UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
FACULTAD DE CIENCIAS
ANÁLISIS FUNCIONAL

Sandra Natalia Florez Garcia
Edgar Santiago Ochoa Quiroga
María Alejandra Rodríguez Ríos ..........................................................

**Ejercicio 13** (I) Muestre que los siguientes conjuntos $M$ son subespacios cerrados no vacíos de $L^2((-1,1))$ y determine explícitamente la proyección $P_M$ en cada caso.

(a) $M = \{f \in L^2((-1,1)) : f(x) = f(-x)$ para casi todo $x \in (-1,1)\}$.

(b) $M = \left\{f \in L^2((-1,1)) : \int_{-1}^{1} f(x)dx = 0\right\}$.

(c) $M = \{f \in L^2((-1,1)) : f(x) = 0$ para casi todo $x \in (-1,0)\}$.

(II) Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto acotado. Considere

$$K = \left\{f \in L^2(\Omega) : \int_\Omega f(x)dx \geq 1\right\}$$

(a) Muestre que $K$ es un conjunto cerrado convexo de $L^2(\Omega)$.

(b) Determine la proyección sobre $K$, es decir, el operador $P_K$.

**Ejercicio 14** Sea $H$ un espacio de Hilbert y $A \in L(H) = L(H,H)$ (el conjunto de funciones lineales continuas de $H$ en $H$ ).

(I) Para $y \in H$ fijo, muestre que el funcional $\Phi_y : H \to \mathbb{R}$ dado por $x \mapsto (Ax, y)$ es lineal y continuo. Deduzca que existe un único elemento en $H$, que denotaremos por $A^\star y$, tal que

$$(Ax, y) = (x, A^\star y)\,, \quad \forall x \in H$$

**Demostración.** Probemos primero la linealidad del funcional. Sean $x_1, x_2 \in H$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, como $A$ es una funcion lineal y el producto interno es bilineal, tenemos

$$\begin{aligned}\Phi_y(x_1 + \lambda x_2) &= (A(x_1 + \lambda x_2), y) \\ &= (A(x_1) + \lambda A(x_2), y) \\ &= (Ax_1, y) + \lambda(Ax_2, y) \\ &= \Phi_y(x_1) + \lambda\Phi_y(x_2).\end{aligned}$$

Mostrando asi la linealidad. Para ver que es continuo basta con ver que es acotado, pero por la desigualdad de Cauchy-Schwartz tenemos que

$$\begin{aligned}|\Phi_y(x)| &= |(Ax, y)| \\ &\leq (Ax, Ax)^{\frac{1}{2}}(y, y)^{\frac{1}{2}} \\ &= \|Ax\|\|y\|.\end{aligned}$$

Note que esto ultimo es debido a que $H$ es un espacio de Hilbert, por lo que $\|\cdot\|$ es la norma en $H$ inducida por el producto interno. Como por hipotesis $A \in L(H, H)$, asi sabemos que $\|Ax\| \leq \|A\|\|x\|$, es decir $\|Ax\|\|y\| \leq \|A\|\|y\|\|x\|$, pero como $y$ es fijo, si tomamos $M = \|A\|\|y\|$ concluimos que

$$|\Phi_y(x)| \leq M\|x\|,$$

es decir $\Phi_y$ es actodado y por tanto continuo para cada $y$, por lo que $\Phi_y \in H^*$. Ahora por el teorema de representacion de Riesz-Frechet existe un unico elemento $z_y \in H$ tal que

$$\Phi_y(x) = (z, x).$$

Para todo $x \in H$. Note que este $z_y$ es unico para cada $y$, por lo que denotaremos $z_y := A^*y$. Por la definicion de $\Phi_y$ y como el producto interno es simetrico conluimos la existencia de un unico elemento en $H$ tal que

$$(Ax, y) = (x, A^*y).$$

(II) Muestre que $A^\star \in L(H, H).A^\star$ se llama el adjunto de $A$.

**Demostración.** Primero note que el operador $A^*$ esta bien definido, ya que como dijimos en el anterior punto para cada $y$, existe un unico $z_y$, que definimos como $A^*y = z_y$, por lo que si es una funcion. Ahora veamos que es lineal, sean $y_1, y_2 \in H$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ note que por la propiedad respecto al producto interno del operador tenemos que para todo $x \in H$

$$\begin{aligned}(x, A^*(y_1 + \lambda y_2)) &= (Ax, y_1 + \lambda y_2) \\ &= (Ax, y_1) + \lambda(Ax, y_2) \\ &= (x, A^*y_1) + \lambda(x, A^*y_2) \\ &= (x, A^*y_1 + \lambda A^*y_2),\end{aligned}$$

note que usamos la bilinialidad del producto interno. Si ahora restamos y usamos la bilinealidad nuevamente obtenemos que

$$(x, A^*(y_1 + \lambda y_2) - (A^*y_1 + \lambda A^*y_2)) = 0,$$

para todo $x \in H$, si en particular tomamos $x = A^*(y_1 + \lambda y_2) - (A^*y_1 + \lambda A^*y_2)$, como el producto interno es no nulo para todo elemento diferente del 0, tenemos que

$$A^*(y_1 + \lambda y_2) - (A^*y_1 + \lambda A^*y_2) = 0,$$

es decir

$$A^*(y_1 + \lambda y_2) = A^*y_1 + \lambda A^*y_2.$$

Concluyendo asi la linealidad. Por ser lineal basta con ver que el operador es acotado, note que como la norma de $H$ viene dada por el producto interno y por la desigualdad de

Cauchy-Schwartz tenemos que

$$\begin{aligned}\|A^*y\|^2 &= (A^*y, A^*y)\\ &= |(A(A^*y), y)|\\ &\leq \|A(A^*y)\|\|y\|,\end{aligned}$$

Como $A \in L(H, H)$, tenemos que $\|A(A^*y)\| \leq \|A\|\|A^*y\|$, Asi si llamamos $M = \|A\|$

$$\|A(A^*y)\|\|y\| \leq M\|A^*y\|\|y\|,$$

y por tanto

$$\|A^*y\|^2 \leq M\|A^*y\|\|y\|,$$

note que si $\|A^*y\| = 0$, se tiene trivialmente la acotacion, en cambio si $\|A^*y\| > 0$, podemos dividir a ambos lados por esta cantidad obteniendo asi

$$\|A^*y\| \leq M\|y\|.$$

Concluyendo que es acotado y por tanto continuo, asi $A^* \in L(H, H)$.

ʊ̬ʊ

(III) Verifique que $(A^\star)^\star = A$ y que $\|A^\star\| = \|A\|$.

**Demostración.** Para la primera parte, sean $x, y \in H$, note que por la propiedad del adjunto tenemos que

$$\begin{aligned}(x, (A^*)^*y) &= (A^*x, y)\\ &= (y, A^*x)\\ &= (Ay, x)\\ &(x, Ay).\end{aligned}$$

Observe que en dos ocasiones usamos la simetria del producto interno. Luego por la bilinealidad

$$(x, (A^*)^*y - Ay) = 0,$$

si tomamos $x = (A^*)^*y - Ay$, de manera similar a la prueba de la linealidad del adjunto, concluimos que $(A^*)^*y - Ay = 0$, luego $(A^*)^*y = Ay$, pero note que en este proceso $y$ era arbitrario, por lo que como son iguales para todo $y$, podemos concluir que

$$(A^*)^* = A.$$

Para la segunda parte en el anterior numeral habiamos conluido que

$$\|A^*y\| \leq \|A\|\|y\|.$$

Por lo que

$$\|A^*\| = \sup_{\substack{\|y\|=1\\ y\in H}} \|A^*y\| \leq \sup_{\substack{\|y\|=1\\ y\in H}} \|A\|\|y\| = \|A\|.$$

Por lo que faltaria ver la otra desigualdad. Pero esto se ve facilmente ya que como $\|A^*\| \leq \|A\|$, si reemplazamos $A$ con $A^*$, tenemos que $\|(A^*)^*\| \leq \|A^*\|$, luego por la anterior parte, como $(A^*)^* = A$, asi concluimos que

$$\|A\| \leq \|A^*\|.$$

De esta manera concluimos la igualdad de las normas. ʊ.ʊ

**Ejercicio 15** Sea $H$ un espacio de Hilbert y$M \subseteq H$ un subespacio cerrado. Considera la proyección ortogonal $P_M$. Muestre que

(I) $P_M$ es lineal.

(II) $P_M^2 = P_M$ (esto es, aplicar dos veces el operador proyección da el mismo resultado).

(III) $P_M^\star = P_M$, donde $P_M^\star$ denota el adjunto de $P_M$ (vea el Ejercicio 14).

(IV) Rango $(P_M) = M$ y Kernel $(P_M) = M^\perp$.

(V) Suponga que $P \in L(H)$. Entonces $P$ es una proyección ortogonal sobre un subespacio cerrado de $H$ si, y solo si, $P = P^2 = P^\star$.

**Ejercicio 3**
Considere los operadores de desplazamiento $S_r, S_l \in L\left(l^2\right)$, donde si $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) \in l^2$, estos se definen como

$$S_r x = (0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, \ldots)$$

y

$$S_l x = (x_2, x_3, x_4, \ldots, x_{n+1}, \ldots).$$

$S_r$ se conoce como desplazamiento a derecha y $S_l$ como desplazamiento a izquierda.

(a) Determinar las normas de $\|S_r\|$ y $\|S_l\|$.

(b) Muestre que $EV(S_r) = \emptyset$,

(c) Muestre que $\sigma(S_r) = [-1, 1]$.

(d) Muestre que $EV(S_l) = (-1, 1)$. Encuentre el espacio propio correspondiente.

(e) Muestre que $\sigma(S_l) = [-1, 1]$.

(f) Determine los adjuntos $S_r^\star$ y $S_l^\star$.

**Ejercicio 4** Sea $1 \leq p < \infty$y consideremos el espacio $L^p((0,1))$, Dado $u \in L^p((0,1))$, definimos

$$Tu(x) = \int_0^x u(t)\,dt$$

(a) Demuestre que $T \in \mathcal{K}(L^p((0,1)))$.

(b) Determine $EV(T)$ y $\sigma(T)$.

(c) Dé una fórmula explícita para $(T - \lambda I)^{-1}$ cuando $\lambda \in \rho(T)$.

(d) Determine $T^\star$.

**Ejercicio 6** Considere $g \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$ (es decir, $g$ es continua y acotada). Definimos el operador de multiplicación $M_g : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ dado por

$$M_g(f)(x) = g(x)f(x)$$

(a) Muestre que $\sigma\left(M_g\right) = \overline{\{g(x) : x \in \mathbb{R}\}}$.

(b) ¿Es el operador $M_g$ compacto?