|x_n\|)\| \\
&\leq \frac{1}{M_1^2} (\|(x_n - x_m)\|x_m\|\| + \|x_m(\|x_m\| - \|x_n\|)\|) \\
&\leq \frac{M_2}{M_1^2} (\|x_n - x_m\| + \|\|x_m\| - \|x_n\|\|).
\end{aligned}$$

Luego, como (x_n) y $(\|x_n\|)$ son de Cauchy para n y m suficientemente grandes $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$ y $\|\|x_m\| - \|x_n\|\| < \varepsilon$. Así hemos concluido que (y_n) es de Cauchy, pero claramente $y_n \in K$, como este es completo por hipótesis tenemos que $y_n \to y$. Podemos notar que $x_n = \|x_n\|y_n$, así tenemos que

$$\begin{aligned}
\|x_n - ay\| &= \|\|x_n\|y_n - ay_n + ay_n - ay\| \\
&= \|y_n(\|x_n\| - a) + a(y_n - y)\| \\
&\leq \|\|x_n\| - a\| + \|a\|\|(y_n - y)\|.
\end{aligned}$$

Como $\|x_n\| \to a$ y $y_n \to y$, por la desigualdad concluimos que $x_n \to ay$, mostrando así que (x_n) converge en E y por tanto es Banach.

ʊ̬ʊ

Ejercicio 2 Sean $(E, \|\cdot\|_E)$ y $(F, \|\cdot\|_F)$ espacios vectoriales normados. Considere $T : E \to F$ una transformación lineal. Muestre que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) T es continua.

(ii) T es continua en cero.

(iii) T es acotada. Es decir, existe $M > 0$ tal que para todo $x \in E$,

$$\|Tx\|_F \leq M\|x\|_E.$$

(iv) Si $\overline{B(0,1)} = \{x \in E : \|x\|_E \leq 1\}$, entonces la imagen directa $T(B(0,1))$ es un conjunto acotado de F.

Demostración. Para establecer la equivalencia entre estas afirmaciones, probaremos la cadena de implicaciones $(i) \to (ii) \to (iii) \to (iv) \to (i)$.

- $(i) \to (ii)$: Si T es continua en todo punto de E, en particular es continua en el origen.

- $(ii) \to (iii)$: Supongamos que T es continua en el origen. Entonces, por definición de continuidad, dado $\varepsilon = \frac{1}{9}$, existe $\delta > 0$ tal que si $\|x\|_E < \delta$, entonces $\|Tx\|_F < \frac{1}{9}$.

  Sea $x \in E$ con $x \neq 0$, y definamos $y = \dfrac{\delta x}{3\|x\|_E}$. Entonces, $\|y\|_E = \dfrac{\delta}{3} < \delta$, por lo que se cumple que $\|Ty\|_F < \frac{1}{9}$.

  Utilizando la linealidad de T, tenemos

$$\begin{aligned} \left\| T\left(\frac{\delta x}{3\|x\|_E}\right)\right\|_F &< \frac{1}{9}, \\ \frac{\delta}{3\|x\|_E}\|Tx\|_F &< \frac{1}{9}, \\ \|Tx\|_F &< \frac{3}{\delta}\|x\|_E. \end{aligned}$$

  Por lo tanto, si tomamos $M = \dfrac{3}{\delta}$, se tiene que para todo $x \in E$,

$$\|Tx\|_F \leq M\|x\|_E,$$

  lo cual demuestra que T es acotada.

- $(iii) \Rightarrow (iv)$: Supongamos que T es acotada. Entonces existe $M > 0$ tal que para todo $x \in E$, se cumple que $\|Tx\|_F \leq M\|x\|_E$. En particular, si $x \in \overline{\mathcal{B}(0,1)}$, es decir, $\|x\|_E \leq 1$, entonces

$$\|Tx\|_F \leq M$$

  como lo anterior se tiene para todo punto en $\overline{\mathcal{B}(0,1)}$, se tiene que $T(\overline{\mathcal{B}(0,1)})$ está contenido en la bola cerrada de radio M en F, lo que implica que$T(\overline{\mathcal{B}(0,1)})$ es un conjunto acotado.

- $(iv) \Rightarrow (i)$: Supongamos que $T(\overline{B(0,1)})$ es acotado. Entonces existe una constante $M > 0$ tal que para todo $x \in \overline{B(0,1)}$, se cumple que

$$\|Tx\|_F \leq M.$$

  Sea $x \in E$ con $x \neq 0$. Tomemos $y = \|x\|_E \cdot \dfrac{x}{\|x\|_E}$, donde $\dfrac{x}{\|x\|_E} \in \overline{B(0,1)}$. Usando la linealidad de la tranformación T y la desigualdad anterior, obtenemos,

$$\|Tx\|_F = \left\|T\left(\|x\|_E \cdot \frac{x}{\|x\|_E}\right)\right\|_F = \|x\|_E \cdot \left\|T\left(\frac{x}{\|x\|_E}\right)\right\|_F \leq \|x\|_E \cdot M.$$

  Por lo tanto, T es acotada. Luego, para todo $\varepsilon > 0$ con $x', y' \in E$ tenemos que si $\|x' - y'\| < \delta$

$$\|Tx' - Ty'\| = \|T(x' - y')\| = M\|x' - y'\| < M\delta = M\frac{\varepsilon}{M}.$$

luego, $\delta = \dfrac{\varepsilon}{M}$.

Con lo cual se concluye la demostración.

$\square$

Ejercicio 3 Demuestre que si $T \in \mathcal{L}(E, F)$, entonces:

(i) $\|Tx\|_F \leq \|T\| \, \|x\|_E$, para todo $x \in E$.

(ii) $\|T\| = \sup\limits_{\substack{x \in E \\ x \neq 0}} \dfrac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E}$.

(iii) $\|T\| = \sup\limits_{\|x\|_E = 1} \|Tx\|_F$.

(iv) $\|T\| = \text{ínf} \{M > 0 : \|Tx\|_F \leq M\|x\|_E, \, \forall x \in E\}$.

Demostración.

(i) prueba más sencilla Por hipótesis tenemos que $T \in \mathcal{L}(E, F)$, entonces como T es una aplicación lineal continua en particular, $\|Tx\|_F \leq \|T\|\|x\|_E$ para todo $x \in E$.

(i) Sea $\mathcal{L}(E, F)$ un espacio vectorial con la norma

$$\|T\| = \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\| \leq 1}} \|Tx\|_F.$$

Por definición de supremo, se tiene que $\|Tx\| \leq \|T\|$ para todo $x \in E$ con $\|x\| \leq 1$, si $x = 0$, la desigualdad se cumple trivialmente.

Ahora, tomemos $x \in E$ con $x \neq 0$ y $\|x\| > 1$, definamos

$$y = \frac{x}{\|x\|},$$

usando la linealidad de T, se tiene que

$$\|Ty\| = \left\| T\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right\| = \frac{1}{\|x\|}\|Tx\|.$$

Por la definición del supremo, como $\|y\| = 1$, se cumple que $\|Ty\| \leq \|T\|$, y por lo tanto,

$$\frac{1}{\|x\|}\|Tx\| \leq \|T\|,$$

multiplicando ambos lados por $\|x\|$,

$$\|Tx\| \leq \|T\|\|x\|.$$

Así, se concluye que para todo $x \in E$, se cumple $\|Tx\| \leq \|T\|\|x\|$, como queríamos.

(ii-iv) Definamos:

$$\alpha = \sup_{\|x\|_E=1} \|Tx\|_F,$$
$$\beta = \sup_{\substack{x\in E\\ x\neq 0}} \frac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E},$$
$$\gamma = \text{ínf}\{M > 0 : \|Tx\|_F \leq M\|x\|_E,\ \forall x \in E\}.$$

Veamos que $\|Tx\| \leq \alpha$ para todo $x \in E$ con $\|x\| = 1$. Tomemos $y \in E$ con $y \neq 0$ tal que $x = \frac{y}{\|y\|}$, por lo que

$$\|Tx\| = \left\|T\left(\frac{y}{\|y\|}\right)\right\| = \frac{\|Ty\|}{\|y\|} \leq \alpha,$$

como esto es válido para todo $y \in E$ con $y \neq 0$, se concluye que $\beta \leq \alpha$.

Por otro lado, para todo $x \in E$ con $x \neq 0$, se cumple que,

$$\frac{\|Tx\|}{\|x\|} \leq \beta,$$

entonces, usando la linealidad de T,

$$\left\|T\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| \leq \beta,$$

si definimos $y = \frac{x}{\|x\|}$, entonces $\|y\| = 1$, y se obtiene que $\|Ty\| \leq \beta$ para todo $y \in E$ con $\|y\| = 1$. Por lo tanto, $\alpha \leq \beta$.

En consecuencia, $\alpha = \beta$.

Ahora, si $M > 0$ es un número en el conjunto que define a γ, entonces se cumple que $\|Tx\| \leq M\|x\|$ para todo $x \in E$. Esto implica que

$$\frac{\|Tx\|}{\|x\|} \leq M,$$

y por lo tanto, $\beta \leq M$ para todo M en dicho conjunto. En consecuencia, $\beta \leq \gamma$.

Por otro lado, ya sabemos que $\frac{\|Tx\|}{\|x\|} \leq \beta$ para todo $x \in E$, $x \neq 0$, lo cual equivale a $\|Tx\| \leq \beta\|x\|$. Es decir, β también cumple la propiedad del conjunto que define γ, así que $\gamma \leq \beta$. Entonces, podemos concluir que,

$$\alpha = \beta = \gamma.$$

Finalmente, notemos que $\|T\| \geq \alpha$, ya que,

$$\{x \in E : \|x\| = 1\} \subseteq \{x \in E : \|x\| \leq 1\}.$$

Si M pertenece al conjunto que define a γ, entonces para todo $x \in E$ con $\|x\| \leq 1$, se tiene $\|Tx\| \leq M$, y como M es una cota superior de $\|Tx\|$ sobre la bola unitaria, se concluye que $\|T\| \leq M$. Esto válido para todo M del conjunto que define a γ, por lo que se tiene que $\|T\| \leq \gamma$.

Por lo tanto,

$$\|T\| = \alpha = \beta = \gamma.$$

Con lo cual, concluimos la demostración.

$\square$

Ejercicio 4 Sean $(E, \|\cdot\|_E)$ y $(F, \|\cdot\|_F)$ espacios vectoriales normados. Suponga que F es un espacio de Banach. Muestre que $\mathcal{L}(E, F)$ es un espacio de Banach con la norma usual de $\mathcal{L}(E, F)$. En particular, concluya que $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ y $E^{**} = \mathcal{L}(E^*, \mathbb{R})$ son espacios de Banach.

Demostración.
Sea $(E, \|\cdot\|_E)$ un espacio normado y sea $(F, \|\cdot\|_F)$ un espacio de Banach. Consideremos el conjunto $\mathcal{L}(E, F)$ de todas las aplicaciones lineales y continuas de E en F, provisto de la norma definida por

$$\|T\| := \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|T(x)\|_F.$$

Queremos demostrar que $\mathcal{L}(E, F)$, con esta norma, es un espacio de Banach.
Sea $(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{L}(E, F)$ una sucesión de Cauchy. Por definición, para todo $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n, m \geq N$,

$$\|T_n - T_m\| < \varepsilon,$$

es decir, para todo $x \in E$ con $\|x\|_E \leq 1$, se tiene que,

$$\|T_n(x) - T_m(x)\|_F < \varepsilon.$$

Ahora, sea $x \in E$ arbitrario (no necesariamente de norma menor o igual que uno), tenemos que para todo $n, m \geq N$, se cumple que,

$$\|T_n(x) - T_m(x)\|_F = \|(T_n - T_m)(x)\|_F \leq \|T_n - T_m\| \cdot \|x\|_E.$$

Dado $\varepsilon > 0$, si $x \neq 0$, se puede tomar $\delta := \dfrac{\varepsilon}{\|x\|_E}$, y por ser (T_n) de Cauchy, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n, m \geq N$,

$$\|T_n - T_m\| < \delta = \frac{\varepsilon}{\|x\|_E},$$

lo que implica

$$\|T_n(x) - T_m(x)\|_F < \varepsilon.$$

En el caso $x = 0$, se tiene trivialmente que $T_n(0) = 0$ para todo n, por lo que la sucesión es constante y, en particular, de Cauchy. Así, se concluye que para todo $x \in E$, la sucesión $(T_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \subseteq F$ es de Cauchy.
Como F es un espacio de Banach, existe un elemento $T(x) \in F$ tal que

$$T_n(x) \to T(x) \in F,$$

esto define una aplicación $T : E \to F$ mediante

$$T(x) := \lim_{n\to\infty} T_n(x).$$

Veamos que T es lineal. Sean $x, y \in E$ y $\lambda \in \mathbb{K}$ (donde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$). Como cada T_n es lineal, se tiene

$$T_n(\lambda x + y) = \lambda T_n(x) + T_n(y),$$

y como los límites existen en F, se concluye que

$$T(\lambda x + y) = \lim_{n\to\infty} T_n(\lambda x + y) = \lim_{n\to\infty} (\lambda T_n(x) + T_n(y)) = \lambda T(x) + T(y),$$

es decir, T es lineal.
Mostremos ahora que T es acotada. Como (T_n) es Cauchy en $\mathcal{L}(E, F)$, existe una constante $M > 0$ tal que $\|T_n\| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces, para todo $x \in E$,

$$\|T_n(x)\|_F \leq \|T_n\| \cdot \|x\|_E \leq M\|x\|_E,$$

y pasando al límite cuando $n \to \infty$,

$$\|T(x)\|_F \leq M\|x\|_E.$$

Esto demuestra que $T \in \mathcal{L}(E, F)$, es decir, T es lineal y continua.
Finalmente, veamos que $T_n \to T$ en $\mathcal{L}(E, F)$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n, m \geq N$,

$$\|T_n - T_m\| < \varepsilon.$$

Fijado $n \geq N$, y tomando el límite cuando $m \to \infty$, se obtiene

$$\|T_n - T\| = \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|T_n(x) - T(x)\|_F \leq \varepsilon.$$

Por tanto, $\|T_n - T\| \to 0$, lo que implica que $T_n \to T$ en $\mathcal{L}(E, F)$.

Concluimos que $\mathcal{L}(E, F)$, con la norma $\|\cdot\|$, es un espacio de Banach. Además, al ser $\mathbb{R}$ un espacio normado y de Banach con la norma usual, entonces $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ y $\mathcal{L}(E^*, \mathbb{R})$ son espacios de Banach. $\square$

Ejercicio 5 Sean E y F espacios vectoriales normados. Suponga que E es de dimensión finita (no se asume que F sea de dimensión finita).

(i) Muestre que todas las normas asignadas a E son equivalentes.

Demostración. Para mostrar que todas las normas definidas en E son equivalentes, primero vamos a mostrar que se tiene la transitividad entre normas equivalentes, además es importante resaltar que en este caso estamos tomando como norma base, la norma 1 definida como,

$$\|x\|_1 = \sum_{i=0}^{n} |\alpha_i|,$$

donde $x = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i e_i \in E$.

Ahora, supongamos que $\|\cdot\|_a$ y $\|\cdot\|_b$ son dos normas definidas sobre E que son equivalentes a la norma $\|\cdot\|_1$. Esto quiere decir que existen constantes positivas C_1, C_2, C_1', C_2' tales que, para todo $x \in E$, se cumple

$$C_1\|x\|_1 \leq \|x\|_a \leq C_2\|x\|_1,$$
$$C_1'\|x\|_1 \leq \|x\|_b \leq C_2'\|x\|_1.$$

A partir de estas desigualdades, queremos establecer la equivalencia directa entre $\|\cdot\|_a$ y $\|\cdot\|_b$. Combinando las desigualdades anteriores podemos decir que,

$$\begin{cases}
C_1\|x\|_1 \leq \|x\|_a \leq C_2\|x\|_1 & \Rightarrow \dfrac{C_1}{C_2}\|x\|_1 \leq \dfrac{1}{C_2}\|x\|_a \leq \|x\|_1 & \Rightarrow \dfrac{1}{C_2}\|x\|_a \leq \dfrac{1}{C_1'}\|x\|_b \\
C_1'\|x\|_1 \leq \|x\|_b \leq C_2'\|x\|_1 & \Rightarrow \|x\|_1 \leq \dfrac{1}{C_1'}\|x\|_b \leq \dfrac{C_2'}{C_1'}\|x\|_1 & \Rightarrow \|x\|_a \leq \dfrac{C_2}{C_1'}\|x\|_b \\
\|x\|_1 \leq \dfrac{1}{C_1}\|x\|_a \leq \dfrac{C_2}{C_1}\|x\|_1 & \Rightarrow \|x\|_1 \leq \dfrac{1}{C_1}\|x\|_a & \Rightarrow \dfrac{1}{C_2'}\|x\|_b \leq \dfrac{1}{C_1}\|x\|_a \\
\dfrac{C_1'}{C_2'} \leq \dfrac{1}{C_2'}\|x\|_b \leq \|x\|_1 & \Rightarrow \dfrac{1}{C_2'}\|x\|_b \leq \|x\|_1 & \Rightarrow \dfrac{C_1'}{C_2'}\|x\|_b \leq \|x\|_a
\end{cases}$$

Luego,

$$\frac{C_1}{C_2'}\|x\|_b \leq \|x\|_a \leq \frac{C_2}{C_1'}\|x\|_b$$

como C_1, C_2, C_1', C_2' son constantes positivas, $\dfrac{C_1'}{C_2'}$ y $\dfrac{C_2}{C_1'}$ también lo son. Lo que nos indica que $\|\cdot\|_a$ y $\|\cdot\|_b$ son equivalentes.

Ahora, queremos probar que

$$C_1\|x\|_1 \leq \|x\|_a \leq C_2\|x\|_1$$

se cumple para todo $x \in E$, donde C_1, C_2 son constantes positivas.

Para el caso $x = 0$, la proposición se cumple trivialmente. Entonces, tomemos $x \neq 0$ y veamos que, dividiendo entre $\|x\|_1$

$$C_1 \leq \frac{\|x\|_a}{\|x\|_1} \leq C_2 \text{ por lo que, } C_1 \leq \left\| \frac{x}{\|x\|_1} \right\|_a \leq C_2 \text{ , así } C_1 \leq \|u\|_a \leq C_2 \quad (1)$$

si tomamos $u = \dfrac{x}{\|x\|_1}$, donde $\|u\|_1 = 1$. Esto nos indica que basta con probar (1) para $u \in E$, con $\|u\|_1 = 1$.

Ahora, veamos que cualquier norma $\|\cdot\|_a$ en el espacio E, es continua en $\|\cdot\|_1$

Sea $\|\cdot\|_a : (E, \|\cdot\|_1) \longrightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|)$ definida por $x \mapsto \|x\|_a$.

Queremos mostrar que esta función es continua, es decir, que para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $\|x - x'\|_1 < \delta$, entonces

$$|\|x\|_a - \|x'\|_a| < \varepsilon.$$

Por la desigualdad triangular para la norma $\|\cdot\|_a$ se tiene

$$|\|x\|_a - \|x'\|_a| \leq \|x - x'\|_a,$$

ahora, escribamos $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$ y $x' = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i' e_i$, con $\{e_i\}_{i=1}^{n}$ una base finita de E, luego,

$$\begin{aligned}
\|x - x'\|_a &= \left\| \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - \alpha_i') e_i \right\|_a \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i - \alpha_i'| \cdot \|e_i\|_a \\
&\leq \left(\max_{1 \leq i \leq n} \|e_i\|_a \right) \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i - \alpha_i'| \\
&= \left(\max_{1 \leq i \leq n} \|e_i\|_a \right) \|x - x'\|_1.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, si tomamos

$$\delta = \frac{\varepsilon}{\max_{1 \leq i \leq n} \|e_i\|_a},$$

entonces, si $\|x - x'\|_1 < \delta$, se sigue que,

$$|\|x\|_a - \|x'\|_a| \leq \|x - x'\|_a < \varepsilon.$$

Esto prueba que $\|\cdot\|_a$ es continua en $(E, \|\cdot\|_1)$.

Ahora veamos cuales serían las constantes para decir que las normas son equivalentes para eso vamos a probar que si $B(0, 1)$ es compacto y acotado entonces en ese conjunto se alcanza máximo y mínimo.

Por lo demostrado anteriormente sabemos que $\|\cdot\|_a$ es una función continua y como E es un espacio vectorial de dimensión finita, luego, el conjunto

$$B = \{x \in E : \|x\|_1 = 1\}$$

es compacto por ser cerrado y acotado, por lo que existe un isomorfismo lineal $T : \mathbb{R}^n \to E$, por el teorema del valor extremo, la función continua definida sobre B alcanza su máximo y su mínimo. Definamos

$$C_1 = \min_{\|x\|_1=1} \|x\|_a, \quad C_2 = \max_{\|x\|_1=1} \|x\|_a.$$

Como $x \neq 0$ y $\|x\|_1 = 1$, entonces C_1 y C_2 son constantes positivas, con $C_2 \geq C_1$, y se cumple que

$$C_1 \leq \|x\|_a \leq C_2.$$

Luego, por la definición de equivalencia de normas, $\|\cdot\|_a$ y $\|\cdot\|_1$ son equivalentes.

$\square$

(ii) Muestre que toda transformación lineal $T : E \to F$ es continua.

Demostración. Sea $T : E \to F$ una transformación lineal, veamos que T es continua, para esto de acuerdo con el ejercicio 2 de este taller, sabemos que basta con mostrar que es acotada.

Como por hipótesis E es un espacio vectorial de dimensión finita, tomemos la base de E como $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, luego si $x \in E$ tenemos que $x = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i$, entonces la transformación lineal T es de la forma,

$$\begin{aligned} Tx &= T\left(\sum_{i=1}^{n} x_i v_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i T(v_i), \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} x_i v_i \max_{1\leq i\leq n} T(v_i), \end{aligned}$$

así, tenemos que

$$\begin{aligned} \|T\|_E &= \left\|\sum_{i=1}^{n} x_i T(v_i)\right\|_E \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} \|x_i T(v_i)\|_E \\ &= \sum_{i=1}^{n} |x_i| \cdot \|T(v_i)\|_E, \end{aligned}$$

por el punto anterior, como E es un espacio de dimensión finita existen constantes positivas C_1 y C_2, tal que $C_1\|x\|_E \leq \|x\|_1 \leq C_2\|x\|_E$ y si tomamos a $M_1 = \max_{1\leq i\leq n} \|T(v_i)\|_E$, entonces,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} |x_i| \cdot \|T(v_i)\|_E\|x\|_1 &\leq \max_{1\leq i\leq n} \|T(v_i)\|_E, \\ &\leq M_1C_2\|x\|_E \\ &= M\|x\|_E,\end{aligned}$$

por lo cual, T es acotado y continuo. □

(iii) Dé un ejemplo donde se verifique que (ii) puede ser falsa si E es de dimensión infinita.

Solución. Sea $T : (C^1([0,1]), \|\cdot\|_\infty) \longrightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|)$ donde por $f \mapsto f'(0)$. Note que T es una transformación lineal.

Queremos mostrar por la linealidad de la derivada que la transformación no es continua, por lo tanto, demostremos que T no es acotada.

Demostración. Supongamos que $T \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ con $\|\cdot\|_{\mathcal{L}^\infty}$, por lo cual, existe $M > 0$ tal que

$$|T(x)| = |f'(0)| \leq M\|f\|_{\mathcal{L}^\infty} \quad \text{para todo } f \in C^1([0,1]).$$

Sea $n \geq 2$ y $f(x) = (1-x)^n$, entonces, por la forma en la que está definida f tenemos que su máximo es 1 y se alcanza cuando f se evalúa en 0, luego $\|f\|_{\mathcal{L}^\infty} = 1$, tomando la derivada de f tenemos que

$$f'(x) = -n(1-x)^{n-1}, \quad f'(0) = -n.$$

Reemplazando

$$n = |f'(0)| \leq M\|f\|_\infty = M.$$

Por tanto, cuando $n \to \infty$, se tendría $n \leq M$ para todo $n \geq 2$, lo cual es una contradicción. Entonces T no es acotada.

□

Ejercicio 6
Considere $E = c_0$, donde

$$c_0 = \left\{ u = \{u_n\}_{n\geq 1} : \text{tales que } u_n \in \mathbb{R},\ \lim_{n\to\infty} u_n = 0 \right\}.$$

Es decir, c_0 es el conjunto de las secuencias reales que tienden a cero. Dotamos a este espacio con la norma $\|u\|_{\ell^\infty} = \sup_{n\in\mathbb{Z}^+} |u_n|$. Considere el funcional $f : E \to \mathbb{R}$ dado por

$$f(u) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} u_n.$$

(i) Muestre que $f \in E^*$ y calcule $\|f\|_{E^*}$.

Solución. Primero, observemos que el funcional está bien definido, esto ya que las sucesiones convergentes son acotadas, el supremo existe y como

$$\left| \frac{1}{2^n} u_n \right| \leq \|u\|_{\ell^\infty} \frac{1}{2^n},$$

por el criterio de comparación converge absolutamente, ya que el lado derecho de la desigualdad es una serie geométrica. Luego, dadas $u, v \in E$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, tenemos que $u + \lambda v \in E$, donde $u + \lambda v = \{u_n + \lambda v_n\}_{n\geq 1}$. Así, por la convergencia absoluta tenemos que f es lineal, ya que

$$\begin{aligned} f(u + \lambda v) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}(u_n + \lambda v_n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} u_n + \frac{1}{2^n} \lambda v_n \right), \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} u_n + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} v_n \\ &= f(u) + \lambda f(v). \end{aligned}$$

Ahora, mostremos que f es acotado. Observe que para una suma parcial se tiene que

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{2^n} u_n \right| &\leq \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{2^n} |u_n| \\ &\leq \sup_{n\in\mathbb{Z}^+} |u_n| \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{2^n} \\ &= \|u\|_{\ell^\infty} \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{2^n}. \end{aligned}$$

Note que, si hacemos $m \to \infty$ al lado derecho tenemos una serie geométrica que converge a 1, por lo cual, tenemos que

$$|f(u)| \leq \|u\|_{\ell^\infty}.$$

Mostrando así que f es acotada.
Faltaría simplemente calcular $\|f\|_{E^*}$. Por la cota hallada previamente si tomamos el supremo a ambos lados tenemos que

$$\|f(u)\|_{E^*} = \sup_{\|u\|_{\ell^\infty} \leq 1} |f(u)| \leq \sup_{\|u\|_{\ell^\infty} \leq 1} \|u\|_{\ell^\infty} = 1.$$

Ahora considere la sucesión u^N, donde $N \in \mathbb{Z}^+$ y está definida de la siguiente manera

$$u_n = \begin{cases} 1 & \text{Si } n \leq N, \\ 0 & \text{Si } n > N. \end{cases}$$

Claramente $\|u^N\|_{\ell^\infty} = 1$, luego por la desigualdad mostrada en el ejercicio 3 numeral (i) tenemos

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2^n} &= |f(u^N)| \\ &\leq \|f\|_{E^*} \|u^N\|_{\ell^\infty} \\ &=\leq \|f\|_{E^*}. \end{aligned}$$

Así como el lado derecho de la desigualdad no depende de N, si tomamos $N \to \infty$ tenemos que

$$1 \leq \|f\|_{E^*}.$$

Por lo que concluimos que $\|f\|_{E^*} = 1$.

ʊ̬ʊ

(ii) ¿Es posible encontrar $u \in E$ tal que $\|u\| = 1$ y $f(u) = \|f\|_{E^*}$?

Solución. En el numeral anterior vimos que $\|f\|_{E^*} = 1$, ahora queremos ver si existe una sucesión $u \in E$ de norma 1 tal que $f(u) = 1$. Supongamos que existe tal sucesión y veamos como esto nos lleva a una contradicción. Por hipótesis

$$u_n \leq |u_n| \leq \|u\|_{\ell^\infty} = 1,$$

luego $u_n - 1 \leq 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}^+$. Así podemos notar que

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{2^n}(u_n - 1) \right| &\leq \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{2^n}|u_n - 1| \\ &= \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{2^n}(1 - u_n) \\ &= \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{2^n} - \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{2^n} u_n. \end{aligned}$$

Luego si $m \to \infty$ tenemos que

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}(u_n - 1)\right| \leq 1 - f(u) = 0,$$

por lo tanto

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}(u_n - 1) = 0.$$

Ahora, note que si existe algún $u_n < 1$ la suma de arriba sería negativa, no igual a 0. Por lo que $u_n = 1$ para todo $n \in \mathbb{Z}^+$, pero esto implicaria que $u \notin E$, ya que esa sucesión no converge a 0. Luego no puede existir una sucesión u que cumpla lo mencionado.