UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
FACULTAD DE CIENCIAS
ANÁLISIS FUNCIONAL

Sandra Natalia Florez Garcia
Edgar Santiago Ochoa Quiroga
María Alejandra Rodríguez Ríos

Ejercicio 13 (I) Muestre que los siguientes conjuntos M son subespacios cerrados no vacíos de $L^2((-1,1))$ y determine explícitamente la proyección P_M en cada caso.

(a) $M = \{f \in L^2((-1,1)) : f(x) = f(-x) \text{ para casi todo } x \in (-1,1)\}$.

Demostración.

I) **M es no vacio:** Veamos que $f(x) = 0 \in M$, pues

$$\|f(x)\|_{L_2} = \left(\int_{-1}^{1} |0|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} = 0 < \infty \quad \text{y} \quad f(-x) = 0 = f(x).$$

II) **M es cerrado:** Sea $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq M$ tal que $f_n \to f$ en $L^2(-1,1)$. Entonces, para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{Z}^+$ tal que si $n \geq N$, se cumple

$$\|f_n - f\|_{L^2(-1,1)} < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1}$$

A continuación, definamos $g(x) := f(-x)$ para $x \in (-1,1)$, y veamos que

$$\begin{aligned} \|g - f\|_{L^2(-1,1)} &= \|g - f_n + f_n - f\|_{L^2(-1,1)} \\ &\leq \underbrace{\|g - f_n\|_{L^2(-1,1)}}_{A} + \|f_n - f\|_{L^2(-1,1)}. \end{aligned} \tag{2}$$

Para estimar el término A, notamos que como $f_n(x) = f_n(-x)$ para casi todo $x \in (-1,1)$, se tiene

$$\begin{aligned} A^2 = \int_{-1}^{1} |g(x) - f_n(x)|^2\, dx &= \int_{-1}^{1} |f(-x) - f_n(x)|^2\, dx \\ &= \int_{-1}^{1} |f(-x) - f_n(-x)|^2\, dx. \end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variable $u = -x$, obtenemos

$$A^2 = -\int_1^{-1} |f(u) - f_n(u)|^2 \, du = \int_{-1}^{1} |f(u) - f_n(u)|^2 \, du$$
$$= \|f - f_n\|^2_{L^2(-1,1)}. \tag{3}$$

Entonces, para $n \geq N$, usando las ecuaciones (1), (3) y (2), obtenemos:

$$\begin{aligned} \|g - f\|_{L^2(-1,1)} &\leq \|g - f_n\|_{L^2(-1,1)} + \|f_n - f\|_{L^2(-1,1)} \\ &= \|f - f_n\|_{L^2(-1,1)} + \|f_n - f\|_{L^2(-1,1)} \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario, concluimos que $\|g - f\|_{L^2(-1,1)} = 0$, es decir, $f(x) = f(-x)$ para casi todo $x \in (-1, 1)$, lo cual implica que $f \in M$. Por tanto, M es cerrado.

III) **M es un subespacio:** Sea $f, g \in M$, veamos que $f + g \in M$.
Por la definición del conjunto M, se cumple que $f(x) = f(-x)$ y $g(x) = g(-x)$ para casi todo $x \in (-1, 1)$. Esto significa que existen conjuntos de medida nula F y G tales que

$$f(x) = f(-x) \quad \forall x \in (-1, 1) \setminus F,$$
$$g(x) = g(-x) \quad \forall x \in (-1, 1) \setminus G.$$

Además, por la subaditividad de la medida de Lebesgue, se tiene

$$0 \leq \mu(F \cup G) \leq \mu(F) + \mu(G) = 0,$$

por lo tanto, $F \cup G$ también es un conjunto de medida nula. Como

$$(-1, 1) \setminus (F \cup G) \subseteq (-1, 1) \setminus F, \quad (-1, 1) \setminus G,$$

se concluye que para casi todo $x \in (-1, 1) \setminus (F \cup G)$ se cumple

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = f(-x) + g(-x) = (f + g)(-x).$$

Así, $f + g \in M$.
Ahora, para f, sabemos que $f(x) = f(-x)$ para casi todo $x \in (-1, 1) \setminus F$. Sea $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x) = \lambda f(-x) = (\lambda f)(-x) \quad ,$$

para casi todo $x \in (-1, 1) \setminus F$, lo cual implica que $\lambda f \in M$. Por lo tanto, M es un subespacio de H.

IV) **Proyección P_M:** Como M es un subespacio cerrado de $L^2((-1, 1))$, para todo $f \in L^2((-1, 1))$ la proyección ortogonal $P_M f$ está bien definida como la única $g \in M$ tal que

$$(f - g, h) = 0 \quad \text{para toda } h \in M.$$

Definimos $g(x) := \dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$. Notamos que $g \in L^2((-1,1))$, ya que $L^2((-1,1))$ es un espacio vectorial, y si $f \in L^2$, entonces también lo están $f(-x)$ y su suma. Además,

$$g(-x) = \frac{f(-x)+f(-(-x))}{2} = \frac{f(-x)+f(x)}{2} = g(x),$$

por lo tanto, $g \in M$.
Ahora calculemos $(f-g,h)$ para $h \in M$:

$$\begin{aligned}(f-g,h) &= \int_{-1}^{1}\left[f(x) - \frac{f(x)+f(-x)}{2}\right] h(x)\,dx \\ &= \int_{-1}^{1}\left[\frac{f(x)}{2} - \frac{f(-x)}{2}\right] h(x)\,dx \\ &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)h(x)\,dx - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(-x)h(x)\,dx \\ &= B - A,\end{aligned}$$

donde:

- $B = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)h(x)\,dx$,
- $A = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(-x)h(x)\,dx$.

Como $h \in M$, entonces $h(x) = h(-x)$ para casi todo $x \in (-1,1)$. Usando el cambio de variable $u = -x$, tenemos:

$$\begin{aligned}A &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(-x)h(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(-x)h(-x)\,dx \\ &= -\frac{1}{2}\int_{1}^{-1} f(u)h(u)\,du = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(u)h(u)\,du = B.\end{aligned}$$

Luego, como $A = B$, se concluye que:

$$(f-g,h) = B - A = 0.$$

Por lo tanto, $g = P_M f$ es la proyección ortogonal de f sobre M, y está dada por:

$$(P_M f)(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}.$$

$\square$

(b) $M = \left\{ f \in L^2((-1,1)) : \int_{-1}^{1} f(x)dx = 0 \right\}$.

Demostración.

I) **M es no vacío:** Consideremos la función $f(x) = x$. Notamos que $f \in L^2((-1,1))$ porque

$$\int_{-1}^{1} |x|^2 \, dx = \int_{-1}^{1} x^2 \, dx = \frac{2}{3} < \infty.$$

Además,

$$\int_{-1}^{1} f(x) \, dx = \int_{-1}^{1} x \, dx = 0.$$

Por lo tanto, $f(x) = x \in M$, y así concluimos que $M \neq \emptyset$.

II) M **es cerrado:** En primera instancia, notamos que podemos expresar M usando el producto interno de $L^2((-1,1))$:

$$M = \left\{ f \in L^2((-1,1)) : \int_{-1}^{1} f(x) \, dx = 0 \right\} = \left\{ f \in L^2((-1,1)) : (f, 1) = 0 \right\},$$

donde 1 es la función constante $g(x) = 1$.

Es importante mencionar que, para $f \in L^2((-1,1))$, tiene sentido calcular la integral

$$\int_{-1}^{1} f(x) \, dx,$$

porque $\mu((-1,1)) = 2 < \infty$. Además, usando la desigualdad de Cauchy–Schwarz, se tiene:

$$\left| \int_{-1}^{1} f(x) \, dx \right| \leq \left(\int_{-1}^{1} 1^2 \, dx \right)^{1/2} \left(\int_{-1}^{1} |f(x)|^2 \, dx \right)^{1/2} = \sqrt{2} \, \|f\|_{L^2((-1,1))},$$

por lo que la integral es finita.

Notemos ahora que $L^2((-1,1)) \setminus M \neq \varnothing$, pues, por ejemplo, la función constante $g(x) = 1$ pertenece a $L^2((-1,1))$, pero no a M, ya que

$$(g, 1) = \int_{-1}^{1} 1 \cdot 1 \, dx = 2 \neq 0.$$

Así, $g \notin M$. Sea ahora $f \in L^2((-1,1)) \setminus M$, entonces $(f, 1) \neq 0$. Definimos:

$$\alpha := \left| \left(f, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right| = \frac{1}{\sqrt{2}} |(f, 1)| > 0.$$

Sea $B := B(f, \frac{\alpha}{2})$ la bola abierta en $L^2((-1,1))$ centrada en f y de radio $\frac{\alpha}{2}$. Si $g \in B$, entonces

$$\|g-f\|_{L^2} < \frac{\alpha}{2}.$$

Aplicando nuevamente la desigualdad de Cauchy–Schwarz, se obtiene:

$$\left|\left(g-f, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right| \le \|g-f\|_{L^2} \cdot \left\|\frac{1}{\sqrt{2}}\right\|_{L^2} = \|g-f\|_{L^2} < \frac{\alpha}{2}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\left|\left(g, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right| &= \left|\left(f, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(g-f, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right| \\
&\ge \left|\left(f, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right| - \left|\left(g-f, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right| \\
&> \alpha - \frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2} > 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$|(g,1)| = \sqrt{2} \cdot \left|\left(g, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right| > \sqrt{2} \cdot \frac{\alpha}{2} > 0,$$

lo cual implica que $(g,1) \neq 0$, es decir, $g \notin M$. Así, $B \subseteq L^2((-1,1)) \setminus M$, y por lo tanto, $L^2((-1,1)) \setminus M$ es abierto.

Concluimos que M es cerrado en $L^2((-1,1))$.

III) **M es subespacio:** Recordemos que

$$M = \left\{ f \in L^2((-1,1)) : \int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 0 \right\}.$$

Sea $f, g \in M$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces:

$$\int_{-1}^{1} (\lambda f(x) + g(x))\,dx = \lambda \int_{-1}^{1} f(x)\,dx + \int_{-1}^{1} g(x)\,dx = \lambda \cdot 0 + 0 = 0.$$

Por tanto, $\lambda f + g \in M$, y así M es un subespacio vectorial de $L^2((-1,1))$.

IV) **Proyección ortogonal sobre M:** Sea $f \in L^2((-1,1))$, queremos encontrar $g \in M$ tal que

$$(f-g, h) = 0 \quad \text{para toda } h \in M,$$

es decir,

$$\int_{-1}^{1} (f(x) - g(x))h(x)\,dx = 0.$$

Proponemos

$$g(x) := f(x) - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(t)\,dt,$$

y veremos que $g = P_M f$.

Primero, verifiquemos que $g \in M$:

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} g(x)\,dx &= \int_{-1}^{1} \left(f(x) - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(t)\,dt\right)\,dx \\
&= \int_{-1}^{1} f(x)\,dx - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(t)\,dt \cdot \int_{-1}^{1} dx \\
&= \int_{-1}^{1} f(x)\,dx - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(t)\,dt \cdot 2 \\
&= \int_{-1}^{1} f(x)\,dx - \int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 0.
\end{aligned}$$

Así, $g \in M$.

Ahora, tomemos $h \in M$ y calculemos $(f - g, h)$:

$$\begin{aligned}
(f-g,h) &= \int_{-1}^{1} \left[f(x) - \left(f(x) - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(t)\,dt\right)\right] h(x)\,dx \\
&= \int_{-1}^{1} \left(\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(t)\,dt\right) h(x)\,dx \\
&= \left(\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(t)\,dt\right)\left(\int_{-1}^{1} h(x)\,dx\right).
\end{aligned}$$

Como $h \in M$, se tiene que $\int_{-1}^{1} h(x)\,dx = 0$, y por lo tanto:

$$(f-g,h) = 0.$$

Así, $g = f(x) - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(t)\,dt$ es la proyección ortogonal de f sobre M, es decir,

$$(P_M f)(x) = f(x) - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(t)\,dt.$$

□

- $M = \{f \in L^2((-1,1)) : f(x) = 0 \text{ para casi todo } x \in (-1,0)\}$.

Demostración.

I) **M es no vacío:** Consideremos la función característica

$$f(x) := \chi_{[0,1)}(x).$$

Entonces $f(x) = 0$ para todo $x \in (-1,0)$, por lo tanto también se anula para casi todo $x \in (-1,0)$, y claramente es medible. Verificamos que $f \in L^2((-1,1))$:

$$\|f\|_{L^2((-1,1))}^2 = \int_{-1}^{1} |f(x)|^2 \, dx = \int_{-1}^{1} \chi_{[0,1)}(x) \, dx = \int_{0}^{1} 1 \, dx = 1.$$

Luego $f \in L^2((-1,1))$ y $f \in M$, de modo que $M \neq \varnothing$.

II) **M es cerrado:** Notemos que

$$f \in M \iff \int_{-1}^{0} |f(x)|^2 \, dx = 0 \iff \|\chi_{(-1,0)} f\|_{L^2((-1,1))} = 0,$$

donde $\chi_{(-1,0)}$ denota la función característica del intervalo $(-1,0)$.
Sea $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq M$ tal que $f_n \to f$ en $L^2((-1,1))$. Queremos probar que $f \in M$, es decir, que

$$\|\chi_{(-1,0)} f\|_{L^2((-1,1))} = 0.$$

Para ello, primero observamos que

$$\|\chi_{(-1,0)} f_n - \chi_{(-1,0)} f\|_{L^2((-1,1))} = \|\chi_{(-1,0)}(f_n - f)\|_{L^2((-1,1))}.$$

Usando la definición de la norma L^2:

$$\begin{aligned}
\|\chi_{(-1,0)}(f_n - f)\|_{L^2((-1,1))}^2 &= \int_{-1}^{1} \left|\chi_{(-1,0)}(x)(f_n(x) - f(x))\right|^2 dx \\
&= \int_{-1}^{0} |f_n(x) - f(x)|^2 dx.
\end{aligned}$$

Como $f_n \to f$ en $L^2((-1,1))$, se tiene que

$$\int_{-1}^{0} |f_n(x) - f(x)|^2 dx \leq \int_{-1}^{1} |f_n(x) - f(x)|^2 dx \to 0,$$

por lo que

$$\|\chi_{(-1,0)} f_n - \chi_{(-1,0)} f\|_{L^2((-1,1))} \to 0,$$

es decir,

$$\chi_{(-1,0)} f_n \to \chi_{(-1,0)} f \quad \text{en } L^2((-1,1)).$$

Sea ahora $\varepsilon > 0$. Como $\chi_{(-1,0)} f_n \to \chi_{(-1,0)} f$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$, entonces

$$\|\chi_{(-1,0)}(f_n - f)\|_{L^2((-1,1))} < \varepsilon.$$

Para $n \geq N$, se cumple:

$$\begin{aligned}
\|\chi_{(-1,0)} f\|_{L^2((-1,1))} &= \|\chi_{(-1,0)} f - \chi_{(-1,0)} f_n + \chi_{(-1,0)} f_n\|_{L^2((-1,1))} \\
&\leq \|\chi_{(-1,0)}(f - f_n)\|_{L^2((-1,1))} + \|\chi_{(-1,0)} f_n\|_{L^2((-1,1))}.
\end{aligned}$$

Como $f_n \in M$, se tiene $\chi_{(-1,0)} f_n(x) = 0$ para casi todo $x \in (-1,0)$, por lo que:

$$\|\chi_{(-1,0)} f\|_{L^2((-1,1))} < \varepsilon.$$

Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario, se deduce que:

$$\|\chi_{(-1,0)} f\|_{L^2((-1,1))} = 0,$$

es decir, $f(x) = 0$ para casi todo $x \in (-1, 0)$, por lo tanto $f \in M$.

III) **M es subespacio:** Sean $f, g \in M$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Por definición de M, existen conjuntos de medida nula F y G tales que

$$f(x) = 0 \quad \text{para todo } x \in (-1, 0) \setminus F,$$

$$g(x) = 0 \quad \text{para todo } x \in (-1, 0) \setminus G.$$

Como $0 \leq \mu(F \cup G) \leq \mu(F) + \mu(G) = 0$, se sigue que $F \cup G$ es también de medida nula.
Además, como

$$(-1, 0) \setminus (F \cup G) \subseteq (-1, 0) \setminus F \quad \text{y} \quad (-1, 0) \setminus (F \cup G) \subseteq (-1, 0) \setminus G,$$

entonces para todo $x \in (-1, 0) \setminus (F \cup G)$,

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = 0 + 0 = 0,$$

es decir, $f + g \in M$.
Por otro lado, si $x \in (-1, 0) \setminus F$, entonces $f(x) = 0$, por lo tanto $\lambda f(x) = \lambda \cdot 0 = 0$, así que $\lambda f \in M$.Concluimos que M es un subespacio vectorial de $L^2((-1, 1))$.

IV) **Proyección ortogonal sobre M:** Sea $f \in L^2((-1, 1))$, queremos encontrar $g \in M$ tal que

$$(f - g, h) = 0 \quad \text{para toda } h \in M.$$

Tomemos $g = \chi_{[0,1)} f$ y veamos que $g = P_M f$. Claramente, $g(x) = 0$ para todo $x \in (-1, 0)$, por lo cual $g \in M$.
Sea $h \in M$, entonces:

$$\begin{aligned}
(f - g, h) &= \int_{-1}^{1} \left(f(x) - \chi_{[0,1)}(x) f(x) \right) h(x)\, dx \\
&= \int_{-1}^{1} \chi_{(-1,0)}(x) f(x) h(x)\, dx \\
&= \int_{-1}^{0} f(x) h(x)\, dx = 0,
\end{aligned}$$

dado que $h(x) = 0$ para casi todo $x \in (-1, 0)$, pues $h \in M$.
Así concluimos que $g = \chi_{[0,1)} f = P_M f$.

□

(c) $M = \left\{ f \in L^2((-1, 1)) : f(x) = 0 \text{ para casi todo } x \in (-1, 0) \right\}$.

Demostración.

I) **M es no vacío:** Consideremos la función característica

$$f(x) := \chi_{[0,1)}(x).$$

Entonces $f(x) = 0$ para todo $x \in (-1,0)$, por lo tanto también se anula para casi todo $x \in (-1,0)$, y claramente es medible. Verificamos que $f \in L^2((-1,1))$:

$$\|f\|^2_{L^2((-1,1))} = \int_{-1}^{1} |f(x)|^2\,dx = \int_{-1}^{1} \chi_{[0,1)}(x)\,dx = \int_0^1 1\,dx = 1.$$

Luego $f \in L^2((-1,1))$ y $f \in M$, de modo que $M \neq \varnothing$.

II) **M es cerrado:** Notemos que

$$f \in M \iff \int_{-1}^{0} |f(x)|^2\,dx = 0 \iff \|\chi_{(-1,0)}f\|_{L^2((-1,1))} = 0,$$

donde $\chi_{(-1,0)}$ denota la función característica del intervalo $(-1,0)$.
Sea $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq M$ tal que $f_n \to f$ en $L^2((-1,1))$. Queremos probar que $f \in M$, es decir, que

$$\|\chi_{(-1,0)}f\|_{L^2((-1,1))} = 0.$$

Para ello, primero observamos que

$$\|\chi_{(-1,0)}f_n - \chi_{(-1,0)}f\|_{L^2((-1,1))} = \|\chi_{(-1,0)}(f_n - f)\|_{L^2((-1,1))}.$$

Usando la definición de la norma L^2:

$$\begin{aligned}\|\chi_{(-1,0)}(f_n - f)\|^2_{L^2((-1,1))} &= \int_{-1}^{1} \left|\chi_{(-1,0)}(x)(f_n(x) - f(x))\right|^2 dx \\ &= \int_{-1}^{0} |f_n(x) - f(x)|^2 dx.\end{aligned}$$

Como $f_n \to f$ en $L^2((-1,1))$, se tiene que

$$\int_{-1}^{0} |f_n(x) - f(x)|^2 dx \leq \int_{-1}^{1} |f_n(x) - f(x)|^2 dx \to 0,$$

por lo que

$$\|\chi_{(-1,0)}f_n - \chi_{(-1,0)}f\|_{L^2((-1,1))} \to 0,$$

es decir,

$$\chi_{(-1,0)}f_n \to \chi_{(-1,0)}f \quad \text{en } L^2((-1,1)).$$

Sea ahora $\varepsilon > 0$. Como $\chi_{(-1,0)}f_n \to \chi_{(-1,0)}f$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$, entonces

$$\|\chi_{(-1,0)}(f_n - f)\|_{L^2((-1,1))} < \varepsilon.$$

Para $n \geq N$, se cumple:

$$\begin{aligned}\|\chi_{(-1,0)}f\|_{L^2((-1,1))} &= \|\chi_{(-1,0)}f - \chi_{(-1,0)}f_n + \chi_{(-1,0)}f_n\|_{L^2((-1,1))} \\ &\leq \|\chi_{(-1,0)}(f - f_n)\|_{L^2((-1,1))} + \|\chi_{(-1,0)}f_n\|_{L^2((-1,1))}.\end{aligned}$$

Como $f_n \in M$, se tiene $\chi_{(-1,0)}f_n(x) = 0$ para casi todo $x \in (-1,0)$, por lo que:

$$\|\chi_{(-1,0)}f\|_{L^2((-1,1))} < \varepsilon.$$

Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario, se deduce que:

$$\|\chi_{(-1,0)}f\|_{L^2((-1,1))} = 0,$$

es decir, $f(x) = 0$ para casi todo $x \in (-1,0)$, por lo tanto $f \in M$.

III) **M es subespacio:** Sean $f, g \in M$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Por definición de M, existen conjuntos de medida nula F y G tales que

$$f(x) = 0 \quad \text{para todo } x \in (-1,0) \setminus F,$$

$$g(x) = 0 \quad \text{para todo } x \in (-1,0) \setminus G.$$

Como $0 \leq \mu(F \cup G) \leq \mu(F) + \mu(G) = 0$, se sigue que $F \cup G$ es también de medida nula.

Además, como

$$(-1,0) \setminus (F \cup G) \subseteq (-1,0) \setminus F \quad \text{y} \quad (-1,0) \setminus (F \cup G) \subseteq (-1,0) \setminus G,$$

entonces para todo $x \in (-1,0) \setminus (F \cup G)$,

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = 0 + 0 = 0,$$

es decir, $f + g \in M$.

Por otro lado, si $x \in (-1,0) \setminus F$, entonces $f(x) = 0$, por lo tanto $\lambda f(x) = \lambda \cdot 0 = 0$, así que $\lambda f \in M$.Concluimos que M es un subespacio vectorial de $L^2((-1,1))$.

IV) **Proyección ortogonal sobre M:** Sea $f \in L^2((-1,1))$, queremos encontrar $g \in M$ tal que

$$(f - g, h) = 0 \quad \text{para toda } h \in M.$$

Tomemos $g = \chi_{[0,1)}f$ y veamos que $g = P_M f$. Claramente, $g(x) = 0$ para todo $x \in (-1,0)$, por lo cual $g \in M$.

Sea $h \in M$, entonces:

$$\begin{aligned}(f - g, h) &= \int_{-1}^{1} \big(f(x) - \chi_{[0,1)}(x)f(x)\big)\, h(x)\, dx \\ &= \int_{-1}^{1} \chi_{(-1,0)}(x)f(x)h(x)\, dx \\ &= \int_{-1}^{0} f(x)h(x)\, dx = 0,\end{aligned}$$

dado que $h(x) = 0$ para casi todo $x \in (-1, 0)$, pues $h \in M$.

Así concluimos que $g = \chi_{[0,1)} f = P_M f$.

$\square$

(II) Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto acotado. Considere

$$K = \left\{ f \in L^2(\Omega) : \int_\Omega f(x) dx \geq 1 \right\}$$

(a) Muestre que K es un conjunto cerrado convexo de $L^2(\Omega)$.

Demostración. Notemos que

$$K = \left\{ f \in L^2(\Omega) : (f, 1) \geq 1 \right\},$$

donde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ es un abierto acotado. Entonces $0 < \mu(\Omega) < \infty$, y además:

$$\|1\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_\Omega 1^2 \, dx \right)^{1/2} = (\mu(\Omega))^{1/2}.$$

Sea $g \in L^2(\Omega) \setminus K$, es decir, $a := (g, 1) < 1$. Tomemos $\varepsilon > 0$ tal que $a + \varepsilon < 1$, y definimos

$$\delta = \frac{\varepsilon}{\|1\|_{L^2(\Omega)}} = \frac{\varepsilon}{(\mu(\Omega))^{1/2}} > 0.$$

Sea $B = B(g, \delta)$ la bola abierta centrada en g de radio δ en $L^2(\Omega)$. Sea $f \in B$, entonces $\|f - g\|_{L^2(\Omega)} < \delta$. Usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz, se tiene:

$$\begin{aligned}
(f, 1) &= (f - g, 1) + (g, 1) \\
&\leq \|f - g\|_{L^2(\Omega)} \cdot \|1\|_{L^2(\Omega)} + a \\
&< \delta \cdot (\mu(\Omega))^{1/2} + a = \varepsilon + a < 1.
\end{aligned}$$

Por tanto, $f \notin K$, lo que implica que $B \subseteq L^2(\Omega) \setminus K$. Es decir, el complemento de K es abierto, y por lo tanto K es cerrado en $L^2(\Omega)$.

Ahora veamos que K es convexo. Sean $f, g \in K$ y $t \in [0, 1]$. Entonces:

$$(tf + (1 - t)g, 1) = t(f, 1) + (1 - t)(g, 1) \geq t \cdot 1 + (1 - t) \cdot 1 = 1.$$

Por tanto, $tf + (1 - t)g \in K$, lo cual prueba que K es convexo.

$\square$

(b) Determine la proyección sobre K, es decir, el operador P_K.

Demostración. Procedamos a calcular $P_K f$. Sea $f \in L^2(\Omega)$, queremos encontrar $g \in K$ tal que

$$(f - g, h - g) \leq 0 \quad \text{para toda } h \in K.$$

Proponemos:

$$g(x) = f(x) + \chi_{(-\infty,1)}(C_f) \cdot \frac{1 - C_f}{\mu(\Omega)},$$

donde $C_f = \int_\Omega f(y)\,dy$.

Veamos que esta g cumple las condiciones requeridas. Consideramos dos casos:

Caso 1: Si $f \in K$, entonces $C_f \geq 1$, por lo que $\chi_{(-\infty,1)}(C_f) = 0$. Así,

$$g = f \in K, \quad y\ (f - g, h - g) = (0, h - f) = 0 \leq 0 \quad \forall h \in K.$$

Entonces, $P_K f = f$.

Caso 2: Si $f \notin K$, entonces $C_f < 1$, así que $\chi_{(-\infty,1)}(C_f) = 1$ y:

$$\begin{aligned}
\int_\Omega g(x)\,dx &= \int_\Omega \left(f(x) + \frac{1 - C_f}{\mu(\Omega)} \right) dx \\
&= \int_\Omega f(x)\,dx + \frac{1 - C_f}{\mu(\Omega)} \cdot \mu(\Omega) \\
&= C_f + (1 - C_f) = 1.
\end{aligned}$$

Por tanto, $g \in K$.

Sea $h \in K$, definimos $C_h = \int_\Omega h(x)\,dx$. Entonces $C_h \geq 1$. Calculamos:

$$\begin{aligned}
(f - g, h - g) &= \left(-\frac{1 - C_f}{\mu(\Omega)}, h - f - \frac{1 - C_f}{\mu(\Omega)} \right) \\
&= -\frac{1 - C_f}{\mu(\Omega)} \cdot \int_\Omega \left(h(x) - f(x) - \frac{1 - C_f}{\mu(\Omega)} \right) dx \\
&= -\frac{1 - C_f}{\mu(\Omega)} \left(C_h - C_f - \frac{1 - C_f}{\mu(\Omega)} \cdot \mu(\Omega) \right) \\
&= -\frac{1 - C_f}{\mu(\Omega)} (C_h - C_f - (1 - C_f)) \\
&= -\frac{1 - C_f}{\mu(\Omega)} (C_h - 1).
\end{aligned}$$

Como $1 - C_f > 0$ y $C_h - 1 \geq 0$, se concluye que

$$(f - g, h - g) \leq 0.$$

De esta forma, $g = P_K f$.

$\square$

Ejercicio 14 Sea H un espacio de Hilbert y $A \in L(H) = L(H, H)$ (el conjunto de funciones lineales continuas de H en H).

(I) Para $y \in H$ fijo, muestre que el funcional $\Phi_y : H \to \mathbb{R}$ dado por $x \mapsto (Ax, y)$ es lineal y continuo. Deduzca que existe un único elemento en H, que denotaremos por $A^\star y$, tal que

$$(Ax, y) = (x, A^\star y)\,, \quad \forall x \in H$$

Demostración. Probemos primero la linealidad del funcional. Sean $x_1, x_2 \in H$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, como A es una funcion lineal y el producto interno es bilineal, tenemos

$$\begin{aligned}\Phi_y(x_1 + \lambda x_2) &= (A(x_1 + \lambda x_2), y) \\ &= (A(x_1) + \lambda A(x_2), y) \\ &= (Ax_1, y) + \lambda(Ax_2, y) \\ &= \Phi_y(x_1) + \lambda\Phi_y(x_2).\end{aligned}$$

Mostrando asi la linealidad. Para ver que es continuo basta con ver que es acotado, pero por la desigualdad de Cauchy-Schwartz tenemos que

$$\begin{aligned}|\Phi_y(x)| &= |(Ax, y)| \\ &\leq (Ax, Ax)^{\frac{1}{2}}(y, y)^{\frac{1}{2}} \\ &= \|Ax\|\|y\|.\end{aligned}$$

Note que esto ultimo es debido a que H es un espacio de Hilbert, por lo que $\|\cdot\|$ es la norma en H inducida por el producto interno. Como por hipotesis $A \in L(H, H)$, asi sabemos que $\|Ax\| \leq \|A\|\|x\|$, es decir $\|Ax\|\|y\| \leq \|A\|\|y\|\|x\|$, pero como y es fijo, si tomamos $M = \|A\|\|y\|$ concluimos que

$$|\Phi_y(x)| \leq M\|x\|,$$

es decir Φ_y es actodado y por tanto continuo para cada y, por lo que $\Phi_y \in H^*$. Ahora por el teorema de representacion de Riesz-Frechet existe un unico elemento $z_y \in H$ tal que

$$\Phi_y(x) = (z, x).$$

Para todo $x \in H$. Note que este z_y es unico para cada y, por lo que denotaremos $z_y := A^*y$. Por la definicion de Φ_y y como el producto interno es simetrico conluimos la existencia de un unico elemento en H tal que

$$(Ax, y) = (x, A^*y).$$

(II) Muestre que $A^\star \in L(H, H).A^\star$ se llama el adjunto de A.

Demostración. Primero note que el operador A^* esta bien definido, ya que como dijimos en el anterior punto para cada y, existe un unico z_y, que definimos como $A^*y = z_y$, por lo que si es una funcion. Ahora veamos que es lineal, sean $y_1, y_2 \in H$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ note que por la propiedad respecto al producto interno del operador tenemos que para todo $x \in H$

$$\begin{aligned}(x, A^*(y_1 + \lambda y_2)) &= (Ax, y_1 + \lambda y_2) \\ &= (Ax, y_1) + \lambda(Ax, y_2) \\ &= (x, A^*y_1) + \lambda(x, A^*y_2) \\ &= (x, A^*y_1 + \lambda A^*y_2),\end{aligned}$$

note que usamos la bilinialidad del producto interno. Si ahora restamos y usamos la bilinealidad nuevamente obtenemos que

$$(x, A^*(y_1 + \lambda y_2) - (A^*y_1 + \lambda A^*y_2)) = 0,$$

para todo $x \in H$, si en particular tomamos $x = A^*(y_1 + \lambda y_2) - (A^*y_1 + \lambda A^*y_2)$, como el producto interno es no nulo para todo elemento diferente del 0, tenemos que

$$A^*(y_1 + \lambda y_2) - (A^*y_1 + \lambda A^*y_2) = 0,$$

es decir

$$A^*(y_1 + \lambda y_2) = A^*y_1 + \lambda A^*y_2.$$

Concluyendo asi la linealidad. Por ser lineal basta con ver que el operador es acotado, note que como la norma de H viene dada por el producto interno y por la desigualdad de Cauchy-Schwartz tenemos que

$$\begin{aligned}\|A^*y\|^2 &= (A^*y, A^*y)\\ &= |(A(A^*y), y)|\\ &\leq \|A(A^*y)\|\|y\|,\end{aligned}$$

Como $A \in L(H, H)$, tenemos que $\|A(A^*y)\| \leq \|A\|\|A^*y\|$, Asi si llamamos $M = \|A\|$

$$\|A(A^*y)\|\|y\| \leq M\|A^*y\|\|y\|,$$

y por tanto

$$\|A^*y\|^2 \leq M\|A^*y\|\|y\|,$$

note que si $\|A^*y\| = 0$, se tiene trivialmente la acotacion, en cambio si $\|A^*y\| > 0$, podemos dividir a ambos lados por esta cantidad obteniendo asi

$$\|A^*y\| \leq M\|y\|.$$

Concluyendo que es acotado y por tanto continuo, asi $A^* \in L(H, H)$.

ʘ‿ʘ

(III) Verifique que $(A^\star)^\star = A$ y que $\|A^\star\| = \|A\|$.

Demostración. Para la primera parte, sean $x, y \in H$, note que por la propiedad del adjunto tenemos que

$$\begin{aligned}(x, (A^*)^*y) &= (A^*x, y)\\ &= (y, A^*x)\\ &= (Ay, x)\\ &(x, Ay).\end{aligned}$$

Observe que en dos ocasiones usamos la simetria del producto interno. Luego por la bilinealidad

$$(x, (A^*)^*y - Ay) = 0,$$

si tomamos $x = (A^*)^*y - Ay$, de manera similar a la prueba de la linealidad del adjunto, concluimos que $(A^*)^*y - Ay = 0$, luego $(A^*)^*y = Ay$, pero note que en este proceso y era arbitrario, por lo que como son iguales para todo y, podemos concluir que

$$(A^*)^* = A.$$

Para la segunda parte en el anterior numeral habiamos conluido que

$$\|A^*y\| \leq \|A\|\|y\|.$$

Por lo que

$$\|A^*\| = \sup_{\substack{\|y\|=1 \\ y\in H}} \|A^*y\| \leq \sup_{\substack{\|y\|=1 \\ y\in H}} \|A\|\|y\| = \|A\|.$$

Por lo que faltaria ver la otra desigualdad. Pero esto se ve facilmente ya que como $\|A^*\| \leq \|A\|$, si reemplazamos A con A^*, tenemos que $\|(A^*)^*\| \leq \|A^*\|$, luego por la anterior parte, como $(A^*)^* = A$, asi concluimos que

$$\|A\| \leq \|A^*\|.$$

De esta manera concluimos la igualdad de las normas. ʘ‿ʘ

Ejercicio 15 Sea H un espacio de Hilbert y $M \subseteq H$ un subespacio cerrado. Considera la proyección ortogonal P_M. Muestre que

(I) P_M es lineal.

Demostración. Sean $f_1, f_2 \in H$, por hipótesis tenemos que M es un subespacio cerrado de H, así, el teorema de proyección ortogonal, existen únicos $y_1, y_2 \in M$ tales que

$$\langle f_1 - y_1, v\rangle = 0 \quad \text{y} \quad \langle f_2 - y_2, v\rangle = 0 \quad \forall v \in M,$$

donde $y_1 = P_M f_1$ y $y_2 = P_M f_2$ son las proyecciones ortogonales de $f_1 x$ y f_2 respectivamente. Es decir, para cualquier $f \in H$, existe un único vector $y \in M$ con $y = P_M f$ que minimiza la distancia de f a M

$$\|f - y\| = \inf_{v\in M} \|f - v\| = \text{dist}(f, M).$$

Sea $\lambda \in \mathbb{R}$, utilizando linealidad del producto interno, tenemos que

$$0 = (f_1 - y_1, v) + \lambda(f_2 - y_2, v) = (f_1 + \lambda f_2 - (y_1 + \lambda y_2), v) \quad \text{para todo } v \in M.$$

por unicidad de la proyección, $P_M(f_1 + \lambda f_2) = y_1 + \lambda y_2 = P_M(f_1) + \lambda P_M(f_2)$, es decir, el operador es lineal.

$\square$

(II) $P_M^2 = P_M$ (esto es, aplicar dos veces el operador proyección da el mismo resultado).

Demostración. Para $f \in H$ al M ser subespacio cerrado existe por el teorema de proyección ortogonal un y tal que, $P_M(f) = y \in M$. Como $y \in M$, $P_M(y) = y$, luego,

$$P_M^2(f) = P_M(P_M(f)) = P_M(y) = y = P_M(f).$$

Por lo que tenemos que el operador es idempotente. □

(III) $P_M^\star = P_M$, donde $P_M^\star$ denota el adjunto de P_M (vea el Ejercicio 14).

Demostración. Veamos que el operador es autoadjunto, por el teorema de representación de Riesz al ser H un espacio de Hilbert y la proyección un operador lineal y continuo, entonces, para $x, y \in H$, tenemos que

$$\langle P_M(x), y\rangle = \langle x, P_M^*(y)\rangle \quad \text{para todo } x, y \in H$$

Luego como M es un subespacio cerrado, $M^\perp$ también es cerrado, entonces podemos escribir a los elementos del espacio como

$$x = P_M(x) + (x - P_M(x)), \quad y = P_M(y) + (y - P_M(y)),$$

donde $x - P_M(x) \in M^\perp$ y $y - P_M(y) \in M^\perp$. Entonces

$$\begin{aligned}\langle P_M(x), y\rangle &= \langle P_M(x), P_M(y) + (y - P_M(y))\rangle \\ &= \langle P_M(x), P_M(y)\rangle + \langle P_M(x), y - P_M(y)\rangle\end{aligned}$$

como $y - P_M(y) \in M^\perp$ entonces $\langle P_M(x), y - P_M(y)\rangle = 0$, luego

$$\begin{aligned}\langle P_M(x), P_M(y)\rangle &= \langle P_M(x) + x - P_M(x), P_M(y)\rangle \\ &= \langle x, P_M(y)\rangle +\end{aligned}$$

Por tanto, $P_M^* = P_M$, es decir, el operador es autoadjunto. □

(IV) Rango $(P_M) = M$ y Kernel $(P_M) = M^\perp$.

Demostración. $\Rightarrow$ Para $x \in M$, $P_M(x) = x$, luego $M \subseteq \text{Rango}(P_M)$.

$\Leftarrow$ Como M es un subespacio cerrado, tenemos que para todo $y \in H$ arbitrario pero fijo $P_M(y) \in M$, luego $\text{Rango}(P_M) \subseteq M$.

En el caso del Kernel, tenemos que$y \in \text{Kernel}(P_M)$ si y sólo si $(y, v) = 0$ para todo $v \in M$, es decir, $y \in M^\perp$, así Kernel $(P_M) = M^\perp$.

□

(V) Suponga que $P \in L(H)$. Entonces P es una proyección ortogonal sobre un subespacio cerrado de H si, y solo si, $P = P^2 = P^\star$.

Demostración. $\Rightarrow$La demostración es trivial por lo realizado en los subpuntos (I)-(III) ya que $L(H)$ es un espacio de Hilbert.

$\Leftarrow$Suponga $P = P^2 = P^*$, entonces tenemos que P es una proyección además como P es autoadjunto y estamos en un espacio de Hilbert queremos probar que el Kernel$(P^\star) =$ (Rango A)$^\perp$ y siendo a M como $M =$ Rango(P) veamos que M es un subespacio cerrado de H.

Ahora, supongamos que $x_1, x_2 \in M$. Como $M =$ Rango(P), existen $u, v \in H$ tales que

$$P(u) = x_1 \quad \text{y} \quad P(v) = x_2,$$

como P es idempotente y lineal, dado $\lambda \in \mathbb{R}$, se tiene que

$$P(P(x + \lambda x_2)) = P(x + \lambda x_2) = P(x) + \lambda P(x_2) = x + \lambda x_2.$$

Por lo que, $x + \lambda y \in M$, lo cual muestra que M es un subespacio vectorial de H.

Como $P \in L(H)$, entonces P es un operador acotado en un espacio de Hilbert, entonces, toda sucesión de Cauchy $\{x_n\} \subset H$ converge a algún $x \in H$. Queremos ver que M es cerrado por, tomemos $\{x_n\} \subset M$ una sucesión de Cauchy, por lo cual existen $\{y_n\} \subset H$ tales que $x_n = P(y_n)$. Sabemos que P es continuo puesto que es lineal y por definición es acotado, también es continuo, por lo que $\{x_n\} = \{P(y_n)\}$ es Cauchy en M si y solo si $\{u_n\}$ es Cauchy en H.

Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario pero fijo, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m > N$, entonces $|x_n - x_m| < \varepsilon$, entonces

$$\begin{aligned} \|P(x_n) - P(x_m)\| &= \|P(x_n - x_m)\| \\ &\leq \|P\| \|x_n - x_m\| \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

como P es un operador continuo, entonces $P(x_n) \to P(x)$ con $x \in H$, y como $x_n = P(y_n)$, entonces $x_n \to P(x) \in M$. Por lo tanto, M es cerrado. Como M es un subespacio cerrado en un espacio de Hilbert y P es autoadjunto e idempotente entonces $x - P(x) \in$ Kernel(P), por lo cual P es la proyección ortogonal sobre M

$\square$

Ejercicio 3

Considere los operadores de desplazamiento $S_r, S_l \in L\left(l^2\right)$, donde si $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) \in l^2$, estos se definen como

$$S_r x = (0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, \ldots)$$

y

$$S_l x = (x_2, x_3, x_4, \ldots, x_{n+1}, \ldots).$$

S_r se conoce como desplazamiento a derecha y S_l como desplazamiento a izquierda.

(a) Determinar las normas $\|S_r\|$ y $\|S_l\|$.

Demostración. Sea $x = (x_1, x_2, \dots) \in \ell^2$. Por definición de la norma de operador, se tiene

$$\|S_r\|_{\mathcal{L}(\ell^2)} = \sup_{\|x\|_{\ell^2} \le 1} \|S_r x\|_{\ell^2}.$$

Dado que $S_r x = (0, x_1, x_2, \dots)$, si denotamos $y = S_r x = (y_1, y_2, \dots)$, entonces

$$\|S_r x\|_{\ell^2} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^2 \right)^{1/2} = \left(\sum_{k=2}^{\infty} |x_{k-1}|^2 \right)^{1/2} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 \right)^{1/2} = \|x\|_{\ell^2}.$$

Por lo tanto,

$$\|S_r\|_{\mathcal{L}(\ell^2)} = \sup_{\|x\|_{\ell^2} \le 1} \|S_r x\|_{\ell^2} \le \sup_{\|x\|_{\ell^2} \le 1} \|x\|_{\ell^2} = 1.$$

Como esta cota se alcanza, por ejemplo al tomar $x = e_1 = (1, 0, 0, \dots)$, para el cual $\|x\|_{\ell^2} = 1$ y

$$S_r e_1 = (0, 1, 0, 0, \dots), \quad \|S_r e_1\|_{\ell^2} = 1,$$

concluimos que

$$\|S_r\|_{\mathcal{L}(\ell^2)} = 1.$$

De forma análoga, el operador S_l está definido por $S_l x = (x_2, x_3, \dots)$. Si denotamos $y = S_l x$, entonces

$$\|S_l x\|_{\ell^2} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^2 \right)^{1/2} = \left(\sum_{k=2}^{\infty} |x_k|^2 \right)^{1/2} \le \|x\|_{\ell^2},$$

por lo que

$$\|S_l\|_{\mathcal{L}(\ell^2)} \le 1.$$

Esta cota también se alcanza, por ejemplo, con $x = e_2 = (0, 1, 0, \dots)$, ya que

$$S_l e_2 = (1, 0, 0, \dots), \quad \|S_l e_2\|_{\ell^2} = 1,$$

lo que implica que

$$\|S_l\|_{\mathcal{L}(\ell^2)} = 1.$$

$\square$

(b) Muestre que $EV(S_r) = \emptyset$.

Demostración. Sea $x = (x_1, x_2, \dots) \in \ell^2$ y sea $\lambda \in \mathbb{R}$. Supongamos que $S_r x = \lambda x$. Entonces, por la definición del operador S_r, se tiene:

$$S_r x = (0, x_1, x_2, \dots) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots).$$

Comparando componente a componente, se obtiene:

- En la primera coordenada: $0 = \lambda x_1$, por lo que si $\lambda \neq 0$, se deduce que $x_1 = 0$.
- En la segunda coordenada: $x_1 = \lambda x_2$, lo cual implica $x_2 = 0$ ya que $x_1 = 0$.

- En general, para $i \geq 2$, se cumple que $x_{i-1} = \lambda x_i$, lo que por recurrencia implica que $x_i = 0$ para todo $i \geq 1$.

Por tanto, $x = (0, 0, 0, \ldots)$.

Ahora, si $\lambda = 0$, se tiene que

$$S_r x = (0, x_1, x_2, \ldots) = (0, 0, 0, \ldots),$$

lo cual implica que $x_i = 0$ para todo $i \geq 1$, es decir, nuevamente $x = (0, 0, 0, \ldots)$.

En ambos casos, el único vector que satisface $S_r x = \lambda x$ es el vector nulo. Por lo tanto, el núcleo de $S_r - \lambda I$ es trivial:

$$N(S_r - \lambda I) = \{0\},$$

y concluimos que λ no es valor propio de S_r para ningún $\lambda \in \mathbb{R}$. Así,

$$\sigma_p(S_r) = \emptyset.$$

□

(e) Muestre que $\sigma(S_l) = [-1, 1]$.

Demostración. Por el ítem $a)$ sabemos que $\|S_l\|_{\ell^2} = 1$. Entonces, por un teorema visto en clase, se tiene que

$$\sigma(S_l) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq \|S_l\| = 1\}.$$

Supongamos que $\lambda \neq 0$ y que existe $x \in \ell^2$ tal que $S_l x = \lambda x$. Esto implica que

$$(x_2, x_3, x_4, \ldots) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3, \ldots).$$

Por lo tanto, para todo $i \geq 1$, se cumple que

$$x_{i+1} = \lambda x_i.$$

Este tipo de recurrencia implica que

$$x_i = \lambda^{i-1} x_1 \quad \text{para todo } i \geq 1.$$

Es decir, el vector x tiene la forma

$$x = (x_1, \lambda x_1, \lambda^2 x_1, \lambda^3 x_1, \ldots) = x_1(1, \lambda, \lambda^2, \lambda^3, \ldots).$$

Ahora bien, para que $x \in \ell^2$, debe cumplirse que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_1 \lambda^{n-1}|^2 = |x_1|^2 \sum_{n=0}^{\infty} |\lambda|^{2n}.$$

La serie geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} |\lambda|^{2n}$ converge si y solo si $|\lambda| < 1$. Por lo tanto, para que $x \in \ell^2$, se debe tener $|\lambda| < 1$.

Esto muestra que si $|\lambda| < 1$, entonces λ es valor propio de S_l, y así

$$A := \{\lambda \in \mathbb{R} : |\lambda| < 1\} \subseteq \sigma(S_l).$$

Como $\sigma(S_l)$ es un conjunto cerrado en $\mathbb{R}$, se sigue que

$$\overline{A} \subseteq \sigma(S_l) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{R} : |\lambda| \leq 1\}.$$

Pero $\overline{A} = \{\lambda \in \mathbb{R} : |\lambda| \leq 1\}$, así que se concluye

$$\sigma(S_l) = \{\lambda \in \mathbb{R} : |\lambda| \leq 1\}.$$

□

(d) Muestre que $EV(S_l) = (-1, 1)$. Encuentre el espacio propio correspondiente.

Demostración. Ya se ha visto que si $|\lambda| < 1$, entonces existe un vector no nulo $x \in \ell^2$ tal que

$$x = x_1(1, \lambda, \lambda^2, \lambda^3, \dots),$$

y este pertenece a ℓ^2 si y solo si $\sum_{n=0}^{\infty} |\lambda|^{2n} < \infty$, lo cual ocurre si y solo si $|\lambda| < 1$. Por lo tanto, todos los $\lambda \in (-1, 1)$ son valores propios de S_l, y el espacio propio correspondiente está dado por

$$\text{span}\{(1, \lambda, \lambda^2, \lambda^3, \dots)\}.$$

Veamos ahora que $\lambda = 1$ y $\lambda = -1$ no son valores propios de S_l. Supongamos que $S_l x = \lambda x$ con $\lambda = \pm 1$, y $x \in \ell^2 \setminus \{0\}$. Entonces, como antes,

$$x = x_1(1, \lambda, \lambda^2, \lambda^3, \dots).$$

Para $\lambda = 1$, tendríamos $x = x_1(1, 1, 1, 1, \dots)$, y la norma cuadrada sería

$$\|x\|^2 = |x_1|^2 \sum_{n=0}^{\infty} 1 = \infty,$$

lo cual contradice que $x \in \ell^2$.

Análogamente, para $\lambda = -1$, tendríamos $x = x_1(1, -1, 1, -1, \dots)$, y nuevamente:

$$\|x\|^2 = |x_1|^2 \sum_{n=0}^{\infty} 1 = \infty,$$

por lo que $x \notin \ell^2$ tampoco en este caso.

Así, ni $\lambda = 1$ ni $\lambda = -1$ son valores propios de S_l.

En conclusión,

$$EV(S_l) = (-1, 1).$$

□

(f) Determine los adjuntos S_r^* y S_l^*.

Solución: Recordemos que, en un espacio de Hilbert real como $\ell^2(\mathbb{R})$, el adjunto T^* de un operador $T \in \mathcal{L}(\ell^2)$ es el único operador tal que

$$(Tx, y) = (x, T^*y) \quad \text{para todo } x, y \in \ell^2.$$

Sea $x = (x_1, x_2, x_3, \dots) \in \ell^2$ y $y = (y_1, y_2, y_3, \dots) \in \ell^2$.

Para S_r: recordemos que

$$S_r x = (0, x_1, x_2, x_3, \dots).$$

Entonces

$$\begin{aligned}(S_r x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} (S_r x)_n y_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_{n-1} y_n \quad (\text{tomando } x_0 = 0) \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} x_{n-1} y_n = \sum_{m=1}^{\infty} x_m y_{m+1} = (x, z),\end{aligned}$$

donde $z = (y_2, y_3, y_4, \dots)$. Por tanto,

$$S_r^* y = (y_2, y_3, y_4, \dots),$$

es decir,

$$S_r^* y = S_l y.$$

Para S_l: recordemos que

$$S_l x = (x_2, x_3, x_4, \dots).$$

Entonces

$$\begin{aligned}(S_l x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} (S_l x)_n y_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_{n+1} y_n \\ &= \sum_{m=2}^{\infty} x_m y_{m-1} = (x, z),\end{aligned}$$

donde $z = (0, y_1, y_2, y_3, \dots)$. Por tanto,

$$S_l^* y = (0, y_1, y_2, \dots),$$

es decir,

$$S_l^* y = S_r y.$$

Por lo tanto, se cumple que

$$S_r^* = S_l, \quad \text{y} \quad S_l^* = S_r.$$

(c) Muestre que $\sigma(S_r) = [-1, 1]$.

Demostración. Primero, notamos que S_r es un operador lineal y acotado sobre el espacio de Hilbert real ℓ^2, lo cual ya fue demostrado previamente. Además, en una prueba anterior también se encontró su adjunto, y se verificó que

$$S_r^* = S_\ell.$$

Ahora, por la **Proposición 8.3.1**, la cual establece que si $T \in \mathcal{L}(H)$ para un espacio de

Hilbert H, entonces se tiene que

$$\sigma(T) = \sigma(T^*),$$

concluimos que

$$\sigma(S_r) = \sigma(S_r^*) = \sigma(S_\ell) = [-1, 1].$$

Esto demuestra que el espectro de $S_r = [-1, 1]$. $\square$

Demostración. Queremos mostrar que si $\lambda \in \rho(S_r)$, entonces $|\lambda| > 1$.

Recordemos que $S_r \in \mathcal{L}(\ell^2)$ y que si $\lambda \in \rho(S_r)$, entonces $R_\lambda = (\lambda I - S_r)^{-1} \in \mathcal{L}(\ell^2)$, es decir, R_λ es un operador acotado.

Sea $x = (x_1, x_2, \dots) \in \ell^2$, y supongamos que $y = R_\lambda x$. Entonces

$$(\lambda I - S_r)y = x \quad \text{es decir,} \quad \lambda y_n - y_{n-1} = x_n, \quad \text{con } y_0 = 0.$$

Despejando recursivamente obtenemos:

$$y_1 = \frac{x_1}{\lambda}, \quad y_2 = \frac{x_2 + y_1}{\lambda} = \frac{x_2}{\lambda} + \frac{x_1}{\lambda^2}, \quad \dots, \quad y_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{\lambda^{n-k+1}}.$$

Entonces,

$$y_n = \sum_{k=1}^{n} \lambda^{-(n-k+1)} x_k.$$

Supongamos ahora que $|\lambda| \leq 1$.Consideremos

$$x^{(N)} = (\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{N}, 0, 0, \dots),$$

que claramente están en ℓ^2. Evaluamos $y^{(N)} = R_\lambda x^{(N)}$, y calculamos su norma:

$$y_n^{(N)} = \begin{cases} \sum_{k=1}^{n} \lambda^{-(n-k+1)} = \lambda^{-n} \sum_{j=1}^{n} \lambda^j = \lambda^{-n} \cdot \frac{\lambda(1-\lambda^n)}{1-\lambda}, & \text{si } n \leq N, \\ \sum_{k=1}^{N} \lambda^{-(n-k+1)} = \lambda^{-n} \sum_{j=n-N+1}^{n} \lambda^j, & \text{si } n > N. \end{cases}$$

En particular, para $n = N$, se tiene:

$$y_N^{(N)} = \sum_{k=1}^{N} \lambda^{-(N-k+1)} = \sum_{j=1}^{N} \lambda^{-j}.$$

Si $|\lambda| \leq 1$, entonces $|\lambda^{-1}| \geq 1$, y por tanto $\sum_{j=1}^{N} |\lambda^{-j}| \geq N$. Esto implica que $\|y^{(N)}\| \to \infty$ cuando $N \to \infty$, mientras que $\|x^{(N)}\| = \sqrt{N}$, así que

$$\frac{\|y^{(N)}\|}{\|x^{(N)}\|} \to \infty.$$

Esto contradice que R_λ sea un operador acotado. Por tanto, si $\lambda \in \rho(S_r)$, entonces necesariamente $|\lambda| > 1$. Como el espectro debe estar contenido en $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq \|S_r\| = 1\}$, y como ya probamos en un paso anterior que todo $|\lambda| < 1$ está en el resolvente, concluimos que:

$$\sigma(S_r) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq 1\}.$$

$\square$

Ejercicio 4 Sea $1 \leq p < \infty y$ consideremos el espacio $L^p((0,1))$, Dado $u \in L^p((0,1))$, definimos

$$Tu(x) = \int_0^x u(t)dt$$

(a) Demuestre que $T \in \mathcal{K}\left(L^p((0,1))\right)$.

Demostración. Probemos primero que efectivamente es un operador lineal y acotado. La linealidad del operador es clara ya que se hereda de la linealidad de la integral. Ahora por la desigualdad de Holder

$$\|u\|_{L^1} = \int_0^1 |u(t)|\, dt \leq \|1\|_{L^{p'}} \|u\|_{L^p} = \|u\|_{L^p}.$$

donde p' es el conjugado de p. Asi tenemos que

$$\begin{aligned}
\|Tu\|_{L^p} &= \left(\int_0^1 |Tu(x)|^p\, dx\right)^{1/p} \\
&= \left(\int_0^1 \left|\int_0^x u(t)dt\right|^p\, dx\right)^{1/p} \\
&\leq \left(\int_0^1 \left(\int_0^1 |u(t)|dt\right)^p\, dx\right)^{1/p} \\
&= \int_0^1 |u(t)|\, dt \\
&= \|u\|_{L^1} \\
&= \|u\|_{L^p},
\end{aligned}$$

Concluyendo así que T es acotado y ademas particularmente tenemos que $\|T\| \leq 1$. Faltaría ver que efectivamente es compacto el operador. Para esto usaremos el teorema de Kolmogorov. Riesz-Frechet enunciado en el Brezis. Para que no haya problemas como de igual manera $|h| \to 0$, tomaremos $|h| < 1$, asi si tomamos $f \in T(B)$, sabemos que existe

$u \in B$ tal que $Tu = f$, luego si $h \leq 0$

$$\begin{aligned}
\|\tau_h f - f\|_{L^p} &= \left(\int_0^1 |\tau_h f(x) - f(x)|^p \, dx\right)^{1/p} \\
&= \left(\int_0^1 |\tau_h Tu(x) - Tu(x)|^p \, dx\right)^{1/p} \\
&= \left(\int_0^1 |Tu(x+h) - Tu(x)|^p \, dx\right)^{1/p} \\
&= \left(\int_0^1 \left|\int_0^{x+h} u(t) \, dt - \int_0^x u(t) \, dt\right|^p \, dx\right)^{1/p} \\
&= \left(\int_0^1 \left|\int_{x+h}^x u(t) \, dt\right|^p \, dx\right)^{1/p} \\
&\leq \left(\int_0^1 \left(\int_{x+h}^x |u(t)| \, dt\right)^p \, dx\right)^{1/p}
\end{aligned}$$

Como $u \in B$ por Holder como hicimos al inicio tenemos que

$$\int_{x+h}^x |u(t)| \, dt \leq \|\chi_{(x+h,x)}\|_{L^{p'}} \|u\|_{L^p} \leq |h|^{1/p'}$$

Así concluimos que cuando $|h| \to 0$, $\|\tau_h f - f\|_{L^p} \to 0$ para toda $f \in T(B)$, para el caso $h \geq 0$ la cuenta es análoga y solo cambia el orden de escritura en los intervalos de integración, por lo que el teorema citado nos dice que como $(0,1)$ tiene medida finita y $T(B)$ es acotado, luego la clausura de este conjunto de compacta en $L^p(0,1)$, asi concluimos que el operador es compacto.

ʊ˯ʊ

(b) Determine $EV(T)$ y $\sigma(T)$.

Demostración. Dado que T es compacto, sabemos que $0 \in \sigma(T)$ y que $\sigma(T) \setminus \{0\} = EV(T) \setminus \{0\}$, entonces consideremos $\lambda \neq 0$, como $l^p(0,1) \subset L^1(0,1)$, por diferenciación de Lebesgue dada $u \in L^p(0,1)$ tenemos que

$$\lim_{h \to 0^+} \int_x^{x+h} u(y) \, dy = u(x)$$

Para casi todo $x \in (0,1)$, se puede simplificar la elección de $h > 0$ ya que en caso contrario solo cambian los limites de integración. Así tenemos que la función

$$Tu(x) = \int_0^x u(t) \, dt$$

es derivable en casi toda parte en $(0,1)$, luego si escogemos $u \neq 0$ tal que $Tu = \lambda u$, tenemos por la derivavilidad que

$$u(x) = \lambda u'(x)$$

tomando $x \to 0^+$ nos damos cuenta de la formula de Tu que $u(0) = 0$ es la manera continua de extender a u al intervalo $[0, 1)$, asi estamos resolviendo el problema de valor inicial

$$\begin{cases} u' = \frac{1}{\lambda} u \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

La solución general de esta EDO es $u(x) = Ce^{x/\lambda}$, pero por la condición inicial $C = 0$, concluyendo que la $u = 0$, esto es una contradicción, así concluimos que $\sigma(T) = \{0\}$ y $EV(T) = \emptyset$, ya que lo anterior nos dice que $\mathbb{R} \setminus \{0\} \subset \rho(T)$.

ʊ̬ʊ

(c) Dé una fórmula explícita para $(T - \lambda I)^{-1}$ cuando $\lambda \in \rho(T)$.

Demostración. Sea $u \in L^p(0, 1)$ y $\lambda \neq 0$, por definición $f := (T - \lambda I)u = Tu - \lambda u$, si llamamos

$$h(x) = Tu(x)$$

Por lo visto en el item anterior sabemos que h es derivable para casi todo $x \in (0, 1)$ y que ademas $h' = u$ con $x \in (0, 1)$, asi tenemos el siguiente problema de valor inicial

$$\begin{cases} h - \lambda h' = f \\ h(0) = 0 \end{cases}$$

Luego la unica solucion de este PVI es

$$h(x) = -\frac{1}{\lambda} e^{x/\lambda} \int_0^x e^{-t/\lambda} f(t)\, dt$$

Por un argumento analogo a la parte b la parte integral de la solución es derivable en casi toda parte y en particular tenemos que por la regla del producto

$$h'(x) = -\frac{1}{\lambda^2} e^{x/\lambda} \int_0^x e^{-t/\lambda} f(t)\, dt - \frac{1}{\lambda} e^{-x/\lambda} f(x) e^{x/\lambda}$$

Asi como $h' = u$ tenemos que

$$u(x) = -\frac{1}{\lambda^2} e^{x/\lambda} \int_0^x e^{-t/\lambda} f(t)\, dt - \frac{1}{\lambda} f(x)$$

Así como $u = (T - \lambda I)^{-1} f$, deducimos que el operador inverso es la formula dada, es decir

$$(T - \lambda I)^{-1} f = -\frac{1}{\lambda^2} e^{x/\lambda} \int_0^x e^{-t/\lambda} f(t)\, dt - \frac{1}{\lambda} f(x)$$

ʊ̬ʊ

(d) Determine $T^\star$. Por definición

Demostración.

$$\begin{aligned} T^* : (L^p(0,1))^* &\to (L^p(0,1))^* \\ \mu &\to T^*\mu \end{aligned}$$

Donde

$$\begin{aligned} T^*\mu : L^p(0,1) &\to \mathbb{R} \\ f &\to \langle T^*\mu, f\rangle := \langle \mu, Tf\rangle. \end{aligned}$$

Esto ultimo por la definición de adjunto. Ahora por el teorema de representación de Riesz, existe una única $g_\mu \in L^{p'}(0,1)$ tal que

$$\langle \mu, Tf\rangle = \int_0^1 g_\mu(x)Tf(x)\,dx.$$

De manera similar como $p < \infty$, y el dual de L^p se identifica con $L^{p'}$, tenemos que existe única $h_\mu \in L^{p'}(0,1)$ tal que

$$\langle T^*, f\rangle = \int_0^1 h_\mu(x)f(x)\,dx$$

y por la igualdad dada previamente tenemos que

$$\int_0^1 h_\mu(x)f(x)\,dx = \int_0^1 g_\mu(x)Tf(x)\,dx.$$

Como f es arbitraria, manipulando el lado derecho de la igualdad tenemos que

$$\begin{aligned} \int_0^1 g_\mu(x)Tf(x)\,dx &= \int_0^1 g_\mu(x)\int_0^x f(t)dt\,dx \\ &= \int_0^1\int_0^x g_\mu(x)f(t)\,dtdx \\ &= \int_0^1\int_t^1 g_\mu(x)f(t)\,dxdt \\ &= \int_0^1 f(t)\int_t^1 g_\mu(x)\,dxdt \end{aligned}$$

Por la unicidad obtenemos que

$$h_\mu(t) = \int_t^1 g_\mu(x)\,dx = \int_0^1 g_\mu(x)\chi_{(t,1)}(x)\,dx = \langle \mu, \chi_{(t,1)}\rangle.$$

Con esto el adjunto esta dado por

$$\langle T^*\mu, f\rangle = \int_0^1 \langle \mu, \chi_{(t,1]}\rangle f(x)\, dx.$$

$\mho\!\!\smile\!\!\mho$

Ejercicio 6 Considere $g \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$ (es decir, g es continua y acotada). Definimos el operador de multiplicación $M_g : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ dado por

$$M_g(f)(x) = g(x)f(x)$$

(a) Muestre que $\sigma\,(M_g) = \overline{\{g(x) : x \in \mathbb{R}\}}$.

Demostración. Como $g \in L^\infty(\mathbb{R})$, se tiene que $\|g\|_\infty < \infty$, y por lo tanto M_g es un operador lineal y acotado sobre $L^2(\mathbb{R})$, donde

$$\|M_g(f)\|_{L^2}^2 = \int_{\mathbb{R}} |g(x)f(x)|^2\, dx \le \|g\|_\infty^2 \|f\|_{L^2}^2,$$

lo que implica que $M_g \in L(L^2(\mathbb{R}))$.

Como M_g es un operador de multiplicación, y por lo tanto, es autoadjunto puesto que,

$$\begin{aligned}
\langle M_g(f), h\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} M_g(f)(x)\, h(x)\, dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)h(x)\, dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)h(x)\, dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, M_g(h)(x)\, dx \\
&= \langle f, M_g(h)\rangle.
\end{aligned}$$

Ahora veamos que $\sigma\,(M_g) = \overline{\{g(x) : x \in \mathbb{R}\}}$, sea $\lambda \in \{g(x) : x \in \mathbb{R}\}$, entonces, existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $g(x_0) = \lambda$. Como g es continua, tenemos que para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $|x - x_0| < \delta$, entonces $|g(x) - \lambda| < \varepsilon$.

Sea $f \in L^2(\mathbb{R})$ con soporte contenido en $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ y $f \neq 0$. entonces,

$$\|(M_g - \lambda I)f\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}} |g(x) - \lambda|^2 |f(x)|^2\, dx < \varepsilon^2 \|f\|_2^2.$$

Si $M_g - \lambda I$ fuera invertible, existiría una constante $C > 0$ tal que,

$$\|(M_g - \lambda I)f\|_2 \ge C\|f\|_2 \quad \text{para toda } f \in L^2(\mathbb{R}),$$

lo cual contradice la desigualdad anterior cuando $\varepsilon \to 0$. Por tanto, $\lambda \in \sigma(M_g)$. Como el espectro $\sigma(M_g)$ es cerrado, se concluye que,

$$\overline{\{g(x) : x \in \mathbb{R}\}} \subseteq \sigma(M_g).$$

□

(b) ¿Es el operador M_g compacto?

Solución. No, en general el operador M_g no es compacto, si el operador fuera compacto en $L^2(\mathbb{R})$ tenemos que cualquier sucesión acotada en una sucesión que tiene una subsucesión convergente en norma.

Tomemos a $g(x)$ como la función constante uno la cual claramente es continua y acotada, es decir, $g \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$. Entonces M_g es el operador identidad en $L^2(\mathbb{R})$. Tomemos a $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset L^2(\mathbb{R})$ como una sucesión definida por

$$f_n(x) = \chi_{[n,n+1]}(x),$$

donde $\chi_{[n,n+1]}$ es la función característica del intervalo $[n, n+1]$, esta sucesión es ortonormal en $L^2(\mathbb{R})$, y por tanto, acotada.

Aplicando M_g a cada f_n, tenemos que $M_g(f_n) = f_n$. Por tanto, la imagen de esta sucesión no tiene ninguna subsucesión convergente en norma, ya que las f_n son ortogonales entre sí y su distancia es constante.

Por lo tanto, M_g no es compacto.