Sandra Natalia Florez Garcia
Edgar Santiago Ochoa Quiroga
María Alejandra Rodríguez Ríos

Ejercicio 13 (I) Muestre que los siguientes conjuntos M son subespacios cerrados no vacíos de $L^2((-1,1))$ y determine explícitamente la proyección P_M en cada caso.

(a) $M = \{f \in L^2((-1,1)) : f(x) = f(-x)$ para casi todo $x \in (-1,1)\}$.

(b) $M = \left\{f \in L^2((-1,1)) : \int_{-1}^{1} f(x)dx = 0\right\}$.

(c) $M = \{f \in L^2((-1,1)) : f(x) = 0$ para casi todo $x \in (-1,0)\}$.

(II) Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto acotado. Considere

$$K = \left\{f \in L^2(\Omega) : \int_\Omega f(x)dx \geq 1\right\}$$

(a) Muestre que K es un conjunto cerrado convexo de $L^2(\Omega)$.

(b) Determine la proyección sobre K, es decir, el operador P_K.

Ejercicio 14 Sea H un espacio de Hilbert y $A \in L(H) = L(H,H)$ (el conjunto de funciones lineales continuas de H en H).

(I) Para $y \in H$ fijo, muestre que el funcional $\Phi_y : H \to \mathbb{R}$ dado por $x \mapsto (Ax, y)$ es lineal y continuo. Deduzca que existe un único elemento en H, que denotaremos por $A^\star y$, tal que

$$(Ax, y) = (x, A^\star y)\,, \quad \forall x \in H$$

Demostración. Probemos primero la linealidad del funcional. Sean $x_1, x_2 \in H$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, como A es una funcion lineal y el producto interno es bilineal, tenemos

$$\begin{aligned}\Phi_y(x_1 + \lambda x_2) &= (A(x_1 + \lambda x_2), y) \\ &= (A(x_1) + \lambda A(x_2), y) \\ &= (Ax_1, y) + \lambda(Ax_2, y) \\ &= \Phi_y(x_1) + \lambda\Phi_y(x_2).\end{aligned}$$

Mostrando asi la linealidad. Para ver que es continuo basta con ver que es acotado, pero por la desigualdad de Cauchy-Schwartz tenemos que

$$\begin{aligned}|\Phi_y(x)| &= |(Ax, y)| \\ &\leq (Ax, Ax)^{\frac{1}{2}}(y, y)^{\frac{1}{2}} \\ &= \|Ax\|\|y\|.\end{aligned}$$

Note que esto ultimo es debido a que H es un espacio de Hilbert, por lo que $\|\cdot\|$ es la norma en H inducida por el producto interno. Como por hipotesis $A \in L(H, H)$, asi sabemos que $\|Ax\| \leq \|A\|\|x\|$, es decir $\|Ax\|\|y\| \leq \|A\|\|y\|\|x\|$, pero como y es fijo, si tomamos $M = \|A\|\|y\|$ concluimos que

$$|\Phi_y(x)| \leq M\|x\|,$$

es decir Φ_y es actodado y por tanto continuo para cada y, por lo que $\Phi_y \in H^*$. Ahora por el teorema de representacion de Riesz-Frechet existe un unico elemento $z_y \in H$ tal que

$$\Phi_y(x) = (z, x).$$

Para todo $x \in H$. Note que este z_y es unico para cada y, por lo que denotaremos $z_y := A^*y$. Por la definicion de Φ_y y como el producto interno es simetrico conluimos la existencia de un unico elemento en H tal que

$$(Ax, y) = (x, A^*y).$$

ʊ̬ʊ

(II) Muestre que $A^\star \in L(H, H)$.$A^\star$ se llama el adjunto de A.

Demostración. Primero note que el operador A^* esta bien definido, ya que como dijimos en el anterior punto para cada y, existe un unico z_y, que definimos como $A^*y = z_y$, por lo que si es una funcion. Ahora veamos que es lineal, sean $y_1, y_2 \in H$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ note que por la propiedad respecto al producto interno del operador tenemos que para todo $x \in H$

$$\begin{aligned}
(x, A^*(y_1 + \lambda y_2)) &= (Ax, y_1 + \lambda y_2) \\
&= (Ax, y_1) + \lambda(Ax, y_2) \\
&= (x, A^*y_1) + \lambda(x, A^*y_2) \\
&= (x, A^*y_1 + \lambda A^*y_2),
\end{aligned}$$

note que usamos la bilinialidad del producto interno. Si ahora restamos y usamos la bilinealidad nuevamente obtenemos que

$$(x, A^*(y_1 + \lambda y_2) - (A^*y_1 + \lambda A^*y_2)) = 0,$$

para todo $x \in H$, si en particular tomamos $x = A^*(y_1 + \lambda y_2) - (A^*y_1 + \lambda A^*y_2)$, como el producto interno es no nulo para todo elemento diferente del 0, tenemos que

$$A^*(y_1 + \lambda y_2) - (A^*y_1 + \lambda A^*y_2) = 0,$$

es decir

$$A^*(y_1 + \lambda y_2) = A^*y_1 + \lambda A^*y_2.$$

Concluyendo asi la linealidad. Por ser lineal basta con ver que el operador es acotado, note que como la norma de H viene dada por el producto interno y por la desigualdad de

Cauchy-Schwartz tenemos que

$$\begin{aligned}
\|A^*y\|^2 &= (A^*y, A^*y) \\
&= |(A(A^*y), y)| \\
&\leq \|A(A^*y)\|\|y\|,
\end{aligned}$$

Como $A \in L(H, H)$, tenemos que $\|A(A^*y)\| \leq \|A\|\|A^*y\|$, Asi si llamamos $M = \|A\|$

$$\|A(A^*y)\|\|y\| \leq M\|A^*y\|\|y\|,$$

y por tanto

$$\|A^*y\|^2 \leq M\|A^*y\|\|y\|,$$

note que si $\|A^*y\| = 0$, se tiene trivialmente la acotacion, en cambio si $\|A^*y\| > 0$, podemos dividir a ambos lados por esta cantidad obteniendo asi

$$\|A^*y\| \leq M\|y\|.$$

Concluyendo que es acotado y por tanto continuo, asi $A^* \in L(H, H)$.

(III) Verifique que $(A^\star)^\star = A$ y que $\|A^\star\| = \|A\|$.

Demostración. Para la primera parte, sean $x, y \in H$, note que por la propiedad del adjunto tenemos que

$$\begin{aligned}
(x, (A^*)^*y) &= (A^*x, y) \\
&= (y, A^*x) \\
&= (Ay, x) \\
&(x, Ay).
\end{aligned}$$

Observe que en dos ocasiones usamos la simetria del producto interno. Luego por la bilinealidad

$$(x, (A^*)^*y - Ay) = 0,$$

si tomamos $x = (A^*)^*y - Ay$, de manera similar a la prueba de la linealidad del adjunto, concluimos que $(A^*)^*y - Ay = 0$, luego $(A^*)^*y = Ay$, pero note que en este proceso y era arbitrario, por lo que como son iguales para todo y, podemos concluir que

$$(A^*)^* = A.$$

Para la segunda parte en el anterior numeral habiamos conluido que

$$\|A^*y\| \leq \|A\|\|y\|.$$

Por lo que

$$\|A^*\| = \sup_{\substack{\|y\|=1 \\ y \in H}} \|A^*y\| \leq \sup_{\substack{\|y\|=1 \\ y \in H}} \|A\|\|y\| = \|A\|.$$

Por lo que faltaria ver la otra desigualdad. Pero esto se ve facilmente ya que como $\|A^*\| \leq \|A\|$, si reemplazamos A con A^*, tenemos que $\|(A^*)^*\| \leq \|A^*\|$, luego por la anterior parte, como $(A^*)^* = A$, asi concluimos que

$$\|A\| \leq \|A^*\|.$$

De esta manera concluimos la igualdad de las normas. ʊ̬ʊ

Ejercicio 15 Sea H un espacio de Hilbert y$M \subseteq H$ un subespacio cerrado. Considera la proyección ortogonal P_M. Muestre que

(I) P_M es lineal.

(II) $P_M^2 = P_M$ (esto es, aplicar dos veces el operador proyección da el mismo resultado).

(III) $P_M^\star = P_M$, donde $P_M^\star$ denota el adjunto de P_M (vea el Ejercicio 14).

(IV) Rango $(P_M) = M$ y Kernel $(P_M) = M^\perp$.

(V) Suponga que $P \in L(H)$. Entonces P es una proyección ortogonal sobre un subespacio cerrado de H si, y solo si, $P = P^2 = P^\star$.

Ejercicio 3
Considere los operadores de desplazamiento $S_r, S_l \in L\left(l^2\right)$, donde si $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) \in l^2$, estos se definen como

$$S_r x = (0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, \ldots)$$

y

$$S_l x = (x_2, x_3, x_4, \ldots, x_{n+1}, \ldots).$$

S_r se conoce como desplazamiento a derecha y S_l como desplazamiento a izquierda.

(a) Determinar las normas de $\|S_r\|$ y $\|S_l\|$.

(b) Muestre que $EV(S_r) = \emptyset$,

(c) Muestre que $\sigma(S_r) = [-1, 1]$.

(d) Muestre que $EV(S_l) = (-1, 1)$. Encuentre el espacio propio correspondiente.

(e) Muestre que $\sigma(S_l) = [-1, 1]$.

(f) Determine los adjuntos $S_r^\star$ y $S_l^\star$.

Ejercicio 4 Sea $1 \leq p < \infty$y consideremos el espacio $L^p((0,1))$, Dado $u \in L^p((0,1))$, definimos

$$Tu(x) = \int_0^x u(t)dt$$

(a) Demuestre que $T \in \mathcal{K}(L^p((0,1)))$.

Demostración. Probemos primero que efectivamente es un operador lineal y acotado. La linealidad del operador es clara ya que se hereda de la linealidad de la integral. Ahora por la desigualdad de Holder

$$\|u\|_{L^1} = \int_0^1 |u(t)|\,dt \leq \|1\|_{L^{p'}}\|u\|_{L^p} = \|u\|_{L^p}.$$

donde p' es el conjugado de p. Asi tenemos que

$$\begin{aligned}
\|Tu\|_{L^p} &= \left(\int_0^1 |Tu(x)|^p\,dx\right)^{1/p} \\
&= \left(\int_0^1 \left|\int_0^x u(t)dt\right|^p\,dx\right)^{1/p} \\
&\leq \left(\int_0^1 \left(\int_0^1 |u(t)|dt\right)^p\,dx\right)^{1/p} \\
&= \int_0^1 |u(t)|\,dt \\
&= \|u\|_{L^1} \\
&= \|u\|_{L^p},
\end{aligned}$$

Concluyendo así que T es acotado y ademas particularmente tenemos que $\|T\| \leq 1$. Faltaría ver que efectivamente es compacto el operador. Para esto usaremos el teorema de Kolmogorov. Riesz-Frechet enunciado en el Brezis. Para que no haya problemas como de igual manera $|h| \to 0$, tomaremos $|h| < 1$, asi si tomamos $f \in T(B)$, sabemos que existe $u \in B$ tal que $Tu = f$, luego si $h \leq 0$

$$\begin{aligned}
\|\tau_h f - f\|_{L^p} &= \left(\int_0^1 |\tau_h f(x) - f(x)|^p\,dx\right)^{1/p} \\
&= \left(\int_0^1 |\tau_h Tu(x) - Tu(x)|^p\,dx\right)^{1/p} \\
&= \left(\int_0^1 |Tu(x+h) - Tu(x)|^p\,dx\right)^{1/p} \\
&= \left(\int_0^1 \left|\int_0^{x+h} u(t)\,dt - \int_0^x u(t)\,dt\right|^p\,dx\right)^{1/p} \\
&= \left(\int_0^1 \left|\int_{x+h}^x u(t)\,dt\right|^p\,dx\right)^{1/p} \\
&\leq \left(\int_0^1 \left(\int_{x+h}^x |u(t)|\,dt\right)^p\,dx\right)^{1/p}
\end{aligned}$$

Como $u \in B$ por Holder como hicimos al inicio tenemos que

$$\int_{x+h}^x |u(t)|\,dt \leq \|\chi_{(x+h,x)}\|_{L^{p'}}\|u\|_{L^p} \leq |h|^{1/p'}$$

Así concluimos que cuando $|h| \to 0$, $||\tau_h f - f||_{L^p} \to 0$ para toda $f \in T(B)$, para el caso $h \geq 0$ la cuenta es análoga y solo cambia el orden de escritura en los intervalos de integración, por lo que el teorema citado nos dice que como $(0,1)$ tiene medida finita y $T(B)$ es acotado, luego la clausura de este conjunto de compacta en $L^p(0,1)$, asi concluimos que el operador es compacto.

ʊ̬ʊ

(b) Determine $EV(T)$ y $\sigma(T)$.

Demostración. Dado que T es compacto, sabemos que $0 \in \sigma(T)$ y que $\sigma(T) \setminus \{0\} = EV(T) \setminus \{0\}$, entonces consideremos $\lambda \neq 0$, como $l^p(0,1) \subset L^1(0,1)$, por diferenciación de Lebesgue dada $u \in L^p(0,1)$ tenemos que

$$\lim_{h \to 0^+} \int_x^{x+h} u(y)\, dy = u(x)$$

Para casi todo $x \in (0,1)$, se puede simplificar la elección de $h > 0$ ya que en caso contrario solo cambian los limites de integración. Así tenemos que la función

$$Tu(x) = \int_0^x u(t)\, dt$$

es derivable en casi toda parte en $(0,1)$, luego si escogemos $u \neq 0$ tal que $Tu = \lambda u$, tenemos por la derivavilidad que

$$u(x) = \lambda u'(x)$$

tomando $x \to 0^+$ nos damos cuenta de la formula de Tu que $u(0) = 0$ es la manera continua de extender a u al intervalo $[0,1)$, asi estamos resolviendo el problema de valor inicial

$$\begin{cases} u' = \frac{1}{\lambda} u \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

La solución general de esta EDO es $u(x) = Ce^{x/\lambda}$, pero por la condición inicial $C = 0$, concluyendo que la $u = 0$, esto es una contradicción, así concluimos que $\sigma(T) = \{0\}$ y $EV(T) = \varnothing$, ya que lo anterior nos dice que $\mathbb{R} \setminus \{0\} \subset \rho(T)$.

ʊ̬ʊ

(c) Dé una fórmula explícita para $(T - \lambda I)^{-1}$ cuando $\lambda \in \rho(T)$.

Demostración. Sea $u \in L^p(0,1)$ y $\lambda \neq 0$, por definición $f := (T - \lambda I)u = Tu - \lambda u$, si llamamos

$$h(x) = Tu(x)$$

Por lo visto en el item anterior sabemos que h es derivable para casi todo $x \in (0,1)$ y que ademas $h' = u$ con $x \in (0,1)$, asi tenemos el siguiente problema de valor inicial

$$\begin{cases} h - \lambda h' = f \\ h(0) = 0 \end{cases}$$

Luego la unica solucion de este PVI es

$$h(x) = -\frac{1}{\lambda} e^{x/\lambda} \int_0^x e^{-t/\lambda} f(t)\, dt$$

Por un argumento analogo a la parte b la parte integral de la solución es derivable en casi toda parte y en particular tenemos que por la regla del producto

$$h'(x) = -\frac{1}{\lambda^2} e^{x/\lambda} \int_0^x e^{-t/\lambda} f(t)\, dt - \frac{1}{\lambda} e^{-x/\lambda} f(x) e^{x/\lambda}$$

Asi como $h' = u$ tenemos que

$$u(x) = -\frac{1}{\lambda^2} e^{x/\lambda} \int_0^x e^{-t/\lambda} f(t)\, dt - \frac{1}{\lambda} f(x)$$

Así como $u = (T - \lambda I)^{-1} f$, deducimos que el operador inverso es la formula dada, es decir

$$(T - \lambda I)^{-1} f = -\frac{1}{\lambda^2} e^{x/\lambda} \int_0^x e^{-t/\lambda} f(t)\, dt - \frac{1}{\lambda} f(x)$$

ʊ̬ʊ

(d) Determine $T^{\star}$. Por definición

Demostración.

$$\begin{aligned} T^* : (L^p(0,1))^* &\to (L^p(0,1))^* \\ \mu &\to T^*\mu \end{aligned}$$

Donde

$$\begin{aligned} T^*\mu : L^p(0,1) &\to \mathbb{R} \\ f &\to \langle T^*\mu, f\rangle := \langle \mu, Tf\rangle. \end{aligned}$$

Esto ultimo por la definición de adjunto. Ahora por el teorema de representación de Riesz, existe una única $g_\mu \in L^{p'}(0,1)$ tal que

$$\langle \mu, Tf\rangle = \int_0^1 g_\mu(x) Tf(x)\, dx.$$

De manera similar como $p < \infty$, y el dual de L^p se identifica con $L^{p'}$, tenemos que existe única $h_\mu \in L^{p'}(0,1)$ tal que

$$\langle T^*, f\rangle = \int_0^1 h_\mu(x)f(x)\,dx$$

y por la igualdad dada previamente tenemos que

$$\int_0^1 h_\mu(x)f(x)\,dx = \int_0^1 g_\mu(x)Tf(x)\,dx.$$

Como f es arbitraria, manipulando el lado derecho de la igualdad tenemos que

$$\begin{aligned}\int_0^1 g_\mu(x)Tf(x)\,dx &= \int_0^1 g_\mu(x)\int_0^x f(t)dt\,dx\\ &= \int_0^1\int_0^x g_\mu(x)f(t)\,dtdx\\ &= \int_0^1\int_t^1 g_\mu(x)f(t)\,dxdt\\ &= \int_0^1 f(t)\int_t^1 g_\mu(x)\,dxdt\end{aligned}$$

Por la unicidad obtenemos que

$$h_\mu(t) = \int_t^1 g_\mu(x)\,dx = \int_0^1 g_\mu(x)\chi_{(t,1)}(x)\,dx = \langle \mu, \chi_{(t,1)}\rangle.$$

Con esto el adjunto esta dado por

$$\langle T^*\mu, f\rangle = \int_0^1 \langle \mu, \chi_{(t,1)}\rangle f(x)\,dx.$$

ᗜˬᗜ

Ejercicio 6 Considere $g \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$ (es decir, g es continua y acotada). Definimos el operador de multiplicación $M_g : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ dado por

$$M_g(f)(x) = g(x)f(x)$$

(a) Muestre que $\sigma(M_g) = \overline{\{g(x) : x \in \mathbb{R}\}}$.

(b) ¿Es el operador M_g compacto?