



Edgar Santiago Ochoa Quiroga

María Alejandra Rodríguez Ríos .....

**Ejercicio 1** Considere que una fuente sin memoria emite los símbolos del alfabeto  $S = \{a, b, c\}$ . Se sabe que la distribución de probabilidad de los símbolos en la salida del canal es

$$P_Y = \{0.6, 0.3, 0.1\}.$$

Los símbolos entran a un canal ruidoso que puede cambiar unos símbolos en otros de acuerdo a la distribución de probabilidad que muestra la siguiente tabla de probabilidades condicionales  $p(x|y)$ :

entra\sale	a	b	c
a	0.95	0.03	0.02
b	0.03	0.95	0.02
c	0.02	0.02	0.96

Denote por  $X$  y  $Y$  las variables aleatorias que modelan los símbolos que salen de la fuente y del canal respectivamente. Resuelva las siguientes preguntas:

- A . Determine las entropías de la fuente y el canal.
- B . Determine la entropía del sistema.
- C . Determine e interprete las entropías condicionales  $H(X|Y)$  y  $H(Y|X)$ .
- D . Calcule la información común entre la entrada y la salida del sistema.
- E . Determine cuánta información se perdió dentro del canal.
- F . Determine la pérdida de información por símbolo.

## Ejercicio 2

Considere una fuente  $\mathcal{F}$  con una distribución de probabilidad  $\mathcal{P} = \{0.20, 0.15, 0.15, 0.10, 0.10, 0.30\}$  construya un código con longitud promedio de palabra  $L$ , tal que

$$H(\mathcal{F}) \leq L \leq H(\mathcal{F}) + 1.$$

## Ejercicio 3

- A . Demuestre que para tres variables aleatorias  $X$ ,  $Y$  y  $Z$  que toman valores sobre conjuntos finitos siempre se tiene que

$$H(X, Y) + H(X, Z) + H(Y, Z) \geq 2H(X, Y, Z).$$

**Demostración.** Para poder probar esa propiedad, primero probaremos lo siguiente, puesto que es importante para nuestra prueba

$$H(X, Y, Z) = H(X) + H(Y|X) + H(Z|X, Y). \quad (1)$$

La demostración se sigue de lo siguiente

$$\begin{aligned} H(X, Y, Z) &= - \sum_{x,y,z} p(x, y, z) \log p(x, y, z), \\ &= - \sum_{x,y,z} p(x, y, z) \log \left( \frac{p(x, y, z)}{p(x)p(y|x)p(z|x, y)} \right), \\ &= - \sum_{x,y,z} p(x, y, z) \log p(x) - \sum_{x,y,z} p(x, y, z) \log p(y|x) - \sum_{x,y,z} p(x, y, z) \log p(z|x, y), \\ &= - \sum_x p(x) \log p(x) - \sum_{x,y} p(x, y) \log p(y|x) - \sum_{x,y,z} p(x, y, z) \log p(z|x, y), \\ &= H(X) + H(Y|X) + H(Z|X, Y). \end{aligned}$$

De manera análoga tenemos que

$$H(X, Y, Z) = H(Y) + H(X|Y) + H(Z|Y, X). \quad (2)$$

Adicionalmente, tenemos que probar que,

$$H(X, Y) = H(X) + H(Y|X) \quad (3)$$

Esta prueba se tiene a partir de la siguiente cuenta,

$$\begin{aligned} H(X, Y) &= - \sum_{x,y} p(x, y) \log p(x, y) \\ &= - \sum_{x,y} p(x, y) \log (p(x)p(y|x)) \\ &= - \sum_{x,y} p(x, y) \log p(x) - \sum_{x,y} p(x, y) \log p(y|x) \\ &= - \sum_x p(x) \log p(x) - \sum_{x,y} p(x, y) \log p(y|x) \\ &= H(X) + H(Y|X). \end{aligned}$$

de manera similar, se puede demostrar que

$$H(X, Y) = H(Y) + H(X|Y). \quad (4)$$

por último, debemos probar estas dos propiedades

$$H(X|Y) \leq H(X), \quad (5)$$

$$H(X|Y, Z) \leq H(X|Z). \quad (6)$$

Para probar esas propiedades tenemos que usar la convexidad de la función logaritmo cuando tiene base mayor que 1, es decir, que

$$\log \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \right) \geq \sum_{i=1}^n \alpha_i \log(x_i), .$$

donde  $\alpha_i > 0$  y  $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$ ; así, (5) se sigue de

$$\begin{aligned} H(X) - H(X|Y) &= - \sum_{x,y} p(x,y) \log p(x) + \sum_{x,y} p(x,y) \log p(x|y) \\ &= - \sum_{x,y} p(x,y) \log \frac{p(x)}{p(x|y)} \\ &\geq - \log \sum_{x,y} p(x,y) \frac{p(x)}{p(x|y)} \\ &\geq - \log \sum_{x,y} p(x)p(y) \\ &= - \log(1) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por lo cual (5) queda probado.

Ahora bien, para probar (6) seguimos lo siguiente

$$\begin{aligned} H(X|Z) - H(X|Y, Z) &= H(X, Z) - H(Z) - H(X|Y, Z) \quad \text{por (3)} \\ &= - \sum_{x,y,z} p(x,y,z) \log p(x,z) + \sum_{x,y,z} p(x,y,z) \log p(z) \\ &\quad + \sum_{x,y,z} p(x,y,z) \log p(x|y,z) \\ &= - \sum_{x,y,z} p(x,y,z) \log \frac{p(x,z)}{p(z)p(x|y,z)} \\ &= - \sum_{x,y,z} p(x,y,z) \log \frac{p(x,z)p(y,z)}{p(z)p(x,y,z)} \\ &\geq - \log \sum_{x,y,z} \frac{p(x,y,z)p(x,z)p(y,z)}{p(z)p(x,y,z)} \\ &= - \log \sum_{x,z} \frac{p(x,z)}{p(z)} \sum_y p(y,z) \\ &= - \log \sum_{x,z} \frac{p(x,z)}{p(z)} p(z) \\ &= - \log(1) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Así, (6) queda probado, por lo que utilizando las propiedades demostradas anteriormente,

podemos decir que

$$\begin{aligned}
2H(X, Y, Z) &= H(X, Y, Z) + H(X, Y, Z) \\
&= H(X) + H(Y|X) + H(Z|X, Y) + H(Y) + H(Y|Z) + H(X|Y, Z) \quad \text{por (1) y (2)} \\
&= H(X, Y) + H(Y, Z) + H(Z|X, Y) + H(X|Y, Z) \quad \text{por (3)} \\
&\leq H(X, Y) + H(Y, Z) + H(Z|Y) + H(X|Z) \quad \text{por (6)} \\
&\leq H(X, Y) + H(Y, Z) + H(Z) + H(X|Z) \quad \text{por (5)} \\
&= H(X, Y) + H(Y, Z) + H(X, Z) \quad \text{por (4)}.
\end{aligned}$$

Concluyendo lo que queríamos demostrar.

□

B . Demuestre que para cualquier tripla de variables aleatorias se cumple que

$$I(X; Y|Z) = H(X|Z) + H(Y|Z) - H(X, Y|Z).$$

**Demostración.** Para poder demostrar esa propiedad, es necesario realizar dos demostraciones preliminares, la primera es probar que para 3 variables aleatorias arbitrarias se cumple que

$$H(X, Y, Z) = H(X) + H(Y, Z|X), \quad (7)$$

esta afirmación se tiene gracias a lo siguiente

$$\begin{aligned}
H(X, Y, Z) &= - \sum_{x,y,z} p(x, y, z) \log p(x, y, z) \\
&= - \sum_{x,y,z} p(x, y, z) \log (p(x)p(y, z|x)) \\
&= - \sum_{x,y,z} p(x, y, z) \log p(x) - \sum_{x,y,z} p(x, y, z) \log p(y, z|x) \\
&= H(X) + H(Y, Z|X).
\end{aligned}$$

La segunda propiedad que tenemos que probar es

$$I(X; Y|Z) = H(X|Z) - H(X|Y, Z), \quad (8)$$

la prueba de esto se sigue de

$$\begin{aligned}
I(X; Y|Z) &= - \sum_{x,y,z} p(x, y, z) \log p(x, y|z) \\
&= H(X|Z) + \sum_{x,y,z} p(x|z)p(y|z)p(x, y, z) \log p(x|z) + \sum_{x,y,z} p(x, y, z) \log \left( \frac{p(x, y, z)}{p(x, y|z)} \right) \\
&= H(X|Z) - H(X|Y, Z).
\end{aligned}$$

por lo anterior, podemos decir que

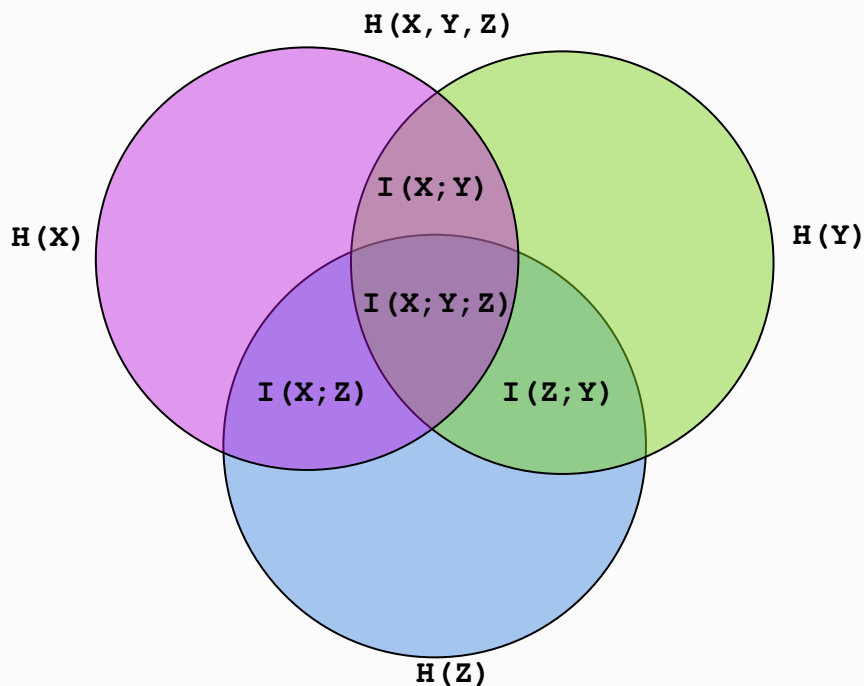
$$\begin{aligned}
 I(X; Y|Z) &= H(X|Z) - H(X|Y, Z) \quad \text{por (8)} \\
 &= H(X|Z) - (H(X, Y, Z) - H(Y, Z)) \quad \text{por el numeral anterior y el (3)} \\
 &= H(X|Z) - (H(X, Y|Z) + H(Z)) + H(Y, Z) \quad \text{por (7)} \\
 &= H(X|Z) + H(Y|Z) - H(X, Y|Z) \quad \text{por (4)}.
 \end{aligned}$$

□

C . Proponga una definición para la información común de tres variables  $I(X; Y; Z)$  y demuestre que

$$I(X; Y; Z) = I(X; Y) - I(X; Y|Z).$$

**Demostración.** Teniendo en cuenta que  $I(X; Y; Z)$  se refiere a la información que hay en común entre las 3 variables aleatorias, podemos aterrizar esto a una noción un poco más conjuntista para dar nuestra definición, de acuerdo con lo visto en clase sabemos que  $H(X; Y; Z)$  se refiere a la entropía total del sistema, y  $H(X)$ ,  $H(Y)$ ,  $H(Z)$  se refiere a las entropías de cada uno de los símbolos en un momento específico, además  $I(X; Y)$ ,  $I(X; Z)$  y  $I(Y; Z)$  se refieren a la información común entre variables aleatorias, graficando esto en un diagrama de Venn, podemos definir de manera más intuitiva  $I(X; Y; Z)$



de acuerdo con lo anterior tomamos a  $I(X; Y; Z)$  como

$$I(X; Y; Z) = H(X, Y, Z) - H(X) - H(Y) - H(Z) + I(X; Y) + I(Y; Z) + I(Z; X).$$

Para probar que

$$I(X; Y; Z) = I(X; Y) - I(X; Y|Z),$$

primero debemos probar algunas propiedades adicionales a las que ya hemos mostrado anteriormente, la primera de ellas es que

$$I(X; Y|Z) = H(X|Z) - H(X|Y, Z) \quad (9)$$

Para esto seguimos los siguientes cálculos

$$\begin{aligned} I(X; Y|Z) &= - \sum_{x,y,z} p(x, y, z) \log \frac{p(x, y|z)}{p(x|z)p(y|z)} \\ &= - \sum_{x,y,z} p(x, y, z) \log p(x|z) + \sum_{x,y,z} p(x, y, z) \log \frac{p(x, y|z)}{p(y|z)} \\ &= H(X|Z) + \sum_{x,y,z} p(x, y, z) \log \frac{p(x, y, z)}{p(z)} \cdot \frac{p(y, z)}{p(z)} \\ &= H(X|Z) + \sum_{x,y,z} p(x, y, z) \log p(x|y, z) \\ &= H(X|Z) - H(X|Y, Z). \end{aligned}$$

La segunda propiedad que probaremos es,

$$I(X; Y|Z) = H(X|Z) + H(Y|Z) - H(Z) - H(X, Y, Z), \quad (10)$$

para probar esta propiedad usaremos un ejercicio anterior y algunas de las propiedades probadas anteriormente,

$$\begin{aligned} I(X; Y|Z) &= H(X|Z) - H(X|Y, Z) \\ &= (H(X, Z) - H(Z)) - (H(X, Y, Z) - H(Y, Z)) \\ &= H(X, Z) + H(Y, Z) - H(Z) - H(X, Y, Z). \end{aligned}$$

Otra propiedad que tenemos que probar es,

$$I(X; Y) = H(X) + H(Y) - H(X, Y). \quad (11)$$

Utilizando las propiedades probadas anteriormente podemos decir lo siguiente

$$\begin{aligned} I(X; Y) &= H(X) - H(X|Y) \quad \text{por} \\ &= H(X) - (H(X, Y) - H(Y)) \quad \text{por} \\ &= H(X) + H(Y) - H(X, Y). \end{aligned}$$

Ahora si tenemos todas la herramientas para hacer la prueba, tomamos

$$\begin{aligned} I(X; Y) - I(X; Y|Z) &= H(X) + H(Y) - H(X, Y) - (H(X, Z) + H(Y, Z) - H(Z) - H(X, Y, Z)) \\ &= H(X, Y, Z) - H(X, Y) - H(X, Z) - H(Y, Z) + H(X) + H(Y) + H(Z) \\ &= H(X, Y, Z) + I(X; Y) + I(X; Z) + I(Y, Z) - H(X) - H(Y) - H(Z) \\ &= I(X; Y; Z) \end{aligned}$$

□

**Ejercicio 4** Pruebe que para todo  $n \geq 2$  se tiene que

$$H(X_1, \dots, X_n) \leq \sum_{i=1}^n H(X_i | X_j, j \neq i).$$

### Ejercicio 5

Suponga que una fuente genera la secuencia típica aabbcccaadeeeabcaadcdabbedededecacaeeddc-codcdeaabedbb. Determine un par de códigos Tunstall sobre alfabetos binarios y triarios, indique los diccionarios en cada caso. Cuál de los códigos trabajaría más eficiente?